

Université de Liège
Faculté des Sciences Appliquées

Rapport F.R.I.A. 1998-99

Première bourse — Deuxième année

Formulation Arbitraire Lagrangienne-Eulérienne pour le contact lubrifié
entre solides. Applications aux opérations de mise à forme.

R.Boman

24 janvier 2007

L.T.A.S.–Thermomécanique & Milieux Continus	Tel	:	+32–(0)4/366.91.89
Rue Ernest Solvay, 21	Fax	:	+32–(0)4/253.25.81
B-4000 LIEGE	E-Mail	:	r.boman@ulg.ac.be

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Le problème de lubrification en mécanique	7
1.2	Résumé des recherches de première année	8
1.3	Plan du travail de la deuxième année de bourse	9
2	Modélisation du contact lubrifié entre solides	13
2.1	Introduction	13
2.2	Rugosimétrie et caractérisation des surfaces	15
2.2.1	Répartition des hauteurs	15
2.2.2	Répartition spatiale	18
2.3	Les quatre régimes de lubrification	19
2.4	Le régime hydrodynamique en film épais	21
2.4.1	Equation de Reynolds	21
2.4.2	Rhéologie des lubrifiants	24
2.4.3	Perspectives	26
2.5	Le régime hydrodynamique en film mince	26
2.5.1	Introduction	26
2.5.2	Facteurs d'écoulement et équation de Reynolds moyenne	27
2.5.3	Modèle de Patir & Cheng	29
2.5.4	Modèle de Tripp	31
2.5.5	Calcul du cisaillement moyen	31
2.5.6	Equation de Reynolds moyenne stationnaire	34
2.6	Le régime limite	34
2.7	Le régime mixte	36
2.7.1	Introduction	36
2.7.2	Modèles d'écrasement d'aspérités	38
2.7.3	Equations d'écrasement d'aspérités	40
2.7.4	Modification de l'équation de Reynolds	42
2.8	Conclusions	42
3	Méthode de résolution par différences finies	45
3.1	Introduction	45
3.2	Description du modèle de Marsault	46

3.2.1	Position du problème	46
3.2.2	Méthode des tranches pour la mécanique de la bande	47
3.2.3	Traitement des différents régimes	48
3.2.4	Algorithme général	51
3.3	Applications numériques	53
3.3.1	Introduction	53
3.3.2	Cas académique : laminage d'aluminium	54
3.3.3	Cas industriel : laminage d'acier inoxydable	56
3.4	Conclusions	62
4	Méthode de résolution par éléments finis	63
4.1	Introduction	63
4.2	Avantages et difficultés de la méthode EF	63
4.3	Discrétisation spatiale de l'équation de Reynolds	66
4.3.1	Introduction	66
4.3.2	Prise en compte d'un maillage mobile	67
4.3.3	Forme faible de l'équation de Reynolds	67
4.3.4	Evaluation numérique des grandeurs en jeu	69
4.3.5	Evaluation numérique des matrices de fluidité	70
4.3.6	Utilisation de la méthode SUPG	72
4.4	Discrétisation temporelle de l'équation de Reynolds	73
4.4.1	Schéma d'Euler implicite	73
4.4.2	Inversion du système	75
4.5	Conditions aux limites et conditions initiales	75
4.5.1	Détermination des zones d'entrées	75
4.5.2	Analyse d'une zone d'entrée	76
4.6	Calcul des contraintes	88
4.7	Algorithme du calcul des forces externes de contact	88
4.7.1	Description de l'algorithme	88
4.7.2	Gestion des débordements	93
4.8	Validation numérique de l'algorithme	94
4.8.1	Introduction	94
4.8.2	Cas d'une convection pure	95
4.8.3	Pression d'interface parabolique	98
4.8.4	Pression d'interface cubique	103
4.9	Couplage fluide-structure	105
4.10	Conclusions et perspectives	110
5	Applications numériques	113
5.1	Introduction	113
5.2	Simulation d'un laminage d'une tôle d'acier	113
5.2.1	Présentation du cas-test	113
5.2.2	Résultats obtenus	117

5.2.3	Comparaison avec une loi de frottement de type Coulomb	124
5.2.4	Importance des forces de traction et contre-traction	127
5.2.5	Influence des pas de temps	129
5.2.6	Influence de la vitesse de laminage	131
5.2.7	Influence de la rugosité	133
5.2.8	Influence de la méthode de calcul de l'angle d'entrée	134
5.2.9	Influence du type de loi de frottement hydrodynamique	136
5.2.10	Influence des différents termes de l'équation de Reynolds	137
5.2.11	Choix du solveur	139
5.2.12	Influence du coefficient d'upwind	141
5.2.13	Simulation en formalisme lagrangien	141
5.3	Conclusions	145
6	Etude de l'indentation d'aspérités	147
6.1	Déformation d'aspérités	147
6.2	Description de la simulation	148
6.3	Génération du maillage	149
6.4	Résultats obtenus	151
6.5	Perspectives	153
6.6	Conclusions	154
7	Conclusions	159
7.1	Conclusions générales	159
7.2	Perspectives	161
A	Intégration de l'équation de Reynolds dans la zone d'entrée	163
A.1	Introduction : première intégration de l'équation de Reynolds	163
A.2	Deuxième intégration : méthode de Hu & Liu	164

Chapitre 1

Introduction

1.1 Le problème de lubrification en mécanique

Ce rapport décrit en détails les développements effectués dans le cadre de ma deuxième année de première bourse F.R.I.A. et vient compléter le dossier de candidature de deuxième bourse. Ce rapport est donc totalement indépendant du rapport de première année de bourse [3].

Pour commencer, rappelons le sujet de ce travail. Depuis déjà quelques années, les méthodes numériques de modélisation des processus de formage des matériaux deviennent un outil important, voire indispensable, dans l'élaboration de nouveaux procédés ou l'optimisation de procédés couramment utilisés en industrie. Parmi ceux-ci, le laminage à froid et l'emboutissage de tôles minces nous intéressent plus particulièrement vu nos contacts avec l'industrie Cockerill.

Jusqu'à présent, la recherche dans ces domaines s'est principalement focalisée sur l'élaboration de lois constitutives complexes. L'expérience montre cependant qu'une connaissance approfondie du comportement des métaux utilisés n'est pas suffisante pour pouvoir représenter correctement la réalité sur ordinateur. En effet, les phénomènes tribologiques, c'est-à-dire toutes les interactions entre la tôle et l'outil, que l'on regroupe souvent sous le nom de frottement, jouent un rôle primordial sur le résultat du processus envisagé. Pour l'instant, peu de codes éléments finis présentent une modélisation du lubrifiant entre la tôle et l'outil et toutes les interactions entre les deux surfaces en contact sont résumées à un coefficient de frottement et une loi de Coulomb ou de Tresca [36, 11, 8, 56, 27, 12].

Lorsqu'on parcourt la littérature sur le sujet (voir les travaux de Liu [16, 22, 15], Wilson [55, 53, 50, 52], Sheu & Wilson [54, 43], Marsault [29, 28], Lugt [26], Li [20] parmi beaucoup d'autres), on constate que la plupart des articles traitent du laminage et ceci pour deux raisons. Premièrement, le laminage (à chaud et à froid) joue un rôle considérable dans

l'industrie actuelle. En effet, il suffit de regarder autour de soi pour se rendre compte de la quantité d'objets qui comportent des tôles d'acier ou d'aluminium (industrie du transport et particulièrement l'industrie automobile, les emballages, boîtes de conserve, canettes, ...). A l'heure actuelle, une grande partie de la production d'acier passe en premier lieu par le laminoir avant d'être envoyé aux industries spécialisées. Deuxièmement, le laminage est un processus stationnaire. Si on ne tient pas compte de l'engagement de la bande dans l'emprise des cylindres pour amorcer l'opération, on peut laisser tomber tous les termes transitoires dans les équations. Nous verrons dans la suite que la prise en compte des termes transitoires lors de la simulation de procédés tels que l'emboutissage rend la résolution des équations beaucoup plus ardue. C'est pourquoi, nous nous sommes limités, jusqu'à présent, à simuler le laminage (voir chapitre 5).

1.2 Résumé des recherches de première année

Nous voici déjà au terme de deux années de recherches sur le sujet. Au cours de la première année [3], nous avons voulu commencer directement à développer un modèle de lubrification dans METAFOR [36, 38, 42, 45], le code non linéaire de calcul par éléments finis développé au LTAS-Thermomécanique et Milieux Continus. Cependant, la plupart des formulations actuelles pour le problème de lubrification sont eulériennes puisque établies pour la simulation du laminage. Or, METAFOR n'est pas un code eulérien. Il fallait donc généraliser les formules trouvées dans la littérature au cas lagrangien. Pour pouvoir valider notre algorithme, il était indispensable de pouvoir effectuer des simulations eulériennes. Le formalisme Arbitraire Lagrangien Eulérien (ALE) [36, 18, 21, 1, 5] permet une telle généralisation : cette formulation permet de définir une grille de calcul indépendante du mouvement de la matière. Ce formalisme permet de retrouver le formalisme lagrangien (si le maillage est fixé à la matière) et le formalisme eulérien (si le maillage est fixe dans l'espace) comme cas particuliers. Un problème ALE se résout en deux phases distinctes par pas de temps : une phase lagrangienne pure et une deuxième phase qui comporte un phase de remaillage (déjà présente dans METAFOR) et une phase de convection des grandeurs stockées aux points de Gauss de l'ancien maillage vers le nouveau. C'est cette dernière opération qui devait impérativement être améliorée pour traiter des problèmes eulériens. En effet, les algorithmes introduits par J.-P. Ponthot [36] dans METAFOR sont instables et ne conviennent donc que pour des remaillages peu fréquents ou des déplacements relatifs entre le maillage et la matière peu importants. En conséquence, nous avons dû, en premier lieu et avant toutes considérations sur le problème de lubrification, s'occuper de cette phase de convection. Lors de cette étude, nous avons mis au point deux algorithmes de convection : un algorithme basé sur la méthode des volumes finis [40, 17] et un algorithme basé sur la méthode SUPG [6]. Ces derniers nous ont permis de simuler des processus industriels (tels que le laminage avec frottement de Coulomb, l'extrusion, l'écrasement d'un lopin, etc) par le formalisme ALE.

Pendant cette première année, nous avons également développé un algorithme de pilotage en force des matrices de contact pour les problèmes bidimensionnels. Cet algorithme permet d'imposer une force et non plus un déplacement sur les outils (serre-flans pour l'emboutissage par exemple). Grâce à cet algorithme il est possible de simuler de manière plus réaliste les processus industriels tels que l'emboutissage. Notre méthode a été, depuis lors, utilisée avec succès par plusieurs membres du service LTAS-MC&T [9].

Enfin, nous avons abordé la théorie de la lubrification dans les opérations de mise à forme en mettant au point une loi de frottement de Stribeck pour METAFOR (loi de frottement à coefficient variable où le coefficient de frottement local est déduit de courbes expérimentales). Cette loi nous a permis de modéliser le phénomène de stick-slip dans le cas du test plan-plan (glissement d'une tôle entre deux patins). Ce modèle ne nous a cependant pas satisfait entièrement. En effet, les courbes de Stribeck ont un caractère macroscopique puisqu'elles résultent de mesures de forces résultantes. Or elles sont utilisées pour évaluer le frottement local qui, par nature, est microscopique.

1.3 Plan du travail de la deuxième année de bourse

Pendant cette deuxième année de bourse, nous avons pu commencé à nous intéresser plus particulièrement aux mécanismes propres au frottement lubrifié dans les opérations de mise à forme.

Après ce chapitre introductif, le chapitre 2 introduit les équations et les concepts fondamentaux de la théorie de la lubrification. Les quatre grands régimes de lubrification [50] sont présentés et décrits en détails. L'équation de Reynolds, régissant le mouvement du fluide entre deux surfaces lisses, est déduite des équations de Navier-Stokes. Nous abordons, entre autres, les facteurs d'écoulement de Patir & Cheng [33, 34] et de Tripp [49] qui permettent de prendre en compte l'influence de la rugosité dans l'équation de Reynolds. Le régime mixte est brièvement abordé et nous présentons les équations d'écrasement d'aspérités et les différents modèles d'écrasement.

Le chapitre 3 présente un modèle de résolution du problème de laminage par différences finies. Ce modèle a été élaboré récemment par Marsault [29, 28]. Il inclut la prise en compte du régime mixte où le frottement est composé du frottement sur les aspérités en contact et le frottement dû au cisaillement dans le lubrifiant qui s'écoule dans les vallées inter-aspérités. Nous avons reprogrammé ce modèle à partir de rien pour nous permettre de nous familiariser avec les différents concepts apparaissant dans les équations. Seuls la prise en compte de la déformation du cylindre et les effets thermiques ont été négligés. Pour résoudre les difficultés de programmation rencontrés et pour retrouver les résultats obtenus par Marsault, nous avons pris contact avec lui et avec le Professeur Montmitonnet de l'Université des Mines de Paris. Ce dernier nous a expliqué plusieurs subtilités nécessaires pour l'obtention d'un algorithme robuste et efficace. Nous présentons, dans ce chapitre, nos

résultats et nous les comparons avec ceux de Marsault. Nous montrons également (ce qui n'est pas mis en évidence dans le travail de Marsault) l'importance du modèle d'écrasement d'aspérités utilisé dans le modèle.

Après avoir obtenu des résultats encourageant avec le modèle de Marsault, nous avons voulu essayé de l'introduire dans notre code de calcul par éléments finis, METAFOR. Nous avons vu surgir, à partir de cet instant, de nombreuses difficultés dues à la formulation élément fini. Ces difficultés nous ont conduit à la conclusion qu'il n'est pas possible d'adapter simplement le modèle de lubrification mixte de Marsault à un schéma de résolution par éléments finis. Pourtant, ce pas doit être franchi si on veut généraliser le modèle (traiter par exemple l'emboutissage) ou se débarrasser des principales hypothèses du modèle (la méthode des tranches utilisée pour la résolution de l'équilibre de la tôle implique des simulations de tôles minces).

Le chapitre 4 commence par expliquer en détail les difficultés rencontrées lors de l'extension du modèle complet de Marsault au cas élément fini. Nous avons alors momentanément simplifié le problème de lubrification en laissant tomber le régime mixte. Celui-ci sera abordé dans la suite de notre travail. La seule méthode de résolution de l'équation de Reynolds par éléments finis dans le cadre de processus de mise à forme a été formulée par Liu & Hu [16, 22, 24, 15, 23]. Elle consiste à définir des éléments finis (EF) de lubrification à partir des noeuds en contact. La pression d'interface est calculée par le code EF et supposée connue. L'épaisseur locale de lubrifiant est discrétisée en chaque noeud et une méthode de Newton-Raphson est utilisée pour résoudre l'équation ainsi obtenue. Toutefois, la méthode de Hu & Liu n'est pas directement applicable au cas de METAFOR et ceci principalement pour trois raisons. La première est le caractère eulérien des formules utilisées. En effet, METAFOR est un code lagrangien ou ALE mais pas vraiment eulérien pur. Il faut donc étendre la formulation pour une résolution sur un maillage mobile indépendant du mouvement de la matière. La deuxième raison vient des hypothèses utilisées : certaines formules sont valables uniquement dans le cas du laminage. C'est le cas, principalement du calcul des conditions aux limites. Enfin, troisièmement, Liu résout une équation stationnaire puisqu'il ne s'intéresse qu'au régime établi. Pour METAFOR, code transitoire, nous devons garder les termes transitoires dans les équations pour converger progressivement vers une solution stationnaire, si elle existe. Cela nous permettra aussi, dans le futur, de simuler des problèmes transitoires tels que l'emboutissage [7, 44, 47].

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode de résolution de l'équation de Reynolds que nous avons généralisée. Une attention toute particulière est portée sur les conditions initiales et les conditions aux limites. Ces dernières sont résolues sans aucune hypothèse sur le processus étudié.

Nous introduisons ensuite cet algorithme de résolution dans METAFOR en effectuant les jonctions nécessaires pour obtenir un couplage entre le mouvement du lubrifiant et la matière déformée. Contrairement à la plupart des publications sur le sujet (par exemple [23, 30]), nous résolvons les deux problèmes (fluide et structure) en un seul pas de temps

en déduisant une matrice de raideur tangente globale du système qui tient compte de la présence du lubrifiant.

Le chapitre 5 montre une application numérique intéressante de l'algorithme décrit au chapitre 4. Il s'agit d'un cas de laminage précédemment étudié par Liu [15]. Nous montrons que nous obtenons des résultats très similaires à ce dernier. Nous effectuons, ensuite, une analyse plus poussée de l'influence des paramètres du modèle. Les difficultés rencontrées sont décrites en détails et les solutions apportées sont expliquées. Nous détaillons également quelques points importants qu'il faudra approfondir pour améliorer le modèle. Enfin, le même cas de laminage est simulé par les deux formalismes (ALE et lagrangien pur) et les résultats sont comparés.

Le dernier chapitre est un peu différents des autres. Nous y étudions le transfert de rugosité du cylindre de laminage vers la surface de la tôle dans une simulation de skin-pass (impression sur la surface d'une tôle d'une rugosité définie). La tôle est très finement discrétisée et un algorithme de maillage spécial a été mis au point pour pouvoir raffiner la peau de la tôle tout en utilisant des mailles quadrangulaires. Ce calcul, très long a tourné plus de trois semaines sur une station de travail Alpha 600 MHz.

Ce travail se termine alors sur une conclusion générale et sur une énumération des nombreuses perspectives de recherche pour l'avenir.

Chapitre 2

Modélisation du contact lubrifié entre solides

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons détailler les équations qui entrent en jeu lors du contact de deux surfaces solides. Dans le cadre de ce travail, nous considérons que le contact est lubrifié comme c'est généralement le cas pour tous les procédés rencontrés en industrie.

Lorsque deux solides (la tôle et l'outil) sont en contact lors d'une opération de mise à forme, de nombreux phénomènes entrent en jeu à leur interface

- Tout d'abord, les effets hydrodynamiques du lubrifiant, c'est-à-dire l'apparition d'une pression au sein du lubrifiant due au mouvement relatif des deux surfaces, doivent être pris en compte. Le mouvement du lubrifiant est régi par les équations de la mécanique des fluides et nous verrons quelles sont les simplifications que l'on peut faire sous les hypothèses d'un écoulement en film mince (voir section 2.4.1). Ces équations sont couramment résolues par différences finies dans le cadre de la lubrification de paliers ou de roulements. Dans ce cas, on connaît la géométrie et donc l'épaisseur du film de lubrifiant et on recherche la pression. Par contre, pour les processus de mise à forme, on suppose la pression du lubrifiant connue et on en déduit l'épaisseur du film.
- On peut s'interroger sur la loi de comportement à utiliser pour le lubrifiant (voir section 2.4.2). En général, le lubrifiant est considéré comme un fluide visqueux newtonien ou piézovisqueux (viscosité dépendant de la pression). Certaines mesures [28] ont cependant déjà montré que, dans certains cas industriels, le caractère newtonien du lubrifiant peut être remis en cause.
- La rugosité de la tôle joue également un grand rôle. A l'échelle microscopique, la rugosité se présente comme une succession de pics et de vallées. La hauteur des pics dépend du fini de surface et est généralement de l'ordre du micron, voire de

la dizaine de microns. Une surface possédant des pics inférieurs au micron paraît macroscopiquement lisse et brillante. Lors du contact entre deux surfaces rugueuses, les aspérités vont jouer deux rôles principaux. Le premier est de modifier l'écoulement du lubrifiant. En effet, les aspérités peuvent aider le lubrifiant à parcourir la zone de contact ou au contraire empêcher son mouvement suivant leur orientation. Cette influence est d'autant plus grande que l'épaisseur du film de lubrifiant est petite par rapport à la taille moyenne des aspérités. Le deuxième rôle apparaît lorsque le film de lubrifiant est plus mince et que les aspérités des deux surfaces entrent en contact. Dans ce cas, une loi de frottement microscopique doit être utilisée.

- Lors d'un processus industriel tel que le laminage, les aspérités de la tôle entrent en contact avec les aspérités du cylindre de laminage. Dans ces conditions, la déformation des aspérités et les phénomènes tels que le labourage, l'indentation et l'apparition de vagues doivent être pris en compte. En effet, vu leur taille et leur géométrie, les aspérités plastifient très vite lors des premiers contacts alors que le coeur du matériau reste élastique. On peut montrer aussi que la déformation plastique du coeur du matériau influence la déformation en surface des aspérités. La mécanique des déformations d'aspérités est un sujet encore assez mal connu à l'heure actuelle et fait l'objet de nombreuses recherches [19, 35, 41, 46, 52, 57]. Les lois décrivant les interactions et l'écrasement d'aspérités permettent de déterminer la fraction de l'aire apparente de contact supportée par les aspérités. Dans la pratique industrielle, ce contact entre aspérités permet de réduire la taille des aspérités pendant le processus et obtenir un bon fini de surface (aspect global lisse et brillant) et permet d'augmenter le frottement par rapport à celui fourni par le cisaillement dans le lubrifiant (généralement trop faible pour laminier une tôle).
- A une échelle plus petite, des phénomènes très complexes entrent en jeu au niveau du contact entre deux aspérités. En effet, la rugosité d'une tôle possède, en général, un caractère fractal [28, 31]. Autrement dit, on observe des aspérités de plus faible longueur caractéristique sur une aspérité donnée. De même, cette micro-aspérité n'est pas lisse et présente des imperfections à une échelle encore plus petite et ainsi de suite. A cette géométrie complexe s'ajoute la présence d'oxydes présents en très fines couches et d'impuretés qui ne peuvent jamais être totalement éliminés. Ceux-ci modifient inévitablement les propriétés de la surface du matériau [14] et donc le comportement des aspérités lors de leur écrasement. Enfin, même si deux aspérités sont en contact, il existe toujours une très fine couche moléculaire de lubrifiant séparant les deux métaux. La dynamique et les propriétés de cette couche influencent également le frottement microscopique au niveau des aspérités.

L'énumération précédente des principaux phénomènes rencontrés lors de l'étude du contact entre deux surfaces montre qu'il existe encore de nombreux axes de recherche sur le sujet.

Le but final de la résolution du problème de lubrification est la détermination des contraintes de cisaillement qui vont agir sur le matériau qui est mis en forme. Ces contraintes

sont calculées par une loi de frottement qui fera intervenir une contribution due à l'interaction des aspérités et une contribution provenant du cisaillement au sein du lubrifiant (voir section 2.7).

2.2 Rugosimétrie et caractérisation des surfaces

Bien que le modèle de frottement que nous avons introduit dans METAFOR à l'heure actuelle (voir chapitre 4) ne tient pas compte de la déformation des aspérités de la tôle et de l'outil, il est indispensable d'introduire quelques concepts mathématiques intervenant dans la représentation mathématique de la rugosité de surface. En effet, ceux-ci seront introduits dans le modèle dans un futur proche. De plus, le modèle complet de laminage de Marsault [28] que nous avons étudié inclut les effets de rugosité (chapitre 3).

2.2.1 Répartition des hauteurs

2.2.1.1 Rugosité

La rugosité d'une surface peut être décrite mathématiquement par une fonction $y = f(x, z)$. Nous utilisons ici les notations propres à la description du laminage où x est la direction de laminage et z la direction transverse. La surface est constituée de pics et de vallées dont la répartition diffère dans ces deux directions.

Nous nous limitons ici au plan (x, y) , des définitions équivalentes peuvent être formulées pour le plan (y, z) .

La rugosité est généralement mesurée par un rugosimètre ou microscope à force atomique. Cet appareil fournit un ensemble de N mesures (x_i, y_i) . On peut alors définir la *ligne moyenne* comme la moyenne des y_i . Cette ligne permet d'effectuer un changement d'axe et redéfinir les hauteurs mesurées y_i telle que cette moyenne soit nulle.

On définit ensuite la *rugosité* de la surface considérée par une des formules suivantes :

$$R_a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i| \quad R_q = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^2 \right)^{1/2} \quad (2.1)$$

où R_a est la rugosité moyenne et R_q (souvent notée σ dans la littérature) est la rugosité RMS (Root Mean Square).

Dans ce qui suit, nous considérerons une tôle rugueuse et un outil lisse. Ce qui implique la définition d'une *rugosité composite* des deux surfaces initiales. Celle-ci permettra de traiter les cas réels (deux surfaces rugueuses) comme le cas plus simple de l'interaction

entre une surface lisse et une surface rugueuse. Si R_{q1} et R_{q2} sont les rugosités respectives des deux surfaces en contact, la rugosité composite est définie par :

$$R_q = \sqrt{R_{q1}^2 + R_{q2}^2} \quad (2.2)$$

2.2.1.2 Distributions statistiques des hauteurs

La surface peut être considérée comme une variable aléatoire et traitée par la théorie statistique. La *densité de répartition des hauteurs* $f(y)$ est définie par la probabilité pour la hauteur d'avoir une valeur comprise entre y et $y + dy$. Cette densité de répartition vérifie donc :

$$\int^{z_{max}} f(z) dz = 1 \quad (2.3)$$

où

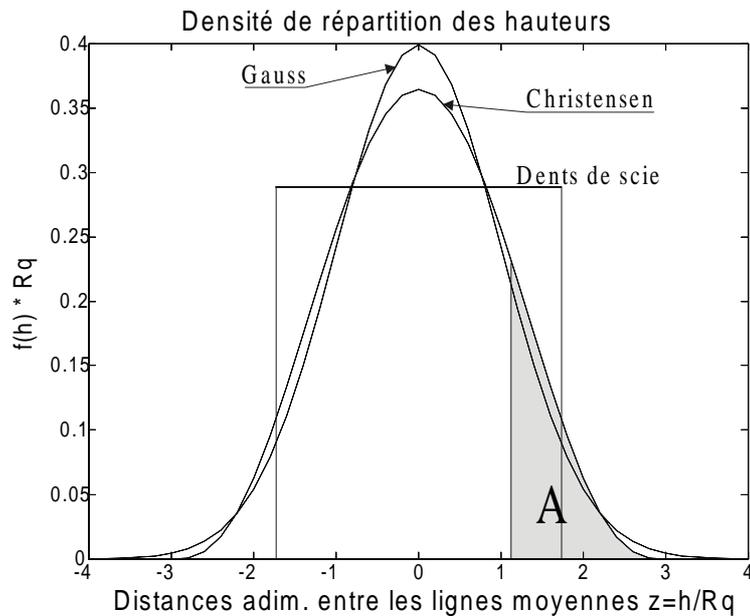


FIG. 2.1: Les fonctions de répartition des hauteurs couramment utilisées (Gauss, Christensen et dents de scie).

Les distributions fréquemment utilisées sont les suivantes (voir figure 2.1) : tout d'abord, la distribution gaussienne

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} R_q} \exp \frac{(y/R_q)^2}{2} \quad (2.4)$$

qui a le gros désavantage de présenter une probabilité non nulle de trouver un contact lorsque y tend vers l'infini. Pour y remédier, Christensen [10] définit une distribution tron-

quée :

$$f(y) = \frac{35}{96R_q} \left(1 - \left(\frac{y}{3R_q} \right)^2 \right) \quad \text{avec} \quad (z_{min}, z_{max}) = (-3R_q, 3R_q) \quad (2.5)$$

Enfin, la distribution en dents de scie longitudinales :

$$f(y) = \frac{1}{2\sqrt{3}R_q} \quad \text{avec} \quad (z_{min}, z_{max}) = (-\sqrt{3}R_q, \sqrt{3}R_q) \quad (2.6)$$

Pour des distributions de hauteurs, les définitions de la rugosité (équation 2.1) se transforment en :

$$R_a = \int_{z_{min}}^{z_{max}} |y| f(y) dy \quad R_q = \left(\int_{z_{min}}^{z_{max}} y^2 f(y) dy \right)^{1/2} \quad (2.7)$$

2.2.1.3 Aire réelle de contact

Dans un modèle qui prend en compte la déformation des aspérités, il est important de distinguer la distance entre la ligne moyenne de la surface lisse et la ligne moyenne de la surface rugueuse non réactualisées (on note cette distance h) et l'épaisseur moyenne du film de lubrifiant, h_t . Lorsqu'il n'y a pas de contact entre les aspérités (régime hydrodynamique), ces deux grandeurs sont égales. Dans le cas d'écrasements importants, la valeur de h diminue et h_t augmente. On peut dire :

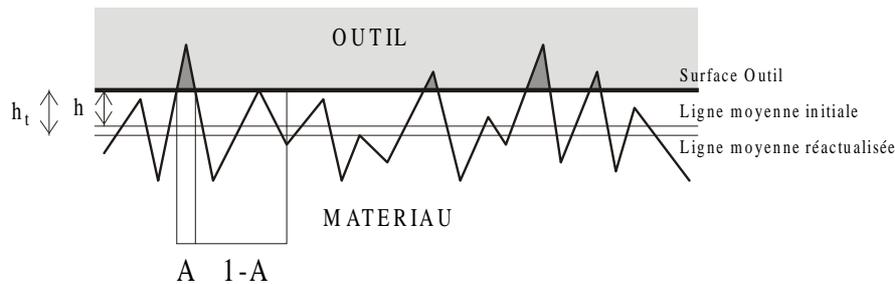


FIG. 2.2: Définition de h , distance entre les lignes moyennes non réactualisées, h_t , distance entre les lignes moyennes réactualisées et A , l'aire réelle de contact.

On définit également l'aire réelle de contact (ou le taux de contact), noté A , comme étant l'aire de contact rapportée à l'aire totale à la base des aspérités dans le plan (x, y) . Lorsqu'il n'y a pas de contact entre aspérités, l'aire réelle de contact est nulle. Par contre A vaut 1 lorsque les aspérités sont complètement écrasées.

D'un point de vue numérique, les valeurs de A et h_t se déduisent directement lorsque la fonction de répartition des hauteurs $f(y)$ et la distance entre lignes moyennes non réactualisées h sont connues :

$$A = \int_h^{z_{max}} f(y) dy \quad (2.8)$$

$$h_t = \int_{z_{min}}^h (1 - A(y)) dy \quad (2.9)$$

En définissant $H = h/3R_q$, on obtient pour la distribution de Christensen :

$$A = \frac{1}{32} (16 - 35H + 35H^3 - 21H^5 + 5H^7) \quad (2.10)$$

$$h_t = \frac{3R_q}{256} (35 + 128H + 140H^2 - 70H^4 + 28H^6 - 5H^8) \quad (2.11)$$

Pour la distribution en dents de scie, on obtient, en redéfinissant $H = h/\sqrt{3R_q}$:

$$A = \frac{1}{2}(1 - H) \quad (2.12)$$

$$h_t = \frac{\sqrt{3}R_q}{4}(1 + H)^2 \quad (2.13)$$

Les variables h , h_t et A sont donc des inconnues qui dépendent l'une de l'autre. La détermination de l'une d'entre elles permet la connaissance des deux autres.

2.2.2 Répartition spatiale

La caractérisation spatiale d'une surface permet d'avoir une idée de la géométrie moyenne d'une aspérité. Dans cette section, nous ne présentons que l'approche analytique qui a pour défaut de dépendre de l'échelle d'observation. D'autres approches (approches spectrales et fractales) permettent de surpasser cet inconvénient (voir Marsault [28]).

Pour caractériser la rugosité dans les directions x et z , on utilise une fonction d'auto-corrélation (ACF) qui représente le degré de corrélation entre deux hauteurs distantes de β :

$$\text{ACF}(\beta) = \frac{1}{R_q^2} E(y(x) y(x + \beta)) = \frac{1}{R_q^2 L} \int_0^L y(x) y(x + \beta) dx \quad (2.14)$$

où $E()$ représente l'espérance mathématique.

La répartition spatiale selon x est caractérisée par la longueur d'auto-corrélation β^* , au-delà de laquelle les hauteurs en $x + \beta^*$ sont indépendantes des hauteurs en x . La longueur d'auto-corrélation β^* est définie par la relation :

$$\text{ACF}(\beta^*) = C \quad (2.15)$$

où C est une constante à définir de manière un peu arbitraire suivant le type de fonction d'auto-corrélation.

Une forme classique de la fonction d'auto-corrélation est une exponentielle décroissante. On choisit alors la constante $C = 1/e$.

$$\text{ACF}(\beta) = \exp(-\beta/\beta^*) \quad \rightarrow \quad C = \text{ACF}(\beta^*) = 1/e \quad (2.16)$$

Pour une répartition des hauteurs en dents de scie régulières, on obtient analytiquement :

$$\text{ACF}(\beta) = 4 \left(\frac{\beta}{l} \right)^3 - 6 \left(\frac{\beta}{l} \right)^2 + 1 \quad (2.17)$$

où l est la demi-base d'une aspérité. Si on choisit $C = 0.1$ ou $C = 0.5$, on obtient respectivement $\beta^* = 0.427l$ et $\beta^* = 0.326l$. En généralisant, on peut définir la demi-distance entre deux aspérités comme la longueur d'auto-corrélation β^* .

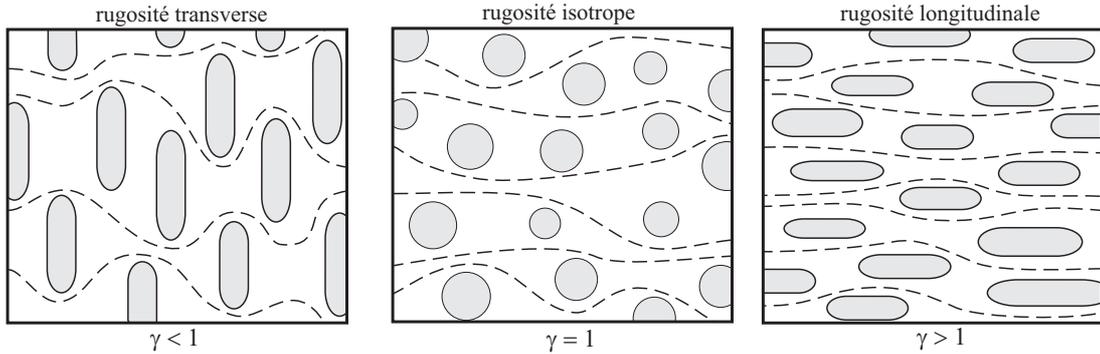


FIG. 2.3: Interprétation du nombre de Peklenik γ_s .

On définit ensuite *le nombre de Peklenik* γ comme le rapport entre la longueur d'auto-corrélation dans le sens de l'écoulement (direction x dans le cas du laminage) et de la longueur d'auto-corrélation dans la direction perpendiculaire (direction z). Ce nombre donne une image de l'orientation des aspérités et permet de classer la topologie des surfaces : longitudinales ($\gamma = \infty$), transversales ($\gamma = 0$) et isotropes ($\gamma = 1$).

2.3 Les quatre régimes de lubrification

Résoudre les équations gouvernant le lubrifiant d'une part et celles décrivant la mécanique des deux surfaces rugueuses en contact d'autre part est une tâche extrêmement compliquée. C'est pourquoi il est admis que l'on peut caractériser l'écoulement du lubrifiant par différents régimes de lubrification (voir Wilson [50]). La détermination du régime

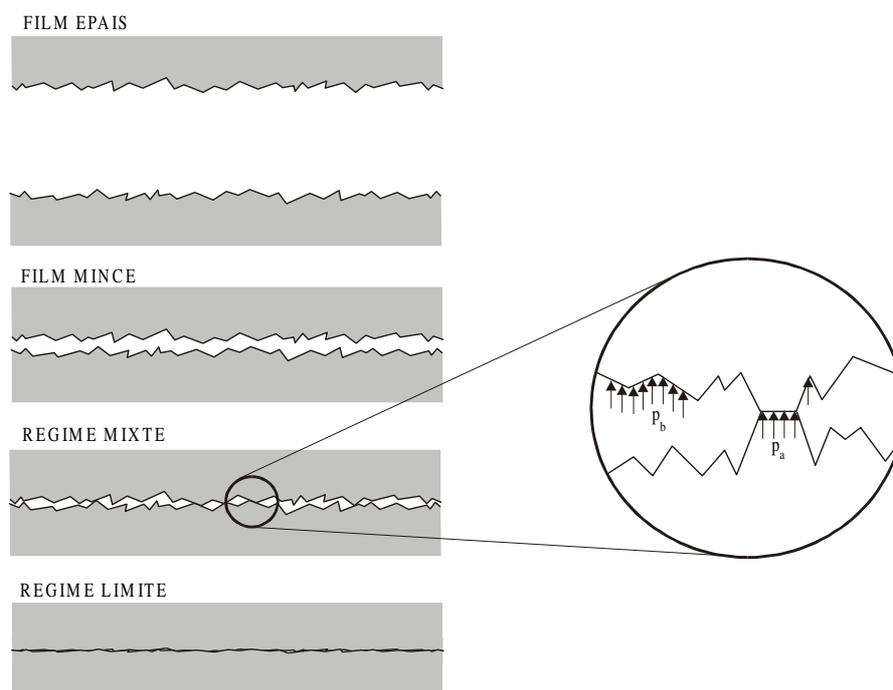


FIG. 2.4: Les quatre régimes de lubrification

courant se déduit de l'épaisseur relative de lubrifiant h_t par rapport à la rugosité composite R_q et de la part de la pression totale supportée par les aspérités.

On définit ainsi le *régime hydrodynamique* pour lequel il n'y a pas de contact entre aspérités. Ce régime peut être divisé en régime hydrodynamique en film épais et régime hydrodynamique en film mince suivant que les aspérités influencent ou non l'écoulement du lubrifiant. A l'opposé, le *régime limite* est atteint lorsque le contact est très sévère (épaisseur de film bien inférieure à la hauteur des aspérités). Enfin, le *régime mixte* est une combinaison des deux premiers. Dans ce régime, une partie de la pression est supportée par le lubrifiant et l'autre partie par les aspérités (voir figure 2.4 pour une représentation schématique de ces régimes).

Il est important de remarquer que le régime de lubrification est fonction de la position. Ainsi, en laminage, on distingue généralement une zone hydrodynamique à l'entrée et à la sortie de l'emprise et une zone mixte dans l'emprise (voir 3.2.3). Le régime de lubrification est aussi fonction du temps dans le cas des processus transitoires tels que l'emboutissage.

Dans les sections suivantes, nous détaillons les différents régimes et nous présentons les équations qui s'y rapportent.

2.4 Le régime hydrodynamique en film épais

Le régime hydrodynamique est observé lorsque les surfaces en contact sont séparées par une distance importante comparée à la hauteur moyenne des aspérités et lorsque les aspérités délimitant l'écoulement du lubrifiant n'influencent pas celui-ci. Ce régime serait également obtenu si les deux surfaces en présence étaient parfaitement lisses. D'un point de vue pratique, on dit que le régime hydrodynamique film épais est atteint lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} h_t > 10R_q \\ Ap_a/p = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

où Ap_a est la part de pression supportée par les aspérités.

Ce régime est caractérisé par un frottement faible. Le régime hydrodynamique est peu rencontré dans les processus de formage des matériaux parce qu'il provoque généralement un aspect non désirable (mat) de la surface après le processus. En effet, les aspérités ne subissent aucun écrasement et la surface de la tôle se déforme comme une surface libre. Il arrive même, dans certains cas, que la rugosité moyenne augmente localement. C'est le cas en emboutissage lorsque la tôle subit des grandes rotations qui entraînent des mécanismes complexes de rotation de grains à la surface du métal. Ce phénomène de croissance de rugosité peut être aussi observé lors de simples essais de traction [28].

De plus, en laminage, ce régime provoque généralement l'apparition du patinage lorsque le frottement n'est pas assez important pour entraîner la tôle dans l'emprise.

Pour modéliser ce régime, c'est l'équation de Reynolds (voir par exemple Marsault [28]) qui est la plus souvent utilisée. Dans cette section nous négligeons les effets thermiques. Ceux-ci peuvent être pris en compte en couplant l'équation de Reynolds avec l'équation de la chaleur pour obtenir une température moyenne le long de la zone de contact.

2.4.1 Equation de Reynolds

L'équation de Reynolds est déduite des équations de Navier-Stokes sous les hypothèses suivantes :

- Les forces de volume sont négligées. En particulier, la force de gravité n'intervient pas dans le problème. Cette hypothèse est toujours utilisée en tribologie. De plus, l'inertie du fluide est négligée.
- Le fluide est supposé incompressible, ce qui se justifie pleinement pour la gamme des pressions rencontrées en pratique.
- La pression et la viscosité du lubrifiant est considérée comme constante sur l'épaisseur du film d'huile. Ceci est vrai tant que l'épaisseur du film d'huile reste petite. Nous verrons comment lever cette hypothèse à la section 2.4.2.

- La courbure des surfaces lubrifiées est très grande en comparaison avec l'épaisseur du film.
- Il n'y a pas de glissement entre le lubrifiant et les deux surfaces le délimitant.
- Le lubrifiant est supposé newtonien.
- L'écoulement du lubrifiant est laminaire. On peut vérifier que c'est généralement le cas pour les cas industriels couramment rencontrés. En effet, supposons un film épais de 0.1 mm mis en pression et subissant un glissement relatif de 40 m/s et de viscosité moyenne de $5 \cdot 10^{-2}$ Poiseuille. Si la masse spécifique du fluide est de 900 kg/m^3 , on obtient un nombre de Reynolds caractéristique de 72 :

$$Re = \frac{\rho \bar{u} h}{\eta} = \frac{900 \cdot 40 \cdot 10^{-4}}{0.05} = 72 \quad (2.19)$$

ce qui est largement inférieur à 2000 (transition laminaire-turbulent).

Dans cette section, nous dérivons l'équation de Reynolds pour un écoulement unidimensionnel. L'extension au cas d'un écoulement plan est immédiate. Cependant, elle présente peu d'utilité pour l'instant puisque nous nous bornerons à étudier par la suite des problèmes mécaniques 2D.

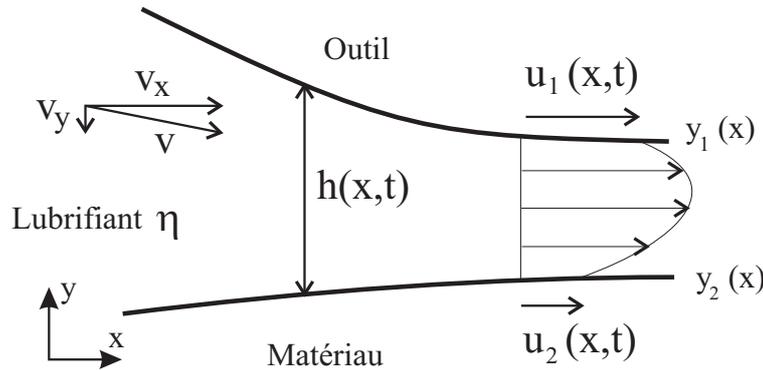


FIG. 2.5: Écoulement fluide entre deux surfaces lisses.

Considérons un écoulement fluide selon la direction x . La direction z est perpendiculaire à la surface de la tôle. Les équations de Navier-Stokes s'écrivent dans ce cas :

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (2.20)$$

$$\rho \frac{dv_z}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (2.21)$$

On suppose que les forces d'inertie sont négligeables. Si on suppose également que la vitesse verticale v_z est petite devant la vitesse du fluide dans la direction de l'écoulement ainsi que ses dérivées et que la variation de v_x selon la direction de l'écoulement est petite

par rapport à celle dans l'épaisseur du film, alors on peut réécrire le système précédent sous la forme :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (2.23)$$

L'équation (2.23) est importante puisqu'elle signifie que la pression ne varie pas suivant la hauteur du film de lubrifiant. On pourra donc égaler la pression transmise par l'outil sur la tôle et la pression du lubrifiant lors du couplage fluide structure.

En intégrant l'équation (2.22) deux fois selon l'épaisseur, on calcule la vitesse du lubrifiant selon x .

$$v_x(z) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2 \quad (2.24)$$

où les conditions aux limites permettent de déterminer les constantes C_1 et C_2 .

$$\left. \begin{array}{l} v_x(y=0) = u_1 \\ v_x(y=h) = u_2 \end{array} \right\} \rightarrow v_x(z) = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} z(z-h) + \frac{V}{h} z + u_1 \quad (2.25)$$

où on a introduit V , le glissement relatif des deux surfaces ($V = u_1 - u_2$). L'équation (2.25) est le champ de vitesses d'un écoulement de Couette et d'un écoulement de Poiseuille.

Si on s'intéresse au débit par unité de longueur transversale (noté q), on obtient :

$$q = \int_0^h \rho v_x(z) dz = \rho \left(h\bar{u} - \frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (2.26)$$

où \bar{u} est la vitesse moyenne des deux surfaces ($\bar{u} = (u_1 + u_2)/2$).

L'équation de continuité s'écrit en toute généralité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.27)$$

En intégrant cette équation sur l'épaisseur entre $z = 0$ et $z = h$, on obtient l'équation suivante :

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (2.28)$$

Il reste à introduire l'expression du débit (2.26) trouvée précédemment dans l'équation (2.28) pour obtenir la forme finale de l'équation de Reynolds.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} h) + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.29)$$

Cette équation différentielle non linéaire relie la pression locale du lubrifiant p à l'épaisseur de film locale h . Elle traduit directement la conservation du débit du lubrifiant.

On peut remarquer que pour des surfaces non déformables ($\bar{u} = \text{constante}$), un régime stationnaire hydrodynamique n'est pas possible entre des surfaces parallèles ($h = \text{constante}$). En effet, dans ce cas, on obtient une équation de Laplace pour la pression dont la solution ne dépend que des conditions aux limites (qui sont nulles sans apport artificiel de pression).

Dans le cas de l'étude d'un problème stationnaire tel que le laminage, la dérivée temporelle de l'épaisseur de film disparaît et on peut intégrer l'équation par rapport à x pour obtenir :

$$\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} = h\bar{u} - c_{debit} \quad (2.30)$$

où, par identification avec (2.26), la constante d'intégration c_{debit} est le débit de lubrifiant.

En se rappelant de l'expression de la vitesse selon x (2.25) et en négligeant la dérivée par rapport à x de la vitesse selon z , le frottement est donné par la formule :

$$\tau = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_{z=h} = \eta \frac{V}{h} \pm \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.31)$$

où le signe positif est relatif à la surface 1 ($z = h$) et le signe négatif pour la surface 2 ($z = 0$).

2.4.2 Rhéologie des lubrifiants

Le comportement du fluide peut être mis en équation en exprimant une relation entre la contrainte de cisaillement et le taux de cisaillement au sein du lubrifiant. Dans le paragraphe précédent, nous avons supposé une relation linéaire entre ces deux grandeurs, ce qui définit un fluide newtonien. En pratique, les lubrifiants ne sont jamais parfaitement newtoniens. Cependant, sous l'hypothèse de taux de cisaillement modérés, ce comportement linéaire peut être mesuré et confirmé.

Si, pour l'instant, seul le comportement newtonien est pris en compte dans ce travail, il sera cependant intéressant d'essayer de lever cette hypothèse dans la suite. En effet, dans certaines conditions de laminage, on peut observer de fines bandes de cisaillement intenses dans lesquelles l'hypothèse de linéarité entre le cisaillement et le taux de déformation peut être remis en question.

Le fait de lever cette hypothèse entraîne non seulement une complication des équations en jeu, c'est-à-dire l'équation de Reynolds (celle-ci doit être complètement réécrite à partir des équations de Navier-Stokes) mais aussi des difficultés de convergence dans les algorithmes numériques dues aux nouvelles non linéarités introduites.

Trois modèles de comportement sont couramment utilisés : la loi linéaire du fluide newtonien, la loi d'Eyring qui tend vers une contrainte de cisaillement limite avec un loi en arcsinus hyperbolique et une loi plastique où la contrainte de cisaillement varie linéairement avec le taux de cisaillement jusqu'à une valeur limite (analogie avec un matériau élastique parfaitement plastique en mécanique du solide).

La pression et la température peuvent être prise en compte dans le comportement du lubrifiant. D'une manière générale, la viscosité augmente avec la pression et diminue lorsque la température augmente.

Lorsqu'on inclut une dépendance vis-à-vis de la pression, on parle de fluide piézo-visqueux. Dans ce cas, la loi la plus utilisée est la loi de Barus, loi de type exponentielle :

$$\eta = \eta_0 e^{\gamma_l p} \quad (2.32)$$

où γ_l est le coefficient de pression de la viscosité. Cette loi est valable pour des pressions modérées. Dans le cas de pressions plus élevées, Roelands propose une relation empirique basée sur des mesures faites avec des huiles minérales :

$$\eta = \eta_0 \exp \left((\ln \eta_0 + 9.67) \left(\left(1 + \frac{p_b}{p_r} \right)^{z_{p_b}} - 1 \right) \right) \quad (2.33)$$

avec $p_r = 196.2$ MPa et z_{p_b} , l'index de pression de la viscosité calculé pour que les pentes des relations (2.32) et (2.33) coïncident à l'origine :

$$z_{p_b} = \frac{p_r \gamma_l}{\ln \eta_0 + 9.67} \quad (2.34)$$

Pour obtenir une équation de Reynolds qui fait intervenir la dépendance en pression de la viscosité du lubrifiant, il faudrait, en toute rigueur réécrire les équations de Navier-Stokes. Cependant, la plupart des modèles hydrodynamiques utilisent une viscosité constante pour dériver l'équation de Reynolds et injectent la dépendance vis-à-vis de la pression a posteriori. On peut montrer que cette manière de faire entraîne une erreur d'autant plus grande que le taux de cisaillement est important. Cependant, dans le cas du laminage, Marsault [28] montre que l'erreur commise est très souvent négligeable.

Si la loi de Barus est choisie, il est assez simple de transformer le terme de pression de l'équation de Reynolds (2.29) de la manière suivante :

$$\frac{h^3}{12 \eta(p)} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{h^3 e^{-\gamma_l p}}{12 \eta_0} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{h^3}{12 \eta_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\gamma_l} (1 - e^{-\gamma_l p}) \right) = \frac{h^3}{12 \eta_0} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \quad (2.35)$$

On constate donc que, dans le cas d'un fluide piézo-visqueux suivant la loi de Barus, on peut résoudre l'équation de Reynolds (2.29) en considérant η_0 au lieu de $\eta(p)$. La pression correspondante \hat{p} (pression réelle si la viscosité était constante) est reliée à la pression réelle par la relation :

$$\hat{p} = \frac{1}{\gamma_l} (1 - e^{-\gamma_l p}) \quad (2.36)$$

L'influence de la température sur la viscosité peut être prise en compte grâce à une loi de type exponentielle :

$$\eta = \eta_0 e^{\delta(T-T_0)} \quad (2.37)$$

où T_0 est la température de référence, η_0 est la viscosité à la température T_0 et δ est le coefficient de température de la viscosité.

D'autres lois plus complexes existent [28] mais nous ne les présentons pas ici vu que les modèles développés à l'heure actuelle ne tiennent pas compte d'une telle dépendance.

2.4.3 Perspectives

D'un point de vue théorique, nous devons considérer dans la suite de ce travail l'expression de l'équation de Reynolds dans un repère en coordonnées cylindriques. Ceci nous permettra d'aborder les processus de formage des matériaux axisymétriques comme, principalement, l'emboutissage d'une tôle par un poinçon sphérique où l'extrusion d'un métal dans une filière.

Le problème de l'emboutissage sphérique peut être également formulé en coordonnées sphériques dont l'origine est le centre du poinçon. L'avantage d'une telle formulation par rapport à une formulation en coordonnées cylindriques est la prise en compte automatique de la courbure du film de lubrifiant (constante et égale à la courbure du poinçon). En contre-partie, il est nécessaire d'introduire dans le modèle explicitement le centre et le rayon du poinçon au cours du temps. Le code de calcul doit donc être particularisé pour ce genre de problème et cela va à l'encontre de la philosophie de METAFOR, notre code éléments finis, qui se veut le plus général possible.

2.5 Le régime hydrodynamique en film mince

2.5.1 Introduction

L'équation de Reynolds est valable pour des surfaces parfaitement lisses ou lorsque les surfaces sont séparées par une couche de lubrifiant très grande vis-à-vis de la taille des aspérités. Lorsque la couche de lubrifiant devient plus faible, les aspérités ne sont plus négligeables et leur géométrie influence l'écoulement et donc, entre autres, la pression et le frottement. Cette section décrit comment il est possible de tenir compte des effets de la rugosité sans être obligé de prendre en compte la géométrie exacte des frontières délimitant l'écoulement. Pour ce faire, plusieurs formulations existent et celles-ci peuvent être regroupées en deux catégories bien distinctes. La première catégorie traite les cas où il n'y a pas de contact entre aspérités ($h > 3R_q$ pour une distribution de Christensen) et la seconde traite les cas où il y a contact ($h < 3R_q$). Nous nous intéressons, dans cette

section au régime hydrodynamique mince, c'est-à-dire le régime pour lequel il n'y a pas de contact et donc à la première catégorie. La deuxième catégorie sera décrite par la suite pour la description du régime mixte (section 2.7).

2.5.2 Facteurs d'écoulement et équation de Reynolds moyenne

La première approche du régime hydrodynamique en film mince vient de Christensen [10] qui, par une méthode analytique, fait intervenir l'espérance mathématique du rapport h/R_q dans l'équation de Reynolds. De cette approche découle deux équations de Reynolds ; l'une pour le cas d'une rugosité transverse :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{E(1/(h/R_q)^3)} \right) = 12 \eta \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \frac{E(1/(h/R_q)^2)}{E(1/(h/R_q)^3)} \quad (2.38)$$

et l'autre pour une rugosité longitudinale :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} E((h/R_q)^3) \right) = 12 \eta \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} E(h/R_q) \quad (2.39)$$

où h est la distance entre les lignes moyennes non réactualisées qui vaut h_t en régime sans contact.

Patir et Cheng [34, 33, 32] introduisent la notion de facteurs d'écoulement sans dimension ϕ_x et ϕ_s représentant des corrections sur le débit par rapport au cas sans aspérités. Ces facteurs interviennent dans leur équation de Reynolds moyenne :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi_x \frac{h^3}{12 \eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} h) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V}{2} R_q \phi_s \right) + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.40)$$

où la pression p et l'épaisseur de lubrifiant h sont des valeurs moyennes à l'échelle de la rugosité (quelques microns), mais des valeurs locales à l'échelle globale de la zone de contact (quelques millimètres).

L'équation (2.40) provient d'une reformulation de l'expression du débit q (2.26) pour obtenir un débit moyen \bar{q} en fonction des valeurs moyennes de p et h . Patir et Cheng écrivent celui-ci de la manière suivante :

$$\bar{q} = h \bar{u} - \phi_x \frac{h^3}{12 \eta} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{V}{2} R_q \phi_s \quad (2.41)$$

Le premier terme (terme de Couette) fait simplement intervenir l'épaisseur de lubrifiant moyenne à la place de la valeur locale.

Le second terme (terme de Poiseuille) correspondant au débit dû à la variation de pression moyenne dans le film moyen fait intervenir le facteur de correction ϕ_x . Ce facteur

est une image de l'influence de la rugosité sur le débit. Il doit, bien sûr, tendre vers 1 si l'épaisseur du film augmente ($h/R_q \rightarrow \infty$).

Le troisième terme est un nouveau terme traduisant l'influence de la rugosité sur le glissement. Il fait intervenir le facteur d'écoulement ϕ_s dont le signe dépend de la rugosité des deux surfaces et du sens de l'écoulement. Pour fixer les idées, considérons le cas où la surface 1 se déplace à la vitesse $u_1 > 0$ et que la surface 2 reste fixe ($u_2 = 0$). Soit R_{q1} et R_{q2} les rugosités RMS respectives des deux surfaces.

- Si $R_{q1} > R_{q2}$, alors l'écoulement de lubrifiant est favorisé par les aspérités de la surface 1 et le facteur de correction ϕ_s est positif.
- Si $R_{q1} < R_{q2}$, alors l'écoulement du lubrifiant est freiné par les aspérités de la surface 1 et le facteur de correction ϕ_s est négatif.
- Si $R_{q1} = R_{q2}$, alors les aspérités n'ont pas d'influence sur le terme de glissement et la correction est nulle ($\phi_s = 0$)

Si γ_1 et γ_2 sont les nombres de Peklenik respectifs des deux surfaces, on a donc une relation du type :

$$\phi_s = \left(\frac{R_{q1}}{R_q}\right)^2 \phi_s^*(h/R_q, \gamma_1) - \left(\frac{R_{q2}}{R_q}\right)^2 \phi_s^*(h/R_q, \gamma_2) \quad (2.42)$$

où on a introduit les facteurs de correction ϕ_s^* qui ne dépendent plus du sens de l'écoulement.

Il est évident que le facteur d'écoulement ϕ_s tend vers zéro lorsque l'épaisseur du film de lubrifiant augmente ($h/R_q \rightarrow \infty$). On tend alors vers le régime en film épais.

Dans le domaine de la lubrification hydrodynamique en film mince, la plupart des auteurs sont d'accord pour utiliser l'équation de Reynolds moyenne proposée par Patir et Cheng. Les différences entre les modèles proviennent des expressions des facteurs d'écoulement ϕ_x et ϕ_s . A ce niveau, deux écoles s'opposent : l'approche numérique par différences finies ou par éléments finis et l'approche analytique par la théorie de la perturbation.

L'approche numérique (Patir et Cheng [33, 34], Lo [25], Tonder [48]) consiste à générer numériquement des surfaces d'une rugosité donnée et à résoudre numériquement l'équation de Reynolds pour déduire les facteurs d'écoulement. Les résultats numériques sont alors approximés par une courbe continue. Cette méthode nécessite de nombreuses hypothèses (sur les conditions aux limites, la fonction d'auto-corrélation, alignement des directions principales de la rugosité selon l'écoulement, la taille de la grille de calcul) qui expliquent la différence entre les résultats obtenus.

L'approche analytique (Elrod [13], Tripp [49]) ne nécessite pas toutes ces hypothèses. Ceci permet, par exemple, de calculer des effets croisés par l'intermédiaire de facteurs ϕ_{xy} (influence d'un gradient de pression dans la direction x sur le débit du lubrifiant selon y).

2.5.3 Modèle de Patir & Cheng

Si $H = h/R_q$, le facteur d'écoulement en pression ϕ_x de Patir et Cheng s'écrit :

$$\begin{aligned}\phi_x &= 1 - C_1 e^{-rH} & \text{pour } \gamma \leq 1 \\ \phi_x &= 1 - C_2 H^{-1.5} & \text{pour } \gamma > 1\end{aligned}\quad (2.43)$$

avec les définitions suivantes pour C_1 , C_2 et r en fonction de l'orientation de la rugosité, c'est-à-dire en fonction du nombre de Peklenik γ :

$$C_1 = 0.89679 - 0.26591 \ln \gamma \quad (2.44)$$

$$C_2 = -0.10667 + 0.10750 \gamma \quad (2.45)$$

$$r = 0.43006 - 0.10828 \gamma + 0.23821 \gamma^2 \quad (2.46)$$

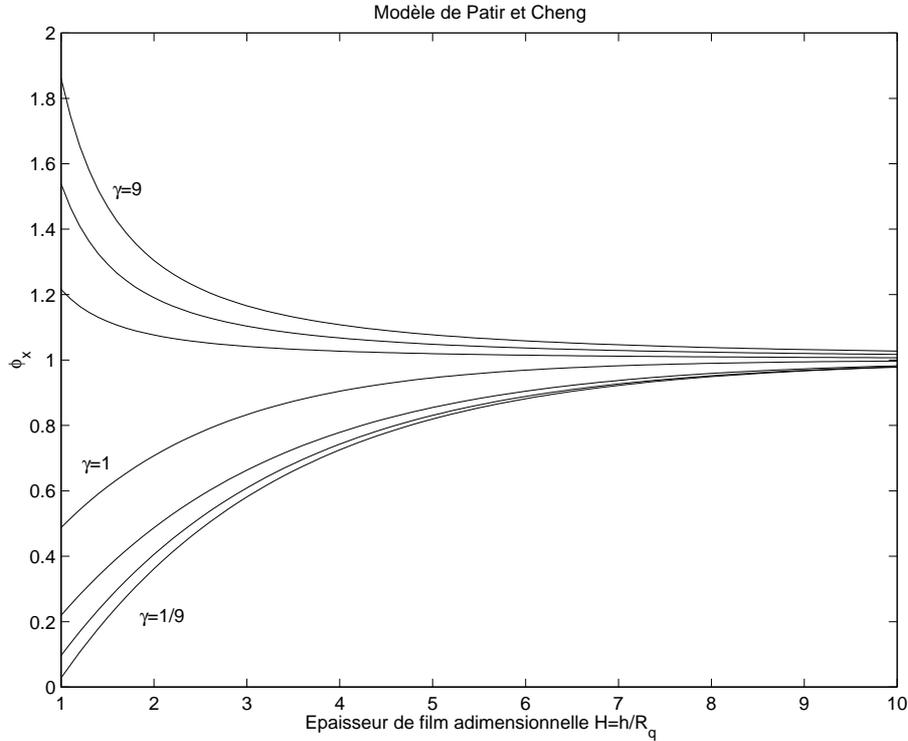


FIG. 2.6: Facteur d'écoulement en pression ϕ_x de Patir et Cheng

Le facteur d'écoulement en cisaillement ϕ_s^* s'écrit :

$$\begin{aligned}\phi_s^* &= A_1 H^{\alpha_1} e^{-\alpha_2 H + \alpha_3 H^2} & \text{pour } H \leq 5 \\ \phi_s^* &= A_2 e^{-0.25H} & \text{pour } H > 5\end{aligned}\quad (2.47)$$

avec les coefficients A_1 , A_2 , α_1 , α_2 et α_3 définis par :

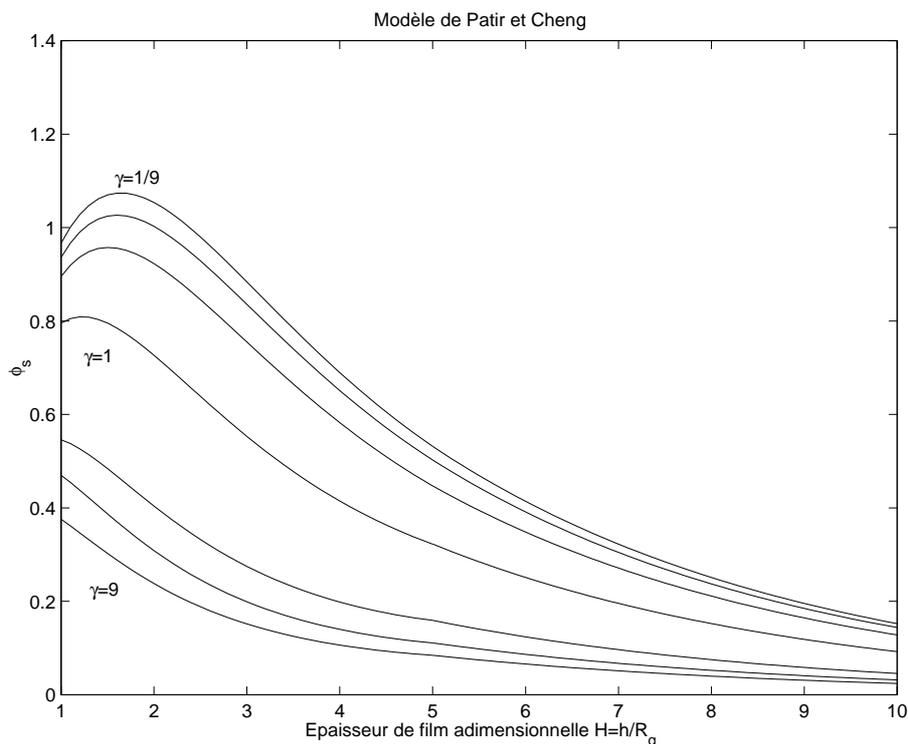


FIG. 2.7: Facteur d'écoulement en cisaillement ϕ_s de Patir et Cheng

γ	1/9	1/6	1/3	1	3	6	9
A_1	2.046	1.962	1.858	1.899	1.560	1.290	1.011
A_2	1.856	1.754	1.561	1.126	0.556	0.388	0.295
α_1	1.12	1.08	1.01	0.98	0.85	0.62	0.54
α_2	0.78	0.77	0.76	0.92	1.13	1.09	1.07
α_3	0.03	0.03	0.03	0.05	0.08	0.08	0.08

Le facteur A_2 peut également être approximé par la formule [28] :

$$A_2 = 1.0766 - 0.37758 \ln \gamma \quad (2.48)$$

Ces formules sont présentées graphiquement par les figures 2.6 et 2.7 pour différentes valeurs du nombre de Peklenik ($\gamma = 1/9, 1/6, 1/3, 1, 3, 6, 9$). L'interprétation physique des ces graphes est la suivante : si on raisonne à épaisseur de film constante, dans le cas d'un gradient de pression négatif, le débit sera d'autant plus grand que la rugosité est longitudinale (équation (2.41)). En effet, dans ce cas, la rugosité transversale a tendance à freiner l'écoulement du lubrifiant. Inversement, l'effet d'un gradient de pression positif, c'est-à-dire un gradient qui tend à empêcher le mouvement du fluide, sera d'autant plus faible que la rugosité est de type transversale.

Pour le facteur ϕ_s , un raisonnement analogue est possible en regardant l'équation du débit moyen (2.41). Si on considère le cas du laminage où la surface 2 est le cylindre, supposé lisse, et la surface 1 est la bande, supposée rugueuse, on a $V = v_1 - v_2 < 0$ dans la zone d'entrée (le cylindre va plus vite que la bande). Par la formule (2.42) on constate que ϕ_s sera négatif et sa valeur absolue est donnée par la figure 2.7. Le débit sera donc d'autant plus grand que le nombre de Peklenik est grand (rugosité longitudinale). En effet, une rugosité transverse sur la surface la plus lente freine l'écoulement. Si, maintenant c'est la surface la plus rapide qui est rugueuse, le terme de correction est positif et le débit sera d'autant plus grand que le nombre de Peklenik est faible. Dans ce cas, la rugosité a tendance à transporter le fluide dans l'emprise et favorise l'écoulement.

2.5.4 Modèle de Tripp

L'approche analytique de Tripp [49] permet de définir des matrices traduisant également les effets croisés. Nous les présentons ici dans les axes principaux. Si $H = h/R_q$, la matrice de correction en pression s'écrit :

$$(\phi_x)_{ij} = \left[1 + \frac{3}{H^2} \left(1 - 3 \frac{1}{1 + \gamma^2} \right) \right] \delta_{ij} \quad (2.49)$$

et la matrice de correction en cisaillement :

$$(\phi_s)_{ij} = \left[\frac{3}{H} \frac{1}{1 + \gamma^2} \right] \delta_{ij} \quad (2.50)$$

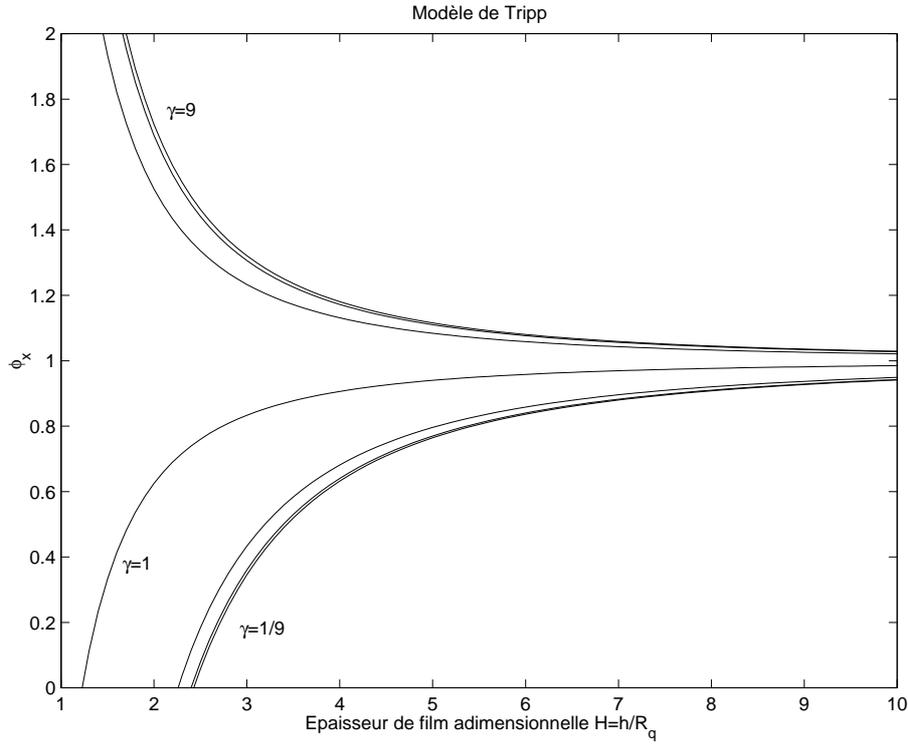
Les figures 2.8 et 2.9 représentent graphiquement ces facteurs d'écoulement pour différentes valeurs du nombre de Peklenik ($\gamma = 1/9, 1/6, 1/3, 1, 3, 6, 9$). On constate que leurs formes générales sont très semblables à ceux de Patir et Cheng (figures 2.6 et 2.7). Cependant, pour des valeurs de γ proche de 0, le facteur ϕ_x proposé par Tripp devient négatif, contrairement à celui proposé par Patir et Cheng.

2.5.5 Calcul du cisaillement moyen

La relation exprimant le cisaillement (2.31) doit être corrigée pour tenir compte de l'influence des aspérités. Pour ce faire, Patir et Cheng [33, 34, 32] définissent un cisaillement moyen et des facteurs de correction ϕ_f , ϕ_{fs} et ϕ_{fp} . L'expression de ce cisaillement est la suivante :

$$\tau = \eta \frac{V}{h} (\phi_f \pm \phi_{fs}) \pm \frac{h}{2} \phi_{fp} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.51)$$

où le signe positif est relatif à la surface 1 ($z = h$) et le signe négatif pour la surface 2 ($z = 0$).

FIG. 2.8: Facteur d'écoulement en pression ϕ_x de Tripp

Si $H = h/R_q$, le facteur de correction en pression s'écrit :

$$\phi_{fp} = 1 - D e^{-sH} \quad (2.52)$$

avec les valeurs de D et s reprises dans le tableau ci-dessous :

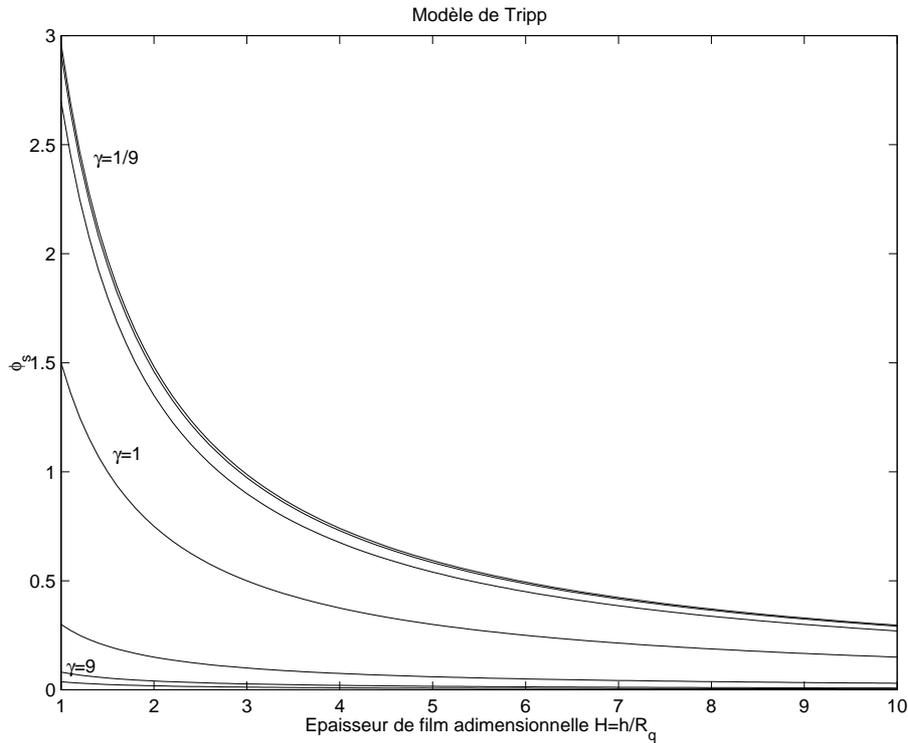
γ	9	1/6	1/3	1	3	6	9
D	1.51	1.51	1.47	1.40	0.98	0.97	0.73
s	0.52	0.54	0.58	0.66	0.79	0.91	0.91

Le facteur de correction ϕ_{fs} est construit comme le facteur d'écoulement en cisaillement ϕ_s qui apparaît dans l'équation de Reynolds : son signe dépend de la rugosité des deux surfaces et du sens de l'écoulement. Si γ_1 et γ_2 sont les nombres de Peklenik respectifs des deux surfaces, on a donc une relation similaire à (2.42) :

$$\phi_{fs} = \left(\frac{R_{q1}}{R_q}\right)^2 \phi_{fs}^*(h/R_q, \gamma_1) - \left(\frac{R_{q2}}{R_q}\right)^2 \phi_{fs}^*(h/R_q, \gamma_2) \quad (2.53)$$

où on a introduit le facteur de correction ϕ_{fs}^* qui ne dépendent plus du sens de l'écoulement. Ce facteur est calculé par les formules :

$$\begin{aligned} \phi_{fs}^* &= A_3 H^{\alpha_4} e^{-\alpha_5 H + \alpha_6 H^2} && \text{pour } H \leq 7 \\ \phi_{fs}^* &= 0 && \text{pour } H > 7 \end{aligned} \quad (2.54)$$

FIG. 2.9: Facteur d'écoulement en cisaillement ϕ_s de Tripp

où apparaissent les coefficients A_3 , α_4 , α_5 et α_6 définis dans le tableau suivant :

γ	1/9	1/6	1/3	1	3	6	9
A_3	14.1	13.4	12.3	11.1	9.8	10.1	8.7
α_4	2.45	2.42	2.32	2.31	2.25	2.25	2.15
α_5	2.30	2.30	2.30	2.38	2.8	2.9	2.97
α_6	0.10	0.10	0.10	0.11	0.18	0.18	0.18

Enfin, le facteur de correction ϕ_f , lié au terme de glissement, est défini par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \phi_f &= \frac{35}{32} z \left\{ (1 - z^2)^3 \ln \frac{z+1}{\tilde{\varepsilon}} + \frac{1}{60} [-55 + z (132 + z (345 + z (-160 + z (-405 + z (60 + 147 z)))))] \right\} & \text{pour } H \leq 3 \\
 \phi_f &= \frac{35}{32} z \left\{ (1 - z^2)^3 \ln \frac{z+1}{z-1} + \frac{z}{15} [66 + z^2 (30 z^2 - 80)] \right\} & \text{pour } H > 3
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

avec $z = H/3$ et $\tilde{\varepsilon} = 1/300$.

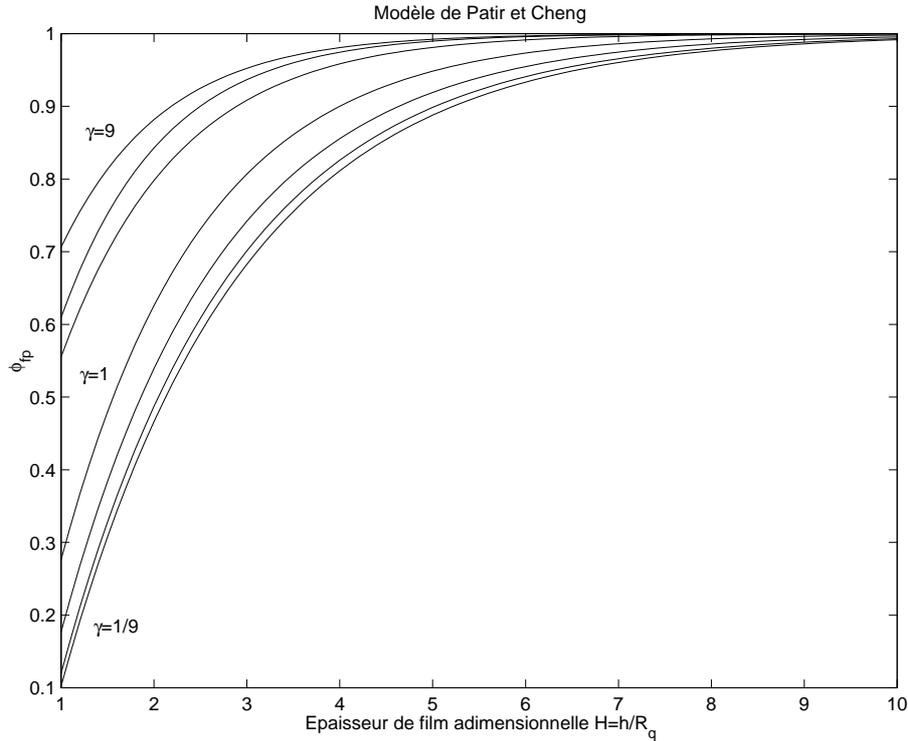


FIG. 2.10: Facteur de correction ϕ_{fp} de Patir et Cheng

2.5.6 Equation de Reynolds moyenne stationnaire

Dans le cas d'un problème stationnaire comme le laminage, on peut intégrer l'équation de Reynolds moyenne (2.40) car la dérivée temporelle est nulle. On obtient :

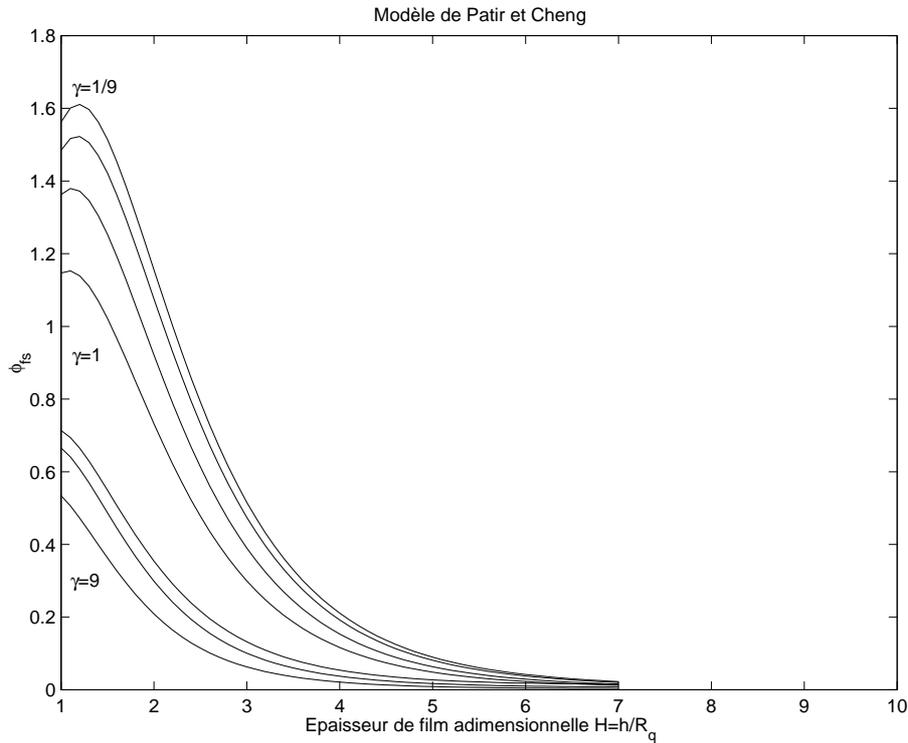
$$\phi_x \frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} = \bar{u} h + \frac{V}{2} R_q \phi_s + c_{debit} \quad (2.56)$$

où la constante d'intégration c_{debit} n'est rien d'autre que le débit du lubrifiant.

2.6 Le régime limite

Le régime limite est le régime le moins bien connu à l'heure actuelle malgré de nombreuses publications sur le sujet (voir par exemple [39, 19, 29, 43, 25] parmi beaucoup d'autres). Il correspond à un écrasement des aspérités presque total et un contact donc très sévère. En pratique, on considère que le régime limite est atteint lorsque les conditions suivantes sont remplies :

$$\begin{cases} h_t \ll 3R_q \\ Ap_a/p \approx 1 \end{cases} \quad (2.57)$$

FIG. 2.11: Facteur de correction ϕ_{fs} de Patir et Cheng

Dans ce régime, le frottement est très important et l'usure des outils est élevée. De plus, les risques d'adhésion et de grippage ne sont pas négligeables.

Les phénomènes rencontrés sont complexes et de nature diverse (labourage, micro-labourage, formation de vagues, indentation, adhésion, transfert de rugosité, écrasement d'aspérités). Ces phénomènes sont gouvernés par la physique et la chimie des matériaux en présence (grains de la tôle, outils, couche d'oxyde, impuretés, film moléculaire de lubrifiant, ...). Des modèles micro-mécaniques essayent de fournir une relation entre la dureté des aspérités, l'aire réelle de contact et l'état de contrainte au coeur du matériau. Nous présentons dans la section suivante quelques-uns de ces modèles en nous limitant à l'écrasement d'une aspérité par un outil lisse.

Bien que ce régime n'est pas courant en pratique (certaines opérations de laminage à chaud et le "skin-pass"), sa modélisation est importante puisque il intervient au sommet de chaque aspérité (sur les plateaux) lorsque le contact est moins sévère.

Bien que la mécanique en jeu est complexe, il est souvent bien reconnu [50, 28] qu'une loi de frottement de Coulomb ou de Tresca avec un coefficient de frottement constant représente assez bien la réalité. La difficulté réside dans la détermination de cette constante. On utilisera donc une loi de Coulomb traditionnelle

$$\tau_a = \mu_a p_a \quad (2.58)$$

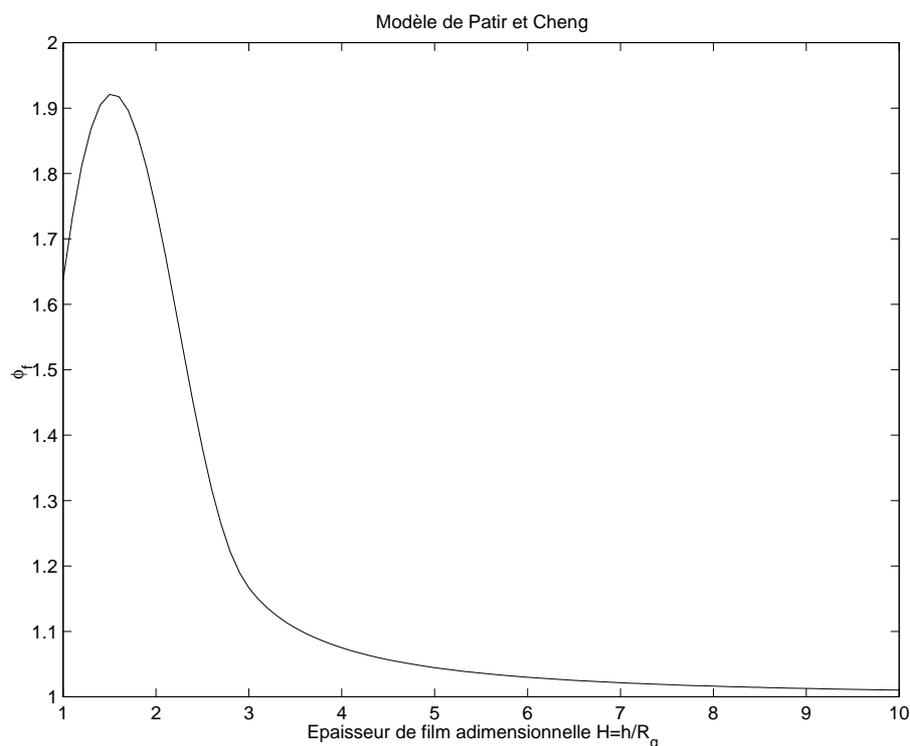


FIG. 2.12: Facteur de correction ϕ_f de Patir et Cheng

ou une loi de Tresca

$$\tau_a = \bar{m}_a k \quad (2.59)$$

où τ_a représente le cisaillement sur les aspérités, μ_a et \bar{m}_a sont respectivement les coefficients de frottement de Coulomb et Tresca, p_a est la pression supportée par les aspérités et k est la contrainte d'écoulement en cisaillement du matériau constituant l'aspérité.

2.7 Le régime mixte

2.7.1 Introduction

Le régime mixte est atteint lorsque les aspérités des deux surfaces entrent en contact et que les conditions suivantes sont remplies :

$$\begin{cases} h_t \leq 3R_q \\ 0.1 < Ap_a/p < 0.9 \end{cases} \quad (2.60)$$

C'est le régime que l'on rencontre dans la plupart des opérations de mise à forme. Dans le cas du laminage, le frottement est suffisant pour entraîner la tôle dans l'emprise et pour

fournir une surface brillante en sortie d'emprise sans augmenter excessivement la force et le couple à fournir. De plus, l'usure des outils est bien plus faible que dans le cas du régime limite.

Dans ce régime, la pression totale d'interface est supportée en partie par le lubrifiant s'écoulant dans les vallées et en partie par les aspérités en contact. On distingue donc la pression totale p , la pression du lubrifiant p_b et la pression sur les plateaux p_a . Celles-ci sont reliées entre-elles par une équation de partage :

$$p = A p_a + (1 - A) p_b \quad (2.61)$$

dans laquelle le facteur de pondération est l'aire réelle de contact. Une équation similaire peut être écrite pour le cisaillement total à l'interface τ . Il se compose du cisaillement dans le lubrifiant τ_b et celui sur les plateaux τ_a :

$$\tau = A \tau_a + (1 - A) \tau_b \quad (2.62)$$

Le cisaillement dans le lubrifiant est calculé par une loi du type hydrodynamique (2.31) où l'épaisseur de film h est remplacée par l'épaisseur locale de film $h_t/(1 - A)$:

$$\tau_b = \eta (1 - A) \frac{V}{h_t} \quad (2.63)$$

On peut également introduire dans cette expression des facteurs de correction du type (2.52), (2.55) et (2.53).

Le cisaillement sur les aspérités est calculé par une loi de Coulomb (2.58) ou de Tresca (2.59).

En général, la pression totale p peut être déduite des équations d'équilibre des deux corps en contact. La pression p_b est obtenue par intégration de l'équation de Reynolds moyenne dans les vallées inter-aspérités. Il reste donc à déterminer soit p_a , soit A et utiliser l'équation de partage (2.61) pour connaître toutes les inconnues. Pour ce faire, il faut une équation supplémentaire décrivant la manière dont les aspérités se déforment au cours du temps et un modèle d'écrasement d'aspérités qui relie l'aire réelle de contact A , la vitesse de déformation du coeur de la matière et la dureté des aspérités.

Enfin, on déduit le cisaillement total τ grâce à l'équation (2.62)

Le régime mixte peut être encore divisé [28] en régime mixte à tendance limite ou "basse vitesse" où l'interface est contrôlée par le modèle d'écrasement d'aspérité et le régime mixte à tendance hydrodynamique ou "haute vitesse" où l'interface est contrôlée par l'équation d'évolution du lubrifiant, c'est-à-dire l'équation de Reynolds. Cette dernière devra être adaptée au régime mixte puisque les facteurs d'écoulements ϕ_x et ϕ_s ne sont pas toujours définis lorsque les aspérités entre en contact.

2.7.2 Modèles d'écrasement d'aspérités

Les interactions entre les aspérités des deux surfaces en contact ne se résument certainement pas à de l'écrasement simple. Le labourage, l'indentation, l'adhésion et les interactions physico-chimiques constituent les principaux phénomènes apparaissant dans ce contexte. Cependant, vu la complexité du problème, les modèles actuels sont basés sur l'écrasement d'une aspérité type contre un plan. Nous allons voir que malgré cette apparente simplicité, les modèles actuels sont souvent fort différents.

Un modèle d'écrasement d'aspérité est une relation entre la dureté adimensionnelle relative des aspérités H , la vitesse de déformation adimensionnelle E et l'aire réelle de contact A . Ces grandeurs sont définies comme suit :

$$H = \frac{p_a - p_b}{k} \quad (2.64)$$

$$E = \frac{\dot{\varepsilon}_{xx}^{pl} \bar{l}}{v_a + v_b} \quad (2.65)$$

où k est la contrainte d'écoulement en cisaillement du matériau constituant l'aspérité, $\dot{\varepsilon}_{xx}^{pl}$ est le taux de déformation plastique du coeur de la matière dans le sens de l'écoulement, \bar{l} est la demi-distance moyenne entre deux aspérités, v_a est la vitesse verticale de la matière sous les aspérités (plateaux) et v_b la vitesse verticale de la matière entre les aspérités (vallées).

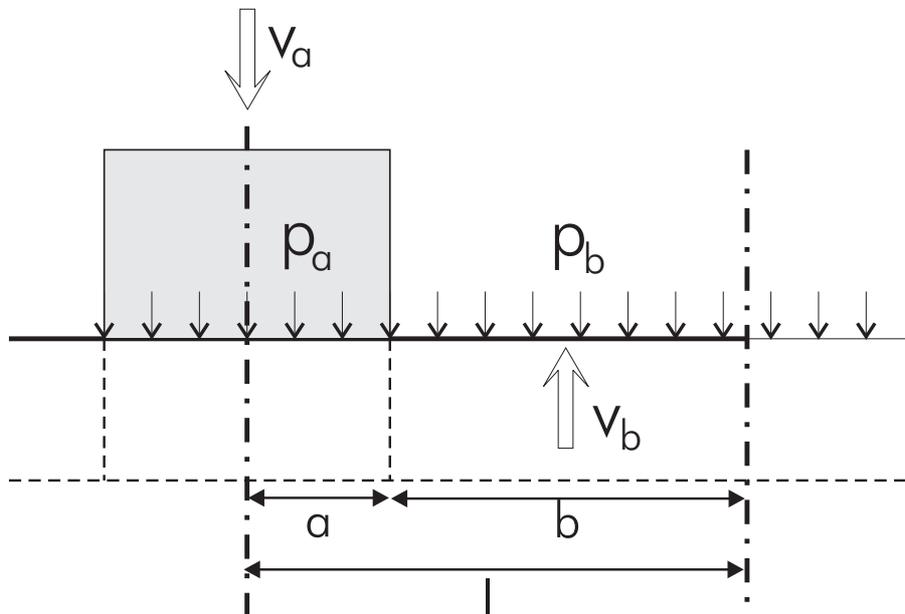


FIG. 2.13: Problème d'indentation équivalent pour l'écrasement d'aspérités longitudinales (d'après Wilson & Sheu [52]).

Il existe plusieurs modèles d'écrasement. Le premier est celui de Wilson et Sheu [54, 43]. Ils utilisent un modèle de borne supérieure pour étudier l'influence de la déformation plastique du substrat sur la dureté des aspérités. Ils supposent que l'écrasement d'aspérités périodiques triangulaires longitudinales est équivalent à une indentation périodique. Finalement la relation semi-empirique suivante est obtenue (figure 2.14) :

$$H = \frac{2}{f_1 E + f_2} \quad (2.66)$$

$$f_1 = 0.515 + 0.345 A - 0.860 A^2 \quad (2.67)$$

$$f_2 = \frac{1}{2.571 - A - A \ln(1 - A)} \quad (2.68)$$

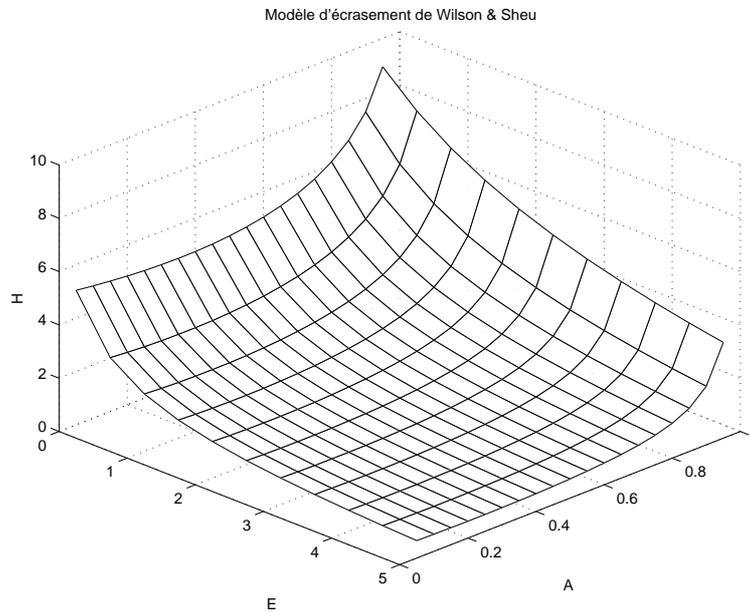


FIG. 2.14: Modèle d'écrasement de Wilson & Sheu

On peut constater la forte diminution de la dureté adimensionnelle des aspérités lorsque le coeur de la matière commence à plastifier ($E \neq 0$). Ceci implique une augmentation de l'aire réelle de contact si la pression supportée par les aspérités reste constante.

Sutcliffe [28] a également utilisé la même technique avec un champ de vitesse différent pour dériver un autre modèle d'écrasement. Il obtient (figure 2.15) :

$$H = \frac{2}{A ((3.81 - 4.38 A) E)^{1/2}} \quad (2.69)$$

Remarquons que ce modèle ne peut pas être appliqué pour n'importe quelle valeur de A puisque E , qui est une valeur positive mesurant la plasticité du coeur, devient négatif lorsque A est supérieur à 0.87!

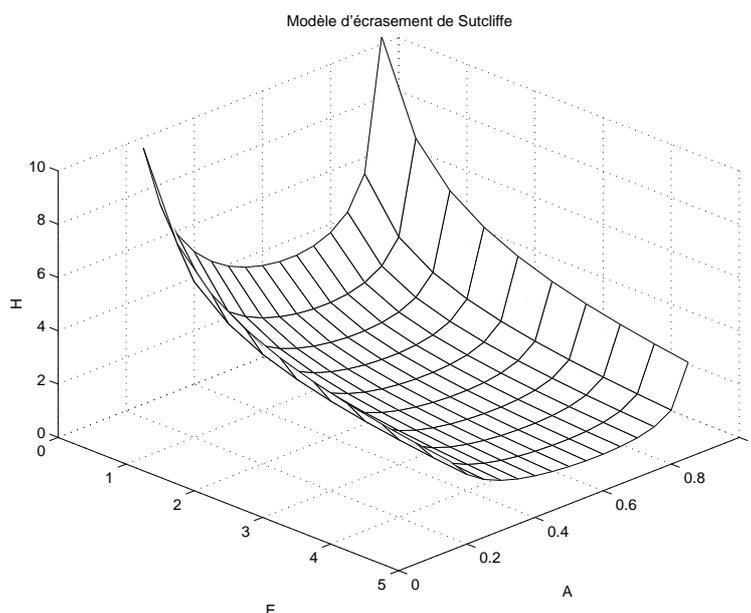


FIG. 2.15: Modèle d'écrasement de Sutcliffe

Sutcliffe [46] a également établi un modèle d'écrasement pour des aspérités en dents de scie régulières transversales, valable uniquement pour des valeurs de E inférieures à 1.

$$E = \exp\left(-\frac{1.65}{4} H (1 - A)\right) \quad (2.70)$$

D'autres modèles ont été obtenus par simulation numérique par la méthode des éléments finis. Les résultats montrent que les plateaux plastifient très vite alors que le coeur reste élastique. Au fur et à mesure que l'écrasement augmente, la zone plastique se propage vers le coeur.

2.7.3 Equations d'écrasement d'aspérités

Lors de l'écrasement des aspérités, on peut définir une zone de déformation locale (la peau de la tôle) et une zone inférieure où la déformation plastique est supposée uniforme (le substrat, le coeur). Suivant que le coeur plastifie ou non, on devra utiliser des équations différentes.

Pour l'écrasement d'une rugosité longitudinale, Wilson et Sheu [43] utilisent l'équation suivante :

$$\frac{dA}{d\varepsilon_{xx}} = \frac{\tan\theta}{E} \quad (2.71)$$

où E est déterminé par le modèle d'écrasement choisi et la déformation à la base des aspérités calculée par $\varepsilon_{xx} = (l - l_0)/l$ où l et l_0 représentent respectivement la demi-distance

courante et initiale entre deux aspérités. Pour l'écrasement d'aspérités transversales, Sutcliffe [46] propose l'équation suivante :

$$\frac{dA}{d\varepsilon_{xx}} = \frac{1}{1 + \varepsilon_{xx}} \left(\frac{\tan \theta}{E} - A \right) \quad (2.72)$$

Dans le cas d'une rugosité quelconque, Marsault [28] détermine une équation d'écrasement générale dépendant de la fonction de distribution des hauteurs.

Soit $f(y, t)$ la fonction de répartition des hauteurs. Au temps t_1 , elle est tronquée par un Dirac de valeur A en $y = y^*(t_1)$. Au temps $t_1 + \Delta t$, le Dirac s'est déplacé de $v_a \Delta t$ et la fonction de répartition de $v_b \Delta t$. Si on mesure les distances par rapport à la ligne moyenne initiale de la surface, on peut écrire :

$$y_{min}(t_1 + \Delta t) = y_{min}(t_1) + v_b \Delta t \quad (2.73)$$

$$y^*(t_1 + \Delta t) = y^*(t_1) - v_a \Delta t \quad (2.74)$$

$$f(y, t_1 + \Delta t) = f(y + v_b \Delta t, t_1) \quad (2.75)$$

En se rappelant que l'aire réelle de contact A peut se calculer comme suit :

$$A(t) = 1 - \int_{y_{min}(t)}^{y^*(t)} f(y, t) dy \quad (2.76)$$

on calcule la variation de A sur le temps Δt :

$$\begin{aligned} \Delta A = A(t_1 + \Delta t) - A(t_1) &= \int_{y_{min}(t_1)}^{y^*(t_1)} f(y, t_1) dy - \int_{y_{min}(t_1 + \Delta t)}^{y^*(t_1 + \Delta t)} f(y, t_1 + \Delta t) dy \\ &= \int_{y_{min}(t_1)}^{y^*(t_1)} f(y, t_1) dy - \int_{y_{min}(t_1) + v_b \Delta t}^{y^*(t_1) - v_a \Delta t} f(y, t_1 + \Delta t) dy \\ &= \int_{y_{min}(t_1)}^{y^*(t_1)} f(y, t_1) dy - \int_{y_{min}(t_1)}^{y^*(t_1) - (v_a + v_b) \Delta t} f(y, t_1) dy \\ &= (v_a + v_b) \Delta t f(h) \end{aligned} \quad (2.77)$$

On obtient finalement l'expression générale de l'équation d'écrasement en introduisant la définition de la vitesse de déformation plastique adimensionnelle E (2.65) dans l'équation (2.77) :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\bar{\varepsilon}_{xx}^{pl}}{E} f(h) \quad (2.78)$$

Dans le cas du laminage, si on note v_x la vitesse de la tôle, on a également :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dx} v_x \quad \text{et} \quad f(h) = -\frac{dA}{dh} \quad (2.79)$$

On obtient donc :

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{\dot{\epsilon}_{xx}^p \bar{l}}{v_x E} \quad (2.80)$$

Une fois que h est calculé, on calcule A par la relation (2.76).

Lorsque le coeur de la matière ne plastifie pas, la vitesse de déformation adimensionnelle est nulle et il n'est pas toujours possible de poser $E = 0$ dans les formules précédentes vu que cette variable apparaît au dénominateur (équation (2.69)).

Pour des rugosités en dents de scie, on peut calculer p_a grâce à l'équation de Hill pour l'écrasement d'un pic :

$$p_a = 2k(1 - \theta) \quad (2.81)$$

où θ est la moitié de l'angle de l'aspérité.

Pour une rugosité quelconque, on pose $E = 0$ dans l'équation de Wilson et Sheu (2.66) pour obtenir une relation directe entre l'aire réelle de contact A et la dureté de l'aspérité H de la forme $H = H(A)$:

$$H = 2(2.571 - A - A \ln A) \quad (2.82)$$

2.7.4 Modification de l'équation de Reynolds

L'équation de Reynolds moyenne telle que définie par l'équation (2.40) est limitée au cas du régime hydrodynamique puisqu'elle fait intervenir la distance entre les lignes moyennes non réactualisées h qui, dans le cas du régime mixte, peut devenir négatif pour $A > 0.5$.

La solution, proposée par Wilson et Chang [51], est de réécrire l'équation de Reynolds moyenne en terme de distance entre lignes moyennes réactualisées h_t qui, par définition, ne peut jamais devenir négative. Cette nouvelle équation s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi_x \frac{h_t^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} h_t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V}{2} R_q \phi_s \right) + \frac{\partial h_t}{\partial t} \quad (2.83)$$

Des nouvelles expressions pour les facteurs d'écoulement en pression (ϕ_x) et en cisaillement (ϕ_s) ont été calculées pour des aspérités en dents de scie par Wilson et Chang [51] et pour des aspérités de forme quelconque par Wilson et Marsault [52].

2.8 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différentes équations utilisées pour calculer l'évolution du lubrifiant et les interactions de celui-ci avec les aspérités de la tôle. Ce sujet est un domaine de recherches particulièrement actif ces dernières années. La plupart des

modèles présentés ici sont très récents et de nouvelles approches seront certainement mises au point dans les prochaines années.

Dans le chapitre 3, nous allons utiliser cette théorie en l'appliquant au laminage à froid en régime de lubrification mixte.

La discrétisation par éléments finis des équations gouvernant le régime hydrodynamique (film épais et film mince) sera expliquée au chapitre 4.

Chapitre 3

Méthode de résolution par différences finies

3.1 Introduction

Après avoir introduit toutes les notions fondamentales de la théorie de la lubrification dans le cadre de la mise à forme des matériaux, nous présentons dans ce chapitre une méthode de résolution mise au point par Marsault [29, 28, 52] dans le cas du laminage à froid de tôles minces.

Ce modèle est certainement le plus élaboré à l'heure actuelle. Il inclut tous les derniers raffinements pour le traitement du régime mixte et il a l'avantage d'être très clairement détaillé. C'est pour ces raisons que nous avons décidé de reprogrammer cet algorithme à partir du manuscrit de la thèse de Marsault. Nous possédons donc maintenant l'équivalent du programme "Lam2DTribo" (programme de Marsault) sans les effets thermiques, ni la prise en compte des déformations du cylindre. En effet, nous pensons que, bien que ces effets peuvent être parfois non négligeables, ils ne nous apporteraient rien en plus au niveau de la connaissance des phénomènes tribologiques relatifs au laminage. Par contre, ils nécessiteraient un grand investissement au niveau du temps de programmation. En effet, rappelons que notre objectif final est d'inclure un modèle de régime mixte dans METAFOR, le programme éléments finis développé au LTAS de l'Université de Liège. Ces deux simplifications pourront être ajoutées facilement par la suite si, un jour, la nécessité se faisait sentir.

3.2 Description du modèle de Marsault

3.2.1 Position du problème

Le problème consiste à simuler un processus de laminage, c'est-à-dire l'opération de mise à forme par laquelle une tôle d'épaisseur t_1 voit son épaisseur se réduire à t_2 par le passage entre deux cylindres de rayon R_0 . Il est intéressant de définir quelques notions relatives à ce procédé, comme la réduction de la passe $r = (t_2 - t_1)/t_1$, la longueur d'emprise $x_{rbl} \approx \sqrt{r R_0 t_1}$, l'angle d'attaque $\tan \alpha = \sqrt{r t_1 / R_0}$.

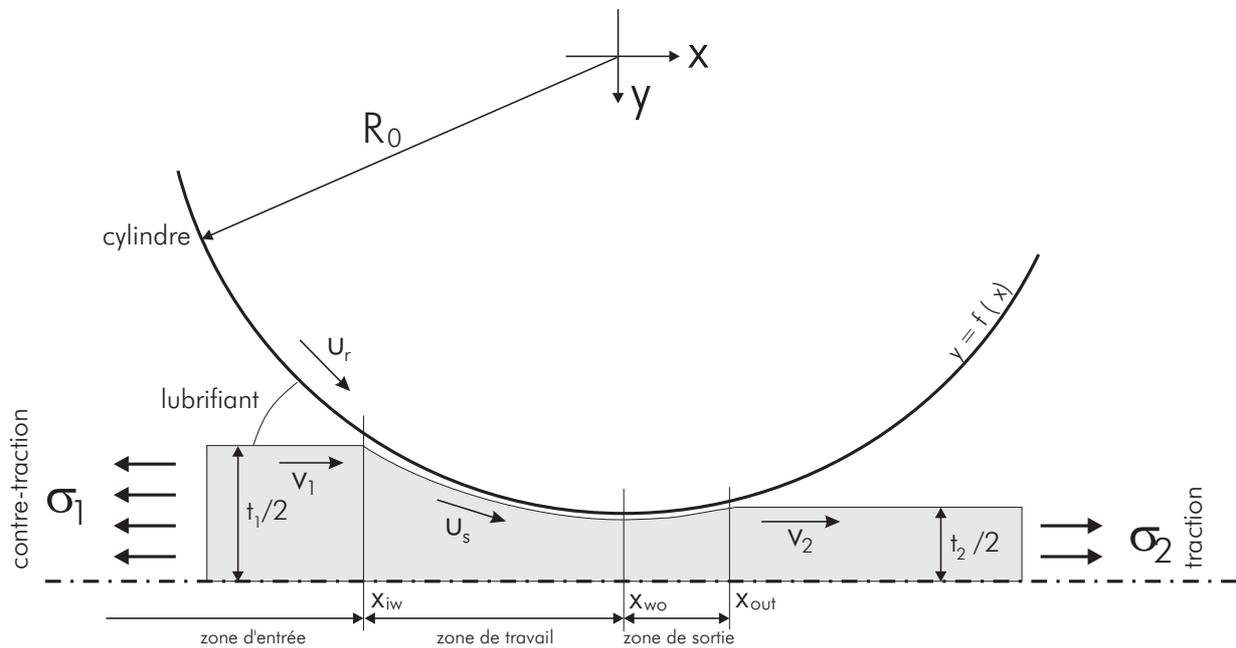


FIG. 3.1: Géométrie d'une opération de laminage.

Pour avoir un laminage stable, la vitesse d'entrée de la bande v_1 est inférieure à la vitesse des cylindres u_r et la vitesse de sortie v_2 est supérieure à la vitesse des cylindres u_r . Le point neutre est le point où la vitesse relative change de signe.

On divise l'espace en trois zones bien distinctes (voir figure 3.1) :

- la zone d'entrée où le lubrifiant est mis en pression.
- la zone de travail où la tôle se déforme plastiquement et où on observe généralement un régime de lubrification mixte.
- la zone de sortie où la pression du lubrifiant retombe à 0.

3.2.2 Méthode des tranches pour la mécanique de la bande

La méthode des tranches suppose que les déformations sont planes (état plan de déformation) et que les axes principaux des contraintes sont ceux du procédé. Il n'y a donc pas de cisaillement interne dans la bande. Cette dernière hypothèse est valable si la tôle est mince.

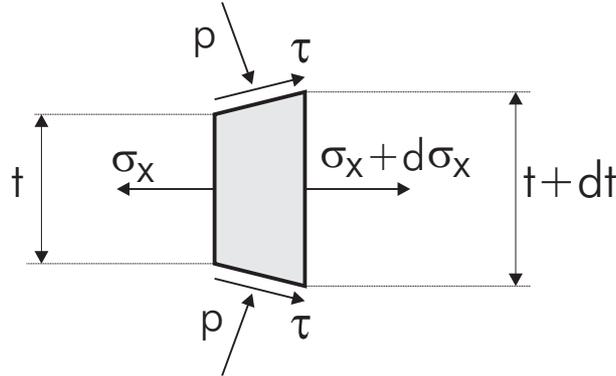


FIG. 3.2: Equilibre d'une tranche.

La méthode des tranches consiste à exprimer l'équilibre d'une tranche verticale de la tôle :

$$\frac{d(\sigma_x t)}{dx} = -p \frac{dt}{dx} - 2\tau \quad (3.1)$$

$$\sigma_y = -p + \frac{1}{2} \tau \frac{dt}{dx} \quad (3.2)$$

$$\sigma_z = \nu_s (\sigma_x + \sigma_y) \quad (3.3)$$

où $t = t(x)$ est l'épaisseur de la tôle, ν_s le coefficient de Poisson de la tôle et p et τ , la pression et le cisaillement à la surface de la tôle.

Lorsque la bande entre en plasticité, de nouvelles équations doivent intervenir dans le modèle. On utilise une loi d'écroutissage de type exponentielle (Krupkowski) :

$$\sigma_0 = Y (1 + K \bar{\varepsilon})^n \quad \text{avec} \quad \bar{\varepsilon} = \int \bar{\varepsilon} \frac{1}{v_x} dx \quad \text{et} \quad \bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_y^2)} \quad (3.4)$$

où ε_x et ε_y sont les déformations selon x et y , Y et K sont des constantes, n est le coefficient d'écroutissage, σ_0 est la limite d'élasticité, $\bar{\varepsilon}$ est la déformation généralisée et v_x la vitesse locale de la tôle. Cette dernière permet de remplacer l'intégrale temporelle par une intégrale sur l'espace.

On utilise également le critère de Von-Mises qui s'écrit dans ce cas :

$$f(\sigma) = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 = 2\sigma_0^2 \quad (3.5)$$

En utilisant la décomposition des incréments élasto-plastiques $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{el} + \dot{\varepsilon}^{pl}$ où $\dot{\varepsilon}^{el}$ suit la loi de Hooke et $\dot{\varepsilon}^{pl}$ est modélisé par :

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \lambda^{pl} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (3.6)$$

on peut écrire les équations de Prandtl-Reuss sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{s}_x \\ \dot{s}_y \\ \dot{s}_z \end{pmatrix} = 2\mu \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}}{\frac{2}{3}\sigma_0^2 \left(1 + \frac{H_s}{3\mu}\right)} \right) \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\varepsilon}_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \dot{p}_{hydro} = -\chi \text{trace}(\dot{\varepsilon}) \quad (3.7)$$

avec

$$H_s = \frac{d\sigma_0}{d\bar{\varepsilon}} \quad (3.8) \quad \lambda = \frac{E_s \nu_s}{(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s)} \quad (3.10)$$

$$\chi = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \quad (3.9) \quad \mu = \frac{E_s}{2(1 + \nu_s)} \quad (3.11)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau, χ est le module de compressibilité, s_i et e_i sont respectivement les déviateurs des contraintes et des déformations selon i et enfin p_{hydro} est la pression hydrostatique définie par $p_{hydro} = -\sigma_{ii}/3$.

Ce modèle permet de prendre en compte les déformations élastiques qui influencent la géométrie de la zone d'entrée et donc la quantité de lubrifiant entrant dans l'emprise.

3.2.3 Traitement des différents régimes

Cette section présente la méthode de résolution utilisée pour calculer les différentes inconnues du problème. Nous ne détaillons pas ici les équations vu leur nombre important. Celles-ci peuvent être trouvées en annexe du manuscrit de Marsault [28]. Nous nous contentons de résumer les grands principes de la méthode.

Pour résoudre le problème de laminage complet, l'espace est divisé en plusieurs zones en fonction des équations qui entrent en jeu dans le modèle. Cette division est représentée sur la figure 3.3.

On distingue tout d'abord 3 zones en fonction de l'état de plasticité de la tôle :

La première zone est appelée *zone d'entrée* ou zone d'admission. C'est dans cette zone que le lubrifiant est entraîné dans l'emprise et mis en pression. Par définition, cette zone se termine à l'endroit où la tôle quitte le régime élastique et entre en plasticité (en $x = x_{iw}$ sur la figure 3.1). Cette zone est à nouveau divisée en *zone d'entrée hydrodynamique*, pour laquelle l'épaisseur de film de lubrifiant est suffisante pour qu'il n'y ait pas de contact entre aspérités ($h_t > 3R_q$ dans le cas d'une distribution de Christensen) et *zone d'entrée mixte* où il y a contact. Dans la première, l'équation de Reynolds moyenne stationnaire (2.56) est

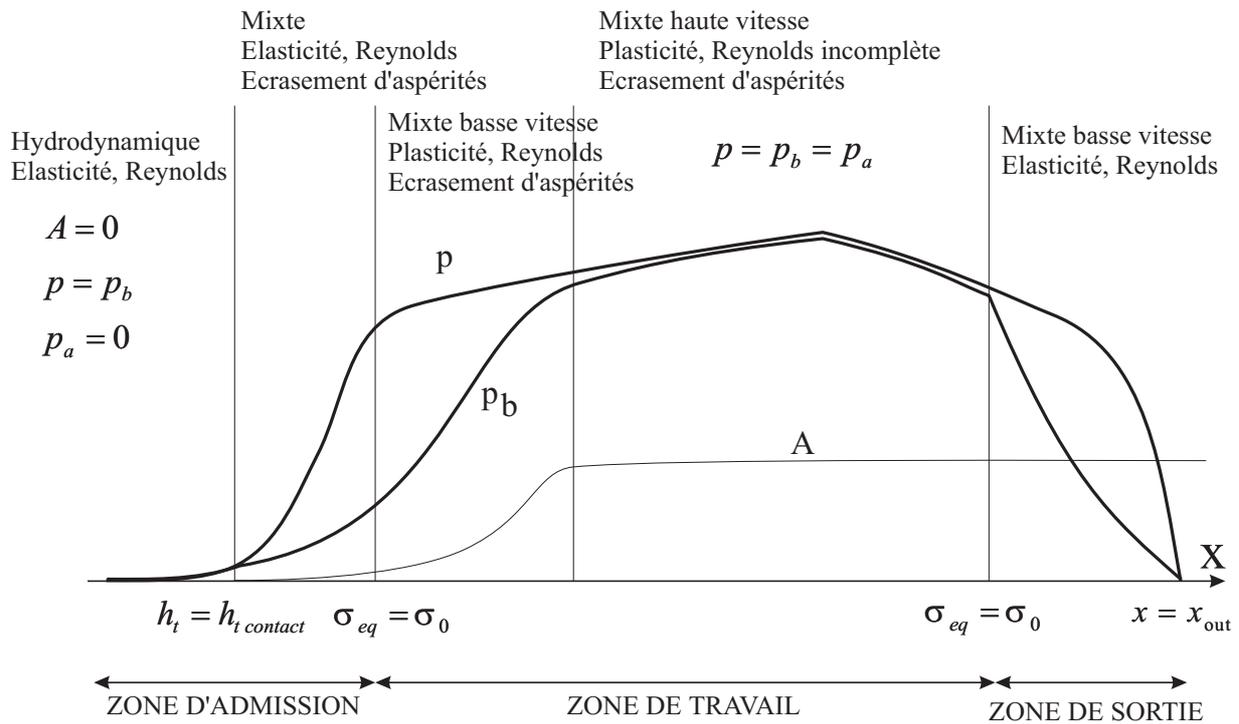


FIG. 3.3: Division de l'emprise en 5 zones de calcul.

utilisée pour calculer la pression de lubrifiant p_b qui est égale à la pression totale p puisqu'il n'y a pas de contact entre les aspérités. Cette équation est couplée avec la mécanique de la tôle modélisée par la méthode des tranches (équations (3.1),(3.2),(3.3)) Dans la seconde, on ajoute à ces équations les équations de partage de la pression (2.61) et du cisaillement (2.62), et un modèle d'écrasement d'aspérité valable lorsque le substrat reste élastique (par exemple (2.66)). Dans cette zone, la pression du lubrifiant p_b n'est plus égale à la pression totale p puisqu'une partie de cette dernière est supportée par les aspérités et l'aire réelle de contact augmente au fur et à mesure que l'épaisseur de film diminue.

La deuxième zone est appelée *zone de travail*. C'est dans cette zone que la tôle se déforme plastiquement. Elle se termine donc lorsque la tôle retourne dans le domaine élastique (en $x = x_{wo}$ sur la figure 3.1). Cette abscisse correspond à l'extrémum de la fonction décrivant la géométrie du cylindre. Si le cylindre est rigide, on a $x_{wo} = 0$. On n'a donc pas besoin de mettre au point une technique de prédicteur élastique et correcteur plastique généralement utilisée pour repérer si le matériau est élastique ou plastique. En effet, si la géométrie du cylindre est connue, la fin de la zone de travail et donc l'étendue de la zone plastique est connue. Dans la zone de travail, les équations à résoudre sont les mêmes que dans la zone d'entrée mixte auxquelles on ajoute les équations décrivant la plasticité de la bande (équations (3.7)).

Cependant, il n'est pas possible de résoudre ces équations dans tous les cas possibles.

En effet, si on procède dans la zone de travail mixte de la même manière que dans la zone d'entrée mixte (c'est-à-dire calculer la pression de lubrifiant par l'équation de Reynolds et la pression sur les aspérités par le modèle d'écrasement), on rencontre des difficultés numériques très importantes liées à l'équation de Reynolds. En effet, lorsque la bande entre en plasticité, la dureté des aspérités H diminue et la pression supportée par les aspérités chute. Pour compenser cette diminution, la pression du lubrifiant augmente. Si cette augmentation est telle qu'à un moment $p_b = p_a = p$, on peut montrer que le terme de Poiseuille, duquel on extrait la pression, devient négligeable et le profil de p_b devient extrêmement sensible au débit de lubrifiant. Cette situation peut avoir deux causes bien distinctes :

- soit une vitesse de laminage élevée,
- soit une orientation de rugosité isotrope à transverse avec un laminage à faible vitesse et l'approche du seuil de percolation. Ce seuil correspond au moment où le lubrifiant est piégé dans les vallées et que sa pression est uniquement hydrostatique.

Marsault décide donc de changer la forme des équations à résoudre lorsque la pression du lubrifiant est égale à la pression sur les aspérités. Le terme de Poiseuille est négligé et l'équation de Reynolds permet le calcul de l'épaisseur de film de lubrifiant. Dans cette partie, un modèle d'écrasement d'aspérité n'est plus nécessaire puisqu'on fait implicitement l'hypothèse de l'égalité des pressions.

On peut constater que lorsque la vitesse de laminage diminue, cette transition se fait de plus en plus tard. En particulier, il existe une vitesse à partir de laquelle il n'y a pas de transition et la zone de travail est entièrement résolue comme la zone d'entrée mixte (mis à part la plasticité de la bande).

C'est pour cette raison que la première partie de la zone de travail mixte où le modèle d'écrasement régit l'épaisseur de lubrifiant, est appelée *zone de travail mixte basse vitesse* et que la deuxième partie, où c'est l'équation de Reynolds qui joue ce rôle, est appelée *zone de travail mixte haute vitesse ou hydrodynamique*.

Tout le problème est de détecter cette transition entre les deux régimes. Marsault a étudié plusieurs types de conditions de passage (conditions sur les gradients de pression, sur les valeurs du terme de Poiseuille,...) d'un régime à l'autre et il s'avère que la condition $p = p_b$, la plus simple de toutes, est la plus efficace en pratique.

La dernière zone est *la zone de sortie* où la pression retombe à zéro. Cette zone se termine (en $x = x_{out}$) lorsque 3 conditions sont simultanément réalisées :

$$p_b = 0, \quad \sigma_x = \sigma_2 \quad \sigma_y = 0 \quad (3.12)$$

Pour satisfaire ces trois relations en même temps, on utilise une double méthode de tir sur les deux variables en entrée inconnues a priori : la vitesse d'entrée de la tôle v_1 et le débit du lubrifiant c_{debit} apparaissant dans l'équation de Reynolds stationnaire (2.56). Les détails de cette méthode de tir sont expliqués dans la section suivante.

Dans la zone de sortie, les variables h , h_t et A sont supposées constantes. Suivant que l'on sort d'une zone de travail haute ou basse vitesse, on entre dans une zone de sortie haute ($p_a = p_b = p$) ou basse ($p_b \neq p$) vitesse. Dans ces deux cas, on résout les équations exprimant l'élasticité de la bande. Dans le cas basse vitesse où p_b est différent de p , on a besoin de l'équation de Reynolds pour calculer la pression du lubrifiant. Dans le cas haute vitesse, vu l'égalité des pressions, l'équation $p_b = 0$ est automatiquement vérifiée en fin de calcul si $p = 0$.

3.2.4 Algorithme général

Le problème formulé mathématiquement est composé de cinq systèmes d'équations différentielles ordinaires qu'il faut résoudre successivement en vérifiant à tout moment les conditions de transition d'un régime à l'autre.

L'intégration spatiale de chaque système est réalisée par la méthode explicite de Runge Kutta du quatrième ordre. Si le système à résoudre est de la forme $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$, la méthode consiste à calculer successivement :

$$\mathbf{k}_1 = h \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \quad (3.13)$$

$$\mathbf{k}_2 = h \mathbf{f}(x_n + h/2, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_1/2) \quad (3.14)$$

$$\mathbf{k}_3 = h \mathbf{f}(x_n + h/2, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_2/2) \quad (3.15)$$

$$\mathbf{k}_4 = h \mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_3) \quad (3.16)$$

et la mise jour du vecteur inconnu s'effectue grâce à la formule :

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{\mathbf{k}_1}{6} + \frac{\mathbf{k}_2}{3} + \frac{\mathbf{k}_3}{3} + \frac{\mathbf{k}_4}{6} \quad (3.17)$$

L'erreur est contrôlée à tout moment et le pas de temps est adapté en conséquence. On obtient ainsi un maillage (très) fin dans les zones de forts gradients (principalement pour la transition entre la zone d'entrée et la zone de travail) et un maillage plus grossier ailleurs. Avec cette technique, il n'est pas rare d'obtenir plusieurs dizaines de milliers de pas d'intégration sur la longueur de l'emprise!

L'algorithme de Marsault est présenté à la figure 3.4. Il consiste à utiliser une double méthode de tir sur la vitesse d'entrée et le débit du lubrifiant pour obtenir, en sortie, une pression totale nulle, une pression nulle pour le lubrifiant et une contrainte de traction longitudinale égale à la traction imposée (conditions (3.12)). Tout d'abord un tir par dichotomie sur la valeur du débit de lubrifiant c_{debit} est effectué jusqu'à ce que la condition $p_b = 0$ soit atteinte. Ensuite, un tir par dichotomie sur la vitesse d'entrée de la bande v_1 permet d'obtenir $\sigma_x = \sigma_2$.

Le deuxième tir ne pose en général pas de problèmes. Par contre, le tir sur le débit du lubrifiant mérite d'être explicité en détail dans le cas où il existe une transition basse

vitesse / haute vitesse. En effet, on pourrait penser que, dans ce cas, les conditions de sortie peuvent être satisfaites pour n'importe quel valeur du débit de lubrifiant c_{debit} puisque la condition $p_b = 0$ est automatiquement satisfaite. En réalité, une seule valeur du débit est correcte. Pour la trouver, on utilise uniquement les équations mixtes basse vitesse (c'est-à-dire les équations les plus générales possibles) lors du tir sur le débit, en interdisant la transition. Si une transition existe physiquement, il va arriver un moment où la valeur

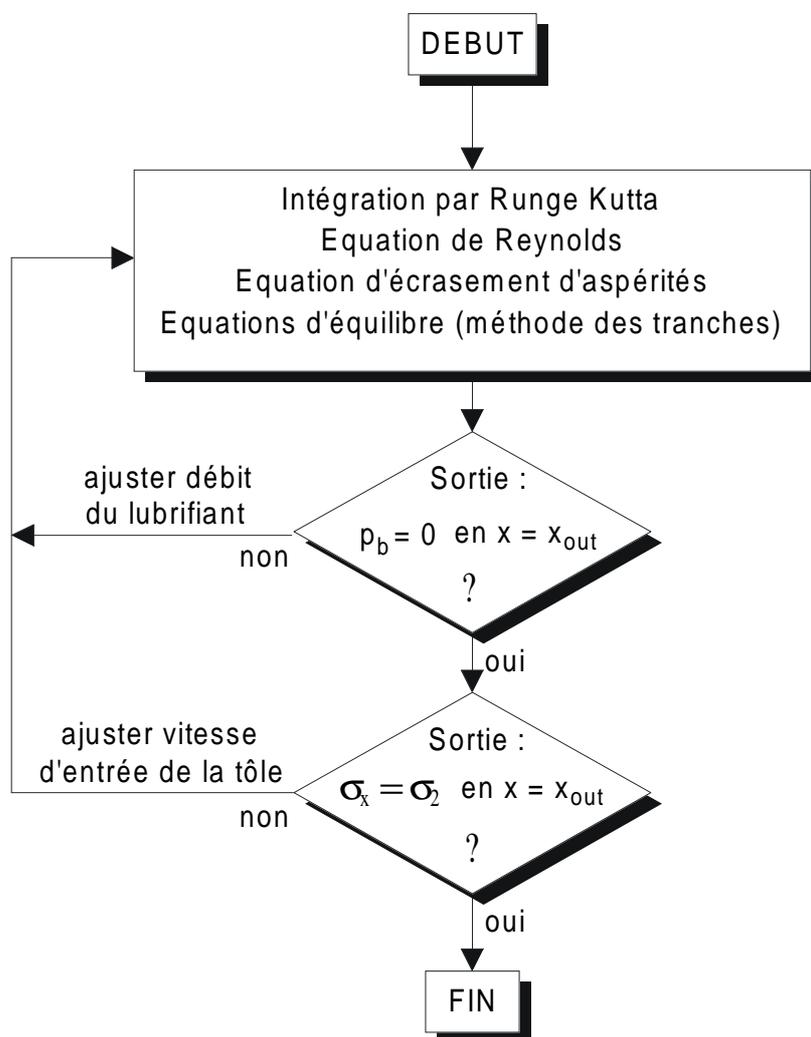


FIG. 3.4: Algorithme proposé par Marsault.

L'algorithme présenté par Marsault dans sa thèse permet également de prendre en compte la déformation du cylindre. Ceci nécessite une boucle extérieure supplémentaire

ajustant progressivement la géométrie du cylindre. Le calcul débute avec un cylindre parfaitement circulaire et la déformation du cylindre est calculée par éléments finis en appliquant les pressions et cisaillements venant d'être calculés lors de la double méthode de tir. Si la déformée du cylindre ainsi obtenue est trop différente de celle utilisée pour la résolution du problème de lubrification, on recommence avec la nouvelle géométrie et ainsi de suite.

Rappelons que, dans notre implémentation, nous n'avons pas pris en compte la déformation du cylindre.

3.3 Applications numériques

3.3.1 Introduction

Pour tester notre implémentation de l'algorithme de Marsault, nous avons effectué de nombreux tests. Nous présentons, dans ce rapport, deux problèmes tirés directement du manuscrit de Marsault. Le premier est un cas académique qui permet de retrouver les différents phénomènes classiques propres au laminage. Il nous permettra également de constater que le rôle de la loi d'écrasement est très important et que le modèle d'écrasement choisi influence très significativement les résultats.

Le second est un cas industriel qui a été comparé avec des mesures expérimentales par Marsault. Nous nous contentons ici de montrer que nos résultats sont équivalents à ceux obtenus par Marsault.

Les autres cas de la thèse de Marsault n'ont pas été simulés parce qu'ils supposaient un cylindre déformable ou la prise en compte des effets thermiques dans les équations. Nous nous sommes donc tourné vers les seuls cas utilisant un cylindre rigide et où les effets thermiques étaient négligés.

Il pourrait paraître assez logique que l'on retrouve les résultats de Marsault puisque le modèle est le même et les équations sont très bien expliquées dans le manuscrit. En fait, obtenir les résultats présentés ici a nécessité beaucoup de travail et de nombreuses discussions (par e-mail) avec Marsault et le Professeur Montmitonnet. Il reste malgré tout quelques petites différences. Celles-ci peuvent s'expliquer de plusieurs manières :

- Les équations présentées par Marsault sont des équations théoriques. En pratique, on utilise des petits artifices pour que ça fonctionne bien. Ainsi, par exemple, la loi de Coulomb possède une discontinuité. Elle est traitée par un coefficient de régularisation chez Marsault et, pour notre implémentation, ça fonctionne très bien sans cette méthode numérique. Un autre exemple : le modèle d'écrasement d'aspérités de Sutcliffe pose des problèmes si la déformation plastique est nulle et lorsque l'aire réelle de contact tend vers 0.87. Dans ces deux cas, on obtient une division par zéro. Pour passer outre ce problème et utiliser ce modèle dans toutes les circonstances, Marsault

Viscosité du lubrifiant à p_0	η_0	=	0.01	Pa.s
Coefficient de pression de la viscosité	γ_l	=	10^{-8}	Pa^{-1}
Rugosité composite RMS	R_q	=	0.5	μm
Demi distance entre aspérités	\bar{l}	=	30	μm
Nombre de Peklenik	γ	=	9	
Coefficient de Tresca pour les plateaux	\bar{m}_a	=	0.25	
Epaisseur d'entrée	t_1	=	1.0	mm
Epaisseur de sortie	t_2	=	0.7	mm
Module d'Young	E_s	=	70	GPa
Coefficient de Poisson	ν_s	=	0.3	
Contrainte d'écoulement	σ_0	=	200	MPa
Rayon du cylindre	R_0	=	200	mm

TAB. 3.1: Propriétés matérielles et géométriques.

utilise l'artifice suivant : la déformation plastique est toujours considérée comme non nulle (mais très petite) même si elle l'est.

- Nous avons repéré dans le manuscrit quelques fautes de frappe : coefficient de frottement contradictoires, longueur d'emprise calculée avec les paramètres trop grande par rapport à celle obtenue sur les graphiques, loi de Tresca annoncée et loi de Coulomb utilisée. Nous ne sommes donc pas totalement sûr des paramètres utilisés par Marsault.
- Bien qu'il semble que le modèle d'écrasement des aspérités joue un rôle fondamental, Marsault n'effectue aucune comparaison entre les modèles et, plus embêtant, il ne dit même pas toujours quel modèle il utilise pour obtenir ses résultats.

3.3.2 Cas académique : laminage d'aluminium

La première simulation est un laminage d'aluminium. Les paramètres ont été choisis par Marsault pour pouvoir montrer certains phénomènes physiques. Ces paramètres sont repris dans le tableau 3.1. Lorsque ce n'est pas signalé explicitement, nous utilisons le modèle d'écrasement de Wilson & Sheu (équation 2.66).

La première figure montre l'évolution de l'aire réelle de contact et de l'épaisseur de film de lubrifiant en sortie d'emprise en fonction de la vitesse de laminage. Ces résultats sont en parfait accord avec ceux de Marsault. Nous n'avons cependant pas réussi à résoudre le problème pour des vitesses plus élevées que 10^4 mm/s à cause de problèmes de convergence. Néanmoins, on remarque que l'épaisseur de lubrifiant en sortie d'emprise augmente avec la vitesse de laminage (figure 3.5). C'est un phénomène physique observable expérimentalement. Si la vitesse augmente, l'épaisseur de film de lubrifiant entraînée dans l'emprise augmente par effet hydrodynamique. On remarque également que l'aire réelle de contact en

sortie diminue avec la vitesse pour la même raison (les surfaces se séparent de plus en plus avec la vitesse qui augmente). En conséquence, on observe un frottement qui diminue avec la vitesse puisque celui-ci provient d'une part de l'interaction des aspérités (composante importante qui diminue quand l'aire de contact diminue) et du cisaillement du lubrifiant (composante faible qui augmente avec la vitesse).

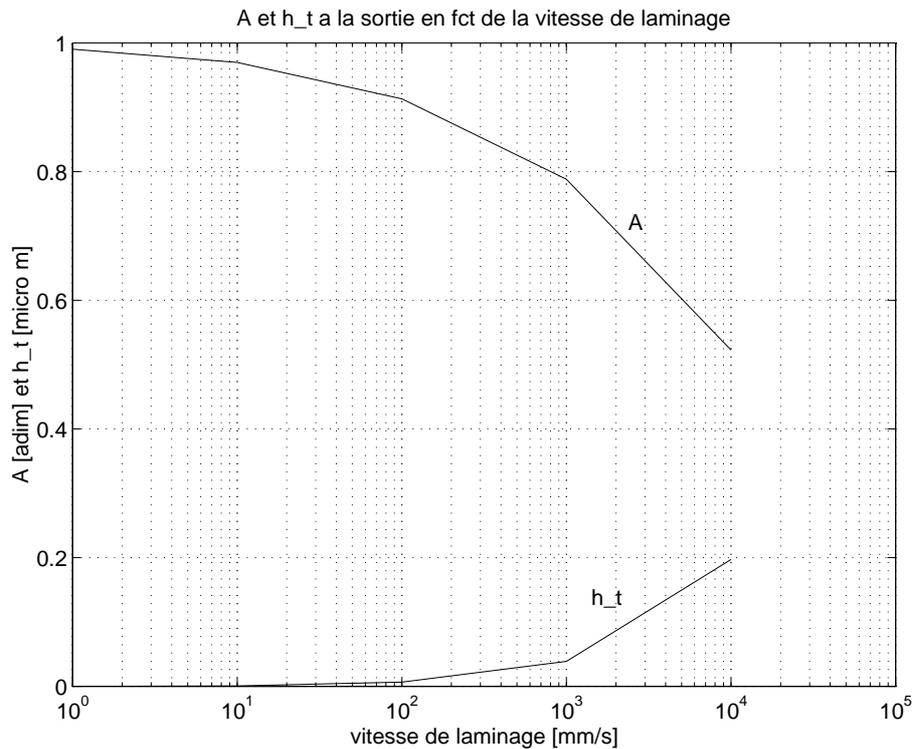


FIG. 3.5: Evolution de l'aire réelle de contact A et de l'épaisseur de film h_t en sortie d'emprise en fonction de la vitesse de laminage.

La figure 3.6 montre la distribution de pression du lubrifiant p_b dans l'emprise pour différentes valeurs de la vitesse de laminage. On constate tout d'abord que la pression a une forme de colline qui résulte des hypothèses de la méthode des tranches. Nous verrons plus tard (chapitre 5) que les profils de pression calculés par éléments finis ne correspondent pas à ce genre de profil. En effet, on observe, dans le cas EF, plusieurs maxima sur la longueur de la zone de contact. On remarque également que la pression maximale obtenue pour différentes vitesses est de plus en plus faible. Ceci résulte de la diminution du frottement avec l'augmentation de la vitesse de laminage. Enfin, on observe que la transition entre le régime mixte basse vitesse et le régime mixte haute vitesse est d'autant plus éloignée de l'entrée de l'emprise que la vitesse est élevée.

Les figures 3.7 et 3.8 comparent les profils de pressions (p , p_a et p_b) obtenus dans le cas d'une vitesse de laminage de 100 mm/s pour les modèles d'écrasement de Wilson (équation 2.66) et Sutcliffe (équation 2.69).

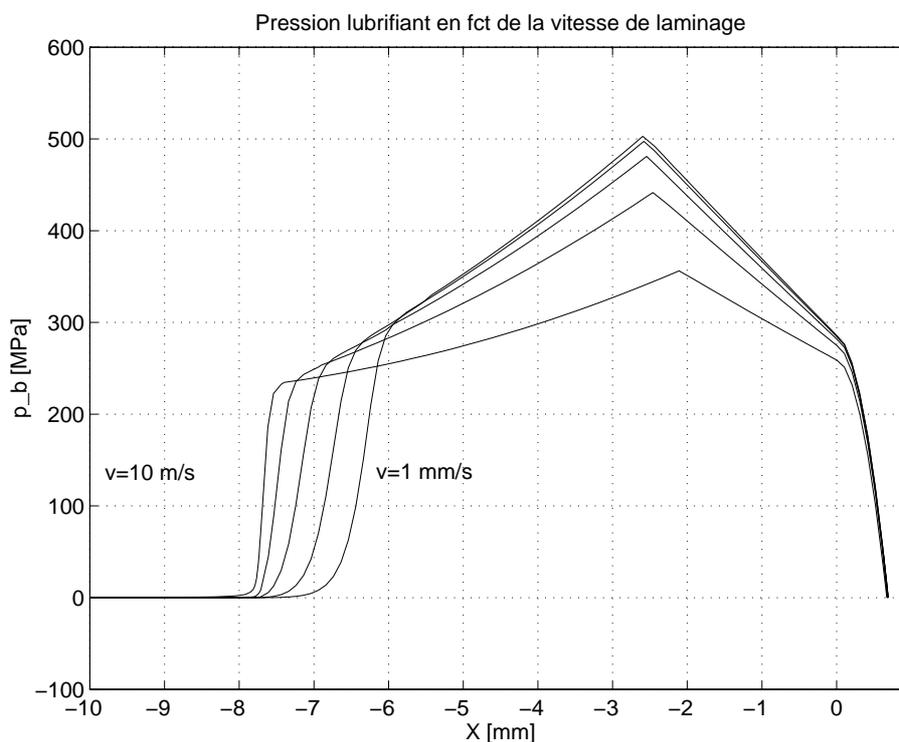


FIG. 3.6: Profils de pression de lubrifiant p_b pour différentes vitesses de laminage v .

On remarque que la pression du lubrifiant obtenue est assez différente. Par contre, cette différence n'entraîne qu'une légère variation sur le cisaillement et la pression totale obtenue.

Ces deux derniers graphes montrent donc l'importance du choix du modèle d'écrasement d'aspérité. On pourrait montrer également que le choix de la loi de frottement sur les plateaux joue aussi un rôle considérable sur la solution.

3.3.3 Cas industriel : laminage d'acier inoxydable

La deuxième simulation présentée est un cas industriel traité par Marsault. Dans son manuscrit, il montre que les résultats obtenus sont en bon accord avec l'expérience. Nous allons montrer que nos résultats sont similaires à ceux de Marsault.

Les paramètres utilisés pour cette simulation sont regroupés dans le tableau 3.2. Il s'agit d'un laminage d'une tôle mince d'inox. Contrairement au cas précédent, le matériau possède une loi d'érouissage non linéaire et on utilise une loi de Coulomb pour le frottement sur les plateaux. Ici aussi, on utilise le modèle d'écrasement de Wilson & Sheu.

Les figures 3.9 et 3.10 comparent les solutions obtenues par notre implémentation du modèle et celles obtenues par Marsault. L'aire de contact et l'épaisseur du lubrifiant y sont

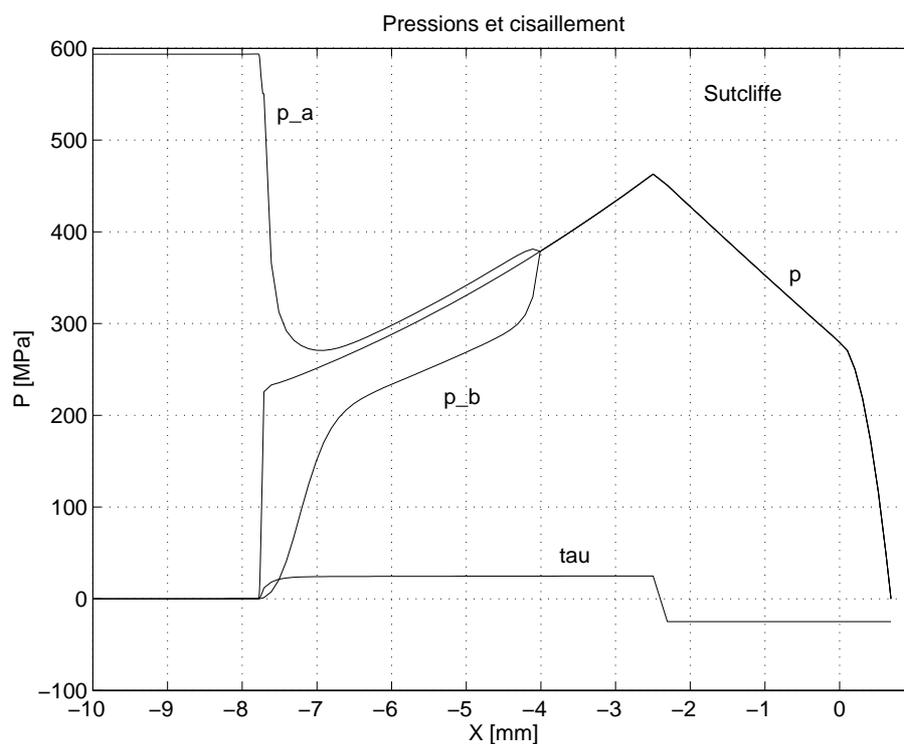


FIG. 3.7: Résultats obtenus avec le modèle d'écrasement de Sutcliffe.

Viscosité du lubrifiant à p_0	$\eta_0 = 3.21 \cdot 10^{-2}$ Pa.s
Coefficient de pression de la viscosité	$\gamma_l = 7.3 \cdot 10^{-9}$ Pa $^{-1}$
Rugosité composite RMS	$R_q = 2.72$ μm
Demi distance entre aspérités	$\bar{l} = 32.8$ μm
Nombre de Peklenik	$\gamma = 9$
Coefficient de Coulomb pour les plateaux	$\bar{m}_a = 0.15$
Epaisseur d'entrée	$t_1 = 3.3$ mm
Epaisseur de sortie	$t_2 = 2.22$ mm
Contre-traction	$\sigma_1 = 22$ MPa
Traction	$\sigma_2 = 172$ MPa
Module d'Young	$E_s = 190$ GPa
Coefficient de Poisson	$\nu_s = 0.28$
Contrainte d'écoulement	$\sigma_0 = 500$ MPa
Coefficient de déformation	$K = 24$
Coefficient d'écroutissage	$n = 0.36$
Rayon du cylindre	$R_0 = 75$ mm
Vitesse de laminage	$u_r = 0.833$ m.s $^{-1}$

TAB. 3.2: Propriétés matérielles et géométriques.

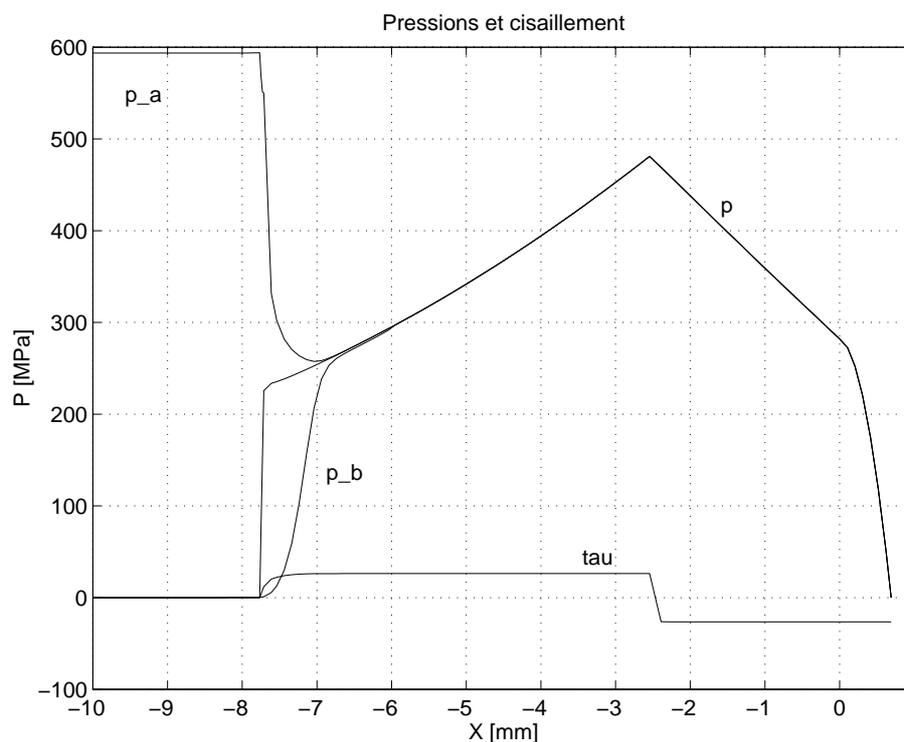


FIG. 3.8: Résultats obtenus avec le modèle d'écrasement de Wilson.

représentées le long de l'emprise. On constate une très grande similitude des résultats aussi bien sur la forme des deux courbes que sur les valeurs numériques obtenues. L'épaisseur de film de lubrifiant diminue le long de l'emprise et l'aire réelle de contact augmente. On observe des fortes variations dans la zone d'entrée mixte et au début de la zone de travail mixte basse vitesse. Par contre, une fois la zone de travail mixte haute vitesse atteinte, les valeurs de A et h_t ne varient plus que faiblement.

Les figures 3.11 et 3.12 comparent les pressions obtenues. On observe ici aussi une forte similitude dans les résultats. Notons que la discontinuité du cisaillement sur le point neutre n'est pas tout à fait verticale uniquement à cause de la fréquence d'archivage que nous utilisons pour visualiser les résultats (un archivage tous les 100 pas spatiaux dans la zone mixte haute vitesse).

Finalement, les figures 3.13 et 3.14 comparent les contraintes obtenues dans les trois directions de l'espace. On remarque que la contrainte selon la direction de laminage vaut bien les valeurs imposées comme traction et contre-traction respectivement à l'entrée et à la sortie de l'emprise. Encore une fois, nos courbes sont très similaires à celles obtenues par Marsault.

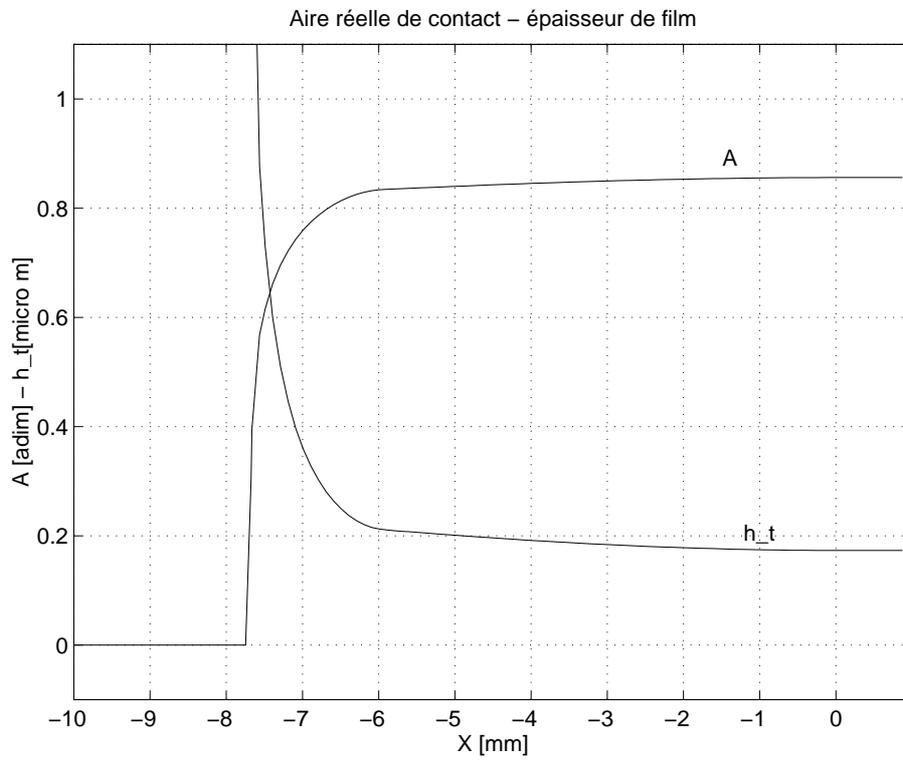


FIG. 3.9: Evolution de l'aire réelle de contact le long de l'emprise.

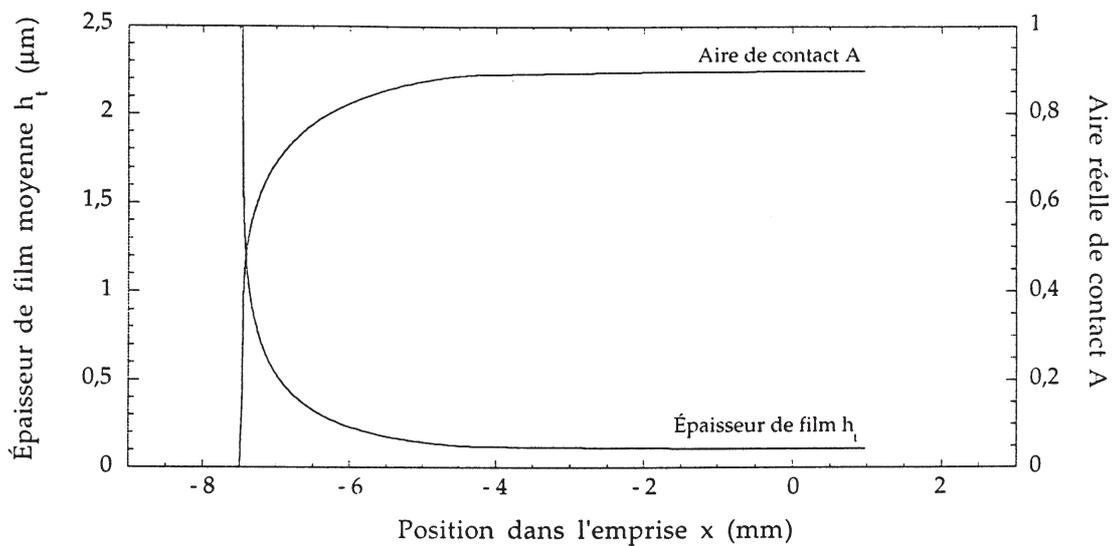


FIG. 3.10: Evolution de l'aire réelle de contact le long de l'emprise (par Marsault).

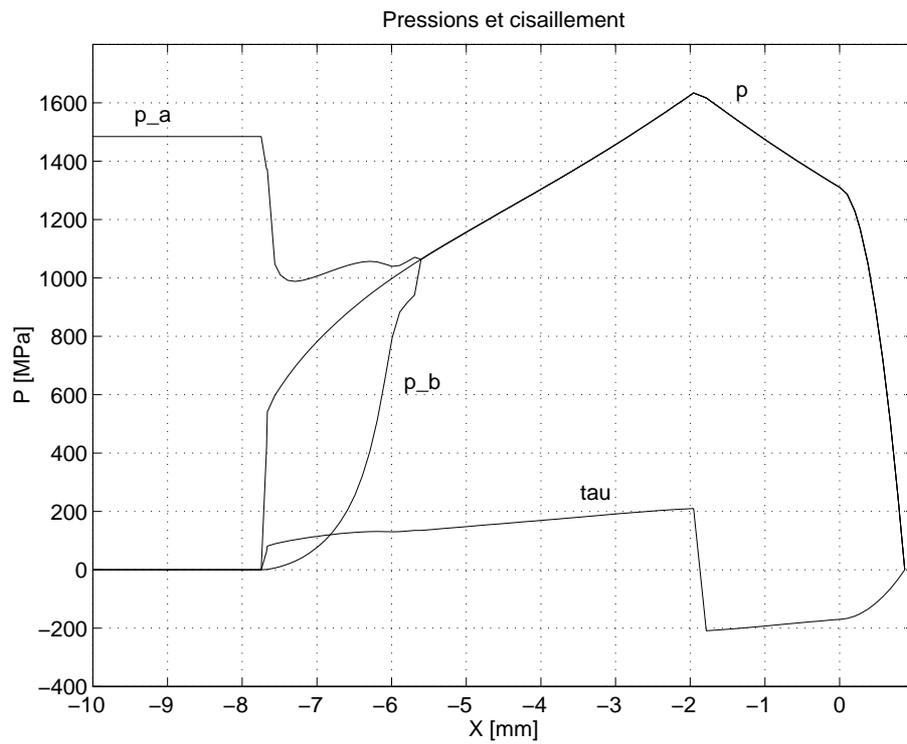


FIG. 3.11: Pression totale p , pression du lubrifiant p_b et pression sur les aspérités p_a .

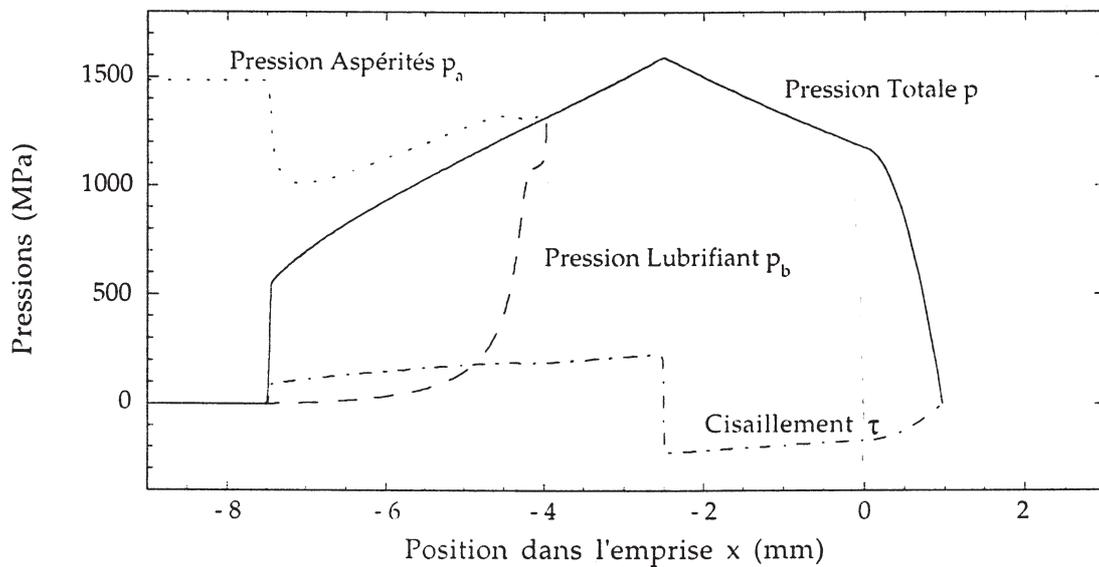


FIG. 3.12: Pression totale p , pression du lubrifiant p_b et pression sur les aspérités p_a (par Marsault).

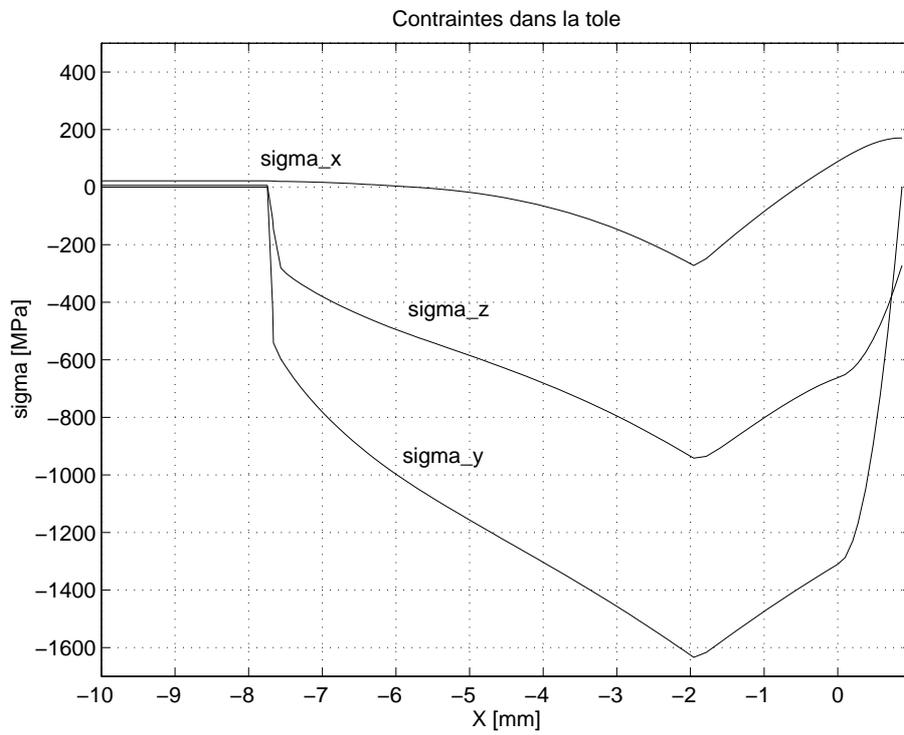


FIG. 3.13: Evolution des contraintes le long de l'emprise.

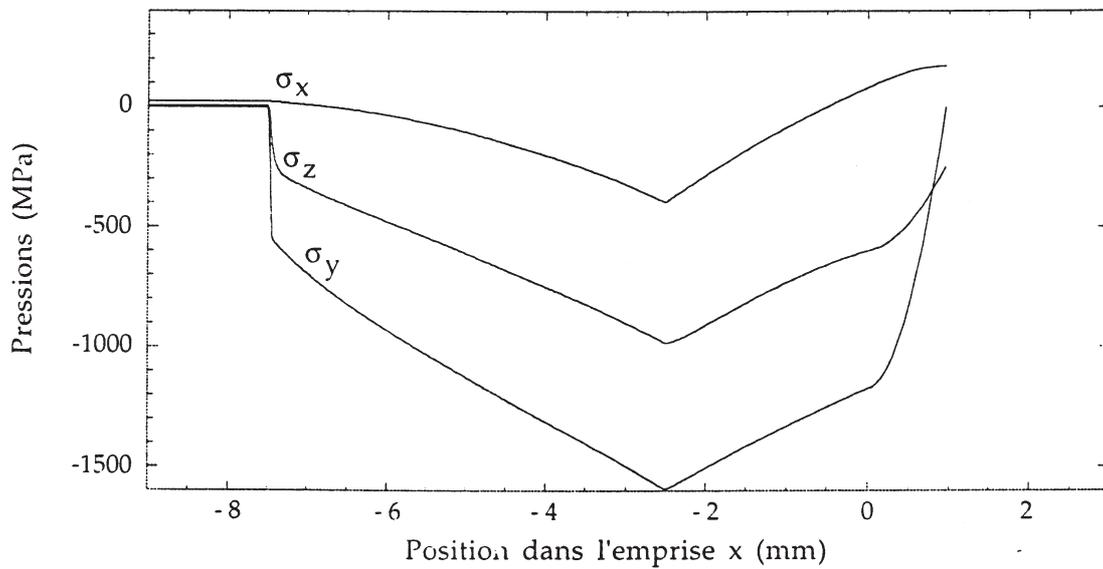


FIG. 3.14: Evolution des contraintes le long de l'emprise (par Marsault).

3.4 Conclusions

Bien que cette partie du travail n'est pas originale, il nous semble qu'elle présente de nombreux points positifs sur notre travail de recherche. En effet :

- La réécriture de cet algorithme nous a permis de nous familiariser avec les grandeurs en jeu et les notions élémentaires relatives au traitement du régime mixte.
- Lorsqu'on aborde la littérature sur le sujet, il n'est parfois pas facile de faire un lien entre les différents articles. C'est surtout le cas pour les modèles d'écrasement d'aspérités et les équations d'évolution de l'aire réelle de contact. Le travail de Marsault résume les équations et montre clairement où chaque équation intervient.
- Nous avons vu que les modèles d'écrasement d'aspérités ne sont pas encore au point et que les résultats obtenus avec deux modèles différents donnent parfois des résultats très différents.
- En essayant l'algorithme sur plusieurs problèmes, nous avons vu surgir les problèmes numériques liés à l'équation de Reynolds et nous avons pu avoir des informations qui n'était pas explicitement indiquées dans le travail de Marsault. Par exemple, il ne fait jamais allusion au nombre de pas spatiaux d'intégration utilisés ni au temps de calcul total (ou, d'une manière équivalente, au nombre d'opérations nécessaire). Cette information paraît quand même importante puisque, après discussion avec le Professeur Montmitonnet, c'est notamment ce facteur qui empêche l'utilisation de l'algorithme dans un programme éléments finis.
- Nous avons également été surpris par les petits artifices utilisés dans le modèle et qui ne sont pas du tout expliqués. Par exemple, pour utiliser le modèle de Sutcliffe lorsque la déformation plastique du substrat E est nulle, on utilise une valeur légèrement positive $E = 0.05$. D'autres points ne sont pas très clairs : l'influence du modèle d'écrasement dans le modèle global est très grande. Il est donc étonnant que, dans les cas étudiés, le type de modèle utilisé n'est pas indiqué.

En conclusion, nous pensons que le manuscrit de Marsault est certainement le plus complet sur le sujet à l'heure actuelle et nous ne pouvions pas l'ignorer dans le cadre de ce travail.

Chapitre 4

Méthode de résolution par éléments finis

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que dans le cas d'un problème stationnaire comme le laminage, il est possible d'obtenir des résultats satisfaisants en utilisant la méthode des différences finies sur les équations couplant la mécanique du matériau, du lubrifiant, de la rugosité et des outils. Cependant, nous allons voir que ce type de modèle n'est pas facilement généralisable dans le cadre d'un code de calcul tel que METAFOR. En effet, le caractère incrémental de la méthode de résolution utilisée par METAFOR nous oblige à considérer un écoulement non stationnaire pour le lubrifiant et ceci, même pour la simulation de processus stationnaires comme le laminage. De toutes façons, nous aimerions traiter également des cas d'emboutissage pour lesquels les phénomènes transitoires sont prépondérants.

A l'heure actuelle, très peu de modèles éléments finis existent pour résoudre le contact lubrifié entre deux solides. Nous proposons dans ce chapitre d'étendre le modèle présenté par Liu et Hu [22, 24, 15, 23] dans le cas du laminage en régime hydrodynamique.

4.2 Avantages et difficultés de la méthode EF

La méthode élément finis peut être utilisée pour obtenir un formalisme plus général pour résoudre les problèmes de lubrification. Par exemple, dans le cadre du laminage, elle permet de se débarrasser de l'hypothèse principale de la méthode des tranches (c'est-à-dire l'hypothèse d'une tôle mince). On peut ainsi obtenir des profils de pressions qui n'ont plus la forme caractéristique de cette méthode (colline de frottement avec un seul maximum). Il

serait possible également de prendre en compte la déformation du cylindre de laminage de manière totalement couplée avec le reste des déformations. On éviterait ainsi un processus itératif sur la géométrie du cylindre qui peut être très lent.

Cependant, lorsqu'on essaye de passer de la méthode des différences finies à la méthode des éléments finis, de nombreux problèmes surgissent très vite :

- Si des problèmes transitoires doivent être considérés, nous devons considérer une surface de contact inconnue a priori et dont l'étendue est fonction du temps. De plus, puisque pour METAFOR un problème stationnaire est traité comme un problème transitoire, ce problème va apparaître pour toutes les simulations envisagées.
- La discrétisation de la géométrie et, plus particulièrement, des frontières du matériau mène un autre problème important. En effet, puisque les frontières sont physiquement des courbes continues et qu'elles sont représentées dans le code de calcul par des lignes brisées, les surfaces en contact vont croître ou décroître de manière discontinue. Ces discontinuités seront d'autant plus importantes que le maillage est grossier près des frontières des zones de contact. Nous avons vu, lors de l'étude du modèle de Marsault, qu'une bonne connaissance de la géométrie est primordiale pour obtenir de bons résultats puisqu'elle influence directement la quantité de lubrifiant qui est entraînée dans la zone de contact.
- Une des plus grosses difficultés est la détermination des conditions initiales et limites. Ce problème apparaît principalement dans le cas de problèmes transitoires. En effet, dans le cas stationnaire, on peut généralement prévoir sans trop de difficultés où se situent les zones d'entrées et les zones de sortie (le fluide entre d'un côté et sort de l'autre). On applique donc les conditions aux limites en raisonnant sur la physique du problème qui dans ce cas est assez simple. Pour un problème transitoire, il n'est souvent pas facile de localiser les zones d'entrées et les zones de sortie parce que le fluide peut entrer (ou sortir) dans la zone de contact par les deux côtés à la fois.
- Une fois que l'on sait où appliquer les conditions aux limites, il faut pouvoir les calculer. Pour ce faire, il faudrait résoudre l'équation de Reynolds dans la zone d'entrée jusqu'au premier noeud en contact. Or, la géométrie de la zone d'entrée est approximative (on ne connaît donc pas l'épaisseur de film) et on ne connaît pas la pression du lubrifiant puisqu'il n'y a pas de force extérieure appliquée sur des noeuds qui ne sont pas en contact. D'autres techniques doivent être mises en place pour arriver tout de même à déterminer une bonne approximation de l'épaisseur de film en entrée (voir section 4.5.2).
- Les codes éléments finis tels que METAFOR sont basés sur les positions des noeuds et les forces en ces noeuds. Par contre, les équations de lubrification sont exprimées en terme de vitesses et de pression. Il n'est parfois pas évident de passer d'un concept à l'autre. C'est le cas pour le calcul des pressions équivalentes à partir des forces normales de contact dans le cas de contact entre deux corps déformables. De plus, les grandeurs comme les contraintes et les déformations sont stockées aux points de Gauss de chaque élément. Autrement dit, nous n'avons jamais accès à ces grandeurs

à la surface du corps en contact.

- Pour obtenir une formulation générale, il serait souhaitable que les paramètres définissant la géométrie du processus étudié (comme le rayon du cylindre, l'épaisseur de la tôle ou la longueur d'emprise dans le cas du laminage — le rayon du poinçon, dans le cas de l'emboutissage sphérique, ...) n'apparaissent pas dans les équations. Ces grandeurs devraient être remplacées par des valeurs locales (rayon de courbure local du film de lubrifiant par exemple). Cependant, ces valeurs locales peuvent être imprécises ou très difficiles à évaluer dans certains cas. Un problème similaire apparaît pour d'autres variables qui n'ont rien à voir avec la géométrie. c'est le cas notamment pour la vitesse de déformation au coeur de la tôle selon la direction de laminage qui intervient dans les modèles d'écrasement d'aspérités.
- Les équations régissant le mouvement du lubrifiant doivent être résolues sur les noeuds du maillage. Ces noeuds suivent le mouvement de la matière dans le cas de la formulation lagrangienne classique. Cependant, dans le cadre du formalisme Arbitraire Lagrangien Eulérien, les noeuds se déplacent avec une vitesse indépendante de celle de la matière. En général, ces noeuds se déplacent donc à une vitesse différente de celle du lubrifiant, introduisant des effets convectifs supplémentaires.
- La méthode de Marsault est très coûteuse en temps de calcul. En effet, il est courant d'utiliser plus de 10000 pas spatiaux pour l'intégration de Runge Kutta. Celle-ci doit être en moyenne répétée 40 fois pour obtenir le débit du lubrifiant et le tout doit être en moyenne répété 10 fois pour obtenir la vitesse d'entrée de la bande. Il faut donc compter 4 à 5 minutes de calcul sur une station alpha 600 MHz (pour un cylindre rigide et sans effets thermiques). Si cette méthode pouvait être appliquée telle quelle (sans tenir compte des autres difficultés) dans le cas de problèmes transitoires avec un outil déformable, ce temps de calcul devrait être multiplié par le nombre d'itérations nécessaire pour la convergence de la géométrie de l'outil et par le nombre d'itérations de chaque pas de temps. On arrive donc à des temps de calcul qui dépassent les 24 heures pour des petits problèmes bidimensionnels. Ce n'est donc pas envisageable à l'heure actuelle.
- Le degré de couplage entre les équations est aussi important : soit on décide de résoudre le problème de lubrification et l'équilibre du matériau séparément (schéma étagé), soit on procède de manière totalement couplée. Dans les deux cas, les critères de convergence ne sont pas évident à trouver. De plus, Marsault montre que, pour son modèle, une résolution étagée entraîne de nombreuses difficultés de convergence et des oscillations dans la solution obtenue.

On comprend donc très vite pourquoi les modèles actuels se focalisent sur un seul procédé décrit globalement par quelques paramètres et utilisent rarement la méthode éléments finis.

4.3 Discrétisation spatiale de l'équation de Reynolds

4.3.1 Introduction

Pour résoudre le problème de lubrification en film mince, nous nous basons sur la formulation présentée par Liu et Hu [22, 24, 15, 23]. Dans cette section, nous l'étendons au cas transitoire pour lequel les noeuds du maillages se déplacent indépendamment du fluide et de la matière (formulation ALE).

Cette méthode consiste à définir des éléments finis unidimensionnels sur la surface de contact entre le matériau à déformer et l'outil. Les noeuds de ces éléments de lubrification sont les noeuds surfaciques du matériau en contact avec l'outil. Le nombre d'éléments est fonction du temps. Dans la suite, nous considérons un instant t fixé. L'évolution de la surface de contact au cours du temps sera envisagée lorsque nous parlerons des conditions

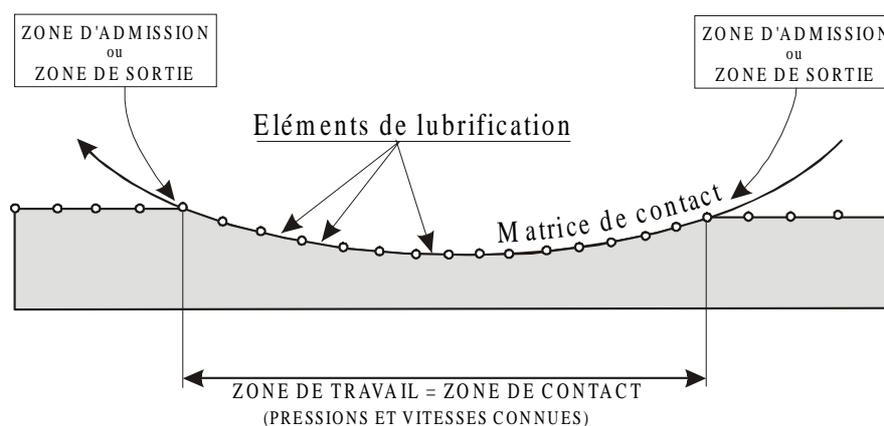


FIG. 4.1: Discrétisation par éléments finis du problème de lubrification.

Le but du calcul élément fini est la détermination des contraintes de cisaillement pour chaque noeud en contact. Pour ce faire, nous allons utiliser l'équation de Reynolds moyenne en supposant que les pressions et la géométrie du processus sont connus (ils sont fournis par la méthode de résolution de l'équilibre mécanique du matériau en contact). Cette équation nous fournira les épaisseurs de film en chaque noeud et on en déduira le cisaillement exercé par le fluide sur le matériau.

4.3.2 Prise en compte d'un maillage mobile

Pour rappel, l'équation de Reynolds moyenne s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi_x \frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} h) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V}{2} R_q \phi_s \right) + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4.1)$$

où la dérivée temporelle de l'épaisseur de film de lubrifiant h est une dérivée eulérienne. Autrement dit, elle exprime la variation de la grandeur h en un point fixe de l'espace. Pour notre formulation, nous avons besoin d'exprimer la dérivée de h en un noeud qui se déplace à une certaine vitesse (vitesse de la matière dans le cas d'un maillage lagrangien ou vitesse de grille pour un maillage eulérien lagrangien). Nous noterons cette vitesse u_M . On est donc amené à exprimer cette dérivée eulérienne en fonction d'une dérivée par rapport au maillage. Si x représente les coordonnées d'un noeud dans un repère eulérien et χ les coordonnées d'un noeud dans un repère lié au maillage, on a la relation suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial t}|_x = \frac{\partial h}{\partial t}|_{\chi} + \frac{\partial x}{\partial \chi} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial t}|_{\chi} + u_M \frac{\partial h}{\partial x} \quad (4.2)$$

En introduisant la relation (4.2) dans l'équation (4.1), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi_x \frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} h) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V}{2} R_q \phi_s \right) + \frac{\partial h}{\partial t}|_x - u_M \frac{\partial h}{\partial x} \quad (4.3)$$

Cette formulation de l'équation de Reynolds a le désavantage de contenir deux termes de convection. Le premier est la convection du fluide à la vitesse \bar{u} et le deuxième est la vitesse du maillage à la vitesse u_M . Il est facile de modifier l'équation (4.3) en remarquant que :

$$- u_M \frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} (u_M h) + h \frac{\partial u_M}{\partial x} \quad (4.4)$$

On obtient une nouvelle forme de l'équation de Reynolds moyenne :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi_x \frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}_r h) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V}{2} R_q \phi_s \right) + \frac{\partial h}{\partial t}|_x + h \frac{\partial u_M}{\partial x} \quad (4.5)$$

où $\bar{u}_r = \bar{u} - u_M$ est la vitesse moyenne relative en tenant compte de la vitesse du maillage. Cette formulation ne possède plus qu'un seul terme de convection dont la vitesse est la vitesse relative entre le fluide et le maillage.

4.3.3 Forme faible de l'équation de Reynolds

Une forme faible de l'équation de Reynolds moyenne (4.5) peut être obtenue en utilisant la méthode des résidus pondérés. Cette méthode consiste à multiplier l'équation par une

fonction test vérifiant les conditions essentielles et à intégrer le résultat sur la longueur du domaine étudié. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_0^L \delta h \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi_x \frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx &= \int_0^L \delta h \frac{\partial h}{\partial t} dx + \int_0^L \delta h \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}_r h) dx \\ &+ \int_0^L \delta h \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V}{2} R_q \phi_s \right) dx + \int_0^L \delta h \frac{\partial u_M}{\partial x} h dx \end{aligned} \quad (4.6)$$

où L est la longueur de la zone de contact et δh est la fonction test. Pour éviter les termes dérivés deux fois, on effectue une intégration par parties. Ceci conduit à :

$$\begin{aligned} - \int_0^L \frac{\partial \delta h}{\partial x} \phi_x \frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} dx &= \int_0^L \delta h \frac{\partial h}{\partial t} dx + \int_0^L \delta h \frac{\partial u_M}{\partial x} h dx \\ &- \int_0^L \frac{\partial \delta h}{\partial x} (\bar{u}_r h) dx - \int_0^L \frac{\partial \delta h}{\partial x} \left(\frac{V}{2} R_q \phi_s \right) dx \\ &+ \left[\underbrace{\delta h \left(\bar{u}_r h + \frac{V}{2} R_q \phi_s - \phi_x \frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right)}_q \right]_0^L \end{aligned} \quad (4.7)$$

où q dénote le débit de lubrifiant calculé par rapport au maillage qui se déplace. Ce terme doit être évalué sur la frontière de la zone de contact dans le cas d'une zone de sortie. Sinon, dans le cas d'une zone d'entrée, l'épaisseur de film doit être prescrite et $\delta h = 0$.

Pour la discrétisation spatiale, on utilise des fonctions de forme linéaires et une technique SUPG est nécessaire pour éviter les oscillations dues aux termes convectifs.

$$h = \sum_{i=1}^n N_i h_i \quad \delta h = \sum_{i=1}^n N_i \delta h_i \quad (4.8)$$

où $N_i = N_i(x, \alpha)$ sont les fonctions de forme SUPG [6] (avec α le paramètre de décentrage) qui seront décrites plus tard (section 4.3.6) et n est le nombre d'éléments finis constituant le domaine de calcul.

En introduisant cette discrétisation spatiale de l'inconnue dans la forme faible, on obtient l'équation matricielle suivante :

$$\mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{h}} - \mathbf{C}_2 \mathbf{h} + \mathbf{q} = \mathbf{S}_u \bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{S}_V \mathbf{V} - \mathbf{S}_p \mathbf{p} \quad (4.9)$$

avec les définitions :

$$(\mathbf{C}_1^e)_{ij} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_i N_j dx \quad (4.10)$$

$$(\mathbf{C}_2^e)_{ij} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_i \frac{\partial u_M}{\partial x} N_j dx \quad (4.11)$$

$$(\mathbf{S}_u^e)_{ij} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} h(x) \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j dx \quad (4.12)$$

$$(\mathbf{S}_V^e)_{ij} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{R_q}{2} \phi_s \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j dx \quad (4.13)$$

$$(\mathbf{S}_p^e)_{ij} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_x(x) \frac{h^3(x)}{12\eta(x)} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx \quad (4.14)$$

où l'exposant e signifie que les matrices se rapportent à un seul élément (matrices 2×2 dans le cas d'éléments du premier degré) et x_i et x_{i+1} sont les coordonnées des extrémités de l'élément considéré.

Les matrices \mathbf{S}_u , \mathbf{S}_V et \mathbf{S}_p sont des matrices de fluidité correspondant respectivement à l'entraînement de lubrifiant, au glissement relatif des deux surfaces et à la variation de pression.

4.3.4 Evaluation numérique des grandeurs en jeu

Dans le contexte de la méthode EF, nous n'avons pas accès à la pression nodale sur la surface du maillage mais plutôt aux forces qui agissent en ces noeuds.

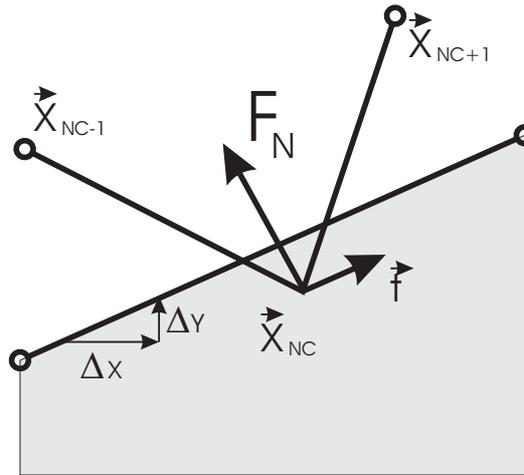


FIG. 4.2: Calcul de la pression

Pour déduire la pression à partir des forces de contact, nous exprimons que la force concentrée au noeud NC est la résultante d'une distribution de pression triangulaire pour laquelle $p = p_{NC}$ au noeud NC et $p = 0$ pour les deux noeuds adjacents. On obtient la formule :

$$F_N^{NC} = \frac{|(\vec{x}_{NC-1} - \vec{x}_{NC}) \cdot \vec{t}| + |(\vec{x}_{NC+1} - \vec{x}_{NC}) \cdot \vec{t}|}{2} p_{NC}. \quad (4.15)$$

où toutes les grandeurs sont définies sur la figure 4.2.

Il suffit alors d'inverser la relation (4.15) pour déduire l'inconnue p_{NC} en fonction de la valeur de la force de contact au même noeud. Inversement, si on veut déduire une force de frottement à partir de cisaillements calculés en chaque noeud de contact, on utilisera directement l'équation (4.15) en remplaçant la force normale par la force tangentielle et la pression locale par le cisaillement local.

Les vitesses sont simplement calculées en utilisant un schéma du premier ordre du type $v = (x(t + \Delta t) - x(t))/\Delta t$, qui n'est rien d'autre que la vitesse moyenne sur l'intervalle de temps considéré. Seule la vitesse des matrices rigides est calculée de manière exacte en dérivant le mouvement imposé de la matrice par rapport au temps. Les vitesses sont alors toutes projetées sur la surface de contact en effectuant le produit scalaire de celles-ci par le vecteur tangent unitaire à la matrice de contact au point considéré.

4.3.5 Evaluation numérique des matrices de fluidité

Vu que les variables telles que la pression où les facteurs d'écoulement interviennent dans les expressions précédentes, une intégration analytique n'est pas aisée mis à part pour la matrice \mathbf{C}_1^e . Nous utilisons donc une quadrature de Gauss pour évaluer ces intégrales.

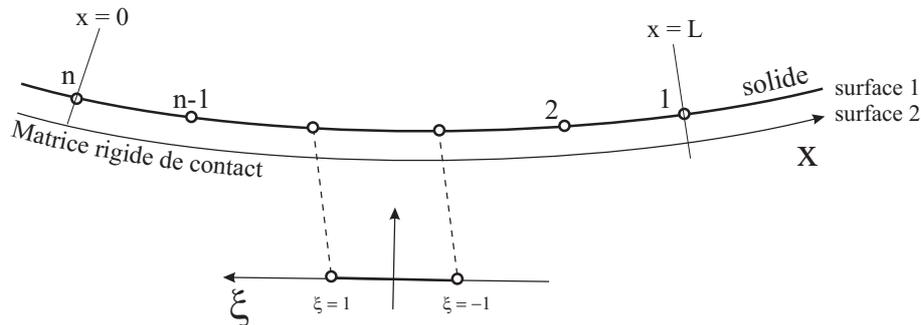


FIG. 4.3: Systèmes de coordonnées et numérotation des noeuds en contact.

A partir de cet instant, il est nécessaire de définir plusieurs systèmes de coordonnées le long de la zone de contact (figure 4.3). Le premier est un système global qui va conditionner le signe de toutes les grandeurs rencontrées. Nous choisissons de définir le sens de ce repère comme étant le sens de parcours de la matrice de contact dans METAFOR (aire de la matrice à droite). Nous numérotions également les noeuds en contact dans le sens contraire (aire de la matrice à gauche et aire du solide à droite). Ceci permettra, lorsqu'on envisagera le contact entre deux corps déformables, d'avoir une numérotation identique pour les deux surfaces en contact (toujours aire à droite). Enfin, chaque élément possède un système de coordonnées local ξ permettant l'intégration des matrices. La situation est représentée sur la figure 4.3.

Pour chaque intégrale selon x apparaissant dans l'équation (4.7), on effectue les trans-

formations suivantes :

$$\int_0^L f(x) dx = - \int_L^0 f(x) dx \quad (4.16)$$

$$= - \sum_{i=1}^N \int_{n_i}^{n_{i+1}} f(x') dx' \quad (4.17)$$

$$= - \sum_{i=1}^N \int_{-1}^1 f(\xi) J_i d\xi \quad (4.18)$$

où $f(x)$ représente symboliquement la fonction à intégrer, J_i est le jacobien de la transformation entre x' et ξ pour l'élément i . Celle-ci peut s'écrire :

$$x' = \frac{L_i}{2} (\xi + 1) \quad \rightarrow \quad J_i = \frac{dx'}{d\xi} = \frac{L_i}{2} \quad (4.19)$$

où L_i est la longueur de l'élément fini numéro i .

On peut donc calculer les matrices élémentaires par la formule :

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx &= - \int_{-1}^1 f(\xi) J_i d\xi \\ &= - \sum_{k=1}^{n_g} f(\xi_k) J_i w_k \end{aligned} \quad (4.20)$$

où n_g est le nombre de points de Gauss utilisé et où ξ_k et w_k sont respectivement les abscisses et les poids de Gauss.

Pour évaluer la fonction à intégrer aux points de Gauss, on effectue une approximation grâce aux fonctions de forme de toutes les grandeurs définies uniquement aux noeuds du maillage. C'est le cas de la pression, de la viscosité et des facteurs d'écoulement. On a donc par exemple pour la pression :

$$p(\xi) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi) p_i \quad (4.21)$$

Une autre manière de faire consisterait à approximer uniquement la pression p et l'épaisseur de film h et d'en déduire localement la viscosité $\eta(p)$ et les facteurs d'écoulement $\phi_x(h)$ et $\phi_s(h)$.

Les dérivées se calculent en dérivant les approximations effectuées précédemment. Par exemple, pour la pression (4.21), cela donne :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{1}{J} p_i \quad (4.22)$$

A titre d'exemple, nous donnons la formule d'évaluation de \mathbf{S}_p^e . En utilisant les relations (4.20), (4.21) et (4.22) dans l'expression de la matrice \mathbf{S}_p^e (4.14), on obtient la formule

d'évaluation numérique de cette matrice :

$$(\mathbf{S}_p^e)_{ij} = - \sum_{k=1}^{n_g} \left(\sum_{l=1}^n N_l(\xi_k) (\phi_x)_l \right) \frac{(\sum_{l=1}^n N_l(\xi_k) p_l)^3}{12 \sum_{l=1}^n N_l(\xi_k) \eta_l} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \Big|_{\xi_k} \frac{\partial N_j}{\partial x} \Big|_{\xi_k} \frac{1}{J} w_k \quad (4.23)$$

D'autres formules similaires peuvent être déduites pour les autres matrices élémentaires. Une fois celles-ci calculées, on peut effectuer les multiplications par les vecteurs correspondant apparaissant dans l'expression (4.9).

Le calcul du flux q aux extrémités du domaine n'est pas trivial puisqu'il fait apparaître une dérivée de la pression. Encore une fois, vu que les gradients sont inconnus, il faut choisir une expression pour la dérivée de la pression. Deux choix paraissent possibles : une dérivée décentrée du premier ordre calculée pour le premier noeud par (en se rappelant que les noeuds sont numéroté selon les x décroissants) :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_1 - p_2}{L_1} \quad (4.24)$$

ou une moyenne des dérivées à gauche et à droite en supposant $p = 0$ hors de la zone de contact (qui donne une dérivée centrée du second ordre dans le cas d'éléments de longueur identique) :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_1 - p_2}{L_1} + \frac{0 - p_1}{L_0} \quad (4.25)$$

où L_1 est la longueur du premier élément fini, L_0 est la distance entre premier noeud et le noeud adjacent hors de la zone de contact.

Nous choisissons d'utiliser la première formule (4.24) puisque la seconde dépend directement de L_0 . Cette dérivée sera donc d'autant plus grande que L_0 est petit (et tend vers une valeur infinie si le premier noeud hors de la zone de contact se rapproche de la frontière de la zone).

4.3.6 Utilisation de la méthode SUPG

Pour éviter les oscillations résultant de la résolution d'un problème de convection, nous utilisons des fonctions de forme modifiées qui permettent de tenir compte du sens local de l'écoulement [6].

Ces fonctions de forme permettent d'introduire de la diffusion artificielle dans les équations.

$$N_i^{SUPG}(x) = N_i(x) + \alpha \text{sign } w \frac{d N_i}{d x} \quad (4.26)$$

où $N_i(x)$ sont les fonctions de forme linéaires traditionnelles, w est la vitesse de convection, ici égale à \bar{u}_r et α est le coefficient de décentrage (coefficient d'upwind).

4.4 Discrétisation temporelle de l'équation de Reynolds

4.4.1 Schéma d'Euler implicite

Pour l'intégration temporelle, l'équation matricielle (4.9) est réécrite sous la forme :

$$\mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{h}} = \mathbf{f}(\mathbf{h}) = \mathbf{S}_u \bar{\mathbf{u}}_r + \mathbf{S}_V \mathbf{V} - \mathbf{S}_p \mathbf{p} + \mathbf{C}_2 \mathbf{h} - \mathbf{q} \quad (4.27)$$

Il existe une multitude de schémas d'intégration. Pour le moment, nous nous limitons à un schéma simple : le schéma d'Euler totalement implicite du premier ordre qui s'écrit :

$$\mathbf{C}_1 \frac{\mathbf{h}^{n+1} - \mathbf{h}^n}{\Delta t} = \mathbf{f}(\mathbf{h}^{n+1}) \quad (4.28)$$

Grâce au caractère totalement implicite de ce schéma, nous savons que nous pourrions effectuer de grands pas de temps, le but étant d'utiliser les mêmes pas de temps que le calcul mécanique. Une étude détaillée de ce schéma d'intégration (stabilité, présence d'oscillations,...) n'est pas aisée parce que l'équation à résoudre est fortement non linéaire par rapport à l'inconnue h . Nous savons cependant que dans le cas très simplifié où la vitesse d'entraînement est constante et que le gradient de pression est nul, nous obtenons une équation classique de convection, qui, résolue de manière totalement implicite fournit un schéma inconditionnellement stable (voir rapport de première bourse [3]). Il sera donc intéressant, dans la suite de ce travail, d'effectuer une analyse plus complète et de comparer les solutions obtenues avec celles fournies par d'autres schémas d'intégration (totalement explicite, point milieu généralisé,...). Cependant, vu qu'un schéma explicite n'est jamais inconditionnellement stable, il faudra, dans ce cas, mettre au point une procédure qui limitera le pas de temps mécanique à la valeur maximale du schéma d'intégration de lubrification ou qui permettra d'effectuer plusieurs pas de temps pour le problème de lubrification pendant un pas de temps mécanique.

Trouver la distribution des épaisseurs de film au pas de temps $n+1$ à partir de l'équation (4.28) n'est pas directe puisqu'elle est non linéaire. Une procédure itérative de Newton-Raphson est mise en place pour la résolution. On linéarise tout d'abord l'équation à résoudre :

$$\frac{d\mathbf{r}^i}{d\mathbf{h}^i} \Delta \mathbf{h}^i = -\mathbf{r}^i \quad (4.29)$$

où \mathbf{r}_i est le résidu de l'équation donné par :

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{C}_1 \frac{\mathbf{h}^{n+1} - \mathbf{h}^n}{\Delta t} - \mathbf{f}(\mathbf{h}^i) \quad (4.30)$$

Après avoir tiré $\Delta \mathbf{h}^i$ de l'équation matricielle (4.29) en inversant la matrice des dérivées, on peut mettre à jour l'inconnue par la formule :

$$\mathbf{h}^{i+1} = \mathbf{h}^i + \Delta \mathbf{h}^i \quad (4.31)$$

et ce, jusqu'à ce que le résidu de l'équation soit inférieur à une certaine tolérance fixée par l'utilisateur.

La dérivée du résidu par rapport au vecteur inconnu \mathbf{h} apparaissant dans l'équation (4.29) peut s'exprimer sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{h}} = \frac{\mathbf{C}_1}{\Delta \mathbf{t}} - \mathbf{K}_u - \mathbf{K}_v + \mathbf{K}_p - \mathbf{C}_2 + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{h}} \quad (4.32)$$

en définissant les matrices suivantes :

$$(\mathbf{K}_u^e)_{ij} = \left[\frac{\partial (\mathbf{S}_u^e \bar{\mathbf{u}}_r)}{\partial \mathbf{h}} \right]_{ij} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \bar{u}_r(x) \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j dx \quad (4.33)$$

$$(\mathbf{K}_v^e)_{ij} = \left[\frac{\partial (\mathbf{S}_v^e \mathbf{V})}{\partial \mathbf{h}} \right]_{ij} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} V(x) \frac{R_q}{2} \frac{\partial \phi_s}{\partial h} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j dx \quad (4.34)$$

$$(\mathbf{K}_p^e)_{ij} = \left[\frac{\partial (\mathbf{S}_p^e \mathbf{p})}{\partial \mathbf{h}} \right]_{ij} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\phi_x \frac{h^2(x)}{4\eta(x)} + \frac{\partial \phi_x}{\partial h} \frac{h^3(x)}{12\eta(x)} \right] \frac{\partial p(x)}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j dx \quad (4.35)$$

où les dérivées des facteurs d'écoulement dépendent du modèle utilisé. Si on utilise les facteurs de Patir et Cheng (équations (2.43) et (2.47)), on obtient :

$$\begin{aligned} (\phi_x)' &= r C_1 e^{-rH}/R_q & \text{pour } \gamma \leq 1 \\ (\phi_x)' &= -1.5 \phi_x/(R_q H) & \text{pour } \gamma > 1 \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} (\phi_s^*)' &= [\phi_s^*/H + \phi_s^*(-\alpha_2 + 2\alpha_3 H)]/R_q & \text{pour } H \leq 5 \\ (\phi_s^*)' &= -0.25 \phi_s^*/R_q & \text{pour } H > 5 \end{aligned} \quad (4.37)$$

et on trouve les expressions suivantes pour les dérivées des facteurs d'écoulement du modèle de Tripp (équations (2.49) et (2.50)) :

$$(\phi_x)' = -\frac{6}{H^3 R_q} \left(1 - 3 \frac{1}{1 + \gamma^2} \right) \quad (4.38)$$

$$(\phi_s^*)' = -\frac{3}{H^2 R_q} \frac{1}{1 + \gamma^2} \quad (4.39)$$

la valeur de h si la pente est négative. Dans ce cas, le noeud 1 est la transition entre une zone d'entrée et la zone de travail. Inversement, si la pente est positive, le noeud est la transition entre une zone de sortie et la zone de travail. Ce raisonnement peut être fait également avec le dernier noeud et des pentes de signes opposés.

Dans le cas de l'équation de Reynolds, nous voyons que la pente des caractéristiques dépend en toute généralité de l'inconnue h . Ceci pose un gros problème. En effet, considérons le cas simplifié de deux surfaces lisses ($\phi_x = 1$, $\phi_s = 0$) et écrivons la pente des caractéristiques λ :

$$\lambda = \bar{u}_r - \frac{h^2}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.44)$$

Cette pente s'annule pour la valeur ($p' = \partial p / \partial x$) :

$$h^* = \sqrt{\frac{4\eta\bar{u}_r}{p'}} \quad (4.45)$$

Supposons maintenant que $h < h^*$. La pente est positive et nous sommes sur la frontière telle qu'il faut appliquer une condition aux limites dans ce cas. Il est tout à fait possible que la valeur de h que l'on impose par les formules que nous allons développer dans la section suivante soit supérieure à h^* et que maintenant, la nouvelle pente de la caractéristique à cet endroit est telle qu'on ne doit plus appliquer de conditions aux limites !

Il est donc impératif d'avoir une pente des caractéristiques indépendante de l'inconnue. Pour cela, nous décidons de prescrire la valeur de l'épaisseur de lubrifiant en tenant compte uniquement du premier terme de l'expression de la pente caractéristique, c'est-à-dire la vitesse moyenne relative au maillage \bar{u}_r .

Remarquons que cette façon de faire est également celle utilisée par Liu et Hu. En effet, ils ne font jamais allusion aux caractéristiques de l'équation pour appliquer les conditions aux limites. Vu qu'ils appliquent leur méthode à la simulation du laminage, les conditions limites semblent évidentes : imposition de l'épaisseur de film en amont et rien du tout en aval.

4.5.2 Analyse d'une zone d'entrée

4.5.2.1 Intégration analytique de l'équation de Reynolds

Supposons maintenant que le noeud frontière considéré délimite la zone d'entrée et la zone de travail. Il faut donc imposer la valeur de l'épaisseur de film de lubrifiant en ce noeud.

Pour ce faire, il faut résoudre l'équation de Reynolds dans la zone d'entrée. Ce n'est cependant pas possible d'effectuer cette analyse numériquement parce qu'on ne dispose pas

des pressions de lubrifiant dans cette zone. En effet, vu qu'il n'y a pas de contact, les forces extérieures mécaniques sont nulles et la pression vaut 0.

Malgré le peu de données que l'on possède sur la zone d'entrée, il est possible de déduire analytiquement une expression pour la valeur de l'épaisseur de film en entrée. Cette expression est dérivée d'une manière similaire à la formule de Wilson et Walowit [55] pour le cas stationnaire.

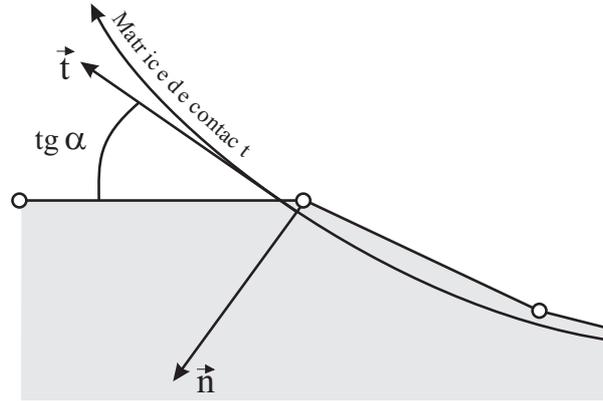


FIG. 4.4: Analyse de la zone d'entrée.

Dans la suite nous supposons que l'axe x est dirigé vers l'intérieur de la zone de contact (voir figure 4.4).

Vu la taille réduite des zones d'entrées rencontrées en pratique, on suppose que les vitesses des deux surfaces en contact sont constantes. De plus, la dérivée de la pression est supposée nulle en $x = 0$. On suppose enfin que la dérivée temporelle est constante selon x et on la note w pour simplifier les notations.

Sous ces hypothèses, une première intégration de l'équation de Reynolds (4.5) entre $x = 0$ et $x = x'$ donne :

$$\phi_x \frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} = (h - h_0) \bar{u}_r + \frac{V}{2} R_q (\phi_s - \phi_{s0}) + w x \quad (4.46)$$

où on a renommé x' en x . L'épaisseur de film recherchée en $x = 0$ est notée h_0 et $\phi_{s0} = \phi_s(x = 0)$. Il est ensuite nécessaire de faire une hypothèse sur la géométrie de la zone d'entrée. Wilson et Walowit [55] proposent une approximation linéaire du film de lubrifiant :

$$h(x) = h_0 + \alpha x \quad (4.47)$$

où α est la tangente de l'angle de contact au premier noeud de contact évalué à l'aide du premier noeud hors de la zone de contact (voir figure 4.4). En introduisant cette équation dans la relation (4.46) et en isolant le gradient de pression, on obtient :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{12\eta}{\phi_x(x) (h_0 + \alpha x)^3} \left(\alpha x \bar{u}_r + \frac{V}{2} R_q (\phi_s - \phi_{s0}) + w x \right) \quad (4.48)$$

4.5.2.2 Cas lisse — équation de Wilson & Walowit

Considérons tout d'abord le cas simplifié de deux surfaces lisses. Dans ce cas, l'équation (4.48) s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 12 \eta \frac{(\alpha \bar{u}_r + w) x}{(h_0 + \alpha x)^3} \quad (4.49)$$

En intégrant cette équation à nouveau entre $x = -\infty$ et $x = 0$ et en supposant que la pression du lubrifiant est nulle en $x = -\infty$, on obtient :

$$h_0 = -\frac{6 \eta (\bar{u}_r + w/\alpha)}{p_0 \alpha} \quad (4.50)$$

qui se réduit à la formule de Wilson et Walowit pour le cas stationnaire. En effet, si le problème est stationnaire dans des axes eulériens,

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} |_{\mathcal{X}} = \underbrace{\frac{\partial h}{\partial t} |_x}_{=0} + u_M \frac{\partial h}{\partial x} = \alpha u_M \quad (4.51)$$

et on obtient l'équation de Wilson et Walowit [55] :

$$h_0 = -\frac{6 \eta \bar{u}}{p_0 \alpha} \quad (4.52)$$

où α est négatif, ce qui explique le signe négatif.

On constate donc que l'épaisseur de film entraînée dans la zone de contact est d'autant plus grande que la vitesse d'entraînement et la viscosité du lubrifiant sont grandes. Par contre une augmentation de pression ou de l'angle entre les deux surfaces ont tendance à diminuer l'épaisseur de film en entrée.

4.5.2.3 Cas rugueux – introduction des facteurs d'écoulement

Si on revient à l'équation (4.48) et que l'on est en présence de surfaces rugueuses, il faut prendre en compte les facteurs d'écoulement. Il n'est cependant pas possible de considérer ceux-ci comme constants sur la zone d'entrée. En effet, dans cette zone, les gradients sont très importants et l'épaisseur de film varie énormément. En intégrant l'équation (4.48) entre $x = -\infty$ et $x = 0$ comme nous l'avons fait précédemment pour le cas lisse, on obtient l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned} p_0 - p_{-\infty} &= 12 \eta \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\alpha \bar{u}_r x + \frac{V}{2} R_q (\phi_s - \phi_{s0})}{\phi_x(x) (h_0 + \alpha x)^3} dx + \int_{-\infty}^0 \frac{\frac{\partial h}{\partial t} x}{\phi_x(x) (h_0 + \alpha x)^3} dx \right) \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (4.53)$$

où les intégrales I_1 et I_2 ne sont pas intégrables analytiquement en toute généralité. Cependant, une intégration numérique de ces expressions est possible et on peut donc utiliser cette équation pour obtenir la valeur de h_0 .

Pour ce faire, nous utilisons à nouveau un schéma de Newton-Raphson sur l'équation suivante :

$$I_1(h_0) + I_2(h_0) - p_0 = 0 \quad (4.54)$$

Il faut cependant pouvoir calculer la dérivée des intégrales I_1 et I_2 par rapport à h_0 . Ceci peut être facilement effectué en faisant passer l'opérateur de dérivation sous le signe d'intégration. On obtient alors les expressions des dérivées suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial h_0} = & 12\eta \int_{-\infty}^0 \frac{h(x) \left(\frac{V}{2} R_q \left(\frac{\partial \phi_s(x)}{\partial h_0} - \frac{\partial \phi_s(0)}{\partial h_0} \right) \right)}{\phi_x(x)^2 h(x)^4} \\ & - \frac{\left(\alpha \bar{u}_r x + \frac{V}{2} R_q (\phi_s - \phi_{s0}) \right) \left(\frac{\partial \phi_x(x)}{\partial h_0} h(x) + 3 \phi_x(x) \right)}{\phi_x(x)^2 h(x)^4} dx \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial h_0} = 12\eta \int_{-\infty}^0 \frac{\frac{\partial}{\partial h_0} \frac{\partial h}{\partial t} x}{\phi_x(x) h(x)^3} - \frac{\frac{\partial h}{\partial t} x \left(\frac{\partial \phi_x(x)}{\partial h_0} h(x) + 3 \phi_x(x) \right)}{\phi_x(x)^2 h(x)^4} dx \quad (4.56)$$

où on a supposé que $\partial h / \partial h_0 = 1$.

Les intégrales apparaissant dans les équations (4.53), (4.55) et (4.56) sont calculées grâce à un algorithme d'intégration de Romberg [37] en utilisant un changement de variable pour réduire l'intervalle d'intégration. Ce changement de variables s'écrit :

$$x = \frac{t-1}{t} \quad x \in [-\infty, 0] \rightarrow t \in [0, 1] \quad (4.57)$$

$$dx = 1/t^2 dt \quad (4.58)$$

Si on trace le résidu de l'équation (4.54), on constate que l'algorithme de Newton-Raphson ne peut converger que dans un voisinage assez limité de la solution. En effet, si l'estimation de h_0 est trop grande, l'approximation linéaire (équations 4.55 et 4.56) est mauvaise et l'intersection de la tangente avec l'abscisse du graphe entraîne un h_0 négatif. Or, le résidu n'est pas défini pour un h_0 négatif. En conséquence, on est obligé de mettre au point une solution alternative. Celle-ci est basée sur la méthode de la bisection et elle est activée chaque fois que le processus de Newton Raphson ne converge pas (soit parce que le nombre total d'itérations est trop important, soit parce que l'approximation de la solution devient négative).

En général, la méthode de la bisection n'est activée que très rarement : lors du premier pas de temps et lors de l'apparition de nouvelles zones d'entrées.

Dans la suite de cette section, nous allons montrer, pour des paramètres donnés tirés d'une application numérique présentée plus loin, que notre méthode de résolution de l'équa-

Vitesse moyenne	\bar{u}	=	1607 mm/s
Vitesse de glissement	V	=	51 mm/s
Pression	p_0	=	162.4 MPa
Viscosité à p_0	η_0	=	$4.34 \cdot 10^{-1}$ Pa.s
Coefficient de pression (loi de Barus)	γ_l	=	$2 \cdot 10^{-8}$ Pa $^{-1}$
Rugosité surface 1	R_{q1}	=	$1 \cdot 10^{-3}$ mm
Rugosité surface 2	R_{q2}	=	$0.2 \cdot 10^{-3}$ mm
Angle d'entrée	α	=	$4.4038 \cdot 10^{-2}$
Nombre de Peklenik	γ	=	1

TAB. 4.1: Paramètres utilisés pour le test de l'algorithme d'analyse de la zone d'entrée.

tion intégrale fournissant les conditions aux limites de l'équation de Reynolds fonctionne correctement.

Les paramètres utilisés sont présentés dans le tableau 4.1. Il s'agit d'un cas de laminage (réduction de 10 %) d'une tôle d'acier par un cylindre de 50 mm de diamètre. L'angle d'entrée est calculé analytiquement en utilisant ces informations.

Pour l'ensemble des graphes présentés, on utilise une approximation initiale de l'épaisseur de film de lubrifiant en entrée de $5 \cdot 10^{-3}$ mm. On recherche la solution stationnaire. Autrement dit, l'intégrale de la dérivée temporelle est nulle.

La figure 4.5 montre l'intégrale (que l'on tente d'égaliser à la pression équivalente par Newton-Raphson) pour des valeurs de h_0 comprises entre 1 microns et 10 microns. La solution est donc l'intersection entre cette courbe et une horizontale d'équation $p = \hat{p}$ où \hat{p} est la pression si la viscosité ne dépend pas de la pression où la pression équivalente si la viscosité suit la loi de Barus (équation 2.32). Dans notre cas, on utilise la loi de Barus et une pression de 162.4 MPa. Sur cette figure, on a représenté l'intégrale pour les facteurs de correction de Patir & Cheng et le cas lisse. On voit que la rugosité (ici isotrope) a pour effet d'augmenter l'épaisseur de film de lubrifiant entraînée dans la zone de contact. Cette différence entre les valeurs du cas rugueux et du cas lisse sont d'autant plus marquées qu'on se rapproche de la valeur $h_0 = R_q$, c'est-à-dire la transition vers le régime de lubrification mixte. La figure 4.6 montre un zoom sur les racines de l'équation.

La figure 4.7 est l'équivalente de la figure 4.5 pour les facteurs de correction de Tripp. On remarque tout d'abord que ces facteurs provoquent le même décalage de la solution (heureusement puisque les deux théories se veulent universelles). Cependant, on constate que la courbe définie par l'intégrale n'est pas bien définie pour des valeurs proches de la rugosité composite utilisée. Cette zone chaotique est due à une divergence de l'algorithme de Romberg (il n'arrive pas à calculer l'intégrale à la précision voulue en moins de 2^{20} (!) évaluations du radicant). Nous expliquerons ce phénomène plus tard.

Les solutions obtenues pour les 3 cas sont les suivantes : 2.115 microns pour Patir &

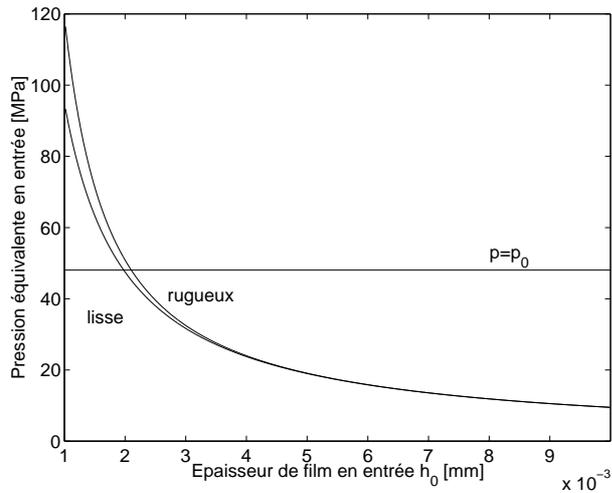


FIG. 4.5: Résidu calculé pour différents h_0 (cas lisse et facteurs de Patir & Cheng).

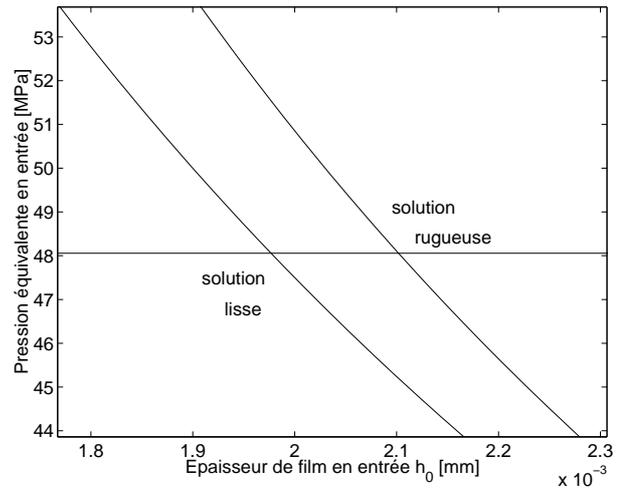


FIG. 4.6: Zoom sur les deux solutions obtenues (cas lisse et facteurs de Patir & Cheng).

Cheng, 2.102 microns pour Tripp et 1.977 microns pour le cas lisse. On voit donc que les facteurs d'écoulement de Patir & Cheng mènent à une solution plus grande que les facteurs de Tripp.

La figure 4.8 montre les variations de la fonction à intégrer pour les facteurs de Tripp en fonction des différentes estimations de la solution. On constate que la fonction peut avoir des formes assez différentes suivant l'estimation. On pourrait montrer également que cette forme dépend du type de facteur de correction utilisé (Patir & Cheng ou Tripp).

Les figures suivantes permettent de comprendre la raison de la divergence de l'intégration de Romberg dans le cas des facteurs de Tripp. La figure 4.9 montre la fonction à intégrer par la solution exacte de l'équation. On peut vérifier sur cette figure que l'aire de la fonction est nulle. Prenons maintenant une valeur de h_0 pathologique. La figure 4.10 montre un tel cas. On remarque que la fonction à intégrer possède une asymptote et n'est donc pas définie en tous les points du domaine d'intégration. C'est facile à comprendre : les facteurs de Tripp peuvent devenir nuls pour une rugosité isotrope ou transverse ($\gamma \leq 1$). Dans le cas d'une rugosité isotrope, ϕ_x devient nul en $h = \sqrt{3/2} R_q$. Or, ce facteur apparaît au dénominateur dans notre radicant. Il n'est donc pas possible de résoudre l'équation pour des valeurs de h_0 inférieure à cette valeur critique.

La figure 4.11 montre la variation de l'épaisseur de lubrifiant pour différentes valeurs du nombre de Peklenik. Nous avons utilisé ici les facteurs de correction de Patir & Cheng. On constate que, dans le cas des paramètres numériques utilisés, une rugosité longitudinale entraîne moins de lubrifiant que le cas lisse. Par contre, pour une rugosité isotrope ou transverse, c'est le contraire qui se produit.

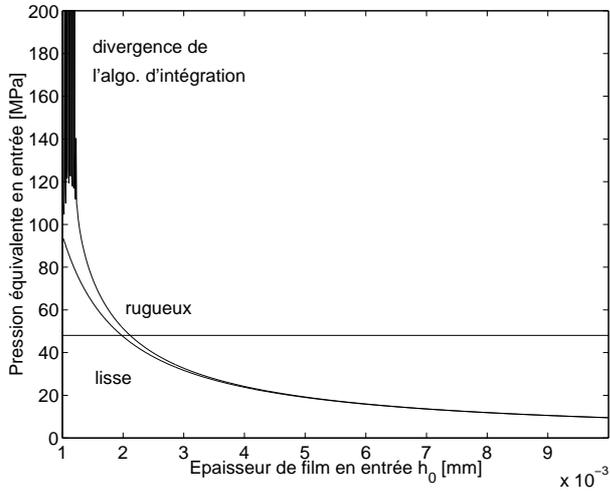


FIG. 4.7: Résidu calculé pour différents h_0 (cas lisse et facteurs de Tripp).

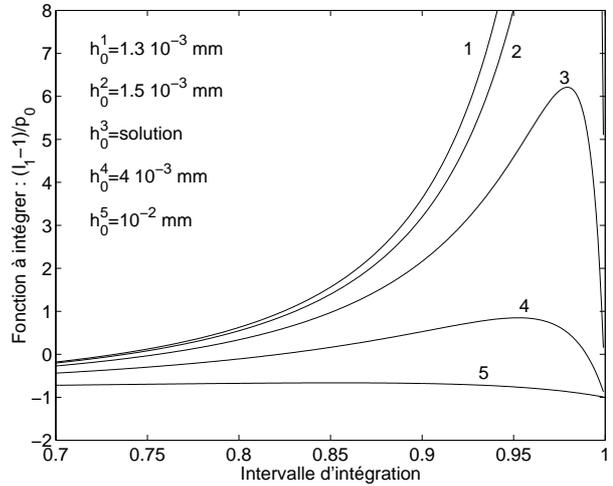


FIG. 4.8: Variation de la fonction à intégrer en fonction de h_0 (Tripp).

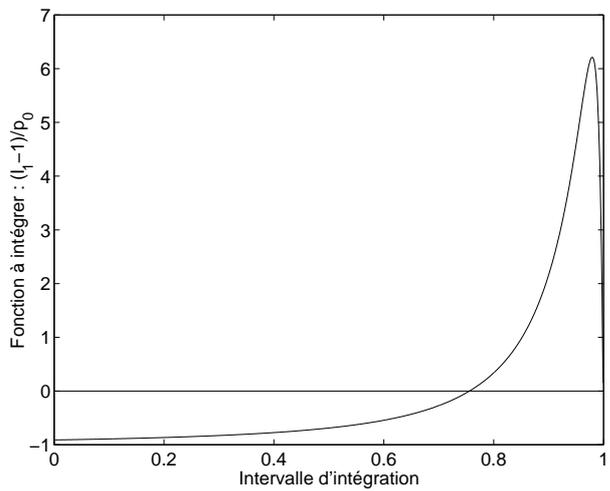


FIG. 4.9: Fonction à intégrer pour la solution de l'équation (Tripp - $h_0 = 2.1018 \cdot 10^{-3}$ mm).

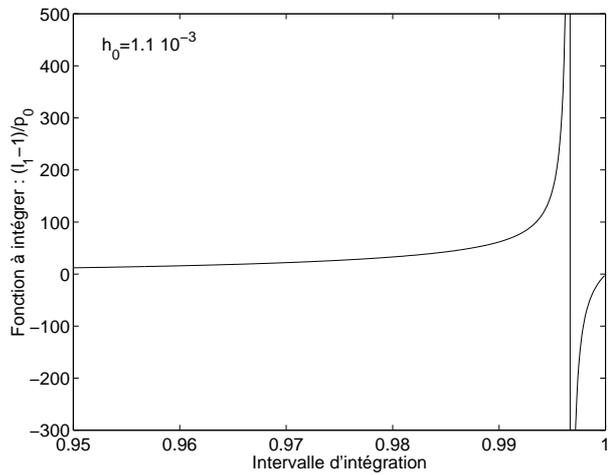


FIG. 4.10: Fonction à intégrer présentant une asymptote (Tripp - $h_0 = 1.1 \cdot 10^{-3}$ mm).

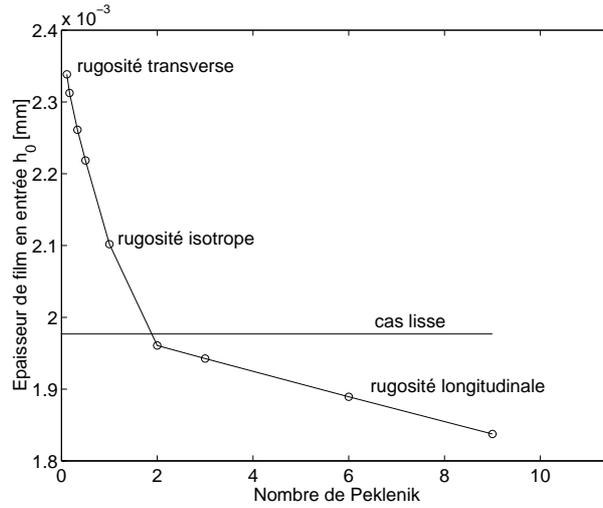


FIG. 4.11: Epaisseur de lubrifiant calculée en fonction de l'orientation des aspérités (Patir & Cheng).

4.5.2.4 Autres formulations

D'autres approches sont possibles pour déterminer l'épaisseur de film en entrée.

La première est proposée par Liu et Hu [15]. Nous avons refait les calculs explicitement et ceux-ci sont présentés en annexe. Ils font également l'hypothèse que la dérivée de la pression est nulle au noeud extrême de la zone et ils utilisent les facteurs d'écoulement de Tripp (équations (2.49) et (2.50)). Cependant ils utilisent des hypothèses simplificatrices uniquement valables dans le cas du laminage (et ce n'est pas annoncé dans leur papier). De plus, le rayon du cylindre intervient explicitement dans l'équation obtenue. En fin de calcul et sous plusieurs hypothèses, ils obtiennent une expression analytique de l'intégrale I_1 (l'intégrale I_2 n'est pas calculée vu qu'ils travaillent en régime établi). Cette expression est résolue par un algorithme de Newton-Raphson (ils ne parlent pas de problèmes de convergence).

Martinet [30] propose également une formule permettant d'obtenir l'épaisseur de film au début de la zone de contact. Il lève l'hypothèse sur la dérivée de la pression mais il considère que les facteurs d'écoulement sont constants dans la zone d'entrée, ce qui est très discutable. Il obtient finalement une équation du second degré à résoudre pour h_0 et dont les solutions sont :

$$h_0 = \frac{-p_0 \alpha \phi_{x0} \pm \sqrt{(p_0 \alpha \phi_{x0})^2 - 12 \eta \bar{u} p'_0 \phi_{x0}}}{p'_0 \phi_{x0}} \quad (4.59)$$

où p_0 , p'_0 , ϕ_{x0} représentent respectivement la pression, la dérivée de la pression et le facteur d'écoulement en pression au point extrême de la zone.

Cependant, il ne dit pas ce qu'il se passe lorsque le gradient de pression p'_0 est tel que le

radicant devient négatif. Nous pensons donc que notre formulation est plus générale mais cette généralité a un prix puisque les intégrations numériques nécessaires à la résolution sont très coûteuses.

4.5.2.5 Evaluation de l'écrasement du film et conditions initiales

Si nous considérons la formule de Wilson et Walowit étendue au cas transitoire (équation (4.50)), on constate qu'elle fait intervenir deux composantes de la vitesse relative des deux surfaces. En effet, en hydrodynamique, une pression peut apparaître dans le lubrifiant dans deux cas particuliers : soit si les deux surfaces sont inclinées l'une par rapport à l'autre et en mouvement relatif, soit si le fluide est écrasé entre les deux surfaces.

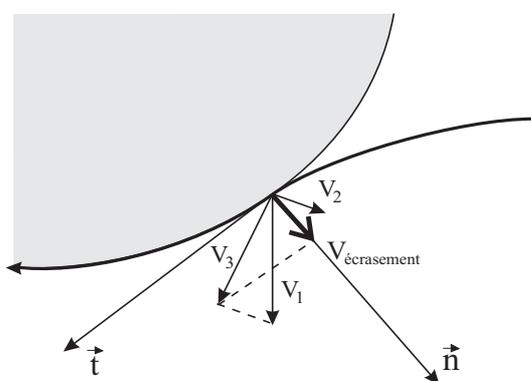


FIG. 4.12: Effet d'écrasement (*squeeze effect*).

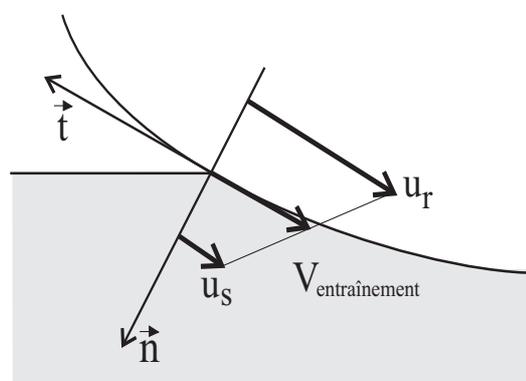


FIG. 4.13: Effet d'entraînement (*wedge effect*).

La première composante est donc la vitesse d'entraînement (\bar{u} dans un repère eulérien et \bar{u}_r dans un repère mobile – voir figure 4.13). C'est cette composante qui va intervenir dans des simulations telles que le laminage. En régime établi, la dérivée eulérienne de l'épaisseur de film est nulle et l'épaisseur de film est directement proportionnelle à la vitesse d'entraînement.

La deuxième composante est la vitesse d'écrasement du lubrifiant modélisée par la dérivée temporelle de l'épaisseur de film ($\partial h / \partial t|_x$ dans un repère eulérien et $\partial h / \partial t|_x$ dans un repère mobile – voir figure 4.13). Cette composante va intervenir notamment dans les opérations d'emboutissage. Nous verrons également que ce terme est important dans une simulation de laminage en formalisme lagrangien.

Nous nous intéressons, dans cette section, à l'évaluation numérique de cette vitesse. En effet, la première idée qui vient à l'esprit pour l'évaluation de la vitesse d'écrasement est de calculer la vitesse relative du noeud selon la normale à la matrice de contact. C'est cependant une mauvaise idée parce qu'elle est fonction de la pénétration du noeud dans la matrice de contact (on utilise la méthode de la pénalité pour modéliser le contact). Cette

pénétration d'autant plus grande que le coefficient de pénalité est petit ou que la pression nécessaire pour atteindre l'équilibre est élevée. Autrement dit, au cours du temps, la vitesse d'écrasement calculée de la sorte est directement proportionnelle à la dérivée temporelle de la pression au noeud considéré. Il est donc impératif de trouver une autre méthode pour évaluer cette vitesse.

Les phénomènes d'entraînement et d'écrasement précités sont étroitement liés et ne peuvent pas, en toute rigueur, être schématisés comme nous l'avons fait au début de cette section. En effet, tout dépend, comme nous allons le voir, de la vitesse de la grille de calcul.

Pour fixer les idées, considérons deux simulations différentes du même processus : le laminage. Cet exemple va nous permettre de voir comment il est possible d'évaluer l'écrasement du lubrifiant.

La première simulation est effectuée grâce au formalisme A.L.E. Autrement dit, après une période transitoire plus ou moins longue, la grille de calcul devient immobile et, dans ce cas, $u_M = 0$ (où u_M est la vitesse du maillage). Au premier noeud de contact en aval de l'emprise, l'épaisseur de film est constante au cours du temps, puisque le régime est établi et nous avons :

$$h_0 = -\frac{6\eta\bar{u}_r}{\alpha p} = \frac{6\eta\bar{u}}{\alpha p} \quad (4.60)$$

qui est la formule de Wilson et Walowit pour le cas stationnaire.

Considérons maintenant la même simulation effectuée en formalisme lagrangien. La grille de calcul est fixée à la matière et les noeuds de la surface de la tôle entrent en contact les uns après les autres. Dans ce cas, il n'est pas possible de laisser tomber le terme de transitoire :

$$h_0 = -\frac{6\eta(\bar{u}_r + w/\alpha)}{p_0\alpha} \quad (4.61)$$

or, l'épaisseur doit être identique dans les deux cas. On a donc, en égalant les expressions (4.60) et (4.61) :

$$\bar{u} - u_M + w/\alpha = \bar{u} \quad \rightarrow \quad w = \alpha u_M \quad (4.62)$$

qui n'est rien d'autre que l'équation (4.51).

Si dans le premier cas (A.L.E.), l'évaluation de la vitesse d'écrasement n'influence pas la solution finale, on voit que ce n'est pas le cas dans le second cas (lagrangien). Nous décidons donc de modéliser la vitesse du lubrifiant par une différence finie :

$$w = \frac{\partial h}{\partial t}|_x = \frac{h_0^{(n+1)} - h_0^{(n)}}{\Delta t} \quad (4.63)$$

où n est le numéro du pas de temps. L'équation de Wilson et Walowit devient :

$$h_0^{(n+1)} = -\frac{6\eta(\bar{u}_r + \frac{h_0^{(n+1)} - h_0^{(n)}}{\alpha\Delta t})}{p_0\alpha} \quad (4.64)$$

qui donne, une fois résolue pour $h_0^{(n+1)}$, la nouvelle épaisseur de film en entrée si l'ancienne est connue :

$$h_0^{(n+1)} = \frac{-\bar{u}_r + \frac{h_0^{(n)}}{\alpha \Delta t}}{\frac{\alpha p_0}{6\eta} + \frac{1}{\alpha \Delta t}} \quad (4.65)$$

Dans cette nouvelle formule, le problème est déplacé dans la détermination de $h_0^{(n)}$, c'est-à-dire, les conditions initiales de l'équation de Reynolds. Il n'y a bien sûr pas de difficulté si le noeud était déjà en contact au pas précédent. Dans le cas contraire, il faut choisir une valeur pour $h_0^{(n)}$. Nous décidons d'utiliser l'approximation linéaire (4.47) pour calculer cette valeur. Autrement dit, le film de lubrifiant hors de la zone de contact sera approximé de manière linéaire à partir du premier noeud en contact. Si au pas suivant, un ou plusieurs de ces noeuds entrent en contact, on utilisera comme valeur initiale cette valeur approximée. Nous voyons ici que les conditions aux limites et les conditions initiales sont fortement liées.

Lorsque le premier point entre en contact, la situation est plus délicate et plusieurs solutions sont possibles et devront être étudiées par la suite. On peut,

- soit utiliser la vitesse d'impact du noeud (tout en sachant bien qu'elle peut être une mauvaise approximation de la vitesse réelle). Il faudrait également mettre point, dans ce cas bien précis, une formule qui prend en compte le rayon de courbure local. Celui-ci serait calculé grâce aux deux noeuds voisins du noeud en contact.
- soit imposer arbitrairement l'épaisseur de film d'huile initiale sur la tôle (comment la mesurer ?).

C'est cette dernière méthode, très simple, qui est mise en place à l'heure actuelle dans METAFOR.

Terminons cette section en faisant remarquer qu'il n'est pas possible de contourner le problème de la détermination des vitesses d'écrasement en utilisant quel que soit le problème la formule eulérienne (4.60). En effet, si dans le cas du laminage présenté ci-dessus, cette formule conviendrait dans les deux cas, c'est uniquement parce que la zone d'entrée est fixe dans le repère global. Il est facile de trouver un cas où on met cette formule en défaut (n'importe quel cas où la zone d'entrée se déplace).

Tous les raisonnements et discussions que nous avons faits avec l'équation de Wilson et Walowit sont bien sur valables pour les autres formulations (cas rugueux, équation de Liu et équation de Martinet).

4.5.2.6 Prise en compte d'un fluide piézovisqueux

La prise en compte de l'influence de la pression sur la viscosité peut être faite de manière très simple sans alourdir les calculs pour autant qu'on utilise le modèle piézovisqueux de Barus (2.32). En effet, nous avons vu que l'équation de Reynolds piézovisqueuse est

identique à l'équation de Reynolds à viscosité constante si on effectue le changement de variable suivant (rappel de l'équation (2.36)) :

$$\hat{p} = \frac{1}{\gamma_l} (1 - e^{-\gamma p}) \quad (4.66)$$

On peut donc reformuler les équations obtenues dans la section précédente pour tenir compte du caractère piézovisqueux du fluide. En particulier, l'équation de Wilson et Walowit devient :

$$h_0 = -\frac{6 \eta_0 \gamma_l (\bar{u}_r + w/\alpha)}{(1 - e^{-\gamma_l p_0}) \alpha} \quad (4.67)$$

Cette équation montre que pour des grandes valeurs du coefficient de pression du lubrifiant, l'épaisseur de film en entrée devient indépendante de la pression en entrée. La figure 4.14 montre ce phénomène par les courbes $h_0 = h_0(\gamma_l)$ pour différentes valeurs de la pression d'entrée.

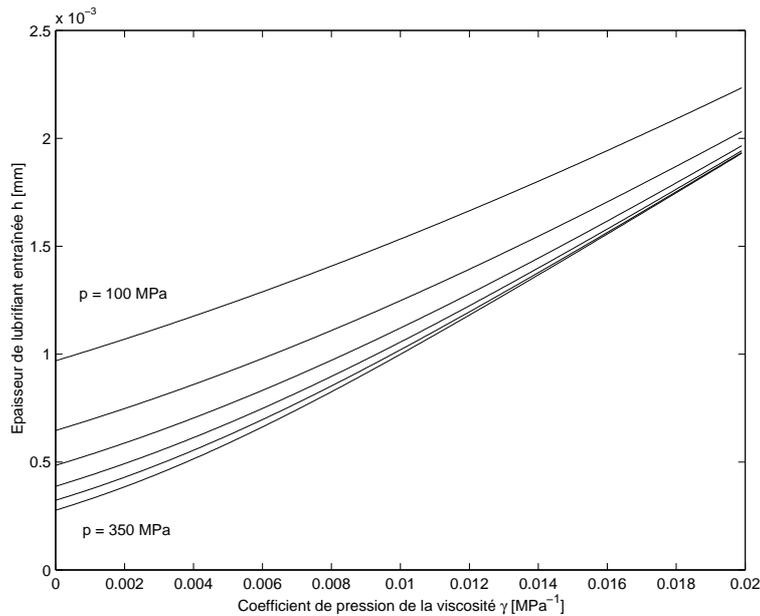


FIG. 4.14: Epaisseur de film entraînée en fonction du coefficient de pression de la viscosité pour différentes pressions en entrée.

Dans le cas d'une équation plus complexe, comme par exemple (4.54), on obtient :

$$I_1 + I_2 - \frac{1}{\gamma_l} (1 - e^{-\gamma_l p_0}) = 0 \quad (4.68)$$

à résoudre de la même manière que l'équation à viscosité constante.

4.6 Calcul des contraintes

Une fois que la distribution des épaisseurs de film de lubrifiant est connue pour un champ de pression et de vitesses donnés, on peut utiliser un modèle de frottement pour déduire, en chaque noeud, les cisaillements transmis par le fluide sur les deux surfaces en contact.

Nous utilisons l'équation modifiée de Patir et Cheng (2.51) et les forces résultantes sont calculées en inversant la formule qui permet de passer des forces normales aux pressions (4.15).

Dans le cas lisse, il est intéressant de calculer le coefficient de frottement au premier noeud pour avoir une idée des paramètres qui l'influencent. En utilisant les équations (4.52) et (2.31) en négligeant le gradient de pression, on obtient dans le cas à viscosité constante :

$$\mu = \frac{\tau_0}{p_0} = \frac{V \alpha}{6 \bar{u}} \quad (4.69)$$

c'est-à-dire un coefficient de frottement indépendant de la viscosité du fluide. Si on considère que V est proportionnel à u , le coefficient de frottement est indépendant de la vitesse de glissement. Par contre, le frottement est directement proportionnel à l'angle formé par les deux surfaces dans la zone d'entrée. Cet angle étant généralement assez petit (quelques degrés au maximum), le coefficient de frottement restera toujours très faible.

Dans le cas lisse piézo-visqueux, la situation n'est pas la même et il est possible d'obtenir des coefficients de frottement plus importants. En utilisant les équations (4.67) et (2.31) en négligeant le gradient de pression, on obtient :

$$\mu = \frac{\tau_0}{p_0} = \frac{e^{\gamma_l p_0} V (1 - e^{-\gamma_l p_0}) \alpha}{6 p_0 \gamma_l \bar{u}} \quad (4.70)$$

Cette relation est tracée sur le figure 4.15.

4.7 Algorithme du calcul des forces externes de contact

4.7.1 Description de l'algorithme

Cette section décrit en détail l'algorithme proposé et actuellement inclus dans META-FOR pour le calcul des forces externes de contact. Cette algorithme est la "brique" de base de notre algorithme d'interaction fluide-structure. Il est appelé chaque fois que les forces de contact doivent être calculées, c'est-à-dire pour la vérification de l'équilibre du corps déformable étudié à chaque pas de temps, pour le calcul de la matrice de raideur tangente à chaque itération de Newton-Raphson, pour l'équilibre après remaillage et transfert des

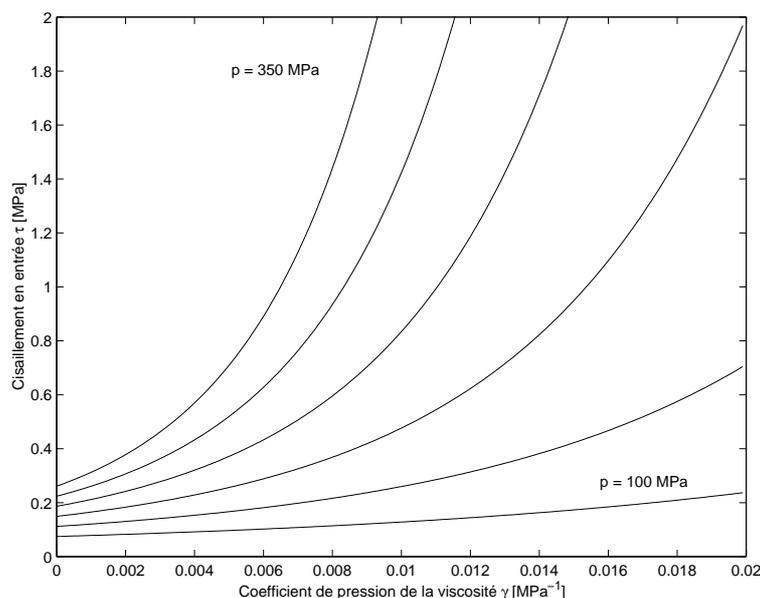


FIG. 4.15: Cisaillement au premier noeud en fonction du coefficient de pression de la viscosité pour différentes pressions en entrée.

valeurs aux points de Gauss dans le cas du formalisme ALE et enfin pour la sortie des résultats dans un fichier de post-traitement lorsque l'équilibre est atteint.

Les données à fournir au module de calcul des forces externes de contact sont les suivantes :

- Les déplacements du maillage et les déplacements de la matière par rapport à la configuration à la fin du pas de temps précédent et l'incrément temporel pour calculer les vitesses.
- L'épaisseur de film de lubrifiant pour cette même configuration.
- Les forces normales de contact calculées par la méthode de la pénalité et les indicateurs de contact de chaque noeud.
- Les données relatives aux lubrifiant (viscosité, coefficient de pression) et quelques paramètres relatifs à la méthode utilisée (coefficient d'upwind, tolérance sur le résidu de l'équation de Reynolds).

Le module retourne les forces externes et les épaisseurs de film de lubrifiant en fonction de toutes ces données. Pour l'instant, une solution est toujours fournie par le module de calcul des forces externes même si cette réponse n'est pas physique. Ceci peut arriver lorsque l'épaisseur de film est négative pour certains noeuds en contact ou lorsque l'algorithme n'a pas convergé. Dans ce dernier cas, le dernier profil calculé est retourné et un message d'avertissement est introduit dans le fichier de résultat. Il ne faut cependant pas s'inquiéter parce que de tel résultats signifient, en général, que soit le pas de temps est trop grand, soit le processus envisagé n'est pas réalisable sous les hypothèses de la lubrification hydrodynamique. Le fait que l'algorithme proposé retourne dans ce cas des valeurs non admissibles

entraîne généralement une divergence dans la résolution de l'équilibre de la structure et finalement une division du pas de temps. Si le problème venait d'un pas de temps trop grand, il se peut que le nouveau pas de temps est suffisamment petit pour permettre la convergence. Par contre, s'il s'agit d'une divergence qui peut s'expliquer physiquement, comme par exemple, un écrasement trop lent de la couche de lubrifiant entraînant une rupture du film (numériquement traduite par des valeurs de h négatives) METAFOR divise le pas de temps jusqu'à ce que celui-ci soit trop petit pour continuer. De tels cas pourront être traités lorsque des lois de frottement en régime mixte et limite seront disponibles dans METAFOR.

L'algorithme général est présenté sous forme d'organigramme sur la figure 4.16.

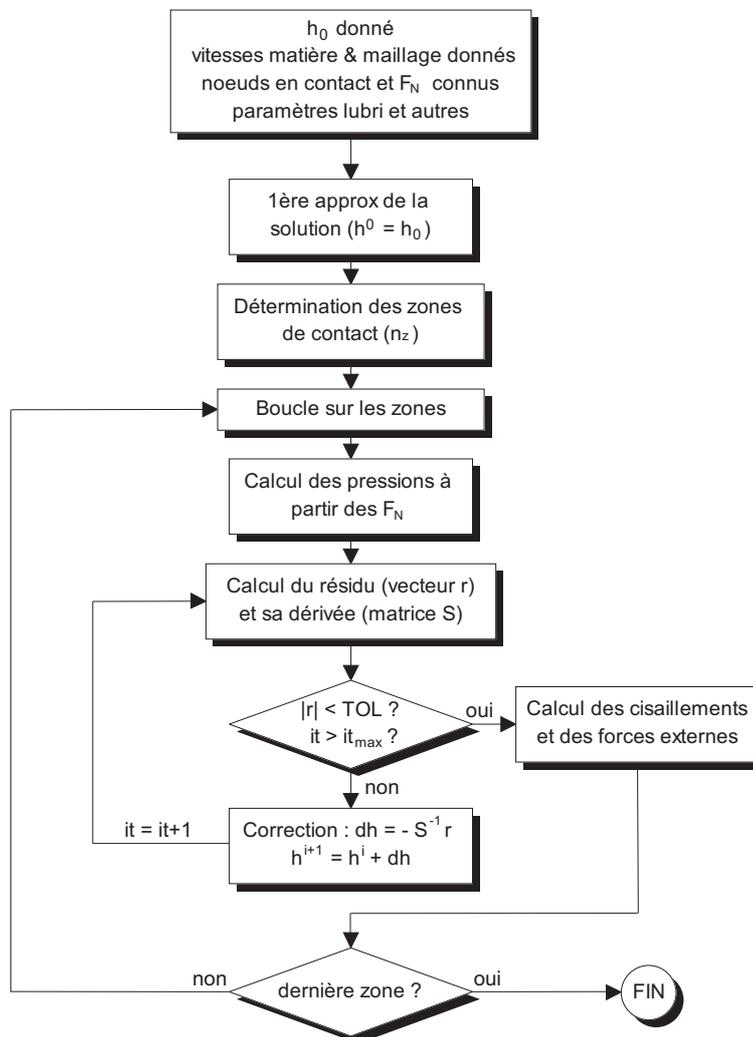


FIG. 4.16: Algorithme de calcul des forces externes.

La première chose à faire est de déduire les différentes zones de contact du problème. En effet, dans un souci de généralité, nous avons voulu pouvoir traiter plusieurs zones de

contact simultanément. Pour chaque zone, l'équation de Reynolds sera résolue si la loi de frottement choisie par l'utilisateur est une loi de frottement hydrodynamique film mince. Pour déterminer le nombre de zone, on parcourt les noeuds potentiellement en contact. Ceux-ci doivent impérativement être classés dans l'ordre, c'est-à-dire aire à droite. Pour l'instant, c'est l'utilisateur qui doit les définir dans cet ordre directement dans le jeu de données. Il sera intéressant, dans le futur, d'écrire une routine qui classera les noeuds automatiquement dans cet ordre. Cette tâche sera grandement simplifiée lorsque nous aurons accès directement à la géométrie du problème envisagé (points, courbes, domaines, contours,...), c'est-à-dire lorsque la tête de METAFOR sera totalement réécrite (projet METASTAMP, en cours). Cette routine pourra être alors appliquée également aux problèmes de contact entre deux corps déformables où le même problème se pose.

Lors du parcours des noeuds potentiellement en contact, on considère qu'une zone de lubrification débute lorsqu'un noeud de loi de frottement hydrodynamique est en contact et se termine si le noeud suivant possède la même loi de frottement mais n'est plus en contact ou lorsque le noeud suivant ne possède pas la même loi de frottement (en effet, il est possible que deux noeuds qui se suivent dans la liste appartiennent à deux surfaces différentes).

Un fois le nombre de zones calculés et les numéros des noeuds extrêmes identifiés, on effectue une boucle sur les zones et chaque zone est traitée de façon identique et séparée des autres.

Pour chaque zone, on calcule alors les pressions aux noeuds en fonction des forces normales fournies à la routine. Ce calcul s'effectue par la formule (4.15).

On entre alors dans un processus de Newton-Raphson classique décrit par les formules (4.29), (4.30) et (4.31). Celui-ci a pour but la résolution de l'équation de Reynolds, c'est-à-dire la détermination de l'épaisseur de film de lubrifiant. Une première approximation de l'inconnue est donnée par sa valeur à la fin du pas de temps précédent. Si on est au premier pas, une procédure spéciale est mise en place : le film de lubrifiant est initialisée à une valeur fixée par l'utilisateur. Dans la suite de ce travail, nous essayerons de calculer automatiquement cette valeur en fonction de la vitesse d'impact des deux surfaces.

Le calcul du résidu et des matrices éléments finis est certainement la plus grosse routine de notre algorithme. On parcourt les noeuds de contact de la zone du premier au dernier. Pour chacun de ces noeuds, on calcule les vitesses (vitesses maillage, matière, matrice, relatives, absolues et les projections selon la tangente à la matrice). On calcule également les facteurs d'écoulement et la viscosité locale. Une attention toute particulière est donnée pour les noeuds extrêmes. En ces noeuds, le signe de la vitesse moyenne relative détermine s'il s'agit d'une zone d'entrée ou d'une zone de sortie. Dans le cas d'une zone d'entrée, la routine de calcul des conditions aux limites est appelée et un indicateur indique que le système à résoudre lors d'une éventuelle correction de Newton-Raphson sera diminué d'une inconnue. Dans le cas d'une zone de sortie, le gradient de pression est calculé pour évaluer le flux de sortie. On évalue également la dérivée de ce flux par rapport à l'épaisseur de film.

Cette dérivée intervient dans la matrice de correction de Newton-Raphson.

La boucle sur les noeuds est aussi une boucle sur les éléments. Les grandeurs au premier noeud sont d'abord calculées hors de cette boucle. La boucle consiste en fait en une boucle du deuxième noeud au dernier ou, d'une manière équivalente, du premier élément au dernier. Pour chaque élément, on calcule numériquement (par quadrature de Gauss) les matrices élémentaires de fluidité ainsi que les dérivées. L'assemblage des matrices non dérivées n'est pas effectué puisqu'elle n'interviennent que dans le calcul du résidu. Les produit matriciel sont donc calculés élément par élément et assemblé dans un vecteur (le vecteur \mathbf{r} de l'organigramme). Par contre, la matrice des dérivées (matrice \mathbf{S} de l'organigramme) doit être assemblée pour permettre une éventuelle correction des épaisseurs de film de lubrifiant. Cette matrice est tridiagonale et nous ne gardons en mémoire que les trois diagonales (voir section 4.4.2).

Lorsque le résidu est calculé, on effectue un test sur sa norme. Pour l'instant, ce test n'est pas rendu adimensionnel. C'est l'utilisateur qui doit estimer une valeur adéquate pour chaque problème de la variable TOL, c'est-à-dire la tolérance du processus de Newton-Raphson. Il sera bien sûr nécessaire, dans la suite, de rendre ce test indépendant des unités utilisées et éliminer l'intervention de l'utilisateur.

Si la zone de contact se réduit à un seul noeud, celui-ci est considéré comme une zone d'entrée et l'équation de Reynolds est satisfaite automatiquement. Dans le cas général de plusieurs noeuds en contact, si l'équation de Reynolds n'est pas vérifiée à la tolérance près, on effectue une correction en inversant le système tridiagonal.

Si après un nombre imposé d'itérations (it_{max}) le résidu est toujours supérieur à la tolérance fixée, le processus est arrêté et la dernière solution est retournée.

Lorsque la solution de l'équation de Reynolds est obtenue, un routine calcule le cisaillement en chaque noeud en fonction de l'épaisseur de lubrifiant précédemment calculée. Pour ce faire, on parcourt à nouveau les noeuds de la zone de contact et on recalcule la vitesse de cisaillement. Les facteurs de correction de Patir & Cheng sont calculés à partir du rapport de l'épaisseur de film et de la rugosité composite des surfaces. Le gradient de pression est également évalué à cet endroit. A partir du cisaillement, on déduit des forces nodales en inversant la formule qui a permis de déduire les pressions en fonction des forces normales.

Les forces normales et tangentielles sont alors converties en axes globaux et le résultat est assemblé dans le vecteur des forces externes. Remarquons que les forces normales n'ont pas été assemblées lors de leur calcul par la méthode de la pénalité. Il serait possible de faire autrement, c'est-à-dire assembler les forces normales et tangentielles lors de leurs calculs respectifs.

Une fois que toutes les zones de contact ont été traitées, les épaisseurs de film et les forces externes sont retournées à la routine appelante.

Une remarque intéressante concerne l'optimisation du code au point de vue de la vi-

tesse et de la mémoire utilisée. Nous avons vu que les grandeurs nodales sont calculées à toutes les itérations de Newton-Raphson lors de la résolution de l'équation de Reynolds. Autrement dit, puisque ces grandeurs sont indépendantes de l'épaisseur de film et que c'est uniquement cette dernière variable qui est modifiée lors des itérations, on recalcule plusieurs fois la même chose. Il serait donc possible d'utiliser des vecteurs temporaires, comme on l'a fait pour la pression pour stocker les vitesses. Nous n'avons cependant pas adopté cette méthode pour limiter la mémoire nécessaire à l'exécution du programme. De plus, le calcul des vitesses n'est pas très gourmand en temps de calcul par rapport à l'évaluation des facteurs d'écoulement (qui, eux, dépendent de l'épaisseur de film et donc changent à chaque itération). Il en résulte une légère perte de performance au niveau du temps de calcul mais un gain de mémoire.

Pour optimiser le temps de calcul, nous calculons une seule fois les conditions aux limites. En effet, ce calcul peut être extrêmement lourd dans les problèmes avec prise en compte de la rugosité, surtout lorsque le programme rencontre une situation très loin de l'équilibre. (les intégrales à évaluer ne convergent pas).

4.7.2 Gestion des débordements

Résoudre l'équation de Reynolds par éléments finis est déjà un problème assez compliqué en soi vu les fortes non linéarités présentes dans l'équation. Cependant, nous verrons plus tard que la méthode telle qu'elle est décrite ci-dessus fonctionne assez bien lorsque les données fournies à l'algorithme sont cohérentes et lorsqu'une solution existe pour celles-ci.

Il est néanmoins primordial que l'algorithme inclus dans METAFOR soit robuste. Il faut donc qu'il réagisse correctement lors de divergences. Toutes les méthodes qui permettent d'obtenir un code robuste jouent le rôle de "garde-fou" lorsqu'une variable possède des valeurs inhabituelles. Dans la littérature, ces méthodes sont rarement publiées (certainement parce qu'elles montrent certaines limitations et faiblesses du code et qu'elles apparaissent comme des recettes de cuisine qui fonctionnent plus ou moins bien) si bien qu'il est souvent difficile d'obtenir exactement des résultats publiés.

Nous avons déjà parlé de la divergence du Newton-Raphson pour la résolution de l'équation de Reynolds : la dernière solution obtenue est gardée telle qu'elle, même si elle n'est pas physique. Cela conduit en pratique à une division automatique du pas de temps par le programme.

D'autres cas particuliers existent. Ainsi, la loi de Barus pour déterminer la viscosité en fonction de la pression peut provoquer un arrêt brutal du programme si on n'y prend garde. En effet, l'évaluation d'une exponentielle nécessite numériquement que l'argument soit inférieur à une valeur assez petite (de l'ordre de 1000). Vu que les forces normales à partir desquelles on calcule la pression peuvent provenir d'une configuration non équilibrée, il n'y a pas de limite supérieure en pratique pour la pression. Si bien qu'il faut, à chaque

évaluation de la viscosité, limiter l'argument de l'exponentielle à une valeur maximale.

L'évaluation des facteurs d'écoulement pose également un problème puisque des logarithmes et des exponentielles interviennent dans leur expression. On peut voir que les problèmes se posent lorsque l'épaisseur de film devient inférieure à la rugosité composite. Ceci peut arriver régulièrement pour un cas proche du régime limite. En effet, lors de chaque pas de temps, les configurations non équilibrées de chaque itérations peuvent engendrer des épaisseurs de film inférieures à cette valeur critique sans pour autant que la configuration finale équilibrée soit en régime mixte. Nous avons donc décidé de fixer la rugosité composite comme borne inférieure pour l'épaisseur de film de lubrifiant lors du calcul des facteurs de correction.

4.8 Validation numérique de l'algorithme

4.8.1 Introduction

Dans cette section, nous montrons que l'algorithme de calcul des forces externes présenté dans la section précédente a été programmé correctement. Pour ce faire, nous compilons les routines composant cet algorithme séparément des routines de METAFOR. Nous nous contentons donc de fournir à l'algorithme des données (pressions, géométrie, vitesse et propriétés physiques du lubrifiant) et nous observons ce que l'algorithme nous fournit comme résultat. Notre attention sera principalement focalisée sur la solution h de l'équation de Reynolds puisque le calcul des forces externes est déduit directement et simplement de cette solution.

Cette étape de vérification est indispensable à ce stade parce qu'il sera très difficile de juger les résultats obtenus lorsque l'algorithme sera intégré à METAFOR. En effet, dans ce cas, les erreurs peuvent venir non seulement de l'algorithme de calcul des forces mais aussi des interactions avec METAFOR.

Dans la suite, nous allons effectuer des séries de calculs avec les paramètres présentés dans le tableau 4.2.

Il s'agit du glissement d'un plan sur un autre à vitesse constante. Les deux plans sont supposés parfaitement lisses (pas de rugosité). La zone de contact est constituée de 19 noeuds régulièrement espacés de 3 mm. Le premier noeud, qui n'est pas en contact avec la matrice, a été légèrement déplacé selon la verticale pour former un angle d'entrée et permettre la formation du film de lubrifiant.

Initialement, l'épaisseur de film de lubrifiant est fixée à la valeur choisie ($1 \mu\text{m}$). On effectue ensuite une boucle temporelle qui consiste simplement à appeler l'algorithme de résolution de l'équation de Reynolds et, lorsque la solution est obtenue, une mise à jour de l'épaisseur initiale de lubrifiant est effectuée. Le pas de temps choisi est unitaire ($\Delta t = 1 \text{ s}$).

Viscosité du lubrifiant	η	=	10^{-4} MPa.s
Coefficient de pression	γ_l	=	0 MPa ⁻¹
Facteur d'upwind	α	=	variable
Tolérance de Newton-Raphson	TOL _l	=	10^{-15}
Épaisseur de film initiale	h^0	=	1 μ m
Vitesse de glissement des noeuds	u_1	=	10 mm/s
Vitesse de la matrice de contact	u_2	=	0 mm/s

TAB. 4.2: Paramètres utilisés pour le test de l'algorithme de calcul des forces externes.

4.8.2 Cas d'une convection pure

Pour les premiers tests effectués, nous utilisons une pression constante sur l'ensemble de la surface de contact. On définit une force de 10 Newtons en chaque noeud, ce qui correspond à une pression de 3.33 N/mm. Grâce à cette hypothèse particulière sur la pression, on constate que l'équation de Reynolds devient une simple équation de convection pure :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \bar{u}_r \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (4.71)$$

et l'équation matricielle correspondante ne comporte plus que les matrices \mathbf{C}_1 et \mathbf{S}_u :

$$\mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{h}} + \mathbf{q} = \mathbf{S}_u \bar{u}_r \quad (4.72)$$

Dans ce cas l'équation est simplifiée à l'extrême et la solution est connue d'avance : si l'épaisseur de film imposée en entrée (au noeud numéro 2) ne dépendait pas du temps, on obtiendrait une translation uniforme d'un échelon à la vitesse moyenne des deux surfaces.

L'équation de Reynolds est résolue par la méthode présentée précédemment. On utilise des fonctions de forme SUPG uniquement pour évaluer le facteur $h(x)$ de la matrice \mathbf{S}_u . Toutes les autres fonctions de forme ont la forme traditionnelle. Nous verrons plus loin la raison de ce choix.

Les profils d'épaisseurs de lubrifiant obtenus au cours du temps ($h(x, t)$) sont tracés sur la figure 4.17. On remarque qu'au premier pas de temps, la valeur de h au premier noeud, calculée par l'analyse de la zone d'entrée, est déjà très proche de sa valeur stabilisée. La solution analytique est donc très proche de la translation d'un échelon. Cependant, nous voyons que la solution obtenue contient beaucoup de diffusion.

Pour s'en rendre compte, les figures 4.19 et 4.20 montrent les solutions obtenues après respectivement 5 et 10 pas de temps pour différentes valeurs du coefficient d'upwind α ($\alpha = 0$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$). Ces solutions sont comparées, dans les deux cas, à la solution analytique. On constate que l'utilisation des fonctions de forme SUPG introduit de la

diffusion supplémentaire. Celle-ci est d'autant plus grande que le coefficient d'upwind est grand.

La grande diffusion obtenue dans la solution sans décentrage ($\alpha = 0$) est uniquement due au schéma d'intégration temporel utilisé. En effet, il est bien connu (on peut le montrer par une analyse de Von-Neumann dans ce cas simplifié) que le schéma d'Euler totalement implicite est très diffusif lorsqu'il s'agit de traiter une équation de convection pure. Cette grande diffusion a néanmoins l'avantage d'augmenter la stabilité du schéma (schéma inconditionnellement stable dans ce cas simplifié). Ce qui nous permet de ne pas nous tracasser de la taille du pas de temps utilisé.

Dans la suite de ce travail, il sera intéressant de mettre au point des schémas plus précis (schémas du deuxième ordre) pour obtenir une meilleure précision sur la solution obtenue.

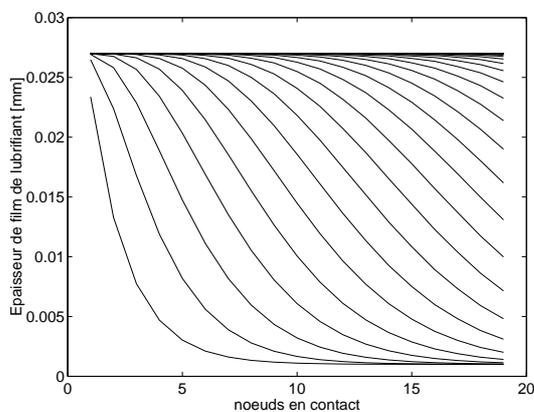


FIG. 4.17: Film de lubrifiant au cours du temps.

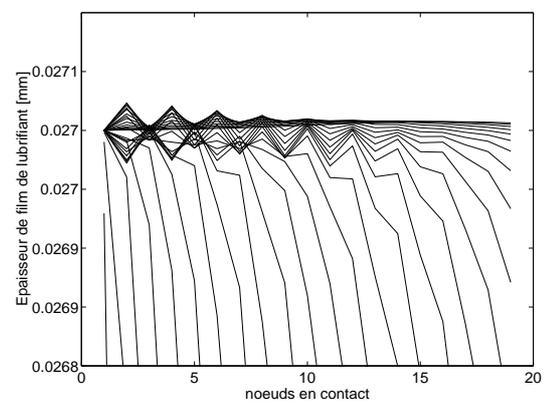


FIG. 4.18: Zoom sur la solution stationnaire ($\alpha = 0$).

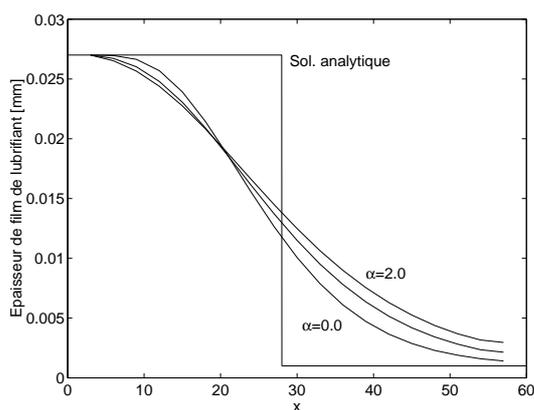


FIG. 4.19: Solution après 5 pas de temps.

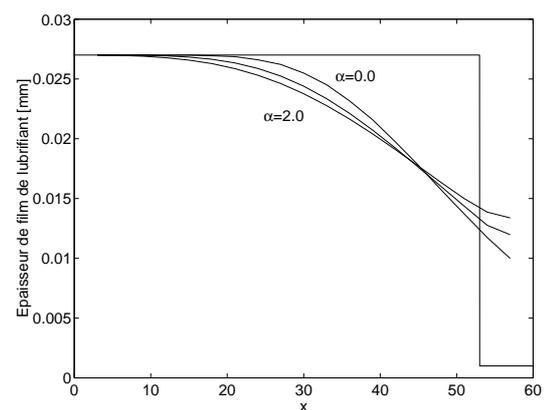


FIG. 4.20: Solution après 10 pas de temps.

Si on effectue un zoom sur la solution stabilisée (figure 4.18), on constate que l'on

obtient bien la solution analytique du problème stationnaire, c'est-à-dire une épaisseur de film de lubrifiant constante partout dans la zone de contact.

On remarque cependant (figure 4.18) que la solution transitoire a tendance à osciller. C'est pour éliminer ces oscillations transitoires que nous avons introduit les fonctions de forme SUPG. Les figures 4.21 et 4.22 représentent le même zoom sur les solutions obtenues avec $\alpha = 0.5$ et $\alpha = 2$. On constate que, plus le coefficient d'upwind est grand, moins les oscillations sont perceptibles. En particulier, la solution n'oscille plus lorsque $\alpha = 2$.

Il faudra donc choisir un coefficient d'upwind non nul pour éviter les oscillations mais pas trop grand quand même pour limiter la diffusion du schéma utilisé, qui en contient déjà beaucoup à l'origine.

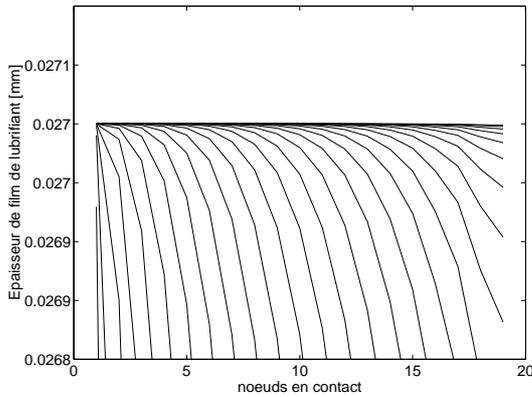


FIG. 4.21: Zoom sur la solution stationnaire ($\alpha = 0.5$).

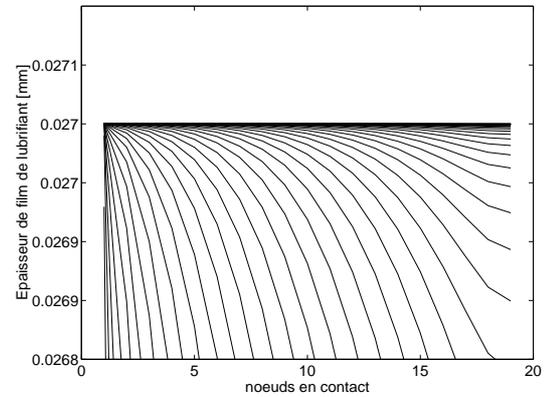


FIG. 4.22: Zoom sur la solution stationnaire ($\alpha = 2.0$).

En analysant plus précisément les figures 4.21 et 4.22, on remarque que les différentes solutions au cours du temps présentent une discontinuité de dérivée première (brisure au dernier noeud). Cette brisure est d'autant plus importante que le coefficient d'upwind est élevé. La cause est assez facile à comprendre : la matrice \mathbf{S}_u est calculée avec des fonctions de forme SUPG mais le terme associé à cette matrice dans l'expression du vecteur \mathbf{q} (qui provient de l'intégration par parties de la forme faible) est évalué avec des fonctions de forme traditionnelles. Il faut donc, pour avoir une formulation cohérente, calculer le vecteur \mathbf{q} de la même manière que la matrice \mathbf{S}_u .

Pour l'évaluation de la matrice \mathbf{S}_u^e pour le dernier élément (délimité par les noeuds $n-1$ et n), on calcule :

$$h(x) = N_{n-1}^{SUPG}(x) h_{n-1} + N_n^{SUPG}(x) h_n \quad (4.73)$$

où h_{n-1} et h_n sont les valeurs de l'épaisseur de film de lubrifiant aux noeuds du dernier élément. Vu que les 2 fonctions de forme SUPG ne sont non nulles au dernier noeud, il en résulte que la valeur de $h(x)$ introduite dans la matrice et évaluée au dernier noeud n'est pas égale à h_n . Elle vaut précisément $h_{n-1} \alpha/2 + h_n(1 - \alpha/2)$. C'est donc cette dernière valeur qu'il faut utiliser pour calculer le vecteur \mathbf{q} .

Remarquons enfin que la valeur de \mathbf{q} dépend alors des valeurs de h aux noeuds $n - 1$ et n et non pas seulement n . Lors de l'évaluation de la dérivée du vecteur \mathbf{q} par rapport aux valeur nodales de h pour former la matrice d'itération de Newton-Raphson, il faudra donc calculer deux dérivées au lieu d'une seule.

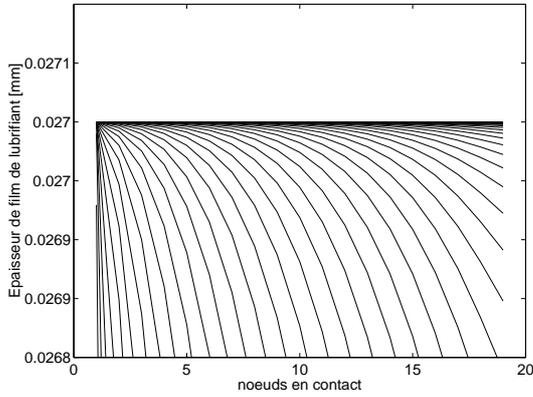


FIG. 4.23: Vecteur \mathbf{q} corrigé et $\alpha = 2.0$.

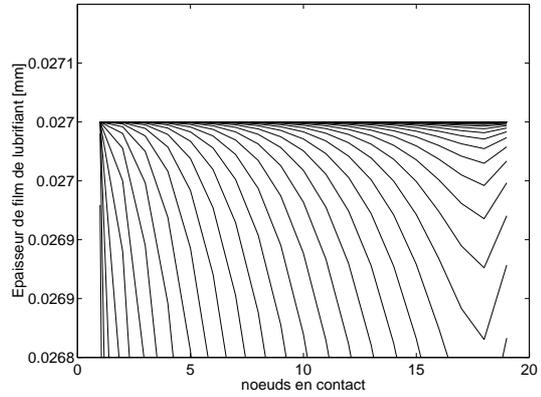


FIG. 4.24: Utilisation de fonctions de forme SUPG dans la matrice \mathbf{C}_1 .

La figure 4.23 montre les résultats obtenus pour un coefficient d'upwind égal à 2 (décentrage complet) et une évaluation consistante du vecteur \mathbf{q} . Les courbes sont maintenant parfaitement lisses, même dans le cas d'un grand coefficient α .

La figure 4.24 montre la solution obtenue en utilisant les fonctions de forme SUPG pour l'évaluation de la matrice \mathbf{C}_1 . On constate, dans ce cas, qu'il existe une discontinuité au niveau du dernier noeud. C'est pour cette raison que nous utiliserons dans la suite uniquement un décentrage dans la matrice \mathbf{S}_u .

4.8.3 Pression d'interface parabolique

Pour comprendre et analyser l'influence des gradients de pression, nous avons fourni à l'algorithme une pression parabolique. Le champ de pression utilisé est montré sur la figure 4.25.

Dans ce cas, la solution n'est pas triviale. L'équation de Reynolds peut être écrite sous la forme (dans le cas d'une viscosité et d'une vitesse moyenne constante :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}}{\bar{u} - \frac{h^2}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial x}} \quad (4.74)$$

où on a supposé que le dénominateur ne s'annule pas sur le domaine étudié.

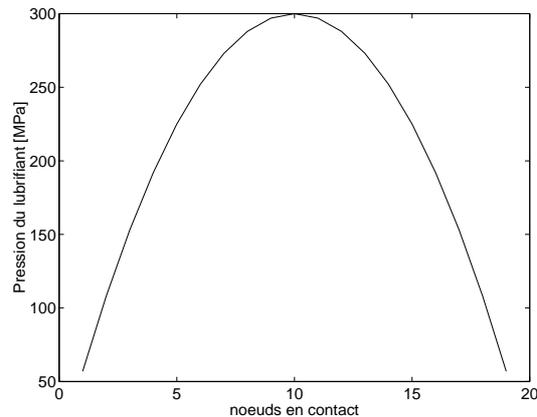


FIG. 4.25: Pression d'interface parabolique.

La solution obtenue par notre algorithme est représentée sur les figures 4.27 et 4.28. On constate que la solution transitoire est très similaire à celle obtenue dans le cas précédent : il s'agit d'un écoulement où la convection est le phénomène prépondérant. Cependant, nous voyons sur la figure 4.28 que la solution stationnaire obtenue oscille autour d'une courbe qui, à première vue, à l'air d'être rectiligne. Les oscillations sont, bien entendu, due à l'absence de décentrage dans la discrétisation utilisée pour effectuer le calcul (coefficient d'upwind nul). Cependant, la solution ne peut pas être une droite puisque l'équation (4.74) montre que la pente de la solution n'est pas constante (numérateur constant mais dénominateur non constant à cause du gradient de pression). Pour être certains que nous obtenons la solution exacte de l'équation, nous avons résolu l'équation (4.74) par un schéma d'intégration de Runge Kutta explicite du quatrième ordre. La solution obtenue est représentée sur la figure 4.26 et nous voyons qu'elle est apparemment droite. Autrement dit, le gradient de pression joue un rôle négligeable vis à vis du terme de vitesse d'entraînement.

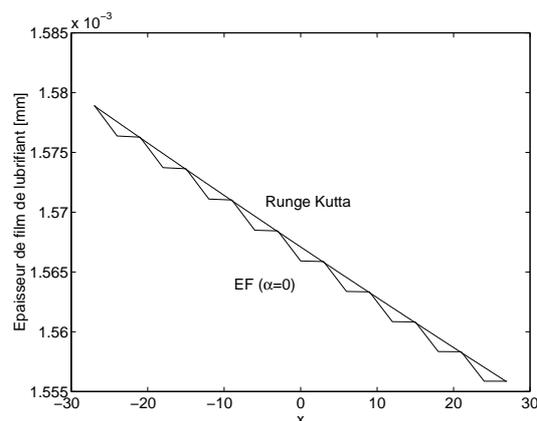


FIG. 4.26: Solution stationnaire obtenue par Runge Kutta et par éléments finis.

Pour éliminer les oscillations dans la solution stationnaire, nous utilisons des fonctions

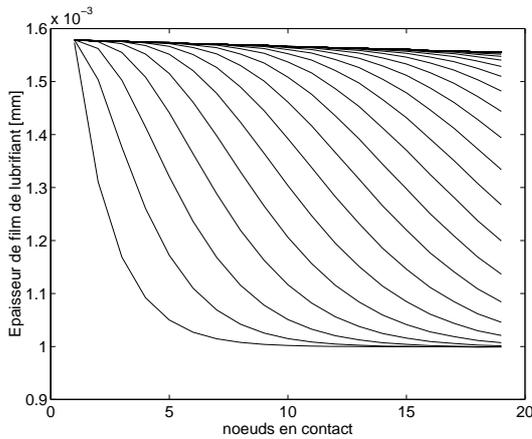


FIG. 4.27: Epaisseurs de film au cours du temps ($\alpha = 0.0$).

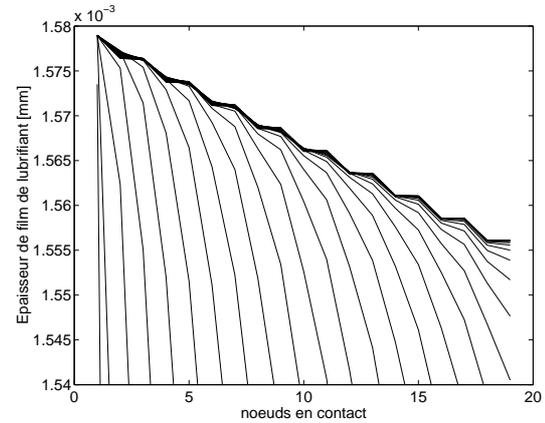


FIG. 4.28: Zoom sur la solution stationnaire ($\alpha = 0.0$).

de forme SUPG. La solution obtenue pour un coefficient d'upwind $\alpha = 0.5$ est représentée sur la figure 4.29. Nous voyons que les oscillations ont complètement disparu. Cependant, la solution n'est pas tout à fait exacte. En effet, il existe une brisure au niveau du dernier noeud. Bien que nous avons déjà vu un tel phénomène dans le cas d'une pression constante dans la section précédente, la cause est totalement différente (puisque nous avons utilisé la correction du flux précédemment expliquée). On peut aussi remarquer que cette brisure apparaît également dans le cas $\alpha = 0$ sur la figure 4.28, bien que ce phénomène soit camouflé par les oscillations de la solution.

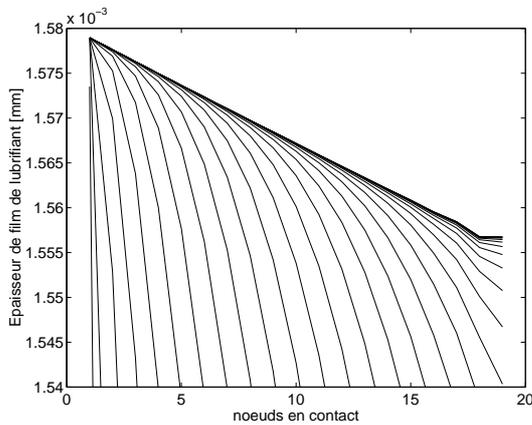


FIG. 4.29: Zoom sur la solution stationnaire ($\alpha = 0.5$).

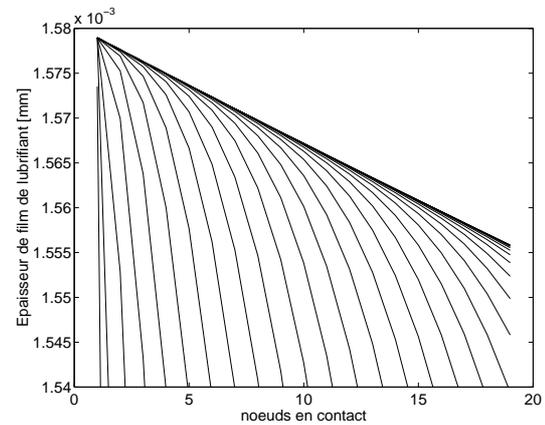


FIG. 4.30: Dérivée de la pression corrigée ($\alpha = 0.5$).

Pour comprendre exactement ce qu'il se passe, il faut examiner de plus près les équations que l'on résout sous la forme discrétisée (par éléments finis). Si on doit discrétiser la dérivée seconde de la pression, on effectue une multiplication par une variation admissible de l'inconnue et une intégration sur le domaine étudié. Le résultat est alors intégré par parties.

noeud pour évaluer la dérivée de la pression donne un schéma du second ordre. En effet, si on donne le numéro 0 au noeud extérieur et que ce noeud est distant de L_e du premier noeud du domaine, on a :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \rightarrow \frac{p_2 - p_1}{L_e} - \frac{p_2 - p_0}{2L_e} = \frac{p_2 - 2p_1 + p_0}{2L_e} \quad (4.80)$$

Cette dernière expression correspond bien à un schéma du second ordre si on se rappelle que celui-ci a été intégré sur l'élément (on a L_e au lieu de L_e^2 au dénominateur) et que la première et la dernière équation d'un système élément fini est divisée par 2 (d'où la présence du 2 au dénominateur).

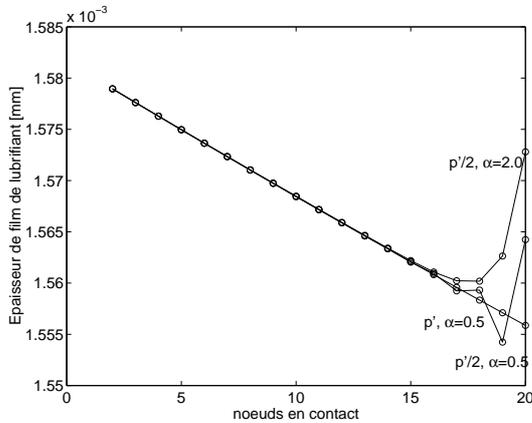


FIG. 4.31: Effet d'une sous-estimation de la dérivée de la pression ($p' \rightarrow p'/2$).

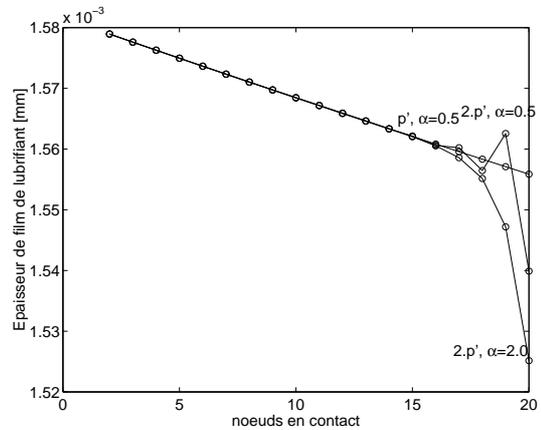


FIG. 4.32: Effet d'une sur-estimation de la dérivée de la pression ($p' \rightarrow 2p'$).

Dans le cadre de METAFOR, nous ne connaissons la pression qu'aux noeuds de contact. Il serait peut être possible d'utiliser la formulation (4.80) et d'utiliser une pression nulle en dehors de la zone de contact. Cependant, nous avons préféré, pour l'instant l'utilisation d'une dérivée décentrée en sachant bien que cela équivaut, implicitement, à imposer une dérivée seconde nulle pour la pression en sortie de zone de contact (le problème ne se pose pas en entrée puisque l'équation correspondante n'est pas résolue, h étant fixé).

Les figures 4.31 et 4.32 montrent les solutions stationnaires obtenues si le gradient de pression en sortie est sur-évalué (multiplié par 2) ou sous-évalué (divisé par 2). Pour les deux cas, deux valeurs du paramètre de décentrage ont été utilisées ($\alpha = 0.5$ et $\alpha = 2.0$). Nous voyons que, si le décentrage n'est pas suffisant, on obtient des oscillations dans les solutions. Ces oscillations sont cependant limitées dans la région de sortie du lubrifiant.

4.8.4 Pression d'interface cubique

Ce dernier test va permettre de tester notre algorithme dans le cas où la dérivée de la pression varie le long de la zone de contact. Nous avons choisi un champ de pression cubique. Celui-ci est représenté sur la figure 4.33. Dans ce cas également, la solution n'est pas triviale. Cependant, si la dérivée première de la pression est négligeable vis-à-vis de la vitesse d'entraînement comme dans le cas précédent, on s'attend à obtenir une solution parabolique (d'après l'équation (4.74)).

La figure 4.34 représente la solution obtenue pour différents paramètres de décentrage. Remarquons tout d'abord qu'il n'y a pas d'oscillations dans la solution sans décentrage puisque nous utilisons une dérivée correcte de la pression en sortie. La solution obtenue pour $\alpha = 2$ est décalée vers l'amont par rapport à la solution sans décentrage, si bien que le maximum de la solution se situe exactement un noeud avant celui du cas sans décentrage. C'est tout à fait normal puisque, dans la formulation totalement décentrée, toutes les dérivées spatiales sont décentrées vers l'amont. Ce décalage est d'autant plus marqué que les éléments finis sont grands.

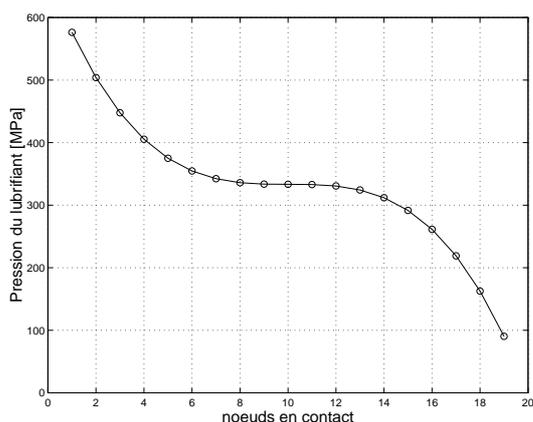


FIG. 4.33: Pression cubique.

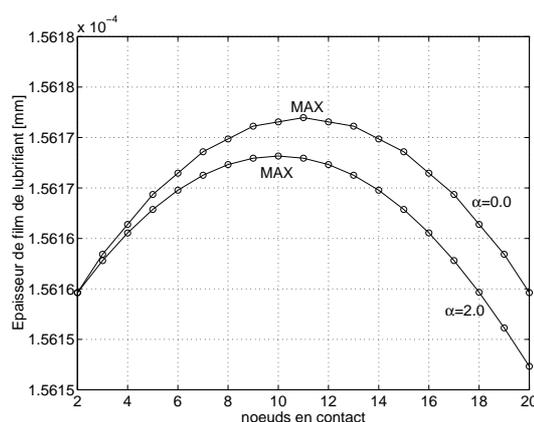


FIG. 4.34: Solutions obtenues pour une pression cubique.

Comme pour le cas précédent, nous avons vérifié l'exactitude de la solution obtenue en procédant à une intégration de Runge Kutta explicite du quatrième ordre. La solution obtenue est montrée sur la figure 4.35 et comparée à la solution obtenue par éléments finis (ici, nous avons utilisé une dérivée décentrée pour évaluer le gradient de pression en sortie, ce qui explique les oscillations).

Il est assez intéressant de voir que le phénomène de décalage de la solution vers l'amont est aussi présent dans l'algorithme de Runge Kutta explicite du quatrième ordre. En effet, cet algorithme repose sur le fait que la direction de l'écoulement est connue et toutes les dérivées sont discrétisées de manière explicite (donc décentrées en amont). La figure 4.36 montre les solutions obtenues par l'algorithme de Runge Kutta pour différentes valeurs du

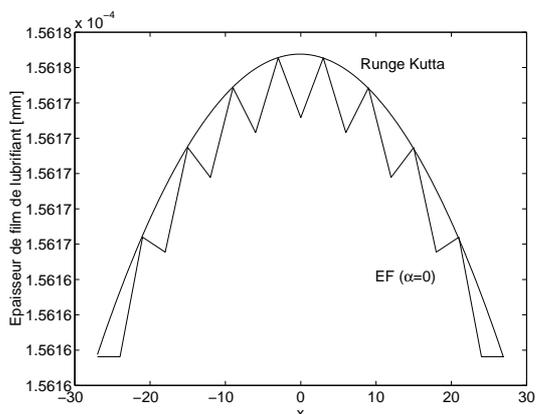


FIG. 4.35: Solution stationnaire obtenue par Runge Kutta et par éléments finis.

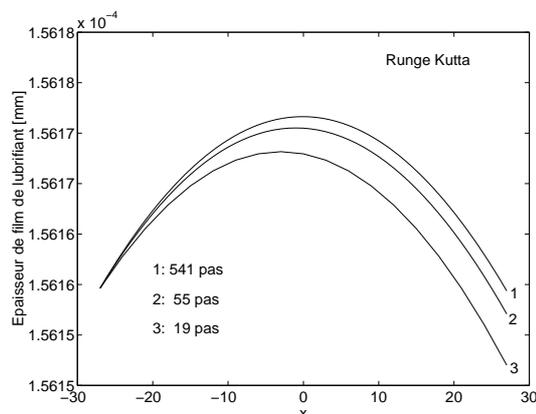


FIG. 4.36: Solutions obtenues par Runge Kutta pour différents pas spatiaux.

pas spatial. Plus le pas est grand, plus le décalage vers l'amont est important. Remarquons également que la dénomination “schéma du quatrième ordre” n’implique pas une solution précise. En effet, pour un nombre de pas spatiaux équivalent (19 pas), la solution EF avec un peu d’upwind ($\alpha = 0.5$), est plus proche de la solution exacte, bien qu’étant du premier ordre, à cause de l’upwind).

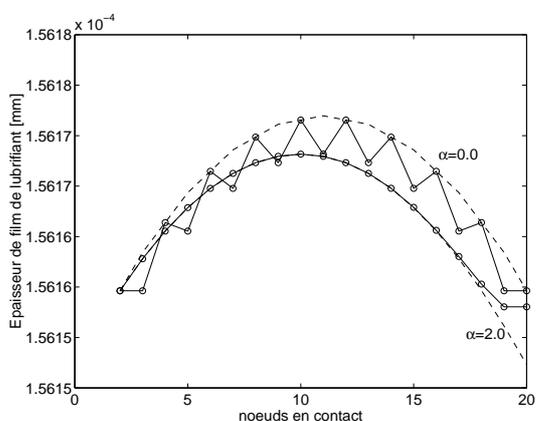


FIG. 4.37: Solution obtenue si la dérivée de la pression est mal calculée en sortie.

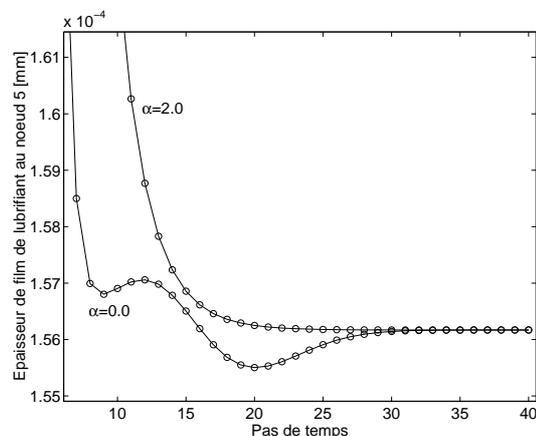


FIG. 4.38: Evolution de l’épaisseur de film au noeud 5 pour deux valeurs du coefficient d’upwind.

La figure 4.37 montre les solutions obtenues pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 2$ si la dérivée de la pression est calculée par un schéma décentré. Enfin, la figure 4.38 montre l’évolution temporelle de l’épaisseur de film de lubrifiant en un noeud lors de la résolution par éléments finis pour ces deux mêmes paramètres de décentrage. On constate que la solution sans

décentrage oscille légèrement avant d'atteindre sa valeur stationnaire, contrairement au cas où un décentrage est utilisé.

4.9 Couplage fluide-structure

Le couplage entre le lubrifiant et le corps déformable en contact peut s'envisager de deux manières différentes :

La première méthode est celle présentée notamment par Liu [15]. Elle consiste à découpler les deux problèmes (équilibre du corps déformable et écoulement du fluide). Pour chaque pas de temps, l'équilibre du solide est résolu comme s'il n'y avait pas de frottement. Grâce à cette configuration équilibrée, on peut calculer une épaisseur de film de lubrifiant dans les zones de contact et des forces de frottement. On recommence alors le pas de temps avec ces nouvelles forces de frottement et ainsi de suite jusqu'à ce qu'un certain critère soit satisfait (convergence du profil des épaisseurs de lubrifiant, convergence des forces de frottement, ...). Lorsque c'est le cas, on passe au pas de temps suivant avec, comme estimations initiales des forces de frottement, les forces trouvées à la fin du pas de temps précédent.

Il est possible également, comme le fait Martinet [30], de calculer un coefficient de frottement local en chaque noeud après chaque pas de temps et de recommencer le pas de temps avec ces nouveaux coefficients de frottement. Dans ce dernier cas, le frottement est calculé par une méthode classique pouvant gérer une loi de Coulomb (pénalité, méthode de Lemke, multiplicateurs de Lagrange).

Cette dernière méthode est attrayante du point de vue de la programmation. En effet, le code de calcul reste le même et il suffit d'inclure l'algorithme de calcul des forces externes dans la gestion de l'équilibre et faire un test pour voir s'il faut recommencer le pas de temps ou non.

Cependant, cette méthode entraîne inévitablement un nombre d'itérations important vu que chaque pas de temps doit être calculé plusieurs fois. Cette méthode étant équivalente à un algorithme de point fixe, nous ne pouvons pas nous attendre à une convergence quadratique vers la solution. De plus, il faut mettre au point une détection et une gestion des divergences. En effet, que faut-il faire si la solution n'est pas atteinte après un grand nombre d'itérations ? Diviser le pas de temps serait peut-être une bonne idée.

Vu ces inconvénients, nous nous sommes tournés vers une troisième méthode de résolution qui consiste à garder le couplage entre les équations du fluide et du solide lors de la résolution. Les autres méthodes ne sont pas abandonnées définitivement. Nous projetons de l'implémenter dans METAFOR dans la suite de ce travail pour pouvoir comparer les résultats et découvrir peut-être des avantages qui nous auraient échappé dans notre première analyse.

La troisième méthode de résolution permet de résoudre les équations gouvernant le mouvement du solide et l'équation de Reynolds simultanément. Autrement dit, à la fin d'un pas de temps donné qui a convergé, toutes les équations sont résolues à la tolérance fixée par l'utilisateur.

Pour ce faire, nous gardons le même schéma de résolution que celui de METAFOR sans la prise en compte du lubrifiant et nous faisons appel à l'algorithme de calcul des forces externes chaque fois que c'est nécessaire. Vu que les épaisseurs de film de lubrifiant n'influencent que les forces de frottement aux noeuds en contact, et que ces épaisseurs sont calculables en connaissant uniquement les positions et les déplacements des noeuds en contact, il n'est pas nécessaire d'inclure les épaisseurs de lubrifiant directement dans le système comme de nouvelles inconnues du problème. Ces épaisseurs sont calculées a posteriori. Néanmoins, toute perturbation d'un noeud en contact va engendrer une modification de l'écoulement de lubrifiant. Ceci va se répercuter sur les forces de frottement. Lors des itérations de Newton-Raphson pour l'équilibre du solide, l'influence et le couplage du lubrifiant se fera donc par l'intermédiaire de la matrice de raideur tangente du système.

Un organigramme simplifié de l'algorithme de résolution est présenté à la figure 4.39.

Sur cet organigramme, on constate qu'un ou plusieurs calculs des forces externes sont nécessaires lors de la vérification de l'équilibre et lors du calcul de la matrice de raideur tangente du système fluide-structure.

Pour la vérification de l'équilibre, l'algorithme utilisé est exactement celui décrit dans la section précédente. Par contre, lors du calcul de la matrice de raideur, quelques modifications doivent être apportées. En pratique, un indicateur permet de distinguer ces deux situations, ce qui permet d'utiliser les mêmes routines dans les deux cas.

Le calcul de la matrice de raideur tangente relative aux éléments de lubrification se fait par perturbations numériques (il est en effet difficile d'imaginer une dérivation analytique vu les formules mises en jeu et ce, même dans le cas de surfaces lisses).

L'algorithme de calcul des forces externes est appelé quatre fois par noeud de contact. Ces quatre appels correspondent à des perturbations positives et négatives selon les axes x et y . Lors de chacun de ces appels, la force normale au noeud perturbé est recalculée et la résolution de l'équation de Reynolds est effectuée comme décrit précédemment. Les forces de frottement sont ensuite calculées et ajoutées ou soustraites au vecteur des forces externes perturbées, suivant qu'il s'agit d'une perturbation positive ou négative.

Remarquons qu'il est nécessaire de calculer un vecteur de forces perturbées également pour les premiers noeuds en dehors de la zone de contact. En effet, la position de ceux-ci influence grandement la valeur de la condition aux limites dans le cas d'une zone d'entrée (par l'intermédiaire de l'angle d'entrée α).

Après chaque ensemble de perturbations positives et négatives, le vecteur contenant la différence des forces de contact est divisé par deux fois la perturbation et directement as-

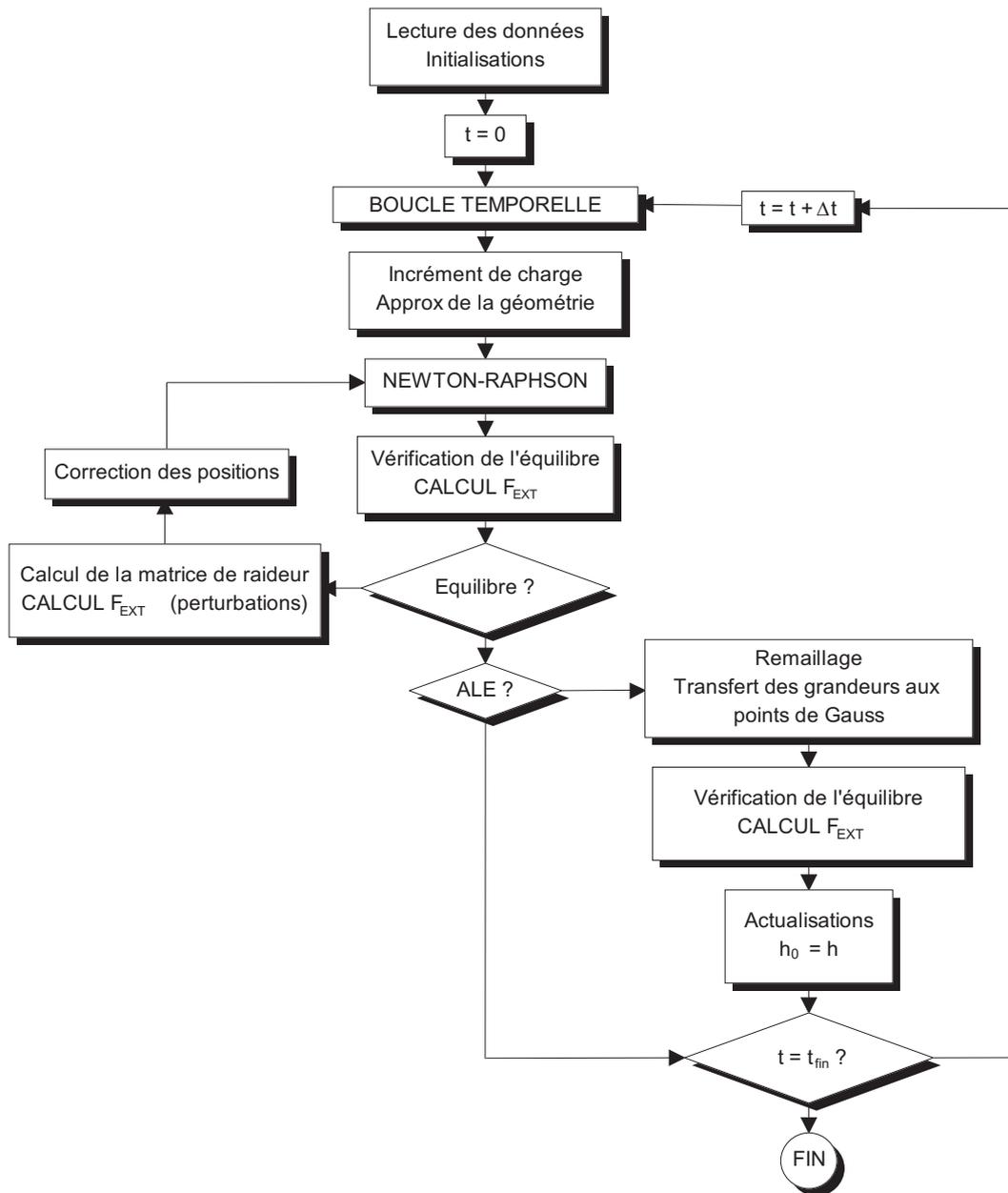


FIG. 4.39: Algorithme de couplage fluide-structure.

semblé dans la matrice de raideur. Des routines spéciales d'assemblage et de pré-assemblage (pour le pré-traitement et l'allocation de mémoire) d'un vecteur dans la matrice de raideur ont dû être mises au point dans ce but. Il serait bien sûr ridicule de vouloir stocker la matrice de raideur complète des éléments de lubrification vu sa taille.

La matrice de raideur peut être assemblée au format SKYLINE [36, 2] dans le cas d'une résolution par solveur direct (décomposition LU et substitution avant-arrière) et au format CSR (Compressed Sparse Row – format morse) dans le cas d'une résolution par solveur itératif (GMRES, BiCGSTAB, ...).

Pour résoudre le système d'équations formé par la matrice de raideur tangente et le résidu d'équilibre à chaque itération, nous verrons, dans les exemples numériques (section 5.2.11), que le solveur itératif [2, 4] est bien adapté et peut donner de meilleurs résultats que le traditionnel solveur direct aussi bien au point de vue de la mémoire utilisée que du temps de calcul. C'est assez facile à comprendre quand on se rappelle que le solveur itératif permet de ne stocker que les termes non nuls dans la matrice de raideur, contrairement au format SKYLINE, utilisé pour le solveur direct. Le nombre de zéros stockés par cette dernière méthode sous la "ligne de ciel" est d'autant plus grand que la largeur de bande est grande. Pour le problème de lubrification qui nous concerne, on peut facilement se rendre compte que la largeur de bande est bien plus grande que dans le cas d'une loi de frottement classique de type Coulomb. La figure 4.40 montre les noeuds couplés dans le cas de l'algorithme de lubrification présenté et dans le cas d'une loi de Coulomb. Si on veut renuméroter les noeuds de manière optimale pour réduire dans les deux cas la largeur de bande, on constate qu'il faut numéroter les noeuds verticalement pour la loi de Coulomb et horizontalement pour le contact lubrifié. En conséquence, la différence entre deux numéros de noeuds couplés, image de la largeur de bande, sera toujours plus élevée dans le cas des éléments finis de lubrification.

Deux remarques doivent cependant être formulées à ce stade :

- Le couplage entre les noeuds de contact existe uniquement s'ils sont en contact. On aura donc une grande largeur de bande pour de grandes zones de contact et, inversement, s'il n'y a pas de noeud en contact, le couplage est identique à celui observé pour une loi de Coulomb. Ceci est vrai en théorie mais pas en pratique. En effet, dans METAFOR, la largeur de bande est calculée une fois pour toute au début du calcul mis à part pour le contact entre deux corps déformables où elle est mise à jour lors d'un nouveau contact. Si on n'effectue pas une mise à jour semblable à celle effectuée dans ce dernier cas, la largeur de bande considérée pendant tout le calcul est la largeur de bande maximale (calculée comme si tous les noeuds étaient en contact). Il faudra donc dans la suite de ce travail effectuer une mise à jour de la ligne de ciel si nécessaire. Cela se répercutera inévitablement sur le temps de calcul et la mémoire utilisée.
- Aucune étude n'a encore été effectuée sur l'importance relative des termes de la matrice de raideur relative au contact. Il est probable que l'influence mutuelle de noeuds assez éloignés soit faible par rapport à celle entre des noeuds voisins. Pour l'instant,

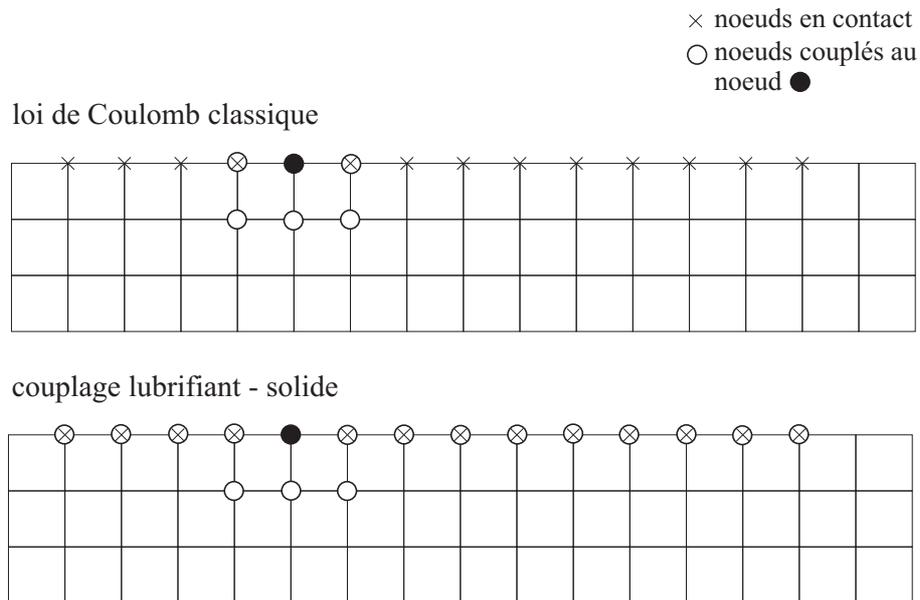


FIG. 4.40: Noeuds couplés (contact lubrifiés ou loi de Coulomb).

nous n'avons négligé aucun terme dans le calcul de cette matrice. Néanmoins, une telle étude devra impérativement être menée puisqu'elle pourrait réduire considérablement la largeur de bande, et faciliter de la sorte la résolution du système.

Lorsque ces deux remarques auront été prises en considération, nous pourrions voir si le solveur itératif est vraiment intéressant pour ce type de problème. Grâce au solveur itératif, nous avons pu pour l'instant laisser en suspens ce problème de grande largeur de bande et obtenir des résultats de manière simple et rapide.

Avec notre algorithme, nous aimerions pouvoir traiter aussi bien des problèmes lagrangiens (où le maillage est fixé à la matière) et des problèmes eulériens-lagrangiens (problème ALE où le maillage se déplace indépendamment de la matière). Pour rappel, un problème ALE est résolu par la méthode de l'operator splitting dans METAFOR : chaque pas de temps est divisé en deux phases distinctes. La première est purement lagrangienne. Lorsque l'équilibre est atteint, on effectue une phase de remaillage et de convection des grandeurs aux points de Gauss (deuxième phase).

Pour un problème lagrangien, nous sommes certains que l'équilibre du solide et l'équation de Reynolds sont résolus avec une grande précision. Il n'en n'est pas de même pour un calcul eulérien-lagrangien. En effet, nous savons qu'après la phase de remaillage du solide, une étape de convection est nécessaire pour transférer les informations stockées aux points de Gauss de chaque élément (contraintes et variables internes du matériau principalement). Cette étape de convection (par volumes finis ou SUPG) faisait l'objet d'une grande partie de notre rapport F.R.I.A. de première année [3]. Lorsque les grandeurs sont transférées de l'ancien maillage vers le nouveau, l'équilibre est généralement légèrement détérioré. Pour

vérifier cet équilibre, il est nécessaire de recalculer les forces de contact agissant sur la matière et agissant sur les nouveaux éléments de lubrification (noeuds du nouveau maillage en contact). De plus, le film de lubrifiant après remaillage doit être recalculé puisqu'il servira de point de départ au calcul des épaisseurs de film au pas de temps suivant.

Pour ce faire, deux méthodes sont envisageables :

- On pourrait transférer le profil de lubrifiant obtenu à la fin du pas lagrangien de l'ancien maillage vers le nouveau à l'aide d'une méthode de convection similaire à celles utilisées pour le transfert des données. Une fois le film de lubrifiant redéfini sur les noeuds en contact du nouveau maillage, on peut alors recalculer le cisaillement fluide en chaque noeud. Cette méthode paraît cependant peu précise. En effet, on a le même problème que celui rencontré pour le solide et décrit précédemment : l'équation d'équilibre (Reynolds pour le fluide) n'est plus parfaitement satisfaite après convection de la solution. A la fin du pas de temps, on a aucun contrôle sur la précision de la solution. Nous abandonnons donc définitivement cette méthode.
- La légère dégradation de la solution pour le solide après remaillage est inévitable. Il n'en n'est pas de même pour le lubrifiant. En effet, nous avons choisi de recalculer l'épaisseur du film de lubrifiant après remaillage sans tenir compte du film obtenu à la fin de la phase lagrangienne. Aucune convection est nécessaire et l'équation de Reynolds est résolue à la précision demandée par l'utilisateur. Cette méthode ne peut donner des bons résultats que dans le cas où la géométrie (principalement les lignes brisées définissant les zones d'entrée) n'a pas été trop altérée par l'opération de remaillage. Un seul problème existe : que faire si l'algorithme de calcul des forces externes de contact ne converge pas sur le nouveau maillage. Pour l'instant, aucune mesure n'est prise pour vérifier cette convergence et la solution est supposée correcte. Il faudra certainement, dans l'avenir, mettre en place un système de division de pas de temps pour gérer correctement ce problème.

4.10 Conclusions et perspectives

Cette section termine le chapitre consacré à la description théorique de l'algorithme de résolution de l'équation de Reynolds par éléments finis dans le cadre de processus de formage des matériaux. Il reste bien entendu beaucoup de choses à inclure dans le modèle pour pouvoir simuler efficacement et correctement un processus industriel complet. Nous résumons ici les perspectives de travail que nous avons évoquées dans ce chapitre.

- Une étude détaillée du schéma d'intégration temporel utilisé pour le lubrifiant pourrait montrer les faiblesses de la méthode utilisée jusqu'à présent. L'utilisation d'autres schémas tels que le point milieu généralisé permettrait une mise à jour soit explicite, soit implicite (du premier ou second ordre). Dans le cas d'un schéma explicite (qui nécessite des pas de temps assez petits pour être stable), on pourrait effectuer plusieurs pas de temps pour la résolution de l'équation de Reynolds pendant chaque pas

de temps utilisé pour l'équilibre du solide en contact.

- Une analyse et meilleure gestion de la matrice de raideur des éléments finis de lubrification pour optimiser la mémoire et le temps de calcul.
- Une étude détaillée des conditions initiales à imposer lors d'une entrée en contact. En particulier, il faudrait utiliser une formule faisant intervenir la vitesse d'impact des deux surfaces.
- L'extension du modèle au cas axisymétrique pour pouvoir traiter des problèmes d'emboutissages sphériques. Les équations à résoudre devront être modifiées et les conditions limites adaptées en conséquence.
- Essayer d'autres méthodes de calcul de l'épaisseur de lubrifiant dans la zone d'entrée. Il serait intéressant d'utiliser d'autres approximations que l'approximation linéaire pour la géométrie d'entrée.
- La mise au point d'une méthode découplée pour la résolution des équations régissant le mouvement du fluide et du solide. Il serait intéressant de voir si une telle méthode n'est pas plus rapide pour des petits problèmes que la méthode proposée ici.
- L'introduction des effets thermiques permettrait d'améliorer le modèle. Pour ce faire, une équation de bilan thermique pour le lubrifiant doit être mise au point et résolue.
- Enfin, le point le plus important sera l'introduction d'une loi d'écrasement d'aspérité pour traiter le régime mixte. Il faudra voir si la transition du régime hydrodynamique au régime mixte ne nécessite pas des techniques numériques particulières pour passer d'une manière continue d'un régime à l'autre.

Chapitre 5

Applications numériques

5.1 Introduction

Après avoir expliqué en détails la méthode de résolution de l'équation de Reynolds par éléments finis et l'algorithme de couplage fluide-structure mis au point au cours de cette deuxième année de bourse F.R.I.A. (chapitre 4), nous allons montrer dans ce chapitre l'efficacité et les faiblesses de cet algorithme sur différentes simulations.

La simulation présentée est un laminage d'une tôle mince d'acier. Celle-ci a été choisie principalement parce qu'il existe des résultats numériques publiés par Liu [15]. Nous utiliserons ce cas test pour étudier le rôle de tous les paramètres pouvant influencer la solution obtenue.

5.2 Simulation d'un laminage d'une tôle d'acier

5.2.1 Présentation du cas-test

Le processus de formage étudié est un cas de laminage d'une tôle d'acier de 1 mm d'épaisseur. La tôle voit son épaisseur se réduire de 10 % lors de son passage entre les cylindres. Ceux-ci sont supposés rigides.

La simulation est effectuée en formalisme Arbitraire Lagrangien Eulérien. Celle-ci permet de mailler uniquement la petite portion de la tôle située entre les deux cylindres de laminage. Le maillage est eulérien (fixé dans l'espace) selon la direction de laminage et lagrangien (fixé à la matière) dans la direction perpendiculaire. Ceci permet une détermination automatique de la surface libre de la tôle en sortie d'emprise. Comme toute simulation A.L.E., chaque pas de temps s'effectue en deux étapes distinctes : une étape lagrangienne

Rayon des cylindres	R	=	50 mm
Demi-épaisseur initiale de la bande	t_0	=	0.50 mm
Demi-épaisseur finale de la bande	t_1	=	0.45 mm
Rugosité RMS de la tôle	R_{q1}	=	1.0 μm
Rugosité RMS des cylindres	R_{q2}	=	0.2 μm
Module d'Young	E	=	200 GPa
Coefficient de Poisson	ν	=	0.3
Loi d'érouissage	σ_Y	=	$313.79(1 + 0.052 \bar{\epsilon}^p)^{0.295}$
Viscosité du lubrifiant à p_0	η_0	=	0.434 Pa.s
Facteur de pression de la viscosité (Barus)	γ	=	$2 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$
Vitesse de laminage	V	=	100 m/min
Contre-traction	σ_1	=	120 MPa
Traction	σ_2	=	120 MPa

TAB. 5.1: Paramètres de la simulation et propriétés matérielles.

classique suivie d'une étape de remaillage et de convection des données stockées aux points de Gauss de chaque élément fini. Nous utilisons l'algorithme de convection par volumes finis développé lors de la première année de bourse F.R.I.A. [3, 5] et un facteur d'upwind unitaire. Au cours du calcul, la matière traverse le maillage.

Cette simulation est tirée d'une publication de Liu [15] illustrant son implémentation de l'algorithme de résolution de l'équation de Reynolds par éléments finis. Puisque la méthode présentée dans ce travail est fortement similaire à la sienne, nous devons obtenir des résultats semblables.

La méthode de résolution de Liu est légèrement différente que la nôtre : dans son cas, l'équation de Reynolds stationnaire (2.56) est résolue à chaque pas de temps, même lorsque les phénomènes transitoires sont importants, si bien que l'évolution temporelle du film de lubrifiant n'est pas physique. Dans notre cas, l'évolution du film de lubrifiant suit l'équation de Reynolds complète (2.40). Ceci est dû à notre souci d'avoir un algorithme général qui peut être appliqué pour tous les processus de formage imaginables.

Les paramètres du processus étudié se trouve dans le tableau 5.1. L'application des traction et contre-traction n'est pas évidente a priori. En effet, elle nécessite de modifier légèrement notre algorithme de convection des grandeurs aux points de Gauss. Jusqu'à présent, nous avons traité uniquement des problèmes mécaniques où les grandeurs étaient nulles en dehors du maillage. Dans le cas d'une contre-traction (la traction ne pose pas de problème vu qu'elle s'applique sur les noeuds où la matière quitte le maillage ALE), il faut appliquer des conditions aux limites différentes pour la composante horizontale du tenseur des contraintes de Cauchy (σ_{xx}) et les autres valeurs. En pratique, cela ne pose pas de problème. Il faudra cependant, dans le futur, permettre l'introduction de telles données via le programme de pré-traitement (pour l'instant, une version spéciale du programme a

dû être compilée séparément pour résoudre ce problème particulier).

Du point de vue des paramètres utilisés, il existe une différence entre le problème résolu par Liu et le nôtre. Cette différence vient de l'hypothèse faite sur les cylindres de laminage : Liu considère qu'ils ont élastiques et nous considérons qu'ils sont rigides. Nous n'avons pas encore testé notre algorithme de lubrification dans le cas de contact entre deux corps déformables parce que nous pensons que la méthode utilisée n'est pas directement généralisable (sans quelques modifications des routines) à ce type de contact. Les problèmes rencontrés seront les suivants :

- Il n'y a plus une seule série de noeuds de contact par zone de contact : chaque surface possède ses propres noeuds et deux problèmes de lubrification éléments finis peuvent être résolus séparément. Il serait très étonnant que la solution obtenue sur une surface soit parfaitement identique à celle obtenue en considérant l'autre surface. Ceci ne serait possible uniquement si les noeuds en vis-à-vis coïncidaient exactement, ce qui n'arrive jamais en pratique, ne serait-ce qu'à cause de la méthode de la pénalité et les pénétrations inévitables dues à cette méthode.
- Les différences entre les solutions obtenues sur chaque surface seront dues également aux approximations géométriques des deux surfaces. Dans le cas d'un cylindre lisse, la géométrie d'une des deux surfaces est exacte. Seule la surface de la tôle est approximée. Nous verrons que, même dans ce cas, on observe des problèmes dus à cette approximation. Les problèmes de convergence risquent d'être bien plus importants si les deux surfaces sont approximées par des lignes brisées.
- La définition de la pression locale pose un problème. En effet, si les mailles des deux surfaces en contact sont de tailles différentes, les champs de pression calculés comportent des oscillations dues aux approximations géométriques des deux surfaces. De plus, à moins que les premiers et derniers noeuds de contact de chaque surface coïncident avec leur vis-à-vis, on observe obligatoirement des pressions non nulles sur des noeuds qui ne sont pas en contact.

Liu contourne ces difficultés en utilisant une autre formulation pour le cylindre : la surface du cylindre est discrétisée en éléments frontières (voir figure 5.1) et les forces de contact permettent de calculer la déformation du cylindre. La détermination de la déformation du cylindre se fait après chaque pas de temps. Ceux-ci doivent être recommencé avec la géométrie du cylindre déformé jusqu'à convergence de la géométrie.

Une telle matrice de contact pourrait être mise au point dans METAFOR sans trop de problèmes mais cela nécessiterait un temps non négligeable de développement que nous préférons consacrer à l'amélioration du modèle de lubrification lui-même.

La tôle possède une loi d'érouissage isotrope non linéaire. La viscosité du lubrifiant suit une loi de Barus. Nous verrons que c'est à cette dépendance de la viscosité vis-à-vis de la pression qui permet d'obtenir un frottement suffisant pour entraîner la tôle.

Le maillage utilisé est représenté sur la figure 5.2. On utilise 80 éléments Q4P0 selon la direction de laminage et 6 selon la direction perpendiculaire. La longueur de la zone

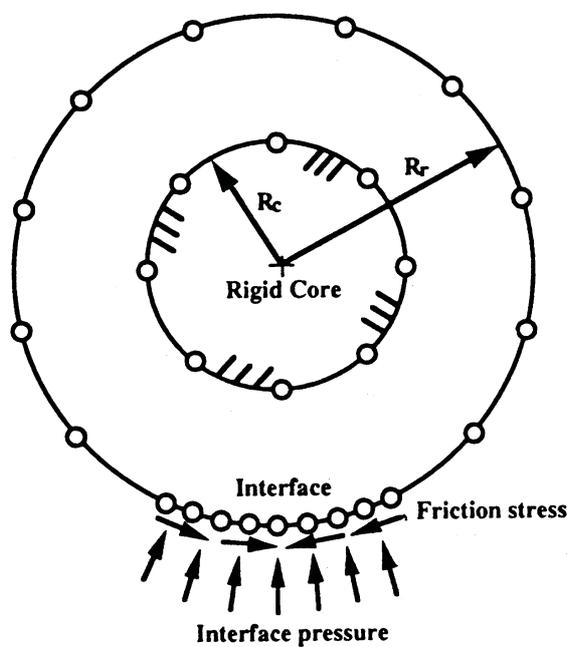


FIG. 5.1: Discrétisation par éléments aux frontières de la surface du cylindre.

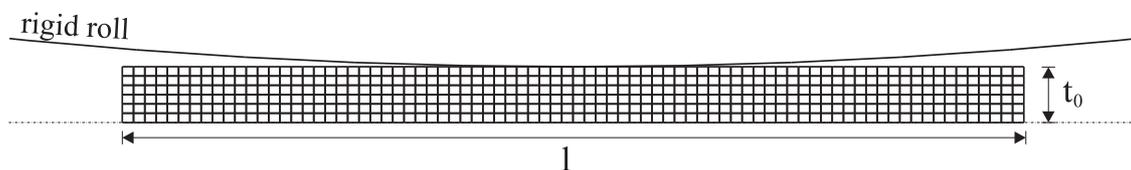


FIG. 5.2: Géométrie de la simulation et maillage utilisé.

discrétisée est de 8 mm. Ceci paraît raisonnable puisqu’une première approximation de la zone de contact fournit :

$$x = \sqrt{Rr - \frac{r^2}{4}} = \sqrt{50 \cdot 0.1 - \frac{0.1^2}{4}} = 0.236 \text{ mm} \quad (5.1)$$

où r est la réduction imposée à la tôle. Ce résultat correspond à un angle de contact de 2.56 degrés.

Vu la symétrie du problème, seule la moitié de celui-ci est discrétisé.

L’état stationnaire est atteint de la manière suivante :

- Dans une première partie du calcul, le cylindre écrase la tôle pour obtenir la réduction désirée. Cette phase doit être assez rapide pour que le lubrifiant ne s’échappe pas complètement de la zone de contact. On impose déjà à ce stade une vitesse de rotation constante au cylindre, ce qui permet d’observer un entraînement de lubrifiant dans l’emprise et donc une diminution du risque de rupture de film de lubrifiant. A un certain moment, lors de cet écrasement, la tôle commence à avancer dans l’emprise. Pendant toute cette première phase, les forces de traction et contre-traction sont progressivement appliquées (leur amplitude variant linéairement avec le temps).
- Lorsque la réduction voulue est atteinte, le cylindre arrête de descendre mais continue à tourner. Si, à ce stade, la tôle n’a pas commencé à avancer dans la direction du laminage, le frottement est insuffisant pour laminier la tôle. Si la tôle est entraînée par le cylindre, il suffit alors d’attendre que l’épaisseur de lubrifiant se stabilise dans l’emprise pour obtenir la solution du régime établi.

Pour la prise en compte de la rugosité, l’équation de Reynolds moyenne est utilisée avec les facteurs de correction de Tripp. La rugosité RMS de la tôle est 5 fois plus grande que celle du cylindre. On suppose une rugosité isotrope pour les deux surfaces.

5.2.2 Résultats obtenus

Dans cette section, nous décrivons l’évolution des variables pour les valeurs des paramètres du tableau 5.1. Les paramètres numériques regroupés dans le tableau 5.2 sont également utilisés pour obtenir la convergence.

Les graphiques qui vont suivre font référence à différents instants du calcul que nous avons nommés de t_1 à t_6 . Les valeurs de ces temps ainsi que la rotation correspondante sont regroupés dans le tableau 5.3. Dans la suite, nous repérerons les noeuds de contact grâce à “l’angle de contact”. Il s’agit de l’angle formé par la verticale joignant les deux axes des cylindres et une droite reliant le centre du cylindre sur lequel le noeud en question est en contact et le noeud lui-même. Cet angle est équivalent à une coordonnée spatiale et nous le noterons θ (voir figure 5.3).

Les figures 5.4 et 5.5 représentent l’épaisseur de film de lubrifiant au cours du temps jusqu’à l’obtention du régime établi. Lors des premiers pas de temps (temps t_1), la zone de

Précision N.-R. (lubrifiant)	$TOL_l = 10^{-8} \text{ mm}^{-3} \text{ s}^{-1}$
Précision N.-R. (tôle)	$TOL_t = 10^{-4}$
Coefficient de pénalité normale	$p_N = 10^5 \text{ N/mm}$
Coefficient d'upwind (lubrifiant)	$\alpha_l = 0.5$
Coefficient d'upwind (tôle)	$\alpha_t = 1.0$
Temps d'écrasement (1ere phase)	$t_{ecr} = 10^{-3} \text{ s}$
Epaisseur initiale de lubrifiant	$h_{init} = 3 \mu\text{m}$
Pas de temps max (1ere phase)	$\Delta t_1 = 10^{-6} \text{ s}$
Pas de temps max (2eme phase)	$\Delta t_2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$

TAB. 5.2: Paramètres numériques de la simulation.

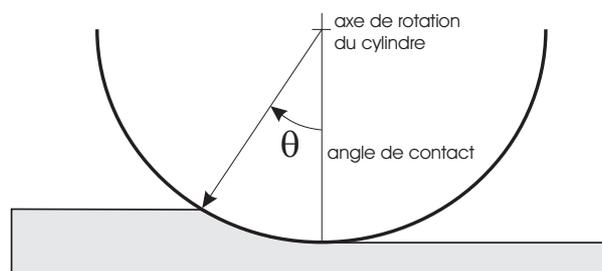


FIG. 5.3: Définition de l'angle de contact.

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
temps [10^{-3} s]	0.05	0.40	1.00	1.38	1.88	2.88
rotation [degrés]	0.097	0.764	1.910	2.644	3.600	5.498

TAB. 5.3: Temps utilisés pour la visualisation des résultats.

contact est petite et l'épaisseur du film de lubrifiant est proche de sa valeur initiale imposée ($3 \mu m$). Le profil de lubrifiant n'est pas symétrique puisque le cylindre est déjà en rotation. Lors des pas de temps suivants, la zone de contact s'élargit pour atteindre sa taille maximale en t_3 . Entre $t = 0$ et $t = t_3$, l'épaisseur d'entrée augmente puis diminue. Cette diminution est due à l'augmentation de pression et à l'augmentation de l'angle d'entrée. A un certain moment de cette première phase, le frottement est suffisamment important pour entraîner la tôle dans l'emprise et le laminage peut commencer. A partir de ce moment précis, l'aire de contact se déplace progressivement en amont. En effet, d'une part, la tôle continue à être écrasée jusqu'à $t = t_3$ et en conséquence, l'aire de contact augmente ; d'autre part, la tôle est entraînée par le cylindre et donc l'épaisseur de la tôle se réduit en sortie d'emprise. Lorsque $t = t_3$, seul ce dernier phénomène existe puisqu'il n'y a plus d'écrasement. La zone d'entrée reste fixe dans l'espace (à sa valeur de $t = t_3$) et la zone de sortie se déplace vers le minimum du cylindre jusqu'à sa position d'équilibre en fonction du retour élastique (s'il n'y avait pas de retour élastique, la position de la zone de sortie serait exactement sur la droite reliant les axes des deux cylindres, vu que ceux-ci sont parfaitement rigides).

Pendant la deuxième phase, l'épaisseur de lubrifiant à l'entrée de l'emprise se stabilise et se propage dans l'emprise. Dans cette étape, la convection du lubrifiant joue un rôle majeur. En $t = t_6$, le régime stationnaire est atteint : le profil de lubrifiant est constant dans le temps.

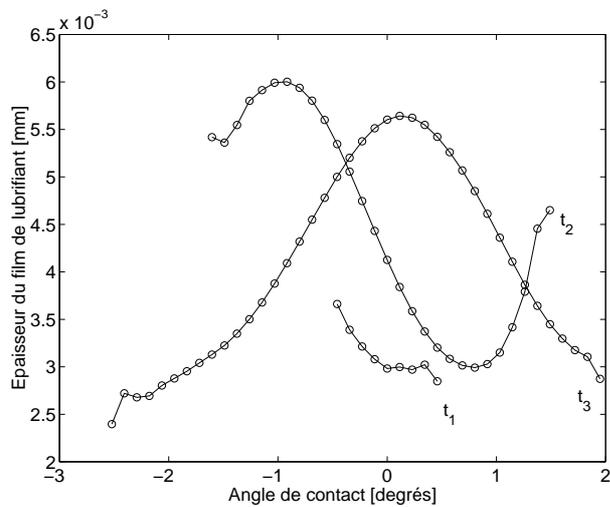


FIG. 5.4: Épaisseurs de film lors de l'écrasement.

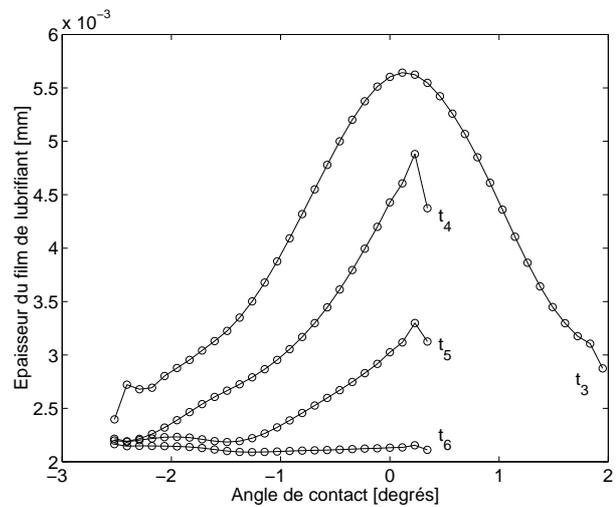


FIG. 5.5: Épaisseurs de film convergeant vers la solution stationnaire.

Les figures 5.6 et 5.7 montrent les mêmes instants pour le profil de pression. Lors de la première phase (figure 5.6), la pression croît de la zone de contact s'élargit. Les profils de pression ne sont pas symétriques pour la même raison que l'épaisseur du lubrifiant. Lors de la deuxième phase du calcul, la pression et la zone de contact diminuent. Cela implique donc une diminution de la force résultante verticale appliquée sur le cylindre. Nous verrons

que ceci est dû à la diminution du frottement dans cette phase. En effet, la première phase nécessite une grande vitesse d'écrasement pour que le film de lubrifiant ne se brise pas (si on écrase trop lentement, tout le lubrifiant sort de l'emprise et le contact n'est plus lubrifié). Cette grande vitesse provoque des grandes vitesses de cisaillement et, en conséquence, un frottement très élevé, plus important que celui obtenu après cette phase d'écrasement, lors du laminage proprement dit. Puisque, en laminage, la pression est d'autant plus grande que le cisaillement est important, la pression diminue au début de la deuxième phase et atteint progressivement les valeurs stationnaires.

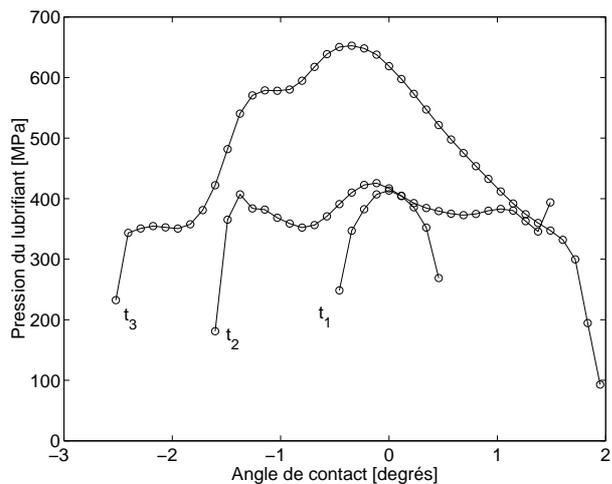


FIG. 5.6: Pressions lors de l'écrasement.

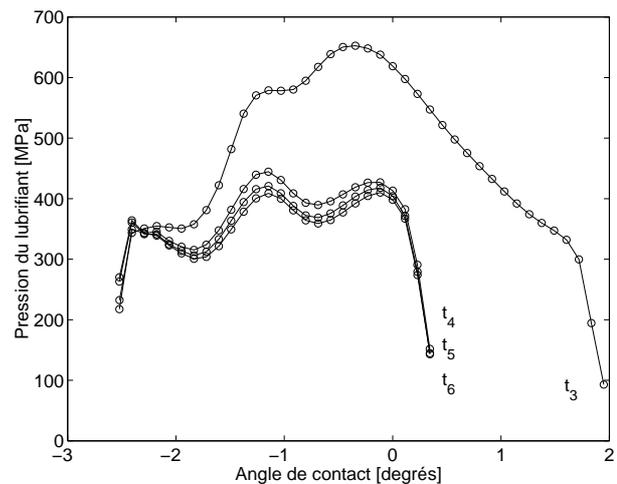


FIG. 5.7: Pressions convergeant vers la solution stationnaire.

Les figures 5.8 et 5.9 montrent l'évolution du cisaillement. Comme nous venons de le signaler, le cisaillement obtenu lors de la première phase est très grand vu la grande vitesse de compression utilisée. Remarquons ici que le point neutre (cisaillement nul) est situé exactement sur la verticale reliant les axes des cylindres ($\theta = 0$). Cela signifie que le frottement n'est pas encore suffisant pour entraîner la tôle dans l'emprise. Par contre, nous voyons que ce n'est plus le cas pour $t = t_3$ où le point neutre s'est déplacé en amont. Le début de l'entraînement est donc situé entre $t = t_2$ et $t = t_3$. Lors de la deuxième phase, le cisaillement diminue fortement. Cependant, le point neutre reste dans l'emprise.

La figure 5.10 montre l'évolution de la pression d'entrée au cours du temps. On constate que la pression d'entrée est mal définie (fortes oscillations) lors de la première phase du calcul. C'est assez facile à comprendre : la zone de contact est constituée d'une série de noeuds en contact pour lesquels on peut déterminer une pression en fonction de la force de contact trouvée par la résolution de l'équilibre de la tôle. Plus le maillage sera fin, plus la pression obtenue sera proche de la réalité. En particulier, la pression obtenue pour le premier noeud en contact sera d'autant plus faible que le maillage est raffiné. En effet, physiquement, la pression varie continûment dans l'entrée de l'emprise entre une valeur nulle à l'extérieur et une valeur élevée dans l'emprise. La valeur de la pression au premier

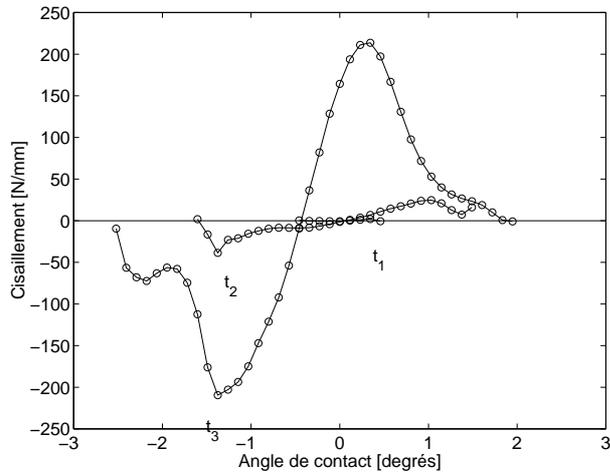


FIG. 5.8: Cisaillement lors de l'écrasement.

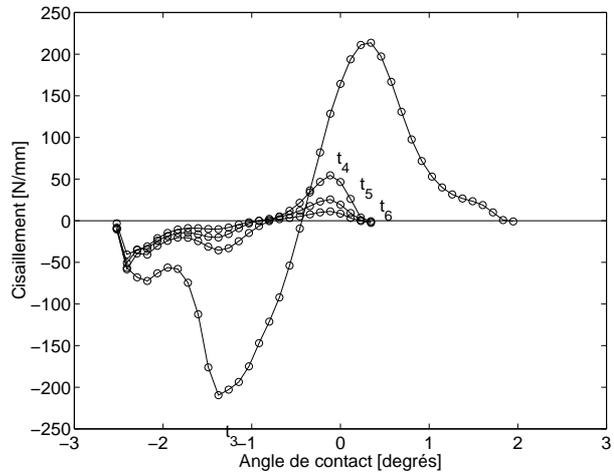


FIG. 5.9: Cisaillement convergeant vers la solution stationnaire.

noeud dépend donc principalement du maillage à l'instant considéré. Si, comme ici, on étudie un problème transitoire, la valeur de la pression au premier noeud peut valoir à peu près n'importe quelle valeur entre sa valeur hors de l'emprise (c'est-à-dire 0) et sa valeur dans l'emprise (de l'ordre de la contrainte d'écoulement).

Ceci pose un très gros problème que nous essayerons de résoudre dans la suite. Un commencement de réponse est le suivant : il faut se rappeler que l'on a besoin de cette valeur de pression uniquement pour déduire les conditions aux limites. Or, pour établir les formules à résoudre pour obtenir la valeur des conditions aux limites (section 4.5.2), on a fait l'hypothèse que le gradient de pression est nul en entrée. Ces formules sont donc valables uniquement si le gradient de pression est nul au premier noeud, c'est-à-dire si la pression au premier noeud est de l'ordre de celle observées dans l'emprise.

On pourrait donc essayer de résoudre le problème de deux manières différentes :

- La première méthode consisterait à formuler une équation fournissant les conditions aux limites sans faire l'hypothèse d'un gradient de pression nul en entrée. Le gradient serait alors calculé par différence finie (centrée ou non). Cependant, une telle généralisation ne peut qu'alourdir les formules déjà très complexes. De plus, le travail de Martinet [30] montre que la prise en compte des gradients de pression fournit dans le plus simple cas (surfaces lisses) une équation du second degré qui ne peut pas toujours être résolue.
- Une seconde méthode serait de reprendre les mêmes formules en utilisant une autre valeur que la valeur de la pression au premier noeud. Vu que la formulation est correcte pour un gradient de pression nul, il "suffit" de trouver, dans l'emprise, l'endroit où le gradient de pression s'annule et utiliser la pression calculée à cet endroit (en espérant que l'endroit trouvé soit proche du premier noeud). Il faudra cependant laisser tomber les termes de pressions de l'équations de Reynolds dans la zone comprise

entre le premier noeud et le noeud possédant un gradient de pression nul puisqu'il sont déjà pris en compte dans l'expression des conditions aux limites.

Malgré ce problème de détermination de la pression en entrée, nous obtenons, pour la solution stationnaire, de bons résultats. Ceci est dû à la loi de Barus qui traduit la dépendance de la viscosité vis-à-vis de la pression. Dans ce cas de laminage, nous utilisons un facteur de pression assez élevé ($\gamma_l = 0.02 \text{ MPa}^{-1}$). Or, nous avons vu précédemment (section 4.5.2.6) que l'épaisseur de film de lubrifiant en entrée devient indépendante de la pression lorsque le facteur de pression est élevé. Notre formulation est donc totalement valable pour des lubrifiants dont la viscosité augmente fortement avec la pression.

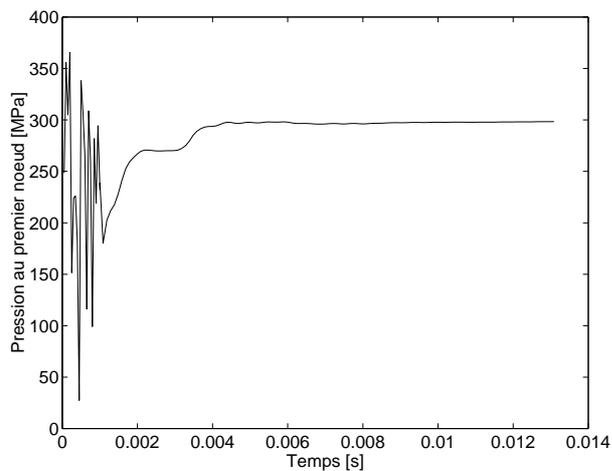


FIG. 5.10: Pression d'entrée au cours du temps.

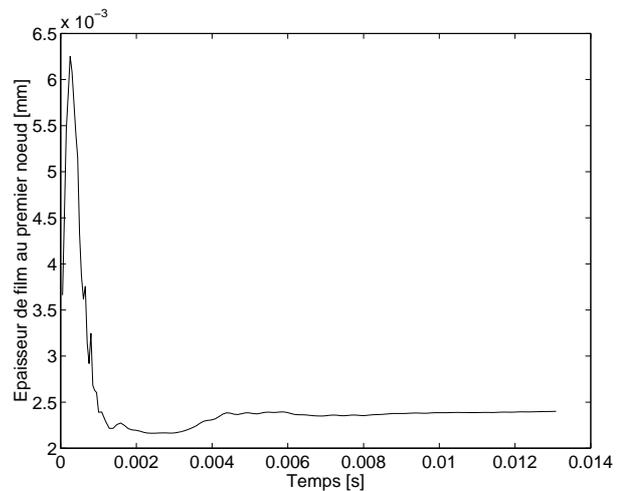


FIG. 5.11: Epaisseur de lubrifiant à l'entrée au cours du temps.

La figure 5.11 montre l'évolution temporelle de l'épaisseur de lubrifiant calculée en entrée d'emprise. Nous pouvons vérifier la remarque précédente : malgré une pression d'entrée assez chaotique, l'épaisseur de lubrifiant en entrée évolue de manière continue, sans oscillations.

La figure 5.12 montre le champ de pression et de cisaillement obtenu par notre algorithme et METAFOR pour le régime établi. Ces valeurs peuvent être comparées à celles obtenues par Liu pour le même problème (figure 5.13 et 5.14).

On remarque que la pression obtenue par Liu est légèrement inférieure à celle que nous obtenons en aval du point neutre. Il en va de même pour le cisaillement. Les champs de pression et de cisaillement sont évidemment liés : vu que nous obtenons une pression légèrement plus élevée que Liu en aval du point neutre, la viscosité obtenue est plus importante (cette dépendance est exponentielle d'après la loi de Barus). Par exemple, une pression de 400 MPa entraîne une viscosité 2.7 fois plus grande qu'une pression de 350 MPa et 7.4 fois plus grande qu'une pression de 300 MPa. La moindre petite différence dans les courbes de pression va se traduire directement par une grande différence entre les viscosités correspondantes et sur les cisaillements calculés.

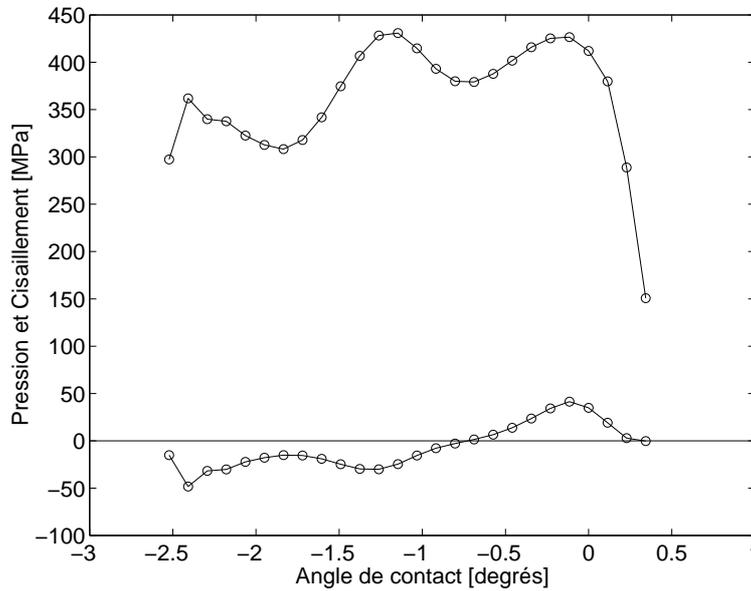


FIG. 5.12: Pression et cisaillement en régime établi.

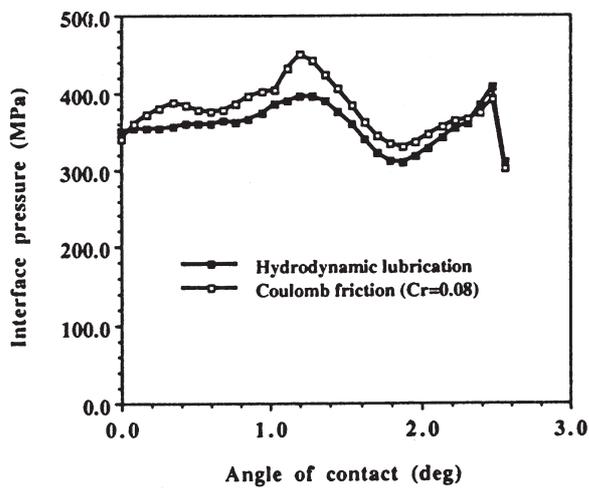


FIG. 5.13: Champ de pression obtenu par Liu.

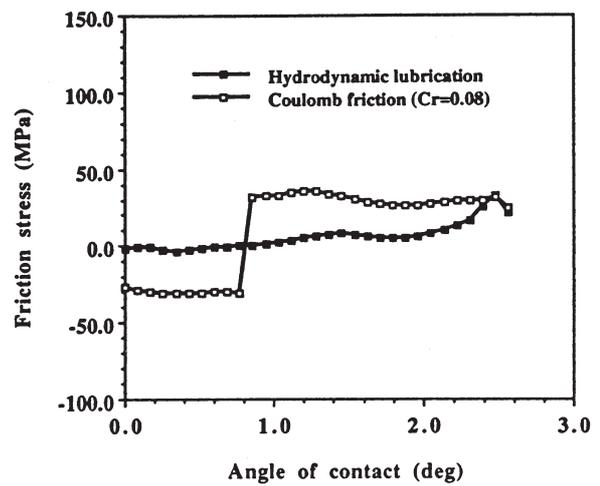


FIG. 5.14: Champ de cisaillement obtenu par Liu.

Remarquons également que la position du point neutre est identique pour les deux solutions. Ceci renforce l'idée que les différences entre les deux solutions sont dues principalement aux écarts de viscosité, par l'intermédiaire de la pression.

Une dernière remarque est nécessaire : il est important d'avoir à l'esprit que cette simulation ne peut mener à un laminage que si la viscosité dépend de la pression. En effet, lorsque nous avons abordé ce problème pour la première fois, nous avons été bien surpris de voir une telle simulation puisque, dans la pratique industrielle, le régime hydrodynamique mène toujours à des cisaillements très faibles. Il est même assez compliqué d'effectuer un laminage en régime complètement hydrodynamique, sans interactions d'aspérités. Dans notre modèle, nous avons vu que le cisaillement obtenu est indépendant de la viscosité si celle-ci ne dépend pas de la pression. En effet, en régime stationnaire, l'épaisseur de lubrifiant est plus ou moins constante et vaut la valeur calculée en entrée. Cette dernière est d'autant plus grande que la viscosité est importante. Par contre, le cisaillement est d'autant plus faible que l'épaisseur de lubrifiant est grande. Vu que ces deux relations sont linéaires dans les deux cas pour une viscosité constante, le cisaillement résultant est indépendant de la viscosité. Dans cette simulation, des pressions de l'ordre de 350 MPa sont atteintes. La valeur de la viscosité est donc localement multipliée par $\exp(\gamma_1 p)$, c'est-à-dire environ 1000 fois, par rapport à sa valeur à la pression de référence. La dépendance vis-à-vis de la pression est donc essentielle mais nous doutons que la loi de Barus soit valide dans de telles gammes de pressions.

En conclusion, bien que les paramètres utilisés pour cette simulation ont été certainement choisis pour obtenir un frottement important (mais pas très physique), nous voyons que notre algorithme converge et fournit des résultats cohérents. De plus, ces résultats sont très similaires à ceux obtenus par Liu. Cet exemple permet de valider la méthode de couplage fluide-structure mise en place dans METAFOR. Nous allons cependant utiliser cet exemple pour étudier l'influence des divers paramètres qui interviennent dans le calcul. C'est l'objet des prochaines sections.

5.2.3 Comparaison avec une loi de frottement de type Coulomb

Il est assez intéressant de comparer les résultats obtenus par la nouvelle méthode de résolution de l'équation de Reynolds et ceux obtenus à l'aide d'une loi de frottement classique de type Coulomb.

La figure 5.15 représente le coefficient de frottement local (rapport du cisaillement local et de la pression locale) obtenu avec la loi de frottement hydrodynamique en régime stationnaire le long de l'emprise. On constate que ce coefficient est loin d'être constant. A partir de ce graphique, on peut déduire un coefficient de frottement moyen sur l'emprise qui vaut, dans ce cas, 0.0522.

Une simulation avec la loi de Coulomb et ce coefficient de frottement moyen a été effec-

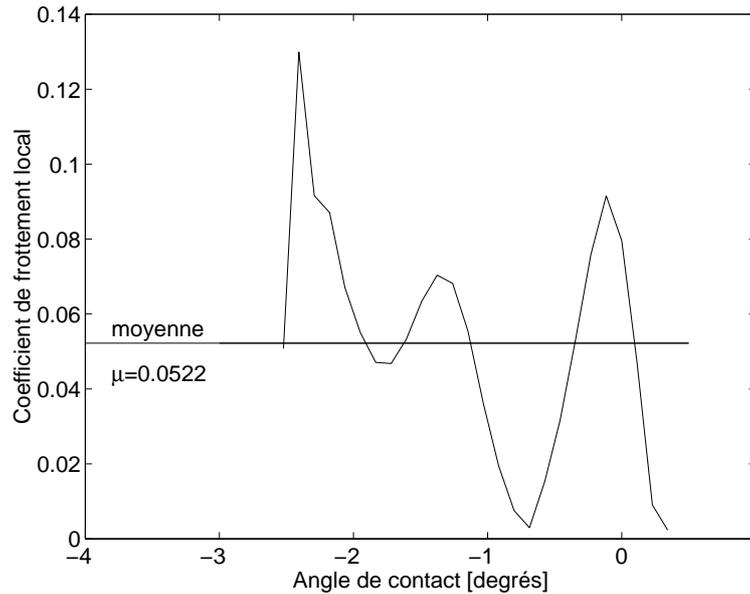


FIG. 5.15: Coefficient de frottement local.

tuée et les résultats sont présentés sur la figures 5.16 et 5.17. La première figure compare les pressions obtenues dans les deux cas. On constate qu'elles sont très similaires. La pression obtenue par la loi de Coulomb est légèrement inférieure à celle obtenue dans le cas des éléments finis de lubrification. Par contre, la distribution de cisaillement, représentée sur la deuxième figure, est assez différente. Dans le cas de la loi de Coulomb, la transition entre la zone amont et aval du point neutre est beaucoup plus brusque. En théorie, la courbe doit être discontinue puisque la vitesse relative des deux surfaces ne s'annule qu'en un point. En pratique, à cause de la modélisation numérique par la loi de la pénalité, on obtient un pente élevée mais pas infinie. On remarque également sur ce graphe que le cisaillement est plus ou moins uniformément réparti sur la zone de contact. Ceci est normal puisque la loi de Coulomb ne dépend pas du module de la vitesse relative des deux surfaces, comme c'est le cas pour la lubrification hydrodynamique.

La figures 5.18, 5.19 et 5.20 permettent de comparer les solutions obtenues pour les deux lois de frottement (Coulomb et lubrification hydrodynamique). Elles représentent respectivement la déformation plastique équivalente, la contrainte équivalente de Von-Mises et la contrainte de Cauchy selon x (pour permettre de vérifier la condition aux limites correspondant à la contre-traction imposée). On remarque qu'il existe de légères différences dans les solutions obtenues. En analysant finement la géométrie de la surface supérieure des deux solutions, on constate que la solution obtenue avec les éléments finis de lubrification présente plus d'oscillations que la solution obtenue avec Coulomb.

Remarquons, pour finir, que Liu a effectué le même genre de comparaison pour sa simulation. Il a cependant choisi d'utiliser un coefficient de frottement égal à 0.08 (qui

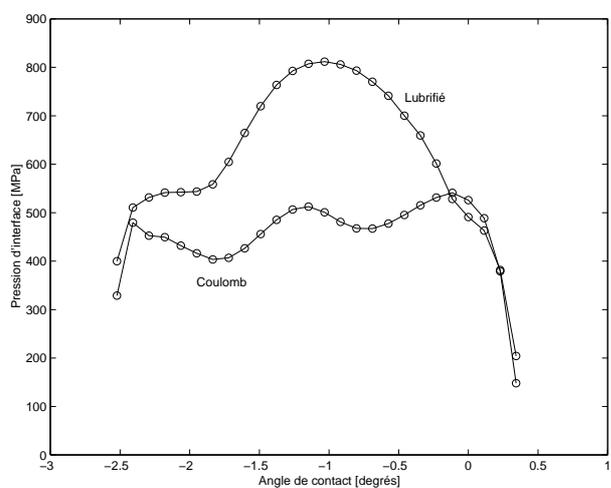


FIG. 5.16: Comparaison des pressions obtenues par une loi de Coulomb et les éléments de lubrification.

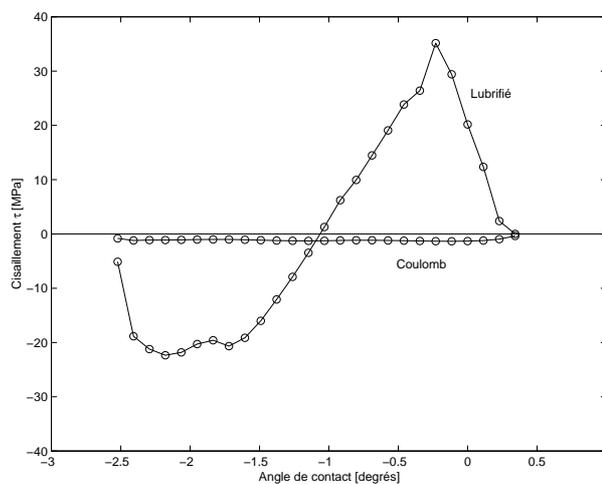


FIG. 5.17: Comparaison des cisaillements obtenues par une loi de Coulomb et les éléments de lubrification.

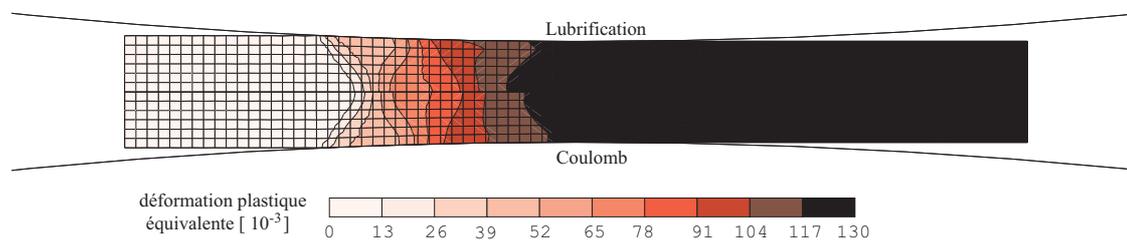


FIG. 5.18: Comparaison des solutions obtenues avec une loi de Coulomb et les éléments de lubrification.

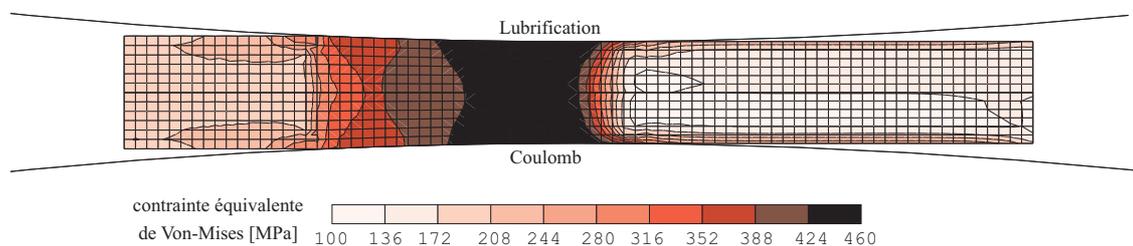


FIG. 5.19: Comparaison des solutions obtenues avec une loi de Coulomb et les éléments de lubrification.

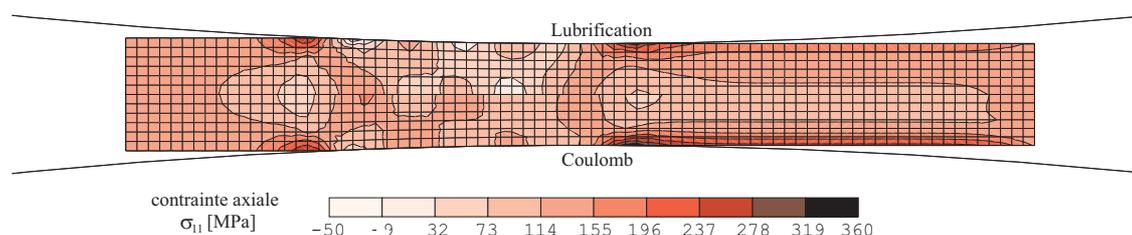


FIG. 5.20: Comparaison des solutions obtenues avec une loi de Coulomb et les éléments de lubrification.

représente, peut-être, la moyenne du frottement de sa solution). Ses comparaisons peuvent être trouvées sur les figures 5.13 et 5.14.

5.2.4 Importance des forces de traction et contre-traction

Nous avons vu que l'hypothèse de la dépendance de la viscosité vis-à-vis de la pression est primordiale pour obtenir le laminage de la tôle. Nous allons voir que les forces imposées aux deux extrémités de la tôle sont aussi très importantes. Dans cette section, nous résolvons le même problème sans appliquer les forces de traction et contre-traction.

Les figures 5.21 et 5.22 montrent les résultats obtenus pour les épaisseurs de film de lubrifiant au cours du temps. Les mêmes instants que ceux du problème précédent, ont été choisis pour faciliter la comparaison (voir tableau 5.3) avec les figures 5.4 et 5.5. On constate que les épaisseurs de film de lubrifiant sont très semblables dans les deux cas.

Les figures 5.23 et 5.24 représentent les champs de pression au cours du temps. On remarque que l'évolution est identique à celle du cas précédent (figures 5.6 et 5.7). Cependant, les valeurs sont très différentes. On atteint les 1300 MPa ! Autrement dit une viscosité énorme (de l'ordre de 10^{12} fois sa valeur à la pression de référence). La valeur maximale du champ de pression stationnaire est de l'ordre de 800 MPa.

La présence des tractions et contre-traction dans la simulation précédente permet de limiter la pression maximale obtenue en régime stationnaire (200 MPa de moins que le cas sans tractions). Lorsque les tractions ne sont pas imposées, on obtient des viscosités de lubrifiant trop importantes et qui n'ont rien à voir avec celles rencontrées en pratique.

Il est cependant intéressant de voir que notre algorithme est assez robuste puisqu'il réussit à gérer convenablement des viscosités très variables et très grandes. Dans la suite, nous considérerons le cas avec tractions, vu les résultats non physiques obtenus lorsqu'elles ne sont pas appliquées.

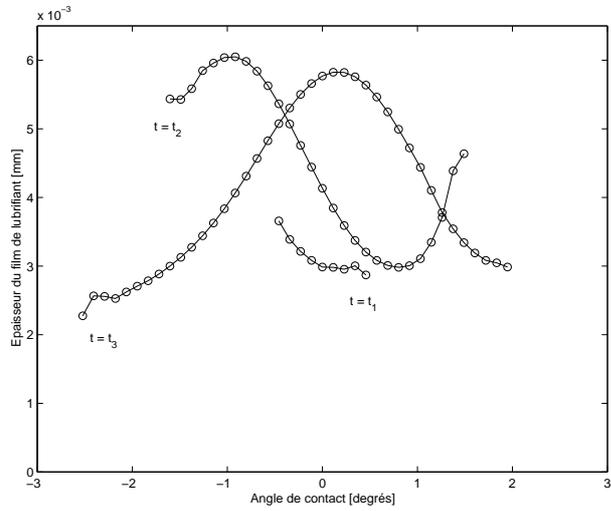


FIG. 5.21: Epaisseurs de film lors de l'écrasement.

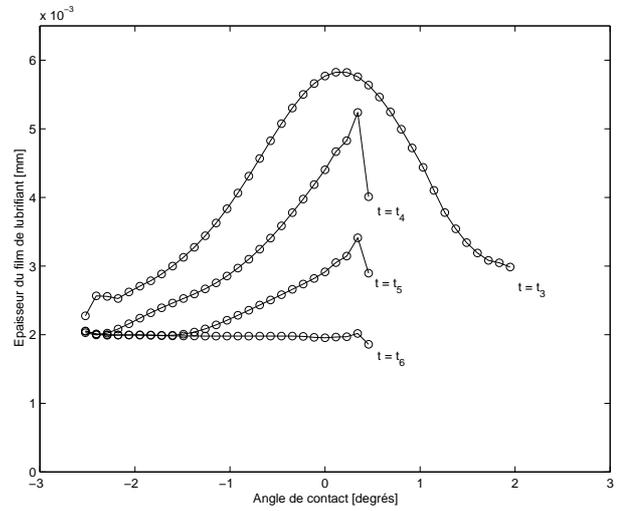


FIG. 5.22: Epaisseurs de film convergent vers la solution stationnaire.

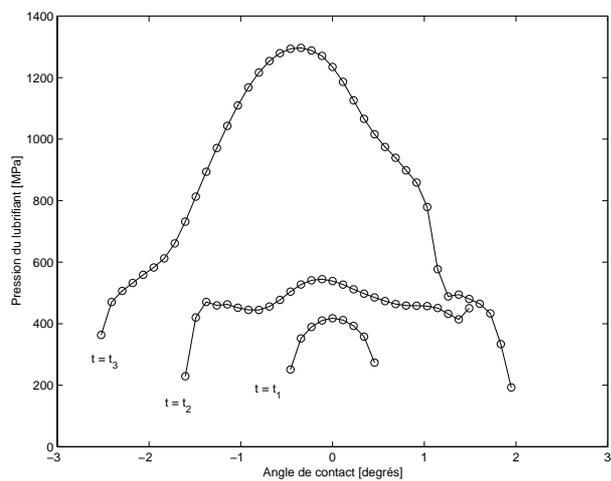


FIG. 5.23: Pressions lors de l'écrasement.

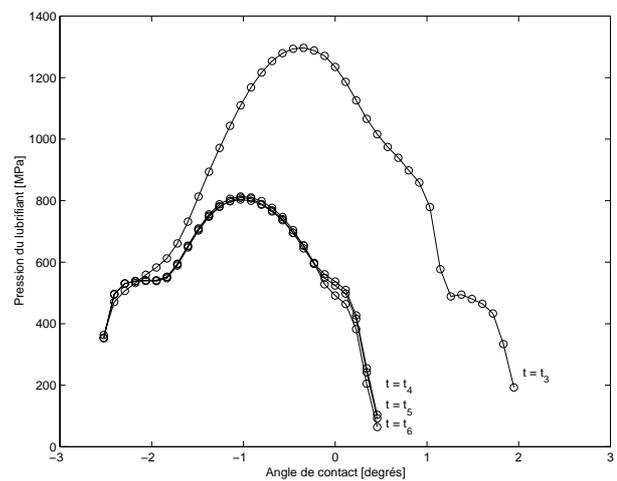


FIG. 5.24: Pressions convergent vers la solution stationnaire.

5.2.5 Influence des pas de temps

Dans cette section, nous allons voir l'influence du pas de temps sur la solution obtenue. Nous savons que le pas de temps ne doit en aucun cas dépasser une certaine valeur critique au delà de laquelle le schéma de convection explicite (ici méthode de Godunov – volumes finis) est instable. Cette valeur dépend du coefficient d'upwind utilisé pour la convection (qui n'a rien à voir avec celui utilisé pour la résolution de l'équation de Reynolds). Puisque nous utilisons ici un décentrage complet, il ne faut pas que la convection des grandeurs aux points de Gauss se fasse sur plus d'un volume fini (c'est-à-dire une demi-maille élément fini). Nous utilisons une vitesse de 100 m/min. A cette vitesse, la matière traverse une demi maille en $6 \cdot 10^{-5}$ s (chaque maille mesure 0.1 mm de long). Cette valeur est une estimation du pas de temps maximum puisque nous savons que la matière avance plus vite que le cylindre dans la région située en aval du point neutre.

En général, nous avons remarqué que plus la rugosité est grande et que l'épaisseur de film est faible, plus la convergence est difficile. Nous avons choisi d'utiliser une rugosité RMS légèrement plus grande que celle de Liu ($R_{q1} = 1.5 \mu m$) pour tester l'algorithme dans des conditions de régime hydrodynamique en film mince.

Pour faire converger ce cas, il faut impérativement définir une phase intermédiaire entre la phase 1 et la phase 2 du calcul. Celle-ci n'a qu'un seul but : définir un pas de temps maximal très petit pour éviter des divisions du pas de temps les unes à la suite des autres.

En essayant plusieurs valeurs des pas de temps maximaux, nous avons vu qu'il était possible de multiplier par 10 le pas de temps de la première phase ($\Delta t_1 = 1 \cdot 10^{-5}$). Nous utilisons un pas de temps 500 fois plus petit pour la transition qui ne dure que quelques pas de temps ($\Delta t_{12} = 2 \cdot 10^{-8}$). Pour la deuxième phase, le pas de temps maximum est $\Delta t_2 = 0.6 \cdot 10^{-5}$, soit 10 fois moins que le pas de temps critique du schéma de convection ALE.

La figure 5.25 montre les solutions stationnaires obtenues pour les pas de temps maximum pour la deuxième phase de 2 et 6 μs . On constate que les solutions obtenues sont très similaires.

La figure 5.26 montre la convergence de la pression au premier noeud (zone d'entrée) vers la solution stationnaire. On constate qu'il y a de grandes différences entre les pressions obtenues dans les trois cas. En effet, la pression obtenue pour un pas de temps de 2 μs est légèrement supérieure à 300 MPa alors que celle obtenue pour 6 μs est proche de 250 MPa. Ceci est dû au même problème que celui rencontré précédemment lors de l'explication de l'évolution chaotique de la pression d'entrée. En effet, on a expliqué que la valeur de la pression au premier noeud n'est pas fiable puisqu'elle peut valoir, suivant le maillage et, comme nous le voyons ici, suivant le pas de temps, des valeurs non représentatives de celle dans l'emprise.

Pour mieux comprendre ce phénomène, nous avons tracé, sur la figure 5.27, les trois

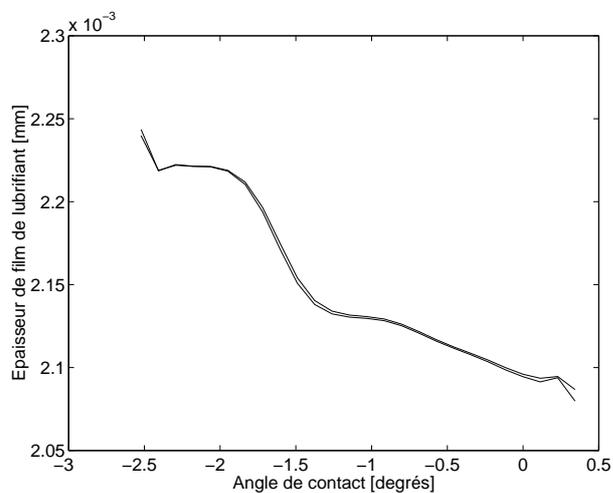


FIG. 5.25: Solution obtenues pour $\Delta t = 2 \mu s$ et $\Delta t = 6 \mu s$.

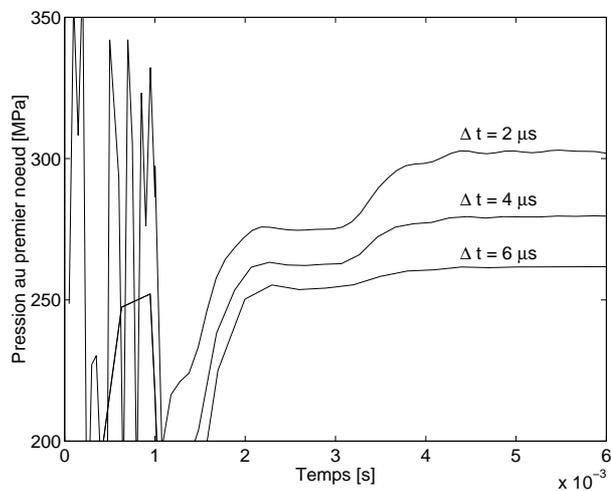


FIG. 5.26: Convergence de la pression d'entrée vers sa valeur stationnaire pour 3 valeurs du pas de temps.

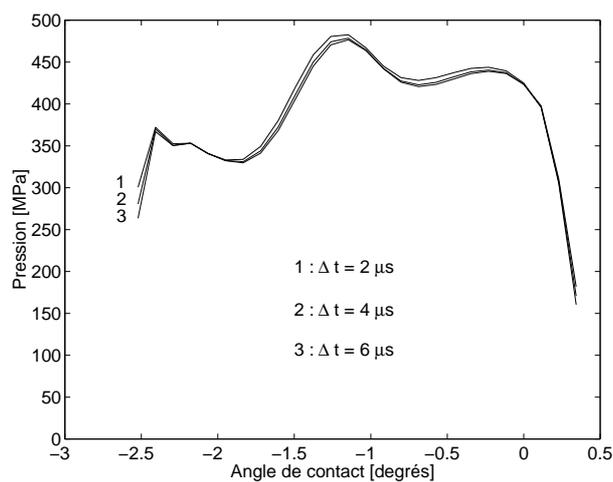


FIG. 5.27: Pression en régime établi pour 3 valeurs du pas de temps.

profils de pression stationnaires obtenus : on voit qu'il sont quasiment identiques bien que la pression en entrée soit différente.

La juxtaposition des 3 courbes sur la figure 5.25 est donc simplement due à l'invariance de l'épaisseur de film en entrée vis-à-vis de la pression d'entrée lorsqu'on utilise une viscosité dépendant de la pression et un facteur de pression important. On pourrait montrer, si c'était possible de se passer de la dépendance de la viscosité vis-à-vis de la pression, que les épaisseurs de film obtenues seraient alors différentes dans les trois cas.

5.2.6 Influence de la vitesse de laminage

Dans cette section, nous étudions l'influence de la vitesse de laminage sur la solution. Physiquement, une vitesse plus élevée entraîne un film de lubrifiant plus épais. Cette dépendance avec la vitesse est linéaire dans notre modèle. En multipliant la vitesse de laminage par deux, on doit multiplier l'épaisseur de film de lubrifiant par le même facteur.

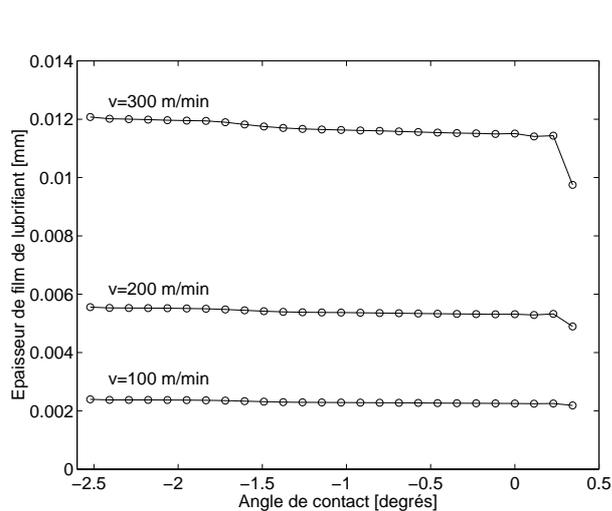


FIG. 5.28: Épaisseurs de film obtenues en régime stationnaire pour différentes valeurs de la vitesse de laminage (α estimé).

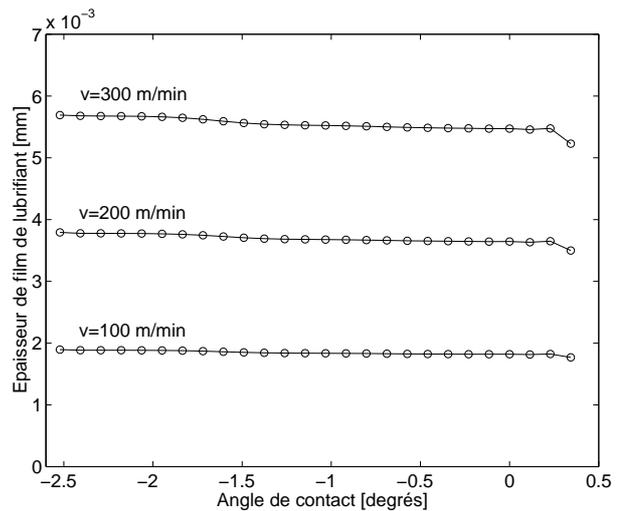


FIG. 5.29: Idem avec α correct.

La figure 5.28 montre les résultats stationnaires obtenus pour des vitesses de 100, 200 et 300 m/min. On est étonné de voir que la relation de proportionnalité annoncée n'est pas vérifiée. En fait, cela vient d'un problème d'évaluation de l'angle d'entrée. Dans la partie théorique (section 4.5.2), nous avons décrit la manière dont cet angle est évalué : c'est l'angle entre la tangente à la matrice et la surface du premier élément hors de la zone de contact.

Cependant, utiliser cette approximation donne de très mauvais résultats dans le cas

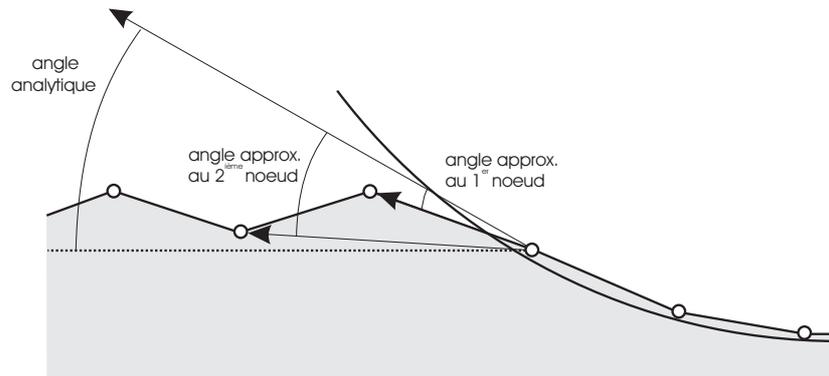


FIG. 5.30: Calcul de l'angle d'entrée.

du formalisme ALE. En effet, lors du remaillage de la surface supérieure de la tôle, une nouvelle ligne brisée doit être définie à partir de la surface de la tôle après le pas lagrangien qui est également une ligne brisée. Un algorithme de remaillage [36] est mis en place pour tenter de ne pas perdre ou gagner de la matière lors de cette opération délicate. Cet algorithme est certainement très général et convient parfaitement dans beaucoup de situations, particulièrement pour des surfaces lisses. Néanmoins, lorsqu'il doit traiter une surface possédant un angle (c'est le cas de la zone d'entrée du laminage), il a tendance à produire des oscillations. Pour contrer ce phénomène, nous avons décidé de calculer l'angle en considérant le second noeud hors de la zone de contact et pas le premier. Les résultats de la figure 5.28 ont été obtenus avec une telle approximation. Mais nous voyons qu'elle n'est pas suffisante, l'erreur étant d'autant plus grande que la vitesse de laminage est élevée (ce qui est normal puisque, le pas de temps étant constant, plus la vitesse est élevée, plus la surface de la tôle avant et après remaillage est différente).

La figure 5.29 montre les solutions obtenues lorsque α est calculé analytiquement en fonction de la position du noeud sur la matrice. On constate que les résultats obtenus sont bien en accord, cette fois-ci, avec nos prédictions.

La figure 5.31 représente les mêmes courbes dans le cas où les tractions ne sont pas appliquées aux deux extrémités du domaine. Pour ces résultats, nous avons utilisé l'approximation numérique de l'angle d'entrée et nous voyons que, dans ce cas, l'épaisseur de film est proportionnelle à la vitesse de laminage. L'effet néfaste des oscillations sur le calcul de l'angle d'entrée est donc accentué par la présence des forces de traction et contre-traction.

Enfin, la figure 5.32 montre les résultats obtenus par Liu. On remarque qu'ils sont très similaires à ceux trouvés par METAFOR (figure 5.29). On peut remarquer également que la présence des forces de traction n'influence pas beaucoup les résultats.

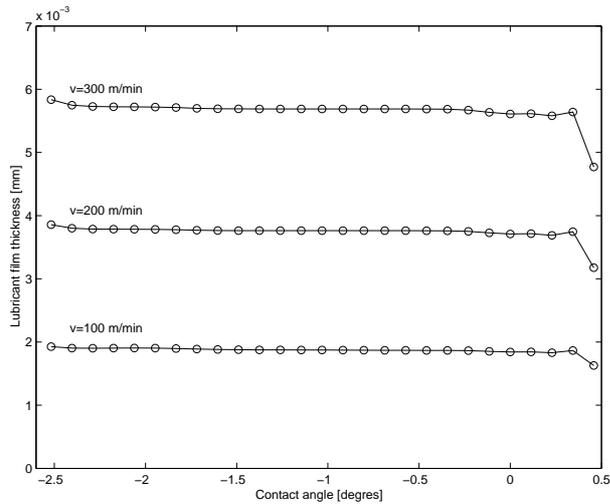


FIG. 5.31: Epaisseurs de film obtenues en régime stationnaire pour différentes valeurs de la vitesse de laminage (pas de tractions).

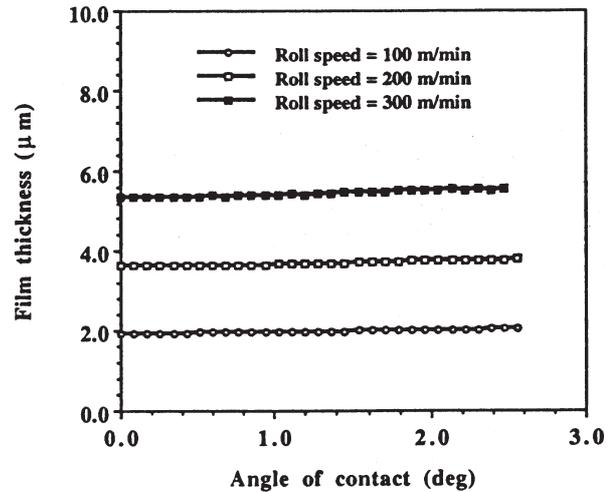


FIG. 5.32: Idem d'après Liu.

5.2.7 Influence de la rugosité

La rugosité de la tôle joue un rôle sur l'épaisseur de lubrifiant entraînée dans l'emprise. Nous avons effectué trois simulations. Pour les deux premières, on utilise un cylindre rugueux ($R_{q2} = 0.2 \mu m$) et une tôle rugueuse ($R_{q1} = 1 \mu m$ pour le premier cas et $R_{q1} = 1 \mu m$ pour le deuxième). Ces deux simulations sont comparées au cas où la tôle et le cylindre sont parfaitement lisses ($R_q = R_{q1} = R_{q2} = 0$).

Tout comme pour l'étude de l'influence de la vitesse de laminage, on constate que le calcul de l'angle d'entrée joue un rôle important. La figure 5.33 montre les résultats obtenus par l'approximation numérique décrite dans la section précédente et la figure 5.34 montre les mêmes résultats pour un angle calculé cette fois analytiquement. On constate que les résultats sont systématiquement surestimés lorsque l'angle n'est pas calculé analytiquement (environ $3 \mu m$ de trop).

Les résultats montrent que l'épaisseur de film entraînée dans l'emprise augmente avec la rugosité de la tôle. En effet, nous utilisons ici une rugosité isotrope et le facteur de correction ϕ_x est inférieur à 1. Nous verrons (section 5.2.10) que le rôle de ϕ_s est négligeable dans ce cas-ci.

On peut aussi remarquer la présence d'une oscillation sur les noeuds proches de la sortie. Cette oscillation était également présente sur les solutions de la section précédente (figure 5.29) mais moins visibles vu la différence d'échelle. Ces oscillations sont provoquées, comme nous l'avons vu lors de l'étude du schéma de résolution de l'équation de Reynolds

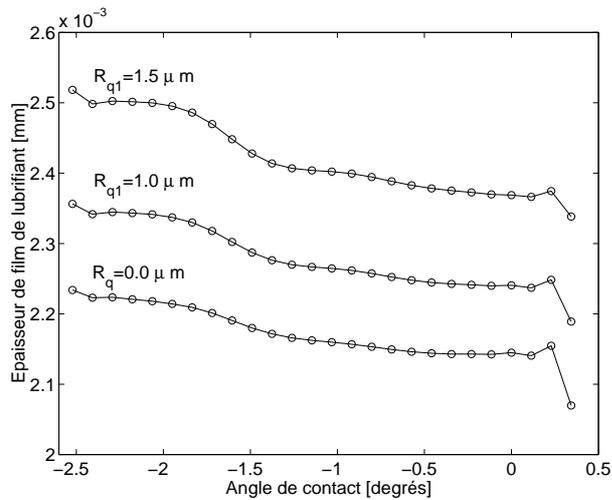


FIG. 5.33: Épaisseurs de film obtenues en régime stationnaire pour différentes valeurs de la rugosité de la tôle (α estimé).

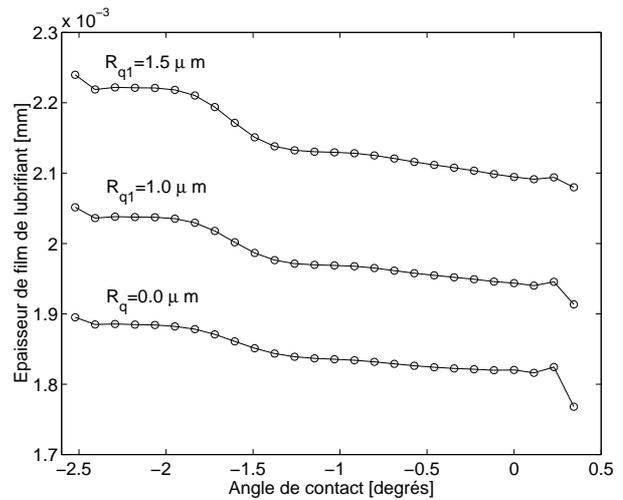


FIG. 5.34: Idem avec α correct.

(figures 4.31 et 4.32 de la section 4.8.3), par la mauvaise connaissance du gradient de pression en sortie d'emprise.

La figure 5.35 montre les mêmes résultats pour la même simulation sans traction, ni contre-traction. On constate que les résultats sont très semblables à ceux trouvés lorsque les forces sont appliquées. Pourtant, nous utilisons l'approximation de l'angle d'entrée et non sa valeur analytique. Les forces jouent donc un rôle néfaste sur l'estimation de l'angle d'entrée.

Terminons cette section en signalant que nos résultats sont en parfait accord avec ceux présentés par Liu (figure 5.36). Sa solution ne possède pas d'oscillations puisque la zone concernée n'est pas représentée sur le graphe publié. Deux explications sont possibles : soit les oscillations ont été volontairement camouflées, soit le modèle de Liu ne prend pas en compte ni le retour élastique de la bande et ni la déformation du cylindre en aval de la verticale reliant leur axes (ce qui serait très étonnant).

5.2.8 Influence de la méthode de calcul de l'angle d'entrée

Nous avons vu, dans les deux sections précédentes, que le calcul de l'angle d'entrée n'est pas toujours aussi précis que l'on voudrait. Bien sûr, cet angle peut être calculé analytiquement dans le cas particulier de cette simulation mais nous aimerions pouvoir le déduire directement de la géométrie, sans faire intervenir des grandeurs géométriques telles que le rayon du cylindre.

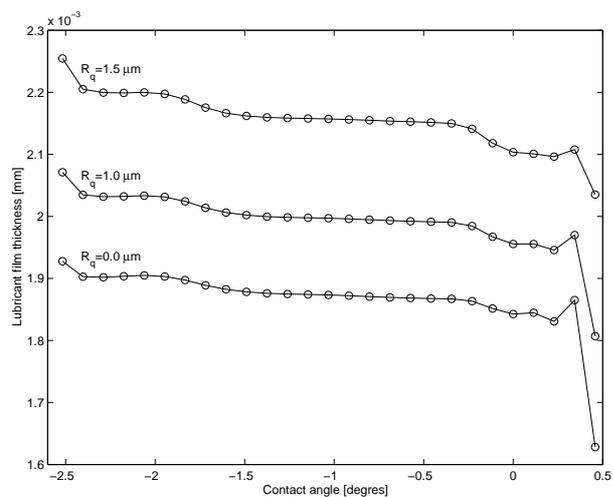


FIG. 5.35: Epaisseurs de film obtenues en régime stationnaire pour différentes valeurs de la rugosité de la tôle.

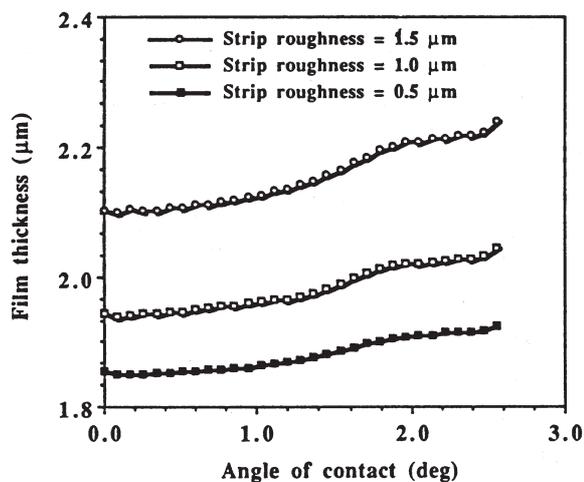


FIG. 5.36: Idem d'après Liu.

Nous avons vu que ce problème ne se présente pas tout le temps : dans le cas de la simulation sans forces de traction et contre-traction, l'estimation de l'angle d'entrée calculée à l'aide du deuxième noeud hors de l'emprise au lieu du premier donne de bons résultats.

La figure 5.37 montre un zoom sur le maillage obtenu comme solution stationnaire près de la zone d'entrée. Les forces de contact sont également représentées pour avoir une idée de la position du premier noeud en contact. Même à cette échelle, les oscillations de la surface sont bien visibles. Sur la figure 5.38, nous avons amplifié la déformation 10 fois pour percevoir mieux ce phénomène. On constate que la géométrie de la zone d'entrée est très mal représentée.

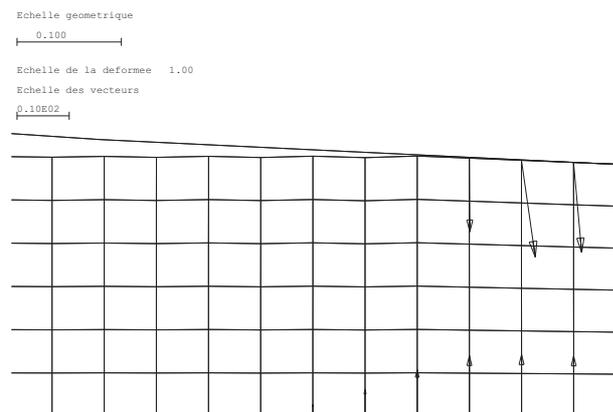


FIG. 5.37: Géométrie en régime établi.

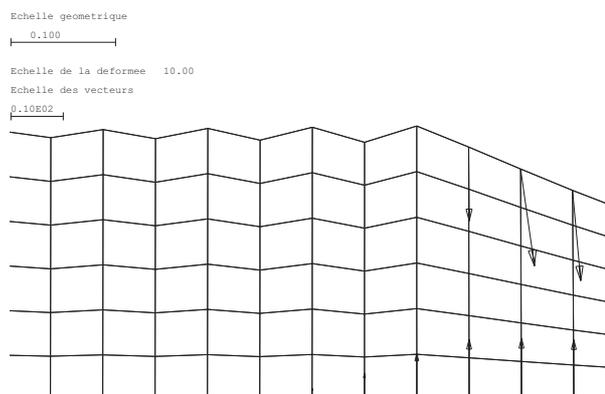


FIG. 5.38: Géométrie en régime établi (défo. x10).

Si on veut, dans la suite de ce travail, se passer d'un calcul analytique de l'angle de la zone d'entrée, il faudra impérativement mettre au point une nouvelle méthode de remaillage des lignes délimitant les domaines ALE. Cette méthode devra éliminer les oscillations au moins dans un voisinage de la zone d'entrée.

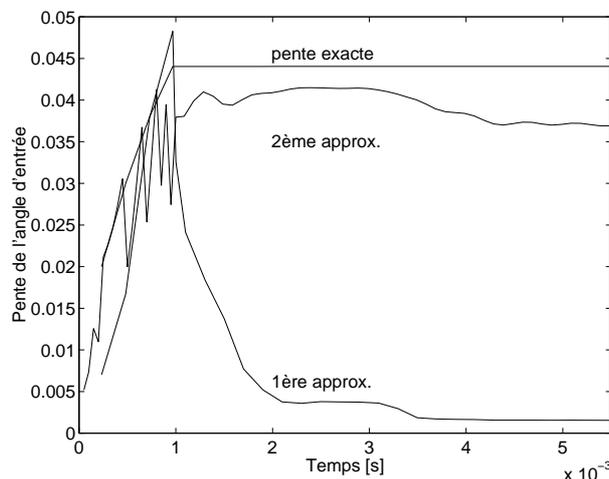


FIG. 5.39: Valeurs de l'angle d'entrée au cours du temps.

La figure 5.39 montre l'évolution temporelle des valeurs des angles calculés par les 2 méthodes d'approximation (utilisation du premier ou du deuxième noeud hors de l'emprise pour le calcul de la tangente à la surface de la tôle) et la valeur analytique. On constate que les deux approximations sont très médiocres pour ce problème de laminage et qu'il est donc conseillé d'utiliser la valeur analytique pour effectuer le calcul.

5.2.9 Influence du type de loi de frottement hydrodynamique

Dans cette section, nous étudions l'influence de la loi de frottement, c'est-à-dire la loi permettant de déduire les contraintes de cisaillements lorsque les vitesses de cisaillement et les épaisseurs de film de lubrifiant sont connues (équation (2.51)).

La figure 5.40 montre les contraintes de cisaillement obtenues dans le cas où on utilise les facteurs de correction de Patir & Cheng et dans le cas où on ne les utilise pas (les surfaces sont considérées lisses uniquement pour le calcul du cisaillement). On remarque que la correction apportée par ces facteurs est non négligeable. Le cisaillement est doublé par rapport au cas lisse dans la partie amont de l'emprise. En aval, le cisaillement est multiplié par un facteur 4. Cette différence est causée par deux phénomènes. Le premier est un phénomène direct : les facteurs de correction ϕ_f et ϕ_{fs} ont tendance à augmenter le frottement ; c'est une conséquence de leurs expressions mathématiques respectives. Le deuxième est indirect : vu que le frottement augmente, la pression augmente également

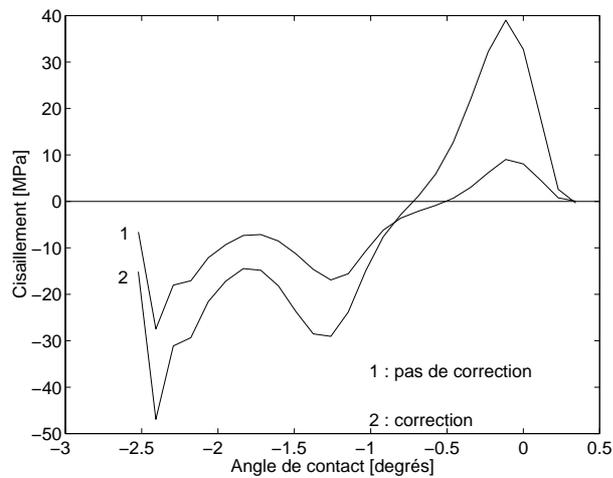


FIG. 5.40: Cisaillement en régime établi avec et sans correction de Patir & Cheng.

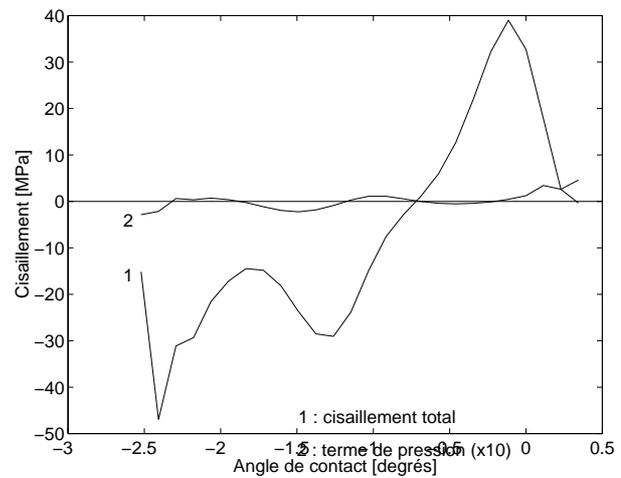


FIG. 5.41: Grandeur relative de la correction en pression.

et, en conséquence, la viscosité augmente ; d'où une augmentation du cisaillement et du frottement.

Remarquons que le point neutre se déplace (voir figure 5.40) lorsque l'on utilise ou non les facteurs de correction de Patir & Cheng. Ils influencent donc directement les vitesses de glissement à l'interface.

La figure 5.41 montre la grandeur du terme de pression de la loi de cisaillement par rapport au cisaillement total. Vu la petitesse de ce terme dans le cas présent, nous avons dû multiplier son amplitude par 10 pour l'apercevoir sur le graphe. Ce terme est donc totalement négligeable dans le cadre de cette simulation de laminage.

La figure 5.42 montre la valeurs des coefficients ϕ_{fs} et ϕ_{fp} le long de l'emprise.

5.2.10 Influence des différents termes de l'équation de Reynolds

Nous savons que la valeur de l'épaisseur de lubrifiant dans la zone d'entrée peut être influencée par la rugosité des surfaces. Il n'est donc pas possible de résoudre une équation simplifiée dans la zone d'entrée, à moins que la couche de lubrifiant soit suffisamment épaisse et que la rugosité des deux surfaces devienne négligeable.

Nous allons voir si de telles simplifications peuvent être faites dans l'équation de Reynolds que l'on résout pour les noeuds internes de la zone de contact. Les calculs présentés dans cette section ont été obtenus avec une rugosité RMS de la tôle $R_{q1} = 1 \mu\text{m}$.

La figure 5.43 montre l'influence du terme de pression dans l'équation de Reynolds. La

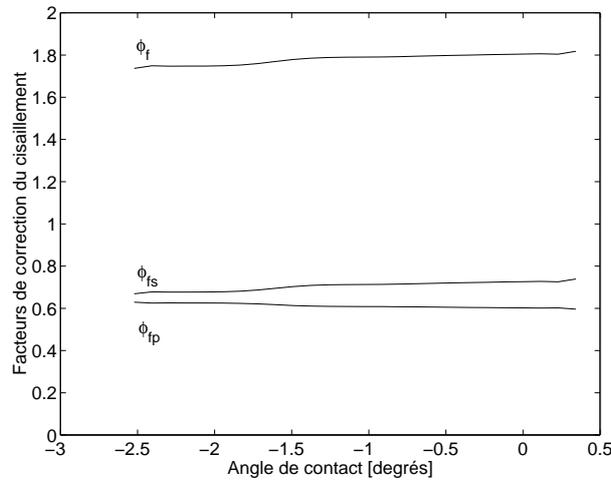


FIG. 5.42: Valeur des corrections en cisaillement le long de l'emprise.

solution obtenue sans ce terme est comparée avec la solution obtenue avec ce terme. On constate que les solutions sont très similaires. On voit cependant que la solution que ne tient pas compte des gradients de pression ne possède pas d'oscillations en sortie d'emprise. Cela confirme que ces oscillations sont dues à une mauvaise évaluation du gradient de pression dans la zone de sortie.

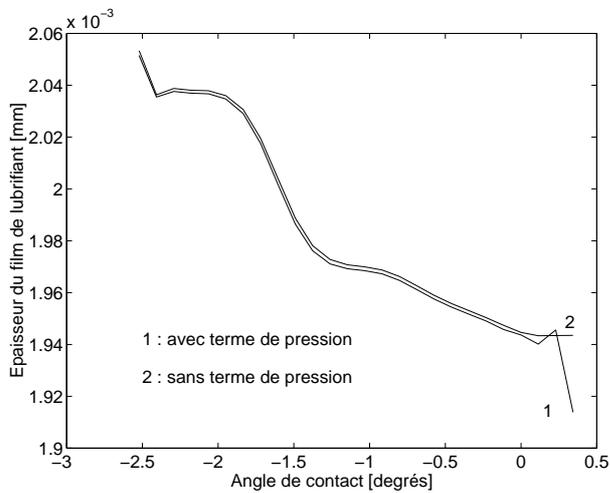


FIG. 5.43: Influence du terme de pression.

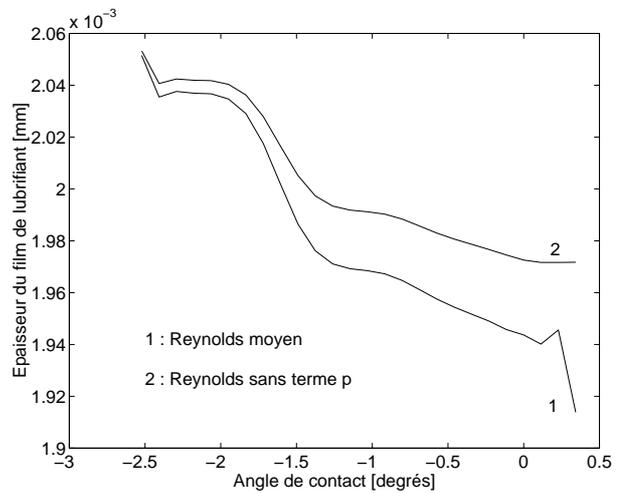


FIG. 5.44: Influence du terme de cisaillement.

La figure 5.44 montre l'influence du terme de cisaillement traduisant l'influence de la rugosité sur la solution. Pour cette solution, le terme de pression est également supprimé. Il ne reste donc qu'une simple équation traduisant la conservation de la grandeur $h \bar{u}$ le long de l'emprise. Vu que la vitesse moyenne augmente le long de l'emprise, il est donc normal que l'épaisseur de lubrifiant diminue. On remarque que le terme de cisaillement joue un

rôle plus important que le terme de pression. La conclusion serait différente si l'épaisseur moyenne de film dans l'emprise était bien plus grande que la rugosité composite des deux surfaces.

5.2.11 Choix du solveur

Nous avons vu, dans la partie théorique de ce travail, que la matrice de raideur résultant du couplage entre le lubrifiant et le solide en contact possède une largeur de bande bien plus élevée que celle obtenue avec une loi de Coulomb classique.

Puisque nous n'avons pas encore mis au point un renumérotation automatique des noeuds pour réduire la largeur de bande et une réactualisation de la ligne de ciel au cours du temps, la matrice à inverser a une structure qui n'avantage pas un solveur direct. Les figures 5.45 et 5.46 montrent les termes non nuls de la matrice de raideur respectivement dans le cas d'une loi de Coulomb et dans le cas de l'algorithme mis au point dans ce travail. On remarque que le nombre de termes potentiellement non nuls est plus de deux fois plus important dans le cas des éléments de lubrification.

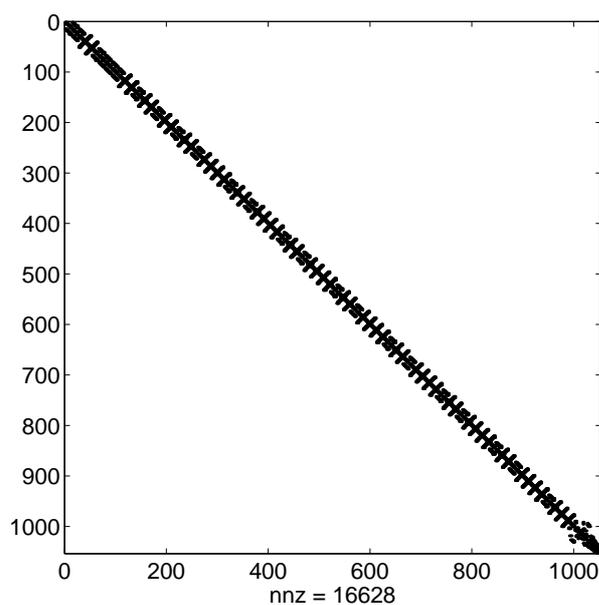


FIG. 5.45: Profil de la matrice de raideur (loi de Coulomb).

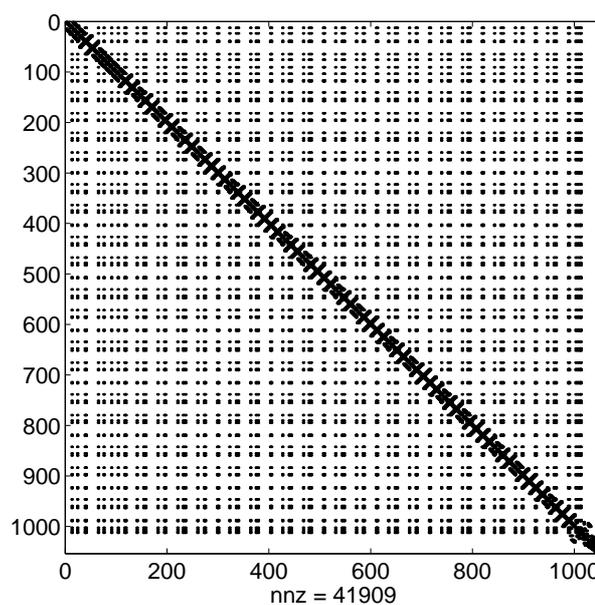


FIG. 5.46: Profil de la matrice de raideur (lubrification hydrodynamique).

Nous avons donc eu recours au solveur itératif. Celui-ci a le grand avantage de traiter uniquement les termes non nuls de la matrice de raideur. Ceci permet de gagner énormément de temps, comme le montrent les résultats rassemblés dans le tableau 5.4. Ce tableau présente, pour différents solveurs, les temps de calcul et la mémoire utilisée pour la résolu-

	CPU [s]	Pas / it.	Temps /it [s]	Mem [real*8]
GMRES(60) ILUTP(40)	11 s 18	50/78	0.1433	506911
GMRES(20) ILUTP(10)	14 s 82	50/78	0.1900	362221
Solveur direct	58 s 32	50/82	0.7112	540420

TAB. 5.4: Temps de calcul et mémoire utilisée pour une simulation utilisant les éléments de lubrification.

	CPU [s]	Pas / it.	Temps /it [s]	Mem [real*8]
GMRES(60) ILUTP(40)	6 s 73	41/40	0.1683	468963
Solveur direct	4 s 90	41/46	0.1065	337267

TAB. 5.5: Temps de calcul et mémoire utilisée pour une simulation utilisant une loi de Coulomb classique.

tion du problème de laminage avec des éléments de lubrification. Le solveur itératif utilisé est le GMRES dans sa version avec “restart”. Un solveur itératif projette le système donné dans un espace (espace de Krylov) de dimension réduite et résout le système projeté au lieu du système initial. GMRES(60), où le nombre 60 est le paramètre de restart, signifie qu’après 60 projections, il se réinitialise (restart) et recommence une série de projections en gardant la dernière approximation trouvée de la solution du système. Plus le paramètre de restart est grand, plus les itérations sont coûteuses mais on converge plus vite vers la solution.

On utilise un préconditionneur pour diminuer le nombre de conditionnement du système et ainsi faciliter la convergence. Ce préconditionneur, ILUTP, est basé sur la méthode des factorisations incomplètes. ILUTP(40), où le nombre 40 est appelé niveau de remplissage, signifie que l’on garde 40 termes par ligne lors de la construction du préconditionneur. Plus le niveau de remplissage est grand, plus le préconditionneur est puissant mais la chaque itération demande alors un plus grand effort de calcul.

Les résultats sont relatifs à une simulation jusqu’au temps $t = 0.5 \cdot 10^{-4} s$. On remarque que le solveur itératif est jusqu’à 5 fois plus rapide que le solveur direct pour ce problème. On remarque également que la mémoire utilisée est légèrement moindre dans le cas du solveur itératif. Ce tableau de résultat devra être remis à jour lorsque l’on aura optimisé la forme de la matrice de raideur pour le solveur direct.

A titre de comparaison, le tableau 5.5 montre les temps de calcul et la mémoire utilisée pour le même problème traité avec une loi de frottement de Coulomb. Dans ce cas, le solveur direct est bien entendu le plus rapide.

En conclusion, on voit qu’un problème de lubrification est plus coûteux en temps de calcul qu’un problème utilisant la loi de Coulomb (plus de deux fois pour ce problème de

laminage). L'utilisation du solveur itératif pour résoudre le système d'équation de chaque itération de Newton-Raphson est totalement justifié. Il nous permet de résoudre le système rapidement sans mettre au point une technique de gestion de la ligne de ciel du solveur direct.

5.2.12 Influence du coefficient d'upwind

Dans cette section, nous étudions l'influence du coefficient de décentrage utilisé pour la résolution de l'équation de Reynolds. Nous avons déjà effectué ce type d'analyse lors de l'étude du schéma de résolution du mouvement de lubrifiant hors du cadre de METAFOR (section 4.8). Cette analyse nous montrait que le coefficient de décentrage permettait de supprimer les oscillations parasites dans la solution mais il introduisait de la diffusion supplémentaire pouvant modifier l'évolution temporelle de la solution.

Remarquons tout d'abord qu'il n'est pas possible d'effectuer la simulation de laminage avec un coefficient d'upwind nul. La solution obtenue lors des premiers pas de temps montre des oscillations qui augmentent avec le temps. L'introduction de diffusion artificielle par l'intermédiaire des fonctions de forme SUPG est donc essentielle au bon fonctionnement de l'algorithme de couplage entre le lubrifiant et le solide en contact.

La figure 5.47 montre la solution obtenue ($R_{q1} = 1.5\mu m$) pour trois valeurs du coefficient d'upwind ($\alpha = 0.5, 1$ et 2). Vu que les courbes sont pratiquement confondues, nous avons effectué un zoom sur la zone de sortie où les solutions sont très légèrement différentes (figure 5.48). On constate, comme dans l'étude théorique, que les oscillations en sortie sont d'autant plus faibles que le coefficient d'upwind est élevé.

La figure 5.49 montre l'évolution temporelle de l'épaisseur de lubrifiant en un noeud particulier (noeud 42, $\theta = 0.115$ degrés).

On constate, comme prévu, que le maximum atteint en ce noeud est d'autant plus grand que la diffusion introduite dans les équation est petite (α petit).

5.2.13 Simulation en formalisme lagrangien

Jusqu'à présent, nous avons utilisé, comme Liu, le formalisme ALE, pour mener à bien nos simulations de laminage. Vu que METAFOR est un code général et vu que nous avons généralisé le formalisme de Liu (qui est un formalisme eulérien), nous avons également la possibilité d'effectuer les mêmes simulations grâce au formalisme purement lagrangien.

Cependant, de nombreuses difficultés supplémentaires apparaissent très vite. La principale vient de la détermination des conditions aux limites. En effet, le terme transitoire de la formule donnant les conditions aux limites 4.53 prend ici une importance non négli-

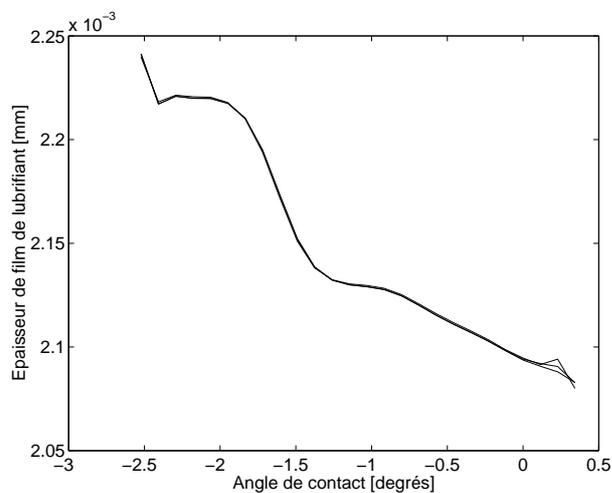


FIG. 5.47: Solutions stationnaires pour différentes valeurs du coefficient d'upwind α .

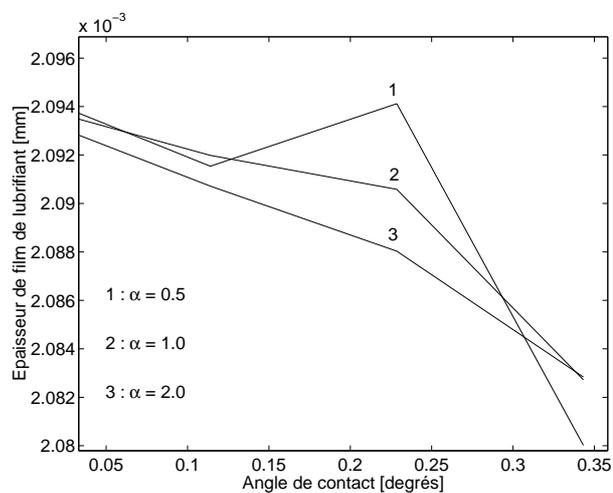


FIG. 5.48: Solutions stationnaires pour différentes valeurs du coefficient d'upwind α (zoom sur la sortie).

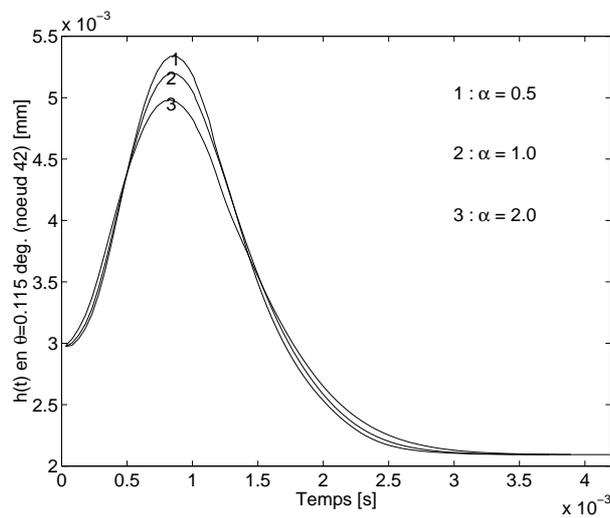


FIG. 5.49: Evolution temporelle de la solution en un noeud particulier en fonction du facteur d'upwind α .

geable. Il faut donc déterminer le plus précisément possible ce terme (qui, divisé par l'angle d'entrée, donne une contribution supplémentaire à la vitesse moyenne relative d'entrée).

Il serait possible de remplacer les deux termes de vitesse (vitesse moyenne relative et terme transitoire) par la vitesse eulérienne mais cela serait correct uniquement dans le cas d'une zone d'entrée qui ne se déplace pas au cours du temps (comme dans le cas de cette simulation). Vu cette perte de généralité, nous avons voulu éviter d'effectuer cette manipulation de formule.

Remarquons aussi que dans le cas du laminage lagrangien, notre algorithme détecte deux zones d'entrées (en entrée et en sortie d'emprise). Cela peut paraître bizarre à première vue mais c'est normal : si on considère la zone de sortie d'emprise, et que l'on reste fixe dans l'espace (approche eulérienne), on voit sortir le lubrifiant de l'emprise. Par contre, si on se déplace avec le dernier noeud (qui va plus vite que la tôle et, donc aussi, plus vite que le lubrifiant – approche lagrangienne pour le solide), le lubrifiant semble entrer dans l'emprise puisqu'on avance plus vite que le lubrifiant. Il y a donc deux zones d'entrée !

Nous utilisons une tôle de 20 mm de long, 200 mailles sur la longueur (pour avoir la même taille de maille que dans le cas ALE) et 6 sur l'épaisseur (comme pour la simulation ALE). Les paramètres matériels (tôle, cylindre, lubrifiant), la géométrie et les paramètres numériques (upwind, pénalité, tolérance de Newton-Raphson,...) sont identiques à ceux utilisés pour la simulation ALE.

Nous considérons une tôle et un cylindre parfaitement lisses (la rugosité composite est donc nulle) et les tractions et contre-tractions sont appliquées sur les extrémités de la tôle. La stratégie utilisée pour atteindre le régime établi est la même que précédemment : une phase de compression pour obtenir la réduction voulue et pendant laquelle les forces de traction et contre-traction sont progressivement appliquées, suivie d'une phase où le centre du cylindre en rotation reste fixe et la tôle se fait laminier.

Pour éviter d'accumuler les problèmes numériques, nous utilisons, pour cette simulation un calcul analytique de l'angle d'entrée. Nous n'avons pas réussi à obtenir des résultats intéressants sans cette hypothèse (l'épaisseur de film de lubrifiant obtenue est alors 10 fois trop petite).

La résolution d'un problème de ce type va montrer les capacités de notre algorithme à traiter des problèmes transitoires. En effet, la solution obtenue est, dans le cas d'un problème lagrangien, transitoire bien que, si on regarde uniquement sous le cylindre sans suivre la matière (observateur eulérien) on espère observer un phénomène stationnaire. Cependant, celui-ci ne le sera jamais complètement

Les figures 5.50 et 5.51 montre les pressions et cisaillements obtenus par les deux formalismes (ALE et lagrangien) lorsque le régime établi est atteint. On constate que les courbes se superposent bien et les résultats concordent. On observe cependant un cisaillement global légèrement plus élevé dans le cas lagrangien. Ceci est dû en partie à l'épaisseur de

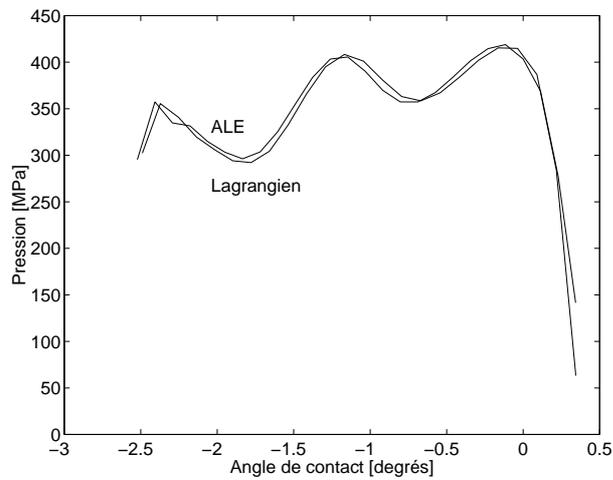


FIG. 5.50: Pressions obtenues par les deux formalismes.

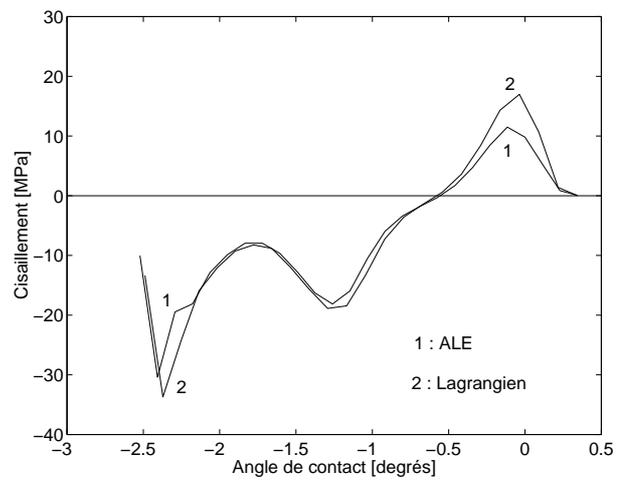


FIG. 5.51: Cisaillement obtenu par les deux formalismes.

lubrifiant qui est plus faible dans le cas lagrangien qu'en ALE. On peut voir les épaisseurs de lubrifiant sur les figures 5.52 et 5.53.

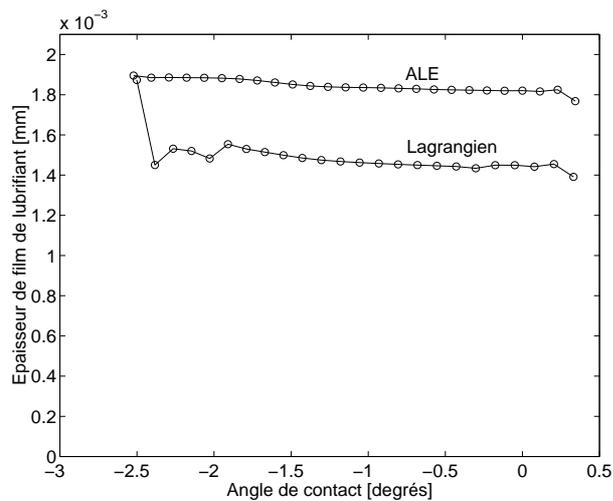


FIG. 5.52: Epaisseurs de film obtenues par les deux formalismes.

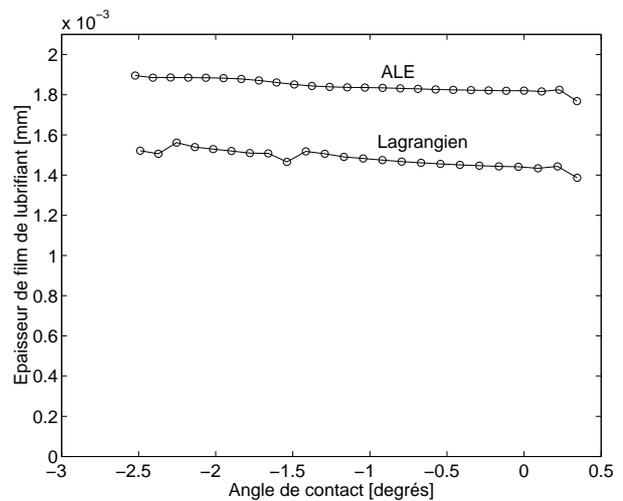


FIG. 5.53: Epaisseurs de film obtenues par les deux formalismes (20 pas plus tard).

Ces deux figures sont deux solutions espacées de 20 pas temporels. On voit que l'épaisseur de film varie fort au cours du temps sur le premier noeud mais qu'elle est stabilisée dans l'emprise. La solution lagrangienne s'est stabilisée 3 microns en dessous de la solution ALE. Vu les variations de l'épaisseur de lubrifiant au premier noeud, nous trouvons déjà remarquable que le reste du profil lagrangien ne présente pas plus d'oscillations.

La figure 5.54 montre l'évolution temporelle de l'épaisseur de film de lubrifiant calcu-

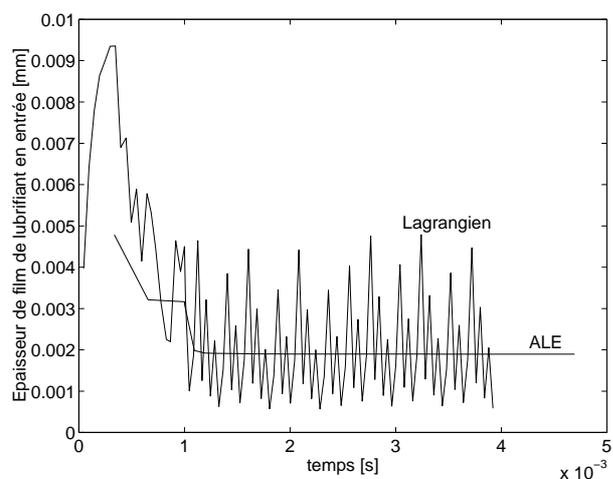


FIG. 5.54: Epaisseurs de film en entrée obtenues par les deux formalismes.

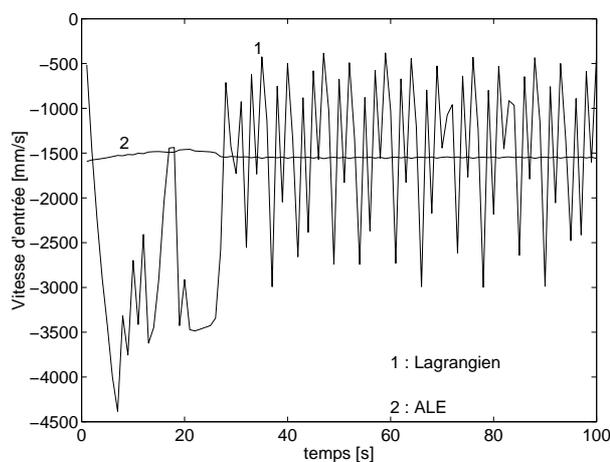


FIG. 5.55: Vitesses moyennes (eulériennes) calculées par les deux formalismes.

lée au premier noeud dans le cas des deux formalismes. On remarque que l'amplitude des oscillations sur la solution lagrangienne est très grande malgré que l'on utilise une estimation analytique de l'angle d'entrée. On pourrait, en effet, montrer que toutes les grandeurs (pression, vitesse, ...) oscillent plus ou moins autour de la valeur obtenue par ALE.

La figure 5.55 montre la vitesse d'entrée calculée dans les deux formalismes (c'est principalement les oscillations de cette vitesse qui induisent des oscillations sur la valeur de h en entrée). Comme nous l'avons dit plus haut, la vitesse ALE se stabilise vers la vitesse moyenne eulérienne alors que la vitesse lagrangienne se compose d'une composante lagrangienne (la vitesse moyenne relative au maillage) et d'un terme transitoire. C'est ce dernier terme qui n'est pas évalué assez précisément.

5.3 Conclusions

Les exemples numériques présentés dans ce chapitre montre que nous sommes capables, à l'heure actuelle, de simuler correctement une opération de laminage en régime hydrodynamique en film épais et film mince par la méthode des éléments finis. Nous avons retrouvé avec une bonne concordance les résultats publiés dans la littérature sur ce sujet. Rappelons, qu'à notre connaissance, seul Liu a développé un modèle où la tôle et le lubrifiant est traité par la méthode des éléments finis.

Nous avons cependant constaté, au cours de nos multiples tests sur les paramètres du problème, qu'il existe principalement plusieurs points problématiques qui doivent être approfondis pour pouvoir parler d'une formulation tout à fait générale, indépendante du

problème.

- Premièrement, nous avons vu que la pression dans la zone d'entrée est en général très mal définie. Or, la valeur de l'épaisseur de film de lubrifiant dans la zone d'entrée dépend directement de cette pression (à moins que l'on utilise une viscosité variant fortement avec la pression, comme le fait Liu). Il faudra donc modifier le calcul de l'épaisseur de film de lubrifiant de telle manière à ce qu'elle ne dépende plus si fortement de cette valeur. Une solution serait de tenir compte du gradient de pression dans la zone d'entrée.
- Deuxièmement, nous avons constaté que la géométrie de la zone d'entrée tend à se dégrader (présence d'oscillations) lors de l'utilisation du formalisme ALE. Ceci est dû à l'algorithme de remaillage des lignes frontières des domaines ALE. En conséquence, il est difficile de calculer l'angle d'entrée avec précision et l'épaisseur du film de lubrifiant en entrée ne peut pas être calculée correctement. La solution que nous avons utilisée ici, lorsque la méthode géométrique donnait de mauvais résultats, consiste à calculer analytiquement cet angle en fonction de la position du premier noeud de contact sur le cylindre. Il faudra donc impérativement, dans la suite de ce travail, mettre au point une méthode de remaillage des frontières des domaines ALE qui permette un meilleur calcul de l'angle d'entrée.
- Les deux problèmes numériques que nous venons de citer concernent les conditions aux limites du problème de lubrification. Leur résolution est nécessaire pour pouvoir simuler correctement des processus stationnaires (laminage, extrusion) et transitoires (emboutissage, forgeage). Un autre problème numérique de notre formulation vient de la détermination des conditions initiales. Celles-ci sont importantes uniquement dans le cas de processus transitoires (dans le cas de processus stationnaires tels que le laminage, peu importe la manière dont on atteint le régime établi). Pour simuler correctement l'emboutissage, il faudra donc pouvoir déterminer de façon précise l'épaisseur de lubrifiant lors de l'impact du poinçon sur la tôle.

Nous avons également constaté la supériorité du formalisme ALE sur le formalisme lagrangien lorsqu'il s'agit de traiter des problèmes stationnaires tels que le laminage.

Le problème principal supplémentaire rencontré pour le formalisme lagrangien est l'évaluation correcte des dérivées temporelles apparaissant dans les équations.

En conclusion, nous voyons que l'algorithme permettant la résolution de l'équation de Reynolds fonctionne très bien. Les difficultés proviennent de la détermination précise à partir de données imprécises (maillage EF approximant une surface courbe, pénétration des noeuds en contact) des conditions initiales et limites à appliquer à cette équation.

Chapitre 6

Etude de l'indentation d'aspérités

6.1 Déformation d'aspérités

Dans les processus de mise à forme des matériaux et en particulier dans le laminage, une connaissance approfondie des interactions entre le métal et les outils est primordiale pour obtenir une modélisation correcte de la réalité. En effet, de nombreux phénomènes microscopiques entrent en jeu dans les zones de contact. Parmi ceux-ci, citons par exemple :

- l'écrasement et l'indentation des aspérités formant la rugosité de la tôle et de l'outil ;
- l'écoulement du lubrifiant dans les vallées formées par les aspérités ;
- l'endommagement et l'usure des surfaces en contact ;
- la présence d'impuretés, d'oxydes sur la surface de la tôle, ...

La plupart des codes de simulation actuels (éléments finis ou autres) prennent en compte ces phénomènes compliqués par l'intermédiaire d'un coefficient de frottement global traduisant le frottement moyen observé lors d'une expérience (loi de Coulomb).

Dans cette section, nous abordons le phénomène d'indentation d'une tôle lisse par un cylindre rugueux dans le cadre du laminage. Ce phénomène est principalement observé et étudié dans le cadre du *skin-pass*, c'est-à-dire l'impression d'une rugosité prédéfinie sur la tôle dans la dernière cage du laminoir. Lors de ce processus, la tôle ne subit qu'une réduction minimale par rapport aux réductions imposées dans les cages précédentes.

D'un point de vue numérique, de nombreuses études ont déjà été poursuivies sur le sujet de l'indentation. Cependant, celles-ci se concentrent généralement sur une seule aspérité, voire deux et les conditions aux limites imposées sont souvent discutables. Nous envisageons donc de simuler numériquement l'indentation d'aspérités dans un contexte plus global en simulant l'opération de laminage complète sur une portion de tôle "grande" (cette notion sera précisée ultérieurement) par rapport à la dimension des aspérités.

De cette manière, les conditions aux limites sont automatiquement plus proches de la réalité. Cependant, un tel calcul exige des ressources informatiques importantes et on comprend très vite pourquoi de telles simulations n'étaient pas réalisables il y a quelques années encore.

6.2 Description de la simulation

La simulation présentée est un cas de skin-pass. Le but est d'imprimer une rugosité périodique sur la tôle. Le cylindre est rugueux et supposé rigide. La tôle est initialement parfaitement lisse et déformable. Vu la symétrie du problème, on n'étudie qu'une demi-épaisseur de tôle. La loi d'érouissage du matériau utilisé pour la tôle est du type élasto-plastique à érouissage isotrope non linéaire. On modélise des aspérités en dents de scie (figure 6.5) espacées uniformément sur la surface du cylindre. Le contact entre la tôle est les aspérités du cylindre est supposé sans frottement. Les valeurs numériques utilisées sont regroupées dans le tableau 6.1 (voir aussi la figure 6.2 pour les notations utilisées).

Module de Young	E	=	200	GPa
Coefficient de poisson	ν	=	0.3	
Loi d'érouissage	σ_Y	=	$171(1 + 121.75 \bar{\epsilon}^p)^{0.23}$	MPa
Rayon cylindre	R	=	209	mm
Base aspérités	b	=	0.05	mm
Angle aspérités	θ	=	1.19028995	rad
Epaisseur de la tôle	t	=	0.5175	mm
Longueur de la tôle	l	=	10	mm

TAB. 6.1: Propriétés matérielles et géométriques du cas présenté

La simulation de laminage se déroule en deux phases bien distinctes. Dans un premier temps, le cylindre de laminage descend sur la tôle et commence à l'indenter (déplacement vertical imposé à 20 microns). Pendant cette phase, la tôle s'aplatit et épouse la forme courbe du cylindre. Cette première phase ne correspond pas à ce qui se passe dans la réalité (la tôle est engagée dans l'emprise). Cependant, cette étape permet de gagner un temps précieux et d'éviter des problèmes de contact difficiles.

La deuxième étape commence lorsque la réduction voulue (20 microns) a été atteinte. On impose alors au cylindre une rotation à vitesse constante jusqu'à ce qu'une aspérité parcourt la totalité de l'emprise, ce qui permet de bien approximer la solution finale qui doit être stationnaire.

La simulation est effectuée sous l'hypothèse quasistatique en état plan de déformation. Le contact est traité par la méthode de la pénalité avec un coefficient de pénalité de $5 \cdot 10^3 N/mm$.

6.3 Génération du maillage

La géométrie initiale de la tôle est un domaine rectangulaire qui doit être maillé très finement sur la face supérieure qui va être indentée. Pour obtenir une description correcte de la surface en contact au cours du calcul, il faut utiliser un minimum de 20 à 30 mailles par aspérité. Un maillage classique (avec des mailles partout similaires) de la totalité du domaine entraînerait un nombre de mailles beaucoup trop important (de l'ordre de 200000).

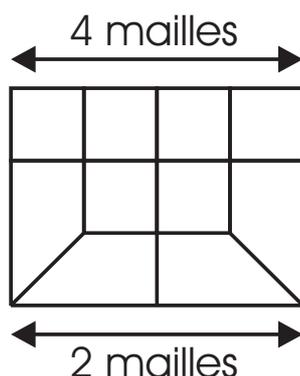


FIG. 6.1: Dédoublage des mailles sur la surface de la tôle

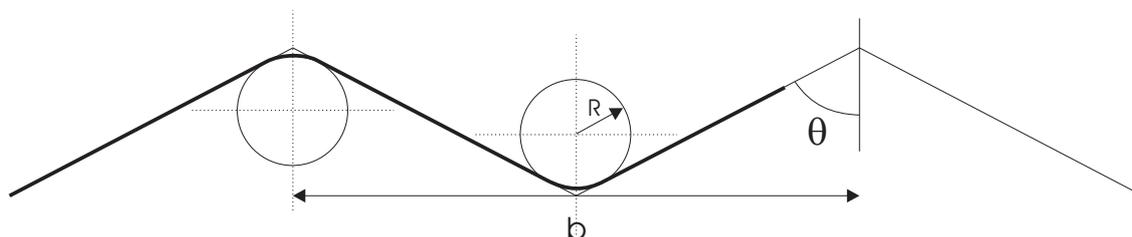


FIG. 6.2: Génération de la surface du cylindre ($b = 30\mu m$, $R = 10\mu m$, $\theta = 1.19 \text{ rad} = 68.22 \text{ degrés}$)

De plus, le coeur de la tôle serait maillé d'une manière beaucoup trop fine. En effet, si on utilise par exemple 10000 mailles sur la surface de la tôle, il faudra en utiliser autant sur l'axe de symétrie de la tôle (les lignes en vis-à-vis doivent être constituées du même nombre de mailles). Or, on pourra constater par la suite que les déformations restent confinées dans le voisinage de la peau supérieure.



FIG. 6.3: Géométrie et maillage (51000 éléments) — vue globale (10 mm de largeur)

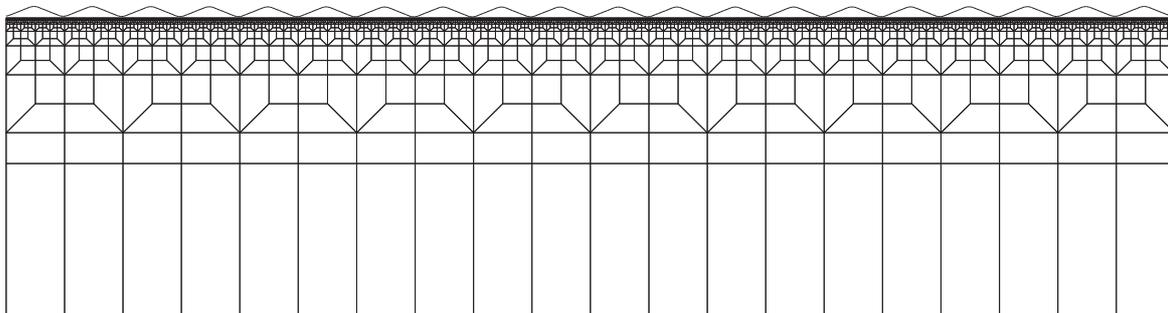


FIG. 6.4: Géométrie et maillage — zoom au droit de l'axe des cylindres ($600 \mu m$ de largeur)

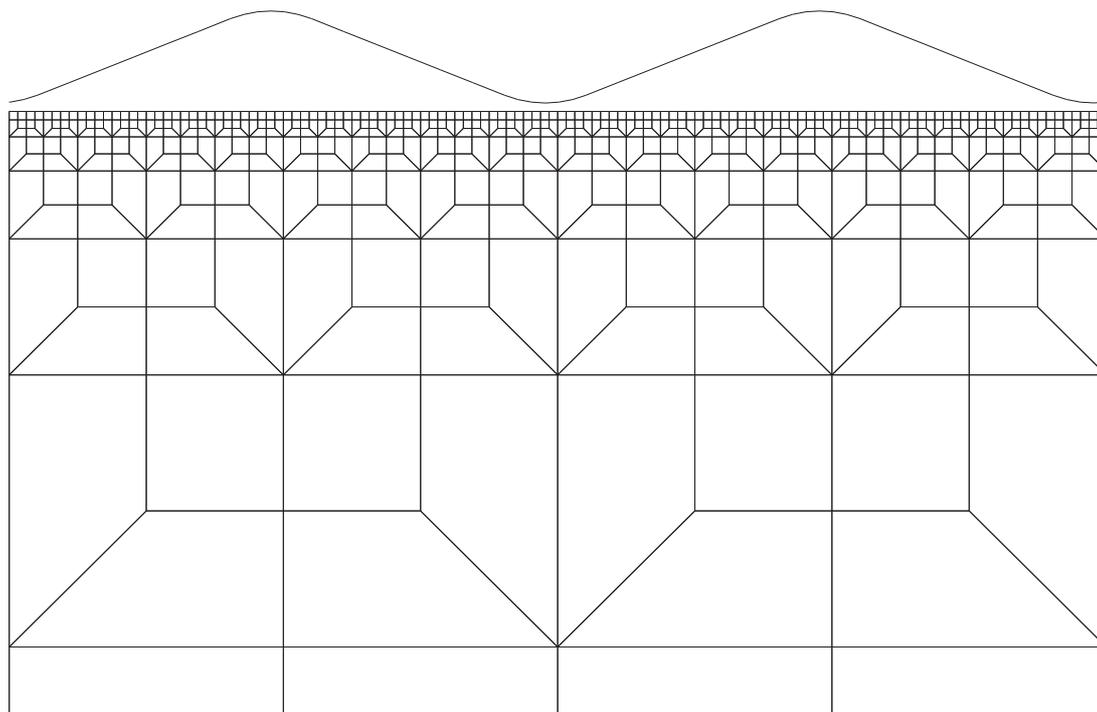


FIG. 6.5: Géométrie et maillage — zoom à l'échelle des aspérités ($60 \mu m$)

Nous avons donc utilisé un maillage quadrangulaire d'un autre type qui permet de définir un nombre de noeuds différent sur la face supérieure et la face inférieure du domaine. Lorsqu'on progresse de l'axe de symétrie de la tôle vers sa surface, on génère le maillage par couches successives. Pour chaque nouvelle couche, on peut soit décider de garder le nombre de mailles constant, soit le multiplier par deux suivant le motif de la figure 6.1.

L'utilisation de ce type de maillage a nécessité la mise au point d'un petit programme auxiliaire pour pouvoir automatiser sa création. Pour ce nouveau mailleur, l'utilisateur entre toutes les données géométriques du problème. Il spécifie également l'épaisseur de la couche surfacique dans laquelle la taille des mailles va être progressivement réduite.

Pour la simulation présentée, nous utilisons 200 mailles sur l'axe de symétrie et 6 couches où le nombre de mailles est multiplié par deux. On obtient ainsi 12800 mailles en surface, c'est-à-dire des mailles cubiques de 0.74 microns (pour rappel, la largeur d'une aspérité est de 30 microns).

Pour représenter le cylindre de laminage rigide et ses aspérités, nous devons définir une matrice de contact composée de segments décrivant les aspérités. Cependant, il n'est pas pensable d'obtenir des résultats avec des aspérités parfaitement triangulaires. En effet, pour des raisons de convergence numérique, la normale à la surface de contact doit être continue. Nous devons donc introduire des congés de raccordement chaque fois que l'intersection de deux droites forme un angle vif.

Pour générer de façon automatique et rapide la surface du cylindre, nous avons mis au point un deuxième petit programme dans lequel l'utilisateur entre les données relatives à une aspérité ainsi que leur nombre, leur espacement et les rayons des congés de raccordement. Ce programme génère également un fichier de visualisation entièrement paramétré pour le post-traitement des résultats.

Dans notre cas, on utilise 500 aspérités avec des congés de raccordement de 0.01 mm. Le problème ainsi discrétisé possède 51000 éléments et 114819 degrés de liberté.

6.4 Résultats obtenus

Vu la taille de la simulation, deux problèmes se sont posés lors de son exécution :

- La mémoire nécessaire est très importante bien que la largeur de bande moyenne du système à résoudre soit faible (93). Le problème occupe 468 Mo en mémoire centrale. Bien que nos machines possèdent 1.5 Go de mémoire, il n'est pas possible à l'heure actuelle d'augmenter la taille du problème. En effet, la version actuellement utilisée du logiciel de prétraitement des données est assez vieille et ne permet pas d'utiliser un numéro de noeud supérieur à 99999. Cependant, des travaux sont en cours pour remédier très bientôt à cette limitation artificielle du code.

- Le temps de calcul est très long (environ 4 semaines). Envisager un problème plus gros entraînerait inévitablement des attentes encore plus longues. Cependant, vu la puissance croissante des machines, nous pensons que cet inconvénient sera de moins en moins crucial à moyen terme. Nous avons également tenté de résoudre le problème avec une matrice de raideur symétrisée mais le gain de temps obtenu pour l'inversion de chaque système d'équations est compensé par l'augmentation du nombre de systèmes à inverser à cause de la détérioration de la convergence. Au total, il n'est pas intéressant, dans ce cas, d'utiliser de symétriser la matrice de raideur.

La première phase du calcul (descente du cylindre de 20 microns) nécessite 1858 pas de temps et 128 h 10' de calcul. Après cette phase, le cylindre est mis en rotation. Nous montrons ici les résultats après une rotation de 0.3 degré, c'est à dire un avancement de 1 mm de la tôle dans l'emprise. Ces résultats correspondent à 3155 pas de temps et 212 h 21' de calcul.

Pour accélérer le calcul, nous avons essayé d'utiliser le solveur itératif (GMRES) au lieu du solveur direct traditionnel (Gauss et SKYLINE). Celui-ci permet d'économiser légèrement l'espace mémoire nécessaire à l'exécution du problème mais il n'est pas possible de gagner du temps. Cette constatation n'est pas étonnante quand on sait que le solveur itératif est d'autant plus puissant que la largeur de bande moyenne du système à résoudre est importante (il n'en serait pas de même pour un problème 3D). Or ici, la largeur de bande reste très limitée (93 sur un total de 114819 degrés de liberté).

Nous avons choisi de représenter la déformée et la déformation plastique équivalente dans trois zones différentes : au début de l'emprise, dans l'emprise et en sortie d'emprise.

La figure 6.6 représente la situation à la sortie de l'emprise. On voit que la tôle a été indentée et que les aspérités formées (rugosité transmise) situées à droite ne sont plus en contact.

On constate également que certaines aspérités du cylindre ne sont pas totalement remplies de matière (partie amont de l'aspérité). Ceci est dû à la légère réduction d'épaisseur imposée. En effet, la tôle étant comprimée par les cylindres a tendance à se dilater dans la direction de laminage par effet de Poisson. Les aspérités sont donc déplacées vers la droite. Cependant, le cylindre reste fixe et les aspérités, nouvellement formées subissent un léger labourage (voir à ce sujet les "vallées" planes entre deux pics sur la droite de la figure 6.6). C'est un phénomène intéressant car on aurait plutôt tendance à dire que c'est le contraire qui devrait se produire.

La figure 6.7 montre un agrandissement au droit de l'axe reliant les centres des deux cylindres. Le maillage est également représenté. On constate que les mailles sont légèrement penchées dans le sens du laminage. C'est normal puisque l'avancement de la tôle est dû uniquement à l'entraînement des aspérités du cylindre sur la surface indentée de la tôle. Cette figure permet aussi de se faire une idée sur la couche surfacique de matière influencée par les aspérités du cylindre (environ la hauteur représentée sur la figure – soit plus ou

moins 50 microns). Il serait donc intéressant de recommencer un calcul identique avec un maillage plus fin dans cette zone.

La figure 6.9 montre l'entrée de l'emprise. On voit très bien sur cette figure les nouveaux contacts qui apparaissent au fur et à mesure que le cylindre tourne. Il est aussi intéressant de remarquer comment se remplissent les cavités entre les aspérités. Comme sur les autres figure, nous avons ici aussi une estimation de la zone d'influence des aspérités (environ 50 microns).

6.5 Perspectives

Nous avons vu que, malgré la lourdeur de la simulation, METAFOR est capable de gérer un problème de laminage incluant l'indentation d'aspérités. Nous regroupons ci-dessous une première liste de perspectives intéressantes suite à notre premier contact avec le problème :

- Après avoir montré qu'une telle simulation est possible, il faudrait faire varier tous les paramètres présents dans la simulation pour étudier leur influence sur les résultats. Citons en particulier, la loi de comportement utilisée pour la tôle (écrouissage), la taille et la forme des aspérités (génération aléatoire de la taille des aspérités), le frottement local au niveau des aspérités (ici supposé nul), le rayon du cylindre et les forces appliquées.
- Il faudrait aussi porter une attention toute particulière à la loi constitutive utilisée pour décrire le matériau ainsi qu'à l'influence des paramètres introduits sur les résultats obtenus.
- Il serait intéressant de prendre en compte la déformation du cylindre. En effet, il est bien connu que la déformation du cylindre est très importante dans une opération de 'skin-pass'. Néanmoins, cela nécessite de mailler le cylindre (ou au moins une couche superficielle) et on rencontrerait des problèmes similaires à ceux rencontrés pour le maillage de la tôle. De plus, la taille du problème augmenterait énormément. Donc un temps de calcul bien plus élevé.
- Pour diminuer considérablement le temps de calcul, l'utilisation d'une machine multi-processeurs serait très bénéfique. Il faudrait donc paralléliser le code ou tout du moins les routines les plus gourmandes en temps de calcul telles que le solveur mais aussi la recherche des noeuds en contact et l'intégration des équations constitutives.
- L'utilisation d'une fonction de 'restart' (bientôt présente dans METAFOR) permettrait de gagner beaucoup de temps lors des simulations. En effet, il peut arriver que le calcul ne converge plus après plusieurs dizaines voire centaines d'heures de calcul pour toutes sortes de raisons (coefficient de pénalité mal adapté, précision demandée trop faible, mauvaise définition du centre de rotation, ...). Il est donc primordial, dans ces cas là, de pouvoir recommencer le calcul légèrement avant le passage critique.
- Pour garantir la qualité du maillage pendant tout le calcul, un algorithme de re-maillage adaptatif serait une bonne chose. Couplée au point précédent, l'utilisation

du formalisme Arbitraire Lagrangien Eulérien (ALE) permettrait certainement une convergence plus rapide de chaque pas de temps et donc des pas de temps plus grands.

- Il serait aussi intéressant de considérer une tôle non plus lisse mais rugueuse pour examiner l'interaction des aspérités lors du laminage.
- La prise en compte d'un lubrifiant dans les vallées inter-aspérités pourrait aussi rendre le modèle plus réaliste.
- Utiliser un écoulement cinématique pourrait être une bonne idée si le phénomène de labourage est observé et dans le cas du skin-pass. Cependant, nous pensons que l'influence de ce type de loi joue un rôle secondaire (moins important que la déformation du cylindre par exemple).
- Enfin, la mise au point d'un algorithme multi-grilles – une grille grossière pour les déformations globales à laquelle on superpose une grille fine dans le voisinage de l'interface – pourrait également conduire à de substantielles économies de temps de calcul.

6.6 Conclusions

La simulation de skin-pass réalisée prouve que METAFOR est capable de gérer des problèmes complexes se déroulant à plusieurs échelles différentes (centimètres pour la tôle et microns pour les aspérités) sans trop de difficultés. Le problème principal est le temps nécessaire pour le calcul. Cependant, les nouvelles technologies (processeurs plus puissants) ainsi que les nouvelles techniques numériques (parallélisation, remaillage, ALE) permettront certainement d'étudier efficacement ce problème en profondeur.

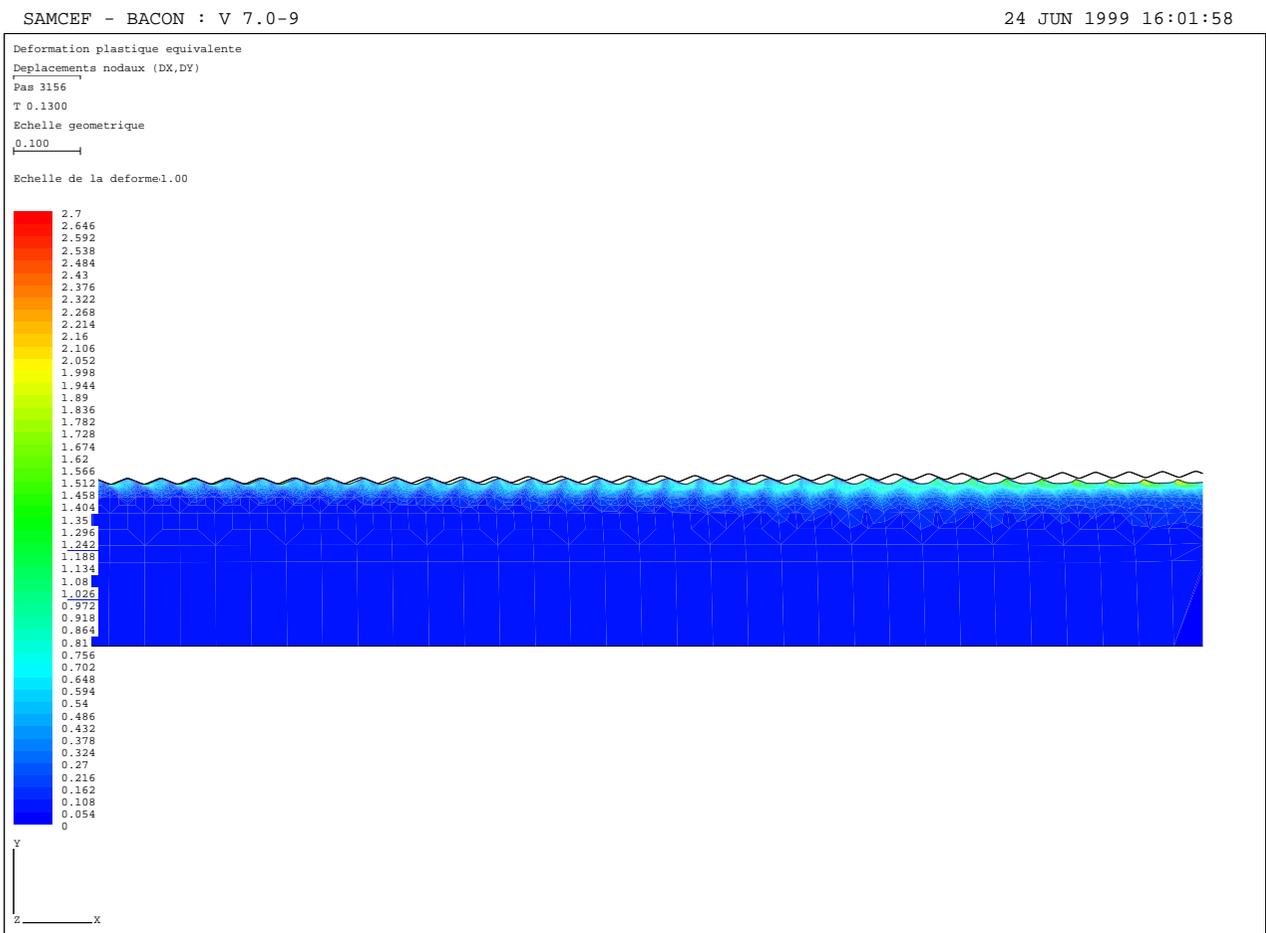


Fig. 6.6: Déformation plastique équivalente en sortie d'emprise

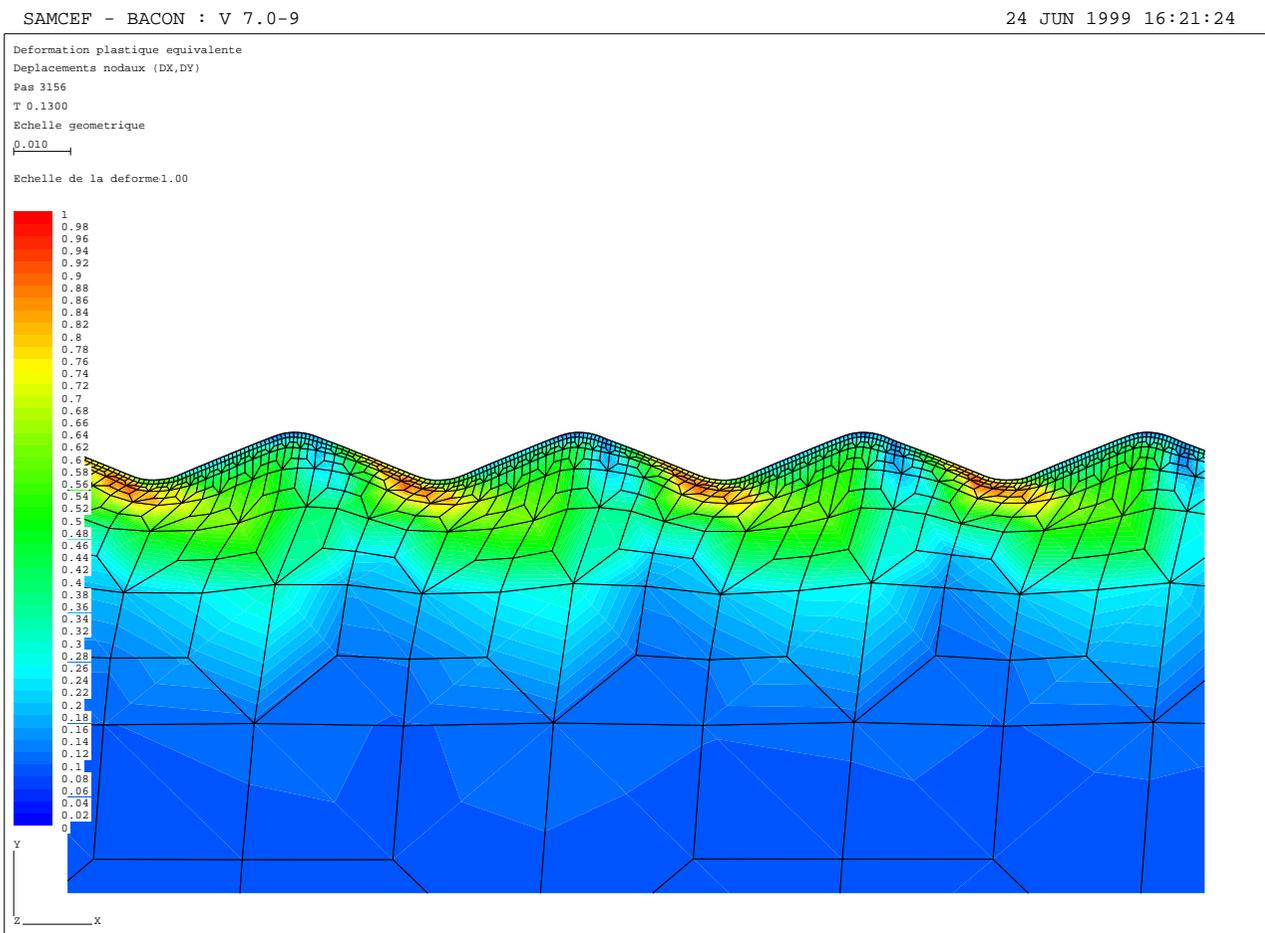


FIG. 6.7: Déformation plastique équivalente au droit de l'axe joignant les centres

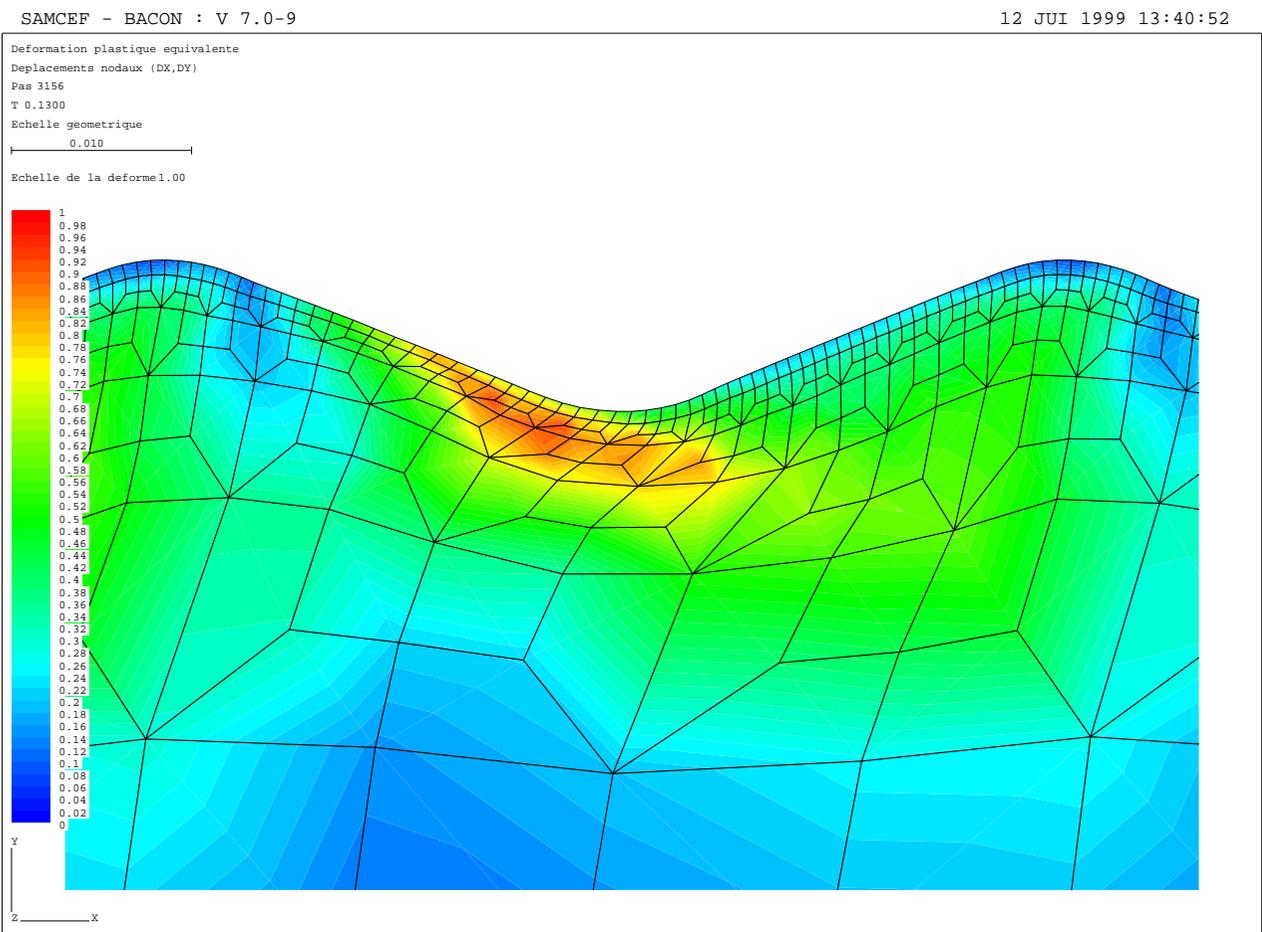


FIG. 6.8: Agrandissement sur une aspérité

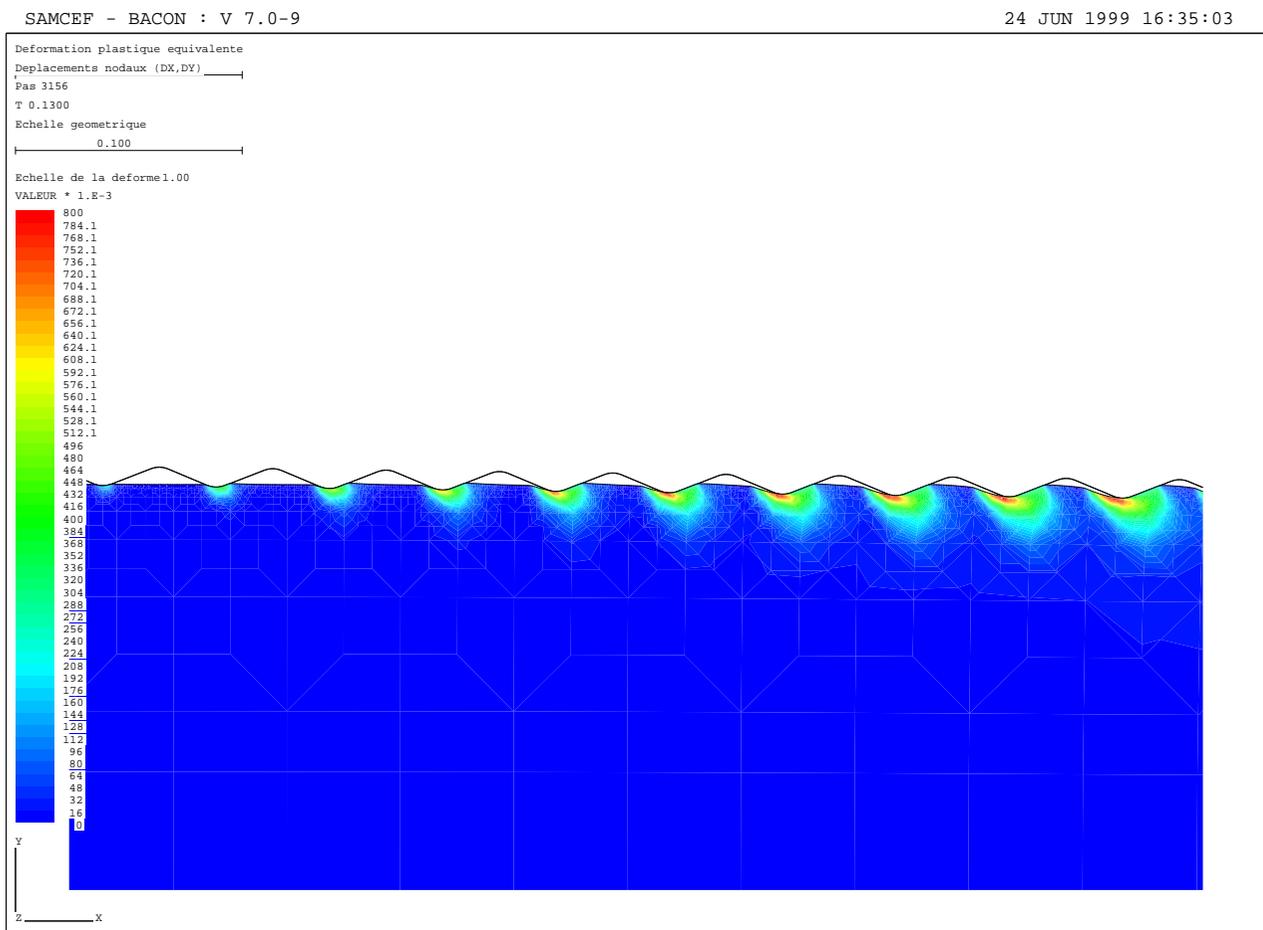


FIG. 6.9: Déformation plastique équivalente en entrée d'emprise

Chapitre 7

Conclusions

7.1 Conclusions générales

Ce rapport présente le travail effectué pendant un an sur la théorie de la lubrification dans le cadre des opérations de mise à forme des matériaux. En effet, nous avons décidé de séparer complètement le rapport de première année de bourse F.R.I.A. et celui de deuxième année vu que les sujets traités le permettaient.

Le travail de cette année a totalement exploité les résultats et les algorithmes mis au point la première année. Il s'agit des deux méthodes de convection des grandeurs stockées aux points de Gauss dans le cadre du formalisme Arbitraire Lagrangien Eulérien (ALE). En effet, nous avons vu dans ce rapport que la précision des résultats obtenus lors de la résolution des équations du mouvement du lubrifiant dans la zone de contact était due en grande partie à l'utilisation de ce formalisme très général.

Après avoir introduit les équations à résoudre dans le chapitre introductif, nous les avons appliquées en reprogrammant complètement le modèle de lubrification mixte de Marsault pour la résolution du laminage à froid de tôles minces. Bien que cette partie du travail n'est pas originale, elle nous a permis de nous familiariser avec les concepts compliqués de la lubrification et des mécanismes d'écrasement d'aspérités. On peut dire également que c'est la seule (mais importante) expérience que nous avons acquise dans l'étude du régime mixte, toujours encore très mal compris à l'heure actuelle, vu la complexité des phénomènes microscopiques et macroscopiques entrant en jeu. Nous avons prouvé, dans ce chapitre, que notre implémentation de ce modèle est correcte et que nous retrouvons les résultats obtenus par Marsault.

L'étape suivante consistait à introduire un tel modèle de lubrification dans notre code de calcul par éléments finis, METAFOR. Cette adaptation n'est malheureusement pas directement possible pour plusieurs raisons que nous avons expliquées en détails. Nous

avons dû nous contenter de résoudre l'équation de Reynolds moyenne correspondant à des cas où les aspérités des deux surfaces en contact ne sont pas en contact. Cependant, l'influence des aspérités sur l'écoulement est prise en compte par des facteurs d'écoulement.

Bien que cette équation est unidimensionnelle et ne possède qu'une inconnue (l'épaisseur locale de lubrifiant), la résolution n'est pas aisée vu les fortes non linéarités présentes dans l'équation. De plus, notre approche ALE nous amène à considérer un maillage mobile dont le nombre de noeuds évolue dans le temps au fur et à mesure que les noeuds du maillage entrent où quittent la zone de contact.

La méthode que l'on a utilisée est basée sur le travail de Liu & Hu. Nous avons cependant dû généraliser cette formulation du problème pour le formalisme ALE et pour tenir compte des termes transitoires présents dans l'équation de Reynolds.

Comme application numérique, nous présentons une simulation de laminage précédemment effectuée par Liu, pour valider son algorithme. Nous avons montré que nous obtenons les mêmes résultats que lui. Nous avons ensuite détaillé toutes les difficultés rencontrées pour obtenir ces résultats. Celles-ci peuvent se résumer comme suit :

- Le formalisme lagrangien fournit de moins bons résultats que le formalisme ALE. En effet, les équations résolues dans les deux cas ne sont pas les mêmes. Pour le problème ALE, lorsque la solution stationnaire est atteinte, on résout exactement les équations eulériennes présentées par Liu (pas de dérivées temporelles). Par contre, lorsqu'on effectue une approche lagrangienne du problème, les termes de l'équation de Reynolds sont calculés différemment (les dérivées temporelles, difficiles à calculer avec précision, correspondent à des dérivées spatiales du formalisme ALE. Bien que les solutions obtenues seraient identiques dans le cas des deux formalismes si elles étaient résolues sur un maillage infiniment fin avec des paramètres (vitesses, pressions,...) calculés exactement, on constate en pratique que la solution ALE est, de loin, la plus précise.
- L'évaluation des conditions initiales est problématique. En effet, à cause notamment de l'utilisation de la méthode de la pénalité pour la gestion du contact et des pénétrations qui en résultent, il n'est pas facile de déduire précisément la géométrie et le champ de vitesse lors d'un impact (début du calcul). Cependant, les conditions initiales à appliquer à l'équation de Reynolds sont extrêmement sensibles à ces deux données. Nous avons donc, pour l'instant, fixé les conditions initiales comme des constantes connues et données par l'utilisateur du code. Remarquons cependant que ces valeurs n'influencent pas le régime établi lorsqu'on s'intéresse à un processus stationnaire. Par contre, des conditions initiales précises seront indispensables pour traiter des problèmes transitoires (emboutissage).
- Le même problème apparaît pour la détermination des conditions aux limites. En effet, vu que la surface de la tôle, physiquement continue, est discrétisée par une série de segments de droite, il est assez compliqué de calculer correctement l'angle d'entrée dans la zone de contact. La pression aux noeuds extrêmes de la zone de contact est aussi très fluctuante avec l'entrée en contact (et la sortie) des noeuds dans la zone.

Vu que ces deux grandeurs apparaissent explicitement dans l'équation fournissant les conditions aux limites, la précision de ces dernières n'est pas toujours excellente. Ce problème est moins prononcé dans le cas de lubrifiants dont la viscosité dépend fortement de la pression par la loi de Barus. Dans ce cas particulier, la valeur de l'épaisseur de film de lubrifiant devient indépendante de la pression. Le problème de l'angle, quant à lui, doit être résolu au cas par cas.

En conclusion, nous pensons que nous avons mis au point un algorithme permettant de simuler correctement des processus stationnaires en régime hydrodynamique grâce au formalisme ALE. Quelques améliorations pourront être apportées dans le futur. Pour des problèmes purement transitoires, comme l'emboutissage qui nous intéresse tout particulièrement, une détermination précise des conditions initiales devra être mise au point. Il n'y aura cependant pas d'autres modifications à ajouter à la méthode de résolution puisque celle-ci tient compte déjà des phénomènes transitoires (termes transitoires dans l'équation de Reynolds, évolution temporelle de la zone de contact et prise en compte des conditions aux limites variables au cours du temps).

7.2 Perspectives

Le travail de ces deux années présente de nombreuses perspectives pour améliorer le modèle fonctionnant à ce jour. Ces perspectives ont été énumérées tout au long de ce manuscrit et nous reprenons rapidement les principales directions de recherche que nous allons nous fixer dans la suite :

- Nous allons tout d'abord essayer de résoudre les problèmes provenant de la mauvaise évaluation de la pression et de l'angle d'entrée pour la détermination précise des conditions aux limites. Pour ce faire, il sera possible de tenir compte du gradient de pression dans l'analyse de la zone d'entrée (supposé nul jusqu'à présent). On pourra également utiliser des fonctions splines pour approximer correctement la géométrie de cette zone critique.
- Nous allons mettre au point une nouvelle méthode de remaillage des frontières des domaines ALE pour permettre une meilleure approximation de la zone d'entrée et éviter ainsi les oscillations apparaissant dans la solution.
- L'utilisation d'un maillage adaptatif (avec un nombre de mailles qui varie au cours du temps et, donc, une topologie du maillage variant tout au long du calcul) pourra être bientôt envisagée. Ce maillage adaptatif, permettra, dans le cas du formalisme ALE, de raffiner sélectivement la zone d'entrée pour obtenir plus de précision sur sa géométrie exacte.
- Il serait également intéressant d'essayer de résoudre numériquement l'équation de Reynolds dans la zone d'entrée du lubrifiant (pour l'instant, la résolution est en grande partie analytique). Cela permettra certainement de se passer des principales hypothèses effectuées lors de l'intégration analytique. On pourra ainsi comparer les solutions obtenues analytiquement et numériquement.

- Il sera intéressant d'étudier plus en détail l'importance de couplage entre les noeuds apparaissant dans la matrice de raideur tangente du système. On pourra alors certainement négliger certains d'entre-eux et, à l'aide d'une méthode de réactualisation de la ligne de ciel, permettre une résolution rapide du problème de lubrification par un solveur direct traditionnel (pour rappel, on a utilisé, dans ce travail, un solveur itératif, en moyenne cinq fois plus performant que le solveur direct actuel).
- Il faudra étendre notre méthode au cas axisymétrique (en coordonnées cylindriques) pour pouvoir traiter des problèmes tels que l'emboutissage sphérique. Des formulations en coordonnées sphériques existent déjà pour ce type de problème. Il faudra cependant utiliser les coordonnées cylindriques pour pouvoir traiter des problèmes d'extrusion cylindriques. Dans le cas de ces systèmes de coordonnées différents, l'analyse de la zone d'entrée est bien plus compliquée et une intégration analytique de l'équation de Reynolds n'est plus possible en toute généralité.
- Du point de vue du modèle de lubrification, nous ajouterons une équation d'écrasement d'aspérité semblable à celle utilisée par Marsault. On introduira également des équations d'écrasement d'aspérités (Wilson & Sheu, Sutcliffe, ...). On pourra alors traiter des simulations en régime mixte. Cette partie ne sera pas évidente puisque, à l'heure actuelle et d'après nos sources, aucun modèle EF n'existe pour le régime mixte.
- Il sera intéressant d'introduire les effets thermiques dans le modèle de lubrification. Pour ce faire, on pourra, tout d'abord ne traiter que la conduction dans le film de lubrifiant à l'aide d'une équation de la chaleur simplifiée et intégrée sur l'épaisseur. On ajoutera ensuite les effets de convection et la dépendance des paramètres constitutifs du lubrifiant vis-à-vis de la température.
- Enfin, notre séjour au Portugal dans le cadre de la conférence ESAFORM nous a montré qu'il existe maintenant un schéma de convection du deuxième ordre, simple, efficace et bien adaptés pour l'étape de convection des grandeurs aux points de Gauss en formalisme ALE. Cette méthode permet d'obtenir une solution très précise en limitant au maximum la diffusion artificielle. En conséquence, les grands gradients de contraintes près de la surface de la tôle laminée peuvent être obtenus avec une bonne précision, même sur un maillage grossier. A l'heure actuelle, cette méthode peut traiter uniquement des éléments triangulaires du second degré (qui n'existent pas dans METAFOR). On pourra donc soit programmer ces éléments (qui montrent de plus en plus leur supériorité vis à vis des traditionnels quadrangles linéaires, principalement lorsqu'il faut remailler la structure) et utiliser l'algorithme tel quel, soit adapter cet algorithme à des éléments quadrangulaires.

Annexe A

Intégration de l'équation de Reynolds dans la zone d'entrée

A.1 Introduction : première intégration de l'équation de Reynolds

Cette section décrit la méthode utilisée par Hu & Liu [15] pour déterminer l'épaisseur du film d'huile au début de la zone de travail (qui est aussi le début de la zone de calcul) dans le cas du laminage en régime établi.

L'équation de Reynolds doit être intégrée deux fois. Celle-ci s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\phi_p h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[hu + \frac{v\sigma}{2} \phi_s \right] \quad (\text{A.1})$$

En intégrant cette équation de $x = x_i$ à $x = x$, on obtient :

$$\frac{\phi_p(x) h(x)^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\phi_p(x_i) h(x_i)^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x_i} = h(x)u(x) - h(x_i)u(x_i) + \frac{v(x)\sigma}{2} \phi_s(x) - \frac{v(x_i)\sigma}{2} \phi_s(x_i) \quad (\text{A.2})$$

Pour la suite, on pose la viscosité (η) constante sur la zone d'entrée. De plus, la vitesse moyenne (u) et la vitesse de glissement (v) peuvent être considérés comme constant sur la zone d'entrée. Enfin, on suppose que la dérivée de la pression est nulle à l'entrée de la zone de travail. Après ces simplifications, on obtient un équation différentielle du premier ordre qu'il faut encore intégrer une fois sur la zone d'entrée :

$$\frac{\phi_p(x) h(x)^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} = (h(x) - h(x_i))u(x_i) + \frac{v(x)\sigma}{2} (\phi_s(x) - \phi_s(x_i)) \quad (\text{A.3})$$

A.2 Deuxième intégration : méthode de Hu & Liu

On considère un profil parabolique pour l'épaisseur du film de lubrifiant dans la zone d'entrée. Cette parabole est telle qu'elle possède la courbure du rouleau de laminage en $x = x_i$:

$$h(x) = h_i + \frac{x^2 - x_i^2}{2R} \quad (\text{A.4})$$

L'épaisseur de film de lubrifiant adimensionnelle est obtenue en divisant cette parabole par la rugosité composite des deux surfaces en contact (σ) :

$$z(x) = h(x)/\sigma \quad (\text{A.5})$$

Les facteurs d'écoulement de Tripp s'écrivent :

$$\phi_p = 1 - \frac{3}{2z^2} \quad (\text{A.6})$$

$$\phi_s = \frac{3}{2z} \frac{\sigma_a^2 - \sigma_b^2}{\sigma^2} \quad (\text{A.7})$$

En introduisant ces expressions (A.4, A.5, A.6, A.7) dans l'équation de Reynolds intégrée une première fois (A.3), on obtient :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{12\eta \left(\frac{u(x^2 - x_i^2)}{2R} - \frac{v\sigma}{2} \left(\frac{3(\sigma_a^2 - \sigma_b^2)}{2 \left(h_i + \frac{x^2 - x_i^2}{2R} \right) \sigma} - \frac{3(\sigma_a^2 - \sigma_b^2)}{2h_i\sigma} \right) \right)}{\left(h_i + \frac{x^2 - x_i^2}{2R} \right)^3 \left(1 - \frac{3\sigma^2}{2 \left(h_i + \frac{x^2 - x_i^2}{2R} \right)^2} \right)} \quad (\text{A.8})$$

L'intégration de cette dernière expression par rapport à x de $-\infty$ à x_i donne une expression assez compliquée (résultat fourni par MATHEMATICA 3.0) :

$$\begin{aligned} p(-\infty) - p(x_i) &= \frac{R\eta}{3h_i\sigma} \left(\frac{-18vx_i\sigma(\sigma_a^2 - \sigma_b^2)}{-2h_iR + x_i^2} \right) \quad (\text{A.9}) \\ &+ \left(\frac{1}{(2h_iR - x_i^2)^{3/2}} A_1 \left(\text{atan} \left(\frac{x_i}{\sqrt{2h_iR - x_i^2}} \right) + \frac{\pi}{2} \right) \right. \\ &- \frac{1}{\sqrt{2h_iR - x_i^2} - \sqrt{6}R\sigma} A_2 \left(\text{atan} \left(\frac{x_i}{\sqrt{2h_iR - x_i^2} - \sqrt{6}R\sigma} \right) + \frac{\pi}{2} \right) \\ &\left. - \frac{1}{\sqrt{2h_iR - x_i^2} + \sqrt{6}R\sigma} A_3 \left(\text{atan} \left(\frac{x_i}{\sqrt{2h_iR - x_i^2} + \sqrt{6}R\sigma} \right) + \frac{\pi}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

avec les expressions suivantes pour les coefficients des termes en arc-tangente :

$$A_1 = 12\sigma \left(8h_i^3 Ru - 4h_0^2 u x_i^2 + 3h_i R v (\sigma_a^2 - \sigma_b^2) - 3v x_i^2 (\sigma_a^2 - \sigma_b^2) \right) \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \sqrt{6} \left(4\sqrt{6} h_0^2 u \sigma + 3\sqrt{6} v \sigma (\sigma_a^2 - \sigma_b^2) - 6h_0 (2u\sigma^2 + v(\sigma_a^2 - \sigma_b^2)) \right) \\ &= A_4 - A_5 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} A_3 &= \sqrt{6} \left(4\sqrt{6} h_0^2 u \sigma + 3\sqrt{6} v \sigma (\sigma_a^2 - \sigma_b^2) + 6h_0 (2u\sigma^2 + v(\sigma_a^2 - \sigma_b^2)) \right) \\ &= A_4 + A_5 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Dans la suite, nous considérons que :

$$x_i^2 > 2h_i R \pm \sqrt{6} R \sigma \quad \Rightarrow \quad h_i > \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma \quad (\text{A.13})$$

Ce qui implique également que $x_i^2 > 2h_i R$. Cette hypothèse est justifiée en laminage puisque la frontière entre la zone d'entrée et la zone de travail est généralement approximée par $x_i^2 = R(2R - t)$ où t est la réduction subie par la tôle.

Tous les radicants de l'expression (A.10) sont négatifs. Les termes contenant des arc-tangentes sont donc de la forme :

$$\begin{aligned} \operatorname{atan} \left(\frac{x_i}{\sqrt{-\alpha}} \right) &= \operatorname{atan} \left(\frac{-i x_i}{\sqrt{-\alpha}} \right) \\ &= -i \operatorname{atanh} \left(\frac{x_i}{\sqrt{-\alpha}} \right) \\ &= -\frac{i}{2} \left(\ln \left(1 + \frac{x_i}{\sqrt{-\alpha}} \right) - \ln \left(1 - \frac{x_i}{\sqrt{-\alpha}} \right) \right) \\ &= -\frac{i}{2} \left(\ln \left(\frac{x_i}{\sqrt{-\alpha}} + 1 \right) - \left(\ln \left(\frac{x_i}{\sqrt{-\alpha}} - 1 \right) + i\pi \right) \right) \\ &= -\frac{i}{2} \ln \left(\frac{1 + x_i/\sqrt{-\alpha}}{1 - x_i/\sqrt{-\alpha}} \right) - \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

En transformant également les dénominateurs de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (-a)^{3/2} &= \exp\left(\frac{3}{2} \ln(-a)\right) \\ &= \exp\left(\frac{3}{2} (\ln(a) + i\pi)\right) \\ &= a^{3/2} \exp(3i\pi/2) \\ &= -i a^{3/2} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

on obtient dans notre cas :

$$(2h_i R - x_i^2)^{3/2} = -i(x_i^2 - 2h_i R)^{3/2} \quad (\text{A.16})$$

et l'expression (A.10) se transforme en :

$$\begin{aligned} p(x_i) = & -\frac{R\eta}{3h_i\sigma} \left(\frac{-18vx_i\sigma(\sigma_a^2 - \sigma_b^2)}{-2h_iR + x_i^2} \right. \\ & + \left(\frac{1}{(-2h_iR + x_i^2)^{3/2}} A_1 \ln \left(\frac{x_i + \sqrt{-2h_iR + x_i^2}}{x_i - \sqrt{-2h_iR + x_i^2}} \right) \right. \\ & - \frac{1}{\sqrt{-2h_iR + x_i^2 + \sqrt{6}R\sigma}} A_2 \ln \left(\frac{x_i - \sqrt{-2h_iR + x_i^2 + \sqrt{6}R\sigma}}{x_i + \sqrt{-2h_iR + x_i^2 + \sqrt{6}R\sigma}} \right) \\ & \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{-2h_iR + x_i^2 - \sqrt{6}R\sigma}} A_3 \ln \left(\frac{x_i - \sqrt{-2h_iR + x_i^2 - \sqrt{6}R\sigma}}{x_i + \sqrt{-2h_iR + x_i^2 - \sqrt{6}R\sigma}} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Pour pouvoir encore simplifier l'expression de la pression à l'entrée de la zone de travail, il faut faire de nouvelles hypothèses sur le processus étudié. En supposant que :

$$x_i^2 \gg 2h_i R \pm \sqrt{6}R\sigma \quad (\text{A.18})$$

on peut simplifier les arguments des logarithmes de la manière suivante :

$$\frac{x_i + \sqrt{-2h_iR + x_i^2}}{x_i - \sqrt{-2h_iR + x_i^2}} = \frac{\left(x_i + \sqrt{-2h_iR + x_i^2}\right)^2}{x_i^2 - (-2h_iR + x_i^2)} = \frac{4x_i^2}{2Rh_i} = \frac{2x_i^2}{Rh_i} \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{x_i + \sqrt{-2h_iR + x_i^2 \pm \sqrt{6}R\sigma}}{x_i - \sqrt{-2h_iR + x_i^2 \pm \sqrt{6}R\sigma}} = \frac{\left(x_i + \sqrt{-2h_iR + x_i^2 \pm \sqrt{6}R\sigma}\right)^2}{x_i^2 - (-2h_iR + x_i^2 \pm \sqrt{6}R\sigma)} = \frac{4x_i^2}{2h_iR \mp \sqrt{6}R\sigma} \quad (\text{A.20})$$

Remarquons que, dans les deux cas, le radicand du dénominateur ne peut pas se réduire à x_i contrairement à celui du numérateur.

Après un groupement des termes en ' u ' et des termes en ' v ', on retrouve finalement la formule annoncée par Liu (le terme $(\sigma_a - \sigma_b)$ est remplacé par $(\sigma_a^2 - \sigma_b^2)$, ce qui rend la formule dimensionnellement correcte) :

$$\begin{aligned} p = & \frac{12\eta Ru}{x_i} \left[\frac{1}{\sqrt{6}\sigma} \ln \frac{h_i - \sqrt{\frac{3}{2}}\sigma}{h_i + \sqrt{\frac{3}{2}}\sigma} + \frac{h_i}{3\sigma^2} \ln \frac{h_i^2}{h_i^2 + \frac{3}{2}\sigma^2} \right] \\ & + \frac{9\eta Rv}{x_i} (\sigma_a^2 - \sigma_b^2) \left[\frac{2}{3\sigma^2 h_i} + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}\sigma^3} \ln \frac{h_i - \sqrt{\frac{3}{2}}\sigma}{h_i + \sqrt{\frac{3}{2}}\sigma} \right. \\ & \left. + \frac{1}{3h_i\sigma^2} \ln \frac{h_i^2}{h_i^2 + \frac{3}{2}\sigma^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Bibliographie

- [1] D. J. Benson. An efficient, accurate, simple ale method for nonlinear finite element programs. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 72 :305–350, 1989.
- [2] R. Boman. Méthodes itératives pour la résolution de systèmes non linéaires). Technical Report Travail de fin d'étude, Université de Liège, Belgium, 1997.
- [3] R. Boman. Formalisme eulérien lagrangien pour le contact lubrifié entre solides (rapport d'activité FRIA — in French). Technical Report TF-55, Université de Liège, Belgium, 1998.
- [4] R. Boman, L. Colantonio, and J.-P. Ponthot. Iterative solvers for large deformation pressure dependent problems. In Huétink & Baaijens, editor, *Simulation of Materials Processing : Theory, Methods and Applications*, pages 225–231, Rotterdam, The Netherlands, 1998.
- [5] R. Boman and J.-P. Ponthot. ALE methods for stationary solutions of metal forming processes. In J.A. Cavas, editor, *Second ESAFORM conference on Material Forming*, pages 585–589, Guimaraes, Portugal, 1998.
- [6] A. N. Brooks and T. J. R. Hughes. Streamline upwind/ Petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32 :199–259, 1982.
- [7] B. Carleer. *Finite Element Analysis of deep Drawing*. PhD thesis, University of Twente, The Netherlands, 1997.
- [8] S. Cescotto and R. Charlier. Experimental and numerical approaches of contact with friction and wear in large deformation. *European Journal*, 36 :105–114, 1990.
- [9] P. Chabrand, F. Dubois, D. Graillet, and J.-P. Ponthot. Numerical modelling of tribological devices using various contact algorithms. In Huétink & Baaijens, editor, *Simulation of Materials Processing : Theory, Methods and Applications*, pages 839–844, Rotterdam, The Netherlands, 1998.
- [10] H. Christensen. Stochastic models for hydrodynamic lubrication of rough surfaces. *Proc. Instn. Mech. Enrs*, 184 :1013–1022, 1970.

- [11] H. Deresiewicz. Amontons and coulomb, friction's founding fathers. In Ling & Pan, editor, *The Workshop on the Use of Surface Deformation Models to Predict Tribology Behavior*, pages 56–60, Columbia University, New-York, 1986.
- [12] J. Edberg. Three-dimensional simulation of plate rolling using different friction models. In Wood & Zienkiewicz Chenot, editor, *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, pages 713–718, Valbonne, France, 1992.
- [13] H. G. Elrod. A general theory for laminar lubrication with reynolds roughness. *Journal of Lubrication Technology*, 110 :8–14, 1979.
- [14] W. C. Emmens and G. Monfort. The influence of process conditions and surface characteristics on friction at low pressure. In *3rd International Conference on Technology of Plasticity*, pages ?–?, Kyoto, Japan, 1990.
- [15] W-K. Hu and W. K. Liu. An ALE hydrodynamic lubrication finite element method with application to strip rolling. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 36 :855–880, 1993.
- [16] Y-K. Hu and W. K. Liu. Simulation of ring rolling process by arbitrary lagrangian eulerian finite element method. *AMD*, 20 :225–240, 1990.
- [17] A. Huerta, F. Casadei, and J. Donéa. An arbitrary lagrangian-eulerian stress update procedure for coining simulations. In Wood & Zienkiewicz Chenot, editor, *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, pages 261–266, Valbonne, France, 1992.
- [18] H. Huétink. *On the Simulation of Thermo-Mechanical Forming Processes. a Mixed Eulerian-Lagrangian Finite Element Method*. PhD thesis, University of Twente, The Netherlands, 1986.
- [19] D. A. Korzekwa, P. R. Dawson, and W. R. D. Wilson. Surface asperity deformation during sheet forming. *International Journal of Mechanical Science*, 34(7) :521–539, 1992.
- [20] G. Y. Li and P. Huml. Influence of rolling speed on lubricant film thickness and friction in cold rolling. In T. Altan, editor, *Advanced Technology of Plasticity*, pages 15–18, Columbus, Ohio, USA, 1996.
- [21] W. K. Liu, T. Belytschko, and H. Chang. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for path-dependent materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58 :227–245, 1986.
- [22] W. K. Liu and Y. K. Hu. Ale hydrodynamic lubrication finite element method for strip rolling. In Wood & Zienkiewicz Chenot, editor, *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, pages 731–736, Valbonne, France, 1992.
- [23] W. K. Liu and Y-K. Hu. Finite element hydrodynamic friction model for metal forming. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 37 :4015–4037, 1994.
- [24] W. K. Liu, Y-K. Hu, and T. Belytschko. ALE finite elements with hydrodynamic lubrication for metal forming. *Nuclear Engineering and Design*, 138 :1–10, 1992.

- [25] S-W. Lo. A study of flow phenomena in mixed lubrication regime by porous medium model. *Journal of Tribology*, 116 :640–647, 1994.
- [26] P. M. Lugt, A. W. Wemekamp, and ten Napel W. E. Lubrication in cold rolling : Elasto-plasto-hydrodynamic lubrication of smooth surfaces. *Wear*, 166 :203–214, 1993.
- [27] R. P. Maisch, B. Meier, K. Kubli, and J. Reissner. Considering friction effects in the fe-simulation of forming processes. In Wood & Zienkiewicz Chenot, editor, *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, pages 163–168, Valbonne, France, 1992.
- [28] N. Marsault. *Modélisation du régime de lubrification mixte en laminage à froid (in French)*. PhD thesis, Ecole nationale supérieure des mines de Paris, France, 1998.
- [29] N. Marsault, P. Montmitonnet, P. Deneuille, and P. Gratacos. A model of mixed lubrication for cold rolling of strip. In Huétink & Baaijens, editor, *Simulation of Materials Processing : Theory, Methods and Applications*, Rotterdam, The Netherlands, 1998.
- [30] F. Martinet. *Etude et mise en oeuvre d'une formulation ALE. Application au contact lubrifié en mise en forme*. PhD thesis, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille, France, 1998.
- [31] A. Othmani and C. Kaminski. Three dimensional fractal analysis of sheet metal surfaces. *Wear*, 214 :147–150, 1998.
- [32] N. Patir. *Effects of Surface Roughness on Partial Film Lubrication Using an Average Flow Model Based on Numerical Simulation*. PhD thesis, Northwestern University, Evanston, Illinois, 1978.
- [33] N. Patir and H. S. Cheng. An average flow model for determining effects of three-dimensional roughness on partial hydrodynamic lubrication. *Journal of Lubrication Technology*, 100 :12–17, 1978.
- [34] N. Patir and H. S. Cheng. Application of average flow model to lubrication between rough sliding surfaces. *Journal of Lubrication Technology*, 101 :220–230, 1979.
- [35] O. Pawelski, W. Rasp, S. Draese, and P. Häfele. Influence of hydrodynamic effects and surface roughness on tribological phenomena in cold strip rolling. In T. Altan, editor, *Advanced Technology of Plasticity*, pages 15–18, Columbus, Ohio, USA, 1996.
- [36] J-P. Ponthot. *Traitement unifié de la Mécanique des Milieux Continus solides en grandes transformations par la méthode des éléments finis (in French)*. PhD thesis, Université de Liège, Liège, Belgium, 1995.
- [37] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in Fortran 77. The Art of Scientific Computing. Second Edition*. Cambridge University Press, 1997.
- [38] D. Quoirin. *Modélisation des grandes déformations de corps minces. Application à la mise à forme*. PhD thesis, Université de Liège, Belgium, 1996.
- [39] M. Raous and M. Sage. Numerical simulation of the behaviour of surface asperities for metal forming. In Wood & Zienkiewicz Chenot, editor, *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, pages 175–180, Valbonne, France, 1992.

- [40] A. Rodriguez-Ferran, F. Casadei, and A. Huerta. Ale stress update for transient and quasistatic processes. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 42 :?–?, 1998.
- [41] M. Roizard, X. et Assoul. Déformation plastique d'un échantillon rugueux – influence de la rugosité initiale et de l'écroutissage de la surface. In *Tribologie et ingénierie des surfaces*, pages 145–154, 1995.
- [42] D. Rozenwald. *Modélisation thermomécanique des grandes déformations. Application aux problèmes de mise à forme à haute température, aux élastomères et aux structures mixtes acier-élastomères*. PhD thesis, Université de Liège, Belgium, 1996.
- [43] S. Sheu and W. R. D. Wilson. Mixed lubrication of strip rolling. *Tribology Transactions*, 37(3) :483–493, 1994.
- [44] R. J. J. M. Sniekers. *Friction in Deep Drawing*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, The Netherlands, 1996.
- [45] L. Stainier. *Modélisation numérique du comportement irréversible des métaux ductiles soumis à grandes déformations avec endommagement*. PhD thesis, Université de Liège, Belgium, 1996.
- [46] M. P. F. Sutcliffe. Surface asperity deformation in metal forming processes. *Int. J. Mech. Sci.*, 30 :847–868, 1988.
- [47] R. ter Haar. *Friction in Sheet Metal Forming – The Influence of (local) Contact Conditions and Deformation*. PhD thesis, University of Twente, The Netherlands, 1996.
- [48] K. Tonder. Simulation of the lubrication of isotropically rough surfaces. *ASME Transactions*, 23 :326–333, 1980.
- [49] J. H. Tripp. Surface roughness effects in hydrodynamic lubrication : The flow factor method. *Journal of Lubrication Technology*, 105 :458–465, 1983.
- [50] W. R. D. Wilson. Friction and lubrication in bulk metal forming processes. *J. Applied Metal Working*, 1 :7–19, 1979.
- [51] W. R. D. Wilson and D. F. Chang. Low speed mixed lubrication of bulk metal forming processes. *ASME Journal of Tribology*, 118 :83–89, 1996.
- [52] W. R. D. Wilson and N. Marsault. Partial hydrodynamic lubrication with large fractional contact areas. *ASME – Journal of Tribology*, 120 :1–5, 1998.
- [53] W. R. D. Wilson and L. E. Murch. A refined model for the hydrodynamic lubrication of strip rolling. *Journal of Lubrication Technology*, pages 426–431, 1976.
- [54] W. R. D. Wilson and S. Sheu. Real area of contact and boundary friction in metal forming. *Int J. Mech. Sci.*, 30 :475–489, 1988.
- [55] W. R. D. Wilson and J. A. Walowit. An isothermal hydrodynamic lubrication theory for strip rolling with front and back tensions. *Tribology Convention*, pages 169–172, 1971.

-
- [56] P. Wriggers and O. Scherf. Adaptive finite element techniques for frictional contact problems involving large elastic strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 151 :593–603, 1998.
- [57] K. Yamaguchi, N. Takakura, and F. Masayoshi. Surface roughening behavior and its effect on forming limit in the stretching of aluminium sheets. *Computational Plasticity*, 7 :179–199, 1990.