Remerciements

Je tiens à remercier Pierre Lecomte pour avoir guidé cette thèse et pour m'avoir constamment soutenu lors de sa réalisation.

J'exprime toute ma gratitude à Pierre Mathonet sans qui cette thèse n'aurait pu voir le jour.

Je remercie également Sarah Hansoul pour les discussions fructueuses que nous avons eues ensemble.

Enfin, je remercie le Fonds pour la formation à la Recherche dans l'Industrie et dans l'Agriculture qui a bien voulu m'accorder une bourse d'aspirant.

Introduction

Une procédure de quantification peut être définie grossièrement comme étant une bijection linéaire de l'espace des observables classiques dans un espace d'opérateurs différentiels agissant sur des fonctions d'onde (du moins dans le cadre de la quantification géométrique, voir [**28**]).

De notre point de vue, l'espace $\mathcal{S}(M)$ des observables (appelés aussi *symboles*) est constitué de fonctions différentiables sur le fibré cotangent T^*M d'une variété M qui sont polynomiales le long des fibres. L'espace $\mathcal{D}_\lambda(M)$ des opérateurs différentiels est assimilé à l'espace des opérateurs différentiels agissant sur des λ-densités au-dessus de M.

Il est connu qu'il n'existe pas de quantification naturelle. En d'autres termes, les espaces de symboles et d'opérateurs différentiels ne sont pas isomorphes en tant que représentations de $\mathrm{Diff}(M)$.

L'idée de la *quantification équivariante*, introduite par P. Lecomte et V. Ovsienko dans [**16**] est de réduire le groupe de difféomorphismes locaux de la manière suivante.

Ces auteurs ont étudié le cas du groupe projectif $PGL(m+1,\mathbb{R})$ agissant localement sur la variété $M = \mathbb{R}^m$ par des transformations linéaires fractionnaires. Ils montrèrent que les espaces de symboles et d'opérateurs différentiels sont canoniquement isomorphes en tant que représentations de $PGL(m+1,\mathbb{R})$ (ou de son algèbre de Lie $sl(m+1,\mathbb{R})$). En d'autres mots, ils prouvèrent qu'il existe une unique *quantification projectivement équivariante*.

Dans [**9**], les auteurs ont étudié les espaces $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(\mathbb{R}^m)$ d'opérateurs différentiels transformant des λ-densités en des μ-densités et leurs espaces gradués associés $\mathcal{S}_\delta$. Ils montrèrent l'existence et l'unicité d'une quantification projectivement équivariante, dans les cas où la valeur $\delta = \mu - \lambda$ n'appartient pas à un ensemble de valeurs critiques.

Un premier exemple de quantification projectivement équivariante pour des opérateurs différentiels agissant sur des champs de tenseurs a été donné dans **[1]**.

Jusque maintenant, les résultats dont nous venons de parler ont trait à des variétés pourvues d'une structure projective plate. Néanmoins, dans **[4, 5]**, S. Bouarroudj montra que la formule de la quantification projectivement équivariante pour des opérateurs différentiels d'ordre deux et trois peut être exprimée en utilisant une connexion linéaire sans torsion, de telle manière que la quantification ne dépende que de la *classe projective* de la connexion.

Sur cette lancée, dans **[18]**, P. Lecomte conjectura l'existence d'une quantification

$$Q : \mathcal{S}_\delta(M) \to \mathcal{D}_{\lambda\mu}(M)$$

dépendant d'une connexion linéaire sans torsion, qui serait naturelle en tous ses arguments et qui resterait inchangée sous l'effet d'un changement projectif de connexion.

L'existence d'une telle *quantification naturelle projectivement équivariante* a été prouvée par M. Bordemann dans **[3]** en utilisant la notion de connexion de Thomas-Whitehead associée à une classe projective de connexions (voir **[25, 27, 24, 12, 23]** pour une discussion sur les connexions de Thomas-Whitehead). Sa construction a été adaptée plus tard par S. Hansoul dans **[11]** dans le but de traiter le cas des opérateurs différentiels agissant sur des formes, globalisant ainsi les résultats de **[1]**.

Récemment, dans sa thèse, S. Hansoul **[10]** montra comment généraliser la méthode donnée par M. Bordemann afin de résoudre le problème de l'existence d'une quantification naturelle et projectivement équivariante pour des opérateurs différentiels agissant sur des champs de tenseurs arbitraires.

Cette thèse se situe dans le prolongement de toutes ces recherches. Elle est la somme de travaux qui approfondissent ces domaines d'investigation et que nous allons tout d'abord résumer brièvement.

Dans **[20]**, nous avons analysé le problème de l'existence d'une quantification naturelle et projectivement équivariante pour des opérateurs différentiels agissant entre densités en utilisant la théorie des connexions de Cartan projectives. Nous avons obtenu une formule explicite pour la quantification naturelle et projectivement équivariante en termes de la connexion de Cartan normale associée à une classe projective de connexions linéaires.

A notre étonnement, il apparut que cette formule explicite n'est rien d'autre que la formule donnée dans **[9]** pour le cas plat, au remplacement près des dérivées partielles par les différentiations invariantes par rapport à la connexion de Cartan normale. En particulier, nous avons montré que la quantification naturelle et projectivement invariante existe si et seulement si la quantification $sl(m+1,\mathbb{R})$-équivariante existe dans le cas plat. Nous avons ainsi apporté un raffinement au résultat de M. Bordemann qui n'était pas capable de trancher la question de l'existence de la quantification naturelle projectivement invariante dans les situations où δ était égal à une valeur critique.

Sur cette lancée, en utilisant les résultats de **[20]** et de **[6]**, nous avons trouvé dans **[21]** une formule explicite en termes d'opérateurs naturels sur la variété de base M pour la quantification naturelle et projectivement équivariante. Cette formule généralise les formules données par Bouarroudj dans **[4]** et dans **[5]** pour les opérateurs différentiels d'ordres deux et trois.

Le problème de l'unicité de la quantification naturelle projectivement équivariante n'avait pas encore été abordé. On savait que la quantification $sl(m+1,\mathbb{R})$-équivariante était unique dans les situations non critiques. Cela n'impliquait toutefois pas l'unicité de la quantification naturelle projectivement équivariante. Dans **[22]**, nous prouvons que, contrairement à la quantification $sl(m+1,\mathbb{R})$-équivariante, la quantification naturelle et projectivement équivariante n'est pas unique même dans les situations non-critiques. Nous réalisons cela en utilisant la théorie des connexions de Cartan et en particulier le tenseur de Weyl qui peut être introduit très naturellement à partir de celle-ci.

Enfin, dans **[19]**, nous analysons la question de l'existence de quantifications naturelles et projectivement équivariantes pour des opérateurs différentiels agissant sur des champs de tenseurs arbitraires. Cette question avait déjà été abordée par S. Hansoul dans **[10]** en utilisant les connexions de Thomas tandis que nous l'abordons grâce aux connexions de Cartan projectives. L'avantage de notre méthode est qu'elle donne lieu à une généralisation directe des formules qui peuvent être écrites dans le contexte de la quantification projectivement équivariante sur $\mathbb{R}^m$ (dans les situations non-critiques), simplement par la substitution des différentiations invariantes par rapport à une connexion de Cartan aux dérivées partielles. La méthode met aussi en exergue un lien direct entre l'existence d'une quantification $sl(m+1,\mathbb{R})$-équivariante sur $M=\mathbb{R}^m$ et l'existence de la quantification naturelle et projectivement équivariante correspondante sur une variété arbitraire.

Dans le premier chapitre de ce travail, on rappelle les notions fondamentales nécessaires à une bonne compréhension de cet ouvrage. Ces notions sont notamment relatives aux fibrés principaux, aux opérateurs différentiels et symboles associés et aux dérivées covariantes. Pour finir, on rappelle la position du problème de la quantification naturelle projectivement invariante.

Dans le second chapitre, on rappelle les notions de base relatives aux connexions de Cartan et aux fibrés de Cartan. Après avoir défini une *connexion de Cartan* en toute généralité, on explique ce qu'est une *structure projective* et on démontre que l'ensemble des structures projectives est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des classes projectives de connexions linéaires sans torsion. On montre ensuite qu'à une de ces classes, on peut associer de manière naturelle une connexion de Cartan projective, appelée *connexion projective normale.* D'autre part, les fonctions équivariantes sur le fibré des repères d'ordre 1, peuvent être relevées en des fonctions équivariantes sur une structure projective. On peut faire agir sur ces fonctions une opération appelée *différentiation invariante* qu'on construit à partir de la connexion de Cartan normale.

Dans le troisième chapitre, on analyse la question de l'existence d'une quantification naturelle projectivement invariante dans le cas d'opérateurs différentiels agissant entre densités. On montre qu'une telle quantification existe si et seulement si la quantification correspondante existe dans le cas plat, en en donnant une formule explicite en terme de la connexion de Cartan normale. Cette formule est construite à partir de la différentiation invariante, ∇^ω, et d'un opérateur que nous avons appelé Div^ω. La coïncidence entre formules "plate" et "courbe" a lieu si l'on substitue ∇^ω à la dérivation covariante par rapport à la connexion canonique plate de $\mathbb{R}^m$ et Div^ω à la divergence covariante par rapport à cette même connexion. L'exactitude de la formule "courbe" se démontre en montrant que celle-ci transforme des fonctions équivariantes en des fonctions équivariantes. Pour ce faire, on calcule au préalable l'écart à l'équivariance des fonctions $\nabla_s^{\omega^l} f$ et $Div^{\omega^l} S$, où f et S représentent respectivement une densité et un symbole.

Le quatrième chapitre se situe dans le prolongement du chapitre précédent. On y analyse l'existence d'une quantification naturelle projectivement invariante dans le cas d'opérateurs différentiels agissant entre champs de tenseurs arbitraires. On rappelle tout d'abord en détails les outils et la méthode utilisée dans le cadre de la quantification $sl(m+1,\mathbb{R})$-équivariante dans $\mathbb{R}^m$. Les symboles et les opérateurs différentiels étant des représentations de $sl(m+1,\mathbb{R})$, on peut construire les opérateurs de Casimir associés C et $\mathcal{C}$ sur ces espaces. La quantification envoie alors un vecteur propre de C sur un vecteur propre de $\mathcal{C}$ de même valeur propre et qui a pour symbole principal le symbole de départ. Par analogie, on définit dans la situation courbe des "opérateurs de Casimir" agissant sur des fonctions équivariantes. La quantification courbe est construite de manière exactement similaire à la quantification plate et on montre qu'ainsi, elle transforme des fonctions équivariantes en des fonctions équivariantes. La conclusion surprenante est alors que dans les situations non-critiques, il existe une quantification courbe si et seulement si la quantification correspondante plate existe, les formules donnant les quantifications courbes s'obtenant en substituant dans les formules donnant les quantification plates la différentiation invariante aux dérivées partielles.

Dans le cinquième chapitre, on donne une formule explicite pour la quantification naturelle projectivement équivariante dont il est question au chapitre 3. Pour ce faire, on développe les opérateurs $\nabla_s^{\omega^l}$ et Div^{ω^l} en termes d'opérateurs naturels sur la variété de base M en utilisant des outils exposés dans [**6**].

Enfin, dans le sixième chapitre, on montre que la quantification naturelle projectivement équivariante du chapitre 3 n'est pas unique, même dans les situations non-critiques, en construisant des applications naturelles projectivement équivariantes entre espaces de symboles. On réalise cela grâce au *tenseur de Weyl* que l'on peut introduire très naturellement par le biais de la courbure de la connexion de Cartan normale.

Table des matières

Remerciements 1

Introduction 2

Chapitre 1. Notions fondamentales 9
1. Fibrés principaux 9
2. Opérateurs différentiels et symboles 12
3. Dérivées covariantes 14
4. Position du problème 16

Chapitre 2. Fibrés et connexions de Cartan 18
1. Connexions de Cartan 18
2. Le groupe projectif et son algèbre de Lie 19
3. Structures projectives 20
4. Connexions projectives 20
5. Différentiation invariante 22
6. Relèvement des fonctions équivariantes 23

Chapitre 3. Le cas des densités 26
1. L'opérateur de divergence 26
2. Le résultat principal 29

Chapitre 4. Le cas général 31
1. Le cas plat 31
2. Outils du cas courbe 39
3. Construction de la quantification 42

Chapitre 5. Une formule explicite 45
1. Le tenseur de déformation 45
2. Calcul du tenseur de déformation 47
3. Développements de ∇^{ω^l} et de Div^{ω^l} 49
4. La formule explicite 53

Chapitre 6. Non-unicité des quantifications naturelles projectivement invariantes 57
1. Le tenseur de Weyl 57

2. Construction d'applications naturelles projectivement invariantes 58

Bibliographie 61

CHAPITRE 1

Notions fondamentales

Nous exposons dans ce chapitre les notions nécessaires à la bonne compréhension de cet ouvrage. Dans tout le travail, nous désignerons par M une variété que nous supposerons C^∞, séparée, connexe et à base dénombrable. Nous supposerons de plus que la dimension m de cette variété est toujours strictement supérieure à 1.

1. Fibrés principaux

Dans ce chapitre, nous noterons P, sauf mention explicite du contraire, un fibré principal de groupe de structure G sur une variété M. Il sera également sous-entendu que π désignera la projection $P \to M$ et R l'action de G sur P.

Etant donné une variété M, un exemple fondamental de fibré principal sur M est le *fibré des repères d'ordre k,* noté P^kM, dont les points sont les repères d'ordre k de M en tout point de M. Pour rappel, un repère d'ordre k en un point x de M est le jet d'ordre k en l'origine 0 de $\mathbb{R}^m$ d'un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^m$ dans M appliquant 0 sur x. Le fibré P^kM est un fibré principal de groupe de structure G^k_m, le groupe des jets d'ordre k en l'origine 0 de $\mathbb{R}^m$ des difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^m$ dans lui-même appliquant 0 sur 0. L'action d'un élément $j^k_0(g)$ de G^k_m sur un repère $j^k_0(f)$ de P^kM est donnée de la manière suivante :

$$j^k_0(f).j^k_0(g) = j^k_0(f \circ g).$$

En coordonnées, si $j^1_0(f)$ (resp. $j^2_0(f)$) est représenté par (f^i, f^i_j) (resp. (f^i, f^i_j, f^i_{jk})) et si $j^1_0(g)$ (resp. $j^2_0(g)$) est représenté par (g^i_j) (resp. (g^i_j, g^i_{jk})), alors

$$(f^i, f^i_j).(g^i_j) = (f^i, f^i_k g^k_j)$$

$$\text{(resp. } (f^i, f^i_j, f^i_{jk}).(g^i_j, g^i_{jk}) = (f^i, f^i_k g^k_j, f^i_r g^r_{jk} + f^i_{rs} g^r_j g^s_k)).$$

Si M et N sont deux variétés et si $\phi \in C^\infty(M, N)$, l'application $P^k\phi$ est définie de la manière suivante :

$$P^k\phi : P^kM \to P^kN : j^k_0 f \mapsto j^k_0(\phi \circ f).$$

Les fibrés principaux admettent des champs de vecteurs particuliers. Il s'agit des *champs de vecteurs fondamentaux,* qui sont associés aux éléments de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G.

Si $h \in \mathfrak{g}$, le *champ fondamental associé à* h est le champ de vecteurs sur P noté h^* et défini en tout point par

$$h^*_u = \frac{d}{dt} R_{exp(th)} u|_{t=0}.$$

Rappelons aussi la notion de réduction d'un fibré principal. Soient P un fibré principal de groupe de structure G et P' un fibré principal de groupe de structure G'. Une immersion χ de P dans P' vérifiant

$$\chi(u.g) = \chi(u).\Phi(g) \quad \forall u \in P, \forall g \in G,$$

où Φ est une immersion et un homomorphisme de groupes entre G et G' est une *réduction du groupe de structure* G' du fibré principal P' à G si χ recouvre l'application identité sur la base M.

Si P est un G-fibré principal et V une variété munie d'une action à gauche ρ de G, alors le *fibré associé à* P *de fibre type* V*,* noté

$$P \times_G V,$$

est le quotient de $P \times V$ par la relation d'équivalence $\sim$ définie par

$$(u, v) \sim (u', v') \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ tel que } (u', v') = (R_g(u), \rho(g^{-1})(v)).$$

La classe d'un couple (u, v) pour cette relation d'équivalence est notée $[u, v]$. Le fibré $P \times_G V$ est un fibré sur M à fibre type V, la projection d'une classe $[u, v]$ étant donnée par $\pi(u)$.

Il existe de nombreux exemples de tels fibrés. Parmi ceux-ci, on peut citer le fibré des densités, $F_\lambda(M)$, et le fibré $S^k_\delta(M)$ qui auront un rôle important dans la suite. Le premier se décrit de la manière suivante :

$$F_\lambda(M) = P^1M \times_{GL(m,\mathbb{R})} \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m),$$

où la représentation ρ de $GL(m, \mathbb{R})$ sur $\Delta^\lambda(\mathbb{R}^m)$ est donnée par

$$\rho(g)A = |\det g|^{-\lambda} A, \quad \forall g \in GL(m, \mathbb{R}),\ \forall A \in \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m).$$

Le deuxième s'identifie quant à lui à

$$P^1M \times_{GL(m,\mathbb{R})} S^k_\delta(\mathbb{R}^m),$$

où $S^k_\delta(\mathbb{R}^m)$ est l'espace $S^k\mathbb{R}^m \otimes \Delta^\delta(\mathbb{R}^m)$ et où la représentation ρ de $GL(m, \mathbb{R})$ sur $S^k_\delta(\mathbb{R}^m)$ est donnée par

$$\rho(g)\ A \otimes X_1 \vee \ldots \vee X_k = |\det g|^{-\delta}\ A \otimes gX_1 \vee \ldots \vee gX_k,$$

si $g \in GL(m, \mathbb{R})$, $A \in \Delta^\delta(\mathbb{R}^m)$ et $X_1, \ldots X_k \in \mathbb{R}^m$. On notera $\mathcal{F}_\lambda(M)$ l'espace des sections de $F_\lambda(M)$ et $\mathcal{S}^k_\delta(M)$ l'espace des sections de $S^k_\delta(M)$.

Dans la suite, nous désignerons par E_1 (resp. E_2) le foncteur associant à une variété M de dimension m le fibré associé

$$E_1(M) = P^1M \times_{GL(m,\mathbb{R})} V_1,$$

(resp. $E_2(M) = P^1M \times_{GL(m,\mathbb{R})} V_2$), où V_1 et V_2 sont des représentations de dimensions finies de $GL(m, \mathbb{R})$.

Si P est un G-fibré principal sur M et $P \times_G V$ un fibré associé à P de fibre type V, il y a bijection canonique entre les sections de $P \times_G V$ et les éléments f de $C^\infty(P, V)$ qui sont G-équivariants, i.e. qui satisfont

$$f(R_g(u)) = \rho(g^{-1})f(u), \quad \forall g \in G,\ \forall u \in P.$$

Si T est une section de $P \times_G V$, alors la fonction lui correspondant par cette bijection est l'unique fonction $f_T \in C^\infty(P, V)$ vérifiant

$$T(\pi(u)) = [u, f_T(u)].$$

Ainsi, par la suite nous ne distinguerons plus les sections des fibrés associés considérés des fonctions équivariantes correspondantes.

Fixons une fois pour toutes la notation suivante : si (P, R) est une variété munie d'une action à droite R d'un groupe de Lie G et si (V, ρ) est une variété munie d'une action à gauche ρ de G, alors l'ensemble des fonctions G-équivariantes de classe C^∞ entre (P, R) et (V, ρ) sera noté

$$C^\infty(P, V)_G.$$

Le fait de ne considérer que des fibrés associés à P^1M va nous permettre de pouvoir définir une dérivée de Lie sur les sections de ces fibrés dans la direction des champs de vecteurs sur M. Si X appartient à l'ensemble $\mathrm{Vect}(M)$ des champs de vecteurs C^∞ sur M, alors il admet un relèvement complet X^C dans $\mathrm{Vect}(P^1M)$. Si (V, ρ) est une représentation de $GL(m, \mathbb{R})$, la fonction équivariante correspondant à la dérivée de Lie par rapport à X d'une section T de $P^1M \times_{GL(m,\mathbb{R})} V$ est par définition la dérivée de la fonction équivariante lui correspondant dans la direction de X^C. Si on se donne des coordonnées, on peut considérer en un point x de M le repère canonique (x^i, δ^i_j) correspondant à ce système de coordonnées. Si on appelle f la fonction associant à un point x de M les composantes de T_x dans ce repère, la fonction associant à x les composantes de $(L_XT)_x$ dans le repère (x^i, δ^i_j) est alors donnée par

$$X.f - \rho_*(DX)f,$$

où DX est la matrice de $gl(m, \mathbb{R})$ des dérivées partielles de l'expression locale de X.

Notons que si ϕ est un difféomorphisme entre deux variétés M et N, on définit l'action de ϕ sur un élément $[u, v]$ du fibré associé $E_1(M)$ comme suit :

$$\phi.[u, v] := [P^1\phi(u), v].$$

Rappelons aussi la notion de forme de *connexion* sur un fibré principal, ou *connexion d'Ehresmann.* Une 1-*forme de connexion* sur un G-fibré principal P est une 1-forme Υ sur P à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G satisfaisant

- $\Upsilon(h^*) = h$ pour tout $h \in \mathfrak{g}$;
- $R_a^*\Upsilon = Ad(a^{-1}) \circ \Upsilon$ pour tout $a \in G$.

2. Opérateurs différentiels et symboles

Si M est une variété et si $E_1(M)$, $E_2(M)$ sont les fibrés vectoriels naturels sur M de fibres types respectives V_1 et V_2 dont il est question au paragraphe précédent, un *opérateur différentiel* $\mathcal{D}$ entre l'espace $\Gamma^\infty(E_1(M))$ des sections de classe C^∞ de $E_1(M)$ et l'espace $\Gamma^\infty(E_2(M))$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire dont l'expression locale dans un ouvert de carte et de trivialisations simultanées de $E_1(M)$ et $E_2(M)$ est de la forme

$$(\mathcal{D}f)(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} C_\alpha(x)((\partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_m^{\alpha_m} f)(x)), \tag{1}$$

où $k \in \mathbb{N}$, $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$ et C_α est une application de classe C^∞ assignant à chaque point de l'ouvert de carte une application linéaire de V_1 dans V_2 pour tout multi-indice α. Le naturel k apparaissant dans l'expression (1) est l'*ordre de différentiation* ou tout simplement l'ordre de $\mathcal{D}$. L'ensemble de ces opérateurs différentiels est noté

$$\mathcal{D}(E_1(M), E_2(M)),$$

ou plus simplement $\mathcal{D}(M)$.

L'ordre de l'expression locale d'un opérateur différentiel étant indépendant de la carte choisie, cet espace est filtré par l'ordre de différentiation :

$$\mathcal{D}(M) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{D}^k(M).$$

L'ensemble $\mathcal{S}(E_1(M), E_2(M))$ (ou $\mathcal{S}(M)$) des *symboles principaux,* ou simplement des *symboles,* associé à cet espace d'opérateurs différentiels est l'espace gradué associé à cette filtration. On a ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{S}^k(M) = \mathcal{D}^k(M)/\mathcal{D}^{k-1}(M),$$

$\mathcal{S}^0(M)$ est isomorphe à $\mathcal{D}^0(M)$ et

$$\mathcal{S}(M) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{S}^k(M).$$

Chaque $\mathcal{S}^k(M)$ est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à l'ensemble

$$\Gamma^\infty(E_1^*(M) \otimes E_2(M) \otimes S^kTM)$$

des champs de tenseurs symétriques contravariants de degré k à valeurs dans les applications linéaires entre les fibres types V_1 et V_2 de $E_1(M)$ et $E_2(M)$.

Si $\mathcal{D}$ est un opérateur différentiel d'ordre k, sa partie de plus haut ordre a une signification intrinsèque. Plus précisément, les termes de plus haut degré de l'expression locale de $\mathcal{D}$ sont l'expression locale d'un symbole de degré k, et l'application associant à $\mathcal{D}$ ce symbole est appelée *symbole principal* et est notée σ. Elle est donnée en coordonnées locales par

$$\sigma(\sum_{|\alpha|\leq k} C_\alpha \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_m^{\alpha_m}) = \sum_{|\alpha|=k} C_\alpha \otimes \partial_1^{\alpha_1} \vee \dots \vee \partial_m^{\alpha_m},$$

où $\partial_1, \dots, \partial_m$ est la base locale du fibré tangent. Les actions de $\mathrm{Vect}(M)$ et $\mathrm{Diff}(M)$ sur $\mathcal{D}(M)$ sont induites par les actions correspondantes sur les sections de $E_1(M)$ et $E_2(M)$: on a tout d'abord

$$(\phi.D)(\varphi) = \phi.D(\phi^{-1}.(\varphi)),\ \forall \varphi \in \Gamma^\infty(E_1(M)), D \in \mathcal{D}(M), \phi \in \mathrm{Diff}(M).$$

En différentiant cette action, on obtient l'expression de la dérivée de Lie d'un opérateur différentiel :

$$(\mathcal{L}_X D)(\varphi) = L_X D(\varphi) - D(L_X \varphi)$$

pour tous $\varphi \in \Gamma^\infty(E_1(M)), D \in \mathcal{D}(M), X \in \mathrm{Vect}(M)$.

De la même manière, les actions de $\mathrm{Diff}(M)$ sur les sections de $E_1(M)$ et $E_2(M)$ et sur les sections de TM induisent une action de $\mathrm{Diff}(M)$ sur les symboles. Au niveau infinitésimal, la différentiation de cette action permet de calculer la dérivée de Lie d'un symbole dans la direction d'un champ de vecteurs X quelconque.

Les espaces $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{D}(M)$ sont isomorphes en tant qu'espaces vectoriels. Toutefois ils ne le sont pas en tant que représentations du groupe des difféomorphismes locaux.

En conséquence, il n'existe pas de quantification canonique naturelle au sens où elle commute avec les difféomorphismes locaux, où on entend par quantification une application linéaire

$$\mathcal{Q} : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M)$$

préservant le symbole principal, i.e. satisfaisant sur chaque $\mathcal{S}^k(M)$ la condition

$$\sigma \circ Q = Id.$$

Soulignons cependant qu'il est possible de construire canoniquement une quantification à l'aide de chaque dérivée covariante ∇ sur M, cette construction étant décrite dans la section 3.

Dans cet ouvrage, on désignera par $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}(M)$ l'espace des opérateurs différentiels agissant entre λ et μ-densités, sections de fibrés naturels d'ordre 1 introduits dans la section 1. On notera $\mathcal{S}_\delta(M)$ l'espace des symboles qui lui est associé, où $\delta = \mu - \lambda$.

3. Dérivées covariantes

On désigne par *dérivation covariante* sur une variété M une application bilinéaire

$$\nabla : \mathrm{Vect}(M) \times \mathrm{Vect}(M) \to \mathrm{Vect}(M)$$

satisfaisant pour tout $f \in C^\infty(M)$

- $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$,
- $\nabla_X fY = f \nabla_X Y + (X.f) Y$.

Il découle de cette définition qu'en coordonnées locales une dérivée covariante est de la forme

$$\nabla_X Y = X^i \partial_i Y + \Gamma_{ij}^k X^i Y^j \partial_k.$$

Les fonctions Γ_{ij}^k apparaissant dans cette formule sont appelées *symboles de Christoffel* de ∇ et ne sont définies qu'en coordonnées locales.

La *torsion* d'une dérivée covariante ∇ est le tenseur T défini par

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], \quad \forall X, Y \in \mathrm{Vect}(M).$$

Dans ce travail, nous ne considérerons que des dérivées covariantes sans torsion sur M et nous noterons $\mathcal{C}_M$ l'ensemble de ces connexions.

Il est possible de définir sur l'ensemble des dérivées covariantes une relation d'équivalence, appelée *équivalence projective,* de la manière suivante. Si ∇ et ∇' sont deux connexions linéaires sans torsion sur M, alors elles sont dites *projectivement équivalentes* s'il existe une 1-forme α sur M telle que

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X) Y + \alpha(Y) X, \quad \forall X, Y \in \mathrm{Vect}(M).$$

H. Weyl démontra dans **[26]** que deux dérivées covariantes sont projectivement équivalentes si et seulement si elles définissent sur M les mêmes géodésiques à reparamétrage près.

Une classe d'équivalence pour cette relation est appelée *structure projective,* ou *classe projective* sur M.

Etant donné deux fibrés vectoriels $E_1(M)$ et $E_2(M)$ sur M, nous avons dit dans la deuxième section que l'ensemble $\mathcal{D}(M)$ est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à son espace de symboles associé $\mathcal{S}(M)$. Il n'existe pas de bijection canonique naturelle entre ces deux ensembles, mais il est possible d'assigner à chaque $\nabla \in \mathcal{C}_M$ une bijection linéaire

$$L_\nabla : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{D}(M).$$

Cette bijection est construite de la manière suivante. Notons tout d'abord que comme $E_1(M) \otimes S^l T^* M$ est un fibré associé à $P^1 M$, on peut étendre la dérivation covariante ∇ aux sections de ce fibré. Etant donné une section $\gamma \in \Gamma^\infty(E_1(M) \otimes S^l T^* M)$, on construit alors $\nabla_s \gamma \in \Gamma^\infty(E_1(M) \otimes S^{l+1} T^* M)$ en posant

$$(\nabla_s \gamma)(X_1, \ldots, X_{l+1}) = \frac{1}{(l+1)!} \sum_\nu (\nabla_{X_{\nu(1)}} \gamma)(X_{\nu(2)}, \ldots, X_{\nu(l+1)}).$$

A partir de là, on construit une quantification en posant pour tout $S \in \mathcal{S}^k(M)$

$$(L_\nabla S)(f) = \langle S, \nabla_s^k f \rangle, \quad \forall f \in \Gamma^\infty(E_1(M)), \tag{2}$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne la contraction de deux champs de tenseurs.

La fonction

$$L : \mathcal{C}_M \times \mathcal{S}(M) \mapsto \mathcal{D}(M)$$

définie par (2) est appelée *quantification standard, prescription d'ordre standard,* ou encore *quantification de Lichnérowicz.* Cette application est naturelle et L_∇ est une quantification pour tout $\nabla \in \mathcal{C}_M$.

Pour terminer cette section, rappelons la définition de quelques tenseurs de courbure classiques. On désigne par *tenseur de courbure* d'une dérivation covariante $\nabla \in \mathcal{C}_M$ le champ de tenseurs R sur M défini par

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

pour tout $X, Y, Z \in \mathrm{Vect}(M)$. La *trace* trR de cette courbure et le *tenseur de Ricci* Ric sont les champs de tenseurs sur M définis respectivement par

$$\mathrm{trR}(X,Y) = \mathrm{tr}(. \mapsto R(X,Y).),$$

et par

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{tr}(. \mapsto R(Y,.)X).$$

4. Position du problème

Une *quantification naturelle projectivement équivariante* pour deux fibrés $E_1(M)$ et $E_2(M)$ est un opérateur associant à chaque variété M une application

$$Q_M : \mathcal{C}_M \times \mathcal{S}(E_1(M), E_2(M)) \to \mathcal{D}(E_1(M), E_2(M)),$$

telle que

- Q^M est *naturel,* i.e. que pour tout difféomorphisme local $\phi : M \to N$, il vient
$$Q^M_{(\phi^*\nabla)}(\phi^*S) = \phi^*(Q^N_\nabla(S)),$$
pour tous $\nabla \in \mathcal{C}_N$ et $S \in \mathcal{S}(E_1(N), E_2(N))$.
- Q est *projectivement équivariant* (ou *projectivement invariant),* i.e. que $Q^M_\nabla = Q^M_{\nabla'}$ si ∇ et ∇' sont projectivement équivalents.
- $Q^M_\nabla : \mathcal{S}(E_1(M), E_2(M)) \to \mathcal{D}(E_1(M), E_2(M))$ est une quantification pour tout $\nabla \in \mathcal{C}_M$.

Toujours pour alléger les écritures, nous n'expliciterons pas par la suite la dépendance de Q_M à la variété M.

Ce travail a pour but de répondre à une question posée il y a quelques années par P. Lecomte.

Etant donné deux fibrés vectoriels naturels E_1 et E_2, existe-t-il une quantification naturelle projectivement invariante pour ces fibrés ?

A l'origine de cette question, on trouve les résultats d'existence de *quantifications sl_{m+1}-invariantes* obtenus sur $\mathbb{R}^m$. Nous allons brièvement rappeler en quoi consistent ces résultats et de quelle manière l'existence d'une quantification naturelle et projectivement invariante en consistue une généralisation.

Le plongement projectif sl_{m+1} de $sl(m+1, \mathbb{R})$ est une sous-algèbre des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$. Elle est engendrée par les champs de vecteurs

$$\partial_i, \quad x^i\partial_i, \quad \text{et} \quad x^jx^i\partial_i.$$

Elle est isomorphe à $sl(m+1, \mathbb{R})$ et est maximale dans l'algèbre $\mathrm{Vect}_*(\mathbb{R}^m)$ des champs de vecteurs polynomiaux sur $\mathbb{R}^m$.

On désigne par *quantification sl_{m+1}-invariante* pour les fibrés vectoriels E_1 et E_2 une quantification

$$Q : \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$$

satisfaisant

$$L_X Q = 0, \quad \forall X \in sl_{m+1}.$$

Montrons à présent que l'existence d'une quantification naturelle projectivement invariante implique l'existence d'une quantification sl_{m+1}-invariante. Si Q désigne une quantification naturelle projectivement invariante et si ϕ représente le flot d'un champ de vecteurs X appartenant à sl_{m+1}, il vient en effet :

$$\phi_t^* Q(\nabla^0)(S) = Q(\phi_t^* \nabla^0)(\phi_t^* S)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout symbole S, si ∇^0 désigne la dérivation covariante plate canonique de $\mathbb{R}^m$. Par définition de la dérivée d'un champ de tenseurs, si l'on parvient à démontrer que ϕ_t^* préserve la classe projective de ∇^0 pour tout t, on aura également prouvé que $Q(\nabla^0)$ est une quantification sl_{m+1}-équivariante, par l'invariance projective de Q.

Le fait que la classe projective de ∇^0 soit préservée par l'action du difféomorphisme ϕ_t est dû à la propopriété suivante :

$$L_X \nabla^0 = \alpha \vee id$$

si X s'écrit $A^i\partial_i + A^i_j x^j \partial_i + \alpha(x) x^i \partial_i$, où les A^i et les A^i_j sont dans $\mathbb{R}$ et où $\alpha \in \mathbb{R}^{m*}$. En effet, si $Y, Z \in \mathrm{Vect}(\mathbb{R}^m)$, il vient

$$\begin{aligned} (L_X \nabla^0)(Y, Z) &= [X, \nabla^0_Y Z] - \nabla^0_{[X,Y]} Z - \nabla^0_Y [X, Z] \\ &= Y^i Z^r \partial_{ir} X^j \partial_j \\ &= \alpha(Y) Z + \alpha(Z) Y \end{aligned}$$

après développements. Dès lors,

$$\frac{d}{ds}(\phi_s^* \nabla^0)_x = (\phi_s^*(\alpha \vee id))_x$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$. Dans ces conditions, $\phi_s^* \nabla^0$ est projectivement équivalent à ∇^0 via la 1-forme β définie de la manière suivante :

$$\beta_x(Y_x) := \int_0^s (\phi_u^* \alpha)_x (Y_x)\, du,$$

où $Y \in \mathrm{Vect}(\mathbb{R}^m)$, $x \in \mathbb{R}^m$.

CHAPITRE 2

Fibrés et connexions de Cartan

Nous rappelons ici les principaux faits concernant les connexions de Cartan. Premièrement, nous en donnons une définition générale et ensuite nous donnons plus de détails sur les connexions de Cartan projectives et leurs liens avec les structures projectives. Pour une information plus détaillée, nous renvoyons le lecteur à **[14]**.

1. Connexions de Cartan

Soient G un groupe de Lie et H un sous-groupe fermé de G. Désignons par $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ les algèbres de Lie correspondantes. Soit $P \to M$ un H-fibré principal sur M, tel que $\dim M = \dim G/H$. Une connexion de Cartan sur P est une 1-forme ω sur P à valeurs dans $\mathfrak{g}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

- $R_a^*\omega = Ad(a^{-1})\omega$ pour tout $a \in H$,
- $\omega(h^*) = h$ pour tout $h \in H$,
- $\forall u \in P, \omega_u : T_uP \to \mathfrak{g}$ est une bijection linéaire.

La connexion de Cartan ω permet donc de transformer les éléments de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ en des champs de vecteurs sur P. Notons que si $h \in \mathfrak{h}$, $\omega^{-1}(h)$ est évidemment égal à h^* grâce à la deuxième propriété des connexions de Cartan. D'autre part, l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ se décompose comme suit :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{h},$$

$\mathfrak{g}_{-1}$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ isomorphe à $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Cela étant dit, nous pouvons introduire la remarque suivante qui sera très utile dans la suite :

LEMME 1. *Si $h \in \mathfrak{h}$ et si $X \in \mathfrak{g}_{-1}$, alors*

$$[h^*, \omega^{-1}(X)] = \omega^{-1}([h, X]).$$

DÉMONSTRATION. De fait, il vient, si l'on note φ_t le flot de h^* :

$$\begin{aligned}[h^*, \omega^{-1}(X)](u) &= \frac{d}{dt} R_{exp(-th)*u\exp(th)}\omega^{-1}(X)_{u\exp(th)}|_{t=0} \\ &= \omega^{-1}([h, X])(u)\end{aligned}$$

par Ad-invariance de ω. □

2. Le groupe projectif et son algèbre de Lie

Considérons l'action du groupe $G = PGL(m+1, \mathbb{R})$ sur l'espace projectif $\mathbb{R}P^m$. Le stabilisateur H de l'élément $[e_{m+1}]$ dans $\mathbb{R}P^m$ est

$$\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ \xi & a \end{pmatrix} : A \in GL(m, \mathbb{R}), \xi \in \mathbb{R}^{m*}, a \neq 0\}/\mathbb{R}_0 \mathrm{Id} \tag{3}$$

et il s'ensuit que H est le produit semi-direct $G_0 \rtimes G_1$, où G_0 est isomorphe à $GL(m, \mathbb{R})$ et où G_1 est isomorphe à $\mathbb{R}^{m*}$. On a la projection suivante

$$\pi : H \to GL(m, \mathbb{R}) : \left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ \xi & a \end{pmatrix}\right] \mapsto \frac{A}{a}$$

L'algèbre de Lie de $PGL(m+1, \mathbb{R})$ est $gl(m+1, \mathbb{R})/\mathbb{R}Id$. Elle est donc isomorphe à $sl(m+1, \mathbb{R})$ et elle se décompose comme une somme directe de sous-algèbres

$$\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \cong \mathbb{R}^m \oplus gl(m, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{m*}.$$

L'isomorphisme est donné par

$$\left[\begin{pmatrix} A & v \\ \xi & a \end{pmatrix}\right] \mapsto (v, A - a\,Id, \xi).$$

Cette correspondance induit une structure d'algèbre de Lie sur $\mathbb{R}^m \oplus gl(m, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{m*}$. Les algèbres de Lie correspondant à G_0, G_1 et H sont respectivement $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_1$, et $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$. La structure d'algèbre de Lie sur $\mathbb{R}^m \oplus gl(m, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{m*}$ est donnée par les crochets suivants :

$$[v, v'] = 0, \quad [\xi, \xi'] = 0, \quad [U, v] = Uv,$$

$$[U, \xi] = -\xi U, \quad [U, U'] = UU' - U'U, \quad [v, \xi] = v \otimes \xi + \langle \xi, v \rangle Id,$$

où v et v' sont des éléments de $\mathbb{R}^m$, U et U' sont des éléments de $gl(m, \mathbb{R})$ et où ξ et ξ' appartiennent à $\mathbb{R}^{m*}$.

3. Structures projectives

Un élément du groupe H peut être vu comme une transformation de l'espace projectif $\mathbb{R}P^m$ qui laisse son origine $[e_{m+1}]$ fixée. Si on lit cette transformation dans la carte canonique de $\mathbb{R}P^m$ au voisinage de $[e_{m+1}]$, on obtient une correspondance entre les éléments de H et des éléments de G_m^2. Si l'on note que les transformations de $\mathbb{R}P^m$ induites par les éléments de H sont univoquement déterminées par leurs dérivées jusqu'à l'ordre 2 en 0, H est donc plongé dans G_m^2 via l'application suivante :

$$\iota : H \to G_m^2 : \left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ \xi & a \end{pmatrix} \right] \mapsto \left(\frac{A_j^i}{a}, -\frac{A_j^i \xi_k + A_k^i \xi_j}{a^2}\right). \tag{4}$$

Une *structure projective P sur M* est alors une réduction du fibré des repères d'ordre 2 P^2M au groupe H. De telles structures existent, comme le prouve le résultat suivant ([**14**, Prop 7.2 p.147]) qui est le point de départ de notre méthode :

PROPOSITION 2 (Kobayashi-Nagano). *Il existe une correspondance bijective et naturelle entre les classes projectives de connexions linéaires sans torsion sur M et les structures projectives sur M.*

DÉMONSTRATION. En fait, la correspondance est construite de la manière suivante : à la classe d'une connexion sans torsion ∇, on associe la structure projective P dont la fibre au dessus du point de coordonnées locales x^i est donnée par l'ensemble des repères d'ordre 2 suivant :

$$(x^i, \delta_j^i, -\Gamma_{jk}^i).H,$$

où les Γ_{jk}^i sont les symboles de Christoffel de ∇. On peut vérifier que cette correspondance est bien définie et bijective grâce à la loi de transformation des Γ_{jk}^i sous l'effet d'un changement de coordonnées et grâce à la loi reliant les symboles de Christoffel de 2 connexions projectivement équivalentes. $\square$

4. Connexions projectives

En général, si ω est une connexion de Cartan définie sur un H-fibré principal P, alors sa courbure Ω est définie comme d'habitude par

$$\Omega = \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega], \tag{5}$$

où d est la différentielle et où le crochet $[\omega, \omega]$ est défini par

$$[\omega, \omega](X, Y) = 2[\omega(X), \omega(Y)], \quad \forall X, Y \in TP.$$

Si $\omega = \omega^i e_i + \omega^i_j e^j_i + \omega_i \epsilon^i$, où e_i est une base de $\mathfrak{g}_{-1}$, e^i_j une base de $\mathfrak{g}_0$ et ϵ^i une base de $\mathfrak{g}_1$, le fait que Ω s'annule sur les champs de vecteurs verticaux implique que ce tenseur peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Omega = \sum K_{kl}\, \omega^k \wedge \omega^l,$$

où les fonctions K_{kl} sont à valeurs dans $\mathfrak{g}$. Dans la suite, nous décomposerons aussi Ω en ses projections selon $\mathfrak{g}_{-1}$, $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}_1$:

$$\Omega = \Omega^i e_i + \Omega^i_j e^j_i + \Omega_i \epsilon^i.$$

Nous pouvons en outre définir à partir de Ω une fonction $\kappa \in C^\infty(P, \mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g})$ de la manière suivante :

$$\kappa(u)(X,Y) := \Omega(u)(\omega^{-1}(X), \omega^{-1}(Y)).$$

Cette fonction sera également décomposée en ses composantes selon $\mathfrak{g}_{-1}$, $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}_1$:

$$\kappa = \kappa^i e_i + \kappa^i_j e^j_i + \kappa_i \epsilon^i.$$

D'autre part, si ω est une connexion de Cartan sur un fibré principal P, ses projections selon $\mathfrak{g}_{-1}$ et $\mathfrak{g}_0$ doivent satisfaire les conditions suivantes :

- $\omega_{-1}(h^*) = 0, \quad \omega_0(h^*) = h_0 \quad \forall h \in \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$, où h_0 est la projection selon $\mathfrak{g}_0$ de h ;
- $(R_a)^*(\omega_{-1} + \omega_0) = (\mathrm{ad}\, a^{-1})(\omega_{-1} + \omega_0) \quad \forall a \in H$, où ad a^{-1} est l'application de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$ dans lui-même induite par l'action adjointe ad a^{-1} de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$;
- Si $\omega_{-1}(X) = 0$, alors X est vertical.

Soient les groupes G et H dont il est question dans la section 2 de ce chapitre. Le théorème suivant énoncé dans **[14]** page 135 est fondamental :

THÉORÈME 3. *Soit P un H-fibré principal sur une variété M. Si on se donne une 1-forme ω_{-1} à valeurs dans $\mathfrak{g}_{-1}$ de composantes ω^i et une forme ω_0 à valeurs dans $\mathfrak{g}_0$ de composantes ω^i_j qui satisfont les 3 conditions mentionnées précédemment et la condition supplémentaire suivante :*

$$\mathrm{d}\omega^{\mathrm{i}} = -\sum \omega^{\mathrm{i}}_{\mathrm{k}} \wedge \omega^{\mathrm{k}},$$

alors il existe une unique connexion de Cartan $\omega = \omega_{-1} + \omega_0 + \omega_1$ dont la courbure Ω de composantes $(0; \Omega^i_j; \Omega_j)$ satisfait la propriété suivante :

$$\sum K^i_{jil} = 0,$$

où

$$\Omega^i_j = \sum \frac{1}{2} K^i_{jkl}\, \omega^k \wedge \omega^l.$$

DÉFINITION 1. Si $u = j_0^2 f$ est un point de P^2M et si X est un vecteur tangent à P^2M au point u, la *forme canonique* θ de P^2M est la 1-forme à valeurs dans $\mathbb{R}^m \oplus gl(m, \mathbb{R})$ définie au point u de la manière suivante :

$$\theta_u(X) = (P^1 f)^{-1}_{*e}(\pi_* X),$$

où π est la projection canonique de P^2M sur P^1M et où e est le repère en l'origine de $\mathbb{R}^m$ représenté par la matrice Id.

Grâce à ce qui est dit dans **[14]**, on peut voir que la 1-forme sur une structure projective P à valeurs dans $\mathbb{R}^m \oplus gl(m, \mathbb{R})$ définie par $i^*\theta$, où i est le plongement canonique de P dans P^2M, satisfait les conditions du théorème 3. D'après ce résultat, il existe une unique connexion de Cartan sur P dont les projections sur $\mathfrak{g}_{-1}$ et $\mathfrak{g}_0$ coïncident avec celles de $i^*\theta$ et qui satisfait la condition supplémentaire relative aux composantes de sa courbure. Nous venons donc de montrer la proposition suivante :

PROPOSITION 4. *On peut associer à chaque structure projective P une connexion de Cartan à valeurs dans l'algèbre de Lie $sl(m+1, \mathbb{R})$, cette association étant naturelle.*

La naturalité de l'association provient en effet de la naturalité de $i^*\theta$ et des propriétés mentionnées dans le théorème 3 ainsi que de l'unicité de la connexion qui satisfait la condition supplémentaire relative à la courbure. Dans la suite, on désignera simplement par θ la restriction $i^*\theta$ de la forme canonique de P^2M à P. On notera θ_{-1} et θ_0 ses projections selon $\mathbb{R}^m$ et $gl(m, \mathbb{R})$.

La connexion associée à une structure projective P est appelée la connexion projective normale de la structure projective. C'est cette connexion de Cartan que nous utiliserons constamment dans la suite.

5. Différentiation invariante

Un outil fondamental relié aux connexions de Cartan sur lequel nous baserons toutes nos constructions est le concept de différentiation invariante développé dans **[6, 7]**. Soit P une structure projective et soit ω la connexion projective normale associée.

DÉFINITION 2. Soit (V, ρ) une représentation de H. Si $f \in C^\infty(P, V)$, alors la différentiation invariante de f par rapport à ω est la fonction $\nabla^\omega f \in C^\infty(P, \mathbb{R}^{m*} \otimes V)$ définie par

$$\nabla^\omega f(u)(X) = L_{\omega^{-1}(X)} f(u) \quad \forall u \in P, \quad \forall X \in \mathbb{R}^m.$$

Nous utiliserons aussi une version itérée de la différentiation invariante :

DÉFINITION 3. Si $f \in C^\infty(P,V)$ alors $\nabla^{\omega^k} f \in C^\infty(P, \otimes^k \mathbb{R}^{m*} \otimes V)$ est défini par

$$\nabla^{\omega^k} f(u)(X_1, \ldots, X_k) = L_{\omega^{-1}(X_k)} \circ \ldots \circ L_{\omega^{-1}(X_1)} f(u)$$

pour $X_1, \ldots, X_k \in \mathbb{R}^m$.

Si nous symétrisons cette version itérée, nous aboutissons à la

DÉFINITION 4. Si $f \in C^\infty(P,V)$ alors $\nabla_s^{\omega^k} f \in C^\infty(P, S^k \mathbb{R}^{m*} \otimes V)$ est défini par

$$\nabla_s^{\omega^k} f(u)(X_1, \ldots, X_k) = \frac{1}{k!} \sum_\nu \nabla^{\omega^k} f(u)(X_{\nu_1}, \ldots, X_{\nu_k})$$

pour $X_1, \ldots, X_k \in \mathbb{R}^m$.

6. Relèvement des fonctions équivariantes

Les fonctions équivariantes sur $P^1 M$ permettent de construire des fonctions équivariantes sur P. De plus, les sections d'un fibré naturel du premier ordre sont en correspondance biunivoque avec ces fonctions définies sur la structure projective. Les résultats suivants sont signalés dans [**6**, p. 47].

Si (V, ρ) est une représentation de $GL(m, \mathbb{R})$, alors on peut définir une représentation (V, ρ') de H de la manière suivante :

$$\rho' : H \to GL(V) : \left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ \xi & a \end{pmatrix} \right] \mapsto \rho \circ \pi(\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ \xi & a \end{pmatrix} \right]) = \rho(\frac{A}{a})$$

pour tous $A \in GL(m, \mathbb{R}), \xi \in \mathbb{R}^{m*}, a \neq 0$.

Maintenant, en utilisant la représentation ρ', nous pouvons donner la relation entre les fonctions équivariantes sur $P^1 M$ et les fonctions équivariantes sur P : si P est une structure projective sur M, la projection naturelle $P^2 M \to P^1 M$ induit une projection $p : P \to P^1 M$ et nous avons :

PROPOSITION 5. *Si (V, ρ) est une représentation de $GL(m, \mathbb{R})$, alors l'application*

$$p^* : C^\infty(P^1 M, V) \to C^\infty(P, V) : f \mapsto f \circ p$$

définit une bijection entre $C^\infty(P^1 M, V)_{\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})}$ et $C^\infty(P, V)_H$.

DÉMONSTRATION. Le résultat est très facile à établir : l'application est tout d'abord bien définie en raison de la correspondance (4) entre les éléments de H et les jets d'ordre 2 qu'ils représentent. L'injectivité de l'application est évidente tandis que sa surjectivité découle du fait qu'une fonction H-équivariante sur P est constante le long d'une orbite de G_1. $\square$

A présent, comme $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^{m*}$ sont des représentations naturelles de $GL(m,\mathbb{R})$, elles deviennent des représentations de H et nous pouvons établir une propriété importante de la différentiation invariante :

PROPOSITION 6. *Si f appartient à $C^\infty(P,V)_{G_0}$, alors $\nabla^\omega f$ appartient à $C^\infty(P,\mathbb{R}^{m*}\otimes V)_{G_0}$.*

DÉMONSTRATION. Le résultat est une conséquence de l'Ad-invariance de la connexion de Cartan ω. En effet :

$$(\nabla^\omega f)(ug) = \rho'(g)^{-1}(\nabla^\omega f)(u)\ \forall u\in P, \forall g\in G_0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(\nabla^\omega f)(ug)(X) = [\rho'(g)^{-1}(\nabla^\omega f)(u)](X)\ \forall u\in P, \forall g\in G_0, \forall X\in \mathfrak{g}_{-1}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(L_{\omega^{-1}(X)}f)(ug) = \rho'(g^{-1})(L_{\omega^{-1}(\rho'(g)X)}f)(u)\ \forall u\in P, \forall g\in G_0, \forall X\in \mathfrak{g}_{-1}.$$

Si l'on appelle φ_t le flot de $\omega^{-1}(X)$ et φ'_t le flot de $\omega^{-1}(\rho'(g)X)$, il suffit donc de vérifier que

$$\frac{d}{dt}f(\varphi_t(ug))|_{t=0} = \rho'(g^{-1})\frac{d}{dt}f(\varphi'_t(u))|_{t=0}\ \forall u\in P, \forall g\in G_0,$$

ou encore que

$$\varphi_t(ug) = \varphi'_t(u)g\ \forall u\in P, \forall g\in G_0.$$

Cette propriété est bien vérifiée : de fait, les champs $\omega^{-1}(\rho'(g)X)$ et $\omega^{-1}(X)$ sont R_g-liés par Ad-invariance de ω. □

Une remarque fondamentale est que ce résultat n'est pas vrai en général pour les fonctions H-équivariantes : pour une fonction H-équivariante f, la fonction $\nabla^\omega f$ n'est en général pas G_1-équivariante.

Dans la suite, nous utiliserons la représentation ρ'_* de l'algèbre de Lie de H sur V. Si nous rappelons que cette algèbre est isomorphe à $gl(m,\mathbb{R})\oplus\mathbb{R}^{m*}$, nous avons alors

$$\rho'_*(A,\xi) = \rho_*(A), \quad \forall A\in gl(m,\mathbb{R}), \xi\in\mathbb{R}^{m*}. \tag{6}$$

Dans nos calculs, nous utiliserons la version infinitésimale de la relation exprimant l'équivariance : si $f\in C^\infty(P,V)_H$, alors on a

$$L_{h^*}f(u) + \rho'_*(h)f(u) = 0,\ \forall h\in gl(m,\mathbb{R})\oplus\mathbb{R}^{m*}, \forall u\in P. \tag{7}$$

Afin d'analyser l'équivariance des fonctions, nous disposons du résultat facile suivant :

PROPOSITION 7. *Si (V,ρ) est une représentation de G_0 et devient une représentation de H comme expliqué au début de cette section, alors une fonction $f \in C^\infty(P,V)$ est $H-$équivariante si et seulement si*

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ est } G_0-\text{équivariant,} \\ L_{h^*}f = 0 \text{ pour tout } h \text{ dans } \mathfrak{g}_1. \end{array}\right.$$

DÉMONSTRATION. Evidemment, la $H-$équivariance est équivalente à la conjonction de la G_0- et de la G_1-équivariance. La G_1-équivariance est équivalente à la $\mathfrak{g}_1-$équivariance puisque G_1 est un espace vectoriel. Le résultat s'ensuit puisque G_1 agit trivialement sur V. □

Le dernier résultat que nous allons établir dans ce chapitre s'appuie sur une proposition énoncée dans **[6]** page 47 :

PROPOSITION 8. *Soit ω la connexion de Cartan normale construite sur la structure projective P associée à une connexion sans torsion ∇. Si (V,ρ) est une représentation de $GL(m,\mathbb{R})$, nous avons la formule suivante pour tous $X \in \mathfrak{g}_{-1}$, $f \in C^\infty(P^1M,V)_{GL(m,\mathbb{R})}$ et $u \in P$:*

$$(\nabla^\omega \circ p^* - p^* \circ \nabla)f(u)(X) = \rho'_*([X,\tau(u)])(f(p(u))).$$

La fonction τ dont il est question dans ce résultat est une fonction sur P à valeurs dans $\mathfrak{g}_1$ définie dans **[6]** page 43.

La section locale de P qu'on considère dans la démonstration de la proposition 2 permet d'identifier localement P à $U \times H$ où U est un domaine de carte de M et induit donc un système de coordonnées locales sur P. Dans ces conditions, on peut énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 9. *Soit ω la connexion de Cartan normale construite sur la structure projective P associée à une connexion sans torsion ∇. Soient (V,ρ) une représentation de $GL(m,\mathbb{R})$ et*

$$E = P^1M \times_{GL(m,\mathbb{R})} V$$

le fibré associé à P^1M correspondant. Si $f \in C^\infty(P^1M,V)_{GL(m,\mathbb{R})}$ est la fonction équivariante représentant une section φ de E, alors

$$(\nabla_s^{\omega^k} \circ p^*)f = (p^* \circ \nabla_s^k)f + g,$$

où g est une fonction sur P dont l'expression locale ne contient des dérivées des composantes de φ que jusqu'à l'ordre $k-1$.

DÉMONSTRATION. Si $k=1$, le résultat est vrai grâce à la proposition 8. Cette même proposition permet aisément de démontrer le résultat pour k quelconque par induction. □

CHAPITRE 3

Le cas des densités

Dans ce chapitre, nous analysons la question de l'existence d'une quantification naturelle projectivement invariante dans le cas particulier de l'espace des opérateurs différentiels agissant entre λ et μ-densités, $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(M)$. Notre méthode conduit à des conclusions surprenantes : tout d'abord, une telle quantification existe si et seulement si la quantification $sl(m+1,\mathbb{R})$-équivariante correspondante existe dans $\mathbb{R}^m$. De plus, nous obtenons une formule explicite pour la quantification écrite en utilisant la connexion de Cartan normale associée à une structure projective. Cette formule est exactement la même que celle donnant la quantification équivariante dans $\mathbb{R}^m$ si l'on substitue aux différentiations invariantes les dérivées partielles.

Pour commencer, rappelons la définition suivante de [**17**, Prop 2, p. 289] :

DÉFINITION 5. Nous définissons les nombres

$$\gamma_{2k-l} = \frac{m+2k-l-(m+1)\delta}{m+1}.$$

Une valeur de δ est *critique* s'il existe $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq l \leq k$ et $\gamma_{2k-l} = 0$.

Un des résultats de [**17**] est alors :

THÉORÈME 10. *Si δ n'est pas critique, alors il existe une unique quantification $sl(m+1,\mathbb{R})$-équivariante.*

A présent, introduisons l'opérateur de divergence associé à une connexion de Cartan. Cet opérateur sera le principal outil de notre construction.

1. L'opérateur de divergence

Soit $(e_1,\ldots,e_m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$ et soit $(\epsilon^1,\ldots,\epsilon^m)$ sa base duale dans $\mathbb{R}^{m*}$.

L'*opérateur de divergence* par rapport à la connexion de Cartan ω est alors défini par

$$Div^\omega : C^\infty(P, S^k_\delta(\mathbb{R}^m)) \to C^\infty(P, S^{k-1}_\delta(\mathbb{R}^m)) : S \mapsto \sum_{j=1}^m i(\epsilon^j)\nabla^\omega_{e_j} S,$$

où i désigne le produit intérieur.

Cet opérateur peut être considéré comme une généralisation courbe de l'opérateur de divergence utilisé dans [**16**]. Les propositions suivantes montrent ses propriétés les plus importantes.

LEMME 11. *Si $S \in C^\infty(P, S^k_\delta(\mathbb{R}^m))_{G_0}$, alors $Div^\omega S$ appartient à $C^\infty(P, S^{k-1}_\delta(\mathbb{R}^m))_{G_0}$.*

DÉMONSTRATION. Le résultat peut être contrôlé directement à partir de la définition. On peut également remarquer que $Div^\omega S$ est la contraction de la fonction invariante $\nabla^\omega S$ (voir proposition 6) et de la fonction invariante et constante

$$ID : P \to \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^{m*}, u \mapsto \sum_{j=1}^m \epsilon^j \otimes e_j.$$

□

Le but des résultats suivants est de mesurer l'écart à la G_1- équivariance de la différentiation invariante et de l'opérateur de divergence. Au niveau infinitésimal, au vu des équations (6) et (7), cela conduit au calcul du commutateur de ces opérateurs avec la dérivée de Lie L_{h^*}, pour $h \in \mathfrak{g}_1$. Examinons tout d'abord ce que donne ce calcul pour l'opérateur de divergence :

LEMME 12. *Pour tout $S \in C^\infty(P, S^k_\delta(\mathbb{R}^m))_{G_0}$, nous avons*

$$L_{h^*} Div^\omega S - Div^\omega L_{h^*} S = (m+1)\gamma_{2k-1} i(h) S,$$

pour tout $h \in \mathbb{R}^{m*} \cong \mathfrak{g}_1$.

DÉMONSTRATION. Premièrement, remarquons que la dérivée de Lie par rapport à un champ de vecteurs commute avec une évaluation : si $\eta^1, \ldots, \eta^{k-1} \in \mathbb{R}^{m*}$, nous avons

$$\begin{array}{rcl}(L_{h^*} Div^\omega S)(\eta^1, \ldots, \eta^{k-1}) & = & L_{h^*}(Div^\omega S(\eta^1, \ldots, \eta^{k-1})) \\ & = & \sum_{j=1}^m (L_{h^*} L_{\omega^{-1}(e_j)} S(\epsilon^j, \eta^1, \ldots, \eta^{k-1})).\end{array}$$

D'autre part, d'après un résultat du chapitre 2,

$$[h^*, \omega^{-1}(X)] = \omega^{-1}([h, X]), \quad \forall h \in gl(m, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{m*}, X \in \mathbb{R}^m,$$

où le crochet dans le membre de droite est celui de $sl(m+1,\mathbb{R})$. Il s'ensuit que l'expression que nous avons à calculer est égale à

$$\sum_{j=1}^{m}(L_{\omega^{-1}(e_j)}L_{h^*}S(\epsilon^j,\eta^1,\ldots,\eta^{k-1})+(L_{[h,e_j]^*}S)(\epsilon^j,\eta^1,\ldots,\eta^{k-1})).$$

Pour finir, en utilisant la relation (7), on obtient

$$\begin{aligned}&Div^{\omega}(L_{h^*}S)-(\rho'_*([h,e_j])S)(\epsilon^j,\eta^1,\ldots,\eta^{k-1})\\ =\ &Div^{\omega}(L_{h^*}S)+(\rho_*(h\otimes e_j+\langle h,e_j\rangle Id)S)(\epsilon^j,\eta^1,\ldots,\eta^{k-1}).\end{aligned}$$

Le résultat provient alors facilement de la définition de ρ sur $S^k_\delta(\mathbb{R}^m)$. □

Nous obtenons ensuite

PROPOSITION 13. *Pour tout $S\in C^\infty(P,S^k_\delta(\mathbb{R}^m))_{G_0}$, nous avons*

$$L_{h^*}(Div^{\omega})^lS-(Div^{\omega})^lL_{h^*}S=(m+1)l\gamma_{2k-l}i(h)(Div^{\omega})^{l-1}S,$$

pour tout $h\in\mathbb{R}^{m*}\cong\mathfrak{g}_1$.

DÉMONSTRATION. Si $l=1$, la proposition coïncide avec le lemme 12. Le résultat se démontre alors par induction, en utilisant les lemmes 11 et 12. Il vient en effet, si on suppose le résultat vrai jusque $l-1$, que

$$L_{h^*}Div(Div^{l-1})-Div^lL_{h^*}$$

est égal à

$$(m+2(k-l+1)-1-(m+1)\delta)i(h)Div^{l-1}+DivL_{h^*}Div^{l-1}-Div^lL_{h^*},$$

i.e. à

$$l(m+2k-l-(m+1)\delta)i(h)Div^{l-1}.$$

□

Maintenant, analysons le défaut d'invariance de la différentiation invariante itérée :

PROPOSITION 14. *Si $f\in\mathcal{C}^\infty(P,\Delta^\lambda\mathbb{R}^m)_{G_0}$, alors*

$$L_{h^*}\nabla^{\omega^k}_sf-\nabla^{\omega^k}_sL_{h^*}f=-k((m+1)\lambda+k-1)(\nabla^{\omega^{k-1}}_sf\vee h),$$

pour tout $h\in\mathbb{R}^{m*}\cong\mathfrak{g}_1$.

DÉMONSTRATION. Si $k=0$, alors la formule est évidemment vraie. On procède alors par induction. Au vu de la symétrie des expressions que nous avons à comparer, il est suffisant de vérifier qu'elles coïncident quand on les évalue sur un k-tuple $(X,\ldots,X)$ pour tout $X\in\mathbb{R}^m$. La preuve est similaire à celle du lemme 12 : tout d'abord, l'évaluation et la dérivée de Lie commutent :

$$(L_{h^*}(\nabla_s^{\omega^k} f))(X,\ldots,X) = L_{h^*}((\nabla_s^{\omega^k} f)(X,\ldots,X)).$$

Ensuite, on utilise la définition de la différentielle invariante itérée et nous faisons commuter les opérateurs L_{h^*} et $L_{\omega^{-1}(X)}$ de telle sorte que la dernière expression devient

$$L_{\omega^{-1}(X)}L_{h^*}(\nabla_s^{\omega^{k-1}} f)(X,\ldots,X) + (L_{[h,X]^*}(\nabla_s^{\omega^{k-1}} f))(X,\ldots,X).$$

Par l'hypothèse de récurrence, le premier terme est égal à

$$\nabla_s^{\omega^k} L_{h^*} f(X,\ldots,X) - (k-1)((m+1)\lambda + k-2)(\nabla_s^{\omega^{k-1}} f \vee h)(X,\ldots,X).$$

En ce qui concerne le deuxième terme, on utilise la proposition 6 et la relation (7) et on obtient

$$(\rho_*((h\otimes X) + \langle h,X\rangle Id)(\nabla_s^{\omega^{k-1}} f))(X,\ldots,X).$$

Le résultat provient alors de la définition de ρ_*. □

2. Le résultat principal

Dans cette partie, nous donnons une formule explicite pour la quantification naturelle et projectivement invariante en utilisant les propriétés de la différentiation invariante itérée et de l'opérateur de divergence.

THÉORÈME 15. *Si δ n'est pas critique, alors la collection d'applications*
$Q_M : \mathcal{C}_M \times \mathcal{S}_\delta(M) \to \mathcal{D}_{\lambda,\mu}(M)$ *définies par*

$$Q_M(\nabla, S)(f) = p^{*^{-1}}(\sum_{l=0}^{k} C_{k,l}\langle Div^{\omega^l} p^*S, \nabla_s^{\omega^{k-l}} p^*f\rangle), \forall S \in \mathcal{S}_\delta^k(M) \quad (8)$$

défini une quantification naturelle projectivement invariante si

$$C_{k,l} = \frac{(\lambda+\frac{k-1}{m+1})\cdots(\lambda+\frac{k-l}{m+1})}{\gamma_{2k-1}\cdots\gamma_{2k-l}}\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}, \forall l \geq 1, \quad C_{k,0} = 1.$$

DÉMONSTRATION. Premièrement, nous devons vérifier que cette formule a un sens : la fonction

$$\sum_{l=0}^{k} C_{k,l}\langle Div^{\omega^l} p^*S, \nabla_s^{\omega^{k-l}} p^*f\rangle \quad (9)$$

doit être H-équivariante. Elle est forcément G_0-équivariante par la proposition 6 et par le lemme 11. Il est donc suffisant de contrôler la $\mathfrak{g}_1$-équivariance. Elle provient directement des propositions 13 et 14 et de la relation

$$C_{k,l}l(m+2k-l-(m+1)\delta) = C_{k,l-1}(k-l+1)((m+1)\lambda+k-l). \quad (10)$$

Ensuite, en utilisant les résultats du chapitre 2, on peut voir que le symbole principal de $Q_M(\nabla, S)$ est exactement S, et donc la formule (8) définit une quantification, qui est de plus projectivement invariante par définition de ω. Enfin, la naturalité de la quantification définie de cette manière est assez évidente : elle provient de la naturalité de l'association d'une structure projective $P \to M$ pourvue d'une connexion de Cartan normale ω à une classe de connexions sans torsion projectivement équivalentes sur M et de la naturalité du relèvement des fonctions équivariantes sur P^1M en fonctions équivariantes sur P. □

Remarques :

- Le théorème 10 et ce qui est dit à la fin du premier chapitre impliquent directement que, quand M est l'espace euclidien $\mathbb{R}^m$ et quand ∇ est la connexion plate canonique de $\mathbb{R}^m$, la formule 8 doit coïncider avec celles de **[16]** (formules 4.14 et 4.15) et **[9]** (formule 2.4), au moins quand δ n'est pas critique. Le phénomène surprenant est que nos coefficients $C_{k,l}$ coïncident avec ceux de **[9]** (formules 2.5 et 3.6), à un coefficient combinatoire près, qui est dû à une définition légèrement différente de l'opérateur de divergence. En particulier, notre formule peut être exprimée, comme celle de **[9]**, en termes de fonctions hypergéométriques.
- La preuve du théorème précédent permet aussi d'analyser le problème de l'existence quand δ est une valeur critique : supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq r \leq k$ et $\gamma_{2k-r} = 0$. Dans ces conditions, s'il existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $\lambda = -\frac{k-i}{m+1}$, alors on peut remplacer les coefficients $C_{k,i}, \ldots, C_{k,k}$ par zéro et la fonction (9) est encore H-équivariante, ce qui signifie que la collection Q_M définit encore une quantification naturelle et projectivement invariante. Si, par contre, λ n'appartient pas à l'ensemble $\{-\frac{k-1}{m+1}, \ldots, -\frac{k-r}{m+1}\}$, alors il n'y a pas de solution au problème puisque l'on sait qu'il n'existe pas de quantification $sl(m+1, \mathbb{R})$-équivariante au sens de **[16, 17]**. Pour résumer, nous avons montré le résultat suivant :

THÉORÈME 16. *Il existe une quantification naturelle et projectivement équivariante si et seulement s'il existe une quantification $sl(m+1, \mathbb{R})$-équivariante au sens de* **[16]** *sur $M = \mathbb{R}^m$.*

CHAPITRE 4

Le cas général

Dans ce chapitre, nous prouvons l'existence de quantifications naturelles projectivement invariantes pour des opérateurs différentiels agissant entre sections d'autres fibrés que les fibrés de densités. Nous allons établir une relation étroite entre l'existence de telles quantifications et l'existence des quantifications $sl(m+1,\mathbb{R})$-équivariantes correspondantes sur $\mathbb{R}^m$. En fait, le phénomène surprenant observé au chapitre précédent dans le cas des densités se généralise : les formules valables dans les situations non-critiques sur $\mathbb{R}^m$ pour les quantifications équivariantes peuvent être directement généralisées à une variété arbitraire en substituant simplement aux dérivées partielles les différentiations invariantes par rapport à la connexion de Cartan normale.

Dans tout ce chapitre, les fibrés $E_1(M)$ et $E_2(M)$ décrits dans le chapitre 1 ont pour fibre type une représentation irréductible (V,ρ) de $GL(m,\mathbb{R})$ définie de la manière suivante : soit (V,ρ_D) une représentation de $GL(m,\mathbb{R})$ correspondant à un diagramme de Young Y_D de profondeur $n<m$. On fixe $\lambda\in\mathbb{R}$ et $z\in\mathbb{Z}$ et on pose

$$\rho(A)u = |\det(A)|^\lambda(\det(A))^z\rho_D(A)u,$$

pour tout $A\in GL(m,\mathbb{R})$, pour tout $u\in V$.

1. Le cas plat

Dans cette section, nous allons brièvement rappeler les notions et les méthodes intervenant dans le cadre de la quantification projectivement équivariante sur $\mathbb{R}^m$ telles qu'elles sont exposées dans **[8]** et **[2]**. Cependant, nous allons présenter les outils de ces travaux d'une manière plus intrinsèque et algébrique.

1.1. Champs de tenseurs, symboles et opérateurs différentiels. Ces objets ont été définis dans le premier chapitre, mais quand M est l'espace euclidien $\mathbb{R}^m$, on peut effectuer les identifications suivantes :

$$\begin{array}{rcl} E_1(\mathbb{R}^m) & \cong & C^\infty(\mathbb{R}^m,V_1),\\ \mathcal{S}^k(E_1(\mathbb{R}^m),E_2(\mathbb{R}^m)) & \cong & C^\infty(\mathbb{R}^m,S^k_{V_1,V_2}),\end{array}$$

où $S^k_{V_1,V_2}$ représente l'espace $V_1^*\otimes V_2\otimes S^k(\mathbb{R}^m)$.

L'algèbre de Lie $Vect(\mathbb{R}^m)$ agit sur ces espaces d'une manière bien connue (voir chapitre 1) : si $X \in Vect(\mathbb{R}^m)$ et si S désigne un symbole, on a

$$(L_X S)(x) = X.S(x) - \rho_*(D_x X)S(x) \tag{11}$$

où ρ est l'action naturelle de $GL(m,\mathbb{R})$ sur la fibre.

L'espace $\mathcal{D}(E_1(\mathbb{R}^m), E_2(\mathbb{R}^m))$ des opérateurs différentiels est équipé de la dérivée de Lie $\mathcal{L}$ donnée par le commutateur.

1.2. L'algèbre projective des champs de vecteurs. Le groupe $G = PGL(m+1,\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{R}P^m$. Comme $\mathbb{R}^m$ peut être assimilé à l'ouvert de $\mathbb{R}P^m$ d'équation $x^{m+1} = 1$, on dispose d'une action locale de G sur $\mathbb{R}^m$. Les champs de vecteurs associés à cette action sont donnés par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X^h_x & = & -h \quad \text{si } h \in \mathfrak{g}_{-1} \\ X^h_x & = & -[h,x] \quad \text{si } h \in \mathfrak{g}_0 \\ X^h_x & = & -\frac{1}{2}[[h,x],x] \quad \text{si } h \in \mathfrak{g}_1 \end{array} \right. , \tag{12}$$

où $x \in \mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}^m$. Ces champs de vecteurs définissent une sous-algèbre de $\mathrm{Vect}(\mathbb{R}^m)$ qui est isomorphe à $sl(m+1,\mathbb{R})$.

Il est intéressant pour nos calculs ultérieurs de rappeler que la sous-algèbre $\mathfrak{g}_0$ est réductive et se décompose comme

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathbb{R}\mathcal{E} \tag{13}$$

où $\mathfrak{h}_0$ est (isomorphe à) $sl(m,\mathbb{R})$ et où l'*élément d'Euler* $\mathcal{E}$ est défini par $ad(\mathcal{E})|_{\mathfrak{g}_{-1}} = -Id$.

1.3. La quantification affine. Il existe une bijection bien connue de l'espace des symboles dans l'espace des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^m$: la *quantification affine* que nous allons noter $Q_{A\!f\!f}$. Si un symbole $S \in \mathcal{S}^k(E_1(\mathbb{R}^m), E_2(\mathbb{R}^m))$ s'écrit

$$S(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=k} C_\alpha(x)\xi^\alpha,$$

où α est un multi-indice, $\xi \in \mathbb{R}^{m*}$ et $C_\alpha(x) \in V_1^* \otimes V_2$, alors on a

$$Q_{A\!f\!f}(S) = \sum_{|\alpha|=k} C_\alpha(x) \circ (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha.$$

La quantification $Q_{A\!f\!f}$ est une quantification affinement équivariante. En effet, il est facile de voir qu'elle échange les actions de l'algèbre affine (constituée des champs de vecteurs constants et linéaires) sur l'espace des symboles et des opérateurs différentiels.

A présent, nous pouvons utiliser la formule (12) dans le but d'exprimer cette quantification de manière intrinsèque :

PROPOSITION 17. *Si* $h_1, \cdots, h_k \in \mathbb{R}^m \cong \mathfrak{g}_{-1}$*,* $A \in V_1^* \otimes V_2$*,* $s \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ *et*

$$S(x) = s(x)\, A \otimes h_1 \vee \cdots \vee h_k,$$

on a

$$Q_{\mathit{Aff}}(S) = (-1)^k s(x) \circ A \circ L_{X^{h_1}} \circ \cdots \circ L_{X^{h_k}}.$$

DÉMONSTRATION. La preuve est directe. Il suffit de remarquer que les champs X^{h_i} sont constants. □

1.4. L'application γ. En utilisant la quantification affine, on peut munir l'espace des symboles d'une structure de représentation de $\mathit{Vect}(\mathbb{R}^m)$ isomorphe à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Explicitement, on pose

$$\mathcal{L}_X S = Q_{\mathit{Aff}}^{-1} \circ \mathcal{L}_X \circ Q_{\mathit{Aff}}(S),$$

où $S \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ et $X \in \mathit{Vect}(\mathbb{R}^m)$. Une quantification équivariante est alors un $sl(m+1,\mathbb{R})-$isomorphisme de la représentation $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ dans la représentation $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$.

Afin de mesurer la différence entre ces représentations, l'application

$$\gamma : \mathfrak{g} \to gl(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)) : h \mapsto \gamma(h) = \mathcal{L}_{X^h} - L_{X^h}$$

a été introduite dans **[2]**. Cette application peut être facilement calculée en coordonnées et nous rappelons ici ses propriétés les plus importantes :

PROPOSITION 18. *L'application γ est un 1-cocycle de Chevalley-Eilenberg et s'annule sur $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0$.*

Si $h \in \mathfrak{g}_1$ et $k \in \mathbb{N}$, la restriction de $\gamma(h)$ à $\mathcal{S}^k(\mathbb{R}^m)$ a ses valeurs dans $\mathcal{S}^{k-1}(\mathbb{R}^m)$ et est un opérateur différentiel d'ordre 0 à coefficients constants.

Si $h, h' \in \mathfrak{g}_1$, on a $[\gamma(h), \gamma(h')] = 0$.

Remarque : Comme $\gamma(h)$ est un opérateur différentiel d'ordre 0 à coefficients constants, il est complètement déterminé par sa restriction aux symboles constants.

Pour la suite de nos développements, il est intéressant d'avoir une expression intrinsèque de γ. Nous avons

PROPOSITION 19. *Si* $h_1, \cdots, h_k \in \mathbb{R}^m \cong \mathfrak{g}_{-1}$*,* $A \in V_1^* \otimes V_2$ *et* $h \in \mathfrak{g}_1 \cong \mathbb{R}^{m*}$*, nous avons*

$$\begin{aligned}\gamma(h)(h_1 \vee \cdots \vee h_k \otimes A) = {}& \textstyle\sum_{i=1}^k h_1 \vee \cdots (i) \cdots \vee h_k \otimes (A \circ \rho_{1_*}([h_i, h])) \\ &+ \textstyle\sum_{i=1}^k \sum_{j<i} h_1 \vee \cdots (i,j) \cdots \vee h_k \vee [h_j, [h_i, h]] \otimes A,\end{aligned}$$

où $[h_i, h]$ appartient à $gl(m, \mathbb{R})$ grâce à l'isomorphisme donné au chapitre 2.

DÉMONSTRATION. Par définition de γ, l'expression

$$Q_{Aff}(\gamma(h)(h_1 \vee \cdots \vee h_k \otimes A))$$

est égale à

$$\mathcal{L}_{X^h} \circ Q_{Aff}(h_1 \vee \cdots \vee h_k \otimes A) - Q_{Aff}(L_{X^h}(h_1 \vee \ldots \vee h_k \otimes A)). \quad (14)$$

Cette expression est un opérateur différentiel d'ordre au plus k. Son terme d'ordre k s'annule : il suffit pour le voir d'appliquer l'opérateur σ à (14). Il nous reste donc à sommer les termes d'ordre inférieur ou égal à $k-1$ dans le premier terme de l'expression (14). Ce dernier terme s'écrit

$$(-1)^k[L_{X^h} \circ A \circ L_{X^{h_1}} \circ \cdots \circ L_{X_{h_k}} - A \circ L_{X^{h_1}} \circ \cdots \circ L_{X^{h_k}} \circ L_{X^h}].$$

Le premier terme est d'ordre k et $k+1$. Le second terme est

$$\begin{array}{l} -(-1)^k A \circ L_{X^h} \circ L_{X^{h_1}} \circ \cdots \circ L_{X^{h_k}} \\ -(-1)^k \sum_{i=1}^k A \circ L_{X^{[h_i,h]}} \circ L_{X^{h_1}} \circ \cdots (i) \cdots \circ L_{X^{h_k}} \\ -(-1)^k \sum_{i=1}^k \sum_{j<i} A \circ L_{X^{[h_j[h_i,h]]}} \circ L_{X^{h_1}} \circ \cdots (i,j) \cdots \circ L_{X^{h_k}}, \end{array}$$

comme $[h_j[h_i,h]]$ est un champ de vecteurs constant. Le premier terme est de nouveau d'ordre k et $k+1$. A présent, au vu de la formule (11), le terme d'ordre $k-1$ dans

$$-(-1)^k \sum_{i=1}^k A \circ L_{X^{[h_i,h]}} \circ L_{X^{h_1}} \circ \cdots (i) \cdots \circ L_{X^{h_k}}$$

est exactement

$$(-1)^k \sum_{i=1}^k A \circ \rho_{1_*}(DX^{[h_i,h]}) \circ L_{X^{h_1}} \circ \cdots (i) \cdots \circ L_{X^{h_k}},$$

et le résultat s'ensuit puisque $DX^{[h_i,h]} = -ad([h_i,h])$. □

L'application γ possède une importante propriété d'invariance :

PROPOSITION 20. *Si $a \in GL(m,\mathbb{R})$, $h \in \mathfrak{g}_1$ et si S est un symbole, on a*

$$\rho(a)(\gamma(h)S) = \gamma(Ad(a)h)(\rho(a)S) \quad (15)$$

DÉMONSTRATION. La preuve est un calcul direct qui utilise la proposition 19. □

1.5. Opérateurs de Casimir. Dans [**8, 2**], la construction de la quantification est basée sur la comparaison du spectre et des vecteurs propres de certains opérateurs de Casimir (du second ordre). Ces opérateurs sont d'une part l'opérateur de Casimir C associé à la représentation $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), L)$ et d'autre part l'opérateur de Casimir $\mathcal{C}$ associé à la représentation $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), \mathcal{L})$. Nous allons brièvement adapter les résultats de [**2**] dans le but de calculer ces opérateurs.

A partir de maintenant jusqu'à la fin de cette section, nous choisissons une base $(e_r, h_s, \mathcal{E}, \epsilon^t)$ de $sl(m+1,\mathbb{R})$ dans laquelle les bases e_i et ϵ^j de $\mathfrak{g}_{-1}$ et $\mathfrak{g}_1$ sont Killing-duales et dans laquelle h_j est une base de $\mathfrak{h}_0$. Il a été alors prouvé dans [**2**] que la base duale s'écrit $(\epsilon^r, h_s^*, \frac{1}{2m}\mathcal{E}, e_t)$ et que de plus on a

$$\sum_{r=1}^{m}[e_r, \epsilon^r] = -\frac{1}{2}\mathcal{E}. \tag{16}$$

Nous posons aussi

$$N = 2\sum_i \gamma(\epsilon^i) L_{X^{e_i}}.$$

Le résultat suivant est alors une généralisation directe de celui exposé dans [**2**] :

Proposition 21. *Les deux opérateurs de Casimir sont reliés de la manière suivante :*

$$\mathcal{C} = C + N. \tag{17}$$

La prochaine étape est d'analyser le problème des valeurs propres de l'opérateur C. Pour cela, nous allons tout d'abord fixer quelques notations : comme représentation de $\mathfrak{h}_0 \cong sl(m,\mathbb{R})$, $S^k_{V_1V_2} = S^k\mathbb{R}^m \otimes V_1^* \otimes V_2$ se décompose en une somme de représentations irréductibles

$$S^k_{V_1V_2} = \oplus_{s=1}^{n_k} I_{k,s}. \tag{18}$$

Pour chaque représentation irréductible $I_{k,s}$, on note $E_{k,s}$ l'espace de sections correspondant, i.e.

$$E_{k,s} = C^\infty(\mathbb{R}^m, I_{k,s}).$$

De plus, dans $sl(m,\mathbb{C})$, on considère la sous-algèbre de Cartan usuelle $\mathfrak{C}$ constituée des matrices diagonales de trace nulle. On considère les éléments de $\mathfrak{C}^*$ définis par

$$\delta_i(diag(a_1,\cdots,a_m)) = a_i.$$

Il est connu qu'un système simple de racines est donné par $\{\delta_i - \delta_{i+1}, (i = 1,\ldots,m-1)\}$. Le vecteur de Weyl est défini comme étant la moitié de la somme des racines positives et est donné par

$$\rho_S = \sum_i (m-i)\delta_i.$$

La forme de Killing de $sl(m,\mathbb{C})$ est l'extension de la forme de Killing de $sl(m,\mathbb{R})$ et induit un produit scalaire $(,)$ sur l'espace vectoriel réel engendré par les racines. Ce produit scalaire satisfait

$$(\delta_i,\delta_j) = \frac{1}{2m^2}(m\delta_{ij}-1) \text{ and } (\delta_i, 2\rho_S) = \frac{m-2i+1}{2m}, \qquad (19)$$

pour tout $i=1,\ldots,m$.

Pour chaque représentation irréductible $I_{k,s}$ de $sl(m,\mathbb{R})$, la représentation complexifiée $I_{k,s}\otimes\mathbb{C}$ de $sl(m,\mathbb{C})$ est aussi irréductible et on notera $\mu_{I_{k,s}}$ son plus haut poids.
Au vu des définitions des représentations V_1 et V_2, il existe des nombres réels a_1 et a_2 tels que

$$\rho_*(Id)|_{V_i} = a_i\, Id.$$

Afin d'être cohérent par rapport à la définition du "shift" donnée dans **[2, 8]**, on définit le "shift" d'un couple (V_1,V_2) par

$$\delta = \frac{1}{m}(a_1-a_2).$$

On est à présent en mesure d'établir le résultat principal concernant l'opérateur C :

THÉORÈME 22. *L'espace des symboles $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ est la somme directe des espaces propres de C. Plus précisément, si $k\in\mathbb{N}$, la restriction de C à $E_{k,s}$ est égale à $\alpha_{k,s}Id_{E_{k,s}}$, où*

$$\alpha_{k,s} = \frac{1}{2m}(m\delta-k)(m(\delta-1)-k) + \frac{m}{m+1}(\mu_{I_{k,s}}, \mu_{I_{k,s}}+2\rho_S). \qquad (20)$$

DÉMONSTRATION. Avec notre choix de bases duales, l'opérateur C s'écrit

$$\sum_i (L_{X^{\epsilon^i}}\circ L_{X^{e_i}} + L_{X^{e_i}}\circ L_{X^{\epsilon^i}}) + \frac{1}{2m}(L_{X^{\mathcal{E}}})^2 + \sum_j L_{X^{h_j}}\circ L_{X^{h_j^*}},$$

i.e., en utilisant la relation (16),

$$2\sum_i (L_{X^{\epsilon^i}}\circ L_{X^{e_i}}) - \frac{1}{2}L_{X^{\mathcal{E}}} + \frac{1}{2m}(L_{X^{\mathcal{E}}})^2 + \sum_j L_{X^{h_j}}\circ L_{X^{h_j^*}}.$$

Comme C commute avec L_{X^h} pour tout $h\in\mathfrak{g}_{-1}\cong\mathbb{R}^m$, il doit être à coefficients constants. Il suffit donc de prendre uniquement ces termes en considération. En utilisant l'expression de la dérivée de Lie (11) et l'expression des champs de vecteurs X^h, nous obtenons

$$C = -\frac{1}{2}\rho_*(ad(\mathcal{E})) + \frac{1}{2m}(\rho_*(ad(\mathcal{E})))^2 + \sum_j \rho_*(ad(h_j)) \circ \rho_*(ad(h_j)),$$

où ad est la représentation adjointe de $\mathfrak{g}_0$ sur $\mathfrak{g}_{-1}$. Les termes faisant intervenir l'élément d'Euler peuvent être facilement calculés puisque $ad(\mathcal{E})|_{\mathfrak{g}_{-1}} = -Id$. La restriction de la forme de Killing de $sl(m+1,\mathbb{R})$ à la sous-algèbre $sl(m,\mathbb{R})$ est égale à $\frac{m+1}{m}$ fois la forme de Killing de $sl(m,\mathbb{R})$; les bases (h_j) et $(\frac{m+1}{m}h_j^*)$ sont ainsi duales par rapport à cette dernière. On a ainsi

$$\sum_j \rho_*(ad(h_j)) \circ \rho_*(ad(h_j)) = \frac{m}{m+1}C',$$

où C' représente l'opérateur de Casimir de $sl(m,\mathbb{R})$ agissant sur $I_{k,s}$ ou l'opérateur de Casimir de $sl(m,\mathbb{C})$ agissant sur $I_{k,s} \otimes \mathbb{C}$. Il est bien connu (voir par exemple [**13**, p. 122]) que cet opérateur est égal à

$$(\mu_{I_{k,s}}, \mu_{I_{k,s}} + 2\rho_S)$$

fois l'identité sur $I_{k,s}$. □

1.6. Arbres et situations critiques. Pour analyser le spectre de l'opérateur $\mathcal{C}$, nous introduisons, comme dans [**2, 8**], l'arbre $\mathcal{T}_\gamma(I_{k,s})$ associé à une représentation irréductible $I_{k,s} \subset S^k_{V_1V_2}$: nous posons

$$\mathcal{T}_\gamma(I_{k,s}) = \bigoplus_{l\in\mathbb{N}} \mathcal{T}^l_\gamma(I_{k,s}),$$

où $\mathcal{T}^0_\gamma(I_{k,s}) = I_{k,s}$ et $\mathcal{T}^{l+1}_\gamma(I_{k,s}) = \gamma(\mathfrak{g}_1)(\mathcal{T}^l_\gamma(I_{k,s}))$, pour tout $l \in \mathbb{N}$. Les espaces $\mathcal{T}^l_\gamma(E_{k,s})$ sont définis de la même manière :

$$\mathcal{T}^l_\gamma(E_{k,s}) = C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathcal{T}^l_\gamma(I_{k,s}))$$

pour tout $l \in \mathbb{N}$. Les espaces $\mathcal{T}_\gamma(E_{k,s})$ ont une propriété importante :

Proposition 23. *L'espace $\mathcal{T}_\gamma(E_{k,s})$ est stable sous les actions de L_{X^h} et de $\mathcal{L}_{X^h}$, pour tout $h \in sl(m+1,\mathbb{R})$.*

Démonstration. La proposition 20 permet de prouver par induction que $\mathcal{T}_\gamma(E_{k,s})$ est stable sous l'action de $\rho_*(A)$ pour tout $A \in gl(m,\mathbb{R})$. Il est alors forcément stable sous l'action de la dérivée de Lie L_{X^h} pour tout $h \in sl(m+1,\mathbb{R})$ à cause de l'expression 11 de L_{X^h}. Le résultat s'ensuit puisque $\mathcal{L}_{X^h} = L_{X^h} + \gamma(h)$. □

La définition suivante est une généralisation directe de celles données dans [**2, 8**] :

DÉFINITION 6. Un couple de représentations (V_1, V_2) est *critique* s'il existe k, s tels que la valeur propre $\alpha_{k,s}$ appartient au spectre de la restriction de C à $\bigoplus_{l\geq 1}\mathcal{T}_\gamma^l(E_{k,s})$.

1.7. Construction de la quantification. Le résultat est le suivant :

THÉORÈME 24. *Si le couple (V_1, V_2) n'est pas critique, il existe une quantification projectivement équivariante de $\mathcal{S}(E_1(\mathbb{R}^m), E_2(\mathbb{R}^m))$ dans $\mathcal{D}(E_1(\mathbb{R}^m), E_2(\mathbb{R}^m))$.*

DÉMONSTRATION. La preuve est analogue à celles données dans [**8**] et [**2**]. Nous en donnons ici les idées principales par souci de complétude.

Premièrement, remarquons que pour tout $S \in E_{k,s}$ il existe un unique vecteur propre $\hat{S}$ de valeur propre $\alpha_{k,s}$ de $\mathcal{C}$ tel que

$$\begin{cases} \hat{S} = S_k + S_{k-1} + \cdots + S_0, \quad S_k = S \\ S_l \in \mathcal{T}_\gamma^{k-l}(E_{k,s}) \quad \text{pour tout}\, l \leq k-1. \end{cases}$$

En effet, ces conditions peuvent s'écrire

$$\begin{cases} C(S) = \alpha_{k,s} S \\ (C - \alpha_{k,s}\mathrm{Id})S_{k-l} = -N(S_{k-l+1}) \quad \forall l \in \{1, \cdots, k\} \\ S_{k-l} \in \mathcal{T}_\gamma^l(E_{k,s}). \end{cases} \tag{21}$$

La première condition est satisfaite puisque S appartient à $E_{k,s}$. Pour la deuxième et la troisième, remarquons que si S_{k-l+1} est dans $\mathcal{T}_\gamma^{l-1}(E_{k,s})$, alors $N(S_{k-l+1})$ appartient à $\mathcal{T}_\gamma^l(E_{k,s})$ par la proposition 23. A présent, $\mathcal{T}_\gamma^l(E_{k,s})$ se décompose comme une somme directe d'espaces propres de C, comme l'indique le théorème 22. La restriction de l'opérateur $C - \alpha_{k,s}\mathrm{Id}$ à chacun de ces sous-espaces est un multiple scalaire non-nul de l'identité, d'où l'existence et l'unicité de S_{k-l}. Définissons la quantification Q par

$$Q|_{E_{k,s}}(S) = \hat{S}.$$

C'est évidemment une bijection.

Cette bijection satisfait

$$Q \circ L_{X^h} = \mathcal{L}_{X^h} \circ Q \quad \forall h \in sl(m+1, \mathbb{R}).$$

En effet, pour tout $S \in E_{k,s}$, $Q(L_{X^h}S)$ et $\mathcal{L}_{X^h}(Q(S))$ partagent les propriétés suivantes :

- Ce sont des vecteurs propres de $\mathcal{C}$ de valeur propre $\alpha_{k,s}$ parce que d'une part, $\mathcal{C}$ commute avec $\mathcal{L}_{X^h}$ pour tout h et d'autre part, $L_{X^h}S$ appartient à $E_{k,s}$ par la proposition 23,
- Leur terme de degré k est exactement $L_{X^h}S$,
- Ils appartiennent à $\mathcal{T}_\gamma(E_{k,s})$ par la proposition 23.

La première partie de la preuve assure alors qu'ils doivent coïncider. □

1.8. Un résultat technique. La proposition suivante sera fondamentale pour la suite :

PROPOSITION 25. *La relation*

$$[\gamma(h), C] = 2\sum_i \gamma(\epsilon^i)\rho_*([h, e_i])$$

est vraie pour tout $h \in \mathfrak{g}_1$.

DÉMONSTRATION. Comme un opérateur de Casimir commute avec la représentation correspondante, on a :

$$\begin{array}{rcl} [\mathcal{L}_{X^h}, \mathcal{C}] & = & 0, \\ [L_{X^h}, C] & = & 0. \end{array}$$

Ces équations font en sorte que

$$[L_{X^h}, N] + [\gamma(h), C] + [\gamma(h), N] = 0.$$

On peut voir facilement en utilisant la proposition 18 que $[\gamma(h), N]$ s'annule. De plus, nous avons

$$[L_{X^h}, N] = 2\sum_i (L_{X^h}\gamma(\epsilon^i)L_{X^{e_i}} - \gamma(\epsilon^i)L_{X^{e_i}}L_{X^h}).$$

Les termes d'ordre strictement supérieur à 0 dans cette expression doivent s'annuler puisque $[\gamma(h), C]$ est d'ordre 0. Il suffit donc de collecter les termes d'ordre 0.

En utilisant la formule (11), on peut voir que le premier terme est d'ordre supérieur ou égal à 1. Le second terme s'écrit

$$-2\sum_i \gamma(\epsilon^i)(L_{X^h}L_{X^{e_i}} + L_{X^{[e_i,h]}}).$$

Les termes d'ordre 0 dans cette expression sont

$$2\sum_i \gamma(\epsilon^i)\rho_*(DX^{[e_i,h]}),$$

d'où le résultat. □

2. Outils du cas courbe

Nous allons adapter ici les outils présentés dans la section 1 à la situation courbe.

2.1. La quantification affine courbe. La construction de l'analogue courbe de la quantification affine est basée sur la différentiation invariante. En effet, en utilisant celle-ci, on peut transformer un symbole $S \in C^\infty(P, S^k_{V_1,V_2})$ en un opérateur différentiel $Q_\omega(S)$ agissant sur les fonctions $f \in C^\infty(P, V_1)$ en posant

$$Q_\omega(S)(f) = \langle S, \nabla^{\omega^k}_s f\rangle. \tag{22}$$

Explicitement, si le symbole S s'écrit $sA\otimes h_1 \vee \cdots \vee h_k$ avec $s \in C^\infty(P)$, $A \in V_1^* \otimes V_2$ et $h_1, \cdots, h_k \in \mathbb{R}^m \cong \mathfrak{g}_{-1}$, alors on a

$$Q_\omega(S)f = \frac{1}{k!}\sum_\nu sA \circ L_{\omega^{-1}(h_{\nu_1})} \circ \cdots \circ L_{\omega^{-1}(h_{\nu_k})} f,$$

où ν parcourt toutes les permutations des indices $\{1, \cdots, k\}$ et où s est considéré comme un opérateur de multiplication.

Remarque 1. Si $S \in C^\infty(P, S^k_{V_1,V_2})$ est $H-$équivariant, l'opérateur différentiel $Q_\omega(S)$ ne transforme pas les fonctions $H-$équivariantes en fonctions $H-$équivariantes. En effet, si f est $H-$équivariant, la fonction $\nabla^{\omega^k}_s f$ est seulement G_0-équivariante. La fonction $Q_\omega(S)f$ ne correspond donc pas à une section de $E_2(M)$. Nous allons montrer que l'on peut modifier le symbole S par des termes correctifs d'ordres inférieurs pour remédier à ce problème.

2.2. Mesure du défaut d'équivariance. Dans cette section, S désignera un élément de $C^\infty(P, S^k_{V_1,V_2})_{G_0}$ et $f \in C^\infty(P, V_1)_{G_0}$ (remarquons que cela assure le fait que $Q_\omega(S)(f)$ appartient à $C^\infty(P, V_2)_{G_0}$).

Puisque fondamentalement, nos outils préservent la G_0-équivariance, nous sommes principalement intéressés par la $\mathfrak{g}_1$-équivariance. Le résultat suivant est la clé de voûte de notre méthode :

Proposition 26. *La relation*

$$L_{h^*}Q_\omega(S)(f) - Q_\omega(S)(L_{h^*}f) = Q_\omega((L_{h^*} + \gamma(h))S)(f)$$

est valable pour tout $f \in C^\infty(P, V_1)_{G_0}$, $h \in \mathfrak{g}_1$ *et* $S \in C^\infty(P, S^k_{V_1,V_2})$.

Démonstration. La relation que nous avons à prouver s'écrit

$$\langle S, L_{h^*}\nabla^{\omega^k}_s f - \nabla^{\omega^k}_s L_{h^*} f\rangle = \langle \gamma(h)S, \nabla^{\omega^{k-1}}_s f\rangle.$$

Comme les deux membres sont $C^\infty(P)$-linéaires en S, il suffit de vérifier cette relation pour un symbole constant S qui a la forme $X^k \otimes A$, où $X \in \mathfrak{g}_{-1}$ et $A \in V_1^* \otimes V_2$. Dans ces conditions, le membre de gauche s'écrit

$$A(L_{h*}L_{\omega^{-1}(X)} \ldots L_{\omega^{-1}(X)}f - L_{\omega^{-1}(X)} \ldots L_{\omega^{-1}(X)}L_{h^*}f)$$

et est égal à

$$\begin{aligned}
&A(\textstyle\sum_{j=1}^{k} L_{\omega^{-1}(X)} \dots \overset{(j)}{L_{[h,X]^*}} \dots L_{\omega^{-1}(X)} f) \\
&= A(\textstyle\sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i>j} L_{\omega^{-1}(X)} \overset{(j)}{\dots} \overset{(i)}{L_{\omega^{-1}([[h,X],X])}} \dots L_{\omega^{-1}(X)} f) \\
&- A(\textstyle\sum_{i=1}^{k} L_{\omega^{-1}(X)} \overset{(i)}{\dots} L_{\omega^{-1}(X)} \rho_{1*}([h,X]) f),
\end{aligned}$$

d'où le résultat par la proposition 19. En effet, les champs $\omega^{-1}(X)$ et $\omega^{-1}([[h,X],X])$ commutent puisque $[[h,X],X] = -2\langle h,X\rangle X$. $\square$

2.3. Opérateurs de Casimir courbes. Le parallélisme entre les situations plate et courbe suggère de définir un analogue de l'opérateur $\mathcal{C}$.

Nous définissons tout d'abord un analogue de N en posant

$$N^\omega = -2 \sum_i \gamma(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)}.$$

Ensuite, nous pouvons définir les opérateurs C^ω et $\mathcal{C}^\omega$ par leurs restrictions aux espaces $C^\infty(P, I_{k,s})$: pour tout $S \in C^\infty(P, I_{k,s})$, on pose

$$\left\{ \begin{array}{lcl} C^\omega(S) & = & \alpha_{k,s} S \\ \mathcal{C}^\omega(S) & = & C^\omega(S) + N^\omega(S), \end{array} \right.$$

où $\alpha_{k,s}$ est la valeur propre de C sur $E_{k,s} = C^\infty(\mathbb{R}^m, I_{k,s})$.

L'opérateur $\mathcal{C}^\omega$ a la propriété suivante :

PROPOSITION 27. *Pour tout $h \in \mathfrak{g}_1$, on a*

$$[L_{h^*} + \gamma(h), \mathcal{C}^\omega] = 0$$

sur $C^\infty(P, S^k_{V_1,V_2})_{G_0}$.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, nous avons

$$[L_{h^*} + \gamma(h), C^\omega + N^\omega] = [L_{h^*}, C^\omega] + [L_{h^*}, N^\omega] + [\gamma(h), C^\omega] + [\gamma(h), N^\omega].$$

Ensuite $[L_{h^*}, C^\omega] = 0$ puisque L_{h^*} stabilise chaque espace propre $C^\infty(P, I_{k,s})$ de C^ω. De la même manière, nous avons $[\gamma(h), N^\omega] = 0$ puisque

- par la proposition 18, $[\gamma(h), \gamma(\epsilon^i)] = 0$,
- $[\gamma(h), L_{\omega^{-1}(e_i)}] = 0$ puisque $\gamma(h)$ agit seulement sur l'espace d'arrivée $S^k_{V_1,V_2}$.

Finalement, nous obtenons

$$\begin{array}{rcl} [L_{h^*}, N^\omega] & = & -2 \sum_i \gamma(\epsilon^i)[L_{h^*}, L_{\omega^{-1}(e_i)}] \\ & = & -2 \sum_i \gamma(\epsilon^i) L_{[h,e_i]^*} \\ & = & 2 \sum_i \gamma(\epsilon^i) \rho_*([h, e_i]), \end{array}$$

grâce à la G_0-équivariance. On conclut par la proposition 25. $\square$

En ce qui concerne l'opérateur N^ω, nous avons le résultat suivant :

PROPOSITION 28. *L'opérateur N^ω préserve la G_0-équivariance des fonctions.*

DÉMONSTRATION. Cette propriété est une conséquence de la proposition 20 et du fait que la différentiation invariante préserve la G_0-équivariance. On a successivement, pour tout $f \in C^\infty(P, S^k_{V_1,V_2})$, $u \in P$ et $g \in G_0$:

$$\begin{array}{rcl} (N^\omega(f))(ug) & = & \sum_i \gamma(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)} f(ug) \\ & = & \sum_i \gamma(\epsilon^i)(\nabla^\omega f)(ug)(e_i) \\ & = & \sum_i \gamma(\epsilon^i)\rho(g^{-1})((\nabla^\omega f)(u)(Ad(g)e_i)) \\ & = & \sum_i \rho(g^{-1})(\gamma(Ad(g)\epsilon^i)(\nabla^\omega f)(u)(Ad(g)e_i)) \\ & = & \rho(g^{-1}) \sum_i \gamma(\epsilon^i) L_{\omega^{-1}(e_i)} f(u), \end{array}$$

d'où le résultat. □

3. Construction de la quantification

La construction de la quantification est basée sur le problème des valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{C}^\omega$.

Remarquons tout d'abord que la construction de la section 1.7 est encore valable dans le cas courbe.

THÉORÈME 29. *Si le couple (V_1, V_2) n'est pas critique, pour tout S appartenant à $C^\infty(P, I_{k,s})$, il existe une unique fonction $\hat{S}$ dans $C^\infty(P, \mathcal{T}_\gamma(I_{k,s}))$ telle que*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \hat{S} & = & S_k + \cdots + S_0, \quad S_k = S \\ \mathcal{C}^\omega(\hat{S}) & = & \alpha_{k,s}\hat{S}. \end{array} \right. \tag{23}$$

De plus, si S est G_0-équivariant, alors $\hat{S}$ est G_0-équivariant.

DÉMONSTRATION. La fonction $\hat{S}$ existe et est unique. Il suffit simplement de noter que les conditions dans (23) sont celles de (21) où C est remplacé par C^ω et où N est remplacé par N^ω. Le point principal qui permettait de résoudre (21) était que N envoie $\mathcal{T}^{l-1}_\gamma(E_{k,s})$ dans $\mathcal{T}^l_\gamma(E_{k,s})$. Ce dernier fait est en réalité une propriété de γ et par conséquent nous avons

$$N^\omega(C^\infty(P, \mathcal{T}^{l-1}_\gamma(I_{k,s}))) \subset C^\infty(P, \mathcal{T}^l_\gamma(I_{k,s})).$$

Si de plus S est G_0-équivariant, alors $\hat{S}$ est G_0-équivariant. De fait, $\hat{S}$ est obtenu à partir de S en appliquant successivement les opérateurs N^ω et les projecteurs de $\mathcal{T}^l_\gamma(I_{k,s})$ sur ses composantes irréductibles et ces opérations préservent la G_0-équivariance des fonctions (voir proposition 28). □

Ce résultat permet de définir l'ingrédient principal servant à définir la quantification.

DÉFINITION 7. Supposons que le couple (V_1, V_2) ne soit pas critique. L'application

$$Q : C^\infty(P, S_{V_1,V_2}) \to C^\infty(P, S_{V_1,V_2})$$

est alors l'extension linéaire de l'association $S \mapsto \hat{S}$.

L'application Q a la propriété importante suivante :

PROPOSITION 30. *On a*

$$(L_{h^*} + \gamma(h))Q(S) = Q(L_{h^*}S), \tag{24}$$

pour tout $h \in \mathfrak{g}_1$ *et tout* $S \in C^\infty(P, S_{V_1,V_2})_{G_0}$.

DÉMONSTRATION. La preuve est simplement une adaptation de celle du théorème 24. Il suffit de vérifier la propriété pour $S \in C^\infty(P, I_{k,s})_{G_0}$ (pour tout k et s). Pour un tel S, la fonction $Q(L_{h^*}S)$ est définie par (23) : c'est l'unique vecteur propre de $\mathcal{C}^\omega$ appartenant à $C^\infty(P, \mathcal{T}_\gamma(I_{k,s}))$ de valeur propre $\alpha_{k,s}$ et dont le terme de plus haut degré est $L_{h^*}S$. Le membre de gauche de l'équation (24) a $L_{h^*}T$ comme terme de plus haut degré puisque $\gamma(h)$ abaisse le degré de ses arguments. Il appartient clairement à $C^\infty(P, \mathcal{T}_\gamma(I_{k,s}))$. Enfin, puisque $Q(S)$ est G_0-équivariant, la proposition 27 implique que $(L_{h^*} + \gamma(h))Q(S)$ est un vecteur propre de $\mathcal{C}^\omega$ de valeur propre $\alpha_{k,s}$. □

Ces résultats plutôt techniques permettent d'établir le théorème principal.

THÉORÈME 31. *Si le couple* (V_1, V_2) *n'est pas critique, alors la formule*

$$Q_M : (\nabla, S) \mapsto Q_M(\nabla, S)(f) = (p^*)^{-1}[Q_\omega(Q(p^*S))(p^*f)]$$

définit une quantification naturelle projectivement invariante.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, la formule a un sens : la fonction $Q_\omega(Q(p^*S))(p^*f)$ est H-équivariante. La G_0-équivariance provient du théorème 29 et de la remarque 1. La $\mathfrak{g}_1$-équivariance provient des relations

$$\begin{aligned} L_{h^*}[Q_\omega(Q(p^*S))(p^*f)] &= \mathcal{L}_{h^*}[Q_\omega(Q(p^*S))](p^*f) \\ &= Q_\omega[(L_{h^*} + \gamma(h))(Q(p^*S))](p^*f) \\ &= Q_\omega[Q(L_{h^*}(p^*S))](p^*f). \end{aligned}$$

Ensuite, le symbole principal de $Q_M(\nabla, S)(f)$ est exactement S. Il suffit de noter que le terme de plus haut degré de $Q(p^*S)$ is p^*S et d'utiliser les résultats du chapitre 2.

Ainsi, $Q_M(\nabla)$ est une quantification. Elle est projectivement invariante par définition de ω.

Enfin, la naturalité des quantifications ainsi définies est une conséquence de la naturalité de tous les objets utilisés dans la formule. $\square$

CHAPITRE 5

Une formule explicite

Le but de ce chapitre est d'établir une formule explicite pour la quantification dont il est question au chapitre 3. Cette formule explicite est construite à partir d'opérateurs naturels sur M et constitue la généralisation à un ordre quelconque des formules aux deuxième et troisième ordres déjà publiées par Bouarroudj dans [**4**] et dans [**5**].

La formule s'obtient grâce à des outils exposés en détail dans [**6**]. Nous allons les rappeler brièvement mais nous invitons le lecteur à consulter cette référence s'il désire des informations supplémentaires.

1. Le tenseur de déformation

Comme on le fait remarquer à la page 147 de [**14**], une connexion d'Ehresmann Υ sur P^1M appartenant à une structure projective P donne lieu à une section $GL(m,\mathbb{R})$-équivariante σ_Υ de $P \to P^1M$ telle que $\sigma_\Upsilon^*\theta_0 = \Upsilon$ et telle que $\sigma_\Upsilon^*\theta_{-1}$ est égal à la forme canonique de P^1M. Sachant qu'à Υ correspond une réduction de P^2M à $GL(m,\mathbb{R})$ (voir chapitre 2), la section σ_Υ associe à u l'unique repère de cette réduction qui se projette sur u. Explicitement, on a donc :

$$\sigma_\Upsilon : P^1M \to P : (x^i, u^i_j) \mapsto (x^i, \delta^i_j, -\Gamma^i_{jk}).(u^i_j, 0),$$

où les Γ^i_{jk} sont les symboles de Christoffel correspondant à la connexion Υ.

En fait, la correspondance qui vient d'être décrite entre connexions et sections établit une bijection entre l'ensemble des connexions appartenant à la structure projective P et l'ensemble des sections $GL(m,\mathbb{R})$-équivariantes de $P \to P^1M$. De fait, cette correspondance est évidemment injective. Elle est de plus surjective : si σ' est une section $GL(m,\mathbb{R})$-équivariante, alors il existe une fonction α à valeurs dans $\mathfrak{g}_1$ et $GL(m,\mathbb{R})$-équivariante telle que

$$\sigma'(u) = \sigma_\Upsilon(u).\exp(\alpha(u)).$$

La section σ' peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$\sigma' : P^1M \to P : (x^i, u^i_j) \mapsto (x^i, \delta^i_j, -\Gamma'^i_{jk}).(u^i_j, 0),$$

si les Γ'^i_{jk} sont donnés par cette relation :

$$\Gamma'^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \alpha_j \delta^i_k + \alpha_k \delta^i_j,$$

où les α_j sont les composantes de la 1-forme représentée par α.

Si σ_Υ est la section correspondant à une connexion Υ sur P^1M, on peut définir une application $\tau : P \to \mathfrak{g}_1$ de la manière suivante :

$$u = \sigma_\Upsilon(p(u)).\exp(\tau(u)).$$

Signalons le résultat suivant (voir **[6]** page 43) :

PROPOSITION 32. *Pour toute section $GL(m,\mathbb{R})$-équivariante σ_Υ : $P^1M \to P$, il existe une unique connexion de Cartan $\omega = \theta_{-1} \oplus \theta_0 \oplus \omega_1$ satisfaisant $\omega_1|(\sigma_{\Upsilon *}(TP^1M)) = 0$.*

Si σ_Υ est la section correspondant à une connexion Υ sur P^1M, nous appellerons cette connexion de Cartan la *connexion de Cartan induite par* Υ et nous la noterons $\tilde{\Upsilon}$.

La connexion de Cartan normale ω associée à la classe projective de Υ et la connexion de Cartan $\tilde{\Upsilon}$ induite par Υ diffèrent uniquement par leurs composantes dans $\mathfrak{g}_1$. De plus, comme la différence $\omega - \tilde{\Upsilon}$ s'annule sur les champs de vecteurs verticaux, il existe une fonction $\Gamma \in C^\infty(P, \mathfrak{g}^*_{-1} \otimes \mathfrak{g}_1)$ telle que

$$\omega = \tilde{\Upsilon} - \Gamma \circ \theta_{-1}.$$

Cette fonction est H-équivariante. De fait, Γ est défini de la manière suivante :

$$\Gamma_u(X) = (\tilde{\Upsilon} - \omega)_u(\omega_u^{-1}(X))$$

où $u \in P$, $X \in \mathfrak{g}_{-1}$. En vertu de l'Ad-invariance de ω et $\tilde{\Upsilon}$, il vient alors successivement, si $g \in H$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ug}(X) &= (\tilde{\Upsilon} - \omega)_{ug}(\omega_{ug}^{-1}(X)) \\ &= (\tilde{\Upsilon} - \omega)_{ug}(R_{g*}\omega_u^{-1}(Ad(g)X)) \\ &= Ad(g^{-1})(\tilde{\Upsilon} - \omega)_u(\omega_u^{-1}(Ad(g)X)). \end{aligned}$$

D'une part, si $g \in G_1$, la restriction de $Ad(g)$ à $\mathfrak{g}_1$ et la projection sur $\mathfrak{g}_{-1}$ de sa restriction à $\mathfrak{g}_{-1}$ sont égales à l'identité. D'autre part, si $g \in G_0$, les restrictions de $Ad(g)$ à $\mathfrak{g}_{-1}$ et à $\mathfrak{g}_1$ coïncident respectivement avec les actions canoniques de $GL(m,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^m$ et sur $\mathbb{R}^{m*}$ et on peut alors conclure.

La fonction Γ représente donc un 2-tenseur covariant sur M ; c'est pourquoi nous l'appellerons le *tenseur de déformation (*voir **[6]** page

45, paragraphe 3.9.). Cette fonction possède notamment la propriété suivante (voir lemme 3.10.) :

$$(\tilde{\kappa}_0 - \kappa_0)(u)(X,Y) = [X, \Gamma(u).Y] + [\Gamma(u).X, Y] \tag{25}$$

si $u \in P$, $X, Y \in \mathfrak{g}_{-1}$ et si $\tilde{\kappa}_0$ et κ_0 sont les fonctions induites respectivement par les courbures de $\tilde{\Upsilon}$ et de ω.

2. Calcul du tenseur de déformation

Dans ce paragraphe, nous calculons le tenseur de déformation dans le cas projectif de la même manière qu'il est calculé dans le cas conforme à la page 63 de **[6]**.

Fixons tout d'abord une base e_i de $\mathfrak{g}_{-1}$, e^i_j de $\mathfrak{g}_0$, ϵ^i de $\mathfrak{g}_1$. On a alors

$$\Gamma(u)(e_i) = \sum_j \Gamma(u)_{ji}\epsilon^j,$$

$$\kappa_0(u)(e_i, e_j) = \sum_{k,l} \kappa_0(u)^k_{lij} e^l_k$$

et

$$\tilde{\kappa}_0(u)(e_i, e_j) = \sum_{k,l} \tilde{\kappa}_0(u)^k_{lij} e^l_k.$$

La structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ fait en sorte que

$$[e_i, \epsilon^j] = e^j_i + \delta^j_i Id.$$

Dès lors, il vient

$$\begin{aligned}
[\Gamma.e_j, e_i] - [\Gamma.e_i, e_j] &= [\sum_p \Gamma_{pj}\epsilon^p, e_i] - [\sum_p \Gamma_{pi}\epsilon^p, e_j] \\
&= \sum_p \Gamma_{pj}(-e^p_i - \delta^p_i Id) - \sum_p \Gamma_{pi}(-e^p_j - \delta^p_j Id) \\
&= (-\Gamma_{kj}\delta^l_i - \Gamma_{ij}\delta^l_k + \Gamma_{ki}\delta^l_j + \Gamma_{ji}\delta^l_k)e^k_l.
\end{aligned}$$

Si l'on appelle $\delta\kappa_0$ la différence $\kappa_0 - \tilde{\kappa}_0$, on obtient donc en utilisant l'égalité 25 les relations suivantes :

$$(\delta\kappa_0)^l_{klj} = \Gamma_{jk} - m\Gamma_{kj}; \tag{26}$$

$$(\delta\kappa_0)^k_{kij} = (m+1)(\Gamma_{ji} - \Gamma_{ij}). \tag{27}$$

D'une part, les fonctions $(\kappa_0)^l_{klj}$ et $(\kappa_0)^k_{kij}$ sont identiquement nulles par normalité de ω (voir par exemple **[14]** page 136). D'autre part, les fonctions $(\tilde{\kappa_0})^k_{lij}$ sont les composantes de la fonction équivariante sur P représentant le tenseur de courbure correspondant à la connexion Υ.

En effet, appellons R le tenseur de courbure correspondant à Υ et désignons par f la fonction équivariante représentant R sur P^1M. Il vient alors, si on note Ω la 2-forme de courbure de Υ, si on utilise la définition de Ω donnée dans **[15]** page 133 et si l'on désigne par π la projection de P^1M sur M :

$$\begin{aligned}(p^*f)(u)^k_{lij} &= f(p(u))^k_{lij}\\ &= (p(u)^{-1}R_{\pi(p(u))}(p(u)_i, p(u)_j))^k_l\\ &= \Omega_{p(u)}(X_1, X_2)^k_l,\end{aligned}$$

si $p(u)_i$, $p(u)_j$ sont les composantes i et j du repère $p(u)$ et si $X_1, X_2 \in T_{p(u)}P^1M$ sont tels que $\pi_{*p(u)}X_1 = p(u)_i$ et $\pi_{*p(u)}X_2 = p(u)_j$. Si l'on désigne par θ_{P^1} la forme canonique de P^1M, on sait que $\theta_{P^1}+\Upsilon$ constitue une connexion de Cartan sur P^1M (voir **[6]** page 42). On peut alors grâce à la définition de θ_{P^1} prendre pour X_1 et X_2 les vecteurs $(\theta_{P^1}+\Upsilon)^{-1}_{p(u)}(e_i)$ et $(\theta_{P^1}+\Upsilon)^{-1}_{p(u)}(e_j)$. Si l'on remarque que $\Omega = \sigma^*_\Upsilon\tilde{\Omega}_0$, $\tilde{\Omega}$ désignant la courbure de $\tilde{\Upsilon}$ (voir **[6]** page 44), il vient

$$\begin{aligned}\Omega_{p(u)}(X_1, X_2)^k_l &= (\sigma^*_\Upsilon\tilde{\Omega}_0)_{p(u)}((\theta_{P^1}+\Upsilon)^{-1}_{p(u)}(e_i), (\theta_{P^1}+\Upsilon)^{-1}_{p(u)}(e_j))^k_l\\ &= \tilde{\Omega}_{0\sigma_\Upsilon(p(u))}(\sigma_{\Upsilon*}(\theta_{P^1}+\Upsilon)^{-1}_{p(u)}(e_i), \sigma_{\Upsilon*}(\theta_{P^1}+\Upsilon)^{-1}_{p(u)}(e_j))^k_l\\ &= \tilde{\Omega}_{0\sigma_\Upsilon(p(u))}(\tilde{\Upsilon}^{-1}(e_i), \tilde{\Upsilon}^{-1}(e_j))^k_l\\ &= \tilde{\kappa}_0(u)^k_{lij}.\end{aligned}$$

De fait, on a d'une part $\sigma_{\Upsilon*}(\theta_{P^1}+\Upsilon)^{-1}(e_i) = \tilde{\Upsilon}^{-1}(e_i)$. En effet, $\tilde{\Upsilon}(\sigma_{\Upsilon*}(\theta_{P^1}+\Upsilon)^{-1}(e_i)) = e_i$ en vertu du fait que $\sigma^*_\Upsilon\tilde{\Upsilon}$ est égal à $\theta_{P^1} + \Upsilon + \sigma^*_\Upsilon\tilde{\Upsilon}_1$ (voir **[6]** page 42) et de la définition de $\tilde{\Upsilon}$ qui dit que $\tilde{\Upsilon}_1|(\sigma_{\Upsilon*}(TP^1M)) = 0$.

D'autre part, $\tilde{\kappa}_0(u)(X,Y) = \tilde{\kappa}_0(\sigma_\Upsilon(p(u)))(X,Y)$ pour tous X, Y appartenant à $\mathfrak{g}_{-1}$ (voir **[6]** page 44) et on peut alors conclure.

Un peu de calcul permet alors d'obtenir l'expression du tenseur de déformation à partir des relations 26 et 27 :

$$\Gamma_{jk} = \frac{\mathrm{Ric}_{kj}}{1-m} + \frac{m\ \mathrm{trR}_{jk}}{(m+1)(m-1)}, \tag{28}$$

où Ric et trR représentent les fonctions équivariantes sur P qui correspondent respectivement au tenseur de Ricci et à la trace de la courbure.

3. Développements de ∇^{ω^l} et de Div^{ω^l}

Dans le but d'obtenir des formules explicites pour la quantification, nous avons besoin de connaître les développements des opérateurs ∇^{ω^l} et Div^{ω^l} en fonction d'opérateurs sur M.

Soit Υ une connexion sur P^1M donnant lieu à une dérivation covariante ∇ et appartenant à une structure projective P. Notons ω la connexion de Cartan sur P associée.

Soit également (V, ρ) une représentation de $GL(m, \mathbb{R})$ induisant une représentation (V, ρ_*) de $gl(m, \mathbb{R})$. Si on note $\rho_*^{(l)}$ la représentation canonique sur $\otimes^l \mathfrak{g}_{-1}^* \otimes V$ et si $s \in C^\infty(P^1M, V)_{GL(m,\mathbb{R})}$, alors $F^l s := \nabla^{\omega^l}(p^*s) - p^*(\nabla^l s)$ est donné par l'induction suivante (voir **[6]** page 51) :

$$\begin{aligned}
&F^0 s(u) = 0 \\
&F^l s(u)(X_1, \ldots, X_l) = \rho_*^{(l-1)}([X_l, \tau(u)])(F^{l-1}s(u))(X_1, \ldots, X_{l-1}) \\
&\qquad\qquad +S_\tau(F^{l-1}s(u))(X_1, \ldots, X_{l-1}) \\
&\qquad\qquad +S_\nabla(F^{l-1}s(u))(X_1, \ldots, X_{l-1}) \\
&\qquad\qquad +S_\Gamma(F^{l-1}s(u))(X_1, \ldots, X_{l-1}) \\
&\qquad\qquad +\rho_*^{(l-1)}([X_l, \tau(u)])(p^*(\nabla^{l-1}s)(u))(X_1, \ldots, X_{l-1}).
\end{aligned}$$

Cette expression s'écrit comme une somme de termes de la forme

$$a\rho_*^{(t_1)}(\beta_1) \ldots \rho_*^{(t_i)}(\beta_i) p^* \nabla^j s$$

où a est un scalaire, les β_l sont des crochets itérés faisant intervenir certains arguments X_l, les différentielles itérées $\nabla^r \Gamma$ évaluées sur d'autres arguments X_l et l'application τ. Les t_j premiers arguments $X_1, \ldots, X_{t_j}$ sont évalués après l'action de $\rho_*^{(t_j)}(\beta_j)$, les autres arguments apparaissant à leur droite sont évalués avant. Les transformations S_τ, S_∇ et S_Γ sont définies de la manière suivante :

(1) L'action de S_τ remplace chaque terme $a\rho_*^{(t_1)}(\beta_1) \ldots \rho_*^{(t_i)}(\beta_i) p^* \nabla^j$ par une somme de termes qu'on obtient en substituant $-\frac{1}{2}[\tau, [\tau, X_l]]$ à un τ.

(2) La transformation S_∇ remplace chaque terme dans F^{l-1} par une somme de termes qu'on obtient en substituant à un Γ ou à une de ses différentielles sa dérivée covariante ∇_{X_l}. En outre, on ajoute un terme supplémentaire dans lequel $\nabla^j s$ est remplacé par $\nabla_{X_l}(\nabla^j s)$.

(3) La transformation S_Γ remplace enfin chaque terme par une somme de termes qu'on obtient en substituant $\Gamma(u).X_l$ à un τ.

En fait, cet algorithme peut être trivialement linéarisé de la manière suivante :

PROPOSITION 33. *Le développement de $\nabla^{\omega^l}(p^*s)(X_1,\ldots,X_l)$ s'obtient comme suit :*

$$\begin{aligned}\nabla^{\omega^l}(p^*s)(X_1,\ldots,X_l) = &\rho_*^{(l-1)}([X_l,\tau])(\nabla^{\omega^{l-1}}(p^*s))(X_1,\ldots,X_{l-1})\\ &+S_\tau(\nabla^{\omega^{l-1}}(p^*s))(X_1,\ldots,X_{l-1})\\ &+S_\nabla(\nabla^{\omega^{l-1}}(p^*s))(X_1,\ldots,X_{l-1})\\ &+S_\Gamma(\nabla^{\omega^{l-1}}(p^*s))(X_1,\ldots,X_{l-1}).\end{aligned}$$

PROPOSITION 34. *Si $f \in C^\infty(P^1M,\Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_{GL(m,\mathbb{R})}$, alors $\nabla^{\omega^l}(p^*f)(X,\ldots,X)$ est une combinaison linéaire de termes de la forme*

$$(\otimes^{n_{-1}}\tau\otimes p^*(\otimes^{n_{l-2}}\nabla^{l-2}\Gamma\otimes\ldots\otimes\otimes^{n_0}\Gamma\otimes\nabla^q f))(X,\ldots,X).$$

Si l'on note $T(n_{-1},\ldots,n_{l-2},q)$ un tel terme, $T(n_{-1},\ldots,n_{l-2},q)$ donne lieu dans le développement de $\nabla^{\omega^{l+1}}(p^*f)(X,\ldots,X)$ à

$$\begin{aligned}&(-\lambda(m+1)-2l+n_{-1})T(n_{-1}+1,\ldots,n_{l-2},q)+T(n_{-1},\ldots,n_{l-2},q+1)\\ &\qquad+\sum_{j=-1}^{l-2}n_jT(n_{-1},\ldots,n_j-1,n_{j+1}+1,\ldots,n_{l-2},q).\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. On voit en effet facilement que l'application de la première partie de l'algorithme donne

$$(-\lambda(m+1)-2l)T(n_{-1}+1,\ldots,n_{l-2},q).$$

La deuxième partie donne quant à elle

$$n_{-1}T(n_{-1}+1,\ldots,n_{l-2},q).$$

La troisième partie contribue à

$$T(n_{-1},\ldots,n_{l-2},q+1)+\sum_{j=0}^{l-2}n_jT(n_{-1},\ldots,n_j-1,n_{j+1}+1,\ldots,n_{l-2},q).$$

La quatrième partie rend quant à elle

$$n_{-1}T(n_{-1}-1,n_0+1,\ldots,n_{l-2},q).$$

□

On en déduit alors aisément le corollaire suivant :

PROPOSITION 35. *Si* $f \in C^\infty(P^1M, \Delta^\lambda(\mathbb{R}^m))_{GL(m,\mathbb{R})}$, $\nabla_s^{\omega^l}(p^*f)$ *est une combinaison linéaire de termes de la forme*

$$\tau^{n_{-1}} \vee p^*((\nabla_s^{l-2}r)^{n_{l-2}} \vee \ldots \vee r^{n_0} \vee \nabla_s^q f),$$

où r *désigne la partie symétrique du tenseur de Ricci divisée par* $1-m$. *Si l'on note* $T(n_{-1}, \ldots, n_{l-2}, q)$ *un tel terme,* $T(n_{-1}, \ldots, n_{l-2}, q)$ *donne lieu dans le développement de* $\nabla_s^{\omega^{l+1}}(p^*f)$ *à*

$$\begin{aligned}(-\lambda(m+1) - 2l + n_{-1})T(n_{-1}+1, \ldots, n_{l-2}, q) + T(n_{-1}, \ldots, n_{l-2}, q+1)\\ + \sum_{j=-1}^{l-2} n_j T(n_{-1}, \ldots, n_j - 1, n_{j+1}+1, \ldots, n_{l-2}, q).\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Notons tout d'abord que la partie symétrique de Γ se réduit à r par antisymétrie du tenseur trR. Il suffit alors de noter que si $\nabla^{\omega^l}(p^*f)(X, \ldots, X)$ est égal à une combinaison linéaire de termes de la forme

$$(\otimes^{n_{-1}}\tau \otimes p^*(\otimes^{n_{l-2}}\nabla^{l-2}\Gamma \otimes \ldots \otimes \otimes^{n_0}\Gamma \otimes \nabla^q f))(X, \ldots, X),$$

alors $\nabla_s^{\omega^l}(p^*f)$ est égal à la combinaison linéaire correspondante des termes de la forme

$$\tau^{n_{-1}} \vee p^*((\nabla_s^{l-2}r)^{n_{l-2}} \vee \ldots \vee r^{n_0} \vee \nabla_s^q f).$$

En effet, les deux derniers tenseurs sont alors égaux puisqu'ils sont tous les deux symétriques et qu'ils sont égaux lorsqu'ils sont évalués en X^l. □

Remarquons que l'action de l'algorithme sur le terme générique du développement de $\nabla_s^{\omega^l}(p^*f)$ peut être résumée. En effet, cette action donne tout d'abord

$$(-\lambda(m+1) - 2l + n_{-1})T(n_{-1}+1, \ldots, n_{l-2}, q).$$

Elle donne ensuite

$$n_{-1}T(n_{-1}-1, n_0+1, \ldots, n_{l-2}, q).$$

Enfin, elle fait agir la dérivation covariante ∇_s sur

$$(\nabla_s^{l-2}r)^{n_{l-2}} \vee \ldots \vee r^{n_0} \vee \nabla_s^q f.$$

Le résultat suivant nécessite un lemme :

LEMME 36. *Si* $S \in C^\infty(P^1M, \Delta^\delta\mathbb{R}^m \otimes S^k\mathbb{R}^m)_{GL(m,\mathbb{R})}$, *alors* $\nabla^{\omega^l}(p^*S)(X_1, \ldots, X_l)$ *est une combinaison linéaire de termes construits de la manière suivante. On évalue d'abord* $p^*(\nabla^q S)$ *sur certains* X_i *et on contracte le résultat un certain nombre de fois avec* τ. *On contracte ensuite le symbole obtenu avec des tenseurs de degré 1 obtenus en* *contractant des $p^*(\nabla^t\Gamma)$ avec $t+1$ X_i. On multiplie symétriquement le résultat par d'autres X_i. Enfin, on multiplie le tout par des nombres obtenus en évaluant τ sur des X_i et des $p^*(\nabla^t\Gamma)$ sur $t+2$ X_i.*

DÉMONSTRATION. On vérifie en effet aisément que l'action de l'algorithme stabilise la forme donnée dans l'énoncé. $\square$

PROPOSITION 37. *Si $S \in C^\infty(P^1M, \Delta^\delta\mathbb{R}^m \otimes S^k\mathbb{R}^m)_{GL(m,\mathbb{R})}$, alors $Div^{\omega^l}(p^*S)$ est une combinaison linéaire de termes de la forme*

$$\langle \tau^{n_{-1}} \vee p^*((\nabla_s^{k-2}r)^{n_{k-2}} \vee \ldots \vee r^{n_0}), p^*(Div^q S)\rangle.$$

Si l'on note $T(n_{-1},\ldots,n_{l-2},q)$ un tel terme, $T(n_{-1},\ldots,n_{l-2},q)$ donne lieu dans le développement de $Div^{\omega^{l+1}}(p^*S)$ à

$$(\gamma_{2(k-l)-1}(m+1)+n_{-1})T(n_{-1}+1,\ldots,n_{l-2},q)+T(n_{-1},\ldots,n_{l-2},q+1)$$
$$+\sum_{j=-1}^{l-2} n_j T(n_{-1},\ldots,n_j-1,n_{j+1}+1,\ldots,n_{l-2},q).$$

DÉMONSTRATION. Nous avons à calculer

$$(\nabla^{\omega^{l+1}}(p^*S)(e_{i_1},\ldots,e_{i_{l+1}}))(\epsilon^{i_1},\ldots,\epsilon^{i_{l+1}}).$$

Comme la première partie du développement de

$$\nabla^{\omega^{l+1}}(p^*S)(e_{i_1},\ldots,e_{i_{l+1}})$$

selon l'algorithme est

$$(\rho_*^{(l)}([e_{i_{l+1}},\tau(u)])\nabla^{\omega^l}(p^*S)(u))(e_{i_1},\ldots,e_{i_l}),$$

nous avons d'abord à calculer

$$[(\rho_*^{(l)}([e_{i_{l+1}},\tau(u)])\nabla^{\omega^l}(p^*S)(u))(e_{i_1},\ldots,e_{i_l})](\epsilon^{i_1},\ldots,\epsilon^{i_{l+1}}).$$

Cette dernière expression est égale à

$$[\rho_*([e_{i_{l+1}},\tau(u)])(\nabla^{\omega^l}(p^*S)(u)(e_{i_1},\ldots,e_{i_l}))](\epsilon^{i_1},\ldots,\epsilon^{i_{l+1}})$$
$$-\sum_{j=1}^{l}(\nabla^{\omega^l}(p^*S)(u)(e_{i_1},\ldots,[e_{i_{l+1}},\tau(u)]e_{i_j},\ldots,e_{i_l}))(\epsilon^{i_1},\ldots,\epsilon^{i_{l+1}}),$$

i.e. à

$$[\rho'_*([e_{i_{l+1}},\tau(u)])(\nabla^{\omega^l}(p^*S)(u)(e_{i_1},\ldots,e_{i_l})(\epsilon^{i_1},\ldots,\epsilon^{i_l}))](\epsilon^{i_{l+1}})$$
$$+\sum_{j=1}^{l}(\nabla^{\omega^l}(p^*S)(u)(e_{i_1},\ldots,e_{i_l}))(\epsilon^{i_1},\ldots,\epsilon^{i_j}[e_{i_{l+1}},\tau(u)],\ldots,\epsilon^{i_{l+1}})$$
$$-\sum_{j=1}^{l}(\nabla^{\omega^l}(p^*S)(u)(e_{i_1},\ldots,[e_{i_{l+1}},\tau(u)]e_{i_j},\ldots,e_{i_l}))(\epsilon^{i_1},\ldots,\epsilon^{i_{l+1}}),$$

si ρ' désigne l'action de $GL(m,\mathbb{R})$ sur les symboles de degré $k-l$. Les deuxième et troisième lignes de l'expression précédente donnent respectivement $2l$ et $-2l$ termes dans lesquels n_{-1} est augmenté d'une unité. Leurs contributions s'annihilent donc. On constate aisément que la première ligne donne quant à elle

$$\gamma_{2(k-l)-1}(m+1)T(n_{-1}+1,\ldots,n_{l-2},q).$$

Grâce au lemme, on voit que la deuxième partie de l'algorithme donne n_{-1} termes où n_{-1} devient $n_{-1}+1$. Le lemme permet aussi de montrer que la troisième partie de l'algorithme contribue à

$$T(n_{-1},\ldots,n_{l-2},q+1)+\sum_{j=0}^{l-2}n_jT(n_{-1},\ldots,n_j-1,n_{j+1}+1,\ldots,n_{l-2},q).$$

La quatrième partie rend quant à elle

$$n_{-1}T(n_{-1}-1,n_0+1,\ldots,n_{l-2},q).$$

□

Remarquons que l'action de l'algorithme sur le terme générique du développement de $Div^{\omega^l}(p^*S)$ peut être résumée. En effet, cette action donne tout d'abord

$$(\gamma_{2(k-l)-1}(m+1)+n_{-1})T(n_{-1}+1,\ldots,n_{l-2},q).$$

Elle donne ensuite

$$n_{-1}T(n_{-1}-1,n_0+1,\ldots,n_{l-2},q).$$

Enfin, elle fait agir la divergence Div sur

$$\langle(\nabla_s^{k-2}r)^{n_{k-2}}\vee\ldots\vee r^{n_0},Div^qS\rangle.$$

4. La formule explicite

Au vu des propositions précédentes, la quantification s'écrit comme une combinaison linéaire de termes de la forme

$$\langle\langle\tau^{n_{-1}}\vee p^*((\nabla_s^{k-2}r)^{n_{k-2}}\vee\ldots\vee r^{n_0}),p^*(Div^qS)\rangle,p^*(\nabla_s^lf)\rangle.$$

Dans cette expression, il suffit de se préoccuper des termes pour lesquels $n_{-1}=0$. En effet, supposons que l'expression

$$\sum_{j=0}^{k}\langle a_j,\tau^j\rangle \tag{29}$$

dans laquelle les fonctions a_j sont H-équivariantes soit H-équivariante. Notons tout d'abord que $L_{h^*}\tau=h$ pour tout $h\in\mathfrak{g}_1$ (voir [**6**] page 48).

Le fait que l'application de L_{h^*} à (29) donne 0 pour tout $h \in \mathfrak{g}_1$ nous dit alors que

$$\sum_{j=1}^{k} \langle ja_j, \tau^{j-1} \rangle$$

est nul, donc H-équivariant. En itérant le processus, on trouve pour finir que $a_k = 0$. On en déduit alors de proche en proche que les fonctions a_j sont nulles pour j variant de 1 à k.

Les résultats suivants donnent les développements explicites de $\nabla_s^{\omega^l}(p^* f)$ et de $Div^{\omega^l}(p^* S)$:

Proposition 38. *Le terme de degré t en τ dans le développement de $\nabla_s^{\omega^l}(p^* f)$ est égal à*

$$\begin{pmatrix} l \\ t \end{pmatrix} \prod_{j=1}^{t} (-\lambda(m+1) - l + j) p^*(\pi_{l-t}(\sum_{j=0}^{l-t} (\nabla_s + T_1)^j) f),$$

si π_{l-t} désigne la projection sur les opérateurs de degré $l-t$ (le degré de ∇_s étant 1, le degré de T_1 étant 2) et si la restriction de T_1 aux tenseurs j fois covariants à valeurs dans les
λ-densités est égale à

$$(-\lambda(m+1) - j)(j+1)$$

fois le produit symétrique par r. Par convention, on posera que le produit $\prod_{j=1}^{t}(-\lambda(m+1) - l + j)$ est égal à 1 si $t = 0$.

Démonstration. Pour simplifier les notations, désignons par β le nombre $-\lambda(m+1)$. La formule est évidemment vraie si l et t sont égaux à 0. Supposons la formule vérifiée pour tout t jusqu'à l'ordre $l-1$. Si $l - t \geq 2$ et si $t \geq 2$, alors le terme de degré t en τ à l'ordre l est égal en utilisant la procédure de récurrence à :

$$(t+1) \begin{pmatrix} l-1 \\ t+1 \end{pmatrix} \prod_{j=1}^{t+1} (\beta - l + 1 + j) p^*(r \vee \pi_{l-t-2}(\sum_{j=0}^{l-t-2} (\nabla_s + T_1)^j) f)$$

$$+ \begin{pmatrix} l-1 \\ t \end{pmatrix} \prod_{j=1}^{t} (\beta - l + 1 + j) p^*(\nabla_s(\pi_{l-t-1}(\sum_{j=0}^{l-t-1} (\nabla_s + T_1)^j)) f)$$

$$+ \begin{pmatrix} l-1 \\ t-1 \end{pmatrix} (\prod_{j=1}^{t-1} (\beta - l + 1 + j))(\beta - 2l + t + 1)$$

$$p^*(\pi_{l-t}(\sum_{j=0}^{l-t} (\nabla_s + T_1)^j) f).$$

Remarquons que

$$(\beta-l+t+2)(l-t-1)r\vee\pi_{l-t-2}(\sum_{j=0}^{l-t-2}(\nabla_s+T_1)^j)$$

est égal à

$$\pi_{l-t}(T_1(\sum_{j=0}^{l-t-2}(\nabla_s+T_1)^j)).$$

Dès lors, la somme des trois termes ci-dessus est égale à un multiple de

$$p^*(\pi_{l-t}(\sum_{j=0}^{l-t}(\nabla_s+T_1)^j)f),$$

ce multiple étant égal à

$$\prod_{j=2}^{t}(\beta-l+j)(\begin{pmatrix} l-1 \\ t \end{pmatrix}(\beta-l+t+1)+\begin{pmatrix} l-1 \\ t-1 \end{pmatrix}(\beta-2l+t+1)),$$

i.e. à

$$\prod_{j=2}^{t}(\beta-l+j)$$

$$((\beta-l+1)(\begin{pmatrix} l-1 \\ t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} l-1 \\ t-1 \end{pmatrix})+t\begin{pmatrix} l-1 \\ t \end{pmatrix}+(t-l)\begin{pmatrix} l-1 \\ t-1 \end{pmatrix}).$$

On conclut en utilisant la formule du triangle de Pascal.

Les cas $l-t\geq 2$ & $t<2$, $l-t<2$ & $t\geq 2$, $l-t<2$ & $t<2$ se traitent de manière analogue. □

PROPOSITION 39. *Le terme de degré t en τ dans le développement de $Div^{\omega^l}(p^*S)$ est égal à*

$$\begin{pmatrix} l \\ t \end{pmatrix}\prod_{j=1}^{t}(\gamma_{2k-1}(m+1)-l+j)p^*(\pi_{t-l}(\sum_{j=0}^{l-t}(Div+T_2)^j)S),$$

si π_{t-l} désigne la projection sur les opérateurs de degré $t-l$ (le degré de Div étant -1, le degré de T_2 étant -2) et si la restriction de T_2 aux symboles de degré j est égale à

$$((m+1)\gamma_{2k-1}-k+j)(k-j+1)$$

fois la contraction par r. Par convention, on posera que le produit $\prod_{j=1}^{t}(\gamma_{2k-1}(m+1)-l+j)$ est égal à 1 si $t=0$.

DÉMONSTRATION. La preuve est entièrement similaire à celle de la proposition précédente. □

On est désormais en mesure d'écrire la formule explicite donnant la quantification naturelle projectivement invariante du chapitre 3 :

THÉORÈME 40. *La quantification Q_M du théorème 15 est donnée par la formule suivante :*

$$Q_M(\nabla, S)(f) = \sum_{l=0}^{k} C_{k,l}\langle \pi_l(\sum_{j=0}^{l}(Div + T_2)^j)S, \pi_{k-l}(\sum_{j=0}^{k-l}(\nabla_s + T_1)^j)f\rangle.$$

Remarque : On peut facilement montrer grâce aux développements de $Div^{\omega^l}(p^*S)$ et de $\nabla_s^{\omega^l}(p^*f)$ que la formule du théorème 15 est H-équivariante. En effet, si on impose le fait que la partie de degré 1 en τ soit égale à 0 dans cette fonction, on obtient sur les coefficients $C_{k,l}$ la relation de récurrence 10 du théorème 15.

Si l'on appelle Q la fonction sur P donnant la quantification, il suffit alors de montrer que $L_{h^*}Q(u_0) = 0$ pour tous $h \in \mathfrak{g}_1, u_0 \in P$. Si l'on se place en un point $u_0 \in P$, on considère une connexion Υ sur P^1M donnant lieu à une section $\sigma_\Upsilon : P^1M \to P$ passant par u_0. On a ainsi $\tau(u_0) = 0$.

La somme des termes de degré strictement supérieur à 1 en τ dans Q s'écrit

$$\sum_{j=2}^{k}\langle a_j, \tau^j\rangle,$$

où les fonctions a_j sont H-équivariantes. Si l'on applique L_{h^*} à cette fonction et qu'on évalue le résultat en u_0, on obtient alors

$$\sum_{j=2}^{k}\langle ja_j(u_0), \tau^{j-1}(u_0) \vee h\rangle = 0.$$

CHAPITRE 6

Non-unicité des quantifications naturelles projectivement invariantes

Il est connu que dans le cas des opérateurs différentiels agissant entre densités, les quantifications $sl(m+1,\mathbb{R})$-équivariantes sur $\mathbb{R}^m$ sont uniques en dehors des situations critiques. Cette unicité n'implique pas l'unicité des quantifications naturelles projectivement invariantes dont il est question au chapitre 3. Le but de ce chapitre est de montrer que ces quantifications ne sont pas uniques, même en dehors des situations critiques.

On commence par faire la remarque suivante :

PROPOSITION 41. *Une quantification naturelle projectivement invariante Q_M n'est pas unique si et seulement s'il existe une application naturelle projectivement invariante non nulle agissant entre $\mathcal{S}^k_\delta(M)$ et $\mathcal{S}^{k-l}_\delta(M)$ pour un certain k et un certain $l > 0$.*

DÉMONSTRATION. Les quantifications étant des bijections, la non-unicité d'une quantification naturelle projectivement invariante est équivalente à l'existence de deux quantifications naturelles projectivement invariantes Q et Q' et d'une application naturelle projectivement invariante T de $\mathcal{S}_\delta(M)$ dans $\mathcal{S}_\delta(M)$ différente de l'identité telle que $Q' = Q \circ T$. Il doit exister au moins un k tel que la restriction de T à $\mathcal{S}^k_\delta(M)$ soit différente de l'identité. Comme une quantification doit préserver le symbole principal, la projection de cette restriction sur $\mathcal{S}^k_\delta(M)$ doit être égale à l'identité. Les projections de la restriction sur $\mathcal{S}^{k+l}_\delta(M)$, avec $l > 0$, doivent être nulles et on peut alors conclure. $\square$

Nous allons baser la construction des applications naturelles projectivement invariantes entre espaces de symboles sur un certain tenseur que nous allons à présent introduire.

1. Le tenseur de Weyl

Si ω désigne la connexion de Cartan normale associée à une structure projective P, la fonction κ induite par sa courbure possède une importante propriété d'invariance (voir **[6]** page 44) : si $h \in H$, $u \in P$

et $X, Y \in \mathfrak{g}_{-1}$, la fonction $\kappa \in C^\infty(P, \mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g})$ vérifie :

$$\kappa(X,Y)(uh) = Ad(h^{-1})\kappa(Ad(h)X, Ad(h)Y)(u). \tag{30}$$

De fait, il vient successivement, en utilisant l'Ad-invariance de ω :

$$\begin{aligned}
\kappa(X,Y)(uh) &= K(\omega^{-1}(X), \omega^{-1}(Y))(uh) \\
&= -\omega([\omega^{-1}(X), \omega^{-1}(Y)](uh)) \\
&= -Ad(h^{-1}) \circ \omega(R_{h^{-1}*}([\omega^{-1}(X), \omega^{-1}(Y)](uh))) \\
&= -Ad(h^{-1}) \circ \omega([\omega^{-1}(Ad(h)X), \omega^{-1}(Ad(h)Y)](u)) \\
&= Ad(h^{-1})\kappa(Ad(h)X, Ad(h)Y)(u).
\end{aligned}$$

Si l'on considère les composantes selon $\mathfrak{g}_0$ des deux membres de (30), il vient :

$$\kappa_0(X,Y)(uh) = \rho^{\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^{m*}}(h^{-1})\kappa_0(\rho^{\mathbb{R}^m}(h)X, \rho^{\mathbb{R}^m}(h)Y)(u),$$

où $\rho^{\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^{m*}}$ et $\rho^{\mathbb{R}^m}$ désignent respectivement les actions de H sur $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^{m*}$ et $\mathbb{R}^m$. De fait, les composantes selon $\mathfrak{g}_{-1}$ de $Ad(h)X$ et $Ad(h)Y$ coïncident respectivement avec $\rho^{\mathbb{R}^m}(h)X$ et $\rho^{\mathbb{R}^m}(h)Y$. De plus, le fait que $\kappa_{-1} = 0$ fait en sorte que la composante selon $\mathfrak{g}_0$ de

$$Ad(h^{-1})\kappa(\rho^{\mathbb{R}^m}(h)X, \rho^{\mathbb{R}^m}(h)Y)(u)$$

est égale à

$$\rho^{\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^{m*}}(h^{-1})\kappa_0(\rho^{\mathbb{R}^m}(h)X, \rho^{\mathbb{R}^m}(h)Y)(u).$$

La fonction κ_0 est donc H-équivariante. Elle représente alors un tenseur de type $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sur M que l'on appelle le *tenseur de Weyl.*

2. Construction d'applications naturelles projectivement invariantes

Si j est un naturel supérieur ou égal à 2, on définit une fonction H-équivariante $W \in C^\infty(P, S^{2j}\mathbb{R}^{m*})$ de la manière suivante :

$$W(u)(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{2j}}) := \sum_{\nu} \sum_{r_1, \ldots, r_j} \kappa_0(u)^{r_1}_{i_{\nu(1)} i_{\nu(2)} r_{\sigma(1)}} \ldots \kappa_0(u)^{r_j}_{i_{\nu(2j-1)} i_{\nu(2j)} r_{\sigma(j)}},$$

où σ est une permutation de $\{1, \ldots, j\}$. Vu la normalité de ω, σ ne doit laisser aucun élément inchangé.

Le lemme suivant permet de calculer l'écart à l'équivariance des différentielles invariantes itérées de la fonction W :

LEMME 42. *On a la formule suivante :*

$$L_{h^*}\nabla_s^{\omega^k}W = -k(k+4j-1)h \vee (\nabla_s^{\omega^{k-1}}W),$$

pour tout $h \in \mathfrak{g}_1$.

DÉMONSTRATION. La preuve est similaire à celle de la proposition 14 du chapitre 3. Si $k = 0$, la formule est vraie. On procède alors par induction. Si $X \in \mathbb{R}^m$,

$$(L_{h^*}\nabla_s^{\omega^k}W)(X, \dots, X)$$

est égal à

$$L_{\omega^{-1}(X)}L_{h^*}(\nabla_s^{\omega^{k-1}}W)(X, \dots, X) + (L_{[h,X]^*}(\nabla_s^{\omega^{k-1}}W))(X, \dots, X).$$

Par hypothèse de récurrence, le premier terme est égal à

$$-(k-1)(k+4j-2)(h \vee (\nabla_s^{\omega^{k-1}}W))(X, \dots, X).$$

En ce qui concerne le deuxième terme, on obtient

$$(\rho_*((h \otimes X) + \langle h, X\rangle Id)(\nabla_s^{\omega^{k-1}}W))(X, \dots, X).$$

Le résultat provient alors de la définition de ρ_*. □

On est à présent en mesure de construire des applications naturelles projectivement invariantes entre espaces de symboles :

THÉORÈME 43. *Si* $S \in \mathcal{S}_\delta^k(M)$ *et si* $l \geq 2j$ *, tous les multiples de l'application*

$$S \mapsto p^{*^{-1}}(\sum_{r=0}^{l-2j} C_{k,l,r}\langle Div^{\omega^r}p^*S, \nabla_s^{\omega^{l-r-2j}}W\rangle)$$

sont naturels et projectivement invariants si

$$C_{k,l,r} = \frac{(l+2j-1)!}{(m+1)^r(l+2j-r-1)!\gamma_{2k-1}\cdots\gamma_{2k-r}}\begin{pmatrix} l-2j \\ r \end{pmatrix}, \forall r \geq 1,\ C_{k,l,0} = 1.$$

DÉMONSTRATION. La preuve est entièrement similaire à celle du théorème 15 du chapitre 3. Il suffit de vérifier que la fonction

$$\sum_{l=0}^{l-2j} C_{k,l,r}\langle Div^{\omega^r}p^*S, \nabla_s^{\omega^{l-r-2j}}W\rangle$$

est $\mathfrak{g}_1$-équivariante. Cela a lieu grâce au lemme précédent, à la proposition 13 du chapitre 3 et au fait que la relation suivante est vérifiée :

$$C_{k,l,r}r(m+2k-r-(m+1)\delta) = C_{k,l,r-1}(l-r-2j+1)(l-r+2j).$$

□

Remarques :

- Les applications que l'on vient de donner sont des exemples d'applications naturelles projectivement invariantes entre espaces de symboles. Une description complète de l'ensemble de ces applications semble assez délicate.
- On peut montrer "à la main" que la quantification naturelle projectivement invariante est unique jusqu'au troisième ordre dans les situations non-critiques. Il suffit de considérer toutes les applications naturelles entre $\mathcal{S}^k(M)$ and $\mathcal{S}^{k-l}(M)$ (with $1 \leq l \leq 3$) et de montrer qu'il n'existe pas de combinaison linéaire de ces applications qui soit projectivement invariante dans les situations non-critiques.
- En utilisant les méthodes décrites dans le chapitre 5, on pourrait dériver des formules explicites pour les applications du théorème 43. Aux quatrième et cinquième ordres, si on désigne par T la fonction équivariante sur P^1M correspondant à W avec $j = 2$, les applications du théorème 43 sont égales respectivement à

  $$\langle S, T\rangle$$

  et à

  $$\langle S, \nabla_s T\rangle + \frac{8}{(m+1)\gamma_{2k-1}}\langle DivS, T\rangle.$$

Bibliographie

[1] F. Boniver, S. Hansoul, P. Mathonet, N. Poncin. Equivariant symbol calculus for differential operators acting on forms. Lett. Math. Phys., 62(3) :219-232, 2002.

[2] F. Boniver et P. Mathonet. Ifft-equivariant quantizations. A paraître dans J. Geom. Phys., math.RT/0206213, 2005.

[3] M. Bordemann. Sur l'existence d'une prescription d'ordre naturelle projectivement invariante. Soumis pour publication, math.DG/0208171.

[4] Sofiane Bouarroudj. Projectively equivariant quantization map. Lett. Math. Phys., 51(4) :265-274, 2000.

[5] Sofiane Bouarroudj. Formula for the projectively invariant quantization on degree three. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 333(4) :343-346, 2001.

[6] A. Čap, J. Slovák et V. Souček. Invariant operators on manifolds with almost Hermitian symmetric structures. I. Invariant differentiation. Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.), 66(1) :33-69, 1997.

[7] A. Čap, J. Slovák et V. Souček. Invariant operators on manifolds with almost Hermitian symmetric structures. II. Normal Cartan connections. Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.), 66(2) :203-220, 1997.

[8] C. Duval, P. Lecomte et V. Ovsienko. Conformally equivariant quantization : existence and uniqueness. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 49(6) :1999-2029, 1999.

[9] C. Duval et V. Ovsienko. Projectively equivariant quantization and symbol calculus : noncommutative hypergeometric functions. Lett. Math. Phys., 57(1) :61-67, 2001.

[10] Sarah Hansoul. Existence of natural and projectively equivariant quantizations. Soumis pour publication, math.DG/0601518.

[11] Sarah Hansoul. Projectively equivariant quantization for differential operators acting on forms. Lett. Math. Phys., 70(2) :141-153, 2004.

[12] James Hebda et Craig Roberts. Examples of Thomas-Whitehead projective connections. Differential Geom. Appl., 8(1) :87-104, 1998.

[13] James E. Humphreys. Introduction to Lie algebras and representation theory, volume 9 de Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1978. Seconde édition, révisée.

[14] Shoshichi Kobayashi. Transformation groups in differential geometry. Springer-Verlag, New York, 1972. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 70.

[15] Shoshichi Kobayashi, Katsumi Nomizu. Foundations of differential geometry. Interscience tracts in pure and applied mathematics, number 15, volume 1.

[16] P. B. A. Lecomte et V. Yu. Ovsienko. Projectively equivariant symbol calculus. Lett. Math. Phys., 49(3) :173-196, 1999.

[17] P. B. A. Lecomte. Classification projective des espaces d'opérateurs différentiels agissant sur les densités. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 328(4) :287-290, 1999.

[18] P. B. A. Lecomte. Towards projectively equivariant quantization. Progr. Theoret. Phys. Suppl., (144) :125-132, 2001. Noncommutative geometry and string theory (Yokohama, 2001).

[19] P. Mathonet et F. Radoux. Cartan connections and natural and projectively equivariant quantizations. Soumis pour publication, math.DG/0606556.

[20] Pierre Mathonet et Fabian Radoux. Natural and projectively equivariant quantizations by means of Cartan connections. Lett. Math. Phys., 72(3) :183-196, 2005.

[21] F. Radoux. Explicit formula for the natural and projectively equivariant quantization. Soumis pour publication, math.DG/0606522.

[22] F. Radoux. Non-uniqueness of the natural and projectively equivariant quantization. Soumis pour publication, math.DG/0606549.

[23] Craig Roberts. The projective connections of T. Y. Thomas and J. H. C. Whitehead applied to invariant connections. Differential Geom. Appl., 5(3) :237-255, 1995.

[24] Craig Roberts. Relating Thomas-Whitehead projective connections by a gauge transformation. Math. Phys. Anal. Geom., 7(1) :1-8, 2004.

[25] Tracey Yerkes Thomas. A projective theory of affinely connected manifolds. Math. Z., 25 :723-733, 1926.

[26] H. Weyl. Zur infinitesimalgeometrie ; einordnung der projektiven und der konformen auffassung. Göttingen Nachr., 99-122, 1921.

[27] J. H. C. Whitehead. The representation of projective spaces. Ann. of Math. (2), 32(2) :327-360, 1931.

[28] N. M. J. Woodhouse. Geometric quantization. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, deuxième édition, 1992. Oxford Science Publications.