



Université de Liège

Faculté des sciences

Département d'astrophysique, de géophysique et d'océanographie

Syllabus pour le cours de

Relativité générale II

par

Yves De Rop

2008

Table des matières

1	Propriétés physiques du champ gravitationnel	1
1.1	Introduction	1
1.2	L'énergie du champ newtonien	2
1.3	Le pseudo-tenseur d'énergie-impulsion	2
1.3.1	Introduction	2
1.3.2	Raisonnement dans un cas particulier	3
1.3.3	Raisonnement dans le cas général	4
1.4	Energie et quantité de mouvement totales	6
1.5	Application à la métrique de Schwarzschild	8
1.6	Energie totale de la matière et d'un champ stationnaire	8
1.7	Cas particuliers	10
1.8	Le flux de quantité de mouvement	11
1.9	Le moment cinétique du champ gravitationnel	12
1.10	Métriques stationnaires au deuxième ordre	13
1.10.1	Tenseur de Ricci le plus général au deuxième ordre	13
1.10.2	Méthode de calcul d'un champ stationnaire à grande distance	14
1.10.3	Solution générale pour les termes du deuxième ordre	15
1.10.4	Expression de la métrique stationnaire la plus générale	17
1.11	Moment cinétique d'un système stationnaire	18
1.11.1	Signification des composantes non diagonales du tenseur métrique	18
1.11.2	La métrique de Kerr	19
1.12	Le flux de moment cinétique	21
2	La génération des ondes gravitationnelles	23
2.1	Le développement en série des potentiels multipolaires	23
2.2	Approche heuristique	26
2.3	La nature quadripolaire des ondes gravitationnelles	31
2.4	Le point de vue de la relativité générale	34
2.5	Approximations pour le calcul de l'intégrale retardée	36
2.6	La solution quadripolaire	42
2.7	Rayonnement d'énergie	43
2.8	Rayonnement de moment cinétique	44
2.9	La réaction radiative : interprétation newtonienne	45
2.10	La jauge TT	47
2.11	Les modes de polarisation de l'onde gravitationnelle	50
2.12	Energie émise selon chaque mode de polarisation	52
2.13	Barre homogène en rotation	53

2.14	Deux masses aux extrémités d'un ressort	55
2.15	Système de deux corps en interaction gravitationnelle	56
2.15.1	Cas général	56
2.15.2	Le cas particulier des orbites circulaires	59
A	Expression du pseudo-tenseur d'énergie-impulsion	63
B	Propriétés de l'intégrale retardée	67
B.1	Vérification de la solution	67
B.2	Vérification de la condition de jauge	69

Chapitre 1

Propriétés physiques du champ gravitationnel

1.1 Introduction

La théorie de Newton généralise habilement la notion d'énergie cinétique pour rendre compte de l'interaction de la matière avec le champ de gravitation : c'est le concept d'*énergie potentielle*. Dans le cas de deux particules de masses respectives M_1 et M_2 séparées par une distance d , elle vaut

$$E = -G \frac{M_1 M_2}{d}. \quad (1.1)$$

La loi de conservation de l'énergie totale, cinétique plus potentielle, permet de rendre compte de certains phénomènes plus ou moins compliqués : par exemple, comment évolue la vitesse relative des deux particules en fonction de leur distance.

Dans les présentations modernes, on remplace le concept d'énergie potentielle des particules par celui d'*énergie du champ* \vec{g} , définie comme suit :

$$E = \frac{-1}{8\pi G} \int_{V_\infty} |\vec{g}(x, y, z)|^2 dx dy dz. \quad (1.2)$$

Pour deux particules, \vec{g} est la somme des champs \vec{g}_1 et \vec{g}_2 générés respectivement par chacun des deux corps, et le calcul de (1.2) restitue le résultat (1.1).¹

Cependant, s'il possède de l'énergie, le champ newtonien ne peut pas en transférer d'un endroit à l'autre. Ceci résulte du caractère instantané de la transmission de la gravitation. Ainsi, le champ, dont l'énergie ne constitue qu'une traduction mathématique de l'énergie potentielle des particules, reste cantonné dans un rôle d'intermédiaire *passif*, utile pour le calcul des forces gravitationnelles mais sans dynamique véritable.

Dans la théorie classique des champs, dont relève la relativité générale, ceux-ci sont dotés de propriétés physiques au même titre que les particules. Dans ce chapitre, nous allons envisager la notion d'*énergie* du champ gravitationnel relativiste. Comme l'énergie est liée à la *quantité de mouvement*, nous aborderons naturellement ces deux concepts ensemble. Ensuite sera traitée la question du *moment cinétique*.

Mais tout d'abord, démontrons la relation (1.2).

1. A strictement parler, il faut retirer de l'intégrale (1.2) l'énergie d'auto-interaction des particules ponctuelles (infinie mais constante au cours d'un mouvement).

1.2 L'énergie du champ newtonien

Théorème 1.1 *On peut réinterpréter l'énergie potentielle gravitationnelle comme énergie intrinsèque du champ : si μ désigne la masse volumique, Φ le potentiel et $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$ l'accélération gravifique, on a*

$$\frac{1}{2} \int_V \mu(P) \Phi(P) dx dy dz = \frac{-1}{8\pi G} \int_{V_\infty} |\vec{g}(P)|^2 dx dy dz.$$

Commentaire. L'intégrale de gauche se rapporte uniquement aux points P où se trouve la matière tandis que celle de droite se rapporte à tout l'espace. Ainsi, seule l'énergie *totale* du champ gravitationnel newtonien (l'intégrale) est bien définie : il serait artificiel de chercher à la localiser en attribuant un sens physique à l'intégrand. On retrouve cette situation en électrostatique.

Démonstration. Tenant compte de

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g}(P) = -4\pi G \mu(P),$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V \mu(P) \Phi(P) dx dy dz &= \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \mu(P) \Phi(P) dx dy dz \\ &= \frac{-1}{8\pi G} \int_{V_\infty} \Phi(P) \vec{\nabla} \cdot \vec{g}(P) dx dy dz. \end{aligned}$$

L'identité

$$\begin{aligned} \Phi(P) \vec{\nabla} \cdot \vec{g}(P) &= \vec{\nabla} \cdot [\Phi(P) \vec{g}(P)] - \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{g}(P) \\ &= \vec{\nabla} \cdot [\Phi(P) \vec{g}(P)] + |\vec{g}(P)|^2 \end{aligned}$$

permet d'écrire ce résultat sous la forme

$$\frac{1}{2} \int_V \mu(P) \Phi(P) dx dy dz = \frac{-1}{8\pi G} \int_{V_\infty} |\vec{g}(P)|^2 dx dy dz - \frac{1}{8\pi G} \int_{V_\infty} \vec{\nabla} \cdot [\Phi(P) \vec{g}(P)] dx dy dz.$$

Le théorème de Gauss permet de transformer la deuxième intégrale du membre de droite en une intégrale de surface qui s'annule à l'infini, étant donné que le potentiel $\Phi(P)$ varie comme l'inverse de la distance et le champ $\vec{g}(P)$ comme l'inverse du carré de la distance. Le théorème est démontré. □

1.3 Le pseudo-tenseur d'énergie-impulsion

1.3.1 Introduction

En relativité générale, la loi de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement s'écrit sous la forme

$$(T^{\mu\nu})_{;\nu} = 0. \tag{1.3}$$

La dérivée covariante rend compte de l'existence d'un champ de gravitation dont les propriétés sont exprimées au travers de l'utilisation d'un espace-temps courbe. Mais cette profonde originalité de la théorie, qui consiste à fondre la gravitation dans la structure de l'espace-temps, ne permet pas, au premier abord, d'explicitier les quantités conservées, comme en électromagnétisme où la contribution de la matière se distingue alors de celle du champ. Au demeurant, le principe d'équivalence ruine tout espoir de décrire le champ gravifique seul au moyen de quantités tensorielles.

En 1947, les physiciens soviétiques L. Landau et E. Lifchitz ont obtenu une formulation des équations (1.3) où le point-virgule est remplacé par une virgule, comme dans l'espace-temps euclidien, et où apparaît, à côté de $T^{\mu\nu}$, une quantité nouvelle non tensorielle, le *pseudo-tenseur d'énergie-impulsion du champ gravitationnel* $t^{\mu\nu}$. En utilisant le théorème de Gauss, il est alors possible d'écrire explicitement des quantités conservées. Cette approche mutile en quelque sorte l'idéal de covariance générale. Cependant, elle permet d'écrire les équations d'Einstein sous une forme plus conforme aux habitudes de pensée héritées de l'électromagnétisme, et ouvre notamment la piste à la théorie des ondes gravitationnelles.

1.3.2 Raisonnement dans un cas particulier

Dans un premier temps, nous allons utiliser un système de coordonnées où toutes les dérivées premières du tenseur métrique s'annulent en un point donné de l'espace-temps. (Il n'est pas nécessaire que le tenseur métrique soit réduit à la forme canonique de Minkowski.) D'après les équations d'Einstein, on a

$$T^{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G} (R^{\mu\nu} - \frac{R}{2} g^{\mu\nu})$$

où

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu} &= g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} R_{\alpha\beta} \\ R &= g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= g^{\rho\sigma} R_{\rho\alpha\sigma\beta} \\ &= \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (g_{\rho\beta,\alpha\sigma} + g_{\alpha\sigma,\rho\beta} - g_{\rho\sigma,\alpha\beta} - g_{\alpha\beta,\rho\sigma}). \end{aligned}$$

Donc

$$T^{\mu\nu} = \frac{c^4}{16\pi G} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu}) (g_{\rho\beta,\alpha\sigma} + g_{\alpha\sigma,\rho\beta} - g_{\rho\sigma,\alpha\beta} - g_{\alpha\beta,\rho\sigma}).$$

Or,

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} g_{\alpha\sigma,\rho\beta} &= g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} g_{\rho\beta,\alpha\sigma} \\ g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} g_{\alpha\beta,\rho\sigma} &= g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} g_{\rho\sigma,\alpha\beta} \end{aligned}$$

donc

$$T^{\mu\nu} = \frac{c^4}{16\pi G} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\sigma} (g_{\rho\beta,\alpha\sigma} + g_{\alpha\sigma,\rho\beta} - g_{\rho\sigma,\alpha\beta} - g_{\alpha\beta,\rho\sigma}) - \frac{c^4}{16\pi G} g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu} (g_{\rho\beta,\alpha\sigma} - g_{\rho\sigma,\alpha\beta}).$$

La relation

$$g_{\rho\beta,\alpha} = -g_{\rho\gamma} g_{\beta\delta} g^{\gamma\delta}_{,\alpha}$$

valable dans tout système de coordonnées, implique

$$g_{\rho\beta,\alpha\sigma} = -g_{\rho\gamma} g_{\beta\delta} g^{\gamma\delta}_{,\alpha\sigma}$$

valable dans le système de coordonnées adopté ici. En l'utilisant dans chaque terme de $T^{\mu\nu}$, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} &= -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\sigma} g_{\rho\gamma} g_{\beta\delta} g^{\gamma\delta}_{,\alpha\sigma} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\sigma} g_{\alpha\gamma} g_{\sigma\delta} g^{\gamma\delta}_{,\rho\beta} \\ &\quad + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\sigma} g_{\rho\gamma} g_{\sigma\delta} g^{\gamma\delta}_{,\alpha\beta} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\sigma} g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} g^{\gamma\delta}_{,\rho\sigma} \\ &\quad + g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu} g_{\rho\gamma} g_{\beta\delta} g^{\gamma\delta}_{,\alpha\sigma} - g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu} g_{\rho\gamma} g_{\sigma\delta} g^{\gamma\delta}_{,\alpha\beta} \\ &= \underline{-g^{\mu\alpha} g^{\nu\sigma}_{,\alpha\sigma}} \underline{-g^{\nu\beta} g^{\mu\rho}_{,\beta\rho}} \\ &\quad + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma}_{,\alpha\beta} + \underbrace{g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu}_{,\rho\sigma}} \\ &\quad + \underbrace{g^{\mu\nu} g^{\alpha\sigma}_{,\alpha\sigma}} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} g_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma}_{,\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Or, dans tout système on a

$$\begin{aligned} g_{,\alpha} &= g g_{\rho\sigma,\alpha} g^{\rho\sigma} \\ &= -g g^{\rho\sigma}_{,\alpha} g_{\rho\sigma}. \end{aligned}$$

Donc, dans notre système de coordonnées particulier, on peut écrire

$$g_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma}_{,\alpha\beta} = -\frac{g_{,\alpha\beta}}{g}.$$

Ainsi (les termes soulignés se correspondent),

$$\begin{aligned} \frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} &= \underbrace{g^{\mu\nu}_{,\alpha\beta} g^{\alpha\beta}} + \underbrace{g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta}} \underline{-g^{\mu\alpha}_{,\alpha\beta} g^{\nu\beta}} \underline{-g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}_{,\alpha\beta}} \\ &\quad + \frac{g_{,\alpha\beta}}{g} (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) \\ &= (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta})_{,\alpha\beta} + \frac{g_{,\alpha\beta}}{g} (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}). \end{aligned}$$

En conclusion,

$$(-g) T^{\mu\nu} = \frac{c^4}{16\pi G} \left[(-g) (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) \right]_{,\alpha\beta}. \quad (1.4)$$

1.3.3 Raisonnement dans le cas général

Posons

$$\lambda^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{c^4}{16\pi G} (-g) (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) \quad (1.5)$$

et

$$h^{\mu\nu\alpha} = \frac{\partial \lambda^{\mu\nu\alpha\beta}}{\partial x^\beta}. \quad (1.6)$$

Ces deux quantités sont antisymétriques sur les indices ν et α . La relation (1.4) s'écrit

$$(-g) T^{\mu\nu} = h^{\mu\nu\alpha}{}_{,\alpha}.$$

Elle n'est valable que si les dérivées premières du tenseur métrique sont nulles au point considéré. Dans un système de coordonnées quelconques, on pose

$$(-g) (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = h^{\mu\nu\alpha}{}_{,\alpha}. \quad (1.7)$$

Ceci définit les quantités $t^{\mu\nu}$, dont on peut déjà dire qu'elles sont symétriques sur leurs deux indices μ et ν , et qu'elles doivent s'annuler dans un système de coordonnées où $g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} = 0$. On trouve leur expression en écrivant

$$\begin{aligned} t^{\mu\nu} &= -\frac{1}{g} h^{\mu\nu\alpha}{}_{,\alpha} - T^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{g} \frac{c^4}{16\pi G} \left[(-g) (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) \right]_{,\alpha\beta} - T^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$= \frac{c^4}{16\pi G} \left\{ \frac{1}{g} \left[g (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) \right]_{,\alpha\beta} - 2 R^{\mu\nu} + R g^{\mu\nu} \right\}. \quad (1.9)$$

Le calcul est effectué en détail dans l'annexe A. On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{16\pi G}{c^4} t^{\mu\nu} &= \left(2 \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\rho}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\rho}^{\sigma} \Gamma_{\beta\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\rho}^{\rho} \Gamma_{\beta\sigma}^{\sigma} \right) (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) \\ &\quad + g^{\mu\alpha} g^{\rho\sigma} \left(\Gamma_{\alpha\xi}^{\xi} \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu} + \Gamma_{\alpha\xi}^{\nu} \Gamma_{\rho\sigma}^{\xi} - \Gamma_{\alpha\rho}^{\xi} \Gamma_{\sigma\xi}^{\nu} - \Gamma_{\alpha\rho}^{\nu} \Gamma_{\sigma\xi}^{\xi} \right) \\ &\quad + g^{\nu\alpha} g^{\rho\sigma} \left(\Gamma_{\alpha\xi}^{\xi} \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\xi}^{\mu} \Gamma_{\rho\sigma}^{\xi} - \Gamma_{\alpha\rho}^{\xi} \Gamma_{\sigma\xi}^{\mu} - \Gamma_{\alpha\rho}^{\mu} \Gamma_{\sigma\xi}^{\xi} \right) \\ &\quad + g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \left(\Gamma_{\alpha\rho}^{\mu} \Gamma_{\beta\sigma}^{\nu} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu} \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Les symboles de Christoffel sont tensoriels pour les transformations linéaires de coordonnées. Aussi les $t^{\mu\nu}$ héritent-ils de cette propriété : on dit qu'ils constituent les composantes d'un *pseudo-tenseur*.

Vu l'antisymétrie des $h^{\mu\nu\alpha}$ sur les deux derniers indices, la définition (1.7) implique

$$\boxed{[(-g) (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})]_{,\nu} = 0.} \quad (1.11)$$

Cette équation doit être conçue comme une nouvelle forme de la loi de conservation (1.3). L'application du théorème de Gauss à l'équation (1.11) donne la relation

$$\oint (-g) (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) n_{\nu} dV = 0, \quad (1.12)$$

où l'on intègre sur une hypersurface fermée de normale unitaire n_{ν} . Il y a donc conservation des quantités

$$P^{\mu} = \frac{1}{c} \int (-g) (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) n_{\nu} dV. \quad (1.13)$$

Ceci justifie le nom, donné à l'objet \mathbf{t} , de « pseudo-tenseur d'énergie-impulsion » du champ gravitationnel.

La relation (1.8) permet d'écrire les équations d'Einstein sous la forme

$$\boxed{\left[(-g) (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) \right]_{,\alpha\beta} = \frac{16\pi G}{c^4} (-g) (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}).} \quad (1.14)$$

Les lois de conservation (1.11) en découlent automatiquement. Insistons sur le fait que cette formulation est exacte, c'est-à-dire obtenue sans la moindre approximation. Ces considérations serviront de point de départ à la théorie de l'émission des ondes gravitationnelles.

1.4 Energie et quantité de mouvement totales

Dans (1.12), choisissons comme hypersurface un « parallélépipède » dont les deux bases B_1 et B_2 sont réalisées par l'espace spatial aux instants respectifs x^0 et x'^0 , et les deux côtés latéraux L_1 et L_2 limitent asymptotiquement l'espace tridimensionnel entre ces deux instants (figure 1.1). L'intégration sur les surfaces latérales donne 0 si l'on suppose que

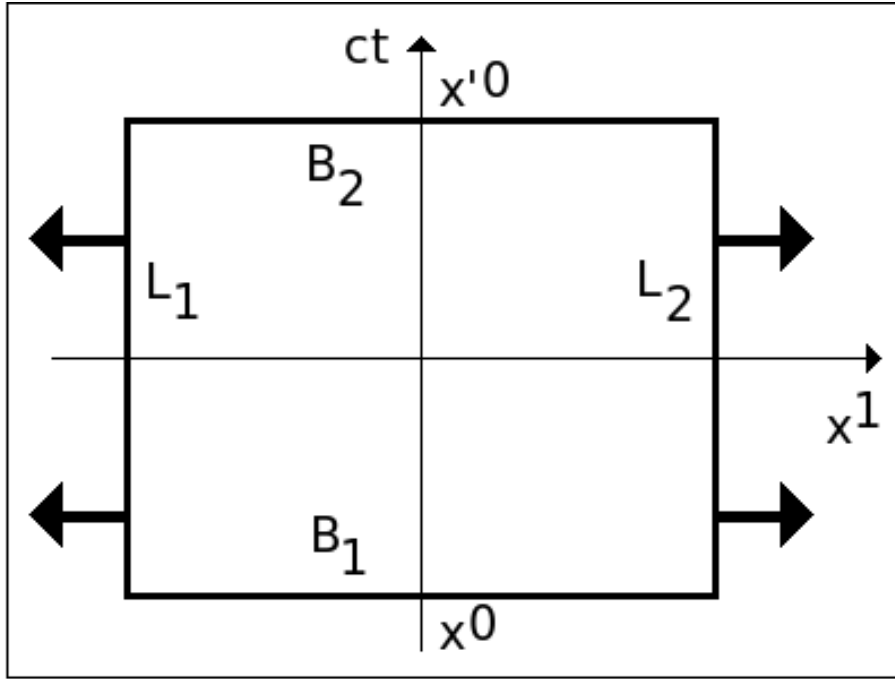


FIGURE 1.1: Pour écrire les lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, il est commode d'utiliser l'hypersurface « parallélépipédique » ici représentée. Les lignes de coordonnées x^2 et x^3 ne sont pas indiquées. Les deux bases B_1 et B_2 représentent l'espace spatial aux instants respectifs x^0 et x'^0 . Les composantes de la normale unitaire y prennent respectivement les valeurs $(-1, 0, 0, 0)$ et $(1, 0, 0, 0)$. Les hypersurfaces latérales L_1 et L_2 sont rejetées à l'infini spatial.

les sources ont une extension spatiale limitée ($T^{\mu\nu} = 0$ à l'infini, espace-temps asymptotiquement euclidien) et si l'on y utilise des coordonnées cartésiennes (auquel cas $t^{\mu\nu} = 0$ à l'infini). On obtient alors

$$\frac{1}{c} \int_{B_2} (-g) (T^{\mu 0} + t^{\mu 0}) dx^1 dx^2 dx^3 - \frac{1}{c} \int_{B_1} (-g) (T^{\mu 0} + t^{\mu 0}) dx^1 dx^2 dx^3 = 0.$$

Ceci établit la constance au cours du temps des quantités

$$P^\mu = \frac{1}{c} \int (-g) (T^{\mu 0} + t^{\mu 0}) dx^1 dx^2 dx^3, \quad (1.15)$$

représentant l'énergie et la quantité de mouvement totales (matière *et* champ).

L'intégrand dans (1.13) ou (1.15) n'est pas tensoriel. En effet, $t^{\mu\nu}$ est un pseudo-tenseur et peut toujours être annulé localement, conformément au principe d'équivalence. En d'autres termes, l'énergie et la quantité de mouvement du champ gravitationnel ne

sont pas localisables. Cependant, elles peuvent être décrites globalement par des quantités géométriques, comme le montre le

Théorème 1.2 *L'intégrale P^μ constitue un vecteur libre, défini dans l'espace-temps asymptotique, pour le groupe de Lorentz.*

Commentaire. En pratique, on intègre sur une hypersurface temporelle se réduisant asymptotiquement à un hyperplan dans l'espace-temps de Minkowski. On choisit les coordonnées pour que l'hypersurface ait pour équation $x^0 = \text{constante}$, auquel cas les P^μ sont calculables par (1.15). Ces nombres représentent en quelque sorte le flux d'une certaine quantité (non tensorielle) au travers de l'hypersurface. Le théorème affirme qu'ils constituent les composantes d'un vecteur associé à cette hypersurface, c'est-à-dire qu'ils se transforment selon la loi vectorielle lorsque, dans un deuxième système de coordonnées relié au premier par une transformation de Lorentz, on intègre la quantité en question sur la *même* hypersurface. Répétons-le, il est essentiel que l'espace-temps soit asymptotiquement plat (sources isolées) et rapporté aux coordonnées de Minkowski. Ainsi, aucune définition claire de la quantité de mouvement et de la masse ne s'impose dans le contexte cosmologique, ni d'ailleurs celle du moment cinétique qui sera étudié plus loin.²

Démonstration. Montrons d'abord que les P^μ relatifs à une hypersurface donnée ne dépendent *que* du choix du système de coordonnées cartésiennes asymptotiques. Pour cela, supposons que l'espace spatial soit rapporté à deux systèmes de coordonnées quelconques mais raccordés au même système de coordonnées cartésiennes à l'infini. Imaginons un troisième système de coordonnées raccordé asymptotiquement à ces mêmes coordonnées cartésiennes et coïncidant avec le premier système à l'instant x^0 et avec le deuxième système à l'instant x'^0 . La constance de (1.15) prouve que l'intégrale calculée dans le premier système (elle-même constante temporellement) est identique à l'intégrale calculée dans le deuxième système (elle aussi constante).

Dès lors, puisque $t^{\mu\nu}$ se transforme comme un tenseur pour le groupe des transformations linéaires dont celui de Lorentz, qui par ailleurs préserve $(-g)$, les quantités P^μ , définies par (1.13), sont vectorielles pour ce groupe. Le théorème est démontré.

□

On peut évaluer ce vecteur à l'aide d'une intégrale sur une 2-surface purement spatiale. En effet, d'après (1.7),

$$\begin{aligned} (-g) (T^{\mu 0} + t^{\mu 0}) &= h^{\mu 0\alpha}{}_{,\alpha} \\ &= h^{\mu 0k}{}_{,k}. \end{aligned}$$

En injectant ce résultat dans (1.15) et en utilisant le théorème de Gauss, on obtient

$$P^\mu = \frac{1}{c} \oint h^{\mu 0k} n_k dS. \quad (1.16)$$

Un choix judicieux de la surface permet de simplifier considérablement les calculs, par exemple une 2-sphère asymptotique.

2. Voir par exemple C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, 1973, pp. 462-463.

1.5 Application à la métrique de Schwarzschild

La métrique de Schwarzschild, exprimant le champ engendré par une distribution de matière stationnaire à symétrie sphérique de masse M , peut s'écrire en coordonnées isotropes sous la forme (10.12)

$$ds^2 = - \left[\frac{1 - GM/(2rc^2)}{1 + GM/(2rc^2)} \right]^2 c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{GM}{2rc^2} \right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (1.17)$$

où x, y, z sont des coordonnées cartésiennes et $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

On calcule facilement :

$$\begin{aligned} g &= -1 - \frac{4GM}{rc^2} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \\ g^{\mu 0} &= \delta^{\mu 0} \left(-1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \\ g^{kl} &= \delta^{kl} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} h^{\mu 0k} &= \lambda^{\mu 0k\nu},{}_{,\nu} \\ &= \lambda^{\mu 0kl},{}_{,l} \\ &= \frac{c^4}{16\pi G} \left[(-g)(g^{\mu 0} g^{kl} - g^{\mu k} g^{0l}) \right],{}_{,l} \\ &= \frac{Mc^2}{4\pi r^2} \delta^{\mu 0} n^k + O\left(\frac{1}{r^3}\right). \end{aligned}$$

Utilisant (1.16), on en déduit

$$P^0 = Mc, \quad P^i = 0. \quad (1.18)$$

Ce résultat était prévisible puisque les sources sont immobiles autour de l'origine des coordonnées. Conformément au principe d'équivalence, c'est bien l'expression de la masse gravifique qui intervient dans la composante 0 du quadrivecteur énergie-impulsion du champ.

1.6 Energie totale de la matière et d'un champ stationnaire

En 1930, R. Tolman a donné une formulation générale de l'énergie pour n'importe quelle métrique stationnaire, c'est-à-dire indépendante de la coordonnée temporelle x^0 . Calculons d'abord (les termes soulignés en ondulé s'annulent) :

$$\begin{aligned} R_0^0 &= g^{0\alpha} R_{\alpha 0} \\ &= g^{0\alpha} R_{\alpha\beta 0}^{\beta} \\ &= g^{0\alpha} (\Gamma_{\alpha 0, \beta}^{\beta} - \underbrace{\Gamma_{\alpha\beta, 0}^{\beta}} + \Gamma_{\rho\beta}^{\beta} \Gamma_{\alpha 0}^{\rho} - \Gamma_{\rho 0}^{\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}) \\ &= g^{0\alpha} \Gamma_{\alpha 0, \beta}^{\beta} + g^{0\alpha} \Gamma_{\beta\rho}^{\rho} \Gamma_{\alpha 0}^{\beta} - g^{0\rho} \Gamma_{\alpha 0}^{\beta} \Gamma_{\rho\beta}^{\alpha} \\ &= g^{0\alpha} \Gamma_{\alpha 0, \beta}^{\beta} + g^{0\alpha} \Gamma_{\beta\rho}^{\rho} \Gamma_{\alpha 0}^{\beta} - (g^{0\rho} \Gamma_{\alpha 0}^{\beta} \Gamma_{\rho\beta}^{\alpha} + \underbrace{g^{\alpha\rho} \Gamma_{\rho\beta}^0 \Gamma_{\alpha 0}^{\beta}}) + \underbrace{g^{\alpha\rho} \Gamma_{\rho\beta}^0 \Gamma_{\alpha 0}^{\beta}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g^{0\alpha} \Gamma_{\beta\rho}^\rho \Gamma_{\alpha 0}^\beta - (g^{0\rho} \Gamma_{\alpha 0}^\beta \Gamma_{\rho\beta}^\alpha + g^{\alpha\rho} \Gamma_{\rho\beta}^0 \Gamma_{\alpha 0}^\beta) + g^{0\alpha} \Gamma_{\alpha 0,\beta}^\beta + g^{\alpha\rho} \Gamma_{\rho\beta}^0 \Gamma_{\alpha 0}^\beta \\
&= \frac{g_{,\beta}}{2g} g^{0\alpha} \Gamma_{\alpha 0}^\beta + g^{0\alpha}{}_{,\beta} \Gamma_{\alpha 0}^\beta + g^{0\alpha} \Gamma_{\alpha 0,\beta}^\beta + g^{\alpha\rho} \Gamma_{\rho\beta}^0 \Gamma_{\alpha 0}^\beta,
\end{aligned}$$

en utilisant les égalités

$$\Gamma_{\beta\rho}^\rho = \frac{g_{,\beta}}{2g} \quad \text{et} \quad g^{0\rho} \Gamma_{\rho\beta}^\alpha + g^{\alpha\rho} \Gamma_{\rho\beta}^0 = -g^{0\alpha}{}_{,\beta}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
R_0^0 &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} g^{0\alpha} \Gamma_{\alpha 0}^\beta \right)_{,\beta} + g^{\alpha\rho} \Gamma_{\rho\beta}^0 \Gamma_{\alpha 0}^\beta \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} g^{0\alpha} \Gamma_{\alpha 0}^\beta \right)_{,\beta} + \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} \Gamma_{\rho\beta}^0 \Gamma_{\alpha 0}^\beta + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \Gamma_{\rho\beta}^0 \Gamma_{\alpha 0}^\rho \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} g^{0\alpha} \Gamma_{\alpha 0}^k \right)_{,k} - \frac{1}{2} \Gamma_{\rho\beta}^0 \underbrace{g^{\beta\rho}}_{,0}
\end{aligned}$$

puisque

$$g^{\alpha\rho} \Gamma_{\alpha 0}^\beta + g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha 0}^\rho = -g^{\beta\rho}{}_{,0}.$$

En conclusion, pour une métrique stationnaire,

$$R_0^0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} g^{0\alpha} \Gamma_{\alpha 0}^k \right)_{,k} \quad (1.19)$$

et donc

$$\int R_0^0 \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3 = \oint \sqrt{-g} g^{0\alpha} \Gamma_{\alpha 0}^k n_k dS. \quad (1.20)$$

Or, en première approximation, toute métrique stationnaire se réduit à la métrique de Schwarzschild (1.17) si l'on se place suffisamment loin des sources. Plus précisément, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g} &= 1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \\
g^{00} &= -1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \\
\Gamma_{\alpha 0}^k &= \frac{GM}{r^2 c^2} \delta^{\alpha 0} n^k + O\left(\frac{1}{r^3}\right).
\end{aligned}$$

En exploitant (1.20) sur une sphère de rayon infiniment grand, on trouve ainsi

$$\int R_0^0 \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3 = \frac{-4\pi GM}{c^2}. \quad (1.21)$$

Comme, en vertu des équations d'Einstein,

$$R_0^0 = \frac{4\pi G}{c^4} (T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3), \quad (1.22)$$

on obtient une expression générale donnant l'énergie totale (matière plus champ) d'une solution stationnaire quelconque :

$$Mc^2 = \int (-T_0^0 + T_1^1 + T_2^2 + T_3^3) \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.23)$$

1.7 Cas particuliers

Si les sources sont constituées d'un fluide parfait, on a

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} (\rho + P) U^\mu U^\nu + P g^{\mu\nu}.$$

Si, de plus, le fluide est statique,

$$U^k = 0.$$

De la condition $U^\alpha U_\alpha = -c^2$, il résulte alors

$$U^0 = \frac{c}{\sqrt{-g_{00}}}, \quad U_0 = -c\sqrt{-g_{00}}.$$

Dès lors,

$$T_0^0 = -\rho, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = P.$$

Pour un fluide parfait statique, on trouve ainsi

$$Mc^2 = \int (\rho + 3P) \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.24)$$

La solution obtenue historiquement par Schwarzschild pour un astre de rayon R statique et à symétrie sphérique, postule l'équation d'état d'un fluide incompressible, c'est-à-dire d'énergie volumique ρ homogène. Dans les coordonnées (ct, r, θ, φ) , on calcule

$$\begin{aligned} (\rho + 3P) \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3 &= \rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ Mc^2 &= \rho \int_0^R 4\pi r^2 dr \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$= \frac{4}{3} \pi R^3 \rho. \quad (1.26)$$

Ce résultat n'est pas aussi évident qu'il peut paraître à première vue. On savait déjà qu'en relativité restreinte, la masse propre n'est pas additive. En relativité générale, on peut intuitivement affirmer que la masse d'un système de particules en interaction gravitationnelle doit être inférieure à la somme des masses individuelles car l'énergie d'interaction est négative. Autrement dit, la relation (1.26) est paradoxale.

Voici l'explication. En fait, le volume physique $d\mathcal{V}$ de la coquille sphérique comprise entre les coordonnées radiales r et $r + dr$ n'est pas donné par la relation $d\mathcal{V} = 4\pi r^2 dr$ mais bien par

$$\begin{aligned} d\mathcal{V} &= \sqrt{g_{rr}(r)} 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{4\pi r^2 dr}{\sqrt{1 - 8\pi G \rho r^2 / 3c^4}}. \end{aligned}$$

Dans les conditions newtoniennes (énergie interne thermique négligeable et champ faible), la quantité $\mu = \rho/c^2$ représente la masse volumique propre et l'on peut écrire

$$\begin{aligned} d\mathcal{V} &\simeq 4\pi r^2 (1 + 4\pi G \mu r^2 / 3c^2) dr \\ 4\pi r^2 dr &\simeq d\mathcal{V} - 4\pi r^2 \frac{4\pi G \mu r^2}{3c^2} dr. \end{aligned}$$

Par conséquent, la relation (1.25) peut se lire sous la forme

$$M \simeq \mathcal{M} + \frac{\Delta}{c^2}$$

où

$$M = \mu \int_0^R 4\pi r^2 dr$$

est la masse effective totale ;

$$\mathcal{M} = \mu \int dV$$

représente la masse totale au sens newtonien, c'est-à-dire définie comme somme des masses propres ; et

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^R -4\pi r^2 \mu \frac{4\pi G \mu r^2}{3} dr \\ &= \frac{-3GM^2}{5R} \\ &\simeq \frac{-3G\mathcal{M}^2}{5R} \end{aligned}$$

n'est autre que l'énergie gravitationnelle d'une sphère newtonienne homogène de rayon R . La différence entre le volume-coordonnée et le volume physique engendre donc le terme d'énergie de liaison gravitationnelle.

En résumé, on est autorisé à conclure que la quantité (1.26) constitue en fait l'énergie *totale* (de masse propre, interne thermique *et du champ*). Remarquons, une fois de plus, avec quel naturel et quelle simplicité ce terme supplémentaire issu du champ gravitationnel est intégré dans l'appareil géométrique de la théorie.

1.8 Le flux de quantité de mouvement

Calculons la dérivée temporelle de la relation (1.16).

$$\begin{aligned} \frac{dP^\mu}{dt} &= \oint h^{\mu 0k}{}_{,0} n_k dS \\ &= \oint h^{\mu\alpha k}{}_{,\alpha} n_k dS - \oint h^{\mu l k}{}_{,l} n_k dS \\ &= - \oint h^{\mu k\alpha}{}_{,\alpha} n_k dS - \int h^{\mu l k}{}_{,lk} dx^1 dx^2 dx^3. \end{aligned}$$

Le second terme est nul car $h^{\mu l k} = -h^{\mu k l}$. En tenant compte de (1.7) on a donc, dans une région loin des sources où $T^{\mu k} = 0$:

$$\frac{dP^\mu}{dt} = - \oint (-g) t^{\mu k} n_k dS. \quad (1.27)$$

Ce résultat peut sembler en contradiction avec la constance du vecteur P^μ , établie dans l'équation (1.15). En fait, pour démontrer (1.16) on introduit une intégrale surfacique sur la « frontière » de l'espace spatial infini, ce qui n'a guère de sens. En pratique donc, on se contente d'intégrer sur une surface finie mais arbitrairement éloignée : le résultat est

le vecteur P^μ correspondant à ce volume très grand mais borné. On peut conclure que toute variation de P^μ , dans un volume donné loin des sources, résulte d'un flux du pseudo-tenseur d'énergie-impulsion au travers de la surface délimitant ce volume. Dans le cas d'une métrique stationnaire, les symboles de Christoffel varient comme $1/r^2$, le pseudo-tenseur comme $1/r^4$ [vu la relation (1.10)], et l'intégrale (1.27) vaut zéro. Par contre, si le pseudo-tenseur varie comme $1/r^2$, alors (1.27) est non nulle, ce qui signifie que de l'énergie et de la quantité de mouvement s'écoulent hors du volume. On rencontre cette situation dans la théorie des ondes gravitationnelles.

1.9 Le moment cinétique du champ gravitationnel

Les relations

$$\left[x^\alpha (-g)(T^{\beta\nu} + t^{\beta\nu}) - x^\beta (-g)(T^{\alpha\nu} + t^{\alpha\nu}) \right]_{,\nu} = 0,$$

qui résultent de (1.11) et de la symétrie de $T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}$, impliquent

$$\oint \left[x^\alpha (-g)(T^{\beta\nu} + t^{\beta\nu}) - x^\beta (-g)(T^{\alpha\nu} + t^{\alpha\nu}) \right] n_\nu dV = 0.$$

Il y a donc conservation des quantités

$$\begin{aligned} L^{\alpha\beta} &= \frac{1}{c} \int \left[x^\alpha (-g)(T^{\beta\nu} + t^{\beta\nu}) - x^\beta (-g)(T^{\alpha\nu} + t^{\alpha\nu}) \right] n_\nu dV \\ &= \int \left(x^\alpha dP^\beta - x^\beta dP^\alpha \right). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Ce moment du quadrivecteur énergie-quantité de mouvement d'un système gravitationnel définit tout naturellement son *moment cinétique*. (L'intégrand n'est pas invariant de jauge mais l'intégrale restaure le caractère tensoriel de la quantité évaluée. Cette situation a déjà été rencontrée dans la définition du quadrivecteur P^μ .) Si l'on intègre sur tout l'espace à un temps donné x^0 , on peut écrire

$$\begin{aligned} L^{\alpha\beta} &= \frac{1}{c} \int \left[x^\alpha (T^{\beta 0} + t^{\beta 0}) - x^\beta (T^{\alpha 0} + t^{\alpha 0}) \right] (-g) dx^1 dx^2 dx^3 \\ &= \frac{1}{c} \int \left(x^\alpha h^{\beta 0\nu}{}_{,\nu} - x^\beta h^{\alpha 0\nu}{}_{,\nu} \right) dx^1 dx^2 dx^3 \\ &= \frac{1}{c} \int \left[\left(x^\alpha h^{\beta 0\nu} \right)_{,\nu} - \delta_\nu^\alpha h^{\beta 0\nu} - \left(x^\beta h^{\alpha 0\nu} \right)_{,\nu} + \delta_\nu^\beta h^{\alpha 0\nu} \right] dx^1 dx^2 dx^3 \\ &= \frac{1}{c} \int \left[\left(x^\alpha h^{\beta 0\nu} - x^\beta h^{\alpha 0\nu} \right)_{,\nu} + h^{\alpha 0\beta} - h^{\beta 0\alpha} \right] dx^1 dx^2 dx^3 \\ &= \frac{1}{c} \int \left[\left(x^\alpha h^{\beta 0k} - x^\beta h^{\alpha 0k} \right)_{,k} + \left(\lambda^{\alpha 0\beta\xi} - \lambda^{\beta 0\alpha\xi} \right)_{,\xi} \right] dx^1 dx^2 dx^3 \\ &= \frac{1}{c} \int \left[\left(x^\alpha h^{\beta 0k} - x^\beta h^{\alpha 0k} \right)_{,k} + \lambda^{\alpha 0\xi\beta}{}_{,\xi} \right] dx^1 dx^2 dx^3 \\ &= \frac{1}{c} \int \left[\left(x^\alpha h^{\beta 0k} - x^\beta h^{\alpha 0k} \right)_{,k} + \lambda^{\alpha 0k\beta}{}_{,k} \right] dx^1 dx^2 dx^3 \\ &= \frac{1}{c} \int \left(x^\alpha h^{\beta 0k} - x^\beta h^{\alpha 0k} + \lambda^{\alpha 0k\beta} \right)_{,k} dx^1 dx^2 dx^3 \\ &= \frac{1}{c} \oint \left(x^\alpha h^{\beta 0k} - x^\beta h^{\alpha 0k} + \lambda^{\alpha 0k\beta} \right) n_k dS. \end{aligned}$$

Dans ces transformations successives, on notamment a utilisé l'antisymétrie de h sur ses deux derniers indices et celle de λ sur les deux indices du milieu.

On peut ainsi calculer le tenseur exprimant la quantité de moment cinétique, contenue dans tout l'espace en un temps x^0 donné, d'une configuration physique *quelconque*, à l'aide d'une intégrale sur une surface spatiale fermée asymptotique de normale unitaire n_k . Il suffit donc de connaître le champ gravitationnel loin de ses sources. Si on se limite aux composantes spatiales de ce tenseur, on obtient :

$$L^{ij} = \frac{1}{c} \oint \left(x^i h^{j0k} - x^j h^{i0k} + \lambda^{i0kj} \right) n_k dS \quad (1.29)$$

où, pour mémoire :

$$\lambda^{i0kj} = \frac{c^4}{16\pi G} (-g) (g^{i0} g^{kj} - g^{ik} g^{0j}) \quad (1.30)$$

$$h^{\alpha\beta\gamma} = \lambda^{\alpha\beta\gamma\mu}{}_{,\mu}. \quad (1.31)$$

Généralement, le moment cinétique est présenté comme un pseudo-vecteur \vec{L} , via les relations

$$L_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} L^{jk}. \quad (1.32)$$

On peut en donner une formulation générale assez simple :

$$\begin{aligned} L_i &= \frac{\epsilon_{ijk}}{2c} \oint \left(x^j h^{k0l} - x^k h^{j0l} + \lambda^{j0lk} \right) n_l dS \\ &= \frac{\epsilon_{ijk}}{2c} \oint \left(x^j \lambda^{k0l\mu}{}_{,\mu} - x^k \lambda^{j0l\mu}{}_{,\mu} + \lambda^{j0lk} \right) n_l dS \\ &= \frac{\epsilon_{ijk}}{c} \oint x^j \lambda^{k0l\mu}{}_{,\mu} n_l dS + \frac{c^3}{16\pi G} \oint (-g) \frac{\epsilon_{ijk}}{2} \left(g^{j0} g^{lk} - g^{jl} g^{0k} \right) n_l dS \\ &= \frac{\epsilon_{ijk}}{c} \oint x^j \lambda^{k0l\mu}{}_{,\mu} n_l dS + \frac{c^3}{16\pi G} \oint (-g) \epsilon_{ijk} g^{j0} g^{lk} n_l dS \\ &= \frac{\epsilon_{ijk}}{c} \oint x^j \lambda^{k0l\mu}{}_{,\mu} n_l dS + \frac{c^3}{16\pi G} \oint (-g) \epsilon_{ijk} \left(g^{j0} g^{lk} - g^{l0} g^{jk} \right) n_l dS \\ &= \frac{\epsilon_{ijk}}{c} \oint \left(x^j \lambda^{k0l\mu}{}_{,\mu} + \lambda^{j0lk} \right) n_l dS. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Il est possible de calculer explicitement le moment cinétique dans le cas d'une métrique stationnaire quelconque, solution des équations d'Einstein dans le vide, en choisissant pour surface d'intégration dans l'expression (1.29) une sphère de coordonnée radiale r grande par rapport à la dimension caractéristique des sources, c'est-à-dire telle que $r \gg GM/c^2$. Comme l'élément de surface est proportionnel à r^2 , il faut pour cela connaître l'expression du tenseur métrique jusqu'aux termes en $1/r^2$ inclus. C'est l'objet de la section suivante.

1.10 Métriques stationnaires au deuxième ordre

1.10.1 Tenseur de Ricci le plus général au deuxième ordre

Supposons le tenseur métrique développable en série de puissances d'une petite quantité et limitons-nous aux termes jusqu'à l'ordre deux inclus :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + H_{\mu\nu} + O(3),$$

où $h_{\mu\nu}$ se rapporte aux termes d'ordre 1 et $H_{\mu\nu}$ à ceux d'ordre 2. Alors,³

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} - H^{\mu\nu} + h^\mu{}_\alpha h^{\alpha\nu} + O(3).$$

On calcule, sans difficulté notable,

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} + O(5),$$

avec⁴

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(1)} &= \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (h_{\mu\alpha,\nu\beta} + h_{\nu\alpha,\mu\beta} - h_{\mu\nu,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu\nu}) \\ R_{\mu\nu}^{(2)} &= \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (H_{\mu\alpha,\nu\beta} + H_{\nu\alpha,\mu\beta} - H_{\mu\nu,\alpha\beta} - H_{\alpha\beta,\mu\nu}) \\ &\quad - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} (h_{\mu\alpha,\nu\beta} + h_{\nu\alpha,\mu\beta} - h_{\mu\nu,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu\nu}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} - \frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma,}{}^\beta \right) (h_{\beta\mu,\nu} + h_{\beta\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\beta}) \\ &\quad + \frac{1}{4} h_{\alpha\beta,\mu} h^{\alpha\beta}{}_{,\nu} + \frac{1}{2} h^\alpha{}_{\mu,\beta} h_{\alpha\nu,}{}^\beta - \frac{1}{2} h^\beta{}_{\mu,\alpha} h^\alpha{}_{\nu,\beta}. \end{aligned}$$

1.10.2 Méthode de calcul d'un champ stationnaire à grande distance

Considérons la métrique de Schwarzschild, exprimant le champ engendré par une distribution de matière stationnaire à symétrie sphérique de masse M , en coordonnées isotropes sous la forme (1.17). La quantité $1/r$ va assumer le rôle de la petite quantité du paragraphe 1.10.1. A grande distance des sources, un champ stationnaire quelconque est donné, en première approximation, par la solution à symétrie sphérique, donc par la métrique de Schwarzschild. Les $h_{\mu\nu}$ correspondent ainsi aux quantités d'ordre 1 dans la solution (1.17), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} h_{00}^S &= \frac{2GM}{rc^2} \\ h_{ij}^S &= \frac{2GM}{rc^2} \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Ces termes annulent exactement le tenseur de Ricci au premier ordre, comme il se doit :

$$R_{\mu\nu}^{(1)}(h_{\alpha\beta}^S) = 0.$$

Pour connaître la métrique stationnaire générale à l'ordre 2, il faut résoudre les équations $R_{\mu\nu}^{(2)} = 0$, linéaires en les quantités $H_{\mu\nu}$: leur solution générale est donc la solution générale de l'équation homogène plus une solution particulière. Or, celle-ci doit dépendre de M , via

3. Dans ce chapitre, les indices des quantités perturbées seront désormais levés ou abaissés à l'aide du tenseur de Minkowski. La variance des indices spatiaux est donc sans importance.

4. Ici comme ailleurs, sont réputés « d'ordre 2 » les termes linéaires en H ou quadratiques en h . Ce vocabulaire est un peu ambigu dans la mesure où le tenseur de Ricci s'exprime en fonction des *dérivées secondes* du tenseur métrique : c'est pourquoi les termes négligés contiennent, en fait, la puissance *cinquième* de la quantité $1/r$.

les $h_{\mu\nu}^S$: on peut ainsi s'attendre à ce que le termes du deuxième ordre dans la solution (1.17), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} H_{00}^S &= \frac{-2G^2 M^2}{r^2 c^4} \\ H_{ij}^S &= \frac{3G^2 M^2}{2r^2 c^4} \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

constituent une solution particulière exacte ; ce que confirme un calcul simple :

$$R_{\mu\nu}^{(2)}(h_{\alpha\beta}^S, H_{\alpha\beta}^S) = 0.$$

En résumé, la métrique stationnaire la plus générale est donnée par

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^S + H_{\mu\nu}^S + H_{\mu\nu}^G + O(1/r^3), \quad (1.36)$$

où $H_{\mu\nu}^G$ est la solution générale de la partie homogène de l'équation $R_{\mu\nu}^{(2)} = 0$, *i.e.* satisfait

$$\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (H_{\mu\alpha,\nu\beta}^G + H_{\nu\alpha,\mu\beta}^G - H_{\mu\nu,\alpha\beta}^G - H_{\alpha\beta,\mu\nu}^G) = 0. \quad (1.37)$$

1.10.3 Solution générale pour les termes du deuxième ordre

Posant

$$\Psi_{\mu\nu} = H_{\mu\nu}^G - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}^G \eta_{\mu\nu}, \quad (1.38)$$

équivalent à

$$H_{\mu\nu}^G = \Psi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \Psi_{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} \quad (1.39)$$

et travaillant dans la jauge de Lorenz⁵ où

$$\Psi^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \quad (1.40)$$

on réduit (1.37), dans le cas stationnaire, à l'équation de Laplace

$$\nabla^2 \Psi_{\mu\nu} = 0. \quad (1.41)$$

La solution générale, variant comme $1/r^2$, de l'équation $\nabla^2 \Psi = 0$ est donnée par

$$\Psi = \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r}$$

avec \vec{a} constant. En effet,

$$\nabla^2 \left[\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right] = \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \nabla^2 \frac{1}{r} = 0.$$

Introduisant le vecteur unitaire

$$n^k = \frac{x^k}{r}, \quad (1.42)$$

5. Les changements de jauge ont ici pour objectif de simplifier les quantités $\Psi_{\mu\nu}$, d'ordre $1/r^2$. Ils se manifestent, dans la métrique, par des modifications d'ordre 2 seulement, qui n'affectent pas les quantités $h_{\mu\nu}^S$ du premier ordre. De plus, l'équation $R_{\mu\nu}^{(2)} = 0$ est invariante de jauge, donc la solution particulière $H_{\mu\nu}^S$ est préservée.

on a donc

$$\Psi_{00} = \frac{B_k n_k}{r^2} \quad (1.43)$$

$$\Psi_{0i} = \frac{B_{ik} n_k}{r^2} \quad (1.44)$$

$$\Psi_{ij} = \frac{B_{ijk} n_k}{r^2} \quad (1.45)$$

où tous les coefficients sont constants. Les conditions de jauge (1.40) imposent

$$B_{kk} - 3 n_j n_k B_{jk} = 0 \quad (1.46)$$

$$B_{ikk} - 3 n_j n_k B_{ijk} = 0 \quad (1.47)$$

Or, un tenseur B_{ik} peut toujours se décomposer en une trace B , une partie symétrique sans trace S_{ik} et une partie antisymétrique A_{ik} :

$$B_{ik} = B \delta_{ik} + S_{ik} + A_{ik}, \quad S_{kk} = 0.$$

La condition (1.46) implique

$$S_{ik} = 0,$$

donc

$$B_{ik} = B \delta_{ik} + A_{ik}, \quad A_{ik} = -A_{ki}. \quad (1.48)$$

De même, en dimension 3, un tenseur B_{ijk} symétrique sur ses deux premiers indices peut se décomposer comme suit :

$$B_{ijk} = A_k \delta_{ij} + C_{(i} \delta_{j)k} + \epsilon_{mk(i} E_{j)m} + S_{ijk}$$

où les parenthèses constituent le symbole de symétrisation ; E_{jm} est symétrique et sans trace :

$$E_{jm} = E_{(jm)}, \quad E_{mm} = 0;$$

et S_{ijk} est symétrique et sans trace :

$$S_{ijk} = S_{(ijk)}, \quad S_{iik} = S_{kjk} = S_{ikk} = 0.$$

(En effet, les 3 quantités A_k , les 3 C_i , les 5 E_{jm} [6 nombres liés par une contrainte, donc 5 quantités indépendantes] et les 7 S_{ijk} [10 nombres liés par 3 contraintes] peuvent s'exprimer linéairement et univoquement en fonction des 18 quantités B_{ijk} .) La condition (1.47) implique

$$C_j = -2A_j, \quad E_{jm} = 0, \quad S_{ijk} = 0,$$

donc

$$B_{ijk} = A_k \delta_{ij} - A_i \delta_{jk} - A_j \delta_{ik}. \quad (1.49)$$

Remplaçant les résultats (1.48) et (1.49) dans (1.43), (1.44) et (1.45), on obtient

$$\begin{aligned} \Psi_{00} &= \frac{B_k n_k}{r^2} \\ \Psi_{0i} &= \frac{B n_i + A_{ik} n_k}{r^2}, \quad A_{ik} = -A_{ki} \\ \Psi_{ij} &= \frac{A_k n_k \delta_{ij} - A_i n_j - A_j n_i}{r^2} \end{aligned}$$

donc, par (1.39), la solution générale de l'équation homogène pour les termes du deuxième ordre dans la jauge de Lorenz :

$$H_{00}^G = \frac{(A_k + B_k) n_k}{2r^2} \quad (1.50)$$

$$H_{0i}^G = \frac{B n_i + A_{ik} n_k}{r^2}, \quad A_{ik} = -A_{ki} \quad (1.51)$$

$$H_{ij}^G = \frac{(A_k + B_k) n_k \delta_{ij}}{2r^2} - \frac{A_i n_j + A_j n_i}{r^2}. \quad (1.52)$$

1.10.4 Expression de la métrique stationnaire la plus générale

On peut simplifier considérablement les résultats en exploitant les libertés résiduelles dans le choix du système de coordonnées. Le changement de jauge $\underline{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha$, où

$$\begin{aligned} \xi^0 &= \frac{B}{r} \\ \xi^i &= \frac{A_i}{r}, \end{aligned}$$

préserve les conditions de Lorenz (1.40), puisque $\nabla^2 \xi^\alpha = 0$, et induit dans le tenseur métrique des modifications d'ordre $1/r^2$. Tenant compte de

$$\frac{1}{\underline{r}} = \frac{1}{r} + O(1/r^3),$$

on calcule facilement les quantités $H_{\mu\nu}^{G\text{new}} = H_{\mu\nu}^{G\text{old}} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}$:

$$\begin{aligned} H_{00}^{G\text{new}} &= \frac{(A_k + B_k) n_k}{2\underline{r}^2} \\ H_{0i}^{G\text{new}} &= \frac{A_{ik} n_k}{\underline{r}^2}, \quad A_{ik} = -A_{ki} \\ H_{ij}^{G\text{new}} &= \frac{(A_k + B_k) n_k \delta_{ij}}{2\underline{r}^2}. \end{aligned}$$

Laissant tomber les indications « new » et les barres, et combinant ce résultat avec (1.34), (1.35) et (1.36), on a donc

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + \frac{2GM}{rc^2} - \frac{2G^2M^2}{r^2c^4} + \frac{(A_k + B_k) n_k}{2r^2} + O(1/r^3) \\ g_{0i} &= \frac{A_{ik} n_k}{r^2} + O(1/r^3), \quad A_{ik} = -A_{ki} \\ g_{ij} &= \left[1 + \frac{2GM}{rc^2} + \frac{3G^2M^2}{2r^2c^4} + \frac{(A_k + B_k) n_k}{2r^2} \right] \delta_{ij} + O(1/r^3). \end{aligned}$$

Enfin, en modifiant comme suit l'origine des coordonnées spatiales :

$$x^i = \underline{x}^i + \frac{c^2}{4GM} (A_i + B_i),$$

il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{\underline{r}} - \frac{c^2}{4GM} \frac{(A_k + B_k) \underline{n}_k}{\underline{r}^2} + O(1/\underline{r}^3) \\ \frac{n_k}{r^2} &= \frac{\underline{n}_k}{\underline{r}^2} + O(1/\underline{r}^3). \end{aligned}$$

En supprimant à nouveau les barres, on obtient ainsi la valeur du tenseur métrique pour le champ gravitationnel stationnaire à grande distance des corps qui le génèrent et jusqu'au deuxième ordre inclus en $1/r$:

$$g_{00} = -1 + \frac{2GM}{rc^2} - \frac{2G^2M^2}{r^2c^4} + O(1/r^3) \quad (1.53)$$

$$g_{0i} = \frac{A_{ik}n_k}{r^2} + O(1/r^3), \quad A_{ik} = -A_{ki} \quad (1.54)$$

$$g_{ij} = \left(1 + \frac{2GM}{rc^2} + \frac{3G^2M^2}{2r^2c^4}\right) \delta_{ij} + O(1/r^3). \quad (1.55)$$

1.11 Moment cinétique d'un système stationnaire

1.11.1 Signification des composantes non diagonales du tenseur métrique

Nous allons appliquer la relation (1.29) pour calculer le moment cinétique d'un système gravitationnel dans le cas stationnaire. D'après (1.54), on a

$$g^{j0} = \frac{A_{jm}n_m}{r^2} + O(1/r^3).$$

Dans les relations (1.30) et (1.31) on peut donc, dans un calcul à l'ordre 2 inclus, se contenter d'écrire

$$g = -1 + O(1/r), \quad g^{kl} = \delta_{kl} + O(1/r).$$

En utilisant l'antisymétrie du tenseur A_{ij} et la définition (1.42) du vecteur unitaire n_k , on trouve ainsi

$$\lambda^{i0kj} = \frac{c^4}{16\pi G} \frac{A_{im}n_m\delta_{kj} - \delta_{ik}A_{jm}n_m}{r^2} \quad (1.56)$$

$$\begin{aligned} h^{j0k} &= \lambda^{j0kl}{}_{,l} \\ &= \frac{c^4}{16\pi G} \left(\frac{A_{jm}n_m}{r^2} \delta_{kl} - \delta_{jk} \frac{A_{lm}n_m}{r^2} \right)_{,l} \\ &= \frac{c^4}{16\pi G} \left(A_{jm} \frac{\delta_{mk} - 3n_m n_k}{r^3} \right). \end{aligned} \quad (1.57)$$

Injectons ces résultats dans (1.29) et intégrons sur une sphère de rayon r . On obtient

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \frac{c^3}{16\pi G r^3} \oint [x^i A_{jm}(\delta_{mk} - 3n_m n_k) - x^j A_{im}(\delta_{mk} - 3n_m n_k)] n_k dS \\ &\quad + \frac{c^3}{16\pi G r^2} \oint (A_{im}n_m\delta_{kj} - \delta_{ik}A_{jm}n_m) n_k dS \end{aligned} \quad (1.58)$$

où $dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$. Compte tenu des relations $x^k = r n^k$ et

$$\oint n_i n_j \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij}, \quad (1.59)$$

les deux termes du membre de droite de (1.58) valent respectivement

$$\frac{c^3}{3G} A_{ij} \quad \text{et} \quad \frac{c^3}{6G} A_{ij}.$$

On en déduit le sens physique des termes $0i$ dans le tenseur métrique (1.54) :

$$A_{ij} = \frac{2G}{c^3} L_{ij}. \quad (1.60)$$

Compte tenu de (1.32), on a donc

$$A_{12} = \frac{2G}{c^3} L_3, \quad A_{13} = -\frac{2G}{c^3} L_2, \quad A_{23} = \frac{2G}{c^3} L_1. \quad (1.61)$$

1.11.2 La métrique de Kerr

Nous allons appliquer les résultats de la section précédente à la métrique de Kerr (découverte en 1963), à propos de laquelle Chandrasekhar a écrit :⁶

« In my entire scientific life, extending over forty-five years, the most shattering experience has been the realization that an exact solution of Einstein's equations of general relativity, discovered by the New Zealand mathematician, Roy Kerr, provides the absolutely exact representation of untold numbers of massive black holes that populate the universe. This shuddering before the beautiful, this incredible fact that a discovery motivated by a search after the beautiful in mathematics should find its exact replica in Nature, persuades me to say that beauty is that to which the human mind responds at its deepest and most profound. »

Dans les coordonnées utilisées par R. Boyer et R. Lindquist en 1967, cette solution exacte des équations d'Einstein dans le vide prend la forme

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(1 - \frac{2GMR}{\Sigma c^2} \right) c^2 dt^2 - \frac{4GMR a \sin^2 \theta}{\Sigma c^2} d\varphi c dt \\ & + \frac{\Sigma}{\Delta} dR^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(R^2 + a^2 + \frac{2GMR a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma c^2} \right) \sin^2 \theta d\varphi^2, \end{aligned} \quad (1.62)$$

avec

$$\Delta = R^2 - \frac{2GMR}{c^2} + a^2, \quad \Sigma = R^2 + a^2 \cos^2 \theta.$$

Le changement de variables

$$R = \frac{GM}{c^2} + r + \frac{G^2 M^2 - a^2 c^2}{4 r c^2} \quad (1.63)$$

permet d'écrire l'élément de longueur sous la forme *isotrope* :

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(1 - \frac{2GMR}{\Sigma c^2} \right) c^2 dt^2 - \frac{4GMR a \sin^2 \theta}{\Sigma c^2} d\varphi c dt \\ & + \frac{\Sigma}{r^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2) + \left(R^2 + a^2 + \frac{2GMR a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma c^2} \right) \sin^2 \theta d\varphi^2, \end{aligned} \quad (1.64)$$

où R et Σ doivent être exprimés en fonction de r .

On peut en calculer les deux premiers termes du développement en série de puissances de $1/r$:

$$g_{00} = -1 + \frac{2GM}{rc^2} - \frac{2G^2 M^2}{r^2 c^4}$$

6. S. Chandrasekhar, *Truth and Beauty*, University of Chicago Press, 1987.

$$\begin{aligned}
g_{0\phi} &= \frac{-2GMa}{c^2} \sin^2 \theta \left(\frac{1}{r} - \frac{GM}{r^2 c^2} \right) \\
g_{rr} &= 1 + \frac{2GM}{rc^2} + \frac{3G^2 M^2}{2r^2 c^4} + \frac{a^2}{2r^2} (1 - 2 \sin^2 \theta) \\
g_{\theta\theta} &= r^2 g_{rr} \\
g_{\varphi\varphi} &= r^2 \sin^2 \theta g_{rr} + a^2 \sin^4 \theta.
\end{aligned} \tag{1.65}$$

Dans les coordonnées cartésiennes

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

on trouve

$$\begin{aligned}
g_{01} &= \frac{2GMa n_2}{r^2 c^2} + O(1/r^3) \\
g_{02} &= \frac{-2GMa n_1}{r^2 c^2} + O(1/r^3) \\
g_{ij} &= \left(1 + \frac{2GM}{rc^2} + \frac{3G^2 M^2}{2r^2 c^4} \right) \delta_{ij} + \mathcal{H}_{ij} + O(1/r^3)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{12} &= \frac{a^2}{2r^2} \left[(1 - 2 \sin^2 \theta) n_1 n_2 + \frac{1 - 2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} n_1 n_2 n_3^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} n_1 n_2 \right] \\
\mathcal{H}_{13} &= \frac{a^2}{2r^2} \left[(1 - 2 \sin^2 \theta) n_1 n_3 - \frac{1 - 2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} n_1 n_3 (n_1^2 + n_2^2) \right] \\
\mathcal{H}_{23} &= \frac{a^2}{2r^2} \left[(1 - 2 \sin^2 \theta) n_2 n_3 - \frac{1 - 2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} n_2 n_3 (n_1^2 + n_2^2) \right] \\
\mathcal{H}_{11} &= \frac{a^2}{2r^2} \left[(1 - 2 \sin^2 \theta) n_1^2 + \frac{1 - 2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} n_1^2 n_3^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} n_2^2 \right] \\
\mathcal{H}_{22} &= \frac{a^2}{2r^2} \left[(1 - 2 \sin^2 \theta) n_2^2 + \frac{1 - 2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} n_2^2 n_3^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} n_1^2 \right] \\
\mathcal{H}_{33} &= \frac{a^2}{2r^2} \left[(1 - 2 \sin^2 \theta) n_3^2 + \frac{1 - 2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} (n_1^2 + n_2^2)^2 \right].
\end{aligned}$$

On peut vérifier que \mathcal{H} satisfait les équations (1.37). Autrement dit, il s'agit d'un terme parasite qui peut être annulé en passant dans la jauge de Lorenz (voir note 5).

En comparant ces résultats avec (1.54) et (1.61), on arrive à la conclusion

$$\vec{L} = (0, 0, Mac). \tag{1.66}$$

La quantité ac , qui possède les dimensions d'une longueur, représente donc le moment cinétique par unité de masse d'un corps sphérique en rotation.

Si on limite les termes diagonaux au premier ordre en $1/r$ et si on pose $L = Mac$, on obtient la métrique de Lense-Thirring :⁷

$$\begin{aligned}
ds^2 &= - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) c^2 dt^2 - \frac{4GL}{r^2 c^3} (n_1 dy - n_2 dx) c dt \\
&\quad + \left(1 + \frac{2GM}{rc^2} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2).
\end{aligned}$$

7. J. Lense et H. Thirring, *Über den Einfluss der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie*, *Physikalische Zeitschrift* **19** pp. 156-163 (1918). Traduit en anglais dans *General Relativity and Gravitation*, **16**, pp. 727-741 (1984).

1.12 Le flux de moment cinétique

Les calculs effectués sur la métrique de Kerr montrent que un corps sphérique en rotation uniforme conserve son moment cinétique. Il n'en est rien dans les cas plus généraux : la matière peut céder du moment cinétique au champ, qui l'emporte sous la forme d'ondes gravitationnelles. Comme en mécanique du point matériel, le champ possède un moment cinétique par rapport à une origine donnée si sa quantité de mouvement n'est pas radiale.

Intuitivement, on peut évaluer le flux de moment cinétique par le raisonnement suivant. Le flux de la k -ème composante de quantité de mouvement du champ gravitationnel au travers d'un élément de surface d'aire dS et de normale unitaire n_l , est égal à

$$\Phi^k = -g t^{kl} n_l dS.$$

À l'extrémité du vecteur \vec{r} situé à grande distance des sources, il y correspond un flux de moment cinétique donné par

$$\vec{r} \wedge \vec{\Phi}.$$

La perte de moment cinétique par unité de temps est l'intégrale de cette quantité sur une sphère de rayon r centrée sur les sources. On doit donc avoir

$$\frac{dL_i}{dt} = -\epsilon_{ijk} \oint x^j (-g) t^{kl} n_l dS. \quad (1.67)$$

Nous allons retrouver ce résultat à partir de la relation (1.33). On a

$$\begin{aligned} \frac{dL_i}{dt} &= \epsilon_{ijk} \oint \left(x^j \lambda^{k0l\mu}{}_{,\mu 0} + \lambda^{j0kl}{}_{,0} \right) n_l dS \\ &= \epsilon_{ijk} \oint \left(x^j \lambda^{k\alpha l\mu}{}_{,\mu\alpha} - x^j \lambda^{kml\mu}{}_{,\mu m} + \lambda^{j0kl}{}_{,0} \right) n_l dS. \end{aligned}$$

On peut récrire le premier terme en tenant compte de la définition (1.31) et les deux autres en exploitant le théorème de Gauss :

$$\frac{dL_i}{dt} = \epsilon_{ijk} \oint x^j h^{k\alpha l}{}_{,\alpha} n_l dS + F_i$$

où

$$\begin{aligned} F_i &= \epsilon_{ijk} \int \left(-x^j \lambda^{kml\mu}{}_{,\mu m} + \lambda^{j0kl}{}_{,0} \right)_{,l} dx^1 dx^2 dx^3 \\ &= \epsilon_{ijk} \int \left(-\lambda^{kmj\mu}{}_{,\mu m} - x^j \lambda^{kml\mu}{}_{,\mu ml} + \lambda^{j0kl}{}_{,0l} \right) dx^1 dx^2 dx^3 \\ &= \epsilon_{ijk} \int \left(\lambda^{jmk\mu}{}_{,\mu m} - x^j \lambda^{kml\mu}{}_{,\mu ml} + \lambda^{j0k\mu}{}_{,0\mu} - \lambda^{j0k0}{}_{,00} \right) dx^1 dx^2 dx^3. \end{aligned}$$

Le premier terme a été transformé en jouant sur l'antisymétrie en j et k du tenseur de Levi-Civita. Le deuxième terme est nul car λ est antisymétrique sur les indices m et l par rapport auxquels on dérive. Le quatrième est nul également car il résulte du produit contracté du tenseur de Levi-Civita, antisymétrique en j et k , par une expression symétrique sur ces deux indices. Il reste

$$F_i = \epsilon_{ijk} \int \lambda^{j\nu k\mu}{}_{,\mu\nu} dx^1 dx^2 dx^3$$

$$\begin{aligned}
&= \epsilon_{ijk} \int h^{jk}{}_{,\nu} dx^1 dx^2 dx^3 \\
&= -\epsilon_{ijk} \int h^{jk\nu}{}_{,\nu} dx^1 dx^2 dx^3 \\
&= -\epsilon_{ijk} \int (-g) (T^{jk} + t^{jk}) dx^1 dx^2 dx^3,
\end{aligned}$$

vu la définition du pseudo-tenseur d'énergie-quantité de mouvement. Les quantités F_i sont donc nulles, comme produit contracté d'une quantité antisymétrique par une quantité symétrique sur les indices j et k . On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{dL_i}{dt} &= \epsilon_{ijk} \oint x^j h^{k\alpha l}{}_{,\alpha} n_l dS \\
&= -\epsilon_{ijk} \oint x^j h^{kl\alpha}{}_{,\alpha} n_l dS \\
&= -\epsilon_{ijk} \oint x^j (-g) (T^{kl} + t^{kl}) n_l dS \\
&= -\epsilon_{ijk} \oint x^j (-g) t^{kl} n_l dS,
\end{aligned}$$

comme annoncé en (1.67), si l'on intègre sur une sphère en dehors des sources matérielles.

Chapitre 2

La génération des ondes gravitationnelles

2.1 Le développement en série des potentiels multipolaires

Soit un point P de coordonnées cartésiennes $\vec{r} = (x, y, z)$. Nous nous proposons d'étudier le potentiel gravitationnel newtonien Φ généré par une source sphérique de masse M placée en un point $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. On sait que

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{GM}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}.$$

Posons $r = |\vec{r}|$, $r_0 = |\vec{r}_0|$. La méthode dite de *développement en série des potentiels multipolaires* est une ingénieuse technique permettant de calculer ce potentiel de façon approchée mais facile à exploiter. Elle consiste à décomposer le potentiel en une série :

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{+\infty} \Phi^{(l)}(\vec{r}) \quad (2.1)$$

dont chaque terme $\Phi^{(l)}$ varie comme $(r_0/r)^{l+1}$, et qui donc converge rapidement si $r_0 \ll r$. Par le théorème de Taylor, on peut en effet écrire

$$\begin{aligned} \Phi^{(l)} &= -GM \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = l} \frac{(-x_0)^{\alpha_1} (-y_0)^{\alpha_2} (-z_0)^{\alpha_3}}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} \left(\frac{\partial^l}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2} \partial z^{\alpha_3}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \right)_{\vec{r}_0=0} \\ &= (-)^{l+1} GM \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = l} \frac{(x_0)^{\alpha_1} (y_0)^{\alpha_2} (z_0)^{\alpha_3}}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} \frac{\partial^l}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2} \partial z^{\alpha_3}} \frac{1}{r}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Il est aisé de calculer les premiers termes de ce développement. On a

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{n}}{r^2} + \frac{3(\vec{r}_0 \cdot \vec{n})^2 - \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_0}{2r^3} + O(1/r^4), \quad (2.3)$$

en notant

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.4)$$

le *vecteur radial unitaire* au point P . La quantité $\Phi^{(0)}$ est ainsi égale au potentiel généré par une seule source sphérique de masse M placée à l'origine :

$$\Phi^{(0)}(x, y, z) = -\frac{GM}{r}.$$

Le deuxième terme du développement, appelé *potentiel dipolaire*, est donné par

$$\Phi^{(1)}(x, y, z) = \frac{-GM}{r^2} \vec{r}_0 \cdot \vec{n}.$$

Le troisième terme a reçu le nom de *potentiel quadrupolaire* et vaut

$$\Phi^{(2)}(x, y, z) = \frac{-G}{2r^3} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 Q_{ij} n_i n_j$$

où

$$(\mathbf{Q}) = M \begin{pmatrix} 3x_0^2 - r_0^2 & 3x_0 y_0 & 3x_0 z_0 \\ 3x_0 y_0 & 3y_0^2 - r_0^2 & 3y_0 z_0 \\ 3x_0 z_0 & 3y_0 z_0 & 3z_0^2 - r_0^2 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

est un *tenseur d'ordre deux* appelé *moment quadrupolaire* généré par la particule de masse M .

Il existe une autre façon d'écrire les divers moments multipolaires $\Phi^{(l)}$, fondée sur la théorie des *harmoniques sphériques*. Si (θ_0, φ_0) et (θ, φ) désignent les angles sphériques des vecteurs \vec{r}_0 et \vec{r} , respectivement, dans les axes cartésiens utilisés, on a

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{r_0^l}{r^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} Y_l^{m*}(\theta, \varphi) Y_l^m(\theta_0, \varphi_0) \quad (2.6)$$

donc

$$\Phi^{(l)} = \frac{G}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_l^{m*}(\theta, \varphi) M_l^m \quad (2.7)$$

où les $2l+1$ quantités

$$M_l^m = -M r_0^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_l^m(\theta_0, \varphi_0) \quad (2.8)$$

constituent le moment 2^l -polaire engendré par la masse M . On retrouve les résultats obtenus ci-dessus pour $\Phi^{(0)}$, $\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(2)}$ en notant que

$$\begin{aligned} Y_0^0(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ Y_1^{\pm 1}(\theta, \varphi) &= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi} \\ Y_1^0(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\ Y_2^{\pm 2}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi} \\ Y_2^{\pm 1}(\theta, \varphi) &= \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi} \\ Y_2^0(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1). \end{aligned}$$

De tout ceci en déduit le potentiel engendré par un système de deux corps à symétrie sphérique 1 et 2, de masses respectives M_1 et M_2 , et qui nous servira d'exemple à plusieurs

reprises au fil de cet exposé. Si aucune force extérieure n'agit sur ce système, son *centre de masse* — que nous noterons O — se meut en translation rectiligne et uniforme par rapport à l'espace absolu et des axes cartésiens (Ox, Oy, Oz) déterminent un repère inertiel. Appelons $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ les coordonnées de la source 1 et $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ celles de la source 2 (figure 2.1). Soit $r_1 = |\vec{r}_1|$ et $r_2 = |\vec{r}_2|$. Les particules 1 et 2 sont séparées par une

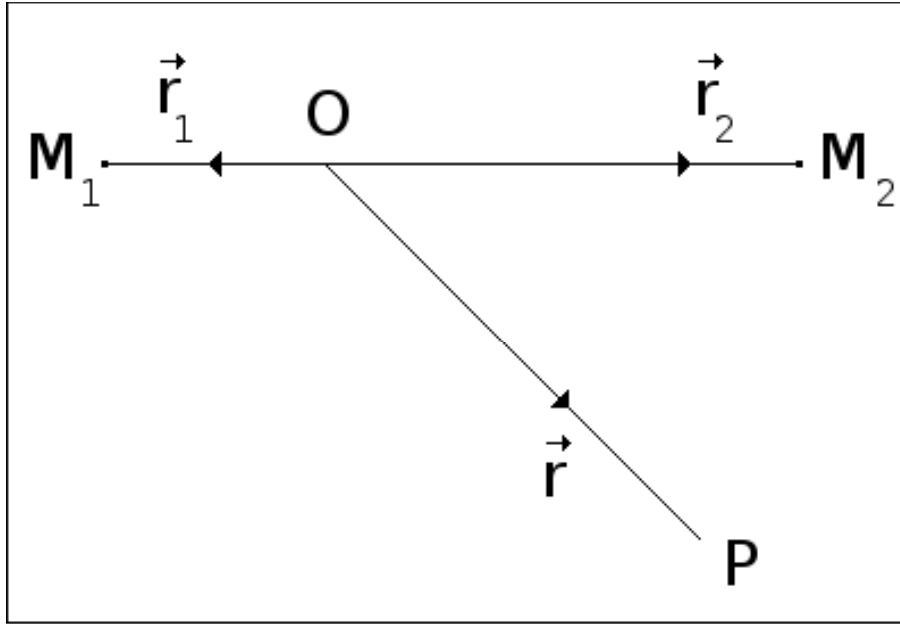


FIGURE 2.1: Calcul, au point P , du potentiel engendré par deux particules 1 et 2.

distance

$$d = r_1 + r_2. \quad (2.9)$$

Dans la théorie de Newton, le potentiel gravitationnel engendré par une distribution de particules est égal à la somme des potentiels individuels (cette propriété résulte de la linéarité de la théorie). La quantité $\Phi^{(0)}$ est donc égale au potentiel généré par une seule source sphérique de masse $M_1 + M_2$ placée à l'origine :

$$\Phi^{(0)}(x, y, z) = -\frac{G(M_1 + M_2)}{r}.$$

Le *potentiel dipolaire* est donné par

$$\Phi^{(1)}(x, y, z) = \frac{-G}{r^2} \vec{D} \cdot \vec{n}$$

où

$$\vec{D} = M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2 \quad (2.10)$$

est le vecteur *moment dipolaire du système des deux particules*, calculé par rapport à l'origine O . Or, nous avons situé celle-ci au centre de masse : la quantité \vec{D} est donc nulle par définition.

Le *potentiel quadrupolaire* vaut

$$\Phi^{(2)}(x, y, z) = \frac{-G}{2r^3} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 Q_{ij} n_i n_j$$

où le moment quadrupolaire \mathbf{Q} du système est la somme des moments quadrupolaires relatifs à chacune des deux particules, donnés par (2.5).

En résumé, on a

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{G(M_1 + M_2)}{r} - \frac{G}{2r^3} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 Q_{ij} n_i n_j + O(1/r^4). \quad (2.11)$$

Nous allons traiter deux exemples concrets en supposant que les deux particules étudiées plus haut se trouvent, soit reliées par un ressort de longueur au repos L et de constante de raideur k (mouvement harmonique ; l'interaction gravitationnelle entre les deux particules est négligeable, ainsi que la masse du ressort), soit en mouvement circulaire uniforme autour de leur centre de masse. On obtient le potentiel newtonien de chacun de ces systèmes en écrivant simplement, dans la relation (2.11), le moment quadrupolaire correspondant, c'est-à-dire

$$(\mathbf{Q}) = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \begin{pmatrix} -[A \sin(\omega t) + L]^2 & 0 & 0 \\ 0 & -[A \sin(\omega t) + L]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2[A \sin(\omega t) + L]^2 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

pour deux particules reliées par un ressort le long de l'axe des z , où A désigne l'amplitude du mouvement et où la vitesse angulaire est donnée par

$$\omega = \sqrt{\frac{k(M_1 + M_2)}{M_1 M_2}}; \quad (2.13)$$

et

$$(\mathbf{Q}) = (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2) \begin{pmatrix} 3 \cos^2(\omega t) - 1 & 3 \sin(\omega t) \cos(\omega t) & 0 \\ 3 \sin(\omega t) \cos(\omega t) & 3 \sin^2(\omega t) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

pour deux particules en rotation dans le plan (x, y) , si l'on mesure les angles à partir de l'axe x . Le paramètre ω est quelconque si l'on considère le champ généré par une haltère en rotation (deux masses sans interaction gravitationnelle reliées par un barreau de masse négligeable) et vaut

$$\omega = \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{(r_1 + r_2)^3}} \quad (2.15)$$

si la rotation résulte de l'interaction gravitationnelle entre les deux corps.

2.2 Approche heuristique

La théorie newtonienne repose sur l'idée d'une *gravitation universelle*, de *portée* et de *vitesse de propagation* infinies : tous les corps s'attirent selon une loi unique valable sur la Terre comme dans les cieux, et toute modification survenue à l'un d'entre eux quelque part à un moment donné, se fait ressentir immédiatement et partout dans l'espace. Ainsi, de partout dans l'espace et à tout instant, les lignes de champ pointent en direction d'une source ponctuelle, quel que soit son mouvement.

Newton avait remarqué le caractère irrationnel d'une action à distance instantanée mais il s'en accommodait : « hypothèses non fingo », commenta-t-il, « je ne forge pas d'hypothèses ». Sa théorie, non seulement se trouvait en accord avec l'observation, mais aussi a

permis de prévoir quantité de phénomènes terrestres et astronomiques. C'est d'ailleurs bien le moins que l'on puisse attendre d'une lecture scientifique du monde. Cependant, peut-on affirmer *comprendre* ce que l'on n'est même pas capable d'*imaginer* ? En fait, l'être humain ne peut concevoir que des interactions de contact se propageant de proche en proche, et il paraît plus naturel de supposer qu'un « message » se déplace à une vitesse *finie* de mesure c , pour « informer » progressivement tout l'espace d'une modification survenue au niveau des sources.

Par définition, cette hypothèse dégage la place nécessaire à la possibilité d'une propagation de la gravité par ondes. Nous allons tenter d'en construire une image mentale simple mais aussi pertinente que possible, en développant une argumentation heuristique basée sur l'électromagnétisme de Maxwell, théorie cohérente où le champ électrique joue le rôle et possède, en première approximation, les propriétés que nous allons attribuer au champ gravifique. Certes, celles-ci résultent, en définitive, de la relativité générale. Mais notre objectif, dans cette section, est d'*induire* les propriétés ondulatoires de la gravitation en partant de la théorie de Newton, et pas de les *déduire* d'une théorie achevée.

A la lumière de ce nouveau postulat, considérons alors la situation suivante. Une particule ponctuelle, initialement au repos à l'origine O des coordonnées, prend soudain au temps $t = 0$ une accélération a pendant un bref instant Δt qui l'amène au point O' , et poursuit ensuite sa route en mouvement rectiligne et uniforme avec la vitesse acquise, que nous supposons beaucoup plus petite que c :

$$\Delta V = a\Delta t \ll c. \quad (2.16)$$

Pour fixer les idées, supposons l'accélération dirigée vers la droite le long d'un axe horizontal. Quel est l'aspect des lignes de champ au temps $t > 0$?

Dans les régions de l'espace situées en-dehors d'une sphère S de centre O et de rayon

$$r = ct,$$

l'information concernant l'accélération n'est pas encore parvenue et les lignes de champ continuent à converger vers l'origine.

Entre la sphère S et une deuxième sphère S' de rayon

$$r' = c(t - \Delta t)$$

centrée sur O' , se trouve l'information « la particule accélère ». Si

$$\Delta t \ll t, \quad (2.17)$$

on peut considérer que S' est également centrée sur l'origine : pratiquement, la région entre les deux sphères est alors une couronne sphérique centrée sur l'origine, de rayon r et d'épaisseur $c\Delta t$.

Pour visualiser ce qui se passe à l'intérieur de S' , il faut effectuer la remarque importante suivante : *si une particule source se déplace* en mouvement rectiligne et uniforme *par rapport à l'espace absolu, les lignes de champ la suivent en continuant à converger vers elle, comme si la vitesse de propagation de la gravitation était infinie !* En quelque sorte, le champ anticipe la position d'une source possédant une vitesse constante. En effet, dans le référentiel concomitant de la particule, celle-ci se trouve au repos et engendre des lignes de force statiques et radiales ; et d'après le principe de relativité de Galilée et Descartes,

cette propriété doit rester vraie quel que soit le référentiel inertiel dans lequel on l'envisage.¹ Ainsi, à l'intérieur de S' les lignes de champ suivent instantanément la particule en translation uniforme.

En raccordant continûment les lignes de champ d'une région à l'autre on obtient la figure 2.2.

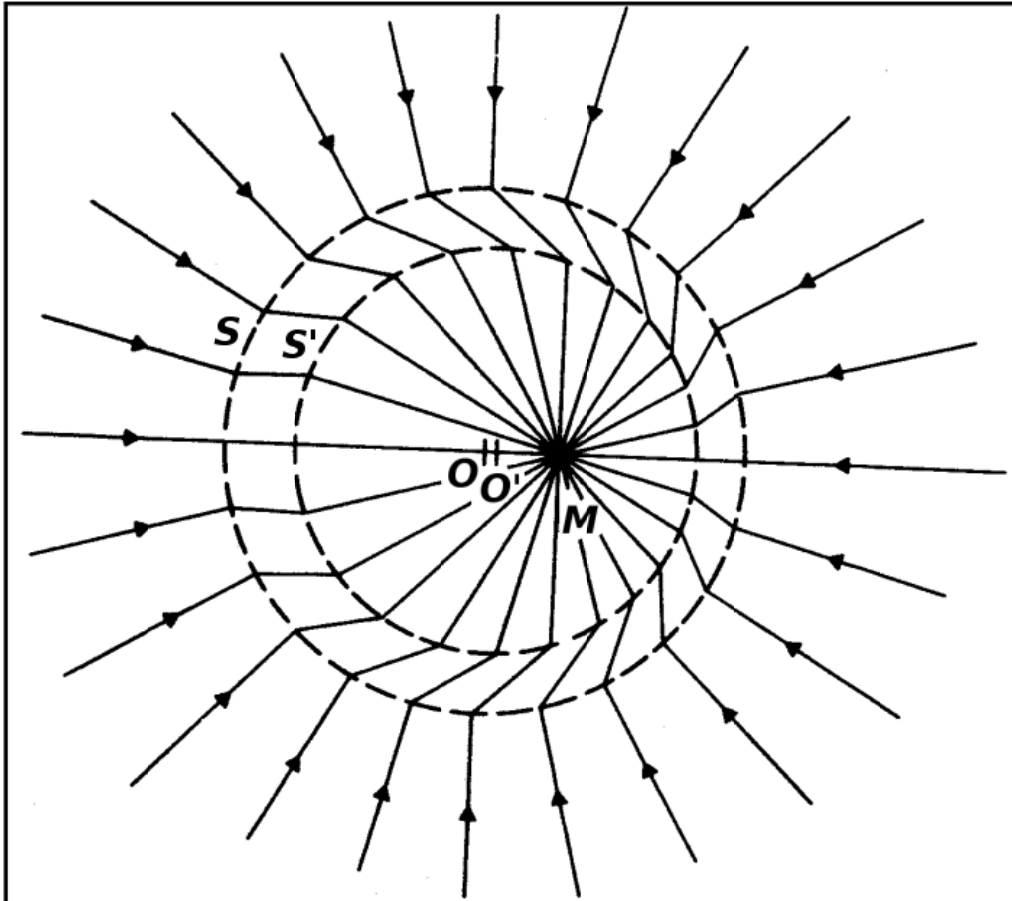


FIGURE 2.2: En $t = 0$ une particule de masse M , initialement immobile en O , est accélérée horizontalement vers la droite pendant un bref instant Δt , ce qui l'amène en O' . L'onde gravitationnelle est créée pendant cette phase d'accélération : au temps t , elle se trouve localisée entre une sphère S de rayon $r = ct$ et une sphère S' de rayon $r' = c(t - \Delta t)$. En-dehors de cette coquille, les lignes de champ possèdent la structure « en forme d'oursin » évoquant un champ statique. (Adapté du livre de H.C. Ohanian, *Classical Electrodynamics*, Allyn and Bacon, 1988.)

Au temps $t \gg \Delta t$, les centres des deux « pelotes d'aiguilles » sont séparés, approxima-

1. L'accélération est en effet vectorielle pour le groupe de Galilée : il en va donc de même pour le champ gravifique newtonien. Dans une théorie complète, il faudrait s'inquiéter des conséquences de l'hypothèse de la finitude de la vitesse c de propagation de la gravitation, sur la nature du groupe de transformations permettant de passer d'un référentiel inertiel à un autre. En électromagnétisme, il s'agit du groupe de Lorentz : il en résulte, pour les lignes de champ électrique, la propriété mentionnée dans le texte, à la nuance près que le champ n'est plus isotrope pour des vitesses de l'ordre de c . Nous n'envisageons pas ici l'équivalent d'un champ magnétique, pourtant essentiel dans la théorie de Maxwell car il contribue pour moitié à l'énergie émise sous forme ondulatoire.

tivement, par la distance $\Delta V t = \Delta V r/c$, et comme $\Delta V \ll c$ on a

$$\Delta V t \ll r.$$

Les lignes de champ émanant de chacun de ces deux centres dans la direction θ sont alors distantes de

$$\Delta V t \sin \theta = \Delta V/c r \sin \theta \ll r.$$

La ligne de gauche intersecte la couronne de rayon r perpendiculairement sur sa surface extérieure S et celle de droite, perpendiculairement (moyennant les approximations effectuées ci-dessus) sur sa surface intérieure S' . On peut considérer qu'elles sont *toutes les deux* orthogonales à S et S' . Dans la direction θ , une ligne de champ pénétrant à l'intérieur de la couronne subit un décalage latéral égal à $\Delta V/c r \sin \theta$ pour un décalage radial égal à $c \Delta t$ (figure 2.3). La densité des lignes de champ à l'intérieur d'un faisceau mince de direction θ se trouve ainsi multipliée par $a \sin \theta r/c^2$.

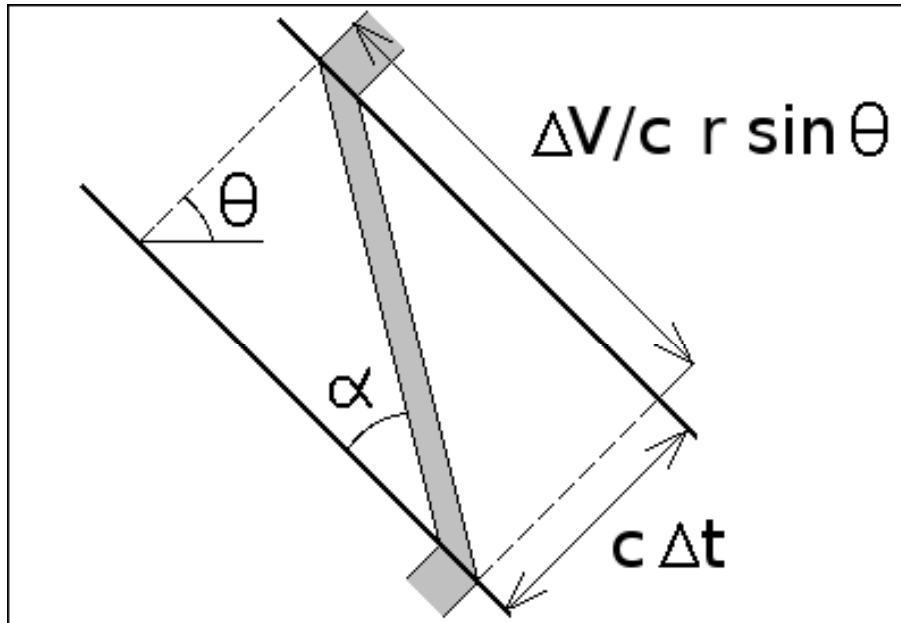


FIGURE 2.3: La couronne sphérique d'épaisseur $c\Delta t$, où se trouvent localisées les lignes de champ générées lors de l'accélération d'une particule de masse M , pour r grand et dans la direction déterminant avec l'horizontale un angle θ . En gris on a représenté un tube contenant une quantité donnée de lignes de champ. En pénétrant à l'intérieur de la couronne, elles subissent, dans la direction perpendiculaire au rayon, un décalage linéaire égal à $\Delta V/c r \sin \theta$, formant ainsi un coude d'angle $\pi/2 - \alpha$ où $\alpha = c^2 \Delta t / (\Delta V r \sin \theta)$ est un angle petit si r est suffisamment grand. La direction du champ gravitationnel correspondant, donc de l'onde, est ainsi transversale et son intensité vaut $g(r, \theta) = 1/\alpha GM/r^2 = a \sin \theta GM/rc^2$, où $a = \Delta V/\Delta t$ désigne l'accélération de la particule. On doit ce raisonnement à J.J. Thomson.

Or, l'intensité du champ gravifique varie proportionnellement à la concentration des lignes de champ. C'est évident dans le cas d'une seule particule : le nombre de lignes par unité de surface sphérique centrée sur la source, décroît comme l'inverse du carré de son rayon. Il s'agit là d'une propriété généralisable à des sources quelconques (figure 2.4). En un point P donné, soit une petite surface d'aire dA perpendiculaire à un certain nombre de

lignes de champ. Celles-ci rencontrent perpendiculairement, en un point P' situé plus loin, une autre surface d'aire dA' . On peut démontrer que l'intensité du champ varie comme la densité des lignes :

$$\frac{g(P)}{g(P')} = \frac{dA'}{dA}. \quad (2.18)$$

Cette conséquence du *théorème de Gauss* n'est correcte que si le « tube » canalisant les

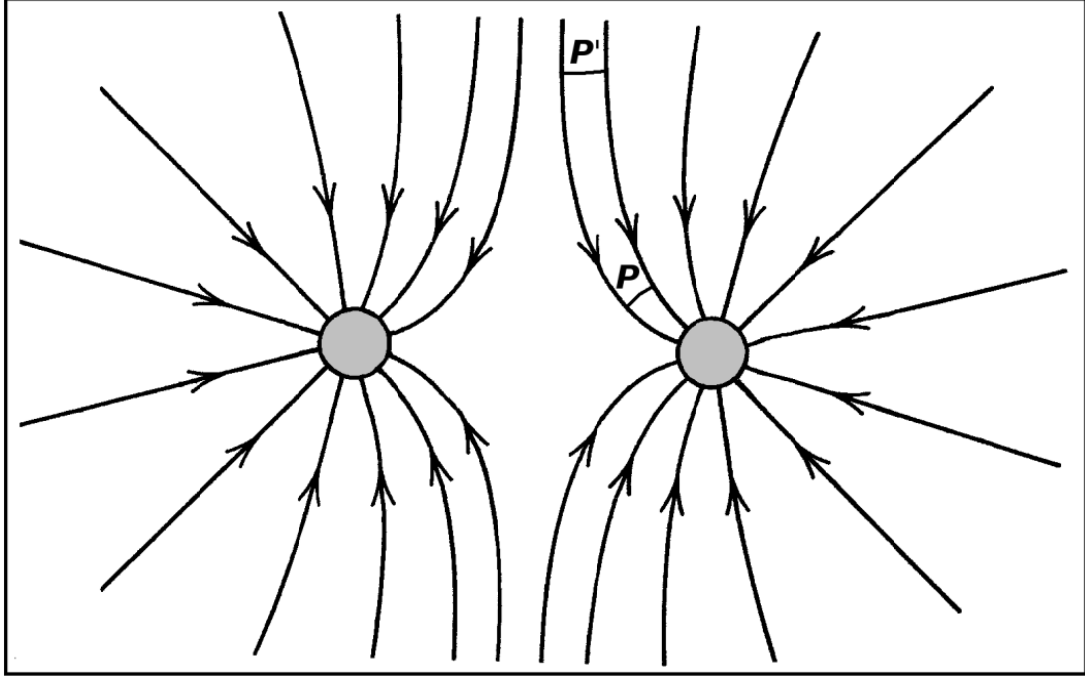


FIGURE 2.4: Source constituée de deux sphères de masses identiques. Par symétrie, le champ doit être nul au milieu du segment de droite qui les relie, et effectivement dans son voisinage les lignes de champ se raréfient considérablement.

lignes ne contient aucune source.

Revenons à la figure 2.3. Juste en-dehors de la couronne, le champ prend la valeur $g = GM/r^2$. Par conséquent, pour r suffisamment grand, à l'intérieur de la couronne la norme du vecteur \vec{g} , caractérisant l'onde gravitationnelle, est donnée par

$$\begin{aligned} g(r, \theta) &= \frac{a \sin \theta r}{c^2} \frac{GM}{r^2} \\ &= \frac{a \sin \theta GM}{rc^2}. \end{aligned}$$

Elle varie comme l'inverse de la distance à la source : asymptotiquement, le champ de l'onde domine le champ statique. De plus, sa direction est alors orthoradiale.

Résumons les hypothèses de travail utilisées pour parvenir à cette conclusion. Posant $d = \Delta V \Delta t$ et $\lambda = c \Delta t$, les conditions (2.16) et (2.17) s'écrivent, respectivement,

$$d \ll \lambda \quad (\text{mouvements lents}) \quad (2.19)$$

$$\lambda \ll r \quad (\text{observateur éloigné}). \quad (2.20)$$

Enfin, pour que la contribution de l'onde domine le champ statique radial en étant elle-même transversale, c'est-à-dire pour que l'angle α tende vers 0 dans la figure 2.3, il faut

$$\lambda^2 \ll r d. \quad (2.21)$$

Nous supposons que notre raisonnement reste valable si la source effectue un mouvement périodique de période T , d'amplitude caractéristique d et de vitesse caractéristique $V \sim d/T$. (T assumera désormais le rôle de Δt ci-dessus, V celui de ΔV , et la quantité $\lambda = cT$ portera le nom de *longueur d'onde*.) Les hypothèses (2.19), (2.20) et (2.21) déterminent la zone dite *radiative* :

$$\frac{r}{\lambda} \gg \frac{\lambda}{d} \gg 1. \quad (2.22)$$

Dans ces conditions, une particule de masse M soumise à une accélération \vec{a} émet un champ d'ondes gravitationnelles dont la valeur, à grande distance r et dans la direction de vecteur unitaire \vec{n} , est donnée par

$$\vec{g}(t) = \frac{GM}{rc^2} [\vec{n} \Lambda \vec{a}(t')] \Lambda \vec{n}. \quad (2.23)$$

Le symbole t' porte le nom de *temps retardé* et exprime le fait qu'une onde parvenant à la distance r au temps t , résulte d'une accélération survenue à l'origine r/c secondes plus tôt : on a donc

$$t' = t - r/c. \quad (2.24)$$

2.3 La nature quadrupolaire des ondes gravitationnelles

La situation que nous venons de décrire n'est pas réaliste car une particule seule ne peut accélérer spontanément. Pour fixer les idées en raisonnant sur un cas concret, considérons, en gardant les notations de la figure 2.1, un système de deux corps en interaction, localisés à l'intérieur d'une sphère de diamètre donné d contenant l'origine des coordonnées. D'après (2.23) ils émettent, au total, le champ d'ondes

$$\vec{g}(t) = \frac{G}{rc^2} [\vec{n} \Lambda (M_1 \vec{a}_1 + M_2 \vec{a}_2)(t')] \Lambda \vec{n}. \quad (2.25)$$

Or, la quantité $M_1 \vec{a}_1 + M_2 \vec{a}_2$ est nulle en vertu de la loi de conservation de la quantité de mouvement dans un système isolé. Elle est d'ailleurs égale à la dérivée deuxième, par rapport au temps, du moment dipolaire \vec{D} du système [voir (2.10)]. Pour cette raison, on dit qu'une *onde gravitationnelle ne présente pas de composante dipolaire*.²

Faut-il en conclure qu'un système de deux masses ne peut rayonner ? Certainement pas, pour la raison suivante : les deux masses ne sont pas à distance égale de l'observateur P , aussi les informations relatives à leurs accélérations mettent-elles, en fait, des temps *différents* pour y parvenir. La grossière relation (2.24) doit être remplacée par

$$t'_1 = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_1(t'_1)|}{c}, \quad t'_2 = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_2(t'_2)|}{c}, \quad (2.26)$$

respectivement pour chacune des deux sources, et la relation (2.25) devient

$$\vec{g}(t) = \frac{G}{rc^2} \{ \vec{n} \Lambda [M_1 \vec{a}_1(t'_1) + M_2 \vec{a}_2(t'_2)] \} \Lambda \vec{n}. \quad (2.27)$$

2. En électromagnétisme, l'équivalent de ce terme est non nul si la rapport de la charge à la masse n'est pas le même pour toutes les particules.

Les équations (2.26) expriment les temps retardés t'_1 et t'_2 *implicitement* en fonction de t et sont difficiles à résoudre. Mais les hypothèses (2.22) permettent de poursuivre le traitement analytique des calculs.

• *L'observateur est très éloigné de l'origine par rapport à la dimension caractéristique des sources, c'est-à-dire $d \ll r$.*

On peut alors écrire

$$|\vec{r} - \vec{r}_1(t'_1)| = r - \vec{n} \cdot \vec{r}_1(t'_1) + O\left(\frac{d^2}{r}\right), \quad |\vec{r} - \vec{r}_2(t'_2)| = r - \vec{n} \cdot \vec{r}_2(t'_2) + O\left(\frac{d^2}{r}\right), \quad (2.28)$$

donc, vu (2.26) :

$$t'_1 \simeq t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_1(t'_1)}{c}, \quad t'_2 \simeq t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_2(t'_2)}{c}. \quad (2.29)$$

• *Les vitesses des sources sont largement inférieures à la vitesse de propagation de la gravitation, c'est-à-dire $|\vec{V}_1| \ll c$, $|\vec{V}_2| \ll c$ ou encore, $d \ll \lambda$.*

De (2.29), il découle ainsi

$$\begin{aligned} \vec{r}_1(t'_1) &\simeq \vec{r}_1(t - r/c) + O(r_1) \frac{\vec{V}_1(t - r/c)}{c} \simeq \vec{r}_1(t - r/c) \\ \vec{r}_2(t'_2) &\simeq \vec{r}_2(t - r/c) + O(r_2) \frac{\vec{V}_2(t - r/c)}{c} \simeq \vec{r}_2(t - r/c). \end{aligned} \quad (2.30)$$

On obtient finalement une approximation de (2.26) pour la valeur des temps retardés, plus satisfaisante que la relation (2.24) : posant toujours $t' = t - r/c$, on a

$$t'_1 \simeq t' + \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_1(t')}{c}, \quad t'_2 \simeq t' + \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_2(t')}{c}. \quad (2.31)$$

Il est facile d'interpréter ces résultats si le point d'observation P se trouve dans le plan de l'orbite des deux corps (figure 2.5).

On peut maintenant écrire, en notant par un point les dérivées temporelles :

$$\vec{a}_1(t'_1) \simeq \vec{a}_1(t') + \dot{\vec{a}}_1(t') \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_1(t')}{c} \quad (2.32)$$

$$\vec{a}_2(t'_2) \simeq \vec{a}_2(t') + \dot{\vec{a}}_2(t') \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_2(t')}{c}. \quad (2.33)$$

Le deuxième terme constitue bien une petite correction apportée au premier. En effet, dans le cas d'un mouvement borné de vitesse angulaire typique $\omega \simeq V/r$, on a $|\dot{\vec{a}}| \simeq \omega |\vec{a}|$ et le deuxième terme est de l'ordre de $a V/c \ll a$.³

3. Il faut faire ici une remarque technique. En électromagnétisme, le champ d'ondes en $1/r$ généré par une particule de charge Q , soit l'équivalent de la relation (2.23), est donné par

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \frac{\vec{n} \Lambda [(\vec{n} - \vec{V}(t')/c) \Lambda \dot{\vec{a}}(t')]}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{V}(t')/c)^3} + O(V^2/c^2).$$

Il contient des termes en $a V/c$, qui peuvent être négligés pour l'étude du rayonnement dipolaire mais sont du même ordre de grandeur que les deuxièmes termes du développement en série dans (2.32) et (2.33), et doivent donc être pris en compte à partir de ce niveau d'approximation. Le raisonnement intuitif et approché conduisant à (2.23) ne mène pas à dégager de tels termes. C'est la raison pour laquelle, en fait, une partie seulement du moment quadrupolaire apparaît dans les équations (2.34) et (2.35).

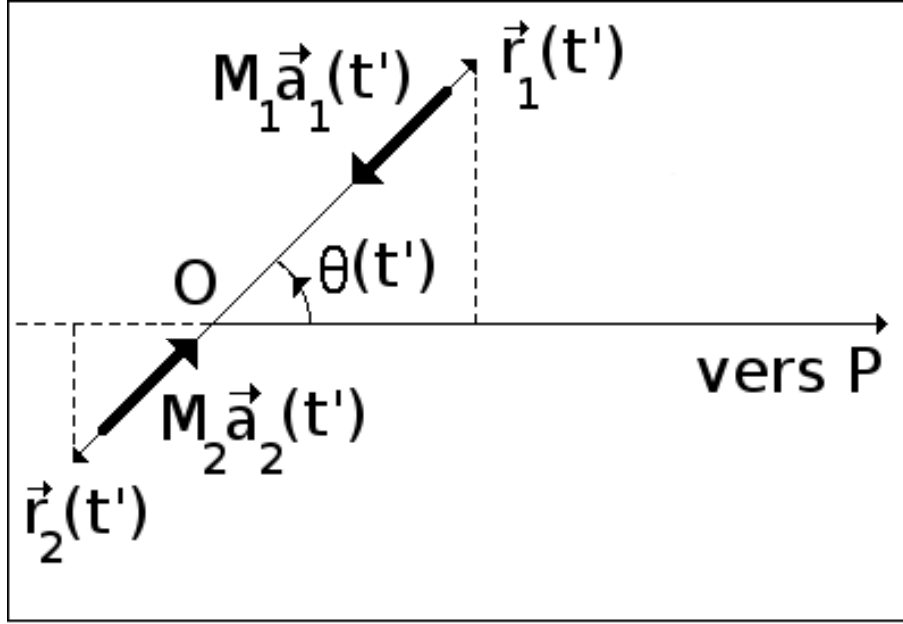


FIGURE 2.5: Si l'observateur P est situé dans le plan de l'orbite des deux corps à une distance r de leur centre de masse O telle que $r \gg r_1$, $r \gg r_2$, alors les vecteurs $\vec{r} - \vec{r}_1$ et $\vec{r} - \vec{r}_2$ sont à peu près parallèles à OP . Dès lors, $|\vec{r} - \vec{r}_1| \simeq r - r_1 \cos \theta$ et $|\vec{r} - \vec{r}_2| \simeq r + r_2 \cos \theta$. Comme on peut prendre les positions des deux sources à l'instant $t' = t - r/c$, les temps retardés sont donnés par $t'_1 = t' + r_1(t') \cos \theta(t')/c$ et $t'_2 = t' - r_2(t') \cos \theta(t')/c$.

Dès lors,

$$M_1 \vec{a}_1(t'_1) + M_2 \vec{a}_2(t'_2) \simeq M_1 \dot{\vec{a}}_1(t') \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_1(t')}{c} + M_2 \dot{\vec{a}}_2(t') \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_2(t')}{c}.$$

Ce vecteur est *non nul* en général. Le champ d'ondes observé dans la direction \vec{n} est alors donné par la relation (2.27).

Notamment, lorsque deux particules oscillent, le long de l'axe des z , aux extrémités d'un ressort de longueur propre L et de constante de raideur k , on obtient

$$\begin{aligned} M_1 \vec{a}_1(t'_1) + M_2 \vec{a}_2(t'_2) &= \frac{-1}{c} Ak\omega n_3 [A \sin(\omega t') + L] \cos(\omega t') (0, 0, 1) \\ \vec{g}(t) &\sim \frac{G}{rc^3} [\vec{n} \Lambda \frac{d^3 \vec{Q}(t')}{dt'^3}] \Lambda \vec{n} \end{aligned} \quad (2.34)$$

où

$$Q_i = \sum_{j=1}^3 Q_{ij} n_j.$$

Ainsi, le champ se calcule à partir de l'expression (2.12), en dérivant trois fois le moment quadrupolaire des deux particules vibrant aux extrémités du ressort. Pour cette raison, on peut qualifier l'expression (2.34) de *composante quadrupolaire* de l'onde gravitationnelle.

Si deux sources gravitent l'une autour de l'autre en mouvement circulaire uniforme dans le plan (x, y) à des distances respectives r_1 et r_2 de l'origine, on obtient, dans la direction $\vec{n} = (1, 0, 0)$ (voir figure 2.6) :

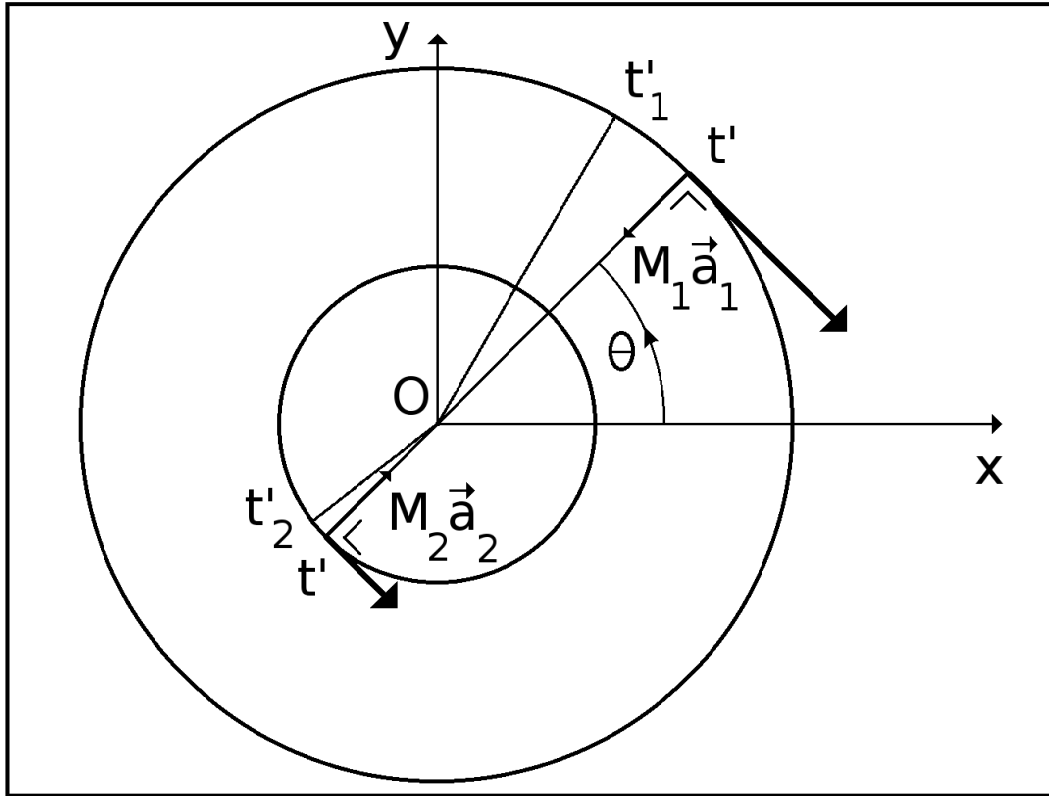


FIGURE 2.6: Soit deux particules sources de masses respectives M_1 et M_2 , en mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω . On a $\theta(t') = \omega t'$. Les vecteurs $M_1 \vec{a}_1$ et $M_2 \vec{a}_2$ s'annulent mutuellement à tout instant (il n'existe pas d'onde gravitationnelle dipolaire). Mais la variation du premier entre les temps retardés t' et $t'_1 > t'$ possède la même direction et le même sens que la variation du second entre les temps retardés t' et $t'_2 < t'$. Ces deux termes (vecteurs tangents aux cercles, en gras) s'additionnent pour générer la première contribution non nulle à l'émission de rayonnement gravitationnel, dite quadrupolaire.

$$\begin{aligned}
 M_1 \vec{a}_1(t'_1) + M_2 \vec{a}_2(t'_2) &= \frac{1}{c} (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2) \omega^3 [\sin(\omega t') \cos(\omega t'), -\cos^2(\omega t'), 0] \\
 \vec{g}(t) &\sim [0, \frac{G}{rc^3} \frac{d^3 Q_{12}(t')}{dt'^3}, 0],
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

où apparaît cette fois la dérivée troisième du moment quadrupolaire de deux particules en rotation, déduite de l'expression (2.14).

2.4 Le point de vue de la relativité générale

Le principe de covariance générale confère à la gravitation un statut privilégié qui la distingue fondamentalement des autres interactions et rend parfois délicate l'intégration de certaines habitudes de pensée fécondes dans d'autres domaines. Expliquons-nous par un exemple. Le concept de houle est pertinent parce que les mouvements se réfèrent toujours à la surface de l'océan en l'absence de toute perturbation, et on rend naturellement compte des oscillations d'un bouchon de liège sur l'eau par rapport à ce référentiel privilégié. Mais l'onde n'apparaît évidemment pas dans le référentiel du bouchon, immobile

par rapport à lui-même. Or, d'après le principe de covariance générale, pour étudier l'effet d'une onde gravitationnelle sur une particule il est parfaitement légitime de raisonner dans le référentiel attaché à cette particule. On se heurte donc à de sérieux problèmes dès qu'il s'agit, par exemple, de décrire des flux d'énergie. Aucun tenseur ne peut en rendre compte puisque ce flux peut toujours être annulé par un changement de coordonnées ; et si un tenseur est nul dans un système de coordonnées, il doit l'être dans tous les systèmes. En d'autres termes, dans l'esprit de la relativité générale on ne peut concevoir une perturbation gravitationnelle se propageant dans un cadre d'espace-temps prédéterminé puisque, en fait, toute solution des équations d'Einstein détermine les propriétés de l'espace-temps lui-même. Cette particularité de la théorie a donné cours à d'âpres débats et l'existence même des ondes gravitationnelles fut contestée pendant des années.

Cependant, le concept de propagation de la gravitation par ondes peut s'avérer fécond si l'on accepte de sacrifier la philosophie générale de la théorie en masquant la nature tensorielle des équations d'Einstein et en privilégiant artificiellement la solution de Minkowski.⁴

Partons des équations d'Einstein exactes écrites sous la forme (1.14)

$$\left[(-g) (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) \right]_{,\alpha\beta} = \frac{16\pi G}{c^4} (-g) (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})$$

et posons⁵

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \bar{h}^{\mu\nu}. \quad (2.36)$$

Le membre de gauche prend la forme

$$\left[(\eta^{\mu\nu} - \bar{h}^{\mu\nu}) (\eta^{\alpha\beta} - \bar{h}^{\alpha\beta}) - (\eta^{\mu\alpha} - \bar{h}^{\mu\alpha}) (\eta^{\nu\beta} - \bar{h}^{\nu\beta}) \right]_{,\alpha\beta}$$

c'est-à-dire

$$\left(-\eta^{\mu\nu} \bar{h}^{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\beta} \bar{h}^{\mu\nu} + \eta^{\mu\alpha} \bar{h}^{\nu\beta} + \eta^{\nu\beta} \bar{h}^{\mu\alpha} \right)_{,\alpha\beta} + \left(\bar{h}^{\mu\nu} \bar{h}^{\alpha\beta} - \bar{h}^{\mu\alpha} \bar{h}^{\nu\beta} \right)_{,\alpha\beta}.$$

Dans la jauge de Lorenz où nous travaillerons désormais, c'est-à-dire un système de coordonnées où

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \quad (2.37)$$

4. K. Thorne, *Multipole expansions of gravitational radiation*, Reviews of Modern Physics **52**, 2, pp. 299-339, § V (1980) ; K. Thorne, *The theory of gravitational radiation : an introductory review*, publié dans *Gravitational radiation*, éditeurs N. Deruelle et T. Piran, North Holland, Amsterdam, 1983, pp. 1-55, §3-1-3.

5. Dans le cas de la théorie linéarisée, $\bar{h}^{\mu\nu}$ coïncide avec la quantité habituelle $h^{\mu\nu} - h/2 \eta^{\mu\nu}$. En effet,

$$\begin{aligned} g &= -1 + h_{00} - h_{11} - h_{22} - h_{33} + O(2) \\ &= -1 - h^0_0 - h^1_1 - h^2_2 - h^3_3 + O(2) \\ &= -(1 + h) + O(2) \\ \sqrt{-g} &= 1 + h/2 + O(2) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \bar{h}^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} - \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \\ &= \eta^{\mu\nu} - (1 + h/2)(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) + O(2) \\ &= h^{\mu\nu} - h/2 \eta^{\mu\nu} + O(2). \end{aligned}$$

ce terme vaut ainsi

$$-\square \bar{h}^{\mu\nu} + \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\alpha\beta} \bar{h}^{\alpha\beta} - \bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\beta} \bar{h}^{\nu\beta}{}_{,\alpha}.$$

Les équations d'Einstein exactes s'écrivent alors

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \tau^{\mu\nu} \quad (2.38)$$

où le « tenseur » d'énergie-impulsion effectif de la matière et du champ gravitationnel est donné par

$$\tau^{\mu\nu} = -g(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) + \frac{c^4}{16\pi G} \left(\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\beta} \bar{h}^{\nu\beta}{}_{,\alpha} - \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\alpha\beta} \bar{h}^{\alpha\beta} \right). \quad (2.39)$$

Remarquons que

$$\tau^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \quad (2.40)$$

En effet, la divergence du premier terme de (2.39) s'annule en vertu de (1.11). Quant à la divergence du second terme, elle vaut

$$\begin{aligned} \left(\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\beta} \bar{h}^{\nu\beta}{}_{,\alpha} - \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\alpha\beta} \bar{h}^{\alpha\beta} \right)_{,\nu} &= \bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\beta\nu} \bar{h}^{\nu\beta}{}_{,\alpha} + 0 - 0 - \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\alpha\beta} \bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\nu} \\ &= 0, \end{aligned}$$

les calculs étant toujours effectués dans la jauge de Lorenz. Cette propriété est d'ailleurs bien compatible avec la jauge, puisque

$$(\square \bar{h}^{\mu\nu})_{,\nu} = \square (\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu}) = 0.$$

La théorie des distributions permet d'écrire une solution particulière de (2.38) sous la forme d'une intégrale retardée :

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{\tau^{\mu\nu} \left(t' = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}, \vec{x}' \right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}'. \quad (2.41)$$

La figure 2.7 en explique la signification physique. Quelques-unes de ses propriétés sont exposées en annexe B.

2.5 Approximations pour le calcul de l'intégrale retardée

En fait, l'expression (2.41) consiste en une écriture, assez formelle, des équations d'Einstein sous forme d'équation intégrale plutôt qu'une solution, car $\bar{h}^{\mu\nu}$ apparaît explicitement dans $\tau^{\mu\nu}$. Cependant, quelques approximations vont nous permettre d'en déduire des solutions pour $\bar{h}^{\mu\nu}$. Elles reposent toutes sur l'idée de développer l'intégrand en série, ce qui peut être réalisé de trois façons différentes : par rapport à la distance $|\vec{x} - \vec{x}'|$ entre les sources et l'observateur ; par rapport à la vitesse des sources (plus précisément, il s'agit alors de développer en série l'argument de $\tau^{\mu\nu}$, ce qui revient à faire apparaître les puissances successives de $1/c$) ; ou par rapport à l'intensité du champ (on développe alors $\bar{h}^{\mu\nu}$ en série de puissances de la constante de Cavendish G). Bien entendu, on peut combiner ces développements pour étudier, par exemple, un champ fort doté de vitesses importantes. Nous allons détailler ces propos, en précisant d'emblée que le but à atteindre est l'approximation la plus basse compatible avec l'existence des ondes gravitationnelles.

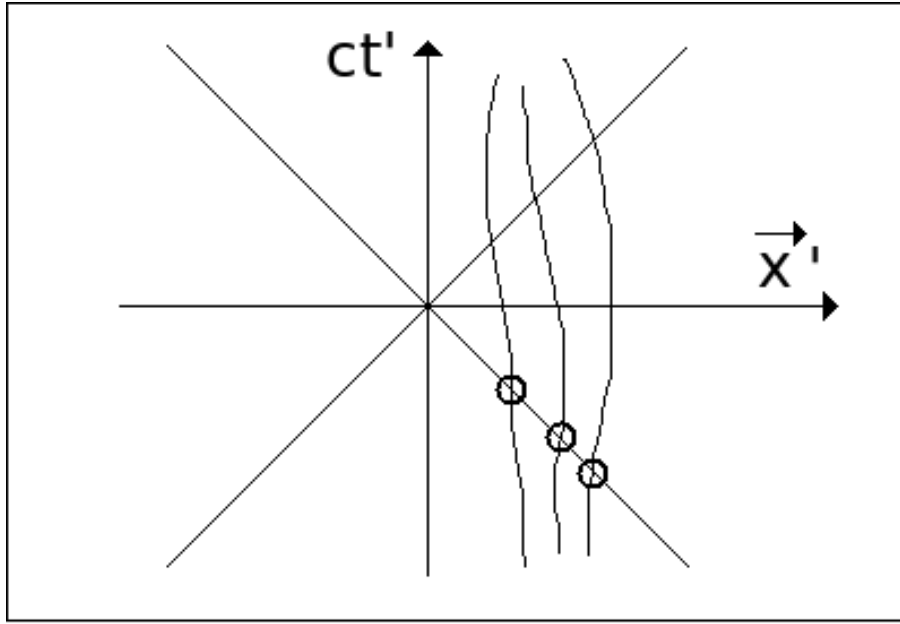


FIGURE 2.7: Un observateur de coordonnées (ct, \vec{x}) (placé ici à l'origine) perçoit l'influence d'une source donnée lorsqu'elle se trouve au point (ct', \vec{x}') , avec $ct' = ct - |\vec{x} - \vec{x}'|$. Le « temps retardé » t' est déterminé par l'intersection de la ligne d'univers de la source avec le cône de lumière passé de l'observateur, mise ici en relief par un petit cercle en gras. Le domaine d'intégration est constitué par l'ensemble des coordonnées spatiales \vec{x}' de ces intersections.

Comme d'habitude, on fixe l'origine des coordonnées au sein des sources. Plus précisément, on travaille dans le référentiel de centre de masse, où la quantité de mouvement spatiale totale est nulle :

$$\int T^{0j} d\vec{x}' = 0$$

et l'on fixe l'origine des coordonnées spatiales au centre de masse :

$$\int T^{00} x'^j d\vec{x}' = 0.$$

Moyennant une *première hypothèse* : $d \ll r$, on peut alors développer $|\vec{x} - \vec{x}'|$ en série de puissances de d/r . La relation (2.3)

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{x}' \cdot \vec{n}}{r^2} + \frac{3(\vec{x}' \cdot \vec{n})^2 - \vec{x}' \cdot \vec{x}'}{2r^3} + \frac{1}{r} O(d/r)^3 \quad (2.42)$$

permet de développer le dénominateur de l'intégrale retardée.

Son inverse

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = r - \vec{x}' \cdot \vec{n} + \frac{\vec{x}' \cdot \vec{x}' - (\vec{x}' \cdot \vec{n})^2}{2r} + r O(d/r)^3 \quad (2.43)$$

apparaît dans l'argument de $\tau^{\mu\nu}$. Mais on ne peut y négliger d devant r , et effectuer ainsi un développement en série de puissances de d/r , sans prendre une nouvelle précaution, car il ne s'agit plus cette fois de comparer les valeurs relatives de ces deux quantités, mais

bien de savoir si $\tau^{\mu\nu}$ varie peu durant l'intervalle de temps d/c . Or, l'ordre de grandeur du temps au cours duquel varie notablement une source de mouvement périodique, est égal à la période T , correspondant à un rayonnement émis de longueur d'onde $\lambda = cT$. Ainsi, il faut adopter une *deuxième hypothèse* : $d/c \ll T$, c'est-à-dire $d \ll \lambda$. Cette condition est certainement réalisée si le mouvement des sources n'est pas relativiste. En effet, la vitesse⁶ d'une particule animée d'un mouvement harmonique de période T et d'amplitude d est donnée par $V \sim d/T = cd/\lambda$, donc $V/c \ll 1$ est équivalent à $d \ll \lambda$.

Ceci étant, si le retard r/c est lui-même négligeable par rapport à la période T du mouvement, c'est-à-dire si $r \ll \lambda$, alors

$$\tau^{\mu\nu} \left(t - \frac{r}{c} \right) \simeq \tau^{\mu\nu}(t)$$

et le champ est quasi-statique. L'expression (2.41) ne peut donc décrire un phénomène ondulatoire que si $\lambda \ll r$.

En résumé, pour un observateur situé dans la *zone dite radiative* : $d \ll \lambda \ll r$, la solution (2.41) des équations d'Einstein peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \bar{h}^{\mu\nu}(t, \vec{x}) &= \frac{4G}{rc^4} \int \tau^{\mu\nu} \left[t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \vec{n}}{c} - \frac{\vec{x}' \cdot \vec{x}' - (\vec{x}' \cdot \vec{n})^2}{2rc} + \dots \right] d\vec{x}' \\ &+ \frac{4G}{r^2c^4} \int \tau^{\mu\nu} \left[t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \vec{n}}{c} - \frac{\vec{x}' \cdot \vec{x}' - (\vec{x}' \cdot \vec{n})^2}{2rc} + \dots \right] (\vec{x}' \cdot \vec{n}) d\vec{x}' \\ &+ \frac{2G}{r^3c^4} \int \dots \end{aligned}$$

où il s'agit de développer en série la fonction $\tau^{\mu\nu}$ au voisinage du temps $t - r/c$. Mais pour connaître l'ordre de grandeur des termes négligés en tronquant la série, il faut encore préciser les hypothèses retenues ci-dessus. En effet, le développement du premier intégrand fournit des termes dont les ordres de grandeur, par ordre croissant, sont respectivement égaux à (rappelons que $\partial\tau^{\mu\nu}/\partial t^n \sim \omega^n \tau^{\mu\nu}$)

$$\frac{G\tau^{\mu\nu}}{rc^4} \left(1, \frac{d}{\lambda}, \frac{d^2}{\lambda^2}, \frac{d^2}{\lambda r}, \frac{d^3}{\lambda^2 r}, \dots \right);$$

tandis que dans le second intégrand ils sont du même ordre, multiplié par d/r . Mais comment comparer d/r à d^2/λ^2 ? Le premier est négligeable devant le second si $\lambda/r \ll d/\lambda$. Cette troisième hypothèse qui, avec les deux autres, rend la relation (2.22) :

$$\boxed{\frac{r}{\lambda} \gg \frac{\lambda}{d} \gg 1,} \quad (2.44)$$

permet de comparer entre eux *tous* les termes issus du développement complet de l'intégrand $\tau^{\mu\nu}/|\vec{x} - \vec{x}'|$ et donc, de maîtriser la troncature. Par exemple, si l'on adopte l'hypothèse de travail consistant à négliger, dans la première intégrale, les puissances de d strictement supérieures à 2, donc de conserver les termes en

$$\frac{G\tau^{\mu\nu}}{rc^4} \left(1, \frac{d}{\lambda}, \frac{d^2}{\lambda^2}, \frac{d^2}{\lambda r} \right),$$

6. Compte tenu de l'invariance lorentzienne, il est clair que, par « vitesses », il faut entendre « vitesses relatives des particules constituant la source ». C'est bien le cas si l'on travaille dans le référentiel du centre de masse.

on doit garder, dans la seconde, ceux en

$$\frac{G\tau^{\mu\nu}}{rc^4} \left(\frac{d}{r}, \frac{d^2}{\lambda r} \right).$$

La troisième intégrale et les suivantes peuvent alors être négligées et on peut écrire, toujours dans la zone radiative,

$$h^{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{rc^4} \int T_1 d\vec{x}' + \frac{4G}{r^2c^4} \int T_2 d\vec{x}' + \frac{G}{r^3c^4} \int O(\tau^{\mu\nu} d^2) d\vec{x}' \quad (2.45)$$

où

$$T_1 = \tau^{\mu\nu}(t - r/c) + \left(\frac{\partial \tau^{\mu\nu}}{\partial t} \right)_{t-r/c} \frac{\vec{x}' \cdot \vec{n}}{c} + \left(\frac{\partial^2 \tau^{\mu\nu}}{\partial t^2} \right)_{t-r/c} \frac{(\vec{x}' \cdot \vec{n})^2}{2c^2} \quad (2.46)$$

$$T_2 = \tau^{\mu\nu}(t - r/c)(\vec{x}' \cdot \vec{n}) + \left(\frac{\partial \tau^{\mu\nu}}{\partial t} \right)_{t-r/c} \frac{3(\vec{x}' \cdot \vec{n})^2 - \vec{x}' \cdot \vec{x}'}{2c}. \quad (2.47)$$

Il reste à préciser $\tau^{\mu\nu}$ et le domaine d'intégration. A priori, celui-ci ne se limite pas à la région de l'espace-temps où se trouvent les sources matérielles (c'est-à-dire, où le tenseur d'énergie-impulsion diffère de zéro), car le champ gravitationnel agit sur lui-même et contribue à l'intégrand. C'est d'ailleurs ce qu'exprime la présence du pseudo-tenseur d'énergie-impulsion $t^{\mu\nu}$ aux côtés de $T^{\mu\nu}$ dans l'expression (2.39).

Raisonnons dans la *zone proche*, définie par $r' \ll \lambda$. Le champ y est quasi-statique, comme nous l'avons rappelé ci-dessus, et on peut négliger la dérivée temporelle des dix potentiels relativistes par rapport à leurs dérivées spatiales. Or, l'hypothèse des sources lentes implique un champ faible.⁷ On sait que, dans ces conditions, le champ gravitationnel est décrit à l'aide d'un seul potentiel Φ vérifiant l'équation de Poisson et donc, newtonien. Du point de vue géométrique, il est associé à la métrique

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad \text{avec} \quad |\Phi/c^2| \ll 1. \quad (2.48)$$

7. L. Landau et E. Lifchitz, *Physique théorique, Tome 2, Théorie des champs*, Mir, 1989, § 87. Dans la géométrie de Schwarzschild, soit une particule de masse propre m_0 et lâchée sans vitesse initiale depuis la coordonnée radiale r_0 . Son énergie, mesurée par un observateur statique de coordonnée radiale r , est donnée par les relations (10.32) et (10.33)

$$E = m_0 c^2 \frac{\sqrt{1 - 2GM/r_0 c^2}}{\sqrt{1 - 2GM/rc^2}}.$$

La particule ne peut être relativiste que si r atteint des valeurs de l'ordre de $2GM/c^2$, cas extrême où l'astre à symétrie sphérique tend vers un trou noir, archétype du « champ fort ».

Dans la zone proche, il est facile de retrouver *a posteriori* la propriété des mouvements lents dans le contexte de la théorie newtonienne : la vitesse de libération d'un astre sphérique de masse M et de rayon R est donnée par $\sqrt{2GM/R}$ et n'est relativiste que si l'astre est comparable au trou noir laplacien, c'est-à-dire un objet newtonien dont la masse est contenue dans une sphère de rayon $R = 2GM/c^2$, où $|\Phi/c^2| = 1$. D'autre part, si une particule de masse M se déplace avec une vitesse \vec{V} non relativiste, la dérivée temporelle du potentiel newtonien qu'elle engendre est bien négligeable par rapport à ses dérivées spatiales. En effet,

$$\begin{aligned} \Phi(t, \vec{x}) &= - \frac{GM}{|\vec{x} - \vec{x}'(t)|} \\ \frac{\partial \Phi(t, \vec{x})}{c \partial t} &= - \frac{GM}{c |\vec{x} - \vec{x}'(t)|^3} [\vec{x} - \vec{x}'(t)] \cdot \vec{V}(t) = \vec{\nabla} \Phi(t, \vec{x}) \cdot \frac{\vec{V}}{c} \\ \left| \frac{\partial \Phi}{c \partial t} \right| &\sim \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \frac{V}{c} \right| \ll \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \right|. \end{aligned}$$

Le pseudo-tenseur d'énergie-impulsion (1.10) d'un tel champ faible et quasi-statique s'obtient en estompant les dérivées temporelles devant les dérivées spatiales et en négligeant les termes d'ordre 3 en Φ ou ses dérivées spatiales :

$$\begin{aligned} t^{00} &= -\frac{7}{8\pi G} \sum \Phi_{,l} \Phi_{,l} \\ t^{0j} &= 0 \\ t^{jk} &= \frac{1}{4\pi G} \left(\Phi_{,j} \Phi_{,k} - \frac{1}{2} \delta_{jk} \sum \Phi_{,l} \Phi_{,l} \right). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Dans la partie de la zone proche où $r' \gg d$, on peut considérer que les sources sont ponctuelles. Dès lors $\Phi \simeq -GM/r'$, où M mesure la masse totale des sources, et on a

$$\begin{aligned} t^{00} &\sim \frac{GM^2}{r'^4} \\ t^{0j} &\sim 0 \\ t^{jk} &\sim \frac{GM^2}{r'^4}. \end{aligned}$$

Ces termes, qui décroissent comme $1/r'^4$, ne contribuent pas à l'intégrale (2.41). De plus, le tenseur d'énergie-impulsion est nul. Enfin, en notant que la seule quantité non nulle parmi les $\bar{h}^{\mu\nu}$ est $\bar{h}^{00} = -4\Phi/c^2$, on calcule que le second terme du membre de droite de (2.39) vaut également zéro. En conclusion, *la seule partie de la zone proche qui contribue à l'intégrale (2.41), est la « zone profonde » Z définie par $r' \lesssim d \ll \lambda$.*

Ceci dit, remarquons que la zone radiative elle-même peut contribuer à la valeur de l'intégrale retardée : l'équation d'onde linéarisée $\square \bar{h}^{\mu\nu} = 0$ admet des solutions du type

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t, \vec{x}') = \frac{f(r' - ct)}{r'}$$

dont les dérivées par rapport à ct sont du même ordre de grandeur que les dérivées spatiales. Ainsi, le pseudo-tenseur d'énergie-impulsion ou encore, la quantité $\bar{h}^{00}_{,0} \bar{h}^{00}_{,0} - \bar{h}^{00}_{,00} \bar{h}^{00}$ y varient comme $1/r'^2$. Ces termes apportent donc une contribution non négligeable à l'intégrale retardée, même à grande distance. Cependant, ils ne font que traduire l'interaction de l'onde avec elle-même (l'onde courbe l'espace-temps sur lequel elle est amenée à évoluer : encore une fois, il s'agit là d'une manifestation de la non-linéarité de la gravitation relativiste). Ils affectent la *propagation* des ondes gravitationnelles mais ne concernent pas le processus de *génération* que nous voulons étudier ici.

Pour terminer cette section, nous allons établir la valeur de τ^{00} en première approximation dans la zone proche. On a

$$\tau^{00} \simeq \mu c^2. \quad (2.50)$$

Pour justifier cela, on utilise les relations (2.39) et (2.49) :

$$\begin{aligned} \tau^{00} &= -g(T^{00} + t^{00}) + \frac{c^4}{16\pi G} \left(\bar{h}^{0\alpha}_{, \beta} \bar{h}^{0\beta}_{, \alpha} - \bar{h}^{00}_{, \alpha\beta} \bar{h}^{\alpha\beta} \right) \\ &= -g \left(T^{00} - \frac{7}{8\pi G} |\vec{\nabla} \Phi|^2 \right) + \frac{1}{\pi G} [(\Phi_{,0})^2 - \Phi_{,00} \Phi] + O(3). \end{aligned}$$

Le terme $(\Phi_{,0})^2$ est négligeable par rapport à $|\vec{\nabla} \Phi|^2$. D'autre part, le champ newtonien est associé au tenseur d'énergie-impulsion d'un fluide parfait non relativiste avec $T^{00} = \mu c^2$. Le

déterminant du tenseur métrique (2.48) vaut $g = -1 + 4\Phi/c^2 + O(2)$. Or, d'après l'équation de Poisson, la quantité $\mu\Phi$ est d'ordre 2 (car $\mu\Phi \sim \nabla^2\Phi \Phi/\pi G$) et domine le terme $\Phi_{,00}\Phi$ (car $|\Phi_{,00}\Phi| \ll |\nabla^2\Phi\Phi| \sim \pi G\mu|\Phi|$). Il vient

$$\tau^{00} = \mu c^2 - 4\mu\Phi - \frac{7}{8\pi G} |\vec{\nabla}\Phi|^2 + O(3).$$

Enfin, d'après le théorème 1.1 on a (V désigne le volume des sources matérielles)

$$\begin{aligned} \int_V -4\mu(\vec{x}') \Phi(\vec{x}') d\vec{x}' &= \frac{1}{\pi G} \int_{V_\infty} |\vec{g}(\vec{x}')|^2 d\vec{x}' \\ &\simeq \frac{1}{\pi G} \int_Z |\vec{g}(\vec{x}')|^2 d\vec{x}' \end{aligned}$$

donc

$$\int_Z \tau^{00}(\vec{x}') d\vec{x}' = \int_V \mu c^2 d\vec{x}' + \frac{1}{8\pi G} \int_Z |\vec{g}(\vec{x}')|^2 d\vec{x}'.$$

Remarquons que le second terme du membre de droite est égal à l'opposé de l'énergie de liaison gravitationnelle. Si M désigne la masse totale des sources, sa valeur est de l'ordre de GM^2/d (cf. section 1.7), négligeable par rapport à la valeur Mc^2 du premier terme, étant entendu que $GM/dc^2 \ll 1$. Ceci achève de justifier la relation (2.50).

Exercice 2.1 ⁸ Soit une source newtonienne solide à symétrie sphérique et en rotation uniforme. Les composantes dominantes du tenseur d'énergie-impulsion sont

$$\tau^{00} = \mu c^2 \quad \text{et} \quad \tau^{0j} = \mu c V^j,$$

avec $\vec{V}(\vec{x}') = \vec{\omega} \wedge \vec{x}'$. Pour fixer les idées, on supposera que la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est dirigée selon l'axe z . En développant en série le dénominateur de la solution (2.41) jusqu'au deuxième terme conformément à la relation (2.42), montrer que l'on retrouve asymptotiquement la métrique de Lense-Thirring étudiée dans la section 1.11.2 :

$$\begin{aligned} \bar{h}^{00} &= \frac{4GM}{rc^2} \\ \bar{h}^{01} &= \frac{-2GyL}{r^3c^3} & \bar{h}^{02} &= \frac{2GxL}{r^3c^3} & \bar{h}^{03} &= 0 \\ \bar{h}^{jk} &= 0, \end{aligned}$$

avec pour valeur du moment cinétique :

$$L = \omega \int_V \mu (x'^2 + y'^2) d\vec{x}'.$$

Pour rappel, cette solution hautement symétrique est stationnaire et il n'y a pas d'émission d'ondes.

8. J.B. Hartle, *Gravity, An introduction to Einstein's general relativity*, Addison Wesley, 2003, p. 497.

2.6 La solution quadrupolaire

Décomposons la loi de conservation (2.40) en ses composantes temporelle et spatiales :

$$\tau^{00}_{,0} + \tau^{0l}_{,l} = 0 \quad (2.51)$$

$$\tau^{j0}_{,0} + \tau^{jl}_{,l} = 0. \quad (2.52)$$

Muipions (2.51) par $x'^j x'^k$ et intégrons dans tout l'espace :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^0} \int \tau^{00}(t', \vec{x}') x'^j x'^k d\vec{x}' &= - \int \frac{\partial \tau^{0l}}{\partial x'^l} x'^j x'^k d\vec{x}' \\ &= - \int \frac{\partial(\tau^{0l} x'^j x'^k)}{\partial x'^l} d\vec{x}' + \int (\tau^{0j} x'^k + \tau^{0k} x'^j) d\vec{x}' \\ &= - \oint \tau^{0l} x'^j x'^k dS'_l + \int (\tau^{0j} x'^k + \tau^{0k} x'^j) d\vec{x}'. \end{aligned}$$

Le premier terme de la dernière ligne est égal à zéro car τ^{0l} s'annule à l'infini (rappelons que, en pratique, tout se passe comme si $\tau^{\mu\nu}$ était nul en-dehors de la zone « profonde » Z). On a donc

$$\frac{\partial}{\partial x'^0} \int \tau^{00} x'^j x'^k d\vec{x}' = \int (\tau^{0j} x'^k + \tau^{0k} x'^j) d\vec{x}'. \quad (2.53)$$

Muipions maintenant (2.52) par x'^k et intégrons à nouveau dans tout l'espace :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^0} \int \tau^{j0} x'^k d\vec{x}' &= - \int \frac{\partial \tau^{jl}}{\partial x'^l} x'^k d\vec{x}' \\ &= - \int \frac{\partial(\tau^{jl} x'^k)}{\partial x'^l} d\vec{x}' + \int \tau^{jk} d\vec{x}' \\ &= - \oint \tau^{jl} x'^k dS'_l + \int \tau^{jk} d\vec{x}' \\ &= 0 + \int \tau^{jk} d\vec{x}'. \end{aligned}$$

En permutant les indices j et k dans la relation ainsi obtenue et en effectuant la demi-somme, on obtient

$$\int \tau^{jk} d\vec{x}' = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x'^0} \int (\tau^{j0} x'^k + \tau^{k0} x'^j) d\vec{x}'. \quad (2.54)$$

De (2.53) et (2.54) il résulte

$$\int \tau^{jk} d\vec{x}' = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{(\partial x'^0)^2} \int \tau^{00} x'^j x'^k d\vec{x}'.$$

En pratique, pour obtenir la solution ondulatoire la plus simple il faut utiliser l'approximation la plus basse pour tous les développements en série : le dénominateur de l'intégrale retardée vaut alors $1/r$, le temps retardé vaut $t' = t - r/c$ (sources lentes) et il faut poser $\tau^{00} = \mu c^2$ (champ faible). Le domaine d'intégration Z se réduit ainsi au volume V occupé par les sources matérielles et on a

$$\tilde{h}^{jk}(t, \vec{x}) = \frac{2G}{rc^4} \left[\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \int_V \mu(t', \vec{x}') x'^j x'^k d\vec{x}' \right]_{t'=t-r/c}.$$

Introduisons le *second moment de la distribution de masses* des sources

$$I^{jk}(t) = \int_V \mu(t, \vec{x}') x'^j x'^k d\vec{x}', \quad (2.55)$$

dont la partie sans trace est le tenseur des moments quadrupolaires

$$Q^{jk}(t) = \int_V \mu(t, \vec{x}') \left(3 x'^j x'^k - \vec{x}' \cdot \vec{x}' \delta^{jk} \right) d\vec{x}' \quad (2.56)$$

$$= 3I^{jk} - (I^{11} + I^{22} + I^{33}) \delta^{jk}. \quad (2.57)$$

On conclut que, dans la zone radiative, les composantes spatiales de la métrique prennent, dans la jauge de Lorenz, les valeurs

$$\boxed{\bar{h}^{jk}(t, \vec{x}) = \frac{2G}{rc^4} \left[\frac{\partial^2}{\partial t'^2} I^{jk}(t') \right]_{t'=t-r/c}}. \quad (2.58)$$

Elles portent le nom de *solution quadrupolaire*. Insistons sur le fait que celle-ci vérifie identiquement l'équation de d'Alembert, comme toute fonction du type $f(r - ct)/r$, et constitue donc une solution *exacte* des équations d'Einstein (2.38) dans le vide.

Les conditions de jauge (2.37) permettent le calcul des autres composantes du tenseur métrique. De

$$\bar{h}^{j0}_{,0} + \bar{h}^{jk}_{,k} = 0$$

on déduit

$$\boxed{\bar{h}^{j0}(t, \vec{x}) = \frac{2G}{rc^4} \sum_k \left(\ddot{I}^{jk} n_k \right)_{t'} + \frac{2G}{r^2 c^3} \sum_k \left(\dot{I}^{jk} n_k \right)_{t'}} \quad (2.59)$$

et

$$\bar{h}^{00}_{,0} + \bar{h}^{j0}_{,j} = 0$$

fournit

$$\boxed{\bar{h}^{00}(t, \vec{x}) = \frac{2G}{rc^4} \sum_{jk} \left(\ddot{I}^{jk} n_j n_k \right)_{t'} + \frac{2G}{r^2 c^3} \sum_{jk} \left(\dot{Q}^{jk} n_j n_k \right)_{t'} + \frac{2G}{r^3 c^2} \sum_{jk} \left(Q^{jk} n_j n_k \right)_{t'}}. \quad (2.60)$$

Ici encore, il s'agit de solutions exactes des équations du champ, comme le montre un simple calcul de l'opérateur de d'Alembert. Les termes en $1/r^3$ sont négligeables devant ceux en $1/r^2$, eux-mêmes négligeables par rapport à ceux en $1/r$. En effet, $\partial I/c\partial t \sim I/\lambda$ et $1/r \ll 1/\lambda$, comme l'imposent les relations (2.44).

Ces résultats sont compatibles avec les relations (2.45) à (2.47).

2.7 Rayonnement d'énergie

L'énergie transportée par l'onde quadrupolaire peut être calculée à l'aide de la composante temporelle de la relation (1.27) changée de signe :

$$\frac{dE}{dt} = \oint c(-g) t^{0k} n_k dS.$$

On l'évalue en intégrant sur une sphère S de rayon r , pour laquelle $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. Il suffit donc de calculer les termes en $1/r^2$ apparaissant dans $(-g) t^{0k}$. Pour cela, il est

judicieux d'utiliser la forme (A.4) du pseudo-tenseur d'énergie-impulsion, où l'on peut se limiter aux termes en $1/r$ dans l'expression des quantités $\bar{h}^{\mu\nu}$ et égaliser le tenseur métrique au tenseur de Minkowski. On constate que seul contribue le terme

$$\frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} (2 g_{\gamma\delta} g_{\rho\sigma} - g_{\delta\rho} g_{\gamma\sigma}) \bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\alpha} \bar{h}^{\delta\rho}{}_{,\beta}.$$

L'intégrand s'exprime simplement en fonction des dérivées troisièmes du moment quadrupolaire des sources et vaut

$$\frac{G \sin \theta}{36\pi c^5} \left[\frac{1}{4} \left(\sum_{ij} \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} n_i n_j \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} - \sum_{ijk} \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} \frac{d^3 Q^{ik}}{dt^3} n_j n_k \right] d\theta d\varphi. \quad (2.61)$$

Cette relation exprime la puissance émise dans la direction \vec{n} à l'intérieur de l'angle solide $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$.

L'intégrale sur la sphère s'effectue sans difficulté en utilisant les identités

$$\begin{aligned} \oint_S n_i n_j \sin \theta d\theta d\varphi &= \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \\ \oint_S n_i n_j n_k n_l \sin \theta d\theta d\varphi &= \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \end{aligned}$$

On obtient la relation découverte par Einstein en 1918 :

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5} \sum_{ij} \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3}}. \quad (2.62)$$

Bien entendu, le membre de gauche doit, en fait, être évalué à l'instant t et celui de droite à l'instant retardé $t' = t - r/c$.

Ainsi que nous l'avons annoncé dans la section 2.3, on remarquera l'intervention des dérivées troisièmes du moment quadrupolaire. Mais si notre théorie newtonienne modifiée permettait de rendre compte *qualitativement* des résultats de la relativité générale, elle en diffère cependant dans ses détails *quantitatifs*.

2.8 Rayonnement de moment cinétique

Le flux de moment cinétique est donné par la relation (1.67) changée de signe. Dans l'expression de $-g^{kl}$, il suffit de calculer les termes en $1/r^3$, puisque $x^j dS \sim r^3 d\theta d\varphi$.⁹ Pour maîtriser la situation, regardons l'allure et les ordres de grandeur des termes intervenant dans la relation (A.4). D'après les relations (2.58) à (2.60), on a

$$\begin{aligned} \bar{h}^{ij}{}_{,0} &\sim O\left(\frac{G}{rc^5} \frac{d^3 I}{dt^3}\right) \\ \bar{h}^{0\nu}{}_{,0} \sim \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,i} &\sim O\left(\frac{G}{rc^5} \frac{d^3 I}{dt^3}\right) + O\left(\frac{G}{r^2 c^4} \frac{d^2 I}{dt^2}\right) + O\left(\frac{1}{r^3}\right). \end{aligned}$$

9. Le calcul montre l'annulation du terme en $1/r^2$. Si ce n'était pas le cas, le flux de moment cinétique divergerait comme r .

Dans $-g^{kl}$, les termes en $\hbar^{\lambda\mu}{}_{,\alpha} \hbar^{\nu\xi}{}_{,\beta}$ contenant le facteur $1/r^3$ sont donc d'ordre

$$\frac{c^4}{G} \frac{G^2}{r^3 c^9} \frac{d^3 I}{dt^3} \frac{d^2 I}{dt^2} = \frac{G}{r^3 c^5} \frac{d^3 I}{dt^3} \frac{d^2 I}{dt^2}. \quad (2.63)$$

On peut dès lors égaler le tenseur métrique au tenseur de Minkowski. En effet, les termes (2.63) en $1/r \times 1/r^2$, issus d'une expression du type $\hbar^{\lambda\mu}{}_{,\alpha} \hbar^{\nu\xi}{}_{,\beta}$, dominent les termes en $1/r \times 1/r \times 1/r$ issus de $g^{\rho\sigma} \hbar^{\lambda\mu}{}_{,\alpha} \hbar^{\nu\xi}{}_{,\beta}$ ou de $g_{\rho\sigma} \hbar^{\lambda\mu}{}_{,\alpha} \hbar^{\nu\xi}{}_{,\beta}$, car ces derniers sont d'ordre

$$\frac{c^4}{G} \frac{G}{rc^4} \frac{d^2 I}{dt^2} \frac{G}{rc^5} \frac{d^3 I}{dt^3} \frac{G}{rc^5} \frac{d^3 I}{dt^3} = \frac{G}{r^3 c^5} \frac{d^3 I}{dt^3} \frac{d^2 I}{dt^2} \frac{G}{c^5} \frac{d^3 I}{dt^3},$$

c'est-à-dire l'ordre de grandeur de (2.63) multiplié par

$$\frac{G}{c^5} \frac{d^3 I}{dt^3} \sim \frac{GMd^2}{c^2 \lambda^3} = \frac{GM}{c^2 d} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^3.$$

Or, cette quantité est beaucoup plus petite que 1 car le champ gravifique des sources est newtonien ($GM/c^2 d \ll 1$) et leurs vitesses sont faibles ($d/\lambda \ll 1$).

Le calcul donne

$$\frac{dL_i}{dt} = \frac{2G}{5c^5} \sum_{j k p} \varepsilon_{ijk} \frac{d^2 I^{jp}}{dt^2} \frac{d^3 I^{kp}}{dt^3},$$

résultat qui peut être exprimé en fonction du moment quadrupolaire :

$$\boxed{\frac{dL_i}{dt} = \frac{2G}{45c^5} \sum_{j k p} \varepsilon_{ijk} \frac{d^2 Q^{jp}}{dt^2} \frac{d^3 Q^{kp}}{dt^3}}. \quad (2.64)$$

2.9 La réaction radiative : interprétation newtonienne

Comme les sections précédentes le montrent, un système physique dissipe de l'énergie et du moment cinétique si son moment quadrupolaire varie au cours du temps (plus précisément, seulement si les dérivées temporelles troisièmes de ce moment sont non nulles). Les trajectoires des sources s'en trouvent modifiées. Pour un système animé d'un mouvement périodique, il est possible de traduire quantitativement ces résultats dans un langage purement newtonien : tout se passe comme s'il existait une force de frottement, donc une accélération \vec{a} , que l'on peut qualifier d'« accélération de réaction radiative » et dont nous allons établir la valeur.¹⁰

Soit V le volume occupé par les sources et μ la masse volumique d'un élément de matière de vitesse \vec{V} . On doit avoir (le symbole $\langle \rangle$ désigne la moyenne temporelle)

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \left\langle \int_V \mu \vec{a} \cdot \vec{V} d\vec{x} \right\rangle. \quad (2.65)$$

Or, par (2.62),

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{G}{45c^5} \sum_{ij} \left\langle \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} \right\rangle$$

10. L. Landau et E. Lifchitz, *op. cit.*, problème 3 p. 461.

$$\begin{aligned}
&= -\frac{G}{45c^5} \sum_{ij} \left\langle \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2 Q^{ij}}{dt^2} \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} \right) - \frac{d^2 Q^{ij}}{dt^2} \frac{d^4 Q^{ij}}{dt^4} \right\rangle \\
&= -\frac{G}{45c^5} \sum_{ij} \left\langle \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2 Q^{ij}}{dt^2} \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{dQ^{ij}}{dt} \frac{d^4 Q^{ij}}{dt^4} \right) + \frac{dQ^{ij}}{dt} \frac{d^5 Q^{ij}}{dt^5} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Dans le cas d'un mouvement périodique, la moyenne des dérivées totales par rapport au temps est nulle, donc

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle &= -\frac{G}{45c^5} \sum_{ij} \left\langle \frac{dQ^{ij}}{dt} \frac{d^5 Q^{ij}}{dt^5} \right\rangle \\
&= -\frac{G}{45c^5} \sum_{ij} \left\langle \int_V \mu \left(6V^i x^j - 2\vec{x} \cdot \vec{V} \delta^{ij} \right) d\vec{x} \frac{d^5 Q^{ij}}{dt^5} \right\rangle, \quad (2.66)
\end{aligned}$$

vu la définition (2.56). Le second terme du membre de droite fait intervenir la trace du tenseur moment quadrupolaire, qui est nulle. En comparant (2.65) et (2.66), on obtient donc

$$\left\langle \int_V \mu \vec{a} \cdot \vec{V} d\vec{x} \right\rangle = -\frac{2G}{15c^5} \sum_{ij} \left\langle \int_V \mu x^j \frac{d^5 Q^{ij}}{dt^5} V^i d\vec{x} \right\rangle.$$

On en déduit

$$a^i = -\frac{2G}{15c^5} \sum_j \frac{d^5 Q^{ij}}{dt^5} x^j.$$

Ce résultat peut s'écrire sous la forme

$$\vec{a} = -\vec{\nabla} \Phi^R,$$

où le « potentiel de réaction radiative » Φ^R est donné par

$$\Phi^R = \frac{G}{15c^5} \sum_{ij} \frac{d^5 Q^{ij}}{dt^5} x^i x^j. \quad (2.67)$$

Attention, il ne faut pas conclure que l'on peut simuler tous les effets de la relativité générale, simplement en ajoutant ce terme à la théorie de Newton. Ainsi, la précession du périhélie des planètes constitue un effet plus important que l'amortissement de leur mouvement.¹¹

L'interprétation, en termes de force de frottement, de l'effet de réaction à l'émission d'ondes gravitationnelles se trouve renforcée par le fait que

$$\left\langle \frac{d\vec{L}}{dt} \right\rangle = \left\langle \int_V \vec{x} \wedge \mu \vec{a} d\vec{x} \right\rangle. \quad (2.68)$$

En effet,

$$\left\langle \int_V \vec{x} \wedge \mu \vec{a} d\vec{x} \right\rangle_i = \left\langle \int_V \mu \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} x^j a^k d\vec{x} \right\rangle$$

11. Pour une analyse des effets post-newtoniens jusqu'à la réaction radiative incluse, voir par exemple S. Chandrasekhar et F.P. Esposito, *The Astrophysical Journal* **160**, p. 154 (1970).

$$\begin{aligned}
&= \left\langle - \int_V \frac{2G\mu}{15c^5} \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} x^j \sum_p \frac{d^5 Q^{kp}}{dt^5} x^p d\vec{x} \right\rangle \\
&= -\frac{2G}{45c^5} \left\langle \int_V \mu \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \sum_p \frac{d^5 Q^{kp}}{dt^5} \left(3\mu x^j x^p \underline{\underline{\vec{x} \cdot \vec{x} \delta^{jp}}} \right) d\vec{x} \right\rangle
\end{aligned}$$

(l'adjonction du terme souligné en ondulé ne change rien car ε_{ijk} est antisymétrique en les indices j, k tandis que Q^{kj} est symétrique). Donc

$$\begin{aligned}
\left\langle \int_V \vec{x} \Lambda \mu \vec{a} d\vec{x} \right\rangle_i &= -\frac{2G}{45c^5} \sum_{jkp} \left\langle \varepsilon_{ijk} \frac{d^5 Q^{kp}}{dt^5} Q^{jp} \right\rangle \\
&= -\frac{2G}{45c^5} \sum_{jkp} \left\langle \varepsilon_{ijk} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d^4 Q^{kp}}{dt^4} Q^{jp} \right) - \frac{d^4 Q^{kp}}{dt^4} \frac{dQ^{jp}}{dt} \right] \right\rangle \\
&= -\frac{2G}{45c^5} \sum_{jkp} \left\langle \varepsilon_{ijk} \left[\underline{\underline{-\frac{d}{dt} \left(\frac{d^3 Q^{kp}}{dt^3} \frac{dQ^{jp}}{dt} \right) + \frac{d^3 Q^{kp}}{dt^3} \frac{d^2 Q^{jp}}{dt^2}}} \right] \right\rangle \\
&= -\frac{2G}{45c^5} \sum_{jkp} \left\langle \varepsilon_{ijk} \frac{d^3 Q^{kp}}{dt^3} \frac{d^2 Q^{jp}}{dt^2} \right\rangle \tag{2.69}
\end{aligned}$$

(chacun des termes soulignés en ondulé est nul, comme moyenne de la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction périodique). De la comparaison de (2.69) et (2.64) résulte la relation (2.68).

2.10 La jauge TT

Dans le cadre de l'approximation linéaire de la relativité générale (c'est-à-dire, dans ce contexte, en se limitant dans le tenseur métrique aux termes du premier ordre en $1/r$), on sait qu'un changement de jauge du type

$$\underline{\underline{x}}^\mu = x^\mu + \xi^\mu$$

permet de générer, à partir de quantités $\bar{h}^{old\mu\nu}$, de nouvelles quantités $\bar{h}^{\mu\nu}$ vérifiant la condition de jauge de Lorenz (2.37) : pour cela, il faut que

$$\square \xi^\mu = \bar{h}^{old\mu\nu}{}_{,\nu}. \tag{2.70}$$

On dispose cependant d'une certaine marge de manœuvre dans la détermination des ξ^μ : la solution générale de l'équation (2.70) est constituée d'une solution particulière de l'équation inhomogène, plus la solution générale de l'équation homogène. On peut donc passer à un système de coordonnées

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{x}}^\alpha &= \underline{\underline{x}}^\alpha + \pi^\alpha(\underline{\underline{x}}) \\
&= x^\alpha + \xi^\alpha(\vec{x}) + \pi^\alpha[\underline{\underline{x}}(\vec{x})]
\end{aligned} \tag{2.71}$$

dans lequel

$$\underline{\underline{g}}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{new}$$

avec

$$\begin{aligned}
h_{\mu\nu}^{new} &= h_{\mu\nu}^{old} - (\xi_\mu + \pi_\mu)_{,\nu} - (\xi_\nu + \pi_\nu)_{,\mu} + O(2) \\
&= h_{\mu\nu} - \pi_{\mu,\nu} - \pi_{\nu,\mu} + O(2) \\
\bar{h}_{\mu\nu}^{new} &= \bar{h}_{\mu\nu} - \pi_{\mu,\nu} - \pi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu} \pi^\alpha{}_{,\alpha} + O(2)
\end{aligned} \tag{2.72}$$

sans perdre le résultat $\bar{h}^{new\ \mu\nu}{}_{,\nu} = 0$, pour autant que

$$\square \pi^\alpha = 0. \tag{2.73}$$

Une telle liberté résiduelle dans le choix de la jauge peut être exploitée afin de simplifier l'expression des quantités $\bar{h}_{\mu\nu}^{new}$. On utilise habituellement un système de coordonnées, appelé en anglais *Transverse-Traceless gauge* et noté *TT*, dans lequel

$$\bar{h}^{TT\ \mu\nu}{}_{,\nu}(t, \vec{x}) = 0 \quad (\text{condition de Lorenz}) \tag{2.74}$$

$$\bar{h}^{TT\ \mu 0}(t, \vec{x}) = 0 \quad (\text{transverse}) \tag{2.75}$$

$$\bar{h}^{TT\ \mu}{}_{\mu}(t, \vec{x}) = 0 \quad (\text{trace nulle}), \tag{2.76}$$

aux termes d'ordre $1/r^2$ près. Signalons dès à présent que, compte tenu de l'annulation de la trace, les quantités $\bar{h}_{\mu\nu}^{TT}$ sont identiques aux $\bar{h}_{\mu\nu}^{TT}$.

Pour prouver l'existence de la jauge *TT*, supposons que les sources soient animées d'un mouvement périodique de période $T = 2\pi/\omega_0$. On a, d'après le théorème de Fourier :

$$\mu(t', \vec{x}') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(\vec{x}') \exp(-in\omega_0 t'),$$

donc, par (2.58),

$$\begin{aligned}
\bar{h}^{jk}(t, r) &= \frac{2G}{rc^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2 \omega_0^2 \int_V A_n(\vec{x}') x'^j x'^k d\vec{x}' \exp[-in\omega_0(t - r/c)] \\
&= \frac{2G}{rc^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{jk} \exp[ik_n(r - ct)]
\end{aligned}$$

où les H_n^{jk} sont des constantes et $k_n = n\omega_0/c$. Il est alors possible de satisfaire aux exigences (2.74), (2.75) et (2.76) en posant dans (2.71)¹²

$$\pi^\alpha(\vec{x}) = \frac{1}{r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^\alpha(\vec{x}) \exp[ik_n(r - ct)]$$

où les $B^\alpha(\vec{x})$ varient lentement, c'est-à-dire $|B^\alpha{}_{,\mu}/B^\alpha| \ll 1$. Vu le caractère additif de toutes les manipulations et l'indépendance linéaire des fonctions exponentielles, nous sous-entendrons désormais la sommation et l'indice n .

Remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned}
\square \pi^\alpha &= \square \left[B^\alpha(\vec{x}) \frac{\exp[ik(r - ct)]}{r} \right] \\
&\simeq B^\alpha(\vec{x}) \square \left[\frac{\exp[ik(r - ct)]}{r} \right],
\end{aligned}$$

12. B. Schutz, *A first course in general relativity*, Cambridge University Press, 1985, exercice 9.29 p. 248.

puisque les B^α varient lentement. Or, le membre de droite est nul car l'opérateur de d'Alembert est appliqué à une fonction du type $f(r - ct)/r$. La relation (2.73) est ainsi vérifiée, donc la condition (2.74).

Nous pouvons maintenant déterminer les fonctions B^α permettant de réaliser les équations (2.75) et (2.76). L'équation (2.72) permet d'écrire¹³

$$\begin{aligned} h^{TTjk} &= \hbar^{jk} - \pi^j_{,k} - \pi^k_{,j} + \delta^{jk} (\pi^0_{,0} + \pi^s_{,s}) \\ &= \left(\frac{2G}{c^4} H^{jk} - ikB^j n^k - ikB^k n^j - \delta^{jk} ikB^0 + \delta^{jk} ikB^s n_s \right) \frac{\exp[\dots]}{r}, \end{aligned} \quad (2.77)$$

en négligeant les dérivées des B^α et les termes d'ordre $1/r^2$. D'autre part, vu (2.59) et (2.60) respectivement,

$$\begin{aligned} \hbar^{j0} &= \hbar^{jk} n_k + O(2) \\ \hbar^{00} &= \hbar^{jk} n_j n_k + O(2). \end{aligned}$$

On en déduit, toujours en négligeant les termes d'ordre 2,

$$\begin{aligned} h^{TTj0} &= \hbar^{j0} + \pi^j_{,0} - \pi^0_{,j} \\ &= \hbar^{jk} n_k + \pi^j_{,0} - \pi^0_{,j} \\ &= \left(\frac{2G}{c^4} H^{jk} n_k - ikB^j - ikB^0 n^j \right) \frac{\exp[ik(r - ct)]}{r} \\ &= h^{TTjk} n_k \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} h^{TT00} &= \hbar^{00} + 2\pi^0_{,0} - \pi^\alpha_{,\alpha} \\ &= \hbar^{jk} n_j n_k + \pi^0_{,0} - \pi^s_{,s} \\ &= \left(\frac{2G}{c^4} H^{jk} n_j n_k - ikB^0 - ikB^s n_s \right) \frac{\exp[ik(r - ct)]}{r} \\ &= h^{TTjk} n_j n_k. \end{aligned} \quad (2.79)$$

L'annulation des h^{TTj0} implique donc celle de h^{TT00} . Ainsi, les (apparemment) cinq relations (2.75) et (2.76) se réduisent aux *quatre* conditions

$$h^{TTjk} n_k = 0 \quad (2.80)$$

$$\sum_j h^{TTjj} = 0, \quad (2.81)$$

c'est-à-dire

$$\frac{2G}{c^4} H^{jk} n_k - ikB^j - ikB^0 n^j = 0 \quad (2.82)$$

$$\frac{2G}{c^4} \sum H^{jj} + ikB^j n_j - 3ikB^0 = 0. \quad (2.83)$$

En multipliant (2.82) par n_j et en additionnant avec (2.83), on obtient

$$B^0 = \frac{G}{2ikc^4} \left(\sum_j H^{jj} + H^{jk} n_j n_k \right). \quad (2.84)$$

13. Rappelons que l'on élève et abaisse les indices à l'aide du tenseur de Minkowski. La position des indices spatiaux (latins) n'a donc guère d'importance.

Dès lors, on tire de (2.82)

$$B^j = \frac{iG}{2kc^4} \left(\sum_s H^{ss} + H^{sk} n_s n_k \right) n^j - \frac{2iG}{kc^4} H^{jk} n_k. \quad (2.85)$$

Comme requis, les quantités $B^\alpha(\vec{x})$ varient lentement : d'une part, elles ne dépendent pas du temps ; et d'autre part, comme

$$n_{s,p} = \frac{\delta_{sp} - n_s n_p}{r},$$

on a bien $|B_{\alpha,p}/B_\alpha| \sim 1/r \rightarrow 0$ à grande distance r .

Enfin, le remplacement dans (2.77) des résultats (2.84) et (2.85) permet de calculer la valeur de h_{jk}^{TT} . En rétablissant le développement en série de Fourier sur n , on obtient

$$\begin{aligned} h_{jk}^{TT} &= \bar{h}_{jk} - \frac{1}{2} \sum_s \bar{h}_{ss} \delta_{jk} + \frac{1}{2} \bar{h}^{sp} n_s n_p \delta_{jk} + \frac{1}{2} \left(\sum_s \bar{h}_{ss} + \bar{h}^{sp} n_s n_p \right) n_j n_k \\ &\quad - \bar{h}_{js} n_k n_s - \bar{h}_{ks} n_j n_s + O(2). \end{aligned}$$

Ce résultat peut s'exprimer sous la forme

$$h_{jk}^{TT} = \sum_{ab}^3 \left(P_{ja} P_{bk} - \frac{1}{2} P_{jk} P_{ab} \right) \bar{h}_{ab} + O(2), \quad (2.86)$$

où \mathbf{P} constitue l'opérateur de projection dans le plan perpendiculaire au vecteur \vec{n} :

$$P_{ab} = \delta_{ab} - n_a n_b. \quad (2.87)$$

Or, on vérifie facilement que la projection du tenseur de Kronecker est nulle :

$$\sum_{ab} \left(P_{ja} P_{bk} - \frac{1}{2} P_{jk} P_{ab} \right) \delta_{ab} = 0.$$

Compte tenu de (2.58) et de (2.57), on peut ainsi écrire

$$h_{jk}^{TT}(t, \vec{x}) = \frac{2G}{3rc^4} \left[\frac{\partial^2}{\partial t'^2} Q_{jk}^{TT}(t') \right]_{t'=t-r/c} + O(2) \quad (2.88)$$

en notant

$$Q_{jk}^{TT} = \sum_{ab} \left(P_{ja} P_{bk} - \frac{1}{2} P_{jk} P_{ab} \right) Q_{ab}. \quad (2.89)$$

L'intérêt de cette écriture réside dans le fait que, en théorie newtonienne de la gravitation, le moment quadrupolaire est accessible à l'observation, ainsi que nous l'avons montré dans la section 2.1.

2.11 Les modes de polarisation de l'onde gravitationnelle

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, les six composantes h_{jk}^{TT} sont liées par les quatre contraintes (2.80) et (2.81). Elles peuvent ainsi s'exprimer à partir de deux fonctions seulement, notées h_+ et h_\times et traduisant la répartition de l'onde selon *deux modes*

de polarisation. Leur signification géométrique apparaît clairement dans la base normalisée des coordonnées sphériques (donc orthonormée)

$$\vec{e}_r' = \vec{e}_r, \quad \vec{e}_\theta' = \frac{\vec{e}_\theta}{r}, \quad \vec{e}_\varphi' = \frac{\vec{e}_\varphi}{r \sin \theta}. \quad (2.90)$$

En effet, le tenseur \mathbf{h}^{TT} y prend la forme $(\mathbf{h}^{TT'}) = \tilde{J}(\mathbf{h}^{TT})J$, où

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.91)$$

Les seules composantes non nulles sont

$$\begin{aligned} h_{22}^{TT'} &= h_{11}^{TT} \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + h_{22}^{TT} \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + h_{33}^{TT} \sin^2 \theta \\ &\quad + 2h_{12}^{TT} \cos^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi - 2 \sin \theta \cos \theta (h_{13}^{TT} \cos \varphi + h_{23}^{TT} \sin \varphi) \\ h_{23}^{TT'} &= \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi (h_{22}^{TT} - h_{11}^{TT}) + \cos \theta \cos(2\varphi) h_{12}^{TT} + \sin \theta \sin \varphi h_{13}^{TT} \\ &\quad - \sin \theta \cos \varphi h_{23}^{TT} \\ h_{33}^{TT'} &= h_{11}^{TT} \sin^2 \varphi + h_{22}^{TT} \cos^2 \varphi - 2h_{12}^{TT} \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned}$$

À l'aide des relations (2.80) et (2.81) on vérifie que la trace de cette matrice est bien nulle, c'est-à-dire que $h_{33}^{TT'} = -h_{22}^{TT'}$. En définitive, on a montré que

$$(h_{\alpha\beta}^{TT'}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_+ & h_\times \\ 0 & 0 & h_\times & -h_+ \end{pmatrix} \quad (2.92)$$

où les deux degrés de liberté ont pour expression

$$h_+ = -h_{11}^{TT} \sin^2 \varphi - h_{22}^{TT} \cos^2 \varphi + 2h_{12}^{TT} \sin \varphi \cos \varphi \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} h_\times &= \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi (h_{22}^{TT} - h_{11}^{TT}) + \cos \theta \cos(2\varphi) h_{12}^{TT} + \sin \theta \sin \varphi h_{13}^{TT} \\ &\quad - \sin \theta \cos \varphi h_{23}^{TT}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Lorsque l'onde gravitationnelle atteint une particule non relativiste, c'est-à-dire de vitesse largement inférieure à c , celle-ci est soumise à l'équation de mouvement

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \sum_{j=1}^3 \dot{h}_{ij}^{TT} \frac{dx^j}{dt} = 0. \quad (2.95)$$

Dans le référentiel TT , une particule de vitesse initiale nulle demeure donc immobile à tout instant ! En fait cependant, l'onde gravitationnelle déforme l'espace-temps et la distance physique entre deux particules A et B s'en trouve affectée (elle peut être mesurée à partir du temps nécessaire à la lumière pour parcourir l'aller-retour ABA). L'effet de la composante h_+ est le suivant : dans le plan sous-tendu par les vecteurs \vec{e}_θ' et \vec{e}_φ' , un anneau de particules-test, initialement au repos, se déforme en une ellipse d'axes dirigés selon ces vecteurs. Plus précisément, la distance physique entre deux particules données est multipliée par $1 + h_+/2$ selon \vec{e}_θ' , et par $1 - h_+/2$ selon \vec{e}_φ' . L'effet de la composante h_\times est identique mais tourné de $\pi/4$ (figure 2.8). Comme le plan est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde, celle-ci est dite *transversale*.

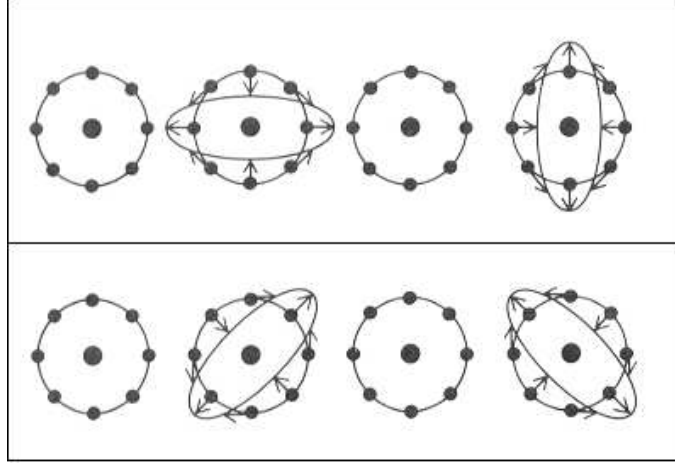


FIGURE 2.8: Les deux modes de polarisation d'une onde gravitationnelle atteignant un anneau de particules-test à grande distance des sources (onde plane) lorsque $h_+ = h_\times = A \sin(\omega t')$. En abscisse, le vecteur \vec{e}_θ' ; en ordonnée, le vecteur \vec{e}_φ' . En haut, le mode h_+ ; en bas, le mode h_\times . De gauche à droite, $\omega t'$ prend successivement les valeurs $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. D'après C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, 1973, figure 35.2.

2.12 Energie émise selon chaque mode de polarisation

Appelons \mathbf{Q}^3 la matrice symétrique 3×3 contenant les dérivées troisièmes des composantes du tenseur moment quadrupolaire en coordonnées cartésiennes, et \mathbf{n} la matrice 3×1 constituée des composantes du vecteur \vec{n} . La relation (2.61), exprimant la puissance rayonnée dans la direction \vec{n} , peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dE}{dt d\Omega} = \frac{G}{36\pi c^5} \left[\frac{1}{4} (\tilde{\mathbf{n}} \mathbf{Q}^3 \mathbf{n})^2 + \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\mathbf{Q}}^3 \mathbf{Q}^3) - \tilde{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{Q}}^3 \mathbf{Q}^3 \mathbf{n} \right].$$

Cette expression tensorielle garde la même forme lorsque l'on passe dans la base normalisée (2.90) des coordonnées sphériques (bien que celle-ci ne soit pas associée à un système de coordonnées : il ne s'agit pas d'une base *naturelle*), car la transformation est assurée par la partie spatiale de la matrice J , qui est orthogonale [relation (2.91)]. Donc

$$\frac{dE}{dt d\Omega} = \frac{G}{36\pi c^5} \left[\frac{1}{4} (\tilde{\mathbf{n}}' \mathbf{Q}^{3'} \mathbf{n}')^2 + \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\mathbf{Q}}^{3'} \mathbf{Q}^{3'}) - \tilde{\mathbf{n}}' \tilde{\mathbf{Q}}^{3'} \mathbf{Q}^{3'} \mathbf{n}' \right]$$

avec $n'_1 = 1, n'_2 = 0, n'_3 = 0$. En tenant compte de l'annulation de la trace de $\mathbf{Q}^{3'}$, on peut ainsi écrire

$$\frac{dE}{dt d\Omega} = \frac{G}{36\pi c^5} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{d^3 Q'_{22}}{dt^3} - \frac{d^3 Q'_{33}}{dt^3} \right)^2 + \left(\frac{d^3 Q'_{23}}{dt^3} \right)^2 \right]. \quad (2.96)$$

On calcule

$$\begin{aligned} Q'_{22} - Q'_{33} &= Q_{11} (\cos^2 \theta \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + Q_{22} (\cos^2 \theta \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) + Q_{33} \sin^2 \theta \\ &\quad + 2 Q_{12} \sin \varphi \cos \varphi (1 + \cos^2 \theta) - 2 \sin \theta \cos \theta (Q_{13} \cos \varphi + Q_{23} \sin \varphi) \\ Q'_{23} &= \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi (Q_{22} - Q_{11}) + \cos \theta \cos(2\varphi) Q_{12} + \sin \theta \sin \varphi Q_{13} \\ &\quad - \sin \theta \cos \varphi Q_{23}. \end{aligned} \quad (2.97)$$

D'autre part, en utilisant (2.89) on remarque que

$$\begin{aligned} Q'_{22} - Q'_{33} &= Q_{22}^{TT'} - Q_{33}^{TT'} \\ Q'_{23} &= Q_{23}^{TT'}. \end{aligned}$$

Donc, en vertu de (2.88) on obtient

$$\frac{dE}{dt d\Omega} = \frac{G}{36\pi c^5} \frac{9r^2 c^8}{4G^2} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{dh_{22}^{TT'}}{dt} - \frac{dh_{33}^{TT'}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dh_{23}^{TT'}}{dt} \right)^2 \right].$$

En utilisant (2.92), on obtient la répartition de la puissance surfacique rayonnée dans la direction (θ, φ) selon chacun des deux modes de polarisation :

$$\frac{dE}{dt r^2 d\Omega} = \frac{c^3}{16\pi G} \left(\dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \right). \quad (2.98)$$

Donc, dans le membre de droite de (2.96), le premier terme est relatif au mode $+$ et le second terme, au mode \times . En pratique, on utilisera dès lors les relations

$$\frac{dE_+}{dt d\Omega} = \frac{G}{144 \pi c^5} \left(\frac{d^3 Q'_{22}}{dt^3} - \frac{d^3 Q'_{33}}{dt^3} \right)^2 \quad (2.99)$$

$$\frac{dE_\times}{dt d\Omega} = \frac{G}{36 \pi c^5} \left(\frac{d^3 Q'_{23}}{dt^3} \right)^2 \quad (2.100)$$

où les termes entre parenthèses sont calculés via la relation (2.97). Rappelons que, pour connaître les membres de gauche au temps t , il faut évaluer les membres de droite au temps retardé $t' = t - r/c$.

2.13 Barre homogène en rotation

D'un point de vue technique, l'évaluation du taux d'émission d'ondes gravitationnelles dans l'approximation quadrupolaire ne présente guère plus de difficultés que le calcul du mouvement d'un solide en mécanique newtonienne. Le premier demande la connaissance du tenseur des moments quadrupolaires tandis que le second requiert le calcul du tenseur d'inertie, et l'on sait que ces deux tenseurs sont intimement liés. On peut donc appliquer à une grande variété de situations les relations démontrées plus haut.

En guise de premier exemple, considérons un barreau cylindrique de masse volumique homogène μ , rayon R et longueur L . Son centre de masse est placé à l'origine des coordonnées cartésiennes (x, y, z) et le barreau tourne dans le plan (x, y) autour de l'axe des z avec une vitesse angulaire ω . Pour calculer le tenseur des moments quadrupolaires, il suffit de calculer à l'aide de (2.56) le moment \mathbf{Q}_F d'un barreau fixe dirigé selon l'axe des x , puis de passer dans le référentiel tournant autour de l'axe des z avec la vitesse angulaire $-\omega$. On a ainsi

$$\mathbf{Q} = \tilde{J} \mathbf{Q}_F J$$

avec [passer aux coordonnées polaires dans le plan (y, z)]

$$Q_F^{jk} = \mu \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} [3x^j x^k - (r^2 + x^2) \delta^{jk}] d\varphi$$

$$J = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En notant $M = \mu\pi R^2 L$ la masse du barreau, on obtient

$$(\mathbf{Q}_F) = \frac{M(3R^2 - L^2)}{12} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.101)$$

$$(\mathbf{Q}) = \frac{M(3R^2 - L^2)}{12} \begin{pmatrix} 1 - 3\cos^2(\omega t) & -3\sin(\omega t)\cos(\omega t) & 0 \\ -3\sin(\omega t)\cos(\omega t) & 1 - 3\sin^2(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.102)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{d^3 Q^{11}}{dt^3} &= -M(3R^2 - L^2)\omega^3 \sin(2\omega t) \\ \frac{d^3 Q^{12}}{dt^3} &= M(3R^2 - L^2)\omega^3 \cos(2\omega t) \\ \frac{d^3 Q^{22}}{dt^3} &= M(3R^2 - L^2)\omega^3 \sin(2\omega t). \end{aligned}$$

Les relations (2.99) et (2.100) permettent de calculer la puissance rayonnée par unité d'angle solide selon chaque mode de polarisation. On calcule

$$\frac{dE_+}{dt d\Omega} = \frac{G}{144\pi c^5} M^2 (3R^2 - L^2)^2 \omega^6 (1 + \cos^2 \theta)^2 \sin^2(2\omega t - 2\varphi) \quad (2.103)$$

$$\frac{dE_\times}{dt d\Omega} = \frac{G}{36\pi c^5} M^2 (3R^2 - L^2)^2 \omega^6 \cos^2 \theta \cos^2(2\omega t - 2\varphi). \quad (2.104)$$

Les moyennes temporelles émoussent la dépendance en longitude, comme il se doit :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dE_+}{dt d\Omega} \right\rangle &= \frac{G}{288\pi c^5} M^2 (3R^2 - L^2)^2 \omega^6 (1 + \cos^2 \theta)^2 \\ \left\langle \frac{dE_\times}{dt d\Omega} \right\rangle &= \frac{G}{72\pi c^5} M^2 (3R^2 - L^2)^2 \omega^6 \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

En sommant ces deux quantités et en intégrant sur la sphère, ou bien en utilisant directement (2.62), on en déduit la puissance rayonnée totale :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2GM^2(3R^2 - L^2)^2 \omega^6}{45c^5}. \quad (2.105)$$

On calcule le taux de ralentissement de la barre en utilisant la relation donnant l'énergie cinétique d'un cylindre solide newtonien¹⁴ homogène de longueur L tournant autour de son centre de masse :

$$E = \frac{1}{2} \frac{ML^2}{12} \omega^2.$$

Il s'ensuit

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{24GM(3R^2 - L^2)^2 \omega^5}{45L^2 c^5} \quad (2.106)$$

14. Ainsi que nous l'avons remarqué dans la section 2.9, les relations (2.62) et (2.64) sont compatibles avec la mécanique newtonienne.

(le signe négatif provient du fait qu'il faut changer de signe dans la relation (2.105) puisque le système en rotation *perd* de l'énergie). On retrouve ce résultat en écrivant l'équation (2.64) du moment cinétique véhiculé par l'onde :

$$\frac{dL}{dt} = \frac{2GM^2(3R^2 - L^2)^2\omega^5}{45c^5} \quad (2.107)$$

puis en la combinant avec la relation newtonienne

$$L = \frac{ML^2}{12}\omega.$$

L'équation (2.106) permet d'évaluer la période $T_1 = 2\pi/\omega_1$ d'un système de période initiale $T_0 = 2\pi/\omega_0$ au terme d'un temps τ :

$$T_1 = \sqrt[4]{T_0^4 + \frac{GM(3R^2 - L^2)^2\tau}{270L^2c^5\pi^4}}. \quad (2.108)$$

2.14 Deux masses aux extrémités d'un ressort

Soit deux corps de masses respectives M_1 et M_2 reliées, le long de l'axe z , par un ressort de longueur au repos égale à L et de constante de raideur k . Les composantes du tenseur décrivant l'onde gravitationnelle émise sont les suivantes :

$$\begin{aligned} h_{11}^{TT} &= \frac{K}{r} [A \cos(2\omega t') - L \sin(\omega t')] (n_1^4 - n_1^2 + n_2^2 + n_1^2 n_2^2) \\ h_{22}^{TT} &= \frac{K}{r} [A \cos(2\omega t') - L \sin(\omega t')] (n_1^2 + n_2^4 - n_2^2 + n_1^2 n_2^2) \\ h_{33}^{TT} &= \frac{K}{r} [A \cos(2\omega t') - L \sin(\omega t')] (-n_1^4 - n_2^4 - 2n_1^2 n_2^2) \\ h_{12}^{TT} &= \frac{K}{r} [A \cos(2\omega t') - L \sin(\omega t')] n_1 n_2 (n_1^2 + n_2^2 - 2) \\ h_{13}^{TT} &= \frac{K}{r} [A \cos(2\omega t') - L \sin(\omega t')] n_1 n_3 (n_1^2 + n_2^2) \\ h_{23}^{TT} &= \frac{K}{r} [A \cos(2\omega t') - L \sin(\omega t')] n_2 n_3 (n_1^2 + n_2^2) \end{aligned}$$

avec

$$K = \frac{-2GAk}{c^4}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k(M_1 + M_2)}{M_1 M_2}}, \quad \vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).$$

A l'aide de (2.94), on vérifie aisément que le mode h_\times est nul. L'onde émise par un ressort est donc complètement polarisée. Les figures 2.9 et 2.10 montrent la composante h_+ pour diverses valeurs du temps.

A l'aide de (2.12), (2.62) et (2.64), on calcule

$$\frac{dE}{dt} = \frac{4Gk^3(M_1 + M_2)(4A^4 + A^2L^2)}{15c^5 M_1 M_2} \quad (2.109)$$

et

$$\frac{dL_1}{dt} = \frac{dL_2}{dt} = \frac{dL_3}{dt} = 0. \quad (2.110)$$

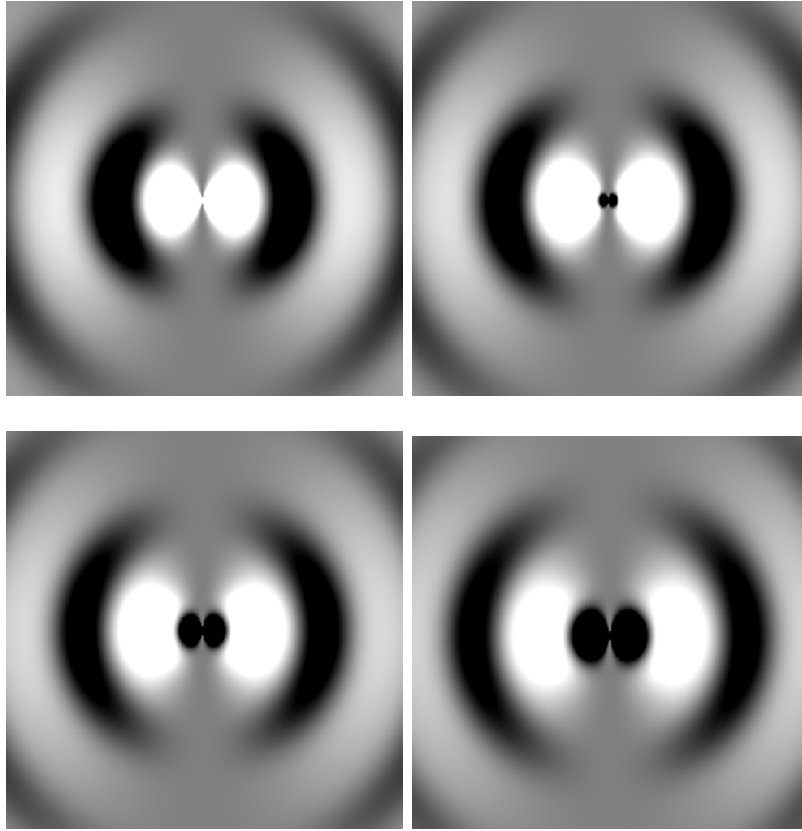


FIGURE 2.9: Représentation, dans un plan vertical, de la composante h_+ émise par un ressort vertical placé au centre. Dans les unités géométriques $c = G = 1$, on a choisi $M_1 = M_2 = 2$, $A = 0.2$, $L = 1$, $k = 1$. Dans ces conditions, la période du mouvement harmonique vaut $T = 2\pi$ et la dimension caractéristique du ressort $d = 1.2$. La vitesse des sources est de l'ordre de d/T , raisonnablement inférieure à 1 comme les approximations de la section 3 l'exigent. La fenêtre a pour dimensions 20×20 , ce qui permet d'observer à des distances grandes par rapport à d , conformément à ces approximations. L'intensité de l'onde est traduite par un dégradé de gris (noir si $h_+ \leq -0.05$; blanc si $h_+ \geq 0.05$), successivement aux temps $t = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$. Programme écrit par Pierre-Guillaume Sprimont, Université de Liège, 2006.

2.15 Système de deux corps en interaction gravitationnelle

2.15.1 Cas général

Le mouvement d'un système de deux corps ponctuels de masses respectives M_1 et M_2 liés par interaction gravitationnelle est un problème classique de la mécanique newtonienne. Il se réduit à l'étude du mouvement d'une seule particule de masse effective $m = M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$ dans le champ de gravitation engendré par une masse $M = M_1 + M_2$ immobile à l'origine des coordonnées. Dans le cas d'un mouvement borné, la solution est

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \psi}{(1 - e^2) a} \quad (2.111)$$

où r désigne la distance entre les deux corps, $e \in [0, 1[$ l'excentricité de la trajectoire elliptique, a son demi grand axe et ψ l'angle décrit à partir du périhélie. L'énergie totale

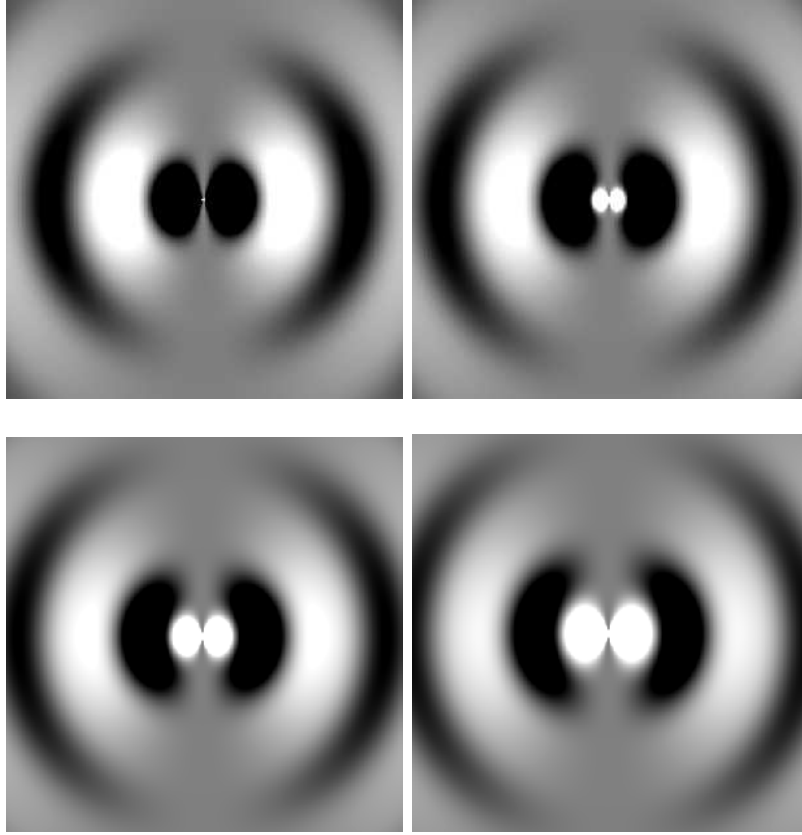


FIGURE 2.10: *Même légende que pour la figure 2.9, aux temps $t = \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4$.*

possède la valeur constante

$$E = -\frac{GMm}{2a} \quad (2.112)$$

et on dispose de l'intégrale première

$$r^2 \frac{d\psi}{dt} = \sqrt{(1-e^2) a GM}. \quad (2.113)$$

Enfin, la période de révolution est donnée par

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}. \quad (2.114)$$

On choisit les axes cartésiens de sorte que $x = r \cos \psi$, $y = r \sin \psi$ et $z = 0$. Le calcul du moment quadrupolaire ne pose aucun problème :

$$(\mathbf{Q}) = m r^2 \begin{pmatrix} 3 \cos^2 \psi - 1 & 3 \sin \psi \cos \psi & 0 \\ 3 \sin \psi \cos \psi & 3 \sin^2 \psi - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.115)$$

donc

$$Q^{11} = m \frac{(1-e^2)^2 a^2}{(1+e \cos \psi)^2} (3 \cos^2 \psi - 1)$$

$$\begin{aligned}
Q^{22} &= m \frac{(1-e^2)^2 a^2}{(1+e \cos \psi)^2} (3 \sin^2 \psi - 1) \\
Q^{33} &= -m \frac{(1-e^2)^2 a^2}{(1+e \cos \psi)^2} \\
Q^{12} &= 3m \frac{(1-e^2)^2 a^2}{(1+e \cos \psi)^2} \sin \psi \cos \psi.
\end{aligned}$$

Dès lors, la relation (2.62) permet de calculer la puissance perdue instantanément :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{8 G^4 M_1^2 M_2^2 (M_1 + M_2)}{15 a^5 c^5 (1-e^2)^5} (1+e \cos \psi)^4 [12(1+e \cos \psi)^2 + e^2 \sin^2 \psi]. \quad (2.116)$$

La puissance perdue moyenne se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dE(t)}{dt} dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{dE[t(\psi)]}{dt} \frac{1}{\dot{\psi}} d\psi.
\end{aligned}$$

En exploitant l'équation de conservation du moment cinétique (2.113), on trouve

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{32 G^4 M_1^2 M_2^2 (M_1 + M_2)}{5 a^5 c^5 \sqrt{(1-e^2)^7}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) \quad (2.117)$$

qui correspond à la puissance perdue par le système. L'équation de conservation de l'énergie (2.112) permet d'en déduire la variation du demi grand axe :

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -\frac{64 G^3 M_1 M_2 (M_1 + M_2)}{5 a^3 c^5 \sqrt{(1-e^2)^7}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right). \quad (2.118)$$

L'évolution moyenne de la période de révolution résulte de (2.114) et vaut

$$\left\langle \frac{dT}{dt} \right\rangle = -\frac{192 \pi M_1 M_2}{5 c^5} \sqrt{\frac{G^5 (M_1 + M_2)}{a^5 (1-e^2)^7}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right). \quad (2.119)$$

L'équation (2.64) de transfert du moment cinétique s'applique aisément : la seule composante non nulle est

$$\begin{aligned}
\frac{dL_3}{dt} &= \frac{2 G^{7/2} M_1^2 M_2^2 \sqrt{M_1 + M_2}}{45 c^5 a^{7/2} (1-e^2)^{7/2}} [144(1+e \cos \psi)^6 - 144 e \cos \psi (1+e \cos \psi)^5 \\
&\quad - 72 e \cos \psi (1+e \cos \psi)^4 - 72 e^2 (1+e \cos \psi)^4 + 36 e^2 (1+e \cos \psi)^3 \\
&\quad + 36 e^2 \cos^2 \psi (1+e \cos \psi)^3 + 72 e^3 \cos \psi (1+e \cos \psi)^3]. \quad (2.120)
\end{aligned}$$

D'où la variation moyenne, en raisonnant comme pour l'énergie ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{dL_3}{dt} \right\rangle &= \frac{(1-e^2)^{3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dL_3}{dt} \frac{1}{(1+e \cos \psi)^2} d\psi \\
&= \frac{32 \sqrt{G^7} M_1^2 M_2^2 \sqrt{M_1 + M_2}}{5 c^5 \sqrt{a^7} (1-e^2)^2} \left(1 + \frac{7}{8} e^2 \right). \quad (2.121)
\end{aligned}$$

Cette relation permet de calculer la variation temporelle de l'excentricité. En effet,

$$L_3 = M_1 M_2 \sqrt{\frac{(1-e^2) a G}{M_1 + M_2}},$$

donc

$$\frac{dL_3}{dt} = M_1 M_2 \sqrt{\frac{G}{M_1 + M_2}} \left[-e \frac{de}{dt} \sqrt{\frac{a}{1-e^2}} + \frac{1}{2} \frac{da}{dt} \sqrt{\frac{1-e^2}{a}} \right].$$

Remplaçant $\langle dL_3/dt \rangle$ à l'aide de (2.121) changée de signe (puisque le moment cinétique emporté par les ondes est enlevé au système des deux masses orbitantes) et tenant compte de la valeur de $\langle da/dt \rangle$ donnée par (2.118), on en déduit

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = -\frac{304 G^3 M_1 M_2 (M_1 + M_2) e}{15 a^4 c^5 \sqrt{(1-e^2)^5}} \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right). \quad (2.122)$$

Comme le membre de droite est négatif, *l'excentricité des orbites tend vers zéro* et donc, les trajectoires tendent vers des cercles. Le temps d'effondrement d'un système double par émission d'ondes gravitationnelles peut être calculé en combinant (2.118) et (2.122).

2.15.2 Le cas particulier des orbites circulaires

Dans le cas des deux corps de masses respectives M_1 et M_2 gravitant en mouvement circulaire uniforme dans le plan (x, y) à des distances de l'origine respectivement égales à r_1 et r_2 , on obtient :

$$\begin{aligned} h_{11}^{TT} &= \frac{K}{2r} \cos(2\omega t') [(1-n_1^2)^2 - n_1^2 n_2^2 + n_3^2] - \frac{K}{r} \sin(2\omega t') n_1 n_2 (1-n_1^2) \\ h_{22}^{TT} &= \frac{K}{2r} \cos(2\omega t') [-(1-n_2^2)^2 + n_1^2 n_2^2 - n_3^2] - \frac{K}{r} \sin(2\omega t') n_1 n_2 (1-n_2^2) \\ h_{33}^{TT} &= \frac{K}{2r} \cos(2\omega t') [n_1^2 + n_1^2 n_3^2 - n_2^2 - n_2^2 n_3^2] + \frac{K}{r} \sin(2\omega t') n_1 n_2 (1+n_3^2) \\ h_{12}^{TT} &= \frac{K}{2r} \cos(2\omega t') n_1 n_2 (n_1^2 - n_2^2) + \frac{K}{r} \sin(2\omega t') (n_3^2 + n_1^2 n_2^2) \\ h_{13}^{TT} &= \frac{K}{2r} \cos(2\omega t') n_1 n_3 (n_1^2 - n_2^2 - 2) + \frac{K}{r} \sin(2\omega t') n_2 n_3 (n_1^2 - 1) \\ h_{23}^{TT} &= \frac{K}{2r} \cos(2\omega t') n_2 n_3 (n_1^2 - n_2^2 + 2) + \frac{K}{r} \sin(2\omega t') n_1 n_3 (n_2^2 - 1) \end{aligned}$$

avec

$$K = -\frac{4 G^2 M_1 M_2}{c^4 d}, \quad \omega = \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{d^3}}, \quad d = r_1 + r_2.$$

Quelques représentations des modes h_+ et h_\times sont proposées en figures 2.11 et 2.12.

En posant $e = 0$ dans (2.121), on obtient

$$\frac{dL_1}{dt} = 0, \quad \frac{dL_2}{dt} = 0, \quad \frac{dL_3}{dt} = \frac{32\sqrt{G^7} M_1^2 M_2^2 \sqrt{M_1 + M_2}}{5 c^5 \sqrt{d^7}}. \quad (2.123)$$

La répartition de la puissance rayonnée selon chacun des deux modes de polarisation est donnée par un calcul analogue à celui de la section 2.13, vu l'égalité formelle entre les

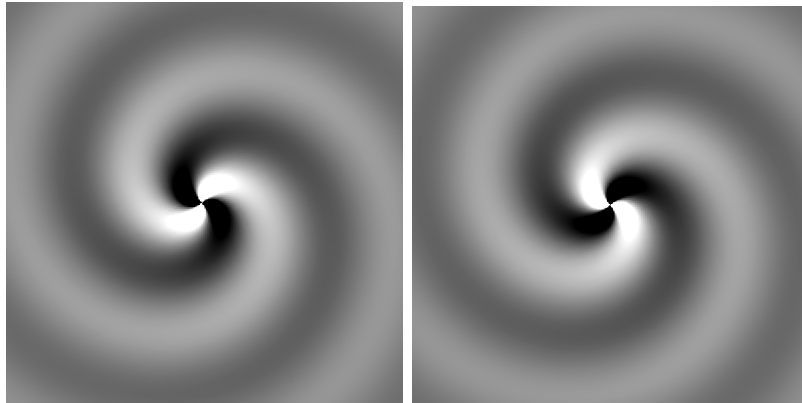


FIGURE 2.11: Représentation, dans le plan $z = 0$, de la composante h_+ émise par deux corps en rotation dans ce plan, aux temps $t = 0$ et $t = 2\pi$. En unités géométriques, $M_1 = M_2 = 2$, $d = 4$. La période du mouvement vaut 8π et celle de l'onde est égale à 4π . La fenêtre a pour dimensions 40×40 . Noir si $h_+ \leq -0.5$, blanc si $h_+ \geq 0.5$.

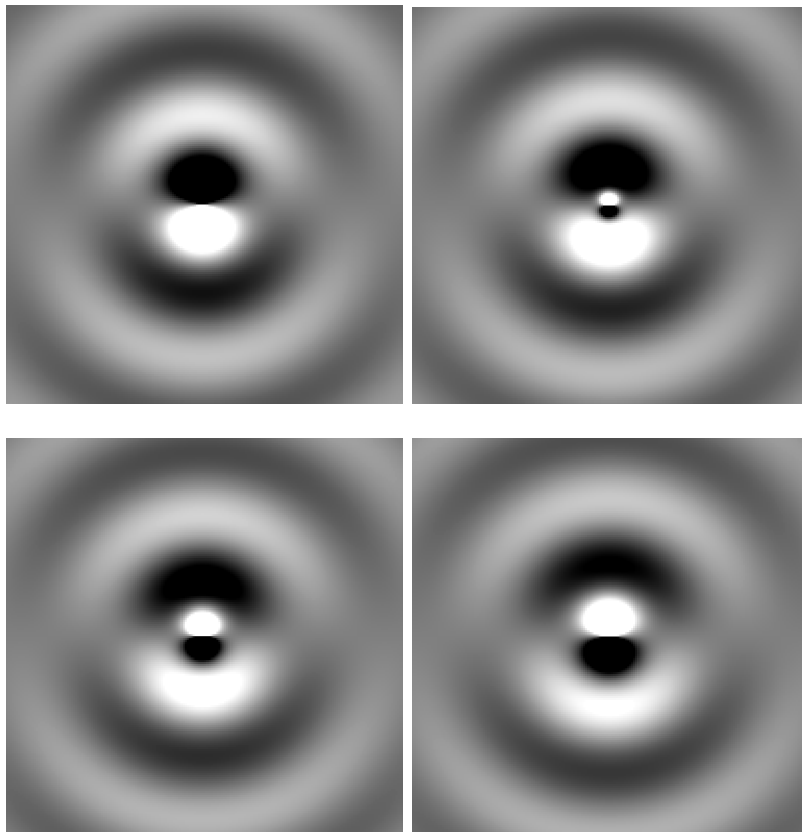


FIGURE 2.12: Représentation, dans le plan $x = 0$, de la composante h_x émise par deux corps en rotation dans le plan $z = 0$, aux temps $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Mêmes paramètres que pour la figure 2.11.

moments quadrupolaires (2.102) et (2.115) :

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{dE_+}{dt d\Omega} \right\rangle &= \frac{G^4 M_1^2 M_2^2 (M_1 + M_2)}{2\pi c^5 a^5} (1 + \cos^2 \theta)^2 \\ \left\langle \frac{dE_\times}{dt d\Omega} \right\rangle &= \frac{2 G^4 M_1^2 M_2^2 (M_1 + M_2)}{\pi c^5 a^5} \cos^2 \theta.\end{aligned}$$

En sommant et en intégrant sur la sphère, on retrouve la relation (2.117) particularisée à $e = 0$:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{32 G^4 M_1^2 M_2^2 (M_1 + M_2)}{5 c^5 a^5}. \quad (2.124)$$

Ces relations sont applicables au système Terre-Soleil, dont les orbites sont quasiment circulaires. On trouve un rayonnement gravitationnel de 200 W et une perte de moment cinétique égale à $10^9 \text{ kg m}^2/\text{s}^2$ (ces deux quantités sont d'ailleurs liées dans le cas des orbites circulaires).

Le rapprochement des deux corps résulte de (2.118). En sous-entendant les moyennes, on a

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64 G^3 M_1 M_2 (M_1 + M_2)}{5 a^3 c^5}. \quad (2.125)$$

On en déduit le temps de chute τ des deux astres l'un vers l'autre : en effet,

$$\int_0^\tau a^3 \frac{da}{dt} dt = \int_0^\tau -\frac{64 G^3 M_1 M_2 (M_1 + M_2)}{5 c^5} dt.$$

Or, le membre de gauche est égal à $-a_0^4/4$, en notant a_0 la distance initiale entre les deux astres. Donc,

$$\tau = \frac{5 c^5 a_0^4}{256 G^3 M_1 M_2 (M_1 + M_2)}. \quad (2.126)$$

La Terre devrait s'effondrer sur le Soleil, si celui-ci existait toujours, dans cent mille milliards de milliards d'années.

Annexe A

Expression du pseudo-tenseur d'énergie-impulsion

On calcule $t^{\mu\nu}$ à partir de (1.9). Compte tenu des relations

$$g_{,\alpha} = g g^{\rho\sigma} g_{\rho\sigma,\alpha} = 2g \Gamma_{\rho\alpha}^{\rho}$$

$$g^{\rho\sigma}_{,\alpha} = -\Gamma_{\xi\alpha}^{\rho} g^{\xi\sigma} - \Gamma_{\xi\alpha}^{\sigma} g^{\rho\xi} ,$$

on a successivement :

$$\begin{aligned} \left[g (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) \right]_{,\alpha\beta} &= \left[g_{,\alpha} (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) \right]_{,\beta} \\ &\quad + \left[g (g^{\mu\nu}_{,\alpha} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}_{,\alpha} - g^{\mu\alpha}_{,\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}_{,\alpha}) \right]_{,\beta} \\ \frac{1}{g} \left[g (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) \right]_{,\alpha\beta} &= \frac{1}{g} \left[2g \Gamma_{\rho\alpha}^{\rho} (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) \right]_{,\beta} \\ &\quad + \frac{g_{,\beta}}{g} (g^{\mu\nu}_{,\alpha} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}_{,\alpha} - g^{\mu\alpha}_{,\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}_{,\alpha}) \\ &\quad + g^{\mu\nu}_{,\alpha\beta} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\nu}_{,\alpha} g^{\alpha\beta}_{,\beta} + g^{\mu\nu}_{,\beta} g^{\alpha\beta}_{,\alpha} + g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} \\ &\quad - g^{\mu\alpha}_{,\alpha\beta} g^{\nu\beta} - g^{\mu\alpha}_{,\alpha} g^{\nu\beta}_{,\beta} - g^{\mu\alpha}_{,\beta} g^{\nu\beta}_{,\alpha} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}_{,\alpha\beta} . \end{aligned}$$

Regroupons les termes pour maintenir visible la symétrie entre μ et ν . Le membre de droite prend la forme

$$\begin{aligned} &4\Gamma_{\sigma\beta}^{\sigma} \Gamma_{\rho\alpha}^{\rho} (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) + 2\Gamma_{\rho\alpha,\beta}^{\rho} (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) + 4\Gamma_{\rho\alpha}^{\rho} (g^{\mu\nu}_{,\beta} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}_{,\beta}) \\ &- 2\Gamma_{\rho\alpha}^{\rho} (g^{\mu\alpha}_{,\beta} g^{\nu\beta} + g^{\nu\alpha}_{,\beta} g^{\mu\beta} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}_{,\beta} + g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta}_{,\beta}) \\ &+ g^{\mu\nu}_{,\alpha\beta} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\nu}_{,\alpha} g^{\alpha\beta}_{,\beta} + g^{\mu\nu}_{,\beta} g^{\alpha\beta}_{,\alpha} + g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} \\ &- g^{\mu\alpha}_{,\alpha} g^{\nu\beta}_{,\beta} - g^{\mu\alpha}_{,\beta} g^{\nu\beta}_{,\alpha} - g^{\mu\alpha}_{,\beta\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\nu\alpha}_{,\beta\alpha} g^{\mu\beta} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &4\Gamma_{\rho\alpha}^{\rho} \Gamma_{\sigma\beta}^{\sigma} (\underline{g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}} - \underline{g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}}) + 2\Gamma_{\rho\alpha,\beta}^{\rho} (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) - 2\Gamma_{\rho\alpha}^{\rho} (\Gamma_{\xi\beta}^{\mu} g^{\xi\nu} + \Gamma_{\xi\beta}^{\nu} g^{\xi\mu}) g^{\alpha\beta} \\ &- 2\Gamma_{\rho\alpha}^{\rho} (\Gamma_{\xi\beta}^{\mu} g^{\xi\nu} + \Gamma_{\xi\beta}^{\nu} g^{\xi\mu}) g^{\alpha\beta} - 4\Gamma_{\rho\alpha}^{\rho} g^{\mu\nu} (\Gamma_{\xi\beta}^{\alpha} g^{\xi\beta} + \Gamma_{\xi\beta}^{\beta} g^{\xi\alpha}) \\ &+ 2\Gamma_{\rho\alpha}^{\rho} (\Gamma_{\xi\beta}^{\mu} g^{\xi\alpha} + \Gamma_{\xi\beta}^{\alpha} g^{\xi\mu}) g^{\nu\beta} + 2\Gamma_{\rho\alpha}^{\rho} (\Gamma_{\xi\beta}^{\nu} g^{\xi\alpha} + \Gamma_{\xi\beta}^{\alpha} g^{\xi\nu}) g^{\mu\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\Gamma_{\rho\alpha}^{\rho} g^{\mu\alpha} (\Gamma_{\xi\beta}^{\nu} g^{\xi\beta} + \Gamma_{\xi\beta}^{\beta} g^{\xi\nu}) + 2\Gamma_{\rho\alpha}^{\rho} g^{\nu\alpha} (\Gamma_{\xi\beta}^{\mu} g^{\xi\beta} + \Gamma_{\xi\beta}^{\beta} g^{\xi\mu}) \\
& -(\Gamma_{\xi\alpha}^{\mu} g^{\xi\nu} + \Gamma_{\xi\alpha}^{\nu} g^{\xi\mu})_{,\beta} g^{\alpha\beta} + (\Gamma_{\xi\alpha}^{\mu} g^{\xi\nu} + \Gamma_{\xi\alpha}^{\nu} g^{\xi\mu})(\Gamma_{\pi\beta}^{\alpha} g^{\pi\beta} + \Gamma_{\pi\beta}^{\beta} g^{\pi\alpha}) \\
& +(\Gamma_{\xi\beta}^{\mu} g^{\xi\nu} + \Gamma_{\xi\beta}^{\nu} g^{\xi\mu})(\Gamma_{\pi\alpha}^{\alpha} g^{\pi\beta} + \Gamma_{\pi\alpha}^{\beta} g^{\pi\alpha}) - g^{\mu\nu} (\Gamma_{\xi\alpha}^{\alpha} g^{\xi\beta} + \Gamma_{\xi\alpha}^{\beta} g^{\xi\alpha})_{,\beta} \\
& -(\Gamma_{\xi\alpha}^{\mu} g^{\xi\alpha} + \Gamma_{\xi\alpha}^{\alpha} g^{\xi\mu})(\Gamma_{\pi\beta}^{\nu} g^{\pi\beta} + \Gamma_{\pi\beta}^{\beta} g^{\pi\nu}) - (\Gamma_{\xi\beta}^{\mu} g^{\xi\alpha} + \Gamma_{\xi\beta}^{\alpha} g^{\xi\mu})(\Gamma_{\pi\alpha}^{\nu} g^{\pi\beta} + \Gamma_{\pi\alpha}^{\beta} g^{\pi\nu}) \\
& +(\Gamma_{\xi\beta}^{\mu} g^{\xi\alpha} + \Gamma_{\xi\beta}^{\alpha} g^{\xi\mu})_{,\alpha} g^{\nu\beta} + (\Gamma_{\xi\beta}^{\nu} g^{\xi\alpha} + \Gamma_{\xi\beta}^{\alpha} g^{\xi\nu})_{,\alpha} g^{\mu\beta}.
\end{aligned}$$

Dans cette expression, les termes soulignés de façon identique s'annulent mutuellement. En continuant à développer, on trouve (même principe pour les termes soulignés)

$$\begin{aligned}
& \Gamma_{\rho\alpha,\beta}^{\rho} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + \Gamma_{\rho\alpha,\beta}^{\rho} (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - 2g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) - \Gamma_{\rho\alpha}^{\rho} \Gamma_{\xi\beta}^{\mu} g^{\xi\nu} g^{\alpha\beta} - \Gamma_{\rho\alpha}^{\rho} \Gamma_{\xi\beta}^{\mu} g^{\xi\nu} g^{\alpha\beta} \\
& \underline{-\Gamma_{\rho\alpha}^{\rho} \Gamma_{\xi\beta}^{\nu} g^{\xi\mu} g^{\alpha\beta} - \Gamma_{\rho\alpha}^{\rho} \Gamma_{\xi\beta}^{\nu} g^{\xi\mu} g^{\alpha\beta}} \quad \underline{-\Gamma_{\rho\alpha}^{\rho} \Gamma_{\xi\beta}^{\alpha} g^{\mu\nu} g^{\xi\beta} - \Gamma_{\rho\alpha}^{\rho} \Gamma_{\xi\beta}^{\alpha} g^{\mu\nu} g^{\xi\beta}} \\
& -2\Gamma_{\rho\alpha}^{\rho} \Gamma_{\xi\beta}^{\alpha} g^{\mu\nu} g^{\xi\beta} + 2\Gamma_{\rho\alpha}^{\rho} \Gamma_{\xi\beta}^{\alpha} g^{\xi\mu} g^{\nu\beta} + 2\Gamma_{\rho\alpha}^{\rho} \Gamma_{\xi\beta}^{\alpha} g^{\xi\nu} g^{\mu\beta} + \Gamma_{\rho\alpha}^{\rho} \Gamma_{\xi\beta}^{\nu} g^{\mu\alpha} g^{\xi\beta} \\
& +\Gamma_{\rho\alpha}^{\rho} \Gamma_{\xi\beta}^{\nu} g^{\mu\alpha} g^{\xi\beta} + \Gamma_{\rho\alpha}^{\rho} \Gamma_{\xi\beta}^{\mu} g^{\nu\alpha} g^{\xi\beta} + \Gamma_{\rho\alpha}^{\rho} \Gamma_{\xi\beta}^{\mu} g^{\nu\alpha} g^{\xi\beta} - \Gamma_{\xi\alpha,\beta}^{\mu} g^{\xi\nu} g^{\alpha\beta} - \Gamma_{\xi\alpha,\beta}^{\nu} g^{\xi\mu} g^{\alpha\beta} \\
& +\Gamma_{\xi\alpha}^{\mu} (\Gamma_{\pi\beta}^{\xi} g^{\pi\nu} + \Gamma_{\pi\beta}^{\nu} g^{\pi\xi}) g^{\alpha\beta} + \Gamma_{\xi\alpha}^{\nu} (\Gamma_{\pi\beta}^{\xi} g^{\pi\mu} + \Gamma_{\pi\beta}^{\mu} g^{\pi\xi}) g^{\alpha\beta} + \Gamma_{\xi\alpha}^{\mu} \Gamma_{\pi\beta}^{\alpha} g^{\xi\nu} g^{\pi\beta} \\
& +\Gamma_{\xi\alpha}^{\nu} \Gamma_{\pi\beta}^{\alpha} g^{\xi\mu} g^{\pi\beta} + \Gamma_{\xi\alpha}^{\mu} \Gamma_{\pi\beta}^{\beta} g^{\xi\nu} g^{\pi\alpha} + \Gamma_{\xi\alpha}^{\nu} \Gamma_{\pi\beta}^{\beta} g^{\xi\mu} g^{\pi\alpha} + \Gamma_{\xi\beta}^{\mu} \Gamma_{\pi\alpha}^{\alpha} g^{\xi\nu} g^{\pi\beta} \\
& +\Gamma_{\xi\beta}^{\nu} \Gamma_{\pi\alpha}^{\alpha} g^{\xi\mu} g^{\pi\beta} + \Gamma_{\xi\beta}^{\mu} \Gamma_{\pi\alpha}^{\beta} g^{\xi\nu} g^{\pi\alpha} + \Gamma_{\xi\beta}^{\nu} \Gamma_{\pi\alpha}^{\beta} g^{\xi\mu} g^{\pi\alpha} - \underline{g^{\mu\nu} \Gamma_{\xi\alpha,\beta}^{\alpha} g^{\xi\beta}} \\
& -g^{\mu\nu} \Gamma_{\xi\alpha,\beta}^{\beta} g^{\xi\alpha} + g^{\mu\nu} \Gamma_{\xi\alpha}^{\alpha} (\Gamma_{\pi\beta}^{\xi} g^{\pi\beta} + \Gamma_{\pi\beta}^{\beta} g^{\pi\xi}) + g^{\mu\nu} \Gamma_{\xi\alpha}^{\beta} (\Gamma_{\pi\beta}^{\xi} g^{\pi\alpha} + \Gamma_{\pi\beta}^{\alpha} g^{\pi\xi}) \\
& -\Gamma_{\xi\alpha}^{\mu} \Gamma_{\pi\beta}^{\nu} g^{\xi\alpha} g^{\pi\beta} - \Gamma_{\xi\alpha}^{\mu} \Gamma_{\pi\beta}^{\beta} g^{\xi\alpha} g^{\pi\nu} - \Gamma_{\xi\alpha}^{\alpha} \Gamma_{\pi\beta}^{\nu} g^{\xi\mu} g^{\pi\beta} - \Gamma_{\xi\alpha}^{\alpha} \Gamma_{\pi\beta}^{\beta} g^{\xi\mu} g^{\pi\nu} \\
& \underline{-\Gamma_{\xi\beta}^{\mu} \Gamma_{\pi\alpha}^{\nu} g^{\xi\alpha} g^{\pi\beta}} \quad \underline{-\Gamma_{\xi\beta}^{\mu} \Gamma_{\pi\alpha}^{\beta} g^{\xi\alpha} g^{\pi\nu}} \quad \underline{-\Gamma_{\xi\beta}^{\alpha} \Gamma_{\pi\alpha}^{\nu} g^{\xi\mu} g^{\pi\beta}} \quad \underline{-\Gamma_{\xi\beta}^{\alpha} \Gamma_{\pi\alpha}^{\beta} g^{\xi\mu} g^{\pi\nu}} \\
& +\Gamma_{\xi\beta,\alpha}^{\mu} g^{\xi\alpha} g^{\nu\beta} + \Gamma_{\xi\beta,\alpha}^{\alpha} g^{\xi\mu} g^{\nu\beta} + \Gamma_{\xi\beta,\alpha}^{\nu} g^{\xi\alpha} g^{\mu\beta} + \Gamma_{\xi\beta,\alpha}^{\alpha} g^{\xi\nu} g^{\mu\beta} \\
& -\Gamma_{\xi\beta}^{\mu} (\Gamma_{\pi\alpha}^{\xi} g^{\pi\alpha} + \Gamma_{\pi\alpha}^{\alpha} g^{\pi\xi}) g^{\nu\beta} - \Gamma_{\xi\beta}^{\nu} (\Gamma_{\pi\alpha}^{\xi} g^{\pi\alpha} + \Gamma_{\pi\alpha}^{\alpha} g^{\pi\xi}) g^{\mu\beta} \\
& -\Gamma_{\xi\beta}^{\alpha} (\Gamma_{\pi\alpha}^{\xi} g^{\pi\mu} + \Gamma_{\pi\alpha}^{\mu} g^{\pi\xi}) g^{\nu\beta} - \Gamma_{\xi\beta}^{\alpha} (\Gamma_{\pi\alpha}^{\xi} g^{\pi\nu} + \Gamma_{\pi\alpha}^{\nu} g^{\pi\xi}) g^{\mu\beta}. \tag{A.1}
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
-2R^{\mu\nu} + R g^{\mu\nu} & = (-2g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu})(\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^{\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^{\gamma} + \Gamma_{\xi\gamma}^{\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\xi} - \Gamma_{\xi\beta}^{\gamma} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\xi}) \\
& = -2g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^{\gamma} + 2g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^{\gamma} + g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^{\gamma} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^{\gamma} \\
& \quad -2g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \Gamma_{\xi\gamma}^{\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\xi} + 2g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \Gamma_{\xi\beta}^{\gamma} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\xi} \\
& \quad +g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \Gamma_{\xi\gamma}^{\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\xi} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \Gamma_{\xi\beta}^{\gamma} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\xi}. \tag{A.2}
\end{aligned}$$

Pour calculer le pseudo-tenseur d'énergie-impulsion, il faut additionner les expressions (A.1) et (A.2) :

$$\begin{aligned}
& \Gamma_{\rho\alpha,\beta}^\rho (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - 2g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) - \Gamma_{\rho\alpha}^\rho \Gamma_{\xi\beta}^\mu g^{\xi\nu} g^{\alpha\beta} - \Gamma_{\rho\alpha}^\rho \Gamma_{\xi\beta}^\nu g^{\xi\mu} g^{\alpha\beta} - \Gamma_{\rho\alpha}^\rho \Gamma_{\xi\beta}^\alpha g^{\mu\nu} g^{\xi\beta} \\
& - 2\Gamma_{\rho\alpha}^\rho \Gamma_{\xi\beta}^\alpha g^{\mu\nu} g^{\xi\beta} + 2\Gamma_{\rho\alpha}^\rho \Gamma_{\xi\beta}^\alpha g^{\xi\mu} g^{\nu\beta} + 2\Gamma_{\rho\alpha}^\rho \Gamma_{\xi\beta}^\alpha g^{\xi\nu} g^{\mu\beta} + \Gamma_{\rho\alpha}^\rho \Gamma_{\xi\beta}^\nu g^{\mu\alpha} g^{\xi\beta} \\
& + \Gamma_{\rho\alpha}^\rho \Gamma_{\xi\beta}^\mu g^{\nu\alpha} g^{\xi\beta} + \Gamma_{\xi\alpha}^\mu \Gamma_{\pi\beta}^\nu g^{\pi\xi} g^{\alpha\beta} + \Gamma_{\xi\beta}^\mu \Gamma_{\pi\alpha}^\beta g^{\xi\nu} g^{\pi\alpha} + \Gamma_{\xi\beta}^\nu \Gamma_{\pi\alpha}^\beta g^{\xi\mu} g^{\pi\alpha} \\
& - \underline{\underline{g^{\mu\nu} \Gamma_{\xi\alpha,\beta}^\beta g^{\xi\alpha}}} + g^{\mu\nu} \Gamma_{\xi\alpha}^\alpha \Gamma_{\pi\beta}^\beta g^{\pi\xi} + g^{\mu\nu} \Gamma_{\xi\alpha}^\beta (\Gamma_{\pi\beta}^\xi g^{\pi\alpha} + \Gamma_{\pi\beta}^\alpha g^{\pi\xi}) \\
& - \Gamma_{\xi\alpha}^\mu \Gamma_{\pi\beta}^\nu g^{\xi\alpha} g^{\pi\beta} - \Gamma_{\xi\alpha}^\alpha \Gamma_{\pi\beta}^\beta g^{\xi\mu} g^{\pi\nu} - \Gamma_{\xi\beta}^\alpha \Gamma_{\pi\alpha}^\beta g^{\xi\mu} g^{\pi\nu} + \Gamma_{\xi\beta,\alpha}^\alpha g^{\xi\mu} g^{\nu\beta} \\
& + \Gamma_{\xi\beta,\alpha}^\alpha g^{\xi\nu} g^{\mu\beta} - \Gamma_{\xi\beta}^\alpha (\Gamma_{\pi\alpha}^\xi g^{\pi\mu} + \Gamma_{\pi\alpha}^\mu g^{\pi\xi}) g^{\nu\beta} - \Gamma_{\xi\beta}^\alpha (\Gamma_{\pi\alpha}^\xi g^{\pi\nu} + \Gamma_{\pi\alpha}^\nu g^{\pi\xi}) g^{\mu\beta} \\
& - \underline{\underline{2g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\gamma}} + \underline{\underline{2g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^\gamma}} + \underline{\underline{g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\gamma}} - \underline{\underline{g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^\gamma}} \\
& - \underline{\underline{2g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \Gamma_{\xi\gamma}^\xi \Gamma_{\alpha\beta}^\xi}} + \underline{\underline{2g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \Gamma_{\xi\beta}^\gamma \Gamma_{\alpha\gamma}^\xi}} + \underline{\underline{g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \Gamma_{\xi\gamma}^\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\xi}} - \underline{\underline{g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \Gamma_{\xi\beta}^\gamma \Gamma_{\alpha\gamma}^\xi}}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{16\pi G}{c^4} t^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} (-2\Gamma_{\rho\sigma}^\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma + \Gamma_{\beta\rho}^\rho \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma + \Gamma_{\beta\sigma}^\rho \Gamma_{\alpha\rho}^\sigma) \\
& - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} (-2\Gamma_{\rho\sigma}^\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma + \Gamma_{\alpha\rho}^\rho \Gamma_{\beta\sigma}^\sigma + \Gamma_{\sigma\beta}^\rho \Gamma_{\alpha\rho}^\sigma) \\
& + g^{\mu\alpha} g^{\rho\sigma} (-\Gamma_{\xi\rho}^\xi \Gamma_{\alpha\sigma}^\nu + \Gamma_{\xi\alpha}^\xi \Gamma_{\rho\sigma}^\nu + \Gamma_{\alpha\xi}^\nu \Gamma_{\rho\sigma}^\xi - \Gamma_{\sigma\alpha}^\xi \Gamma_{\rho\xi}^\nu) \\
& + g^{\nu\alpha} g^{\rho\sigma} (-\Gamma_{\xi\rho}^\xi \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu + \Gamma_{\xi\alpha}^\xi \Gamma_{\rho\sigma}^\mu + \Gamma_{\alpha\xi}^\mu \Gamma_{\rho\sigma}^\xi - \Gamma_{\sigma\alpha}^\xi \Gamma_{\rho\xi}^\mu) \\
& + g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} (\Gamma_{\sigma\alpha}^\mu \Gamma_{\rho\beta}^\nu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\rho\sigma}^\nu).
\end{aligned}$$

On obtient ainsi la relation (1.10) :

$$\begin{aligned}
\frac{16\pi G}{c^4} t^{\mu\nu} &= \left(2\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\rho - \Gamma_{\alpha\rho}^\sigma \Gamma_{\beta\sigma}^\rho - \Gamma_{\alpha\rho}^\rho \Gamma_{\beta\sigma}^\sigma \right) (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) \\
& + g^{\mu\alpha} g^{\rho\sigma} \left(\Gamma_{\alpha\xi}^\xi \Gamma_{\rho\sigma}^\nu + \Gamma_{\alpha\xi}^\nu \Gamma_{\rho\sigma}^\xi - \Gamma_{\alpha\rho}^\xi \Gamma_{\sigma\xi}^\nu - \Gamma_{\alpha\rho}^\nu \Gamma_{\sigma\xi}^\xi \right) \\
& + g^{\nu\alpha} g^{\rho\sigma} \left(\Gamma_{\alpha\xi}^\xi \Gamma_{\rho\sigma}^\mu + \Gamma_{\alpha\xi}^\mu \Gamma_{\rho\sigma}^\xi - \Gamma_{\alpha\rho}^\xi \Gamma_{\sigma\xi}^\mu - \Gamma_{\alpha\rho}^\mu \Gamma_{\sigma\xi}^\xi \right) \\
& + g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \left(\Gamma_{\alpha\rho}^\mu \Gamma_{\beta\sigma}^\nu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\rho\sigma}^\nu \right). \tag{A.3}
\end{aligned}$$

Il est possible d'exprimer ce résultat en fonction des quantités $\hbar^{\mu\nu}$ définies par (2.36) :

$$\begin{aligned}
\frac{16\pi G}{c^4} (-g) t^{\mu\nu} &= \hbar^{\mu\nu}{}_{,\alpha} \hbar^{\alpha\beta}{}_{,\beta} - \hbar^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} \hbar^{\nu\beta}{}_{,\beta} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \hbar^{\alpha\gamma}{}_{,\delta} \hbar^{\delta\beta}{}_{,\gamma} \\
& - g^{\mu\alpha} g_{\beta\gamma} \hbar^{\nu\gamma}{}_{,\delta} \hbar^{\beta\delta}{}_{,\alpha} - g^{\nu\alpha} g_{\beta\gamma} \hbar^{\mu\gamma}{}_{,\delta} \hbar^{\beta\delta}{}_{,\alpha} + g_{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \hbar^{\mu\alpha}{}_{,\gamma} \hbar^{\nu\beta}{}_{,\delta} \\
& + \frac{1}{8} \left(2g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \right) (2g_{\gamma\delta} g_{\rho\sigma} - g_{\delta\rho} g_{\gamma\sigma}) \hbar^{\gamma\sigma}{}_{,\alpha} \hbar^{\delta\rho}{}_{,\beta}. \tag{A.4}
\end{aligned}$$

Annexe B

Propriétés de l'intégrale retardée

B.1 Vérification de la solution

Montrons d'abord que

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{\tau^{\mu\nu} \left(t' = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}, \vec{x}' \right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' \quad (\text{B.1})$$

est bien solution des équations du champ (2.38). Pour cela, il faudrait utiliser la théorie mathématique des distributions, essentiellement parce que la fonction $|\vec{x} - \vec{x}'|$ n'est pas dérivable en $\vec{x} = \vec{x}'$. Mais nous allons contourner cet appareil formel pour obtenir le résultat de manière un peu plus intuitive.

- Supposons d'abord $\vec{x} \neq \vec{x}'$. On calcule (le point désigne la dérivée par rapport à t') :

$$\frac{\partial \tau^{\mu\nu}(t', \vec{x}')}{\partial t} = \dot{\tau}^{\mu\nu}(t', \vec{x}') \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau^{\mu\nu}(t', \vec{x}')}{\partial x^k} &= \dot{\tau}^{\mu\nu}(t', \vec{x}') \frac{\partial}{\partial x^k} \left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} \right) \\ &= -\frac{1}{c} \dot{\tau}^{\mu\nu}(t', \vec{x}') \frac{x^k - x'^k}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\tau^{\mu\nu}(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= -\frac{1}{c} \dot{\tau}^{\mu\nu} \frac{x^k - x'^k}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} - \frac{\tau^{\mu\nu}(x^k - x'^k)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\ \frac{\partial^2}{(\partial x^k)^2} \frac{\tau^{\mu\nu}(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{\tau}^{\mu\nu}(x^k - x'^k)^2}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} - \frac{1}{c} \frac{\dot{\tau}^{\mu\nu}}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} + \frac{2}{c} \frac{\dot{\tau}^{\mu\nu}(x^k - x'^k)^2}{|\vec{x} - \vec{x}'|^4} \\ &\quad + \frac{1}{c} \frac{\dot{\tau}^{\mu\nu}(x^k - x'^k)^2}{|\vec{x} - \vec{x}'|^4} - \frac{\tau^{\mu\nu}}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} + 3 \frac{\tau^{\mu\nu}(x^k - x'^k)^2}{|\vec{x} - \vec{x}'|^5} \\ \nabla^2 \frac{\tau^{\mu\nu}(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{\tau}^{\mu\nu}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Ainsi, pour $\vec{x} \neq \vec{x}'$, c'est-à-dire si \vec{x} n'est pas situé dans les sources, on a

$$\square \frac{\tau^{\mu\nu}(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 0$$

$$\square \bar{h}^{\mu\nu}(t, \vec{x}) = 0. \quad (\text{B.5})$$

• Le point délicat est donc d'évaluer le d'alembertien de l'intégrale (B.1) lorsque \vec{x} se trouve dans les sources. Pour cela, il est raisonnable d'admettre que la contribution de l'intégrand est négligeable dans une sphère V_ϵ centrée sur \vec{x} et de rayon ϵ suffisamment petit¹ :

$$\int_V \frac{\tau^{\mu\nu}(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{V-V_\epsilon} \frac{\tau^{\mu\nu}(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}',$$

en notant V le volume total des sources. Mais il ne faudrait pas en déduire que le résultat (B.5) est maintenu, car il s'agit de dériver une intégrale évaluée sur un domaine qui dépend des quantités x^k par rapport auxquelles on dérive. Appelons S_ϵ la frontière de V_ϵ et $\bar{n}' = (\vec{x}' - \vec{x})/|\vec{x}' - \vec{x}'|$ la normale unitaire de S_ϵ (au sens de la géométrie euclidienne), dirigée vers l'extérieur. D'après le théorème de dérivation des intégrales paramétriques, on a

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \int_{V-V_\epsilon} \frac{\tau^{\mu\nu}(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' = \int_{V-V_\epsilon} \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\tau^{\mu\nu}(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' - \int_{S_\epsilon} \frac{\tau^{\mu\nu}(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} n'_k dS'. \quad (\text{B.6})$$

Le second terme du membre de droite s'annule. En répétant l'opération, on obtient

$$\nabla^2 \int_{V-V_\epsilon} \frac{\tau^{\mu\nu}(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' = \int_{V-V_\epsilon} \nabla^2 \frac{\tau^{\mu\nu}(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' - \sum_k \int_{S_\epsilon} \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{\tau^{\mu\nu}(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] n'_k dS'$$

et

$$\begin{aligned} \nabla^2 \int_V \frac{\tau^{\mu\nu}(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{V-V_\epsilon} \nabla^2 \frac{\tau^{\mu\nu}(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' \\ &- \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_k \int_{S_\epsilon} \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{\tau^{\mu\nu}(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] n'_k dS'. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Or, par (B.4) et par (B.3), respectivement,

$$\begin{aligned} \int_{V-V_\epsilon} \nabla^2 \frac{\tau^{\mu\nu}(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' &= \frac{1}{c^2} \int_{V-V_\epsilon} \frac{\ddot{\tau}^{\mu\nu}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' \\ - \sum_k \int_{S_\epsilon} \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{\tau^{\mu\nu}(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] n'_k dS' &= -\frac{1}{c} \int_{S_\epsilon} \frac{\dot{\tau}^{\mu\nu}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS' - \int_{S_\epsilon} \frac{\tau^{\mu\nu}}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} dS' \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{V-V_\epsilon} \nabla^2 \frac{\tau^{\mu\nu}(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' = \frac{1}{c^2} \int_V \frac{\ddot{\tau}^{\mu\nu}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' \quad (\text{B.8})$$

$$- \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_k \int_{S_\epsilon} \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{\tau^{\mu\nu}(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] n'_k dS' = 0 - 4\pi \tau^{\mu\nu}(t, \vec{x}). \quad (\text{B.9})$$

Rassemblant les résultats (B.1), (B.2), (B.7), (B.8) et (B.9), on obtient

$$\square \bar{h}^{\mu\nu}(t, \vec{x}) = -\frac{16\pi G}{c^4} \tau^{\mu\nu}(t, \vec{x}). \quad (\text{B.10})$$

1. R. Simon, *Mécanique rationnelle, Première Partie*, Derouaux, 1972, pp. 351-357.

B.2 Vérification de la condition de jauge

La solution (B.1) satisfait bien la condition de jauge de Lorenz.

$$\begin{aligned}\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{h}^{\mu 0}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{h}^{\mu k}}{\partial x^k} \\ \frac{c^4}{4G} \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} &= \frac{1}{c} \int \frac{\dot{\tau}^{\mu 0}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' - \frac{1}{c} \sum_k \int \frac{\dot{\tau}^{\mu k} (x^k - x'^k)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} d\vec{x}' - \sum_k \int \frac{\tau^{\mu k} (x^k - x'^k)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d\vec{x}'.\end{aligned}$$

En utilisant la relation (2.40)

$$\frac{\partial \tau^{\mu\nu}(t', \vec{x}')}{\partial x'^\nu} = 0, \quad (\text{B.11})$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{c^4}{4G} \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} &= - \sum_k \int \left[\frac{\partial \tau^{\mu k}}{\partial x'^k} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{c} \frac{\dot{\tau}^{\mu k} (x^k - x'^k)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} + \frac{\tau^{\mu k} (x^k - x'^k)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right] d\vec{x}' \\ &= - \sum_k \int \frac{d}{dx'^k} \frac{\tau^{\mu k}(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}'\end{aligned}$$

où le symbole d désigne la dérivée totale. Par le théorème de Gauss, on a

$$\frac{c^4}{4G} \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = - \sum_k \oint \frac{\tau^{\mu k}(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} n'_k dS'.$$

Cette quantité est nulle : pour s'en convaincre, il suffit d'intégrer sur une sphère de rayon suffisamment grand et de rappeler que, dans ces conditions, l'intégrand varie comme l'inverse du cube de la distance (voir chapitre 2).