UNIVERSITE DE LIEGE
Faculté des Sciences

EXISTENCE D'UNE PRESCRIPTION D'ORDRE NATURELLE PROJECTIVEMENT INVARIANTE

Mémoire présenté par
Fabian RADOUX
pour l'obtention du grade de
licencié en sciences mathématiques
Année académique 2002-2003

Monsieur P.Lecomte m'a soutenu durant cette année dans la réalisation de ce mémoire. Je le remercie pour ses conseils et pour ses explications qui m'ont permis de mieux appréhender ce domaine des mathématiques qui m'était inconnu.

Je remercie également Sarah Hansoul pour sa disponibilité et pour les éclaircissements qu'elle m'a apportés.

Introduction

La quantification est un concept issu de la mécanique quantique : elle consiste à associer à une observable classique une observable quantique, les observables classiques, telles l'énergie ou l'impulsion, étant des polynômes, les observables quantiques étant quant à elles des opérateurs différentiels. Dans un tel contexte, si une observable classique se représente par un polynôme dépendant des variables q et p, où q et p représentent respectivement la position et l'impulsion, une quantification peut simplement consister en une substitution de la variable x à la variable q et en une substitution de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x}$ à la variable p. On voit donc qu'une quantification transforme un élément d'une algèbre associative commutative en un élément d'une algèbre associative non commutative, ce qui fait que l'ordre dans lequel on écrit les variables du polynôme avant d'opérer la substitution a son importance ; au départ, une prescription d'ordre est alors simplement une indication quant à la manière d'ordonner des variables dans un polynôme avant d'appliquer une quantification. Les observables classiques peuvent être assimilées à des polynômes sur le fibré cotangent T^*M d'une variété M, celui-ci pouvant représenter l'espace des phases de la mécanique hamiltonienne. Une des méthodes de quantification consiste alors en une bijection linéaire entre, d'une part, l'espace des polynômes sur T^*M, qu'on note $\mathcal{S}(M)$ et qui s'identifie à l'espace $\Gamma^\infty(STM)$ des champs de tenseurs symétriques contravariants de M et, d'autre part, l'espace des opérateurs différentiels agissant sur les densités de poids $\frac{1}{2}$, qu'on note $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}(M)$. On reconnaìt la définition des observables qui sont des opérateurs différentiels sur un espace de Hilbert, constitué par les densités de poids $\frac{1}{2}$ lorsque la variété M est compacte.

Dans ce travail, si on note $D(\Gamma^\infty(E), \Gamma^\infty(E'))$ l'espace des opérateurs différentiels agissant entre sections de deux fibrés vectoriels E et E' sur M, on appellera par extension prescription d'ordre une bijection linéaire entre $\Gamma^\infty(STM \otimes Hom(E, E'))$ et $D(\Gamma^\infty(E), \Gamma^\infty(E'))$ préservant le symbole principal.

Dans le cas où E est égal à E' et où E est le fibré des b-densités sur M, $\mathbf{F}_b(TM)(b \in \mathbb{R})$, si on note $\mathcal{D}_b(M)$ l'espace $D(\Gamma^\infty(\mathbf{F}_b(TM)), \Gamma^\infty(\mathbf{F}_b(TM)))$, on sait qu'il existe de nombreux isomorphismes d'espaces vectoriels entre $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}_b(M)$ mais aucun d'eux n'est naturel, c'est-à-dire ne commute avec l'action des difféomorphismes de

M. A fortiori, $\mathcal{D}_b(M)$ et $\mathcal{S}(M)$ ne sont pas isomorphes en tant que représentations de $Vect(M)$. Cependant, dans le cas particulier où M est l'espace euclidien $\mathbb{R}^m$, si $m > 1$, il a été démontré que $\mathcal{D}_b(\mathbb{R}^m)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ sont isomorphes en tant que représentations du plongement projectif sl_{m+1} de $sl(m+1,\mathbb{R})$. L'isomorphisme reliant ces deux espaces est unique si on lui impose de préserver le symbole principal ; on appelle alors cet isomorphisme le symbole sl_{m+1}-équivariant.

Le plongement projectif sl_{m+1} de $sl(m+1,\mathbb{R})$ a une contrepartie sur une variété M et une généralisation possible des résultats décrits ci-dessus dans $\mathbb{R}^m$ a été proposée dans [8]. Inspiré par les développements mentionnés précédemment, l'auteur y conjecture notamment l'existence d'une prescription d'ordre naturelle projectivement invariante, c'est-à-dire d'une bijection linéaire préservant le symbole principal entre $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}_b(M)$ qui dépend d'une connexion ∇ sur M mais seulement de la classe projective de celle-ci, la naturalité de cette prescription d'ordre, que l'on notera ici $\rho_L[\nabla]$, signifiant alors que l'application qui associe $\rho_L[\nabla]$ à ∇ est naturelle. Dans une recherche récente qui fait l'objet de ce mémoire, l'auteur de [2] démontre l'existence de $\rho_L[\nabla]$ et la détermine explicitement.

Notre travail est quant à lui constitué de six parties : la première, consacrée à la notion de prescription d'ordre naturelle, expose certaines notions fondamentales. La deuxième développe quelques propriétés des connexions projectivement équivalentes, c'est-à-dire des connexions possédant les mêmes géodésiques à un reparamétrage près, tandis que la troisième a trait au fibré des a-densités et au fibré principal des a-densités.

Les quatrième et cinquième chapitres développent quant à eux les outils utilisés par Martin Bordemann pour démontrer l'existence d'une prescription d'ordre naturelle projectivement invariante. Sa méthode est basée sur l'idée de relèvement : dans une première étape, on construit un relèvement projectivement invariant d'une connexion sans torsion au fibré principal des a-densités qui est naturel, c'est-à-dire qui commute avec l'action des difféomorphismes locaux. Dans une deuxième étape, on parvient à relever les champs de tenseurs symétriques au fibré principal des a-densités d'une manière qui est également naturelle et qui ne dépend que de la classe projective de la connexion dont dépend $\rho_L[\nabla]$.

La sixième partie du travail assemble alors les réalisations des deux chapitres précédents pour construire $\rho_L[\nabla]$ au moyen de la prescription d'ordre standard, $\rho_s[\nabla]$, qui est décrite au début du mémoire.

Table des matières

Chapitre 1

Prescriptions d'ordre naturelles

1.1 Prescriptions d'ordre

Rappelons d'abord la notion d'opérateur différentiel agissant entre sections de fibrés vectoriels sur une variété M : si E et E' sont deux fibrés vectoriels sur M, un *opérateur différentiel D d'ordre $k \in \mathbb{N}$*

$$D : \Gamma^\infty(E) \mapsto \Gamma^\infty(E')$$

est une application linéaire telle que, dans tout ouvert de carte et de trivialisations simultanées, la forme locale de $D(s)$ soit un opérateur différentiel d'ordre k, au sens de l'analyse, en celle de s. On notera $D(\Gamma^\infty(E), \Gamma^\infty(E'))$ l'espace de tous ces opérateurs différentiels.

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, quel que soit $p \in \mathbb{N}$, on peut identifier l'ensemble $Pol^p(E^*)$ des fonctions polynomiales homogènes de degré p de E^* dans $\mathbb{R}$ avec $\vee^p E$ grâce à l'isomorphisme $T \in \vee^p E \mapsto P_T \in Pol^p(E^*)$ défini par

$$P_T(x) = \tfrac{1}{p!} T(x, \ldots, x), \forall x \in E^*.$$

Cette correspondance identifie les champs de tenseurs symétriques contravariants d'ordre p sur M aux éléments de $C^\infty(M, Pol^p(T^*M))$. On désignera ce dernier ensemble par $S^p(M)$ et on posera

$$S(M) := \bigoplus_{i \geq 0} S^i(M).$$

Parallèlement, on notera $\Gamma^\infty(S^pTM)$ l'ensemble des champs de tenseurs symétriques contravariants d'ordre p de M et on posera

$$\Gamma^\infty(STM) := \bigoplus_{i\geq 0} \Gamma^\infty(S^iTM).$$

Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie, un opérateur différentiel d'ordre p

$$T : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, E) \mapsto \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, F)$$

s'écrit toujours

$$f \mapsto \sum_{|\alpha|\leq p} A_\alpha D^\alpha f$$

où les coefficients $A_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(E, F))$ sont univoquements déterminés. On associe à un tel opérateur l'élément P de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \vee^{\leq p}\mathbb{R}^m \otimes \mathcal{L}(E, F))$ défini par

$$P(\xi; f)_x = \sum_{|\alpha|\leq p} A_{\alpha,x}(f)\xi^\alpha$$

où f désigne un élément de E. On dira que P est le *polynôme symbolisant* D. Cette correspondance établit une bijection linéaire entre l'espace des opérateurs différentiels d'ordre inférieur ou égal à p et l'espace correspondant de polynòmes.

L'élément de $SM \otimes Hom(E, E')$ correspondant au polynòme associé à l'expression locale d'un opérateur différentiel entre sections des fibrés vectoriels E et E' sur M dépend en général des coordonnées locales ainsi que des trivialisations considérées. La partie homogène de plus haut degré de ce polynôme a néanmoins une signification intrinsèque.

Si D est un opérateur différentiel d'ordre k (mais non $k-1$) entre deux fibrés vectoriels (E, p_E, M) et $(E', p_{E'}, M)$ sur M de fibres types E_0 et E'_0, on appellera *symbole principal* de D l'élément de $STM \otimes Hom(E, E')$ défini au point x par

$$\sigma_D(\xi)_x(s) = \sum_{|\alpha|=k} \tau_{E'}^{-1}(x, A_{\alpha,x}(pr_2 \circ \tau_E(s)))\xi^\alpha, \forall \xi \in T_x^*M, \forall s \in E_x$$

si U est un domaine de carte et de trivialisations simultanées contenant x dans lequel D admet pour expression locale

$$\sum_{|\alpha|\leq k} A_\alpha D^\alpha$$

et si on appelle

$$\tau_E : p_E^{-1}(U) \mapsto U \times E_0$$

la trivialisation de E au-dessus de U et

$$\tau_{E'} : p_{E'}^{-1}(U) \mapsto U \times E'_0$$

la trivialisation de E' au-dessus de U.

On doit évidemment vérifier que le symbole principal ainsi défini est un objet intrinsèque.

Soient donc $x_0 \in M, s_0 \in E_{x_0}, \xi \in T_{x_0}^*M$, s une section de E égale à s_0 en x_0 et enfin $u \in C^\infty(M)$ tel que $du_{x_0} = \xi$. Remarquons qu'en coordonnées locales au voisinage de x_0,

$$\begin{aligned} D(e^{tu}s) &= \sum_{|\alpha|\leq k} A_\alpha(D^\alpha(e^{tu}s)) \\ &= \sum_{|\alpha|\leq k} A_\alpha(\sum_{\beta\leq\alpha} C_\alpha^\beta D^\beta(e^{tu})D^{\alpha-\beta}s). \end{aligned}$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} (D_t^k D(e^{tu}s)|_{t=0})_{x_0} &= k!(\sum_{|\alpha|=k} \tau_{E'}^{-1}(x_0, A_{\alpha,x_0}(pr_2 \circ \tau_E(s(x_0))))\xi^\alpha) \\ &= k!\sigma_D(\xi)_{x_0}(s_0), \end{aligned}$$

ce qui fournit une expression intrinsèque pour la valeur du symbole principal de D en x_0.

On est dorénavant en mesure de définir ce qu'est une prescription d'ordre. Une *prescription d'ordre* est une application dépendant d'une connexion ∇ sur M, que l'on note $\rho[\nabla]$, qui est telle que

$$\rho[\nabla] : \Gamma^\infty(STM \otimes Hom(E, E')) \mapsto D(\Gamma^\infty(E), \Gamma^\infty(E'))$$

est une bijection linéaire pour toute connexion ∇ et qui est telle que la composante non nulle de plus haut ordre de $\rho[\nabla]^{-1}(D)$ coïncide avec le symbole principal de D pour toute connexion ∇ et pour tout opérateur différentiel D.

1.2 La prescription d'ordre standard

Un exemple de prescription d'ordre est donné par la *prescription d'ordre standard.*

Pour pouvoir la définir, rappelons tout d'abord quelques notions. Si ∇^{TM} est une connexion sans torsion dans le fibré tangent, si ∇^E est une connexion dans E, alors ∇ est la connexion dans l'espace $\Gamma^\infty(ST^*M \otimes E)$ induite par ∇^{TM} et ∇^E. Dans ces conditions, la *différentielle symétrique* $\mathcal{D}$ de $\gamma \in \Gamma^\infty(S^lT^*M \otimes E)$ par rapport à ∇ est définie par :

$$(\mathcal{D}\gamma)(X_1, \ldots, X_{l+1}) := \frac{1}{(l+1)!} \sum_{\sigma \in S_{l+1}} (\nabla_{X_{\sigma(1)}}\gamma)(X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(l+1)}),$$

où $X_1, \ldots, X_{l+1} \in \Gamma^\infty(TM)$.

D'autre part, si $X \in Vect(M)$ et si $\gamma \in \Gamma^\infty(S^lT^*M)$ avec $l > 0$, alors $i(X)\gamma$ est l'élément de $\Gamma^\infty(S^{l-1}T^*M)$ donné par

$$(i(X)\gamma)(X_1, \ldots, X_{l-1}) := \gamma(X, X_1, \ldots, X_{l-1}),$$

où $X_1, \ldots, X_{l-1} \in \Gamma^\infty(TM)$. Si $l = 0$, alors on pose $i(X)\gamma := 0$.

On peut prolonger cette définition. Si $A \in \Gamma^\infty(S^kTM)$ et si

$$A = X_1 \vee \ldots \vee X_k$$

avec $X_1, \ldots X_k \in Vect(M)$, alors $i(A)\gamma$ est donné par

$$i(A)\gamma := i(X_1) \ldots i(X_k)\gamma.$$

On peut bien évidemment étendre ce produit intérieur par linéarité et en faire une application de $\Gamma^\infty(STM) \times \Gamma^\infty(ST^*M)$ dans $\Gamma^\infty(ST^*M)$.

Enfin, si $A \otimes \phi \in \Gamma^\infty(STM \otimes Hom(E, E'))$ et si $\gamma \otimes \psi \in \Gamma^\infty(ST^*M \otimes E)$, alors

$$i(A \otimes \phi)(\gamma \otimes \psi) := i(A)(\gamma) \otimes \phi(\psi).$$

Dans ces conditions, la prescription d'ordre standard par rapport à ∇, qu'on note $\rho_s[\nabla]$, est l'application linéaire

$$\rho_s[\nabla] : \Gamma^\infty(STM \otimes Hom(E, E')) \mapsto D(\Gamma^\infty(E), \Gamma^\infty(E'))$$

définie par

$$(\rho_s[\nabla](A))(\psi) := i(A)(\mathcal{D}^k\psi)$$

où $A \in \Gamma^\infty(S^kTM \otimes Hom(E, E'))$ et $\psi \in \Gamma^\infty(E)$.

Soit une carte $(U, (x^1, \dots, x^m))$ de M qui est aussi un domaine de trivialisations simultanées pour E et E'. On notera $e_1, \dots, e_K$ une base locale des sections de E et $e'_1, \dots, e'_{K'}$ une base locale des sections de E'. Remarquons tout d'abord que si $A \in \Gamma^\infty(S^kTM \otimes Hom(E, E'))$, A peut s'écrire sous la forme d'un polynôme sur T^*M:

$$A(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha \xi^\alpha,$$

avec $A_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{L}(E, E'))$ pour tout α et $\xi \in T^*M$ ou encore sous la forme d'un tenseur k-contravariant symétrique:

$$A(\xi^1, \dots, \xi^k) = \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha(\partial_1^{\vee\alpha_1} \vee \dots \vee \partial_m^{\vee\alpha_m})(\xi^1, \dots, \xi^k),$$

où $\xi^1, \dots, \xi^k \in T^*M$ et où $\partial_1, \dots, \partial_m$ est la base canonique de l'espace tangent associée à $(U, (x^1, \dots, x^m))$. Si d'autre part, $\gamma \in \Gamma^\infty(S^kT^*M \otimes E)$, alors $i(A)\gamma$ est l'élément de $\Gamma^\infty(E')$ égal à

$$\sum_{|\alpha|=k} A_\alpha(\gamma(\underbrace{\partial_1, \dots, \partial_1}, \dots, \underbrace{\partial_m, \dots, \partial_m})),$$

où ∂_j apparaît α_j fois pour $j = 1, \dots, m$. Calculons à présent les différentielles symétriques itérées $\mathcal{D}^k\psi$ de $\psi \in \Gamma^\infty(E)$. Si $k = 0$, $A = A_0$ avec $A_0 \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{L}(E, E'))$ et $(\rho_s[\nabla](A))(\psi)$ est égal à $A_0(\psi)$. L'application $\rho_s[\nabla](A)$ est alors un opérateur d'ordre 0. De plus, les opérateurs d'ordre 0 sont en bijection via $\rho_s[\nabla]$ avec les éléments de $\Gamma^\infty(S^0TM \otimes Hom(E, E'))$ et $\rho_s[\nabla]^{-1}(D)$ coïncide avec le symbole principal de D défini précédemment. Si $k = 1$, on a

$$(\mathcal{D}\psi)(X) = \nabla^E_X \psi,$$

où $X \in Vect(M)$. Dès lors, si $A \in \Gamma^\infty(S^1TM \otimes Hom(E, E'))$, $i(A)(\mathcal{D}\psi)$ est égal à:

$$\sum_{i=1}^{m} A_i(\nabla^E_{\partial_i}\psi).$$

En coordonnées locales, on a

$$\psi = \sum_{j=1}^{K} \psi^j e_j,$$

donc

$$(\rho_s[\nabla](A))(\psi) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{K}(\partial_i\psi^j)A_i(e_j) + \psi^j A_i(\nabla^E_{\partial_i}e_j).$$

On voit donc bien que $\rho_s[\nabla](A)$ est un opérateur différentiel d'ordre 1. De plus, on constate aisément que les opérateurs d'ordre exactement égal à 1 sont en bijection via $\rho_s[\nabla]$ avec

$$\oplus_{k=0}^{1} S^kTM \otimes Hom(E, E').$$

En outre, on s'aperçoit que la composante de plus haut ordre de $\rho_s[\nabla]^{-1}(D)$ est indépendante de la connexion choisie et coïncide avec le symbole principal de D défini auparavant.

Si $k = 2$, on a

$$(D^2\psi)(X, Y) = \frac{1}{2}(\nabla^E_X\nabla^E_Y\psi + \nabla^E_Y\nabla^E_X\psi - \nabla^E_{\nabla_X Y}\psi - \nabla^E_{\nabla_Y X}\psi),$$

donc $i(A)(\mathcal{D}^2\psi)$ est égal à

$$\frac{1}{2}(\sum_{|\alpha|=2} A_\alpha(\nabla^E_{\partial_j}\nabla^E_{\partial_k}\psi + \nabla^E_{\partial_k}\nabla^E_{\partial_j}\psi - 2\sum_i \Gamma^i_{jk}\nabla^E_{\partial_i}\psi)),$$

où j et k correspondent aux composantes non nulles de α. En développant cette expression en coordonnées locales, on voit que $\rho_s[\nabla](A)$ est un opérateur différentiel d'ordre 2. De plus, on constate aisément que les opérateurs d'ordre exactement égal à 2 sont en bijection via $\rho_s[\nabla]$ avec

$$\oplus_{k=0}^{2} S^kTM \otimes Hom(E, E').$$

En outre, on s'aperçoit de nouveau que la composante de plus haut ordre de $\rho_s[\nabla]^{-1}(D)$ est indépendante de la connexion choisie et coïncide avec le symbole principal de D défini auparavant. On continue ainsi le raisonnement de proche en proche pour montrer que $\rho_s[\nabla]$ est bien une bijection linéaire entre $STM \otimes Hom(E, E')$ et $D(\Gamma^\infty(E), \Gamma^\infty(E'))$ préservant le symbole principal.

1.3 Prescriptions d'ordre naturelles

Afin de pouvoir définir ce qu'est une prescription d'ordre naturelle, introduisons au préalable quelques notions.

Soit $\Phi : M \mapsto N$ une immersion entre deux variétés de dimension m. Si X est un champ de vecteurs sur N, l'image réciproque de X par l'application Φ est le champ de vecteurs Φ^*X défini sur M de la manière suivante:

$$(\Phi^*X)_x := (\Phi_{*x})^{-1}X_{\Phi(x)}, \forall x \in M.$$

Dans ces conditions, si ∇ est une connexion sans torsion dans le fibré tangent de N, l'image réciproque de ∇ est la connexion $\Phi^*\nabla$ dans le fibré tangent de M définie de la manière suivante:

$$(\Phi^*\nabla)_X Y := \Phi^*(\nabla_{\Phi_* X}\Phi_* Y), \forall X, Y \in Vect(M).$$

Si F est un foncteur de fibrés vectoriels, si $\Phi : M \mapsto N$ est une immersion entre deux variétés de dimension m et si φ est une section de FN, alors l'image réciproque de φ, qu'on note $\Phi^*\varphi$, est la section de FM définie par:

$$(\Phi^*\varphi)(x) := (F_x\Phi)^{-1}\varphi(\Phi(x)) \quad \forall x \in M,$$

où $F_x\Phi$ est la restriction de $F\Phi$ à F_xM, la fibre de FM en x.

Inversement, si φ est une section de FM, alors on définit la section $\Phi_*\varphi$ de FN par:

$$\Phi_*\varphi(x) := (F_{\Phi^{-1}(x)}\Phi)(\varphi(\Phi^{-1}(x))),$$

où $x \in N$.

Si ∇^{FN} est une connexion sur FN, alors l'image réciproque de ∇^{FN}, que l'on note $\Phi^*\nabla^{FN}$, est la connexion sur FM définie de la manière suivante:

$$(\Phi^*\nabla^{FN})_X\varphi := \Phi^*(\nabla^{FN}_{\Phi_* X}\Phi_*\varphi),$$

où $X \in Vect(M)$, $\varphi \in \Gamma^\infty(FM)$.

Si $f \in \Gamma^\infty(STN \otimes FN)$ s'écrit

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_k)_x = \sum_{|\alpha| \leq k} s(x)\partial_1^{\vee\alpha_1} \vee \ldots \vee \partial_m^{\vee\alpha_m}(\xi_1, \ldots, \xi_k),$$

où $k \in \mathbb{N}$, $x \in N$, $\xi_1, \ldots, \xi_k \in T_x^*N$ et où $s \in \Gamma^\infty(FN)$, alors l'image réciproque de f, $\Phi^* f$, est l'élément de $\Gamma^\infty(STM \otimes FM)$ défini par

$$\Phi^* f(\xi_1, \ldots, \xi_k)_x = \sum_{|\alpha| \leq k} (\Phi^* s)_x (\Phi^* \partial_1)^{\vee \alpha_1} \vee \ldots \vee (\Phi^* \partial_m)^{\vee \alpha_m} (\xi_1, \ldots, \xi_k),$$

où $x \in M$, $\xi_1, \ldots, \xi_k \in T_x^*M$.

Enfin, soient F' un autre foncteur de fibrés vectoriels et $f \in \Gamma^\infty(STN \otimes Hom(FN, F'N))$ s'écrivant

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_k)_x(s) = \sum_{|\alpha| \leq k} A_{\alpha,x}(s) \partial_1^{\vee \alpha_1} \vee \ldots \vee \partial_m^{\vee \alpha_m} (\xi_1, \ldots, \xi_k),$$

où $k \in \mathbb{N}$, $x \in N$, $\xi_1, \ldots, \xi_k \in T_x^*N$, $s \in F_x N$ et $A_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(N, \mathcal{L}(FN, F'N))$ $\forall \alpha$.

L'image réciproque de f, qu'on note $\Phi^* f$, est alors l'élément de $\Gamma^\infty(STM \otimes Hom(FM, F'M))$ défini par

$$\Phi^* f(\xi_1, \ldots, \xi_k)_x(s) = \sum_{|\alpha| \leq k} (F_x' \Phi)^{-1} A_{\alpha,x}((F_x \Phi) s) (\Phi^* \partial_1)^{\vee \alpha_1} \vee \ldots \vee (\Phi^* \partial_m)^{\vee \alpha_m} (\xi_1, \ldots, \xi_k),$$

où $x \in M$, $\xi_1, \ldots, \xi_k \in T_x^*M$, $s \in F_x M$.

Dans ces conditions, une prescription d'ordre naturelle $\rho[\nabla]$ est une prescription d'ordre qui "*commute avec les difféomorphismes*", i.e. qui se transforme de la manière suivante sous l'action de difféomorphismes locaux : si $\Phi : M \mapsto N$ est une immersion entre deux variétés M et N de dimension m (par conséquent, Φ est un difféomorphisme local), si F et F' sont deux foncteurs de fibrés, alors $\rho[\nabla]$ est naturel si pour toute connexion ∇ dans $STN \otimes Hom(FN, FN')$, pour tous $f \in \Gamma^\infty(STN \otimes Hom(FN, F'N))$, $\varphi \in \Gamma^\infty(FN)$, on a :

$$\Phi^*((\rho_N[\nabla](f))(\varphi)) = (\rho_M[\Phi^* \nabla](\Phi^* f))(\Phi^* \varphi).$$

On vérifie aisément que la prescription d'ordre standard est bien une prescription d'ordre naturelle.

Chapitre 2

Connexions projectivement équivalentes

2.1 Définitions

Si M est une variété de dimension m, deux connexions ∇ et ∇' dans le fibré tangent de M sont dites *projectivement équivalentes* (ce que l'on note $\nabla' \sim \nabla$) lorsqu'il existe une 1-forme $\alpha \in \Gamma^\infty(T^*M)$ telle que

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X)Y + \alpha(Y)X$$

quels que soient les champs de vecteurs $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$.

Il est évident que $\sim$ est une relation d'équivalence, et on appelle la classe d'équivalence de ∇ la *classe projective de* ∇. Une classe d'équivalence de connexions sans torsion est également appelée une *structure projective* sur M.

2.2 Interprétation géométrique

L'interprétation géométrique des connexions projectivement équivalentes est donnée par le théorème suivant :

Proposition 2.1 Soient ∇ et ∇' deux connexions sans torsion sur M. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents :

1. Les connexions ∇ et ∇' sont projectivement équivalentes.
2. Les connexions ∇ et ∇' ont les mêmes géodésiques "à reparamétrage près" au sens suivant : si $x \in M$ et si $v \in T_xM$, alors il existe $\varepsilon, \varepsilon' > 0$, $c, c' > 0$ et un

difféomorphisme $g : I :=] - \varepsilon, c[\mapsto I' :=] - \varepsilon', c'[$ tel que $g(0) = 0$, $(\frac{dg}{dt})(0) = 1$ et tel que la géodésique $\gamma : I \mapsto M$ par rapport à ∇ émanant de x à vitesse initiale v est donnée par $\gamma' \circ g$ où γ' est la géodésique $I' \mapsto M$ par rapport à ∇' émanant de x à vitesse initiale v.

Démonstration. Prouvons d'abord que l'énoncé 1 implique l'énoncé 2. Soit S le champ de tenseurs défini par

$$S(X, Y) := \nabla'_X Y - \nabla_X Y, \forall X, Y \in Vect(M).$$

Puisque ∇ et ∇' sont de torsion nulle, le champ S est symétrique. En effet,

$$S(X, Y) - S(Y, X) = (\nabla'_X Y - \nabla'_Y X - [X, Y]) - (\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) = 0.$$

Soit γ' la géodésique correspondant à ∇' émanant de x à vitesse initiale v. On peut toujours faire en sorte que son intervalle de définition contienne 0 et que $\gamma'(0) = x$. L'objectif est de trouver des intervalles ouverts I et I' et une application g qui satisfont aux conditions de l'énoncé 2.

Passons en coordonnées locales au voisinage de x. Si les $\Gamma^{k'}_{ij}$ sont les symboles de Christoffel correspondants à ∇', l'équation de γ' est :

$$\frac{d^2\gamma'}{dt^2} + (\Gamma^{k'}_{ij} \circ \gamma')\frac{d\gamma'^i}{dt}\frac{d\gamma'^j}{dt}\partial_k = 0.$$

D'autre part, si les Γ^k_{ij} sont les symboles de Christoffel correspondants à ∇, on obtient que

$$\frac{d^2(\gamma' \circ g)}{dt^2} + (\Gamma^k_{ij} \circ (\gamma' \circ g))\frac{d(\gamma' \circ g)^i}{dt}\frac{d(\gamma' \circ g)^j}{dt}\partial_k \qquad (1)$$

est égal à

$$(\frac{dg}{dt})^2(\frac{d^2\gamma'}{dt^2} + (\Gamma^{k'}_{ij} \circ \gamma')\frac{d\gamma'^i}{dt}\frac{d\gamma'^j}{dt}\partial_k) \circ g + (\frac{d\gamma'}{dt} \circ g)(\frac{d^2 g}{dt^2}) - (\frac{dg}{dt})^2 S(\frac{d\gamma'}{dt} \circ g, \frac{d\gamma'}{dt} \circ g), \qquad (2)$$

donc à

$$(\frac{dg}{dt})^2(\frac{d^2\gamma'}{dt^2} + (\Gamma^{k'}_{ij} \circ \gamma')\frac{d\gamma'^i}{dt}\frac{d\gamma'^j}{dt}\partial_k) \circ g + (\frac{d\gamma'}{dt} \circ g)(\frac{d^2 g}{dt^2} - 2(\frac{dg}{dt})^2 \alpha(\frac{d\gamma'}{dt} \circ g)).$$

Si l'énoncé 1 est satisfait, comme γ' est une géodésique de ∇', il suffit pour que $\gamma' \circ g$ soit une géodésique de ∇ que (1) soit nul, donc que l'équation différentielle

$$\frac{d^2 g}{dt^2} = 2(\frac{dg}{dt})^2 \alpha(\frac{d\gamma'}{dt} \circ g)$$

soit vérifiée. On peut alors conclure, en sachant qu'il existe une fonction g définie au voisinage de 0 solution de cette équation et vérifiant les conditions initiales $g(0) = 0$ et $\dot{g}(0) = 1$.

Prouvons maintenant que l'énoncé 2 implique l'énoncé 1. Si l'énoncé 2 est vrai, alors les courbes γ et γ' sont des géodésiques et l'égalité (2) évaluée en $t = 0$ indique que $S_x(v, v)$ est proportionnel à v pour tout $v \in T_xM$ puisqu'on a alors

$$\tfrac{d^2g}{dt^2}v - S_x(v,v) = 0 \text{ pour tout } v \in T_xM.$$

On en déduit que

$$S_x(v,v) = \alpha_x(v)v \quad \forall v \in T_xM,$$

où α_x est une application linéaire sur T_xM. En effet,

$$S_x(cv,cv) = c^2 S_x(v,v) = c^2\alpha_x(v)v = \alpha_x(cv)cv$$

implique

$$\alpha_x(cv) = c\,\alpha_x(v) \quad \forall v \in T_xM, v \neq 0, \forall c \in \mathbb{R}, c \neq 0,$$

donc

$$\alpha_x(cv) = c\,\alpha_x(v) \quad \forall v \in T_xM, \forall c \in \mathbb{R}$$

par continuité de α_x. D'autre part,

$$S_x(v+v', v+v') = \alpha_x(v+v')(v+v') \quad \forall v, v' \in T_xM,$$

$$S_x(v-v', v-v') = \alpha_x(v-v')(v-v') \quad \forall v, v' \in T_xM,$$

donc

$$S_x(v,v') = \frac{1}{4}(\alpha_x(v+v')(v+v') - \alpha_x(v-v')(v-v')) \quad \forall v, v' \in T_xM.$$

Il vient alors

$$S_x(v+v', v+v') = \alpha_x(v)v + \alpha_x(v')v' + \frac{1}{2}(\alpha_x(v+v')(v+v') - \alpha_x(v-v')(v-v'))$$

donc

$$(\alpha_x(v) - \frac{\alpha_x(v-v')}{2})v + (\alpha_x(v') + \frac{\alpha_x(v-v')}{2})v' = \frac{\alpha_x(v+v')}{2}v + \frac{\alpha_x(v+v')}{2}v' \quad \forall v, v' \in T_xM.$$

Si v et v' sont linéairement dépendants, la relation

$$\alpha_x(v+v') = \alpha_x(v) + \alpha_x(v')$$

est vérifiée grâce à ce que l'on a fait auparavant tandis que si v et v' sont linéairement indépendants, on obtient

$$\alpha_x(v) - \frac{\alpha_x(v-v')}{2} = \alpha_x(v') + \frac{\alpha_x(v-v')}{2},$$

donc

$$\alpha_x(v-v') = \alpha_x(v) - \alpha_x(v'),$$

donc

$$\alpha_x(v+v') = \alpha_x(v) + \alpha_x(v').$$

De là, il vient :

$$S_x(u+v,u+v) - S_x(u,u) - S_x(v,v) = 2S_x(u,v) \quad \forall u,v \in T_xM,$$

donc

$$\begin{aligned} S_x(u,v) &= \frac{1}{2}(\alpha_x(u+v)(u+v) - \alpha_x(u)(u) - \alpha_x(v)(v)) \\ &= (\frac{1}{2}\alpha_x)(u)(v) + (\frac{1}{2}\alpha_x)(v)(u), \end{aligned}$$

pour tous $u, v \in T_xM$. Les connexions ∇' et ∇ sont donc projectivement équivalentes via la 1-forme dont la restriction à T_xM est égale à $\frac{1}{2}\alpha_x$ pour tout $x \in M$. ∎

2.3 Le tenseur de courbure

Si ∇ est une connexion sans torsion dans le fibré tangent, rappelons les définitions du tenseur de courbure R, de la trace de la courbure trR et du tenseur de Ricci Ric :

$$\begin{gathered} R(X,Y)Z := \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\ (trR)(X,Y) := trace(Z \mapsto R(X,Y)Z) \\ Ric(Z,Y) := trace(X \mapsto R(X,Y)Z), \end{gathered}$$

où $X, Y, Z \in Vect(M)$.

Pour tout $X, Y, Z \in Vect(M)$, on a la première identité de Bianchi :

$$\oint_{XYZ} R(X,Y)Z = 0.$$

En effet,

$$\begin{aligned}\oint_{XYZ} R(X,Y)Z &= \oint_{XYZ} (\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[Y,Z]}X)\\ &= \oint_{XYZ} (\nabla_X[Y,Z] - \nabla_{[Y,Z]}X)\\ &= \oint_{XYZ} [X,[Y,Z]] = 0\end{aligned}$$

en utilisant le fait que la connexion ∇ est de torsion nulle et l'identité de Jacobi. On déduit de la première identité de Bianchi l'égalité suivante :

$$(trR)(X,Y) = Ric(X,Y) - Ric(Y,X).$$

En effet,

$$\begin{aligned}0 &= tr(Z \mapsto R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y)\\ &= tr(Z \mapsto R(X,Y)Z - R(Z,Y)X + R(Z,X)Y),\end{aligned}$$

donc

$$tr(Z \mapsto R(X,Y)Z) = tr(Z \mapsto R(Z,Y)X) - tr(Z \mapsto R(Z,X)Y).$$

Dans la proposition suivante, on détermine les relations existant entre un des tenseurs définis ci-dessus à partir d'une connexion sans torsion ∇ et le tenseur correspondant défini à partir d'une connexion sans torsion ∇' projectivement équivalente à ∇.

Proposition 2.2 Soit ∇ une connexion sans torsion dans le fibré tangent de M, variété de dimension m, α une 1-forme et ∇' une connexion sans torsion dans le fibré tangent de M qui est projectivement équivalente à ∇ via α. On a les formules suivantes qui relient les tenseurs de courbure R de ∇ et R' de ∇', les traces trR et trR' et les tenseurs de Ricci Ric et Ric' :

$$\begin{aligned}R'(X,Y)Z = R(X,Y)Z &+ \alpha(Y)\alpha(Z)X - \alpha(X)\alpha(Z)Y\\ &+((\nabla_X\alpha)(Y) - (\nabla_Y\alpha)(X))Z + (\nabla_X\alpha)(Z)Y - (\nabla_Y\alpha)(Z)X,\end{aligned}$$

$$trR'(X,Y) = trR(X,Y) + (m+1)((\nabla_X\alpha)(Y) - (\nabla_Y\alpha)(X)),$$

$$Ric'(X,Y) = Ric(X,Y) + (m-1)\alpha(X)\alpha(Y) + (\nabla_X\alpha)(Y) - m(\nabla_Y\alpha)(X),$$

où $X, Y, Z \in Vect(M)$.

Démonstration. En ce qui concerne la première formule, on a :

$$\begin{aligned}
R'(X,Y)Z &= \nabla'_X\nabla'_Y Z - \nabla'_Y\nabla'_X Z - \nabla'_{[X,Y]}Z \\
&= \nabla_X(\nabla'_Y Z) + \alpha(X)(\nabla'_Y Z) + \alpha(\nabla'_Y Z)X \\
&\quad -(\nabla_Y(\nabla'_X Z) + \alpha(Y)(\nabla'_X Z) + \alpha(\nabla'_X Z)Y) \\
&\quad -(\nabla_{[X,Y]}Z + \alpha([X,Y])Z + \alpha(Z)[X,Y]) \\
&= \nabla_X(\nabla_Y Z + \alpha(Y)Z + \alpha(Z)Y) \\
&\quad +\alpha(X)(\nabla_Y Z + \alpha(Y)Z + \alpha(Z)Y) \\
&\quad +\alpha(\nabla_Y Z + \alpha(Y)Z + \alpha(Z)Y)X \\
&\quad -\nabla_Y(\nabla_X Z + \alpha(X)Z + \alpha(Z)X) \\
&\quad -\alpha(Y)(\nabla_X Z + \alpha(X)Z + \alpha(Z)X) \\
&\quad -\alpha(\nabla_X Z + \alpha(X)Z + \alpha(Z)X)Y \\
&\quad -\nabla_{[X,Y]}Z - \alpha([X,Y])Z - \alpha(Z)[X,Y].
\end{aligned}$$

Dans cette somme, on peut facilement reconstituer

$$R(X,Y)Z + \alpha(Y)\alpha(Z)X - \alpha(X)\alpha(Z)Y$$

et des termes se simplifient. La somme des termes restants est alors l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
&\nabla_X(\alpha(Y))Z + \nabla_X(\alpha(Z)Y) + \alpha(X)(\nabla_Y Z) + \alpha(\nabla_Y Z)X - \nabla_Y(\alpha(X)Z) \\
&- \nabla_Y(\alpha(Z)X) - \alpha(\nabla_X Z)Y - \alpha([X,Y])Z - \alpha(Z)[X,Y],
\end{aligned}$$

ou encore, après développements,

$$\begin{aligned}
&\nabla_X(\alpha(Y))Z + (\nabla_X\alpha(Z))Y + \alpha(Z)(\nabla_X Y) + \alpha(X)(\nabla_Y Z) + \alpha(\nabla_Y Z)X \\
&- (\nabla_Y\alpha(X))Z - \alpha(X)\nabla_Y Z - \nabla_Y\alpha(Z)X - \alpha(Z)\nabla_Y X - \alpha(\nabla_X Z)Y \\
&- \alpha([X,Y])Z - \alpha(Z)[X,Y].
\end{aligned}$$

Dans cette somme, des termes se simplifient en utilisant notamment le fait que la connexion ∇ a une torsion nulle, i.e. que

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0 \ \forall X,Y \in Vect(M).$$

Parmi les termes restants, on reconstitue facilement

$$(\nabla_X\alpha)(Z)Y - (\nabla_Y\alpha)(Z)X + (\nabla_X\alpha(Y) - \nabla_Y\alpha(X) - \alpha([X,Y]))Z.$$

Pour remarquer qu'on obtient bien le membre de droite annoncé, il suffit de noter que

$$-\alpha([X,Y]) = \alpha(\nabla_Y X) - \alpha(\nabla_X Y)$$

puisque ∇ est de torsion nulle.

Pour montrer la deuxième formule, on note d'abord que

$$trace(Z \mapsto ((\nabla_X\alpha)(Y) - (\nabla_Y\alpha)(X))Z)$$

est évidemment égal à

$$m((\nabla_X\alpha)(Y) - (\nabla_Y\alpha)(X)).$$

Dans un deuxième temps, on remarque que

$$trace(Z \mapsto \alpha(Y)\alpha(Z)X - \alpha(X)\alpha(Z)Y)$$

est nul car égal à

$$\alpha(Y)\sum_j \alpha(\partial_j)X^j - \alpha(X)\sum_j \alpha(\partial_j)Y^j,$$

si $(\partial_1, \ldots, \partial_m)$ représente la base canonique de l'espace tangent, donc à

$$\alpha(Y)\alpha(X) - \alpha(X)\alpha(Y).$$

Enfin, on se rend compte que

$$trace(Z \mapsto (\nabla_X\alpha)(Z)Y - (\nabla_Y\alpha)(Z)X)$$

est égal à

$$\sum_j(\nabla_X\alpha)(\partial_j)Y^j - \sum_j(\nabla_Y\alpha)(\partial_j)X^j,$$

donc à

$$(\nabla_X\alpha)(Y) - (\nabla_Y\alpha)(X).$$

En ce qui concerne la troisième formule, comme on a

$$\begin{aligned}R'(Z,Y)X &= R(Z,Y)X + \alpha(Y)\alpha(X)Z - \alpha(Z)\alpha(X)Y \\ &\quad +((\nabla_Z\alpha)(Y) - (\nabla_Y\alpha)(Z))X + (\nabla_Z\alpha)(X)Y - (\nabla_Y\alpha)(X)Z,\end{aligned}$$

il suffit de noter que

$$trace(Z \mapsto \alpha(Y)\alpha(X)Z - (\nabla_Y \alpha)(X)Z)$$

est évidemment égal à

$$m(\alpha(X)\alpha(Y) - (\nabla_Y \alpha)(X)),$$

que

$$trace(Z \mapsto -\alpha(Z)\alpha(X)Y - (\nabla_Y \alpha)(Z)X)$$

est égal à

$$\sum_j -\alpha(\partial_j)\alpha(X)Y^j - (\nabla_Y \alpha)(\partial_j)X^j,$$

donc à

$$-\alpha(X)\alpha(Y) - (\nabla_Y \alpha)(X)$$

et enfin que

$$trace(Z \mapsto (\nabla_Z \alpha)(Y)X + (\nabla_Z \alpha)(X)Y)$$

est égal à

$$\sum_j (\nabla_{\partial_j} \alpha)(Y)X^j + (\nabla_{\partial_j} \alpha)(X)Y^j,$$

donc à

$$(\nabla_X \alpha)(Y) + (\nabla_Y \alpha)(X). \quad \blacksquare$$

2.4 Images réciproques

La proposition suivante montre que les images réciproques de connexions projectivement équivalentes sont projectivement équivalentes :

Proposition 2.3 Soit $\Phi : M \mapsto N$ une immersion entre deux variétés de dimension m et soient ∇ et ∇' deux connexions sans torsion dans le fibré tangent de N.
Si ∇ et ∇' sont projectivement équivalentes via une 1-forme $\alpha \in \Gamma^\infty(T^*N)$, alors les images réciproques de ces connexions, notées respectivement $\Phi^*\nabla$ et $\Phi^*\nabla'$, sont projectivement équivalentes via l'image réciproque de α, $\Phi^*\alpha$.

Démonstration. C'est immédiat car on a successivement, pour tous $X, Y \in Vect(M)$:

$$\begin{aligned}
(\Phi^*\nabla')_X Y &= \Phi^*(\nabla'_{\Phi_* X}\Phi_* Y) \\
&= \Phi^*(\nabla_{\Phi_* X}\Phi_* Y + \alpha(\Phi_* X)\Phi_* Y + \alpha(\Phi_* Y)\Phi_* X) \\
&= \Phi^*(\nabla_{\Phi_* X}\Phi_* Y) + \Phi^*(\alpha(\Phi_* X)\Phi_* Y) + \Phi^*(\alpha(\Phi_* Y)\Phi_* X) \\
&= (\Phi^*\nabla)_X Y + \Phi^*(\alpha(\Phi_* X))Y + \Phi^*(\alpha(\Phi_* Y))X \\
&= (\Phi^*\nabla)_X Y + (\Phi^*\alpha)(X)Y + (\Phi^*\alpha)(Y)X. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Le fibré des densités

3.1 L'espace $\mathbf{F}_a(V)$

Une *a-densité* sur un espace vectoriel V de dimension finie m est une application $\varphi : \wedge^m V\backslash\{0\} \mapsto \mathbb{R}$ qui est telle que

$$\varphi(u\Lambda) = |u|^a \varphi(\Lambda)$$

pour tout $u \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et tout $\Lambda \in \wedge^m V\backslash\{0\}$. On note $\mathbf{F}_a(V)$ l'espace de toutes ces applications. Lorsque $a = 0$, on peut l'identifier à $\mathbb{R}$ car c'est alors l'ensemble des applications qui à tout $\varphi \in \wedge^m V\backslash\{0\}$ associe un même nombre réel puisque $\wedge^m V$ est de dimension 1.

Proposition 3.1 L'espace $\mathbf{F}_a(V)$ est de dimension 1. Si $\omega \in \wedge^m V^*$ n'est pas nul, alors

$$|\omega|^a : v_1 \wedge \ldots \wedge v_m \mapsto |\omega(v_1, \ldots, v_m)|^a$$

en est une base.

Démonstration. Le fait que $|\omega|^a$ soit une a-densité non nulle sur V est évident. D'autre part, $\wedge^m V$ étant de dimension 1, si $\Lambda_0 \in \wedge^m V$ est non nul, Λ_0 est une base de $\wedge^m V$. Alors, si φ est une densité quelconque sur V et si ψ est une densité non nulle sur V, il est clair que

$$\varphi = \tfrac{\varphi(\Lambda_0)}{\psi(\Lambda_0)}\psi,$$

ce qui achève la démonstration. ∎

Les densités ont un signe, ce qui signifie que chaque densité φ non nulle prend ses valeurs soit dans $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ soit dans $\mathbb{R}^- = -\mathbb{R}^+$. Cela résulte immédiatement de la définition d'une densité. Dans le premier cas, on dira qu'elle est *positive* et dans le second, qu'elle est *négative.*

3.2 Le fibré des densités

Si M est une variété de dimension m, on pose

$$\mathbf{F}_a(TM) := \bigcup_{x\in M} \mathbf{F}_a(T_xM)$$

et on note p l'application qui à $\varphi \in \mathbf{F}_a(T_xM)$ associe x.

Proposition 3.2 L'ensemble $\mathbf{F}_a(TM)$ a une structure naturelle de variété qui fait de $(\mathbf{F}_a(TM), p, M)$ un fibré vectoriel de rang 1 qu'on appelle le *fibré des a-densités de M.* Si $(U,(x^1,\ldots,x^m))$ est une carte de M alors,

$$\varphi = f|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|^a \in \mathbf{F}_a(T_xM) \mapsto (x,f) \in U \times \mathbb{R}$$

en est une trivialisation au-dessus de U. Si a=0, $\mathbf{F}_a(TM)$ est difféomorphe au fibré trivial $M \times \mathbb{R}$.

Démonstration. Si $(U, \psi = (x^1,\ldots,x^m))$ est une carte de M, tout $\varphi \in \mathbf{F}_a(T_xM)$ s'écrit $f|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|^a$ pour un $f \in \mathbb{R}$. Ceci nous amène à définir, pour toute carte (U,ψ) de M, la carte $(\overline{U},\overline{\psi})$ de $\mathbf{F}_a(TM)$ où

$$\overline{U} = \mathbf{F}_a(TU)$$

et

$$\overline{\psi} : \mathbf{F}_a(TU) \mapsto \mathbb{R}^{m+1} : \varphi \in \mathbf{F}_a(T_xU) \mapsto (\psi(x), f).$$

Il est évident que les $\overline{U}$ recouvrent $\mathbf{F}_a(TM)$. En outre, si $(V, \theta = (y^1,\ldots,y^m))$ est une autre carte de M, il vient

$$\begin{aligned}
\varphi &= f|\sum_{i_1,\ldots,i_m} D_{y^{i_1}}x^1 \ldots D_{y^{i_m}}x^m dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_m}|^a \\
&= f|\sum_{\nu} sign(\nu) D_{y^{\nu_1}}x^1 \ldots D_{y^{\nu_m}}x^m dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^m|^a \\
&= f|\det(\psi \circ \theta^{-1})_*|^a |dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^m|^a.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\overline{\theta} \circ \overline{\psi}^{-1}$ est l'application

$$(\psi(x), f) \mapsto (\theta(x), f|\det(\psi \circ \theta^{-1})_*|^a),$$

ce qui montre que les cartes $(\overline{U}, \overline{\psi})$ et $(\overline{V}, \overline{\theta})$ sont compatibles.

L'application p a pour expression locale $(\psi(x), f) \mapsto \psi(x)$ et est donc de classe C^∞. De plus, tout point x de la variété appartient à un domaine de carte U ; comme $p^{-1}(U) = \overline{U}$, l'application

$$\tau : p^{-1}(U) \mapsto U \times \mathbb{R} : \varphi \in \mathbf{F}_a(T_xU) \mapsto (x, f)$$

est un difféomorphisme rendant $pr_2 \circ \tau|_{p^{-1}(x)}$ linéaire et tel que $pr_1 \circ \tau = p|_{p^{-1}(U)}$.

Le fibré $\mathbf{F}_0(TM)$ est difféomorphe au fibré trivial $M \times \mathbb{R}$. En effet, une 0-densité est une fonction constante. Si on note c_φ la valeur d'une telle densité φ, l'application

$$\psi : \mathbf{F}_0(TM) \mapsto M \times \mathbb{R} : \varphi \in \mathbf{F}_0(T_xM) \mapsto (x, c_\varphi)$$

est visiblement une bijection dont l'expression locale dans une carte quelconque est l'identité. ∎

On note $\mathcal{F}_a(M)$ l'espace des sections $\Gamma^\infty(\mathbf{F}_a(TM))$ de $\mathbf{F}_a(TM)$. On les appellera *champs de a-densités, a-densités* ou *densités.* En particulier, $\mathcal{F}_0(M)$ s'identifie à $C^\infty(M)$ puisque les sections de $M \times \mathbb{R}$ sont les fonctions réelles de classe C^∞ sur M.

Nous allons maintenant définir une dérivée de Lie des champs de densités. Si E et F sont des espaces vectoriels de dimension m, un isomorphisme T de E dans F s'étend de $\wedge^m E$ dans $\wedge^m F$ en posant

$$T(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m) = Tx_1 \wedge \ldots \wedge Tx_m.$$

On peut alors définir le *pull-back pour les densités* de T. C'est l'application

$$T^* : \mathbf{F}_a(F) \mapsto \mathbf{F}_a(E) : \varphi \mapsto \varphi \circ T.$$

Soient $e_1, \ldots, e_m$ et $f_1, \ldots, f_m$ des bases de E et F respectivement. Pour tout $\varphi \in \mathbf{F}_a(F)$, il vient :

$$\begin{aligned}
(T^*\varphi)(e_1 \wedge \ldots \wedge e_m) &= \varphi(Te_1 \wedge \ldots \wedge Te_m) \\
&= \varphi(\sum_{i_1,\ldots,i_m} T_{i_1 1} \ldots T_{i_m m} \quad f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_m}) \\
&= \varphi(\sum_{\nu} sign(\nu) T_{\nu_1 1} \ldots T_{\nu_m m} \quad f_1 \wedge \ldots \wedge f_m) \\
&= \varphi(\det(T).f_1 \wedge \ldots \wedge f_m) \\
&= |\det(T)|^a \varphi(f_1 \wedge \ldots \wedge f_m). \qquad (1)
\end{aligned}$$

On notera $Vect(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M et $\Phi_t^X(x)$ ou encore $\Phi_t(x)$ le flot de $X \in Vect(M)$.

Si $X \in Vect(M)$ et $\varphi \in \mathbf{F}_a(TM)$, la dérivée de Lie de φ dans la direction de X, notée $L_X\varphi$, est l'élément de $\mathbf{F}_a(TM)$ défini par

$$(L_X\varphi)_x = D_t(\Phi_{t*x})^*\varphi_{\Phi_t(x)}|_{t=0}$$

pour tout $x \in M$.

Pour tout $x \in M$,

$$t \mapsto (\Phi_{t*x})^*\varphi_{\Phi_t(x)} \qquad (2)$$

est une courbe de $\mathbf{F}_a(T_xM)$. Montrons qu'elle est de classe C^∞ et que la section $L_X\varphi$ que nous définissons l'est également.

Soit donc $x \in M$. Dans une carte convenable (U, ψ) contenant ce point, pour t suffisamment proche de 0, notons ϕ_t l'expression locale de Φ_t. Soit f l'expression locale de φ dans U (on omettra $\psi(x)$ dans cette expression). La forme locale de $x \mapsto (\Phi_{t*x})^*\varphi_{\Phi_t(x)}$ est

$$f_t = |\det \phi_{t*}|^a.(f \circ \phi_t)$$

en vertu de (1). Comme ϕ_{0*} est l'identité, le déterminant de ϕ_{t*} est positif pour t assez voisin de 0, de sorte que

$$f_t = (\det \phi_{t*})^a.(f \circ \phi_t),$$

ce qui assure le caractère C^∞ de (2).

Il vient alors

$$\begin{aligned} D_t f_t(x)|_{t=0} &= D_t(\det \phi_{t*x})^a|_{t=0}.(f \circ \phi_0)(x) + (\det \phi_{0*x})^a.D_t(f \circ \phi_t(x))|_{t=0} \\ &= a(\det_{*1} DX)f(x) + (X.f)(x) \\ &= a\, tr(DX)f(x) + (X.f)(x) \end{aligned}$$

où DX désigne la différentielle de l'expression locale de X. Le dernier membre est la valeur au point x de l'expression locale de $L_X\varphi$ et montre qu'il s'agit bien d'une section de classe C^∞.

Au passage, on a donc démontré la propriété suivante:

Proposition 3.3 Si, dans une carte $(U, (x^1, \ldots, x^m))$,

$$\varphi|_U = f|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|^a,$$

où $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, alors

$$L_X\varphi|_U = (X.f + atr(DX)f)|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|^a. \qquad (3) \quad \blacksquare$$

Il est à présent immédiat de vérifier que muni de la dérivée de Lie L, $\mathcal{F}_a(M)$ est une représentation de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de M. En effet, L_X est visiblement un endomorphisme de $\mathcal{F}_a(M)$ pour tout $X \in Vect(M)$. De plus, on a bien

$$L_{[X,Y]}\varphi = L_X \circ L_Y\varphi - L_Y \circ L_X\varphi$$

pour tous $X, Y \in Vect(M)$, pour tout $\varphi \in \mathcal{F}_a(M)$.

De fait, si dans une carte $(U, (x^1, \ldots, x^m))$,

$$\varphi|_U = f|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|^a,$$

où $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, alors

$$L_{[X,Y]}\varphi|_U = ([X,Y].f + atr(D[X,Y])f)|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|^a,$$

donc

$$L_{[X,Y]}\varphi|_U = (X.(Y.f) - Y.(X.f) + atr(D[X,Y])f)|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|^a,$$

avec

$$\begin{aligned} tr(D[X,Y]) &= \sum_i \partial_i[X,Y]^i \\ &= \sum_i \partial_i(\sum_j X^j\partial_j Y^i - Y^j\partial_j X^i) \\ &= \sum_{i,j} X^j\partial_{ij}Y^i - Y^j\partial_{ij}X^i. \end{aligned}$$

D'autre part, $L_X \circ L_Y\varphi|_U$ est égal à

$$(X.(Y.f + atr(DY)f) + atr(DX)(Y.f + atr(DY)f))|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|^a$$

et $L_Y \circ L_X\varphi|_U$ est égal à

$$(Y.(X.f + atr(DX)f) + atr(DY)(X.f + atr(DX)f))|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|^a,$$

d'où, après simplifications, $(L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X)\varphi|_U$ est égal à

$$([X,Y].f + a(X.tr(DY) - Y.tr(DX))f)|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|^a,$$

avec

$$\begin{aligned}(X.tr(DY) - Y.tr(DX)) &= \sum_i X^i \partial_i (\sum_j \partial_j Y^j) - \sum_i Y^i \partial_i (\sum_j \partial_j X^j) \\ &= \sum_{i,j} X^i \partial_{ij} Y^j - Y^i \partial_{ij} X^j. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Si φ est une a-densité, si $(U, (x^1, \ldots, x^m))$ est une carte et si

$$\varphi|_U = f|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|^a,$$

où $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, si ψ est une b-densité telle que

$$\psi|_U = g|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|^b,$$

où $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$, alors $\varphi\psi$ est la $(a+b)$-densité qui est telle que

$$\varphi\psi|_U = fg|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|^{a+b}.$$

Dans ces conditions,

$$L_X(\varphi\psi) = L_X(\varphi)\psi + \varphi L_X(\psi).$$

En effet,

$$L_X(\varphi\psi)|_U = (X.(fg) + (a+b)tr(DX)fg)|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|^a,$$

donc

$$L_X(\varphi\psi)|_U = ((X.f)g + f(X.g) + (a+b)tr(DX)fg)|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|^a,$$

ce qui correspond bien à l'expression locale de

$$L_X(\varphi)\psi + \varphi L_X(\psi). \quad \blacksquare$$

Proposition 3.4 *1.* Les fibrés $\mathbf{F}_a(TM)$ sont triviaux.

2. Le fibré $\mathbf{F}_a(TM)$ admet une section φ naturelle (i.e. telle que $L_X\varphi = 0 \quad \forall X \in Vect(M)$) partout non nulle si et seulement si $a = 0$.

3. Les sections naturelles de $\mathbf{F}_a(TM)$ sont les fonctions constantes.

Démonstration. Considérons une partition de l'unité α_i subordonnée à un recouvrement ouvert localement fini de M par des domaines de cartes U_i. Notons φ_i le champ de a-densités $|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|^a$ associé aux coordonnées locales définies dans U_i. Les densités $\varphi_i(x), x \in U_i$, sont toutes positives. On obtient alors un champ de a-densités

$$\psi := \sum_i \alpha_i \varphi_i$$

qui ne s'annule en aucun point de M. Ceci prouve le point 1 car une trivialisation globale de $\mathbf{F}_a(TM)$ est alors donnée par l'application qui à $\varphi \in \mathbf{F}_a(T_xM)$ associe le couple formé de x et du quotient de φ par $\psi(x)$, cela étant légitimé par le fait que $\mathbf{F}_a(T_xM)$ est de dimension 1.

Supposons que les dérivées de Lie $L_X\varphi$ d'un champ de a-densités φ soient nulles. La formule (3) montre que si $\varphi_x \neq 0$, alors $a = 0$, ce qu'on voit en choisissant X de telle manière que $X_x = 0$ et $tr(DX) \neq 0$. Les points (2) et (3) en découlent aussitôt. ∎

3.3 Les représentations de $Vect(M)$

Etudions à présent les représentations $\mathcal{F}_a(M)$ de l'algèbre de Lie $Vect(M)$.

Lemme 3.1 Si $b \neq 0$, toute application $Vect(M)$-équivariante T: $\mathcal{F}_a(M) \mapsto \mathcal{F}_b(M)$ est locale.

Démonstration. Soient un ouvert U de M et une a-densité φ nulle dans U. Supposons que $T(\varphi)_x \neq 0$ pour un certain point $x \in U$. Soient $X' \in Vect(M)$ tel que $X'_x = 0$, $tr(DX')_x \neq 0$ et $\rho \in C^\infty(M)$ une fonction à support compact inclus dans U, valant 1 dans un voisinage de x. Posons $X = \rho X'$. On a évidemment, vu la formule (3), $(L_X T(\varphi))|_x \neq 0$. Cependant, $L_X\varphi = 0$ de sorte que, en utilisant le fait que T est équivariant,

$$L_X T(\varphi) = T(L_X\varphi) = 0$$

et l'on aboutit donc à une contradiction. ∎

Proposition 3.5 Les $Vect(M)$-modules $\mathcal{F}_a(M)$ et $\mathcal{F}_b(M)$ sont isomorphes si et seulement si $a = b$.

Démonstration. La condition est trivialement suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire : on peut évidemment supposer que $b \neq 0$. D'après le lemme ci-dessus, un isomorphisme

$T: \mathcal{F}_a(M) \mapsto \mathcal{F}_b(M)$ est une application locale. D'après le théorème de Peetre, c'est donc localement un opérateur différentiel. Nous sommes ainsi ramenés à étudier les opérateurs différentiels $T : C^\infty(\mathbb{R}^m) \mapsto C^\infty(\mathbb{R}^m)$ vérifiant identiquement

$$T(X.f + atr(DX)f) = X.T(f) + btr(DX)T(f). \qquad (4)$$

De fait, d'une part,

$$(T \circ L_X)\varphi = (L_X \circ T)\varphi$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{F}_a(M)$, pour tout $X \in Vect(M)$; d'autre part, si f est la forme locale de φ, la forme locale de $(T \circ L_X)\varphi$ est donnée par

$$T'(X.f + atr(DX)f)$$

où T' est un opérateur différentiel agissant entre $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ et $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ tandis que la forme locale de $(L_X \circ T)\varphi$ est donnée par

$$X.T'(f) + btr(DX)T'(f).$$

Exprimée pour des champs de vecteurs constants, la relation (4) montre que les coefficients de T sont constants car, si X est un champ de vecteurs constant, cette identité se réduit d'abord à

$$T(X.f) = X.T(f),$$

donc, si X a pour expression locale $(c_1, \ldots, c_m)$ où $c_1, \ldots, c_m$ sont des constantes et si T s'écrit

$$\sum_\alpha A_\alpha D^\alpha$$

où $A_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ pour tout α, on a

$$(\sum_\alpha A_\alpha D^\alpha)(\sum_i c_i\partial_i) = \sum_i c_i\partial_i(\sum_\alpha A_\alpha D^\alpha),$$

donc

$$\sum_i c_i(\sum_\alpha(\partial_i A_\alpha)D^\alpha) = 0$$

et on en déduit que pour tout α, $\partial_i A_\alpha = 0$ pour tout i.

Si on note $P_T(\xi)$ le polynôme représentant T, ξ représentant les dérivées affectant l'argument de T, la relation (4) peut se réécrire

$$P_T(\xi + \eta)\langle X, \xi\rangle + aP_T(\xi + \eta)\langle X, \eta\rangle = b\langle X, \eta\rangle P_T(\xi) + P_T(\xi)\langle X, \xi\rangle,$$

où η représente les dérivées affectant X. Si on identifie dans cette égalité les termes de degré 1 en η, on obtient :

$$(\eta_j D_{\xi_j})P_T.\langle X,\xi\rangle + aP_T(\xi)\langle X,\eta\rangle = b\langle X,\eta\rangle P_T(\xi).$$

Appelons S la matrice $X\otimes\eta$, i.e. la matrice dont l'élément S^i_j est donné par $X^i\eta_j$. Nous avons tout d'abord :

$$(\eta_j D_{\xi_j})P_T.\langle X,\xi\rangle = S^i_j\xi_i D_{\xi_j}P_T = (\xi(S.)D_\xi)P_T = \rho(S)P_T.$$

Nous obtenons alors

$$\rho(S)P_T + aP_T(\xi)(trS) = b(trS)P_T(\xi)$$

pour tout $S\in gl(m,\mathbb{R})$, donc en particulier :

$$\rho(S)P_T = 0$$

pour tout $S\in sl(m,\mathbb{R})$, ce qui permet de conclure que P_T est $sl(m,\mathbb{R})$-invariant.

La forme générale des applications $sl(m,\mathbb{R})$-invariantes a été étudiée par H.Weyl : si $P(\xi^{(1)},\ldots,\xi^{(p)};x_{(1)},\ldots,x_{(q)})$ est $sl(m,\mathbb{R})$-invariant, alors il est combinaison linéaire :

1. d'expressions polynomiales en les évaluations $\langle x_{(i)},\xi^{(j)}\rangle, i=1,\ldots,q, j=1,\ldots,p$,
2. d'applications linéaires antisymétriques de degré m en les arguments de P.

Dans notre cas, les seuls termes non nuls de type (1) de P_T ne sauraient être que des constantes puisque P_T ne dépend que de ξ. De plus, si nous supposons $\dim M>1$, toute application du type (2) aurait nécessairement plus d'une fois ξ comme argument puisqu'elle est de degré m. Une telle application étant antisymétrique, elle serait donc nulle. Par conséquent, T est la multiplication par une constante non nulle. La relation (4) se résume alors à

$$atr(DX) = btr(DX), \quad \forall X\in Vect(M),$$

ce qui implique $a=b$. ∎

Proposition 3.6 Le module $\mathcal{F}_1(M)$ est isomorphe à $\Omega_m(M)$ si et seulement si M est orientable.

Démonstration. Si M est orienté par la forme ω, alors $|\omega|$ est une 1-densité de M qui ne s'annule en aucun point. L'application $\theta : f\omega \mapsto f|\omega|, f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, est un isomorphisme de $\Omega_m(M)$ sur $\mathcal{F}_1(M)$. En effet, si on se place dans une carte $(U, (x^1, \ldots, x^m))$ de M, $f\omega$ est égal dans U à $g.dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$ où $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ et $L_X(g.dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m)$ est égal à

$$(L_X g).dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m + g.L_X(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m),$$

donc à

$$(L_X g).dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m + g.\sum_i dx^1 \wedge \ldots \wedge L_X dx^i \wedge \ldots \wedge dx^m$$

et par suite à

$$(X.g).dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m + g(\sum_{i,j} \partial_j X^i).dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^j \wedge \ldots \wedge dx^m,$$

où dans cette somme, les dx^j se trouvent à la place i. On obtient donc finalement

$$L_X(g.dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m) = (X.g + tr(DX)g).dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m.$$

Ainsi, on a

$$L_X \circ \theta = \theta \circ L_X$$

pour tout $X \in Vect(M)$.

Inversement, soit T un isomorphisme de $\Omega_m(M)$ dans $\mathcal{F}_1(M)$. Des variantes immédiates du lemme et de la proposition précédente dans lesquelles on substitue simplement $\Omega_m(M)$ à $\mathcal{F}_a M$ et $\mathcal{F}_1(M)$ à $\mathcal{F}_b M$ nous montrent que T est un opérateur différentiel d'ordre 0. Soit une section partout non nulle φ de $\mathcal{F}_1(M)$. La forme $\omega = T^{-1}(\varphi)$ ne s'annule en aucun point de M. En effet, si elle s'annulait en a, il en irait de même de $\varphi = T(\omega)$ puisque T est d'ordre 0. ∎

3.4 La divergence

Fixons une section sans zéro φ_0 de $\mathcal{F}_1(M)$ à valeurs positives, comme celle construite à la proposition 3.4. On en déduit une section sans zéro de $\mathcal{F}_a(M)$, que l'on va noter φ_0^a. C'est la fonction qui en $x \in M$ est égale à l'application qui à $\Lambda \in \wedge^m(T_xM)\backslash\{0\}$ associe $(\varphi_0(x)(\Lambda))^a$. On en déduit ensuite une bijection $\tau_0 : f \in \mathcal{C}^\infty(M) \mapsto f\varphi_0^a \in \mathcal{F}_a(M)$. Explicitons maintenant la représentation $X \mapsto \tau_0^{-1} \circ L_X \circ \tau_0$ de $Vect(M)$.

Dans une carte $(U, (x^1, \ldots, x^m))$ de M, on a $\varphi_0 = u|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|$, où la fonction u est partout positive sur U. Dans cet ouvert, on a donc

$$\begin{aligned}
(\tau_0^{-1} \circ L_X \circ \tau_0)(f) &= (\tau_0^{-1} \circ L_X)(fu^a|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|^a) \\
&= \tau_0^{-1}((X.(fu^a) + atr(DX)fu^a)|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|^a) \\
&= u^{-a}(X.(fu^a) + atr(DX)fu^a) \\
&= X.f + u^{-a}f(X.u^a) + atr(DX)f \\
&= X.f + a(tr(DX) + u^{-a}\sum_i X^i u^{a-1}\partial_i u)f \\
&= X.f + a(tr(DX) + X.\ln u)f.
\end{aligned}$$

Proposition 3.7 *1.* Il existe un 1-cocycle $\gamma : Vect(M) \mapsto C^\infty(M)$ tel que

$$\tau_0^{-1} \circ L_X \circ \tau_0 : f \mapsto X.f + a\gamma(X)f.$$

2. L'application $X \mapsto \gamma(X)$ est un opérateur différentiel de symbole $\xi \mapsto \langle X, \xi \rangle$.

3. La classe de cohomologie de γ est indépendante de φ_0.

Démonstration. Le point 1 est clair puisque des calculs précédents ont montré que $tr(DX)$ était un cocycle tandis que $X.\ln u$ est un cobord.

Le point 2 est évident.

En ce qui concerne le point 3, on constate que si on remplace φ_0 par φ_0', où φ_0' s'écrit $u'|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|$ dans U, alors

$$\begin{aligned}
\gamma' &= tr(DX) + X.\ln u' \\
&= tr(DX) + X.\ln(u.\frac{u'}{u}) \\
&= \gamma(X) + X.\ln\frac{u'}{u}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\gamma' = \gamma + \partial \ln(\frac{u'}{u}),$$

ce qui achève la démonstration. ∎

La classe de cohomologie div_M de γ s'appelle la *classe de la divergence*, un quelconque de ses représentants pouvant s'appeler une *divergence*. On signale le résultat suivant sans démonstration :

Proposition 3.8 Le premier espace de cohomologie de $Vect(M)$ à valeurs dans $\mathcal{C}^\infty(M)$ vaut

$$H^1(Vect(M), \mathcal{C}^\infty(M)) = \mathbb{R}div_M \oplus H^1_{DR}(M). \quad \blacksquare$$

Concernant une divergence arbitraire de M, la propriété suivante peut être utile. Elle nécessite un lemme.

Lemme 3.2 Si $\omega \in \Omega_m(M)$ ne s'annule pas en x_0, alors il existe une carte de M au voisinage de x_0 dans laquelle

$$\omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m.$$

Démonstration. Dans une carte quelconque de M au voisinage de x_0, ω s'écrit

$$\omega = f.dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$$

où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui ne s'annule pas en x_0. Si F en est une primitive par rapport à x^1, alors $(y^1 = F(x), y^2 = x^2, \ldots, y^m = x^m)$ est un nouveau système de coordonnées locales de M au voisinage de x_0 dans lequel ω prend la forme voulue. En effet, c'est un nouveau système de coordonnées locales au voisinage de x_0 puisque la différentielle du changement de coordonnées est égale au point x_0 à

$$\begin{pmatrix} f(x_0) & \partial_{x^2}F(x_0) & \cdots & \partial_{x^m}F(x_0) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

où $f(x_0)$ représente la valeur de l'expression locale de f au point x_0. Cette matrice est non singulière en x_0 puisque f ne s'annule pas en x_0. Ensuite, si on remarque que, d'une part,

$$dy^1 = fdx^1 + \sum_{j=2}^{m} \partial_j F dx^j$$

et que d'autre part, $dy^j = dx^j$ si $j > 1$, alors

$$\omega = f.dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m = (fdx^1 + \sum_{j=2}^{m} \partial_j F dx^j) \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^m = dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^m. \quad \blacksquare$$

Proposition 3.9 Si γ est une divergence de M, alors il existe un atlas de M tel que, dans chacune de ses cartes,

$$\gamma(X) = tr(DX), \quad \forall X \in Vect(M).$$

Démonstration. D'après ce qui précède, dans toute carte $(U, (x^1, \ldots, x^m))$ de M,

$$\gamma(X) = tr(DX) + X.u, \quad \forall X \in Vect(M),$$

où $u \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Etant donné $a \in U$, la forme différentielle $\omega = e^u dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$ ne s'annulant en aucun point de U, on peut trouver des coordonnées locales y^i dans un voisinage de a dans lesquelles

$$\omega = dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^m.$$

En calculant la dérivée de Lie $L_X\omega$ dans les deux systèmes de coordonnées, on obtient d'une part, dans les coordonnées x^i,

$$L_X\omega = (X.e^u + e^u tr(DX))dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m = (X.u + tr(DX))\omega$$

et d'autre part, dans les coordonnées y^i,

$$L_X\omega = (X.1 + 1.tr(\overline{D}X))dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^m = (tr(\overline{D}X))\omega,$$

où D et $\overline{D}$ représentent les dérivées selon les x^i et les y^i respectivement. Ainsi, dans les nouvelles coordonnées, γ a la forme indiquée. ∎

3.5 Divergence et connexion

Notons ∇ une dérivée covariante de M de torsion nulle. On lui associe l'application **Div** définie en coordonnées locales de la manière suivante :

$$X \in Vect(M) \mapsto \mathbf{Div}X = \sum_{i=1}^{m} i(dx^i)\nabla_{\partial_i}X.$$

Il vient successivement

$$\begin{aligned} \mathbf{Div}X &= i(dx^j)(\nabla_{\partial_j}X) \\ &= i(dx^j)((\partial_j X^i)\partial_i + X^i\nabla_{\partial_j}\partial_i) \\ &= \partial_i X^i + X^i\Gamma^j_{ji} \\ &= tr(DX) + X^i\Gamma^j_{ji}, \end{aligned}$$

les Γ^k_{ij} étant les symboles de Christoffel de ∇. En fait, on a

$$\mathbf{Div}X = tr\nabla X,$$

ce qui prouve que la définition de **Div** est bien intrinsèque. En effet, cela résulte directement du fait que

$$\nabla_Y X = Y^i \partial_i X + \Gamma^k_{ij} Y^i X^j \partial_k.$$

Proposition 3.10 *1.* L'application

$$\omega^\nabla(X,Y) = L_X \mathbf{Div}(Y) - L_Y \mathbf{Div}(X) - \mathbf{Div}([X,Y])$$

est une 2-forme différentielle fermée.

2. Elle est nulle lorsque ∇ est la dérivation covariante associée à la connexion de Levi-Civita d'une métrique riemannienne de M, auquel cas **Div** est une divergence de M.

3. La classe de cohomologie de de Rham de ω^∇ est indépendante de ∇ et donc nulle.

Démonstration. Le point 1 résulte immédiatement de l'expression de **Div** en coordonnées locales. En fait, la forme ω^∇ s'exprime à l'aide de la courbure de ∇ par la formule

$$\omega^\nabla(X,Y) = trR^\nabla(X,Y). \qquad (5)$$

En effet, on a déjà constaté que $\partial(tr(DX)) = 0$ tandis que

$$X.(\Gamma^i_{ij}Y^j) - Y.(\Gamma^i_{ij}X^j) - \Gamma^i_{ij}[X,Y]^j$$

est égal à

$$X^lY^j\partial_l\Gamma^i_{ij} + \Gamma^i_{ij}X^l\partial_lY^j - Y^lX^j\partial_l\Gamma^i_{ij} - \Gamma^i_{ij}Y^l\partial_lX^j - \Gamma^i_{ij}(X^l\partial_lY^j - Y^l\partial_lX^j)$$

donc, après développements et simplifications, à

$$X^iY^l(\partial_i\Gamma^k_{kl} - \partial_l\Gamma^k_{ki}).$$

On constate alors par un long mais simple calcul que

$$\partial\omega^\nabla = 0.$$

Le point (2) résulte de la formule (5) et du fait que la courbure de la connexion de Levi-Civita est à valeurs dans les applications antisymétriques, dont la trace est nulle. De fait, on a

$$X.(Y.g(Z,U)) = g(\nabla_X\nabla_YZ,U) + g(\nabla_YZ,\nabla_XU) + g(\nabla_XZ,\nabla_YU) + g(Z,\nabla_X\nabla_YU)$$

ainsi que

$$Y.(X.g(Z,U)) = g(\nabla_Y \nabla_X Z, U) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y U) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X U) + g(Z, \nabla_Y \nabla_X U)$$

et

$$[X,Y].g(Z,U) = g(\nabla_{[X,Y]}Z, U) + g(Z, \nabla_{[X,Y]}U).$$

On en déduit que

$$g(R^\nabla(X,Y)Z,U) + g(Z, R^\nabla(X,Y)U) = 0,$$

donc que

$$R^\nabla(X,Y)^t = -R^\nabla(X,Y).$$

Finalement, $\omega^\nabla(X,Y) = 0$ et on peut conclure grâce à la proposition 3.8. Le point (3) résulte de (2) et de ce que la différence entre deux dérivations covariantes de torsion nulle, ∇' et ∇ est de la forme $S(X,Y)$ où S est un tenseur symétrique. En effet, d'une part, on a

$$\omega^{\nabla'}(X,Y) = X.(tr\nabla' Y) - Y.(tr\nabla' X) - tr(\nabla'[X,Y])$$

tandis que

$$\omega^{\nabla}(X,Y) = X.(tr\nabla Y) - Y.(tr\nabla X) - tr(\nabla[X,Y]).$$

Il vient alors

$$\omega^{\nabla'}(X,Y) - \omega^\nabla(X,Y) = X.tr(Z \mapsto S(Y,Z)) - Y.(trZ \mapsto S(X,Z)) - tr(Z \mapsto S([X,Y],Z)),$$

donc, si on note α la 1-forme définie par

$$\alpha(X) = tr(Z \mapsto S(X,Z)),$$

on a

$$\omega^{\nabla'} = \omega^\nabla + d\alpha.$$

Ainsi, la classe de cohomologie de ω^∇ est toujours nulle puisqu'au point (2), on a trouvé une situation où elle était nulle. ∎

3.6 Le fibré principal des densités

On notera dorénavant $\tilde{M}^a$ le sous-fibré de $\mathbf{F}_a(TM)$ dont la fibre en $x \in M$ est constituée des densités positives de T_xM. Ce fibré peut être muni d'une structure de fibré principal :

Proposition 3.11 Le fibré $\tilde{M}^a$ muni de l'action à droite du groupe multiplicatif $\mathbb{R}^+$ donnée par

$$\tilde{M}^a \times \mathbb{R}^+ \mapsto \tilde{M}^a : (\varphi, g) \mapsto g\varphi$$

et de la projection τ^a égale à la restriction de p à $\tilde{M}^a$ est un fibré principal sur M à groupe structural $\mathbb{R}^+$. De plus, le champ fondamental 1^* de $\tilde{M}^a$ est égal à la restriction du champ d'Euler $\mathcal{E}$ de $\mathbf{F}_a(TM)$ à $\tilde{M}^a$.

Démonstration. Il nous suffit de remarquer que les restrictions des cartes et des trivialisations de $\mathbf{F}_a(TM)$ à $\tilde{M}^a$ fournissent des cartes et des trivialisations de $\tilde{M}^a$ qui en font un fibré principal tel qu'il est décrit dans l'énoncé.

Le fait que le champ fondamental 1^* de $\tilde{M}^a$ soit égal à la restriction du champ d'Euler de $\mathbf{F}_a(TM)$ à $\tilde{M}^a$ résulte directement de leur définition. ∎

On notera à partir de maintenant $(P^1M, \pi, M, GL(m, \mathbb{R}))$ le fibré principal des repères linéaires. Le fibré $\mathbf{F}_a(TM)$ possède une structure de fibré associé à celui-ci : $\mathbf{F}_a(TM)$ est isomorphe en tant que fibré vectoriel au fibré E associé à P^1M de fibre type $\mathbb{R}$ où l'action de $GL(m, \mathbb{R})$ sur la fibre type est donnée par :

$$l : GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : (g, \lambda) \mapsto |\det g|^{-a}\lambda.$$

En effet, si $(U, (x^1, \ldots, x^m))$ est une carte de M, notons ϕ l'application telle que sa restriction ϕ_U à U soit définie de la manière suivante :

$$\phi_U : \mathbf{F}_a(TU) \mapsto \pi_E^{-1}(U) : \lambda|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|^a \mapsto \pi'((\partial_1, \ldots, \partial_m), \lambda),$$

où π' est la projection naturelle correspondant à E. Cette définition a bien un sens : si $(V, (y^1, \ldots, y^m))$ est une autre carte de M d'intersection non vide avec U, il vient, si $\partial\chi$ représente la différentielle du changement de coordonnées locales :

$$\begin{aligned}
\phi_V(\lambda|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|^a) &= \phi_V(\lambda|\det \partial\chi|^{-a}|dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^m|^a) \\
&= \pi'((\partial_{1'}, \ldots, \partial_{m'}), \lambda|\det \partial\chi|^{-a}) \\
&= \pi'((\partial_{1'}, \ldots, \partial_{m'})(\partial\chi), \lambda) \\
&= \pi'((\partial_1, \ldots, \partial_m), \lambda) \\
&= \phi_U(\lambda|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|^a).
\end{aligned}$$

L'application ϕ est visiblement une bijection. Elle est de classe C^∞ ainsi que son inverse si l'on prend soin de munir E de la structure de variété qui fait des applications

$$\psi_U : U \times \mathbb{R} \mapsto \pi_E^{-1}(U) : (x, \lambda) \mapsto \pi'((\partial_1, \ldots, \partial_m), \lambda)$$

des difféomorphismes. Enfin, les restrictions de ϕ aux fibres de $\mathbf{F}_a(TM)$ sont des applications linéaires si l'on définit une structure d'espace vectoriel sur E_x de la façon suivante :

1. $\pi'((\partial_1, \ldots, \partial_m), \lambda) + \pi'((\partial_1, \ldots, \partial_m), \lambda') = \pi'((\partial_1, \ldots, \partial_m), \lambda + \lambda')$,
2. $c\pi'((\partial_1, \ldots, \partial_m), \lambda) = \pi'((\partial_1, \ldots, \partial_m), c\lambda)$.

Dans ces conditions, l'application

$$\Xi^a : P^1M \mapsto \tilde{M}^a : p \mapsto \pi'(p, 1)$$

est évidemment un homomorphisme de fibrés principaux sur M induisant l'homomorphisme

$$\xi^a : GL(m, \mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}^+ : g \mapsto |\det g|^{-a}$$

entre les groupes structuraux et l'application identique sur M.

Soit ω une 1-forme de connexion sur P^1M et ∇ la dérivation covariante de la connexion associée dans le fibré tangent. Puisque l'homomorphisme Ξ^a induit l'identité sur la base M, on sait par la théorie des fibrés principaux qu'il existe une unique 1-forme de connexion ω^a à valeurs réelles sur $\tilde{M}^a$ telle que

$$\ker \omega^a_{\Xi^a(p)} = \Xi^a_{*p}(\ker \omega_p)$$

et telle que

$$\begin{aligned} \omega^a_{\Xi^a(p)}(\Xi^a_{*p}v) &= \xi^a_{*1}(\omega_p(v)) \\ &= (|\det(.)|^{-a})_{*1}(\omega_p(v)) \\ &= -atr(\omega_p(v)) \quad \forall p \in P^1M, v \in T_pP^1M. \end{aligned}$$

D'une part, si $a \neq 0$, Ξ^a est évidemment surjectif. D'autre part, si $a \neq 0$, Ξ^a est également une submersion. De fait, il suffit tout d'abord de prouver que tout vecteur vertical de $T_{\Xi^a(p)}\tilde{M}^a$ est l'image par Ξ^a_{*p} d'un vecteur vertical de T_pP^1M car, comme on sait par la théorie que

$$\ker \omega^a_{\Xi^a(p)} = \Xi^a_{*p}(\ker \omega_p),$$

tout vecteur horizontal de $T_{\Xi^a(p)}\tilde{M}^a$ est l'image par Ξ^a_{*p} d'un vecteur horizontal de T_pP^1M. Dès lors, si $g \in gl(m, \mathbb{R})$ et si g^* est le champ fondamental correspondant sur P^1M, il vient :

$$\begin{aligned}
\Xi^a_{*p} b^*_p &= \Xi^a_{*p}(\frac{d}{dt}(p\exp(tb)))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\Xi^a(p\exp(tb)))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\Xi^a(p)|\det(\exp(tb))|^{-a})|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\Xi^a(p)\exp(-atr(b)t))|_{t=0} \\
&= (-atr(b))^*_{\Xi^a(p)},
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Le sous-fibré horizontal $H\tilde{M}^a$ de $T\tilde{M}^a$ défini par la 1-forme de connexion ω^a coïncide avec la restriction du sous-fibré horizontal $H\mathbf{F}_a(TM)$ de $T\mathbf{F}_a(TM)$ induit par celui défini par la 1-forme de connexion ω sur P^1M. En outre, les restrictions à $\tilde{M}^a$ des relèvements horizontaux $X^{\mathbf{h}}$ et $Y^{\mathbf{h}}$ de X et Y à $\mathbf{F}_a(TM)$ coïncident avec les relèvements horizontaux X^h et Y^h de X et Y à $\tilde{M}^a$. Il suffit pour le remarquer de noter que l'expression locale de Ξ^a est l'application suivante :

$$(x,p) \mapsto (x, |\det p|^{-a})$$

tandis que celle de π' est :

$$((x,p),\lambda) \mapsto (x, |\det p|^{-a}\lambda).$$

La différentielle de l'expression locale de Ξ^a en $(x,\mathbf{1})$ appliquée à un vecteur X est donc égale à la différentielle de l'expression locale de π' en $((x,\mathbf{1}),1)$ appliquée au vecteur $(X,0)$. Les relèvements horizontaux et les espaces horizontaux coïncident donc en tous les points de coordonnées locales $(x,1)$ et donc par conséquent en tous les points de $\tilde{M}^a$.

Dans la proposition qui suit, trR représente la trace du tenseur de courbure de ∇.

Proposition 3.12 Si $X, Y \in Vect(M)$, on a la formule suivante :

$$[X^h, Y^h] = [X,Y]^h + a\tau^{a*}(trR)(X,Y)\mathcal{E}.$$

Démonstration. D'après la formule

$$[X^h, Y^h] = [X,Y]^h - \Omega^a(X^h, Y^h)^*$$

où Ω^a est la 2-forme de courbure de la 1-forme de connexion ω^a, il suffit de prouver que

$$\Omega^a(X^h, Y^h) = -a\tau^{a*}(trR)(X, Y).$$

Soient X^H et Y^H les relèvements horizontaux de X et Y à P^1M correspondant à ω. Les champs X^H et X^h sont Ξ^a-liés, i.e. que

$$\Xi^a_{*p} X^H_p = X^h_{\Xi^a(p)} \quad \forall p \in P^1M.$$

En effet, grâce au fait que

$$\ker \omega^a_{\Xi^a(p)} = \Xi^a_{*p}(\ker \omega_p),$$

on sait que $\Xi^a_{*p} X^H_p$ est un vecteur horizontal en $\Xi^a(p)$ et en outre, celui-ci est tel que sa projection via τ^a_* est égale à $X_{\tau^a(\Xi^a(p))}$ puisque

$$\begin{aligned}
\tau^a_{*\Xi^a(p)} \Xi^a_{*p} X^H_p &= (\tau^a \circ \Xi^a)_{*p} X^H_p \\
&= \pi_{*p} X^H_p \\
&= X_{\pi(p)} \\
&= X_{\tau^a(\Xi^a(p))}.
\end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\Omega^a_{\Xi^a(p)}(X^h, Y^h) &= d\omega^a_{\Xi^a(p)}(X^h, Y^h) + [\omega^a_{\Xi^a(p)}(X^h), \omega^a_{\Xi^a(p)}(Y^h)] \\
&= -\omega^a_{\Xi^a(p)}([X^h, Y^h]) + 0 \\
&= atr(\omega_p([X^H, Y^H])) \\
&= -atr((d\omega)_p(X^H, Y^H) + [\omega_p(X^H), \omega_p(Y^H)]) \\
&= -atr(\Omega_p(X^H, Y^H)) \\
&= -a(trR)(X, Y)_{\pi(p)},
\end{aligned}$$

car, si f_X représente la fonction équivariante correspondant à X quand le fibré tangent est considéré comme fibré associé au fibré des repères, on a successivement :

$$\begin{aligned}
f_{\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z} &= X^H.(Y^H.f_Z) - Y^H.(X^H.f_Z) - [X, Y]^H.f_Z \\
&= [X^H, Y^H].f_Z - [X, Y]^H.f_Z \\
&= -\Omega(X^H, Y^H)^*.f_Z
\end{aligned}$$

et d'autre part, si $p \in P^1M$,

$$\begin{aligned}
(-\Omega(X^H, Y^H)^*.f_Z)_p &= \frac{d}{dt}(f_Z(p\exp(-\Omega(X^H, Y^H)t)))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\exp(\Omega(X^H, Y^H)t)|_{t=0} f_Z(p) \\
&= \Omega(X^H, Y^H) f_Z(p). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Soit maintenant $\Phi : M \mapsto N$ une immersion entre deux variétés de dimension m. Définissons une application $\tilde{\Phi}^a$ de la façon suivante :

$$\tilde{\Phi}^a : \tilde{M}^a \mapsto \tilde{N}^a : \pi'_M(p, \lambda) \mapsto \pi'_N(P^1\Phi(p), \lambda)$$

où $p \in P^1M$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$. L'application $\tilde{\Phi}^a$ est évidemment une immersion et un homomorphisme de fibrés principaux induisant Φ sur les bases M et N et l'identité entre les groupes structuraux $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^+$.

Enfin, les deux remarques suivantes seront importantes dans la suite : tout d'abord, si $b, c \in \mathbb{R}$, alors $\mathbf{F}_c(TM)$ est isomorphe en tant que fibré vectoriel à $Hom(\mathbf{F}_b(TM), \mathbf{F}_{b+c}(TM))$. En effet, considérons l'application

$$f : \mathbf{F}_c(TM) \mapsto Hom(\mathbf{F}_b(TM), \mathbf{F}_{b+c}(TM)) : \varphi \mapsto \varphi.,$$

où, si $\varphi \in \mathbf{F}_c(T_xM)$, $\varphi.$ est l'application linéaire entre $\mathbf{F}_b(T_xM)$ et $\mathbf{F}_{b+c}(T_xM)$ consistant en la multiplication par φ telle que nous l'avons décrite auparavant. L'application f est visiblement une bijection. On peut évidemment placer sur $Hom(\mathbf{F}_b(TM), \mathbf{F}_{b+c}(TM))$ la structure de variété qui fait de f un difféomorphisme. Dans ces conditions, f est un isomorphisme de fibrés vectoriels induisant l'identité sur la base M. Nous mettons la deuxième remarque sous forme de proposition :

Proposition 3.13 Si $b \in \mathbb{R}$ et si $a \neq 0$, $\mathbf{F}_b(TM)$ est isomorphe en tant que fibré vectoriel au fibré associé au fibré principal $\tilde{M}^a$ à fibre type $\mathbb{R}$ où l'action du groupe structural $\mathbb{R}^+$ est donnée par

$$l : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : (\lambda, s) \mapsto \lambda^{\frac{b}{a}} s.$$

On notera $\mathbf{F}_b^a(TM)$ ce fibré associé et π_b^a la projection naturelle lui correspondant. En outre, on désignera par $\tilde{\varphi}$ la fonction équivariante correspondant à la section $\varphi \in \Gamma^\infty(\mathbf{F}_b^a(TM))$. Si $y \in \tilde{M}^a$ est fixé, en désignant l'inverse de l'application

$$t \mapsto \pi_b^a(y, t) = s$$

de $\mathbb{R}$ dans la fibre $\mathbf{F}_b^a(T_xM)$ par $t = y^{-1}s$, on a

$$\tilde{\varphi}(y) = y^{-1}\varphi(\tau^a(y)).$$

Démonstration. L'application

$$\phi : \mathbf{F}_b^a(TU) \mapsto \mathbf{F}_b(TU) : \pi_b^a(y,t) \mapsto ty^{\frac{b}{a}}$$

est évidemment un isomorphisme de fibrés vectoriels. Son inverse est donné par

$$\phi^{-1} : \mathbf{F}_b(TU) \mapsto \mathbf{F}_b^a(TU) : \varphi \mapsto \pi_b^a(|\varphi^{\frac{a}{b}}|, \frac{\varphi}{|\varphi|})$$

si φ est non nul, tandis que si φ est nul, $\phi^{-1}(\varphi) = \pi_b^a(\varphi_+, 0)$, où φ_+ est une densité positive quelconque. Enfin, $y \in \tilde{M}^a$ étant fixé, l'application $t \mapsto \pi_b^a(y,t) = s$ de $\mathbb{R}$ dans la fibre $\mathbf{F}_b^a(T_xM)$ est évidemment une bijection. Dans ces conditions, on a bien

$$\tilde{\varphi}(y) = y^{-1}\varphi(\tau^a(y)),$$

puisque la relation

$$\pi_b^a(y, \tilde{\varphi}(y)) = \varphi(\tau^a(y))$$

est vérifiée par définition d'une fonction équivariante. En fait, on a évidemment :

$$\tilde{\varphi}(y) = \frac{\varphi(\tau^a(y))}{y^{\frac{b}{a}}}. \quad \blacksquare$$

Chapitre 4

Relèvement d'une connexion sans torsion

4.1 Définitions

Soit M une variété de dimension m et ∇ une connexion sans torsion dans le fibré tangent de M. Soient alors ω la 1-forme de connexion correspondante dans le fibré des repères linéaires et ω^a la 1-forme de connexion induite dans $\tilde{M}^a$ pour $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. On désignera par X^h le relèvement horizontal à $\tilde{M}^a$ d'un champ de vecteurs X sur M et $\mathcal{E}$ symbolisera le champ fondamental 1^* de $\tilde{M}^a$.

Si $\overline{\nabla}$ est une connexion sans torsion dans le fibré tangent de $\tilde{M}^a$, on dira qu'elle est *invariante* si

$$(L_{\mathcal{E}}\overline{\nabla})(Z, Z') = [\mathcal{E}, \overline{\nabla}_Z Z'] - \overline{\nabla}_{[\mathcal{E},Z]}Z' - \overline{\nabla}_Z[\mathcal{E}, Z'] = 0$$

pour tous $Z, Z' \in Vect(\tilde{M}^a)$.

On appellera un *relèvement naturel de connexions sans torsion au fibré principal* $\tilde{M}^a$ une application A_M associant à une connexion sans torsion ∇ sur M une connexion sans torsion $A_M(\nabla)$ sur $\tilde{M}^a$ telle que

1. Pour toute immersion $\Phi : M \mapsto N$ où $\dim N = m$, on a

   $$A_M(\Phi^*\nabla') = \tilde{\Phi}^{a*} A_N(\nabla')$$

   pour toute connexion sans torsion ∇' dans le fibré tangent de N.

2. Pour toute connexion sans torsion ∇ dans le fibré tangent de M, $A_M(\nabla)$ est invariant.

On appellera $A_M(\nabla)$ le *relèvement naturel de la connexion* ∇ *à* $\tilde{M}^a$ *par rapport à* A_M.

4.2 Existence de relèvements naturels

Proposition 4.1 Soient X et Y deux champs de vecteurs sur M et $\mu, \nu, \rho \in \mathbb{R}$. Les formules suivantes déterminent un relèvement naturel $\overline{\nabla}$ d'une connexion sans torsion ∇ dans le fibré tangent de $\tilde{M}^a$:

1. $\overline{\nabla}_{X^h} Y^h := (\nabla_X Y)^h + \frac{a}{2}\tau^{a*}((trR)(X,Y))\mathcal{E} + \mu\tau^{a*}(Ric(X,Y) + Ric(Y,X))\mathcal{E}$,

2. $\overline{\nabla}_{X^h}\mathcal{E} := \nu X^h$,

3. $\overline{\nabla}_{\mathcal{E}} X^h := \nu X^h$,

4. $\overline{\nabla}_{\mathcal{E}}\mathcal{E} := \rho\mathcal{E}$.

D'autre part, tout relèvement naturel de connexions sans torsion est de la forme précédente pour des nombres réels μ, ν, ρ bien choisis.

Démonstration. Soient $\varphi, \varphi' \in \Gamma^\infty(\mathbf{F}_a(TM))$ et φ^v, φ'^v leurs relèvements verticaux. Rappelons que si (E,p,M) est un fibré vectoriel, le *relèvement vertical d'une section* φ de E est le champ de vecteurs de E défini de la manière suivante:

$$\varphi^v(e) := \frac{d}{dt}(e + t\varphi(p(e)))|_{t=0} \quad \forall e \in E.$$

C'est évidemment un champ de vecteurs vertical.

Les formules suivantes définissent une connexion $\check{\nabla}$ dans le fibré tangent de $\mathbf{F}_a(TM)$:

1. $\check{\nabla}_{X^\mathbf{h}} Y^\mathbf{h} = (\nabla_X Y)^\mathbf{h}$,
2. $\check{\nabla}_{\varphi^v} Y^\mathbf{h} = 0$,
3. $\check{\nabla}_{X^\mathbf{h}} \varphi'^v = (\nabla_X \varphi')^v$,
4. $\check{\nabla}_{\varphi^v} \varphi'^v = 0$.

De fait, si ces formules définissent une connexion, elles la déterminent entièrement puisque les relèvements horizontaux engendrent les espaces horizontaux tandis que les relèvements verticaux de sections engendrent les espaces verticaux. Il reste donc à vérifier que ces égalités définissent bien une connexion. De fait, on sait que dans un domaine de carte U de M quelconque, il existe $X_1, \ldots, X_m$ formant une base de $Vect(U)$ et φ, section de $\mathbf{F}_a(TU)$, tels que $Z_0, \ldots, Z_m \in Vect(\mathbf{F}_a(TU))$ définis de la manière suivante:

$$Z_i = X_i^\mathbf{h}, i = 1, \ldots, m; Z_0 = \varphi^v$$

forment une base de $Vect(\mathbf{F}_a(TU))$. Dès lors, si $X, Y \in Vect(U)$, on a tout d'abord

$$X = \sum_{i=1}^{m} f^i X_i; Y = \sum_{i=1}^{m} g^i X_i$$

pour des fonctions $f^i, g^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Il vient alors :

$$X^{\mathbf{h}} = \sum_{i=1}^{m} (f^i \circ p) Z_i; Y^{\mathbf{h}} = \sum_{i=1}^{m} (g^i \circ p) Z_i$$

et on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
\check{\nabla}_{X^{\mathbf{h}}} Y^{\mathbf{h}} &= \sum_{i,j=1}^{m} (f^i \circ p)(g^j \circ p) \check{\nabla}_{Z_i} Z_j + \sum_{i,j=1}^{m} (f^i \circ p)(Z_i.(g^j \circ p)) Z_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} (f^i \circ p)(g^j \circ p) \check{\nabla}_{Z_i} Z_j + \sum_{i,j=1}^{m} (f^i \circ p)(((p_* Z_i).g^j) \circ p) Z_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} (f^i \circ p)(g^j \circ p) \check{\nabla}_{Z_i} Z_j + \sum_{i,j=1}^{m} (f^i \circ p)((X_i.g^j) \circ p) Z_j.
\end{aligned}$$

Si l'on définit $\check{\nabla}_{Z_i} Z_j$ de la manière suivante :

$$\check{\nabla}_{Z_i} Z_j = (\nabla_{X_i} X_j)^{\mathbf{h}},$$

alors on voit que dans U :

$$\check{\nabla}_{X^{\mathbf{h}}} Y^{\mathbf{h}} = (\nabla_X Y)^{\mathbf{h}}.$$

D'un autre côté, si ψ est une section de $\mathbf{F}_a(TU)$ on a tout d'abord

$$\psi = f\varphi$$

avec $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Il vient alors :

$$\psi^v = (f \circ p) Z_0$$

et on obtient :

$$\check{\nabla}_{X^{\mathbf{h}}} \psi^v = \sum_{i=1}^{m} (f^i \circ p)(f \circ p) \check{\nabla}_{Z_i} Z_0 + \sum_{i=1}^{m} (f^i \circ p)((X_i.f) \circ p) Z_0.$$

Si l'on définit $\check{\nabla}_{Z_i} Z_0$ de la manière suivante :

$$\check{\nabla}_{Z_i} Z_0 = (\nabla_{X_i} \varphi)^v,$$

alors on voit que dans U :

$$\check{\nabla}_{X^{\mathbf{h}}}\psi^v = (\nabla_X\psi)^v.$$

Troisièmement, il vient :

$$\check{\nabla}_{\psi^v}X^{\mathbf{h}} = (f \circ p)\sum_{i=1}^{m}(f^i \circ p)\check{\nabla}_{Z_0}Z_i + (f \circ p)\sum_{i=1}^{m}(Z_0.(f^i \circ p))Z_i.$$

Si, par définition, on pose que $\check{\nabla}_{Z_0}Z_i$ est nul dans U, alors $\check{\nabla}_{\psi^v}X^{\mathbf{h}}$ sera également nul dans U. Enfin, si ψ' est une autre section de $\mathbf{F}_a(TU)$, on a tout d'abord

$$\psi' = f'\varphi$$

avec $f' \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Il vient alors :

$$\psi'^v = (f' \circ p)Z_0$$

et on obtient :

$$\check{\nabla}_{\psi^v}\psi'^v = (f \circ p)(f' \circ p)\check{\nabla}_{Z_0}Z_0 + (f \circ p)(Z_0.(f' \circ p))Z_0.$$

Si, par définition, on pose que $\check{\nabla}_{Z_0}Z_0$ est nul dans U, alors $\check{\nabla}_{\psi^v}\psi'^v$ sera également nul dans U. Les développements précédents montrent évidemment que l'on peut définir globalement sur $\mathbf{F}_a(TM)$ une connexion satisfaisant aux quatre conditions annoncées. Puisque la torsion de ∇ s'annule, la torsion de $\check{\nabla}$ restreinte à $\tilde{M}^a$ est déterminée par les relations suivantes : on a tout d'abord

$$\begin{aligned}
Tor_{\check{\nabla}}(X^{\mathbf{h}}, Y^{\mathbf{h}}) &= \check{\nabla}_{X^{\mathbf{h}}}Y^{\mathbf{h}} - \check{\nabla}_{Y^{\mathbf{h}}}X^{\mathbf{h}} - [X^{\mathbf{h}}, Y^{\mathbf{h}}] \\
&= [X,Y]^{\mathbf{h}} - [X^{\mathbf{h}}, Y^{\mathbf{h}}] \\
&= [X,Y]^h - [X^h, Y^h] \\
&= -a\tau^{a*}(trR)(X,Y)\mathcal{E},
\end{aligned}$$

ensuite il vient

$$\begin{aligned}
Tor_{\check{\nabla}}(X^{\mathbf{h}}, \varphi'^v) &= \check{\nabla}_{X^{\mathbf{h}}}\varphi'^v - \check{\nabla}_{\varphi'^v}X^{\mathbf{h}} - [X^{\mathbf{h}}, \varphi'^v] \\
&= (\nabla_X\varphi')^v - 0 - [X^{\mathbf{h}}, \varphi'^v] \\
&= 0
\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} Tor_{\check{\nabla}}(\varphi^v, \varphi'^v) &= \check{\nabla}_{\varphi^v}\varphi'^v - \check{\nabla}_{\varphi'^v}\varphi^v - [\varphi^v, \varphi'^v] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Les 2 dernières égalités s'obtiennent en notant d'abord que si $\varphi = f|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|^a$ dans une carte $(U, (x^1, \ldots, x^m))$ de M où $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, alors les composantes de φ^v dans $\mathbf{F}_a(TU)$ sont égales à

$$(0, \ldots, 0, f),$$

ce qui implique évidemment

$$[\varphi^v, \varphi'^v] = 0.$$

Ensuite, comme dans U, $\nabla_X\varphi$ s'écrit de la manière suivante:

$$\nabla_X\varphi = (X.f - a\Gamma^j_{ij}X^i f)|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|^a$$

et comme $X^{\mathbf{h}}$ a pour composantes au point de coordonnées locales (x, f):

$$(X^1_x, \ldots, X^m_x, af\Gamma^j_{ij}X^i_x),$$

on constate bien que

$$(\nabla_X\varphi)^v = [X^{\mathbf{h}}, \varphi^v].$$

La connexion $\hat{\nabla}$ définie par

$$\hat{\nabla}_Z Z' := \check{\nabla}_Z Z' - \frac{1}{2}Tor_{\check{\nabla}}(Z, Z')$$

est sans torsion. On obtient facilement les relations suivantes qui déterminent $\hat{\nabla}$:

1. $\hat{\nabla}_{X^{\mathbf{h}}}Y^{\mathbf{h}} = (\nabla_X Y)^{\mathbf{h}} + \frac{a}{2}\tau^{a*}(trR)(X, Y)\mathcal{E}$,
2. $\hat{\nabla}_{\varphi^v}Y^{\mathbf{h}} = 0$,
3. $\hat{\nabla}_{X^{\mathbf{h}}}\varphi'^v = (\nabla_X\varphi')^v$,
4. $\hat{\nabla}_{\varphi^v}\varphi'^v = 0$.

Il résulte de 2 que

$$\hat{\nabla}_{\mathcal{E}}X^{\mathbf{h}} = \hat{\nabla}_{\mathcal{E}}X^h = 0.$$

Ensuite, comme l'expression locale de $\mathcal{E}$ au point de coordonnées locales (x, λ) est égale à

$$(0, \ldots, 0, \lambda),$$

il vient

$$[X^{\mathbf{h}}, \mathcal{E}] = 0$$

et donc

$$0 = [X^h, \mathcal{E}] = [X^{\mathbf{h}}, \mathcal{E}] = \hat{\nabla}_{X^h}\mathcal{E} - \hat{\nabla}_{\mathcal{E}}X^{\mathbf{h}} = \hat{\nabla}_{X^h}\mathcal{E} - 0 = \hat{\nabla}_{X^h}\mathcal{E}.$$

Enfin, l'égalité

$$\hat{\nabla}_{\varphi^v}\varphi'^v = 0$$

implique

$$\hat{\nabla}_{\mathcal{E}}\varphi'^v = 0.$$

Par conséquent,

$$\hat{\nabla}_{\varphi^v}\mathcal{E} = \hat{\nabla}_{\varphi^v}\mathcal{E} - \hat{\nabla}_{\mathcal{E}}\varphi^v = [\varphi^v, \mathcal{E}] = \varphi^v.$$

On obtient donc finalement que

$$\hat{\nabla}_{\mathcal{E}}\mathcal{E} = \mathcal{E}.$$

La connexion $\hat{\nabla}$ restreinte à $\tilde{M}^a$ est ainsi déterminée par les relations suivantes :

1. $\hat{\nabla}_{X^h}Y^h = (\nabla_X Y)^h + \frac{a}{2}(\tau^{a*}(trR)(X,Y))\mathcal{E}$,
2. $\hat{\nabla}_{\mathcal{E}}X^h = 0$,
3. $\hat{\nabla}_{X^h}\mathcal{E} = 0$,
4. $\hat{\nabla}_{\mathcal{E}}\mathcal{E} = \mathcal{E}$.

La somme $\overline{\nabla}$ de $\hat{\nabla}$ et d'un champ de tenseurs 2-covariant symétrique est évidemment une connexion sans torsion dans le fibré tangent de $\tilde{M}^a$. Ce champ peut être défini sur les champs de vecteurs X^h et $\mathcal{E}$. En le notant W et en le définissant de la manière suivante :

1. $W(X^h, Y^h) := \mu\tau^{a*}(Ric(X,Y) + Ric(Y,X))\mathcal{E}$,
2. $W(X^h, \mathcal{E}) := \nu X^h$,
3. $W(\mathcal{E}, \mathcal{E}) := (\rho - 1)\mathcal{E}$,

on s'aperçoit que $\overline{\nabla}$ est une connexion sans torsion bien définie dans le fibré tangent de $\tilde{M}^a$. Vérifions que cette définition est légitime : dans un domaine de carte U de M, on sait qu'il existe $X_1, \ldots, X_m$ formant une base de $Vect(U)$ tels que $X_1^h, \ldots, X_m^h, \mathcal{E}$ forment une base de $Vect(\tilde{U}^a)$. Si $X, Y \in Vect(M)$, alors

$$X = \sum_{i=1}^{m} f^i X_i ; Y = \sum_{i=1}^{m} g^i Y_i$$

avec les $f^i, g^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$, donc

$$X^h = \sum_{i=1}^{m} (f^i \circ p) X_i^h ; Y^h = \sum_{i=1}^{m} (g^i \circ p) Y_i^h .$$

Dès lors, il vient :

$$W(X^h, Y^h) = \sum_{i,j=1}^{m} (f^i \circ p)(g^i \circ p) W(X_i^h, Y_i^h)$$

et si l'on définit $W(X_i^h, Y_i^h)$ de la manière suivante :

$$W(X_i^h, Y_i^h) = \mu \tau^{a*}(Ric(X_i, Y_i) + Ric(Y_i, X_i))\mathcal{E},$$

on obtient dans U :

$$W(X^h, Y^h) = \mu \tau^{a*}(Ric(X, Y) + Ric(Y, X))\mathcal{E}.$$

D'autre part, on a

$$W(X^h, \mathcal{E}) = \sum_{i=1}^{m} (f^i \circ p) W(X_i^h, \mathcal{E})$$

et si l'on définit $W(X_i^h, \mathcal{E})$ de la manière suivante :

$$W(X_i^h, \mathcal{E}) = \nu X_i^h ,$$

on obtient dans U :

$$W(X^h, \mathcal{E}) = \nu X^h .$$

Les remarques précédentes montrent que l'on peut définir globalement sur $\tilde{M}^a$ un champ de tenseurs W vérifiant les propriétés annoncées.

Pour montrer l'invariance de $\overline{\nabla}$, il suffit de vérifier que le champ de tenseurs $L_{\mathcal{E}}\overline{\nabla}$ s'annule sur les relèvements horizontaux et sur le champ d'Euler. Cela se remarque facilement en notant que $[\mathcal{E}, X^h] = 0 = [\mathcal{E}, \mathcal{E}]$ et que les fonctions

$$\tau^{a*}(trR)(X, Y)$$

et

$$\mu_T{}^{a*}(Ric(X,Y) + Ric(Y,X))$$

s'annulent sous l'action de $\mathcal{E}$ car leur valeur en un point ne dépend que de la fibre à laquelle ce point appartient.

Soient M' une variété de dimension m et $\Phi : M \mapsto M'$ une immersion entre M et M'. Soient enfin ∇' une connexion sans torsion dans le fibré tangent de M' et $\nabla := \Phi^*\nabla'$ l'image réciproque de ∇. Pour démontrer la naturalité du relèvement $\nabla \mapsto \overline{\nabla}$, on observe d'abord que la différence de connexions

$$\overline{\Phi^*\nabla'} - \tilde{\Phi}^{a*}\overline{\nabla'}$$

est un champ de tenseurs symétriques. Pour vérifier qu'il s'annule, il suffira de vérifier que

1. $\overline{\Phi^*\nabla'}_{\tilde{\Phi}^{a*}X'^{h'}}\tilde{\Phi}^{a*}Y'^{h'} = \tilde{\Phi}^{a*}\overline{\nabla'}_{\tilde{\Phi}^{a*}X'^{h'}}\tilde{\Phi}^{a*}Y'^{h'}$
2. $\overline{\Phi^*\nabla'}_{\tilde{\Phi}^{a*}X'^{h'}}\tilde{\Phi}^{a*}\mathcal{E}' = \tilde{\Phi}^{a*}\overline{\nabla'}_{\tilde{\Phi}^{a*}X'^{h'}}\tilde{\Phi}^{a*}\mathcal{E}'$
3. $\overline{\Phi^*\nabla'}_{\tilde{\Phi}^{a*}\mathcal{E}'}\tilde{\Phi}^{a*}\mathcal{E}' = \tilde{\Phi}^{a*}\overline{\nabla'}_{\tilde{\Phi}^{a*}\mathcal{E}'}\tilde{\Phi}^{a*}\mathcal{E}'$,

où $X' \in Vect(M')$, $\mathcal{E}'$ désigne le champ d'Euler de $\tilde{M'}^a$ et où $(.)^{h'}$ désigne le relèvement horizontal correspondant à ∇'. De fait, notons que l'on a

$$\tilde{\Phi}^{a*}\mathcal{E}' = \mathcal{E}$$

et

$$\tilde{\Phi}^{a*}X'^{h'} = (\Phi^*X')^h$$

où $(.)^h$ désigne le relèvement horizontal correspondant à ∇. En effet, si $y \in \tilde{M}^a$, il existe un voisinage de y tel que $\tilde{\Phi}^a$ constitue un difféomorphisme entre ce voisinage et son image. Si t est suffisamment proche de 0, on a alors

$$y \exp(t) = \tilde{\Phi}^{a-1}(\tilde{\Phi}^a(y) \exp(t)),$$

ce qui fait que

$$\mathcal{E}_y = \frac{d}{dt} y \exp(t)|_{t=0} = \tilde{\Phi}^{a*}_{\tilde{\Phi}^a(y)}(\mathcal{E}'_{\tilde{\Phi}^a(y)}).$$

D'autre part, la relation

$$\nabla_X Y = \Phi^*(\nabla'_{\Phi_* X}\Phi_* Y) \quad \forall X, Y \in Vect(M)$$

nous montre que

$$\begin{aligned} X^H.f_Y &= ((\Phi_*X)^{H'}.f'_{\Phi_*Y}) \circ P^1\Phi \\ &= ((\Phi_*X)^{H'}.(f_Y \circ (P^1\Phi)^{-1})) \circ P^1\Phi \\ &= ((P^1\Phi)_*^{-1}(\Phi_*X)^{H'}).f_Y \quad \forall X, Y \in Vect(M), \end{aligned}$$

donc

$$(P^1\Phi)_*X^H = (\Phi_*X)^{H'} \quad \forall X \in Vect(M).$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} (\Phi_*X)^{h'} &= \Xi_*^{a'}(\Phi_*X)^{H'} \\ &= \Xi_*^{a'} \circ (P^1\Phi)_*X^H \\ &= (\tilde{\Phi}_*^a \circ \Xi_*^a)X^H \\ &= \tilde{\Phi}_*^a X^h \quad \forall X \in Vect(M). \end{aligned}$$

En outre, le tenseur de courbure R de ∇ est égal à l'image réciproque Φ^*R' du tenseur de courbure R' de ∇' puisque

$$\begin{aligned} (\Phi^*R')(X,Y,Z) &= \Phi^*(\nabla'_{\Phi_*X}\nabla'_{\Phi_*Y}\Phi_*Z - \nabla'_{\Phi_*Y}\nabla'_{\Phi_*X}\Phi_*Z - \nabla'_{[\Phi_*X,\Phi_*Y]}\Phi_*Z) \\ &= \Phi^*(\nabla'_{\Phi_*X}\Phi_*(\nabla_Y Z) - \nabla'_{\Phi_*Y}\Phi_*(\nabla_X Z) - \Phi_*(\nabla_{[X,Y]}Z)) \\ &= R(X,Y,Z). \end{aligned}$$

Il en va de même pour le tenseur trR et le tenseur Ric:

$$\begin{aligned} (\Phi^*trR')(X,Y) &= tr(\Phi_*Z \mapsto R'(\Phi_*X, \Phi_*Y)\Phi_*Z) \\ &= tr(\Phi_*Z \mapsto \Phi_*(R(X,Y)Z)) \\ &= (trR)(X,Y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Phi^*Ric')(Z,Y) &= tr(\Phi_*X \mapsto R'(\Phi_*X, \Phi_*Y)\Phi_*Z) \\ &= tr(\Phi_*X \mapsto \Phi_*(R(X,Y)Z)) \\ &= Ric(Z,Y). \end{aligned}$$

En notant X l'image réciproque de X', Y l'image réciproque d'un autre champ de vecteur Y' sur M' et τ'^a la projection $\tilde{M'}^a \mapsto M'$, on a alors d'une part :

$$\overline{\Phi^*\nabla'}_{\tilde{\Phi}^{a*}X'^{h'}}\tilde{\Phi}^{a*}Y'^{h'} = \overline{\nabla}_{X^h}Y^h$$

$$= (\nabla_X Y)^h + \frac{a}{2}(\tau^{a*}(trR)(X,Y))\mathcal{E} + \mu\tau^{a*}(Ric(X,Y) + Ric(Y,X))\mathcal{E}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
(\tilde{\Phi}^{a*}\overline{\nabla'})_{\tilde{\Phi}^{a*}X'^{h'}}\tilde{\Phi}^{a*}Y'^{h'} &= \tilde{\Phi}^{a*}(\overline{\nabla'}_{X'^{h'}}Y'^{h'}) \\
&= \tilde{\Phi}^{a*}((\nabla'_{X'}Y')^{h'} + \tfrac{a}{2}(\tau'^{a*}(trR')(X',Y'))\mathcal{E}') \\
&\qquad + \mu\tilde{\Phi}^{a*}(\tau'^{a*}(Ric'(X',Y') + Ric'(Y',X'))\mathcal{E}') \\
&= (\Phi^*(\nabla'_{X'}Y'))^h + \tfrac{a}{2}\tau^{a*}(\Phi^*((trR')(X',Y')))\tilde{\Phi}^{a*}\mathcal{E}' \\
&\qquad + \mu\tau^{a*}\Phi^*(Ric'(X',Y') + Ric'(Y',X'))\tilde{\Phi}^{a*}\mathcal{E}' \\
&= (\nabla_X Y)^h + \tfrac{a}{2}(\tau^{a*}(trR)(X,Y))\mathcal{E} + \mu\tau^{a*}(Ric(X,Y) + Ric(Y,X))\mathcal{E}.
\end{aligned}$$

Ensuite, on obtient

$$\begin{aligned}
\overline{\Phi^*\nabla'}_{\tilde{\Phi}^{a*}X'^{h'}}\tilde{\Phi}^{a*}\mathcal{E}' &= \overline{\nabla}_{X^h}\mathcal{E} \\
&= \nu X^h
\end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned}
(\tilde{\Phi}^{a*}\overline{\nabla'})_{\tilde{\Phi}^{a*}X'^{h'}}\tilde{\Phi}^{a*}\mathcal{E}' &= \tilde{\Phi}^{a*}(\overline{\nabla'}_{X'^{h'}}\mathcal{E}') \\
&= \tilde{\Phi}^{a*}(\nu X'^{h'}) \\
&= \nu(\Phi^*X')^h \\
&= \nu X^h.
\end{aligned}$$

Enfin, on a :

$$\begin{aligned}
\overline{\Phi^*\nabla'}_{\tilde{\Phi}^{a*}\mathcal{E}'}\tilde{\Phi}^{a*}\mathcal{E}' &= \overline{\nabla}_{\mathcal{E}}\mathcal{E} \\
&= \rho\mathcal{E}
\end{aligned}$$

tandis que

$$(\tilde{\Phi}^{a*}\overline{\nabla'})_{\tilde{\Phi}^{a*}\mathcal{E}'}\tilde{\Phi}^{a*}\mathcal{E}' = \tilde{\Phi}^{a*}(\overline{\nabla'}_{\mathcal{E}'}\mathcal{E}')$$

$$\begin{aligned} &= \tilde{\Phi}^{a*}(\rho\mathcal{E}') \\ &= \rho\mathcal{E}, \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\nabla \mapsto \overline{\nabla}$ est un relèvements naturel de connexions quels que soient les réels μ, ν, ρ.

Réciproquement, nous allons montrer que tout relèvement naturel de connexions a la forme indiquée dans l'énoncé de la proposition. On sait que toute autre connexion sans torsion ∇^o sur $\tilde{M}^a$ qui définit un relèvement naturel de connexions est égal à la somme de $\overline{\nabla}$ et d'un champ de tenseurs symétriques que nous allons noter C. Il suffit de définir C sur les relèvements horizontaux et le champ d'Euler, C devant être invariant. Si on note G_t le flot du champ d'Euler et si Z, Z' sont des champs de vecteurs invariants sur $\tilde{M}^a$, l'invariance de C signifie

$$(\mathcal{E}.C)(Z,Z') = [\mathcal{E}, C(Z,Z')] - C([\mathcal{E},Z],Z') - C(Z,[\mathcal{E},Z']) = [\mathcal{E}, C(Z,Z')] = 0,$$

donc

$$G_{t*y}C_y(Z_y, Z'_y) = C_{ye^t}(G_{t*y}Z_y, G_{t*y}Z'_y) = C_{ye^t}(Z_{ye^t}, Z'_{ye^t}) \qquad (1)$$

pour tous $y \in \tilde{M}^a$, $t \in \mathbb{R}$. De fait, comme Z est invariant, on a:

$$\frac{d}{dt}G_{-t*}Z_{G_t(y)} = 0 \quad \forall y \in \tilde{M}^a, \forall t,$$

donc

$$G_{-t*}Z_{ye^t} = Z_y \quad \forall y \in \tilde{M}^a, \forall t,$$

donc

$$Z_{ye^t} = G_{t*y}Z_y \quad \forall y \in \tilde{M}^a, \forall t.$$

On obtient de la même façon que

$$Z'_{ye^t} = G_{t*y}Z'_y \quad \forall y \in \tilde{M}^a, \forall t$$

et que

$$C_{ye^t}(Z_{ye^t}, Z'_{ye^t}) = G_{t*y}C_y(Z_y, Z'_y) \quad \forall y \in \tilde{M}^a, \forall t.$$

Si on applique $\tau^a_{*ye^t}$ à l'équation (1), on voit que la valeur de $\tau^a_{*y}C_y(Z_y, Z'_y)$ ne dépend que de la fibre à laquelle le point y appartient. On peut ainsi définir un champ de tenseurs $C_1[\nabla]$ appartenant à $\Gamma^\infty(TM \otimes S^2T^*M)$ de la manière suivante:

$$C_1[\nabla]_{\tau^a(y)}(X_{\tau^a(y)}, Y_{\tau^a(y)}) := \tau^a_{*y}C_y(X^h_y, Y^h_y).$$

On peut de même définir un champ de tenseurs $C_2[\nabla]$ appartenant à $\Gamma^\infty(Hom(TM,TM))$:

$$C_2[\nabla]_{\tau^a(y)}(X_{\tau^a(y)}) := \tau^a_{*y} C_y(X^h_y, \mathcal{E})$$

et un champ de vecteurs $C_3[\nabla]$ sur M :

$$C_3[\nabla]_{\tau^a(y)} := \tau^a_{*y} C_y(\mathcal{E}, \mathcal{E}).$$

Les champs de vecteurs

$$C(X^h, Y^h) - (C_1[\nabla](X,Y))^h,$$

$$C(X^h, \mathcal{E}) - (C_2[\nabla](X))^h$$

et

$$C(\mathcal{E}, \mathcal{E}) - C_3[\nabla]^h$$

sont des champs de vecteurs verticaux invariants, ce sont donc des multiples de $\mathcal{E}$ par des fonctions invariantes que l'on va noter respectivement g_1, g_2 et g_3. Comme $g_1(y)$, $g_2(y)$ et $g_3(y)$ ne dépendent que de la fibre à laquelle y appartient, on peut définir une 2-forme symétrique $C_4[\nabla]$ appartenant à $\Gamma^\infty(S^2T^*M)$, une 1-forme $C_5[\nabla]$ appartenant à $\Gamma^\infty(T^*M)$ et une fonction $C_6[\nabla]$ appartenant à $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ de la façon suivante :

$$C_4[\nabla]_{\tau^a(y)}(X_{\tau^a(y)}, Y_{\tau^a(y)}) := g_1(y),$$

$$C_5[\nabla]_{\tau^a(y)}(X_{\tau^a(y)}) := g_2(y),$$

$$C_6[\nabla]_{\tau^a(y)} := g_3(y).$$

En résumé, la connexion ∇^o est de la forme suivante :

$$\nabla^o_{X^h} Y^h = \overline{\nabla}_{X^h} Y^h + (C_1[\nabla](X,Y))^h + \tau^{a*} C_4[\nabla](X,Y)\mathcal{E},$$

$$\nabla^o_{X^h} \mathcal{E} = \nabla^o_{\mathcal{E}} X^h = \overline{\nabla}_{X^h} \mathcal{E} + (C_2[\nabla](X))^h + \tau^{a*} C_5[\nabla](X)\mathcal{E},$$

$$\nabla^o_{\mathcal{E}} \mathcal{E} = \overline{\nabla}_{\mathcal{E}} \mathcal{E} + C_3[\nabla]^h + \tau^{a*} C_6[\nabla]\mathcal{E}.$$

Grâce à la naturalité des relèvements $\nabla \mapsto \nabla^o$ et $\nabla \mapsto \overline{\nabla}$, les applications $\nabla \mapsto C_k[\nabla]$, $1 \leq l \leq 6$, définissent des opérateurs naturels

$$C_1 : Q_\tau P^1 \mapsto T \otimes S^2T^*, \quad C_2 : Q_\tau P^1 \mapsto Hom(T,T), \quad C_3 : Q_\tau P^1 \mapsto T,$$

$$C_4 : Q_\tau P^1 \mapsto S^2T^*, \quad C_5 : Q_\tau P^1 \mapsto T^*, \quad C_6 : Q_\tau P^1 \mapsto S^0T^*.$$

A partir de là, on peut démontrer grâce à des considérations un peu techniques utilisant la théorie des opérateurs naturels que $C_1[\nabla]$, $C_3[\nabla]$ et $C_5[\nabla]$ sont nuls, que $C_2[\nabla](X) = \nu X$, que $C_4[\nabla]$ est proportionnel à la partie symétrique du tenseur de Ricci et que $C_6[\nabla] = \rho$ (ν et ρ étant des constantes réelles). Le lecteur intéressé trouvera de plus amples informations dans [5]. On note d'abord que tous les opérateurs C_l, $(1 \le l \le 6)$ sont d'un ordre fini que l'on désignera par r. Le foncteur $Q_\tau P^1 M$ étant d'ordre 2, les foncteurs $T \otimes S^2T^*$, $Hom(T,T)$, T, S^2T^*, T^* et S^0T^* étant d'ordre 1, on sait que C_l $(1 \le l \le 6)$ est déterminé par une application f_l de $J^rQ_\tau P^1\mathbb{R}^m$ dans un $GL(m,\mathbb{R})$-module V_l qui est G_m^{r+2}-équivariante, f_l étant appelée l'application associée à C_l. Les $GL(m,\mathbb{R})$-modules sont ici donnés par

$$V_1 = \mathbb{R}^m \otimes S^2\mathbb{R}^{m*}, \quad V_2 = Hom(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \quad V_3 = \mathbb{R}^m,$$

$$V_4 = S^2\mathbb{R}^{m*}, \quad V_5 = \mathbb{R}^{m*}, \quad V_6 = \mathbb{R}.$$

L'équivariance des f_l par rapport à l'action des matrices de la forme $s\mathbf{1} \in GL(m,\mathbb{R})$ $(s \in \mathbb{R})$ nous donne

$$f_l(s\Gamma_0, s^2\Gamma_1, \ldots, s^{r+1}\Gamma_r) = s^{a_l} f_l(\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_r),$$

où $\Gamma_s \in \mathbb{R}^m \otimes S^2\mathbb{R}^{m*} \otimes S^s\mathbb{R}^{m*}$ $(0 \le s \le r)$. Les nombres a_l sont évidemment donnés par

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -1,$$

$$a_4 = 2, \quad a_5 = 1, \quad a_6 = 0.$$

Dans les cas $l = 2$ et $l = 6$, on obtient d'après le théorème de la fonction homogène que $C_2[\nabla](X) = \nu X$ et que $C_6[\nabla] = \rho$ (ν et ρ étant des constantes réelles). En vertu du même théorème, on obtient trivialement que $C_3[\nabla] = 0$. Dans les cas $l = 1$ et $l = 5$, on obtient $r = 0$, ce qui fait que f_1 et f_5 sont linéaires. Grâce à l'invariance de f_1 et de f_5 par rapport à l'action du nilradical du groupe G_m^2, il s'ensuit que $f_l(\Gamma_0) = f_l(0) = 0$ pour tout $\Gamma_0 \in \mathbb{R}^m \otimes S^2\mathbb{R}^{m*}$, pour $l = 1$ et pour $l = 5$. On a donc $C_1[\nabla] = 0$ et $C_5[\nabla] = 0$.

En ce qui concerne C_4, le théorème de la fonction homogène nous renseigne tout d'abord sur le fait que f_4 est un opérateur du premier ordre. On sait que les opérateurs du premier ordre tels que f_4 sont en bijection avec les applications G_m^1-équivariantes de l'espace K dans $S^2\mathbb{R}^{m*}$, K étant égal à l'ensemble des éléments W de $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^{m*} \otimes \wedge^2\mathbb{R}^{m*}$ qui sont tels que

$$W^i_{jkl} + W^i_{klj} + W^i_{ljk} = 0.$$

Si g est l'application correspondant à f_4, alors $f_4 = g \circ C$, où C est l'opérateur de courbure. L'équivariance de g par rapport aux homothéties donne tout d'abord

$$k^2 g(W) = g(k^2 W)$$

pour tous $k \in \mathbb{R}$, $W \in \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^{m*} \otimes \wedge^2 \mathbb{R}^{m*}$, ce qui fait que g est linéaire. Considérons l'inclusion $i : K \mapsto \mathbb{R}^m \otimes \otimes^3 \mathbb{R}^{m*}$. Puisque $\mathbb{R}^m \otimes \otimes^3 \mathbb{R}^{m*}$ est un $GL(m)$-module complètement réductible, il existe une projection équivariante $p : \mathbb{R}^m \otimes \otimes^3 \mathbb{R}^{m*} \mapsto K$ vérifiant $p \circ i = id_K$. Par le théorème du tenseur invariant, toutes les applications linéaires G^1_m-équivariantes de $\mathbb{R}^m \otimes \otimes^3 \mathbb{R}^{m*}$ dans $S^2 \mathbb{R}^{m*}$ forment une famille à 3 paramètres. Leurs restrictions à K donne la famille à 1 paramètre k d'applications associant à un tenseur W de K le tenseur de $S^2 \mathbb{R}^{m*}$ dont la composante ij est donnée par :

$$k(W^k_{kij} + W^k_{kji}).$$

On obtient donc que $C_4[\nabla]$ est proportionnel à la partie symétrique du tenseur de Ricci.

Tout relèvement naturel de connexions sans torsion est ainsi de la forme indiquée dans l'énoncé de la proposition. ∎

4.3 Unicité d'un relèvement naturel projectivement invariant

Nous allons maintenant montrer l'existence et l'unicité d'un relèvement naturel de connexions sans torsion qui ne dépend que de la classe projective de ∇.

Proposition 4.2 Soit a un nombre réel non nul et m un entier positif tel que $m > 1$. Il existe un unique relèvement naturel de connexions sans torsion $\nabla \mapsto \tilde{\nabla}$ qui est tel que $\tilde{\nabla} = \tilde{\nabla}'$ si ∇ et ∇' sont projectivement équivalentes. Le relèvement $\tilde{\nabla}$ est donné par les formules suivantes :

1. $\tilde{\nabla}_{X^h} Y^h := (\nabla_X Y)^h + \frac{a}{2}\tau^{a*}((trR)(X,Y))\mathcal{E} - \frac{a}{2}\frac{m+1}{m-1}\tau^{a*}(Ric(X,Y) + Ric(Y,X))\mathcal{E}$,
2. $\tilde{\nabla}_{X^h}\mathcal{E} := \frac{1}{a(m+1)} X^h$,
3. $\tilde{\nabla}_{\mathcal{E}} X^h := \frac{1}{a(m+1)} X^h$,
4. $\tilde{\nabla}_{\mathcal{E}}\mathcal{E} := \frac{1}{a(m+1)}\mathcal{E}$.

Démonstration. D'après la proposition précédente, il suffit d'étudier la famille de connexions qui y est mentionnée. Soit M une variété de dimension m, ∇ et ∇' deux connexions dans le fibré tangent de M projectivement équivalentes via une 1-forme α. On a donc

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X)Y + \alpha(Y)X \quad \forall X, Y \in Vect(M).$$

Nous noterons $X^{h'}$ le relèvement horizontal du champ de vecteurs X sur M à $\tilde{M}^a$ correspondant à ∇'. On désignera par ω^a la 1-forme de connexion sur $\tilde{M}^a$ correspondant à ∇ et par ω'^a la 1-forme de connexion sur $\tilde{M}^a$ correspondant à ∇'. Si θ_M est la 1-forme canonique sur P^1M à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, rappelons qu'on a la formule suivante :

$$\omega'_p(v)(X) = \omega_p(v)(X) + (\pi^*\alpha)_p(v)X + f_\alpha(p)(X)\theta_{Mp}(v) \qquad (1)$$

où $p \in P^1M, v \in T_pP^1M, X \in \mathbb{R}^m$ et où f_α est la fonction équivariante correspondant à α quand T^*M est considéré comme un fibré associé à P^1M. En effet, on a :

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X)Y + \alpha(Y)X \quad \forall X, Y \in Vect(M),$$

donc

$$X^{H'}.f_Y = X^H.f_Y + f_{\alpha(X)Y} + f_{\alpha(Y)X} \quad \forall X, Y \in Vect(M).$$

Pour tout $p \in P^1M$, si A est la matrice dont l'élément A_{ij} est donné par $X^i\alpha_j$, où X^i est la composante i de X selon le repère p et où α_j est la composante j de α selon le repère p, on a d'une part :

$$\begin{aligned} f_{\alpha(Y)X}(p) &= Af_Y(p) \\ &= \frac{d}{dt}\exp(tA)|_{t=0}f_Y(p) \\ &= -\frac{d}{dt}f_Y(p\exp(tA))|_{t=0} \\ &= (-A^*.f_Y)_p. \end{aligned}$$

D'autre part, on obtient que

$$\begin{aligned} f_{\alpha(X)Y}(p) &= \alpha(X)f_Y(p) \\ &= \alpha(X)\frac{d}{dt}\exp(t\mathbf{1})|_{t=0}f_Y(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\alpha(X)\frac{d}{dt}f_Y(p\exp(t\mathbf{1}))|_{t=0} \\ &= (-\alpha(X)\mathbf{1}^*.f_Y)_p. \end{aligned}$$

Cela implique :

$$X^{H'}.f_Y = X^H.f_Y - \alpha(X)\mathbf{1}^*.f_Y - A^*.f_Y \quad \forall X, Y \in Vect(M),$$

donc

$$X^{H'} = X^H - \alpha(X)\mathbf{1}^* - A^* \quad \forall X \in Vect(M).$$

Il vient alors :

$$v - \omega'_p(v)^* = v - \omega_p(v)^* - (\pi^*\alpha)_p(v)\mathbf{1}^* - A'^*,$$

pour tous $p \in P^1M$, $v \in T_pP^1M$, si A' est la matrice dont l'élément A'_{ij} est donné par $(\theta_{Mp}(v))^i\alpha_j$, donc

$$\omega'_p(v) = \omega_p(v) + (\pi^*\alpha)_p(v)\mathbf{1} + A' \quad \forall p \in P^1M, \quad \forall v \in T_pP^1M,$$

ce qui montre que l'égalité (1) est vraie.

Il vient alors, pour tous $p \in P^1M, v \in T_pP^1M$:

$$\begin{aligned} \omega'^a_{\Xi^a(p)}(\Xi^a_{*p}v) &= -atr(\omega'_p(v)) \\ &= -atr(\omega_p(v)) - a(\pi^*\alpha)_p(v)tr(\mathbf{1}) - a\langle f_\alpha(p), \theta_{Mp}(v)\rangle \\ &= \omega^a_{\Xi^a(p)}(\Xi^a_{*p}v) - a(m+1)(\tau^{a*}\alpha)_{\Xi^a(p)}(\Xi^a_{*p}v), \end{aligned}$$

donc

$$\omega'^a = \omega^a - a(m+1)\tau^{a*}\alpha.$$

On obtient dès lors pour tout $X \in Vect(\tilde{M}^a)$:

$$X - \omega'^a(X)^* = X - \omega^a(X)^* + a(m+1)((\tau^{a*}\alpha)(X))^*,$$

donc, en particulier, si $X \in Vect(M)$:

$$X^{h'} = X^h + a(m+1)\tau^{a*}(\alpha(X))\mathcal{E}.$$

Essayons maintenant de déterminer les valeurs de μ, ρ et ν pour que $\nabla \mapsto \tilde{\nabla}$ soit projectivement invariant : tout d'abord, la formule

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{E}}\mathcal{E} = \rho\mathcal{E}$$

n'apporte évidemment aucune contrainte sur ces valeurs. Ensuite, comme l'on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}'_{\mathcal{E}}X^h &= \tilde{\nabla}'_{\mathcal{E}}(X^{h'} - a(m+1)\tau^{a*}(\alpha(X))\mathcal{E}) \\
&= \nu X^{h'} - \rho a(m+1)\tau^{a*}(\alpha(X))\mathcal{E} \\
&= \nu X^{h} - (\rho-\nu) a(m+1)\tau^{a*}(\alpha(X))\mathcal{E} \\
&= \tilde{\nabla}_{\mathcal{E}}X^{h} - (\rho-\nu) a(m+1)\tau^{a*}(\alpha(X))\mathcal{E},
\end{aligned}$$

il faut que $\rho = \nu$. Remarquons que dans ce calcul, on a utilisé le fait que

$$\mathcal{E}.\tau^{a*}(\alpha(X)) = 0.$$

De fait, si $\varphi \in \tilde{M}^a$,

$$\mathcal{E}_\varphi = \frac{d}{dt}(\varphi \exp(t))|_{t=0}$$

et il vient alors

$$\begin{aligned}
(\mathcal{E}.\tau^{a*}(\alpha(X)))_\varphi &= \frac{d}{dt}(\alpha(X))_{\tau^a(\varphi\exp(t))}|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\alpha(X))_{\tau^a(\varphi)}|_{t=0} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Notons que l'égalité

$$\tilde{\nabla}_{X^h}\mathcal{E} = \nu X^h$$

amène exactement la même condition que la relation précédente. Enfin, il vient successivement :

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}'_{X^h}Y^h &= \tilde{\nabla}'_{X^{h'}-a(m+1)\tau^{a*}(\alpha(X))\mathcal{E}}(Y^{h'} - a(m+1)\tau^{a*}(\alpha(Y))\mathcal{E}) \\
&= (\nabla'_X Y)^{h'} + \tfrac{a}{2}\tau^{a*}((trR')(X,Y))\mathcal{E} + \mu\tau^{a*}(Ric'(X,Y) + Ric'(Y,X))\mathcal{E} \\
&\quad -a(m+1)\tau^{a*}(X(\alpha(Y)))\mathcal{E} - \nu a(m+1)\tau^{a*}(\alpha(Y))X^{h'} \\
&\quad -\nu a(m+1)\tau^{a*}(\alpha(X))Y^{h'} + \rho a^2(m+1)^2\tau^{a*}(\alpha(X)\alpha(Y))\mathcal{E} \\
&= (\nabla_X Y)^{h} + \tfrac{a}{2}\tau^{a*}((trR)(X,Y))\mathcal{E} + \mu\tau^{a*}(Ric(X,Y) + Ric(Y,X))\mathcal{E} \\
&\quad +a(m+1)\tau^{a*}(\alpha(\nabla_X Y))\mathcal{E} \\
&\quad +\tau^{a*}(\alpha(X))Y^h + a(m+1)\tau^{a*}(\alpha(X)\alpha(Y))\mathcal{E} \\
&\quad +\tau^{a*}(\alpha(Y))X^h + a(m+1)\tau^{a*}(\alpha(Y)\alpha(X))\mathcal{E} \\
&\quad +\tfrac{a}{2}(m+1)\tau^{a*}((\nabla_X\alpha)(Y) - (\nabla_Y\alpha)(X))\mathcal{E}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\mu(m-1)\tau^{a*}(2\alpha(X)\alpha(Y) - (\nabla_X\alpha)(Y) - (\nabla_Y\alpha)(X))\mathcal{E} \\
&-a(m+1)\tau^{a*}((\nabla_X\alpha)(Y) + \alpha(\nabla_X Y))\mathcal{E} \\
&-\nu a(m+1)(\tau^{a*}(\alpha(Y))X^h + \tau^{a*}(\alpha(X))Y^h) \\
&+a^2(m+1)^2(\rho - 2\nu)\tau^{a*}(\alpha(X)\alpha(Y))\mathcal{E},
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}'_{X^h}Y^h = \tilde{\nabla}_{X^h}Y^h &\\
&+(1-\nu a(m+1))(\tau^{a*}(\alpha(Y))X^h + \tau^{a*}(\alpha(X))Y^h) \\
&-(\tfrac{a}{2}(m+1) + \mu(m-1))\tau^{a*}((\nabla_X\alpha)(Y) + (\nabla_Y\alpha)(X))\mathcal{E} \\
&+(2a(m+1) + 2\mu(m-1) + (\rho-2\nu)a^2(m+1)^2)\tau^{a*}(\alpha(X)\alpha(Y))\mathcal{E}.
\end{aligned}
$$

Cette égalité amène 3 nouvelles contraintes sur les valeurs de μ, ν et ρ qui, jointes à la condition $\rho = \nu$, montrent que le relèvement $\nabla \mapsto \tilde{\nabla}$ est projectivement invariant si et seulement si

$$\mu = -\frac{a}{2}\frac{m+1}{m-1}, \quad \nu = \frac{1}{a(m+1)}, \quad \rho = \frac{1}{a(m+1)}. \quad \blacksquare$$

Chapitre 5

Relèvement des champs de tenseurs symétriques

5.1 Définitions

Soit M une variété différentiable, ∇ une connexion sans torsion dans le fibré tangent de M et A un champ de tenseurs dans $\Gamma^\infty(\mathbf{F}_c(TM) \otimes S^kTM)$. On rappelle que $\mathbf{F}_c(TM)$ est isomorphe en tant que fibré vectoriel à $Hom(\mathbf{F}_b(TM), \mathbf{F}_{b+c}(TM))$. Dans ce chapitre, nous allons relever A à $\tilde{M}^a$ (où $a \neq 0$) d'une façon qui ne dépend que de la classe projective de ∇.

Pour tout entier positif k et pour tout $y \in \tilde{M}^a$, on définit d'abord un relèvement horizontal $()^h_y$ de $\mathbf{F}_c(T_{\tau^a(y)}M) \otimes S^kT_{\tau^a(y)}M$ dans $S^kT_y\tilde{M}^a$ de la manière suivante : si $v_1, \ldots, v_k \in T_{\tau^a(y)}M$ et si $s \in \mathbf{F}_c(T_{\tau^a(y)}M)$, alors

$$(s \otimes (v_1 \vee \ldots \vee v_k))^h_y := (y^{-1}s)(v^h_{1y} \vee \ldots \vee v^h_{ky}) \in S^kT_y\tilde{M}^a.$$

Il en découle ainsi un relèvement horizontal $A \mapsto A^h$ des sections A appartenant à $\Gamma^\infty(\mathbf{F}_c(TM) \otimes S^kTM)$ où A^h est un élément de $\Gamma^\infty(S^kT\tilde{M}^a)$.

Dans la suite, on notera $\mathbf{r}$ le multiple suivant de la partie symétrique du tenseur de Ricci Ric de ∇ :

$$\mathbf{r}(X,Y) := \frac{1}{2(m-1)}(Ric(X,Y) + Ric(Y,X)),$$

où $X, Y \in Vect(M)$. D'autre part, on peut étendre la définition de l'application $\mathbf{Div}$ rencontrée au chapitre 3 à STM en posant qu'en coordonnées locales :

$$\mathbf{Div}(A) = \sum_{j=1}^{m} i(dx^j)(\nabla_{\partial_j}A).$$

Cette définition est bien intrinsèque: de fait, si $dx'^1, \ldots, dx'^m$ et $\partial'_1, \ldots, \partial'_m$ sont d'autres bases locales des fibrés respectivement cotangent et tangent, alors, si $\partial\chi$ représente la différentielle du changement de coordonnées locales, il vient:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} i(dx'^j)(\nabla_{\partial'_j} A) &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} i((\partial\chi)^j_k dx^k)(\nabla_{(\partial\chi^{-1})^l_j \partial_l} A) \\ &= \sum_{l=1}^{m} i(dx^l)(\nabla_{\partial_l} A).\end{aligned}$$

Pour tout entier positif k et pour tous réels a, c tels que $a \neq 0$, on définit $\Gamma^\infty(S^kT\tilde{M}^a)^{-\frac{c}{a}}$ comme le sous-espace vectoriel de toutes les sections $(-\frac{c}{a})$-équivariantes B appartenant à $\Gamma^\infty(S^kT\tilde{M}^a)$, i.e. qui satisfont à la condition suivante:

$$L_\mathcal{E} B = -\frac{c}{a} B. \qquad (1)$$

En outre, on notera $\Gamma^\infty(S^kT\tilde{M}^a)^{-\frac{c}{a}}_{\tilde{\nabla}}$ le sous-espace vectoriel de $\Gamma^\infty(S^kT\tilde{M}^a)^{-\frac{c}{a}}$ formé des sections B qui sont telles que

$$\widetilde{\mathbf{Div}} B = 0,$$

où $\widetilde{\mathbf{Div}}$ désigne la divergence covariante calculée par rapport à $\tilde{\nabla}$.

Lemme 5.1 Si $A \in \Gamma^\infty(\mathbf{F}_c(TM) \otimes S^kTM)$, A^h est $\frac{-c}{a}$-équivariant:

$$L_E A^h = -\frac{c}{a} A^h.$$

Démonstration. En utilisant l'invariance des relèvements horizontaux des champs de vecteurs de M, comme on peut supposer que A s'écrit localement sous la forme suivante:

$$A = s \otimes (v_1 \vee \ldots \vee v_k),$$

où s est une c-densité locale et où $v_1, \ldots, v_k$ sont des champs de vecteurs locaux de M, il vient:

$$\begin{aligned}(L_\mathcal{E}(s \otimes (v_1 \vee \ldots \vee v_k))^h)_y &= \frac{d}{dt}(ye^t)^{-1} s|_{t=0}(v^h_{1y} \vee \ldots \vee v^h_{ky}) \\ &= \frac{d}{dt} e^{-\frac{c}{a}t}|_{t=0}(y^{-1}s)(v^h_{1y} \vee \ldots \vee v^h_{ky}) \\ &= -\frac{c}{a} A^h_y. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

5.2 Calcul de $\widetilde{\mathrm{Div}}$

La proposition qui suit nécessite un lemme :

Lemme 5.2 Si $A \in \Gamma^\infty(\mathbf{F}_c(TM) \otimes S^jTM)$, A peut s'écrire localement sous la forme d'une combinaison linéaire de termes de la forme

$$\varphi \otimes X^{\vee j},$$

où φ est une c-densité locale et où X est un champ de vecteurs local.

Démonstration. De fait, en utilisant la correspondance tenseurs-polynômes, il suffit pour démontrer cela de montrer que si V est un espace vectoriel de dimension m, tout polynôme homogène de degré j sur V^* s'écrit comme une combinaison linéaire de polynômes de la forme $(\sum_{i=1}^m x^i\xi_i)^j$, où $\xi \in V^*$ et où $x \in \mathbb{R}^m$. Cela revient évidemment à démontrer que si $\Xi \in (Pol^j(V^*))^*$, alors

$$\Xi((\sum_{i=1}^m x^i\xi_i)^j) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \Rightarrow \Xi = 0.$$

Une base de $Pol^j(V^*)$ est constituée par les ξ^α, où α est tel que $|\alpha| = j$; la base duale correspondante est alors constituée des $\frac{\partial_\xi^\alpha}{\alpha!}$. Si $\Xi \in (Pol^j(V^*))^*$, Ξ s'écrit alors sous la forme

$$\sum_{|\alpha|=j} \Xi_\alpha \frac{\partial_\xi^\alpha}{\alpha!},$$

où les $\Xi_\alpha \in \mathbb{R}$. Le fait que

$$\Xi((\sum_{i=1}^m x^i\xi_i)^j) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

se traduit alors par le fait que

$$\sum_{|\alpha|=j} \Xi_\alpha \frac{j!x^\alpha}{\alpha!} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

En faisant agir successivement sur cette égalité les opérateurs ∂_x^α, avec $|\alpha| = j$, on en déduit que tous les coefficients Ξ_α sont nuls. ∎

Proposition 5.1 Soient j, l, deux entiers positifs et soit $A \in \Gamma^\infty(\mathbf{F}_c(TM) \otimes S^jTM)$. On a la formule suivante :

$$\widetilde{\mathbf{Div}}(A^h \vee \mathcal{E}^{\vee l}) = (\mathbf{Div}A)^h \vee \mathcal{E}^{\vee l} - 2a(m+1)(i(\mathbf{r})A)^h \vee \mathcal{E}^{\vee(l+1)}$$
$$+\tfrac{l(2j+l+m-(m+1)c)}{a(m+1)}A^h \vee \mathcal{E}^{\vee(l-1)}.$$

Démonstration. Il suffit de démontrer cette égalité localement : soit $\partial_1, \ldots, \partial_m$ une base locale du fibré tangent de M et soit $dx^1, \ldots, dx^m$ sa base duale. Par définition d'une 1-forme de connexion, nous avons tout d'abord $\omega^a(\partial_i^h) = 0$ pour $i = 1, \ldots, m$ et ensuite $\omega^a(\mathcal{E}) = 1$ puisque $\mathcal{E} = 1^*$. En vertu du lemme, on peut supposer que A s'écrit sous la forme :

$$A = \varphi \otimes X^{\vee j}$$

où φ est une c-densité locale et où X est un champ de vecteurs local. On a donc :

$$A^h = \tilde{\varphi} X^{h^{\vee j}}.$$

Dans ces conditions, il vient

$$\begin{aligned}
\mathbf{Div}A &= \sum_{i=1}^{m} i(dx^i)\nabla_{\partial_i}(\varphi \otimes X^{\vee j}) \\
&= \sum_{i=1}^{m} i(dx^i)(\nabla_{\partial_i}\varphi \otimes X^{\vee j} + j\varphi \otimes \nabla_{\partial_i}X \vee X^{\vee(j-1)}) \\
&= j\nabla_X\varphi \otimes X^{\vee(j-1)} + j\varphi \otimes (\mathbf{Div}X) \vee X^{\vee(j-1)} + j(j-1)\varphi \otimes (\nabla_X X) \vee X^{\vee(j-2)}. \quad (2)
\end{aligned}$$

En utilisant la base locale $(\partial_1^h, \ldots, \partial_m^h, \mathcal{E})$ de $T\tilde{M}^a$ et la base duale correspondante $(\tau^{a*}dx^1, \ldots, \tau^{a*}dx^m, \omega^a)$, on peut calculer $\widetilde{\mathbf{Div}}$ en notant tout d'abord que

$$\tilde{\nabla}_{\partial_i^h}\tilde{\varphi} = \partial_i^h.\tilde{\varphi} = \widetilde{\nabla_{\partial_i}\varphi}$$

et que

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{E}}\tilde{\varphi} = \mathcal{E}.\tilde{\varphi} = -(\frac{c}{a})\tilde{\varphi}.$$

Dans ces conditions, si on pose $\bar{a} := a(m+1)$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{Div}}(A^h \vee \mathcal{E}^{\vee l}) = \textstyle\sum_{i=1}^{m} & i(\tau^{a*}dx^i)(\widetilde{\nabla_{\partial_i}\varphi} X^{h^{\vee j}} \vee \mathcal{E}^{\vee l} + j\tilde{\varphi}(\nabla_{\partial_i}X)^h \vee X^{h^{\vee(j-1)}} \vee \mathcal{E}^{\vee l} \\
&+ j\tilde{\varphi}\tau^{a*}(\tfrac{a}{2}(trR)(\partial_i, X) - \bar{a}\mathbf{r}(\partial_i, X))X^{h^{\vee(j-1)}} \vee \mathcal{E}^{\vee(l+1)} \\
&+ \tfrac{l}{a(m+1)}\tilde{\varphi}X^{h^{\vee j}} \vee \partial_i^h \vee \mathcal{E}^{\vee(l-1)}) \\
&+ i(\omega^a)(\tfrac{j+l-(m+1)c}{a(m+1)}\tilde{\varphi}X^{h^{\vee j}} \vee \mathcal{E}^{\vee l})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (j\widetilde{\nabla_X\varphi}X^{h\vee(j-1)} + j\tilde{\varphi}(\tau^{a*}(\mathbf{Div}X)) \vee X^{h\vee(j-1)} \\
&\quad +j(j-1)\tilde{\varphi}(\nabla_X X)^h \vee X^{h\vee(j-2)}) \vee \mathcal{E}^{\vee l} \\
&\quad -j(j-1)\overline{a}\tilde{\varphi}\tau^{a*}(\mathbf{r}(X,X))X^{h\vee(j-2)} \vee \mathcal{E}^{\vee(l+1)} \\
&\quad +\tfrac{l(j+m)}{a(m+1)}\tilde{\varphi}X^{h\vee j} \vee \mathcal{E}^{\vee(l-1)} + \tfrac{l(j+l-(m+1)c)}{a(m+1)}\tilde{\varphi}X^{h\vee j} \vee \mathcal{E}^{\vee(l-1)}.
\end{aligned}
$$

Il suffit pour conclure de tenir compte de l'équation (2) et de remarquer que

$$
i(\mathbf{r})X^{\vee j} = \frac{j(j-1)}{2}\mathbf{r}(X,X)X^{\vee(j-2)}.
$$

De fait, si

$$
\mathbf{r} = \sum_{ik} \mathbf{r}_{ik}\, dx^i \vee dx^k,
$$

alors

$$
\begin{aligned}
i(\mathbf{r})X^{\vee j} &= \sum_{ik} \mathbf{r}_{ik} i(dx^i \vee dx^k)X^{\vee j} \\
&= \sum_{ik} \mathbf{r}_{ik} i(dx^i)(jX^k X^{\vee(j-1)}) \\
&= \sum_{ik} \mathbf{r}_{ik} j(j-1)X^i X^k X^{\vee(j-2)} \\
&= \sum_{ik} \mathbf{r}_{ik} \frac{j(j-1)}{2}(dx^i \vee dx^k)(X,X)X^{\vee(j-2)} \\
&= \frac{j(j-1)}{2}\mathbf{r}(X,X)X^{\vee(j-2)}. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

5.3 Relèvement naturel projectivement invariant

Lemme 5.3 Pour tout entier positif k et tous réels a, c (avec $a \neq 0$), on peut définir une application $\mathbb{R}$-linéaire Ψ de $\Gamma^\infty(S^kT\tilde{M}^a)^{-\frac{c}{a}}$ dans $\Gamma^\infty(\mathbf{F}_c(TM) \otimes S^kTM)$ de la manière suivante :

$$
(\Psi B)_{\tau^a(y)}(\beta^1, \ldots, \beta^k) := \pi_c^a(y, B_y((\tau_{*y}^a)^*\beta^1, \ldots, (\tau_{*y}^a)^*\beta^k)),
$$

avec $y \in \tilde{M}^a$ et $\beta^1, \ldots, \beta^k \in T^*_{\tau^a(y)}M$.

Démonstration. De fait, il suffit de prouver que la valeur de $\pi_c^a(y, B_y((\tau_{*y}^a)^*\beta^1, \ldots, (\tau_{*y}^a)^*\beta^k))$ ne dépend que de la fibre à laquelle le point y appartient. D'une manière équivalente, il suffit de montrer que

$$\pi^a_c(ye^t, B_{ye^t}((\tau^a_{*ye^t})^*\beta^1,\ldots,(\tau^a_{*ye^t})^*\beta^k)) = \pi^a_c(y, B_y((\tau^a_{*y})^*\beta^1,\ldots,(\tau^a_{*y})^*\beta^k))$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ ou ce qui revient au même, que

$$e^{\frac{c}{a}t}B_{ye^t}((\tau^a_{*ye^t})^*\beta^1,\ldots,(\tau^a_{*ye^t})^*\beta^k) = B_y((\tau^a_{*y})^*\beta^1,\ldots,(\tau^a_{*y})^*\beta^k)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cela se remarque facilement en notant que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{\frac{c}{a}t}B_{ye^t}((\tau^a_{*ye^t})^*\beta^1,\ldots,(\tau^a_{*ye^t})^*\beta^k) &= (\frac{c}{a}-\frac{c}{a})e^{\frac{c}{a}t}B_{ye^t}((\tau^a_{*ye^t})^*\beta^1,\ldots,(\tau^a_{*ye^t})^*\beta^k)\\ &= 0,\end{aligned}$$

en utilisant (1). De fait, si $\beta^1,\ldots,\beta^k$ sont des champs de 1-formes sur M, on a :

$$\begin{aligned}(L_{\mathcal{E}}B)((\tau^a_*)^*\beta^1,\ldots,(\tau^a_*)^*\beta^k) &= \frac{-c}{a}B((\tau^a_*)^*\beta^1,\ldots,(\tau^a_*)^*\beta^k)\\ &= \mathcal{E}.B((\tau^a_*)^*\beta^1,\ldots,(\tau^a_*)^*\beta^k)\end{aligned}$$

car, pour tout l compris entre 1 et k, si $Y \in Vect(\tilde{M}^a)$ et si $f\mathcal{E}$ désigne la composante verticale de Y avec $f \in C^\infty(\tilde{M}^a)$, il vient

$$\begin{aligned}(L_{\mathcal{E}}((\tau^a_*)^*\beta^l))(Y) &= \mathcal{E}.((\tau^a_*)^*\beta^l)(Y) - ((\tau^a_*)^*\beta^l)([\mathcal{E},Y])\\ &= \mathcal{E}.\tau^{a*}(\beta^l(\tau^a_*Y)) - ((\tau^a_*)^*\beta^l)([\mathcal{E},(\tau^a_*Y)^h]) - ((\tau^a_*)^*\beta^l)([\mathcal{E},f\mathcal{E}])\\ &= 0,\end{aligned}$$

puisque le crochet de 2 champs de vecteurs verticaux est vertical, puisque les relèvements horizontaux de champs de vecteurs sont invariants et puisque $\tau^{a*}(\beta^l(\tau^a_*Y))$ est une fonction dont la valeur ne dépend que de la fibre à laquelle son argument appartient. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}B_{ye^t}((\tau^a_{*ye^t})^*\beta^1,\ldots,(\tau^a_{*ye^t})^*\beta^k) &= \frac{d}{dt'}B_{ye^{t+t'}}((\tau^a_{*ye^{t+t'}})^*\beta^1,\ldots,(\tau^a_{*ye^{t+t'}})^*\beta^k)|_{t'=0}\\ &= (\mathcal{E}.B((\tau^a_*)^*\beta^1,\ldots,(\tau^a_*)^*\beta^k))_{ye^t}\\ &= \frac{-c}{a}B_{ye^t}((\tau^a_{*ye^t})^*\beta^1,\ldots,(\tau^a_{*ye^t})^*\beta^k).\end{aligned}$$

Il suffit pour conclure d'observer que

$$B_y((\tau^a_{*y})^*\beta^1, \ldots, (\tau^a_{*y})^*\beta^k)$$

est la valeur en 0 de

$$e^{\frac{c}{a}t} B_{ye^t}((\tau^a_{*ye^t})^*\beta^1, \ldots, (\tau^a_{*ye^t})^*\beta^k). \quad \blacksquare$$

Proposition 5.2 Soient k et m deux entiers positifs et $a, c \in \mathbb{R}$ (avec $a \neq 0$). On suppose que $m > 1$ et que

$$c \notin \{\frac{j+k+m}{m+1} | j \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad 0 \leq j \leq k-1\}.$$

Soit enfin M une variété de dimension m.

1. Pour toute connexion sans torsion ∇, la restriction de l'application Ψ à $\Gamma^\infty(S^kT\tilde{M}^a)^{-\frac{c}{a}}_{\tilde{\nabla}}$ est une bijection sur $\Gamma^\infty(\mathbf{F}_c(TM) \otimes S^kTM)$. Une section A appartenant à $\Gamma^\infty(\mathbf{F}_c(TM) \otimes S^kTM)$ aura comme image par la bijection inverse un élément qu'on notera $\tilde{A}[\nabla]$.

2. Soit ∇' une connexion sans torsion dans le fibré tangent de M qui est projectivement équivalente à ∇. On a alors

$$\tilde{A}[\nabla] = \tilde{A}[\nabla']$$

pour tout $A \in \Gamma^\infty(\mathbf{F}_c(TM) \otimes S^kTM)$.

3. Soit N une variété de dimension m et $\Phi : N \mapsto M$ une immersion. On a alors

$$\tilde{\Phi}^{a*}(\tilde{A}[\nabla]) = \widetilde{\Phi^* A}[\Phi^*\nabla]$$

pour tout $A \in \Gamma^\infty(\mathbf{F}_c(TM) \otimes S^kTM)$ et pour toute connexion sans torsion ∇ dans le fibré tangent de M.

On appellera $\tilde{A}[\nabla]$ le *relèvement naturel projectivement invariant de A correspondant à* ∇.

Démonstration. Soit une connexion sans torsion ∇ dans le fibré tangent de M. Démontrons la surjectivité de la restriction de l'application Ψ en procédant tout d'abord à l'analyse de la question. Soit $A_k \in \Gamma^\infty(\mathbf{F}_c(TM) \otimes S^kTM)$ et supposons qu'il existe $B \in \Gamma^\infty(S^kT\tilde{M}^a)^{-\frac{c}{a}}_{\tilde{\nabla}}$ tel que $A_k = \Psi B$. D'après le lemme 5.1, la section

A_k^h est aussi un élément de $\Gamma^\infty(S^kT\tilde{M}^a)^{-\frac{c}{a}}$ et, par définition du relèvement horizontal des champs de tenseurs, on a $\Psi A_k^h = A_k$, donc $\Psi(B - A_k^h) = 0$, donc, pour tout $y \in \tilde{M}^a$, il vient

$$(B - A_k^h)_y((\tau_{*y}^a)^*\beta^1, \ldots, (\tau_{*y}^a)^*\beta^k) = 0 \qquad (*)$$

pour tous $\beta^1, \ldots, \beta^k \in T^*_{\tau^a(y)}M$. Si $y \in \tilde{M}^a$ et si les champs de vecteurs $\partial_1, \ldots, \partial_m$ forment une base du fibré tangent de M au voisinage de $\tau^a(y)$, les champs de vecteurs $\partial_1^h, \ldots, \partial_m^h$ et $\mathcal{E}$ forment une base du fibré tangent de $\tilde{M}^a$ au voisinage de y. Dans ce voisinage, $B - A_k^h$ s'écrit

$$\sum_{|\alpha|=k} f_\alpha (\partial_1^h)^{\vee\alpha_1} \vee \ldots \vee (\partial_m^h)^{\vee\alpha_m} \vee \mathcal{E}^{\vee\alpha_{m+1}}$$

où les f_α sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ définies localement ; la relation $(*)$ implique que $B - A_k^h$ s'y réécrit

$$\Big(\sum_{|\alpha|=k, \alpha_{m+1}\neq 0} f_\alpha (\partial_1^h)^{\vee\alpha_1} \vee \ldots \vee (\partial_m^h)^{\vee\alpha_m} \vee \mathcal{E}^{\vee(\alpha_{m+1}-1)}\Big) \vee \mathcal{E}.$$

Puisque le champ d'Euler est invariant et ne s'annule jamais sur $\tilde{M}^a$, il existe alors une unique section $B_{k-1} \in \Gamma^\infty(S^{k-1}T\tilde{M}^a)^{-\frac{c}{a}}$ telle que

$$B = A_k^h + B_{k-1} \vee \mathcal{E}.$$

Si l'on pose $A_{k-1} := \Psi B_{k-1}$ et si l'on itère le raisonnement ci-dessus, on trouve une unique section $B_{k-2} \in \Gamma^\infty(S^{k-2}T\tilde{M}^a)^{-\frac{c}{a}}$ telle que

$$B_{k-1} = A_{k-1}^h + B_{k-2} \vee \mathcal{E}.$$

En continuant ce procédé de proche en proche, on obtient une suite de sections $A_k, A_{k-1}, \ldots, A_0$ où $A_j \in \Gamma^\infty(\mathbf{F}_c(TM) \otimes S^jTM)$ pour tout j telles que

$$B = A_k^h + A_{k-1}^h \vee \mathcal{E} + A_{k-2}^h \vee \mathcal{E}^{\vee 2} + \ldots + A_1^h \vee \mathcal{E}^{\vee(k-1)} + \tilde{A}_0 \vee \mathcal{E}^{\vee k}.$$

Exprimons maintenant le fait que la divergence de B est nulle. Pour ce faire, calculons $\widetilde{\mathbf{Div}}B$ en utilisant la formule de la proposition 5.1 (on posera $\overline{a} := a(m+1)$ et $\overline{m} := m - (m+1)c$) :

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{Div}}B &= \textstyle\sum_{l=0}^k \widetilde{\mathbf{Div}}(A_{k-l}^h \vee \mathcal{E}^{\vee l}) \\ &= \widetilde{\mathbf{Div}}A_k^h + \textstyle\sum_{l=1}^k ((\mathbf{Div}A_{k-l})^h \vee \mathcal{E}^{\vee l} - 2\overline{a}(i(\mathbf{r})A_{k-l})^h \vee \mathcal{E}^{\vee(l+1)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\tfrac{l(2k-l+\overline{m})}{\overline{a}}A_{k-l}^{h}\vee\mathcal{E}^{\vee(l-1)}) \\
&=(\mathbf{Div}A_k)^h+\tfrac{2k-1+\overline{m}}{\overline{a}}A_{k-1}^{h} \\
&+\textstyle\sum_{l=1}^{k-1}((\mathbf{Div}A_{k-l}-2\overline{a}i(\mathbf{r})A_{k-(l-1)}+\tfrac{(l+1)(2k-l-1+\overline{m})}{\overline{a}}A_{k-(l+1)})^h\vee\mathcal{E}^{\vee l}).
\end{aligned}
$$

On en déduit que les équations suivantes sont satisfaites $(1\leq l\leq k-2)$:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
A_{k-1}=-\frac{\overline{a}}{2k-1+\overline{m}}\mathbf{Div}A_k \\
\vdots \\
A_{k-(l+1)}=-\frac{\overline{a}}{(l+1)(2k-l-1+\overline{m})}(\mathbf{Div}A_{k-l}-2\overline{a}i(\mathbf{r})A_{k-(l-1)}) \qquad (**) \\
\vdots \\
A_0=-\frac{\overline{a}}{k(k+\overline{m})}(\mathbf{Div}A_1-2\overline{a}i(\mathbf{r})A_2).
\end{array}
\right.
$$

De fait, on a tout d'abord

$$(\mathbf{Div}A_k)^h+\frac{2k-1+\overline{m}}{\overline{a}}A_{k-1}^h=0$$

car si ce n'était pas le cas, il existerait $y\in\tilde{M}^a$ tel que

$$((\mathbf{Div}A_k)^h+\frac{2k-1+\overline{m}}{\overline{a}}A_{k-1}^h)_y\neq 0,$$

donc il existerait $\beta^1,\ldots,\beta^{k-1}\in T_y^*\tilde{M}^a$ tels que

$$((\mathbf{Div}A_k)^h+\frac{2k-1+\overline{m}}{\overline{a}}A_{k-1}^h)_y(\beta^1,\ldots,\beta^{k-1})\neq 0.$$

Considérons alors une base locale $\tau^{a*}dx^1,\ldots,\tau^{a*}dx^m,\omega^a$ du fibré cotangent de $\tilde{M}^a$ au voisinage de y. Comme on a

$$\beta^j=\sum_{l=1}^{m}a_l^j(\tau^{a*}dx^l)+b^j\omega^a$$

pour $1\leq j\leq k-1$, où b^j et les a_l^j sont des réels, on aurait que l'application de

$$((\mathbf{Div}A_k)^h+\frac{2k-1+\overline{m}}{\overline{a}}A_{k-1}^h)_y$$

aux arguments

$$\sum_{l=1}^{m}a_l^j(\tau^{a*}dx^l)\quad(1\leq j\leq k-1)$$

serait non nulle, ce qui est impossible puisque l'application des autres termes composant $\widetilde{\mathbf{Div}}B$ à ces mêmes arguments l'est.

On peut alors "mettre en évidence" $\mathcal{E}$ dans la somme des termes restants qui composent $\widetilde{\mathbf{Div}}B$ et le "simplifier". On montre alors par un raisonnement exactement analogue à celui qui vient d'être exposé que

$$(\mathbf{Div}A_{k-1} - 2\overline{a}i(\mathbf{r})A_k + \frac{2(2k-2+\overline{m})}{\overline{a}}A_{k-2})^h$$

est nul et on itère ainsi le processus de proche en proche.

Grâce à la condition de l'énoncé de la proposition, tous les dénominateurs des relations composant le système (**) sont non nuls. Toutes les sections $A_{k-j}, 1 \leq j \leq k$, sont donc univoquement déterminées par la section A_k. Si la restriction de Ψ à $\Gamma^\infty(S^kT\tilde{M}^a)^{-\frac{c}{a}}_{\tilde{\nabla}}$ est bien surjective, elle sera donc en outre bijective. Procédons alors à la synthèse. Les sections $A_{k-1}, \ldots, A_0$ solutions du système (**) sont telles que l'image par Ψ de

$$A_k^h + A_{k-1}^h \vee \mathcal{E} + A_{k-2}^h \vee \mathcal{E}^{\vee 2} + \ldots + A_1^h \vee \mathcal{E}^{\vee(k-1)} + \tilde{A}_0 \vee \mathcal{E}^{\vee k}$$

est égale à A_k, la divergence de cet élément est nulle par construction et tous les termes qui le composent appartiennent à $\Gamma^\infty(S^kT\tilde{M}^a)^{-\frac{c}{a}}$ grâce à l'invariance du champ d'Euler et à cause du lemme 5.1. La restriction de l'application Ψ est donc surjective et par la même occasion bijective, vu les développements précédents. L'énoncé (1) est ainsi démontré.

D'autre part, l'espace $\Gamma^\infty(S^kT\tilde{M}^a)^{-\frac{c}{a}}_{\tilde{\nabla}}$ dépend de la connexion $\tilde{\nabla}$ qui ne dépend que de la classe projective de ∇. Dans ces conditions, la restriction de Ψ à $\Gamma^\infty(S^kT\tilde{M}^a)^{-\frac{c}{a}}_{\tilde{\nabla}}$ ainsi que l'application inverse $A \mapsto \tilde{A}[\nabla]$ ne dépendent que de la classe projective de ∇, ce qui démontre (2).

En ce qui concerne la naturalité du relèvement, on note d'abord que pour tout $B \in \Gamma^\infty(S^kT\tilde{M}^a)$, on a

$$\widetilde{\Phi^*\mathbf{Div}}(\tilde{\Phi}^{a*}B) = \tilde{\Phi}^{a*}(\widetilde{\mathbf{Div}}B)$$

en utilisant ce qui a été fait dans la proposition 4.1, ce qui montre que $\tilde{\Phi}^{a*}$ envoie les éléments de $\Gamma^\infty(S^kT\tilde{M}^a)^{-\frac{c}{a}}_{\tilde{\nabla}}$ dans $\Gamma^\infty(S^kT\tilde{N}^a)^{-\frac{c}{a}}_{\widetilde{\Phi^*\nabla}}$. En notant τ'^a la projection correspondant à $\tilde{N}^a$ et Ψ' le pendant de l'application Ψ pour la variété N, on a pour tout $y' \in \tilde{N}^a$ et pour tous $\beta'^1, \ldots, \beta'^k \in T^*_{\tau'^a(y')}N$:

$$(\Psi'\tilde{\Phi}^{a*}B)_{\tau'^a(y')}(\beta'^1, \ldots, \beta'^k)$$
$$= \pi_c^a(y', B_{\tilde{\Phi}^a(y')}((\tilde{\Phi}^a_{*y'})^{-1*}(\tau'^a_{*y'})^*\beta'^1, \ldots, (\tilde{\Phi}^a_{*y'})^{-1*}(\tau'^a_{*y'})^*\beta'^k))$$
$$= \pi_c^a(y', B_{\tilde{\Phi}^a(y')}((\tau^a_{*\tilde{\Phi}(\tau'^a(y'))})^*(\Phi_{*\tau'^a(y')})^{-1*}\beta'^1, \ldots, (\tau^a_{*\tilde{\Phi}(\tau'^a(y'))})^*(\Phi_{*\tau'^a(y')})^{-1*}\beta'^k))$$

$= (\Phi^*\Psi B)_{\tau'^a(y')}(\beta'^1, \ldots, \beta'^k)$,

donc, en particulier

$$\Psi'(\tilde{\Phi}^{a*}\tilde{A}[\nabla]) = \Phi^*(\Psi\tilde{A}[\nabla]) = \Phi^*A,$$

ce qui fait que l'égalité

$$\tilde{\Phi}^{a*}(\tilde{A}[\nabla]) = \widetilde{\Phi^*A}[\Phi^*\nabla]$$

est démontrée. ∎

5.4 Formules explicites

La proposition suivante détermine la forme explicite des sections A_{k-l} apparaissant dans le système d'équations (**).

Proposition 5.3 En se plaçant dans les conditions de la proposition précédente, on définit tout d'abord une application $\mathbf{r}_k$ pour j compris entre 0 et k :

$$\mathbf{r}_k C_j := (\overline{m} + k + j - 1)(k - j + 1)2i(\mathbf{r})(C_j)$$

où $C_j \in S^jTM \otimes \mathbf{F}_c(TM)$. On a alors, si $1 \leq l \leq k$:

$$A_{k-l} = \frac{(-\overline{a})^l}{l!(2k + \overline{m} - 1)\ldots(2k + \overline{m} - l)} \mathbf{Deg}_{-l}(\sum_{j=0}^{l}(\mathbf{Div} + \mathbf{r}_k)^j)A_k,$$

où le symbole $\mathbf{Deg}_{-l}$ désigne la projection sur l'opérateur de degré $-l$ dans la somme.

Démonstration. On procède par récurrence sur l : si $l = 1$, la formule annoncée est évidemment vraie. Supposons alors la formule vraie pour des valeurs de l inférieures ou égales à n et démontrons-la pour $l = n+1$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient facilement :

$$A_{k-(n+1)} = \frac{(-\overline{a})^{n+1}}{(n+1)!(2k+\overline{m}-1)\ldots(2k+\overline{m}-(n+1))}$$

$$(\mathbf{Div}\mathbf{Deg}_{-n}(\textstyle\sum_{j=0}^{n}(\mathbf{Div} + \mathbf{r}_k)^j)A_k + \mathbf{r}_k\mathbf{Deg}_{-(n-1)}(\sum_{j=0}^{n-1}(\mathbf{Div} + \mathbf{r}_k)^j)A_k).$$

Remarquons ensuite qu'on a évidemment

$$\mathbf{Div}\mathbf{Deg}_{-n}(\sum_{j=0}^{n}(\mathbf{Div} + \mathbf{r}_k)^j)A_k = \mathbf{Deg}_{-(n+1)}\mathbf{Div}(\sum_{j=0}^{n}(\mathbf{Div} + \mathbf{r}_k)^j)A_k$$

ainsi que

$$\mathbf{r}_k\mathbf{Deg}_{-(n-1)}(\sum_{j=0}^{n-1}(\mathbf{Div}+\mathbf{r}_k)^j)A_k = \mathbf{Deg}_{-(n+1)}(\mathbf{r}_k(\sum_{j=0}^{n-1}(\mathbf{Div}+\mathbf{r}_k)^j))A_k.$$

En outre, il vient

$$\mathbf{Deg}_{-(n+1)}(\mathbf{r}_k(\mathbf{Div}+\mathbf{r}_k)^n) = 0.$$

De fait, $(\mathbf{Div}+\mathbf{r}_k)^n$ est un polynôme de degré n en $\mathbf{Div}$ et $\mathbf{r}_k$ dont un monôme renferme une puissance d de $\mathbf{Div}$ et une puissance r de $\mathbf{r}$, la somme de d et de r étant égale à n, ce qui fait que le degré d'un monôme de $\mathbf{r}_k(\mathbf{Div}+\mathbf{r}_k)^n$ est égal à $-2-d-2r = -2-r-n$ qui est toujours strictement inférieur à $-(n+1)$. Dans ces conditions,

$$\mathbf{Div}\mathbf{Deg}_{-n}(\sum_{j=0}^{n}(\mathbf{Div}+\mathbf{r}_k)^j)A_k + \mathbf{r}_k\mathbf{Deg}_{-(n-1)}(\sum_{j=0}^{n-1}(\mathbf{Div}+\mathbf{r}_k)^j)A_k$$

est égal à

$$\mathbf{Deg}_{-(n+1)}\mathbf{Div}(\sum_{j=0}^{n}(\mathbf{Div}+\mathbf{r}_k)^j)A_k + \mathbf{Deg}_{-(n+1)}(\mathbf{r}_k(\sum_{j=0}^{n-1}(\mathbf{Div}+\mathbf{r}_k)^j))A_k,$$

donc à

$$\mathbf{Deg}_{-(n+1)}\mathbf{Div}(\sum_{j=0}^{n}(\mathbf{Div}+\mathbf{r}_k)^j)A_k + \mathbf{Deg}_{-(n+1)}(\mathbf{r}_k(\sum_{j=0}^{n}(\mathbf{Div}+\mathbf{r}_k)^j))A_k,$$

donc à

$$\mathbf{Deg}_{-(n+1)}(\sum_{j=0}^{n+1}(\mathbf{Div}+\mathbf{r}_k)^j)A_k,$$

ce qui achève de démontrer la proposition. ▮

5.5 Un cas particulier

Si $c=0$, alors les hypothèses de la proposition 5.2 sont satisfaites pour tout $m>1$ et pour tout k. Si $k=1$, le relèvement naturel d'un champ de vecteurs X sur M est égal à

$$\tilde{X}[\nabla] = X^h - a(\mathbf{Div}X)\mathcal{E}.$$

Ce champ de vecteurs ne dépend pas de la connexion ∇ ; en fait, il correspond au relèvement canonique de X à $\tilde{M}^a$, dont la valeur en $d \in \tilde{M}^a_x$ est :

$$\tilde{X}_d = \frac{d}{dt}(\varphi_{-t*\varphi_t(x)})^* d|_{t=0},$$

où φ_t représente le flot de X. De fait, dans une carte $(U, (x^1, \ldots, x^m))$ de M contenant le point x, si $d = \lambda|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|^a$ avec $\lambda > 0$, l'expression locale de la courbe

$$(\varphi_{-t*\varphi_t(x)})^* d$$

est donnée par

$$((\varphi_t(x))^1, \ldots, (\varphi_t(x))^m, |\det \varphi_{-t*\varphi_t(x)}|^a \lambda),$$

donc les composantes dans la base locale du fibré tangent de $\tilde{M}^a$ de

$$\frac{d}{dt}(\varphi_{-t*\varphi_t(x)})^* d|_{t=0}$$

sont données par

$$(X^1_x, \ldots, X^m_x, -a\, tr(DX)\lambda).$$

D'un autre côté, on sait qu'on a :

$$X^h - a(\mathbf{Div}X)\mathcal{E} = X^h - a(tr(DX) + X^i\Gamma^j_{ij})\mathcal{E}.$$

Les composantes dans la base locale du fibré tangent de $\tilde{M}^a$ de

$$-a(\mathbf{Div}X)\mathcal{E}$$

au point d sont donc données par

$$(0, \ldots, 0, -a\lambda(tr(DX) + X^i\Gamma^j_{ij}))$$

et il suffit donc pour conclure de montrer que les composantes de X^h_d sont égales à

$$(X^1_x, \ldots, X^m_x, a\lambda X^i_x\Gamma^j_{ij}).$$

De fait, les composantes du relèvement horizontal de X à P^1M en le repère de coordoonées locales $(x, \mathbf{1})$ sont données par :

$$(X^1_x, \ldots, X^m_x, A),$$

où A est la matrice telle que $A^i_j = -\Gamma^i_{kj}X^k$. Comme l'expression locale de Ξ^a est l'application suivante :

$$(x, p) \mapsto (x, |\det p|^{-a}),$$

sa différentielle en $(x, \mathbf{1})$ transforme le vecteur

$$(X_x^1, \ldots, X_x^m, A)$$

en le vecteur

$$(X_x^1, \ldots, X_x^m, -a\, tr(A)),$$

donc le relèvement horizontal de X au point $|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m|^a$ de $\tilde{M}_x^a$ a pour composantes

$$(X_x^1, \ldots, X_x^m, a\Gamma_{ij}^j X^i),$$

ce qui fait que le relèvement horizontal de X au point d de $\tilde{M}^a$ a pour composantes

$$(X_x^1, \ldots, X_x^m, a\lambda\Gamma_{ij}^j X^i)$$

et l'on peut donc conclure.

5.6 Relèvement des champs de tenseurs symétriques covariants

Si $b \in \mathbb{R}$, on peut définir de manière totalement analogue à ce qui a été fait précédemment un relèvement $()_y^h$ de $\mathbf{F}_b(T_{\tau^a(y)}M) \otimes S^k T^*_{\tau^a(y)}M$ dans $S^k T_y^* M$ pour tout $y \in \tilde{M}^a$ en posant :

$$(s \otimes (\beta^1 \vee \ldots \vee \beta^k))_y^h := (y^{-1}s)((\tau_{y*}^a)^* \beta^1 \vee \ldots \vee (\tau_{y*}^a)^* \beta^k).$$

Il en découle ainsi un relèvement $\gamma \mapsto \gamma^h$ des sections de $\mathbf{F}_b(TM) \otimes \Gamma^\infty(S^k T^* M)$ où γ^h est un élément de $\Gamma^\infty(S^k T^* \tilde{M}^a)$.

On note $\Gamma^\infty(S^k T^* \tilde{M}^a)^{-\frac{b}{a}}$ le sous-espace de $\Gamma^\infty(S^k T^* \tilde{M}^a)$ formé des sections ζ $\frac{-b}{a}$-équivariantes, i.e. telles que

$$L_{\mathcal{E}}\zeta = -\frac{b}{a}\zeta.$$

On peut de nouveau définir une application $\mathbb{R}$-linéaire Ψ de $\Gamma^\infty(S^k T^* \tilde{M}^a)^{-\frac{b}{a}}$ dans $\Gamma^\infty(\mathbf{F}_b(TM) \otimes S^k T^* M)$ de la manière suivante :

$$(\Psi\zeta)_{\tau^a(y)}(v_1, \ldots, v_k) := \pi_b^a(y, \zeta_y(v_{1y}^h, \ldots, v_{ky}^h))$$

pour tous $v_1, \ldots, v_k \in T_{\tau^a(y)}M$. On peut démontrer de manière totalement similaire à ce qui a été fait pour les champs de k-vecteurs que si $\zeta \in \Gamma^\infty(S^k T^* \tilde{M}^a)^{-\frac{b}{a}}$ et si $\gamma_k := \Psi\zeta$, alors il existe des sections $\gamma_j \in \Gamma^\infty(\mathbf{F}_b(TM) \otimes S^j T^* M)$, où j est compris entre 0 et $k-1$, univoquement déterminées par ζ, telles que

$$\zeta = \gamma_k^h + \omega^a \vee \gamma_{k-1}^h + \ldots + \omega^{a\vee(k-1)} \vee \gamma_1 + \omega^{a\vee k} \vee \gamma_0.$$

Chapitre 6

Existence de $\rho_L[\nabla]$

6.1 Résultats préliminaires

Lemme 6.1 Soient $\gamma \in \Gamma^\infty(\mathbf{F}_b(TM) \otimes S^jT^*M)$ et X un champ de vecteurs sur M. Si on pose $\overline{b} := (m+1)b$, alors on a les formules suivantes :

1. $\tilde{\nabla}_{X^h}\gamma^h = (\nabla_X\gamma)^h - \frac{1}{\overline{a}}\omega^a \vee (i(X)\gamma)^h$
2. $\tilde{\nabla}_{\mathcal{E}}\gamma^h = -\frac{\overline{b}+j}{\overline{a}}\gamma^h$
3. $\tilde{\nabla}_{X^h}\omega^a = -\frac{a}{2}(i(X)(trR))^h + \overline{a}(i(X)\mathbf{r})^h$
4. $\tilde{\nabla}_{\mathcal{E}}\omega^a = -\frac{1}{\overline{a}}\omega^a$.

Démonstration. Il suffit de vérifier ces formules localement : pour des raisons entièrement analogues à celles qui sont exposées dans le lemme 5.2, on peut supposer que γ est de la forme $\varphi \otimes \beta^{\vee j}$ où φ est une b-densité locale et β est une 1-forme locale sur M. Soient $X_1, \ldots, X_j$ des champs de vecteurs locaux sur $\tilde{M}^a$. En ce qui concerne la première formule, il vient tout d'abord :

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_{X^h}\gamma^h)(X_1,\ldots,X_j) &= (\tilde{\nabla}_{X^h}(\tilde{\varphi}\beta^{h\vee j}))(X_1,\ldots,X_j) \\
&= (X^h.\tilde{\varphi})(\beta^{h\vee j})(X_1,\ldots,X_j) + \tilde{\varphi}(\tilde{\nabla}_{X^h}\beta^{h\vee j})(X_1,\ldots,X_j) \\
&= \widetilde{(\nabla_X\varphi)}(\beta^{h\vee j})(X_1,\ldots,X_j) + \tilde{\varphi}(j\beta^{h\vee(j-1)} \vee \tilde{\nabla}_{X^h}\beta^h)(X_1,\ldots,X_j),
\end{aligned}$$

qui est égal à

$$\widetilde{(\nabla_X\varphi)}(\beta^{h\vee j})(X_1,\ldots,X_j) + \tilde{\varphi}\frac{j}{(j-1)!}\sum_\sigma \beta^{h\vee(j-1)}(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(j-1)})(\tilde{\nabla}_{X^h}\beta^h)(X_{\sigma(j)}),$$

où on somme sur les permutations σ de $\{1,\dots,j\}$. Si $X_{\sigma(j)}$ se décompose localement en une somme de champs de vecteurs locaux, l'un vertical et l'autre horizontal, de la manière suivante :

$$X_{\sigma(j)} = f_{\sigma(j)}\mathcal{E} + (\tau_*^a X_{\sigma(j)})^h,$$

où $f_{\sigma(j)}$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ définie localement sur $\tilde{M}^a$, alors on remarque que :

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_{X^h}\beta^h)(X_{\sigma(j)}) &= X^h.\beta^h(X_{\sigma(j)}) - \beta^h(\tilde{\nabla}_{X^h}X_{\sigma(j)})\\
&= (X.\beta(\tau_*^a X_{\sigma(j)}))^h - \beta^h(\tilde{\nabla}_{X^h}X_{\sigma(j)})\\
&= (X.\beta(\tau_*^a X_{\sigma(j)}))^h - \beta^h(\tilde{\nabla}_{X^h}(f_{\sigma(j)}\mathcal{E} + (\tau_*^a X_{\sigma(j)})^h))\\
&= (X.\beta(\tau_*^a X_{\sigma(j)}))^h - \beta^h((X^h.f_{\sigma(j)})\mathcal{E} + \frac{f_{\sigma(j)}}{\overline{a}}X^h + (\nabla_X(\tau_*^a X_{\sigma(j)}))^h)\\
&= (X.\beta(\tau_*^a X_{\sigma(j)}))^h - \frac{f_{\sigma(j)}}{\overline{a}}\beta(X)^h - \beta(\nabla_X(\tau_*^a X_{\sigma(j)}))^h.
\end{aligned}$$

D'autre part, il vient :

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\gamma)^h(X_1,\dots,X_j) &= ((\nabla_X\varphi)\otimes\beta^{\vee j} + \varphi\otimes(j\beta^{\vee(j-1)}\vee\nabla_X\beta))^h(X_1,\dots,X_j)\\
&= \widetilde{(\nabla_X\varphi)}(\beta^{h\vee j})(X_1,\dots,X_j) + \tilde{\varphi}j(\beta^{h\vee(j-1)}\vee(\nabla_X\beta)^h)(X_1,\dots,X_j)
\end{aligned}$$

avec

$$\tilde{\varphi}j(\beta^{h\vee(j-1)}\vee(\nabla_X\beta)^h)(X_1,\dots,X_j)$$

égal à

$$\tilde{\varphi}\frac{j}{(j-1)!}\sum_\sigma \beta^{h\vee(j-1)}(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(j-1)})(\nabla_X\beta)^h(X_{\sigma(j)})$$

tandis qu'on a

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\beta)^h(X_{\sigma(j)}) &= ((\nabla_X\beta)(\tau_*^a X_{\sigma(j)}))^h\\
&= (X.\beta(\tau_*^a X_{\sigma(j)}))^h - (\beta(\nabla_X\tau_*^a X_{\sigma(j)}))^h.
\end{aligned}$$

Enfin, il vient successivement :

$$\begin{aligned}
(-\frac{1}{\overline{a}}\omega^a\vee(i(X)\gamma)^h)(X_1,\dots,X_j) &= -\frac{1}{\overline{a}(j-1)!}\sum_\sigma \omega^a(X_{\sigma(j)})(i(X)\gamma)^h(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(j-1)})\\
&= -\frac{1}{\overline{a}(j-1)!}\sum_\sigma f_{\sigma(j)}(i(X)(\varphi\otimes\beta^{\vee j}))^h(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(j-1)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\bar{a}(j-1)!}\sum_\sigma f_{\sigma(j)}(\varphi\otimes i(X)\beta^{\vee j})^h(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(j-1)})\\
&= -\frac{1}{\bar{a}(j-1)!}\sum_\sigma f_{\sigma(j)}\tilde{\varphi}(j\beta^{\vee(j-1)}\vee i(X)\beta)^h(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(j-1)})\\
&= -\frac{1}{\bar{a}(j-1)!}\sum_\sigma f_{\sigma(j)}\tilde{\varphi}j\beta(X)^h\beta^{h\vee(j-1)}(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(j-1)}).
\end{aligned}$$

En ce qui concerne la deuxième formule, notons que

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_{\mathcal{E}}\gamma^h)(X_1,\dots,X_j) &= (\tilde{\nabla}_{\mathcal{E}}(\tilde{\varphi}\beta^{h\vee j}))(X_1,\dots,X_j)\\
&= (\mathcal{E}.\tilde{\varphi})(\beta^{h\vee j})(X_1,\dots,X_j)+\tilde{\varphi}(\tilde{\nabla}_{\mathcal{E}}\beta^{h\vee j})(X_1,\dots,X_j)\\
&= -\frac{b}{a}\tilde{\varphi}(\beta^{h\vee j})(X_1,\dots,X_j)+\tilde{\varphi}(j\beta^{h\vee(j-1)}\vee\tilde{\nabla}_{\mathcal{E}}\beta^h)(X_1,\dots,X_j),
\end{aligned}$$

alors que

$$\tilde{\varphi}(j\beta^{h\vee(j-1)}\vee\tilde{\nabla}_{\mathcal{E}}\beta^h)(X_1,\dots,X_j)$$

est égal à

$$\tilde{\varphi}\frac{j}{(j-1)!}\sum_\sigma\beta^{h\vee(j-1)}(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(j-1)})(\tilde{\nabla}_{\mathcal{E}}\beta^h)(X_{\sigma(j)})$$

tandis que

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_{\mathcal{E}}\beta^h)(X_{\sigma(j)}) &= \mathcal{E}.\beta^h(X_{\sigma(j)})-\beta^h(\tilde{\nabla}_{\mathcal{E}}X_{\sigma(j)})\\
&= -\beta^h(\frac{1}{\bar{a}}(\tau_*^aX_{\sigma(j)})^h)\\
&= -\frac{1}{\bar{a}}\beta^h(X_{\sigma(j)}).
\end{aligned}$$

Pour la troisième formule, si Y est un champ de vecteurs local sur $\tilde{M}^a$ et si Y se décompose localement en une somme de champs de vecteurs locaux vertical et horizontal de la manière suivante:

$$Y=f\mathcal{E}+(\tau_*^aY)^h,$$

où f est une fonction C^∞ définie localement sur $\tilde{M}^a$, alors on remarque que:

$$(\tilde{\nabla}_{X^h}\omega^a)(Y) \;=\; X^h.(\omega^a(Y))-\omega^a(\tilde{\nabla}_{X^h}Y)$$

$$
\begin{aligned}
&= X^h.f - \omega^a(\tilde{\nabla}_{X^h}(f\mathcal{E} + (\tau_*^a Y)^h)) \\
&= -\frac{a}{2}\tau^{a*}((trR)(X, \tau_*^a Y)) + \frac{\overline{a}}{2(m-1)}\tau^{a*}(Ric(X, \tau_*^a Y) + Ric(\tau_*^a Y, X)).
\end{aligned}
$$

Enfin, la quatrième formule s'obtient très facilement :

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_{\mathcal{E}}\omega^a)(Y) &= \mathcal{E}.(\omega^a(Y)) - \omega^a(\tilde{\nabla}_{\mathcal{E}} Y) \\
&= \mathcal{E}.f - \omega^a(\tilde{\nabla}_{\mathcal{E}} f\mathcal{E}) \\
&= \mathcal{E}.f - \omega^a(\frac{f}{\overline{a}}\mathcal{E} + (\mathcal{E}.f)\mathcal{E}) \\
&= -\frac{1}{\overline{a}} f \\
&= -\frac{1}{\overline{a}}\omega^a(Y). \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Proposition 6.1 Avec les notations précédentes, on a la formule suivante pour la différentielle symétrique sur $\tilde{M}^a$ calculée par rapport à la connexion $\tilde{\nabla}$:

$$
\tilde{\mathcal{D}}(\omega^{a\vee l} \vee \gamma^h) = (\frac{j+1}{l+j+1})\omega^{a\vee l} \vee (\mathcal{D}\gamma)^h + (\frac{1}{l+j+1})(2\overline{a}l\omega^{a\vee(l-1)} \vee (\mathbf{r} \vee \gamma)^h
$$
$$
-\frac{2j+l+\overline{b}}{\overline{a}}\omega^{a\vee(l+1)} \vee \gamma^h).
$$

Démonstration. Il suffit de nouveau de démontrer cette égalité localement. Soit donc $\partial_1, \ldots, \partial_m$ une base locale du fibré tangent de M et soit $dx^1, \ldots, dx^m$ sa base duale. Par définition de la différentielle symétrique, on a

$$
\tilde{\mathcal{D}}(\omega^{a\vee l} \vee \gamma^h) = \frac{1}{l+j+1}(\omega^a \vee (\tilde{\nabla}_{\mathcal{E}}(\omega^{a\vee l} \vee \gamma^h)) + \sum_{i=1}^m dx^{i^h} \vee (\tilde{\nabla}_{\partial_i^h}(\omega^{a\vee l} \vee \gamma^h))).
$$

En utilisant le lemme précédent, on obtient la formule annoncée. De fait, $\tilde{\mathcal{D}}(\omega^{a\vee l} \vee \gamma^h)$ est donc égal à

$$
\frac{1}{l+j+1}(\omega^a \vee (\tilde{\nabla}_{\mathcal{E}}\omega^{a\vee l} \vee \gamma^h + \omega^{a\vee l} \vee \tilde{\nabla}_{\mathcal{E}}\gamma^h) + \sum_{i=1}^m dx^{i^h} \vee (\tilde{\nabla}_{\partial_i^h}\omega^{a\vee l} \vee \gamma^h + \omega^{a\vee l} \vee \tilde{\nabla}_{\partial_i^h}\gamma^h)),
$$

donc à

$$
((-\frac{l}{\overline{a}})\omega^{a\vee(l+1)}\vee\gamma^h + \omega^{a\vee(l+1)}\vee(-(\frac{\overline{b}+j}{\overline{a}})\gamma^h) + \sum_{i=1}^m dx^{i^h}\vee l\omega^{a\vee(l-1)}\vee(-\frac{a}{2}i(\partial_i)(trR))^h + \overline{a}(i(\partial_i)\mathbf{r})^h\vee\gamma^h
$$

$$+\sum_{i=1}^{m} dx^{i^h} \vee \omega^{a\vee l} \vee ((\nabla_{\partial_i}\gamma)^h - \frac{1}{\overline{a}}\omega^a \vee (i(\partial_i)\gamma)^h))(\frac{1}{l+j+1}).$$

Pour conclure, il suffit de noter que, d'une part,

$$\sum_{i=1}^{m} dx^{i^h} \vee \omega^{a\vee l} \vee (-\frac{1}{\overline{a}}\omega^a \vee (i(\partial_i)\gamma)^h) \;=\; -\frac{1}{\overline{a}}\omega^{a\vee(l+1)} \vee (\sum_{i=1}^{m} dx^i \vee (i(\partial_i)\gamma))^h,$$

tandis que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}(dx^i \vee (i(\partial_i)\gamma))(X_1,\dots,X_j) &= \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(j-1)!}(\sum_{l=1}^{j} X_l^i\gamma(\partial_i,X_1,\dots,\hat{X}_l,\dots,X_j)(j-1)!) \\
&= \frac{1}{(j-1)!}(j!\gamma(X_1,\dots,X_j)) \\
&= j\gamma(X_1,\dots,X_j).
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\sum_{i=1}^{m} dx^i \vee (-\frac{a}{2}i(\partial_i)(trR) + \overline{a}i(\partial_i)\mathbf{r}) = 2\overline{a}\mathbf{r}$$

car on a

$$\begin{aligned}
-\frac{a}{2}(\sum_{i=1}^{m} dx^i \vee i(\partial_i)(trR))(X_1,X_2) &= -\frac{a}{2}(\sum_{i=1}^{m} X_1^i(trR)(\partial_i,X_2) + X_2^i(trR)(\partial_i,X_1)) \\
&= -\frac{a}{2}((trR)(X_1,X_2) + (trR)(X_2,X_1)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{m} dx^i \vee \overline{a}i(\partial_i)\mathbf{r})(X_1,X_2) &= \sum_{i=1}^{m} X_1^i\overline{a}\mathbf{r}(\partial_i,X_2) + X_2^i\overline{a}\mathbf{r}(\partial_i,X_1) \\
&= \overline{a}(\mathbf{r}(X_1,X_2) + \mathbf{r}(X_2,X_1)) \\
&= 2\overline{a}\mathbf{r}(X_1,X_2). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Par récurrence, on aboutit au résultat suivant :

Proposition 6.2 Soit $\varphi \in \Gamma^\infty(\mathbf{F}_b(TM))$ et $k \in \mathbb{N}$. Dans ces conditions, si $k \geq 1$, $\tilde{\mathcal{D}}^k\tilde{\varphi}$ est de la forme suivante :

$$\tilde{\mathcal{D}}^k\tilde{\varphi} = (\mathcal{D}^k\varphi)^h + \sum_{l=0}^{k-1} B_{k-l} \vee (\mathcal{D}^l\varphi)^h$$

où les B_{k-l} sont des sections invariantes de $\Gamma^\infty(S^{k-l}T^*\tilde{M}^a)$. En outre, elles sont toutes des sommes de termes de la forme

$$\lambda_r(-\frac{1}{\overline{a}}\omega^a)^{\vee r} \vee \beta^h_{k-l-r}$$

où $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq k-l$, le nombre réel λ_r ne dépendant pas de $\overline{a}$, la section β_{k-l-r} appartenant à $\Gamma^\infty(S^{k-l-r}T^*M)$ étant une combinaison linéaire à coefficients rationnels de produits symétriques de différentielles symétriques itérées du tenseur $\mathbf{r}$, les coefficients de cette combinaison ne dépendant également pas de $\overline{a}$.

Démonstration. La formule est vraie pour $k = 1$ car

$$\tilde{\mathcal{D}}\tilde{\varphi} = (\mathcal{D}\varphi)^h - \frac{\overline{b}}{\overline{a}}\omega^a \vee \varphi^h.$$

Montrons maintenant que si $\tilde{\mathcal{D}}^k\tilde{\varphi}$ a la forme indiquée, alors $\tilde{\mathcal{D}}^{k+1}\tilde{\varphi}$ l'a également. Nous avons tout d'abord :

$$\tilde{\mathcal{D}}((\mathcal{D}^k\varphi)^h) = (\mathcal{D}^{k+1}\varphi)^h - \frac{2k+\overline{b}}{\overline{a}(k+1)}\omega^a \vee (\mathcal{D}^k\varphi)^h$$

et ensuite, si $l \leq k-1$,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{D}}(B_{k-l} \vee (\mathcal{D}^l\varphi)^h) &= B_{k-l} \vee \tilde{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^l\varphi)^h + \tilde{\mathcal{D}}(B_{k-l}) \vee (\mathcal{D}^l\varphi)^h \\ &= B_{k-l} \vee ((\mathcal{D}^{l+1}\varphi)^h - \frac{2l+\overline{b}}{\overline{a}(l+1)}\omega^a \vee (\mathcal{D}^l\varphi)^h) + \tilde{\mathcal{D}}(B_{k-l}) \vee (\mathcal{D}^l\varphi)^h,\end{aligned}$$

tandis que

$$\tilde{\mathcal{D}}(\sum_{r=0}^{k-l} \lambda_r(\frac{-1}{\overline{a}}\omega^a)^{\vee r} \vee \beta^h_{k-l-r})$$

est égal à

$$\sum_{r=0}^{k-l} \lambda_r(\frac{-1}{\overline{a}})^r(\frac{k-l-r+1}{k-l+1}\omega^{a\vee r} \vee (\mathcal{D}\beta_{k-l-r})^h + \frac{1}{k-l+1}(2\overline{a}r\omega^{a\vee(r-1)} \vee (\mathbf{r} \vee \beta_{k-l-r})^h$$

$$-\frac{2(k-l-r)+r+\overline{b}}{\overline{a}}\omega^{a\vee(r+1)} \vee \beta^h_{k-l-r})).$$

On peut alors se rendre compte que $\tilde{\mathcal{D}}^{k+1}\tilde{\varphi}$ a la forme prescrite. ∎

6.2 Existence de $\rho_L[\nabla]$

Proposition 6.3 Soit m un entier positif, $m > 1$, soient $b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$c \notin \{\frac{j+m}{m+1} | j \in \mathbb{N}\}.$$

Dans ces conditions, il existe une prescription d'ordre naturelle ρ_L projectivement invariante lorsque les fibrés vectoriels E et E' au-dessus d'une variété M de dimension m sont respectivement $\mathbf{F}_b(TM)$ et $\mathbf{F}_{b+c}(TM)$. On a même une formule explicite pour ρ_L : si $k \in \mathbb{N}$, $A \in \Gamma^\infty(\mathbf{F}_c(TM) \otimes S^kTM)$, si ∇ est une connexion sans torsion dans le fibré tangent de M et φ une b-densité sur M, alors, si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a pour tout $y \in \tilde{M}^a$:

$$(\rho_L[\nabla](A)(\varphi))_{\tau^a(y)} := \pi^a_{b+c}(y, (\rho_s[\tilde{\nabla}](\tilde{A}[\nabla])(\tilde{\varphi}))_y)$$

où ρ_s désigne la prescription d'ordre standard. La prescription d'ordre ρ_L ne dépend pas de a.

Démonstration. D'après le lemme 5.1, la fonction $\tilde{\varphi}$ est $(-\frac{b}{a})$-équivariante tandis que la connexion $\tilde{\nabla}$ est invariante par construction. Il s'ensuit que les différentielles symétriques itérées $\tilde{\mathcal{D}}^k\tilde{\varphi}$ de $\tilde{\varphi}$ par rapport à $\tilde{\nabla}$ sont des champs de tenseurs $(-\frac{b}{a})$-équivariants. Montrons cela par récurrence sur k. Si $k = 0$, le résultat est vrai. Supposons maintenant que le résultat est vrai pour des valeurs de k inférieures ou égales à n et démontrons-le pour $k = n + 1$. Remarquons tout d'abord que :

$$(L_{\mathcal{E}}(\tilde{\nabla}_X\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi}))(X_1,\ldots,X_n) = (\tilde{\nabla}_X(L_{\mathcal{E}}\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi}))(X_1,\ldots,X_n)+(\tilde{\nabla}_{[\mathcal{E},X]}\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi})(X_1,\ldots,X_n).$$

De fait, on a d'une part :

$$\begin{gathered}(L_{\mathcal{E}}(\tilde{\nabla}_X\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi}))(X_1,\ldots,X_n) = \\ \mathcal{E}.((\tilde{\nabla}_X\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi})(X_1,\ldots,X_n)) - \textstyle\sum_{i=1}^n(\tilde{\nabla}_X\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi})(X_1,\ldots,[\mathcal{E},X_i],\ldots,X_n) \\ = \mathcal{E}.(X.(\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi})(X_1,\ldots,X_n) - \textstyle\sum_{i=1}^n\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi}(X_1,\ldots,\tilde{\nabla}_XX_i,\ldots,X_n)) \\ - \textstyle\sum_{i=1}^n(X.\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi}(X_1,\ldots,[\mathcal{E},X_i],\ldots,X_n) \\ - \textstyle\sum_{j=1,j\neq i}^n\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi}(X_1,\ldots,\tilde{\nabla}_XX_j,\ldots,[\mathcal{E},X_i],\ldots,X_n) \\ -\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi}(X_1,\ldots,\tilde{\nabla}_X[\mathcal{E},X_i],\ldots,X_n)).\end{gathered}$$

D'autre part, il vient :

$$(\tilde{\nabla}_X(L_{\mathcal{E}}\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi}))(X_1,\dots,X_n) =$$

$$X.((L_{\mathcal{E}}\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi})(X_1,\dots,X_n)) - \textstyle\sum_{i=1}^n(L_{\mathcal{E}}\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi})(X_1,\dots,\tilde{\nabla}_X X_i,\dots,X_n)$$

$$= X.(\mathcal{E}.(\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi})(X_1,\dots,X_n) - \textstyle\sum_{i=1}^n \tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi}(X_1,\dots,[\mathcal{E},X_i],\dots,X_n))$$

$$-\textstyle\sum_{i=1}^n(\mathcal{E}.\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi}(X_1,\dots,\tilde{\nabla}_X X_i,\dots,X_n)$$

$$-\textstyle\sum_{j=1,j\neq i}^n \tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi}(X_1,\dots,[\mathcal{E},X_j],\dots,\tilde{\nabla}_X X_i,\dots,X_n)$$

$$-\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi}(X_1,\dots,[\mathcal{E},\tilde{\nabla}_X X_i],\dots,X_n)).$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser le fait que

$$[\mathcal{E},\tilde{\nabla}_Z Z'] - \tilde{\nabla}_{[\mathcal{E},Z]}Z' - \tilde{\nabla}_Z[\mathcal{E},Z'] = 0$$

pour tous $Z, Z' \in Vect(\tilde{M}^a)$ et de remarquer que si un des arguments d'une différentielle symétrique est nul, alors celle-ci est nulle.

Dans ces conditions, comme la différentielle symétrique a pour expression en coordonnées locales :

$$\tilde{\mathcal{D}}A = \frac{1}{k+1}(\sum_{j=1}^{m+1} dx^j \vee (\tilde{\nabla}_{\partial_j}A))$$

si $A \in \Gamma^\infty(S^kT^*\tilde{M}^a)$, il vient :

$$(\tilde{\mathcal{D}}^{n+1}\tilde{\varphi}) = \frac{1}{n+1}(\sum_{j=1}^{m+1} dx^j \vee (\tilde{\nabla}_{\partial_j}\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi}))$$

et on a alors, en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
L_{\mathcal{E}}(\tilde{\mathcal{D}}^{n+1}\tilde{\varphi}) &= \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{m+1}(L_{\mathcal{E}}dx^j) \vee (\tilde{\nabla}_{\partial_j}\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi}) + (dx^j) \vee (L_{\mathcal{E}}(\tilde{\nabla}_{\partial_j}\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi})) \\
&= \frac{1}{n+1}((dx^{m+1}) \vee (\tilde{\nabla}_{\partial_{m+1}}\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi}) + \sum_{j=1}^{m+1}(dx^j) \vee (\tilde{\nabla}_{\partial_j}(L_{\mathcal{E}}\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi}) + \tilde{\nabla}_{[\mathcal{E},\partial_j]}\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi})) \\
&= \frac{1}{n+1}(dx^{m+1} \vee (\tilde{\nabla}_{\partial_{m+1}}\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi}) - \frac{b}{a}\sum_{j=1}^{m+1} dx^j \vee (\tilde{\nabla}_{\partial_j}\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi}) + dx^{m+1} \vee \tilde{\nabla}_{-\partial_{m+1}}\tilde{\mathcal{D}}^n\tilde{\varphi}) \\
&= -\frac{b}{a}(\tilde{\mathcal{D}}^{n+1}\tilde{\varphi}).
\end{aligned}$$

D'autre part, le relèvement $\tilde{A}[\nabla]$ de A est $(-\frac{c}{a})$-équivariant d'après sa construction dans la proposition 5.2 qui est rendue possible grâce à la condition de l'énoncé de cette proposition. Puisque, par définition,

$$\rho_s[\tilde{\nabla}](\tilde{A}[\nabla])(\tilde{\varphi}) = i(\tilde{A}[\nabla])\tilde{\mathcal{D}}^k\tilde{\varphi},$$

il vient que $\rho_s[\tilde{\nabla}](\tilde{A}[\nabla])(\tilde{\varphi})$ est $(-\frac{b+c}{a})$-équivariant. De fait, par linéarité, il suffit de le vérifier dans le cas où $\tilde{A}[\nabla]$ s'écrit localement

$$\tilde{A}[\nabla] = X_1 \vee \ldots \vee X_k,$$

où $X_1, \ldots, X_k$ sont des champs de vecteurs locaux et dans le cas où $\tilde{\mathcal{D}}^k\tilde{\varphi}$ s'écrit localement

$$\tilde{\mathcal{D}}^k\tilde{\varphi} = \gamma^1 \vee \ldots \vee \gamma^k,$$

où $\gamma^1, \ldots, \gamma^k$ sont des 1-formes locales. Il vient alors :

$$i(\tilde{A}[\nabla])(\tilde{\mathcal{D}}^k\tilde{\varphi}) = i(X_1 \vee \ldots \vee X_k)(\tilde{\mathcal{D}}^k\tilde{\varphi}) = \tilde{\mathcal{D}}^k\tilde{\varphi}(X_k, \ldots, X_1)$$

et il vient successivement :

$$\begin{aligned}
L_{\mathcal{E}}(\tilde{\mathcal{D}}^k\tilde{\varphi}(X_k, \ldots, X_1)) &= \mathcal{E}.\tilde{\mathcal{D}}^k\tilde{\varphi}(X_k, \ldots, X_1) \\
&= (L_{\mathcal{E}}\tilde{\mathcal{D}}^k\tilde{\varphi})(X_k, \ldots, X_1) + \sum_{j=1}^{k} \tilde{\mathcal{D}}^k\tilde{\varphi}(X_k, \ldots, [\mathcal{E}, X_j], \ldots, X_1) \\
&= -\frac{b}{a}\tilde{\mathcal{D}}^k\tilde{\varphi}(X_k, \ldots, X_1) + (L_{\mathcal{E}}(X_k \vee \ldots \vee X_1))(\gamma^1, \ldots, \gamma^k) \\
&= -\frac{b}{a}\tilde{\mathcal{D}}^k\tilde{\varphi}(X_k, \ldots, X_1) - \frac{c}{a}(X_k \vee \ldots \vee X_1)(\gamma^1, \ldots, \gamma^k) \\
&= -\frac{b+c}{a}\tilde{\mathcal{D}}^k\tilde{\varphi}(X_k, \ldots, X_1).
\end{aligned}$$

Par un raisonnement analogue à celui tenu dans le lemme 5.3, on s'aperçoit que $\rho_L[\nabla](A)(\varphi)$ est une $(b+c)$-densité bien définie. En outre, la différentielle symétrique $\tilde{\mathcal{D}}^k\tilde{\varphi}$ contient une seule fois le terme $(\mathcal{D}^k\varphi)^h$ d'après la proposition 6.2 et des termes $(\mathcal{D}^l\varphi)^h$ de degré $l < k$. Le développement de $\tilde{A}[\nabla]$ commence par le terme A^h d'après la formule obtenue dans la proposition 5.2. Le symbole principal de $\rho_L[\nabla](A)$ est alors égal au symbole principal de l'opérateur différentiel qui à la section φ associe la section égale en $\tau^a(y)$ à

$$\pi^a_{b+c}(y, (i(A^h)(\mathcal{D}^k\varphi)^h)_y),$$

c'est-à-dire à

$$\pi^a_{b+c}(y, (\widetilde{i(A)\mathcal{D}^k\varphi})_y),$$

donc à

$$(i(A)\mathcal{D}^k\varphi)_{\tau^a(y)}.$$

L'opérateur différentiel $\rho_L[\nabla](A)$ a donc A pour symbole principal, ce qui prouve que ρ_L est bien une prescription d'ordre. De plus, connaissant les développements explicites de $\tilde{A}[\nabla]$ et $\tilde{\mathcal{D}}^k\tilde{\varphi}$, on se rend compte que la dépendance en $\overline{a}$ dans l'expression de ρ_L disparaît. En effet, si $0 \leq j \leq k$, les seuls termes éventuellement non nuls de

$$i(A^h_{k-j} \vee \mathcal{E}^{\vee j})(\tilde{\mathcal{D}}^k\tilde{\varphi})$$

sont donnés par

$$i(A^h_{k-j} \vee \mathcal{E}^{\vee j})(\lambda_j(-\frac{1}{\overline{a}}\omega^a)^{\vee j} \vee \beta^h_{k-l-j} \vee (\mathcal{D}^l\varphi)^h),$$

où $0 \leq l \leq k$, si $0 \leq j \leq k-l$. La dépendance en $\overline{a}$ dans ces expressions, connaissant la forme explicite de $\tilde{A}[\nabla]$, est entièrement contenue dans $(-\overline{a})^j$ et $(-\frac{1}{\overline{a}}\omega^a)^{\vee j}$, donc elle disparaît.

Par construction, la connexion $\tilde{\nabla}$ et $\tilde{A}[\nabla]$ ne dépendent que de la classe projective de la connexion ∇. La prescription d'ordre ρ_L est donc projectivement invariante.

Soient N une variété de dimension m, $\Phi : N \mapsto M$ une immersion, $y' \in \tilde{N}^a$ et $\pi'^a_{b+c} : \tilde{N}^a \times \mathbb{R} \mapsto \mathbf{F}_{b+c}(TN)$ la projection naturelle correspondant au fibré associé $\mathbf{F}_{b+c}(TN)$. En tenant compte de la naturalité des relèvements $\nabla \mapsto \tilde{\nabla}$ et $(A, \nabla) \mapsto \tilde{A}[\nabla]$ et de la naturalité de ρ_s, il vient :

$$\begin{aligned}
(\rho_L[\Phi^*\nabla](\Phi^*A)(\Phi^*\varphi))_{\tau'^a(y')} &= \pi'^a_{b+c}(y', (\rho_s[\widetilde{\Phi^*\nabla}](\widetilde{\Phi^*A}[\Phi^*\nabla])(\widetilde{\Phi^*\varphi}))_{y'}) \\
&= \pi'^a_{b+c}(y', (\rho_s[\tilde{\Phi}^{a*}\tilde{\nabla}](\tilde{\Phi}^{a*}(\tilde{A}[\nabla]))(\tilde{\Phi}^{a*}\tilde{\varphi}))_{y'}) \\
&= \pi'^a_{b+c}(y', (\rho_s[\tilde{\nabla}](\tilde{A}[\nabla])(\tilde{\varphi}))_{\tilde{\Phi}^a(y')}) \\
&= (\Phi^*(\rho_L[\nabla](A)(\varphi)))_{\tau'^a(y')},
\end{aligned}$$

ce qui prouve que ρ_L est naturelle. ∎

6.3 Une formule explicite

Si M est munie d'une connexion sans torsion ∇ qui est telle que la partie symétrique du tenseur de Ricci est nulle, on peut obtenir une forme encore plus explicite de ρ_L :

Proposition 6.4 Soit M une variété de dimension $m > 1$, soient $b, c \in \mathbb{R}$ tels que la condition de la proposition 6.3 soit satisfaite. Si ∇ est une connexion sans torsion dans le fibré tangent de M qui est telle que la partie symétrique du tenseur de Ricci s'annule, alors on obtient la forme explicite suivante pour $\rho_L[\nabla]$:

$$\rho_L[\nabla](A)(\varphi) = \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} \frac{\prod_{j=1}^{l}(k-j+(m+1)b)}{\prod_{j=1}^{l}(2k-j+m-(m+1)c)} \rho_s(\mathbf{Div}^l(A))(\varphi)$$

pour tous $A \in \Gamma^\infty(\mathbf{F}_c(TM) \otimes S^kTM)$ et φ appartenant à $\Gamma^\infty(\mathbf{F}_b(TM))$, si on pose que les numérateurs et dénominateurs de la fraction figurant dans la formule sont égaux à 1 lorsque $l = 0$.

Démonstration. D'après la formule de la proposition 5.3, on a

$$A_{k-l} = \frac{(-\bar{a})^l}{l! \prod_{j=1}^{l}(2k-j+m-(m+1)c)} \mathbf{Div}^l(A),$$

avec $0 \leq l \leq k$, en posant que le dénominateur de la fraction figurant dans la formule est égal à 1 si $l = 0$. Par ailleurs, on sait d'après la proposition 6.2 que $\tilde{\mathcal{D}}^k\tilde{\varphi}$ est de la forme suivante :

$$\tilde{\mathcal{D}}^k\tilde{\varphi} = \sum_{l=0}^{k} u_l^{(k)}(\frac{-\omega^a}{\bar{a}})^{\vee l} \vee (\mathcal{D}^{k-l}\varphi)^h,$$

où les $u_l^{(k)}$ sont des nombres réels. La formule de la proposition 6.1 nous donne la relation suivante entre les coefficients $u_l^{(k)}$:

$$u_l^{(k+1)} = u_l^{(k)}(\frac{k-l+1}{k+1}) + \frac{2k-l+1+(m+1)b}{k+1}u_{l-1}^{(k)},$$

si $1 \leq l \leq k$. De fait, on a d'une part :

$$\tilde{\mathcal{D}}^{k+1}\tilde{\varphi} = \sum_{l=0}^{k+1} u_l^{(k+1)}(\frac{-\omega^a}{\bar{a}})^{\vee l} \vee (\mathcal{D}^{k+1-l}\varphi)^h,$$

tandis que d'autre part :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{D}}(\tilde{\mathcal{D}}^k\tilde{\varphi}) &= \textstyle\sum_{l=0}^{k} u_l^{(k)}\tilde{\mathcal{D}}((\frac{-\omega^a}{\bar{a}})^{\vee l} \vee (\mathcal{D}^{k-l}\varphi)^h) \\ &= \textstyle\sum_{l=0}^{k} u_l^{(k)}(\frac{-1}{\bar{a}})^l(\frac{k-l+1}{k+1}\omega^{a\vee l} \vee (\mathcal{D}^{k-l+1}\varphi)^h \\ &\quad - \frac{2(k-l)+l+\bar{b}}{\bar{a}(k+1)}\omega^{a\vee(l+1)} \vee (\mathcal{D}^{k-l}\varphi)^h)\end{aligned}$$

$$= \sum_{l=0}^{k} u_l^{(k)}(\tfrac{k-l+1}{k+1})(\tfrac{-\omega^a}{\bar{a}})^{\vee l} \vee (\mathcal{D}^{k+1-l}\varphi)^h$$
$$+ \sum_{l=1}^{k+1} u_{l-1}^{(k)}(\tfrac{2k-l+1+\bar{b}}{k+1})(\tfrac{-\omega^a}{\bar{a}})^{\vee l} \vee (\mathcal{D}^{k-l+1}\varphi)^h.$$

Cette relation nous donne par récurrence la forme explicite suivante des $u_l^{(k)}$:

$$u_l^{(k)} = \frac{1}{l!}\prod_{j=1}^{l}(k-j+(m+1)b).$$

En effet, on a tout d'abord

$$u_0^{(0)} = 1; u_0^{(1)} = 1; u_1^{(1)} = (m+1)b$$

et si on suppose que pour tout k inférieur ou égal à n, la formule est vraie pour tout l compris entre 0 et k, il vient, si $1 \leq l \leq n$,

$$u_l^{(n+1)} = \tfrac{1}{l!}\prod_{j=1}^{l}(n-j+(m+1)b)(\tfrac{n-l+1}{n+1})$$
$$+(\tfrac{2n-l+1+(m+1)b}{n+1})\tfrac{1}{(l-1)!}\prod_{j=1}^{l-1}(n-j+(m+1)b)$$
$$= \tfrac{1}{l!}\prod_{j=1}^{l-1}(n-j+(m+1)b)((n-l+(m+1)b)\tfrac{n-l+1}{n+1}+(\tfrac{2n-l+1+(m+1)b}{n+1})l)$$
$$= \tfrac{1}{l!}\prod_{j=1}^{l}(n+1-j+(m+1)b).$$

Il suffit alors de noter que $u_0^{(n+1)} = 1$ et que

$$\begin{aligned} u_{n+1}^{(n+1)} &= \frac{n+(m+1)b}{n+1}\frac{1}{n!}\prod_{j=1}^{n}(n-j+(m+1)b) \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\prod_{j=1}^{n+1}(n+1-j+(m+1)b). \end{aligned}$$

Enfin, pour obtenir la formule annoncée, on remarque que

$$\begin{aligned} i(\tilde{A})(\tilde{\mathcal{D}}^k\tilde{\varphi}) &= i(\sum_{l=0}^{k} A_{k-l}^h \vee \mathcal{E}^{\vee l})(\tilde{\mathcal{D}}^k\tilde{\varphi}) \\ &= i(\sum_{l=0}^{k} A_{k-l}^h \vee \mathcal{E}^{\vee l})(\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\prod_{n=1}^{j}(k-n+(m+1)b)(\frac{-\omega^a}{\bar{a}})^{\vee j} \vee (\mathcal{D}^{k-j}\varphi)^h) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} \prod_{j=1}^{l} (k-j+(m+1)b) i(A_{k-l}^{h} \vee \mathcal{E}^{\vee l}) (\frac{-\omega^{a}}{\overline{a}})^{\vee l} \vee (\mathcal{D}^{k-l}\varphi)^{h} \\
&= \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} \prod_{j=1}^{l} (k-j+(m+1)b) l! (\frac{-1}{\overline{a}})^{l} i(A_{k-l}^{h}) (\mathcal{D}^{k-l}\varphi)^{h} \\
&= \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} \frac{\prod_{j=1}^{l}(k-j+(m+1)b)}{\prod_{j=1}^{l}(2k-j+m-(m+1)c)} \rho_s(\widetilde{\mathbf{Div}^{l} A})(\varphi). \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Bibliographie

[1] F.BONIVER, Symbole sl_{m+1}-équivariant et classification de modules d'opérateurs différentiels sur les variétés, Mémoire de lic. en sc. math., ULg (1997-98).

[2] M. BORDEMANN, Sur l'existence d'une prescription d'ordre naturelle projectivement invariante, arXiv:math.DG/0208171 v1 22 Aug 2002.

[3] J.de C. GLIBERT, Connexions sur un fibré principal et théorème de décomposition de G. de Rham, Mémoire de lic. en sc. math., ULg (1975-76).

[4] S.HANSOUL, Classification projective des opérateurs différentiels agissant entre densités et cohomologie associée, Mémoire de lic. en sc. math., ULg (2000-01).

[5] I.KOLAR, P.W. MICHOR, J.SLOVAK, Natural Operations in Differential Geometry, Springer-Verlag (1993).

[6] P.LECOMTE, A propos des densités tensorielles, http://www.ulg.ac.be/geothalg/QPE/ (2002).

[7] P.LECOMTE, Eléments de géométrie différentielle, Notes de cours, ULg (2002).

[8] P.LECOMTE, Towards projectively equivariant quantization in noncommutative differential geometry and its applications to physics, Progress in theoretical physics, 114, 2002, pp.125-132.

[9] P.M. QUAN, Introduction à la géométrie des variétés différentiables, Dunod, Paris (1968).