Statistique
Informatique
Mathématique
appliquées

gembloux
faculté universitaire
des sciences agronomiques

Janvier 2008

MACROS MINITAB POUR LA DÉFINITION DU PLAN D'ÉCHANTILLONNAGE À LA RÉCEPTION DANS LE CAS DE MESURES

R. PALM

1. Introduction

Une procédure classique d'échantillonnage à la réception consiste à prélever, dans un lot d'une production donnée, un échantillon aléatoire et simple de n unités et à dénombrer, parmi ces n unités, le nombre d'unités non conformes. Si ce nombre x est inférieur ou égal à un nombre a préalablement fixé, le lot est accepté. Dans le cas contraire, le lot est refusé.

La taille de l'échantillon n et le nombre maximum d'articles non conformes a sont définis, avant le contrôle, en fonction du risque du producteur et du risque de l'acheteur.

Le risque du producteur correspond à la probabilité de rejeter le lot, alors que la qualité de ce lot est satisfaisante. Le risque de l'acheteur est la probabilité d'accepter le lot, alors que la qualité du lot n'est pas satisfaisante.

Concrètement, pour déterminer les caractéristiques n et a du plan d'échantillonnage, on fixe la proportion p_0 d'articles non conformes considérée comme acceptable et la proportion p_1 considérée comme inacceptable. Pour une qualité du lot égale à p_0, la probabilité α de rejet est également fixée, généralement à 0,05 :

$$P\left(X > a \middle| p = p_0\right) = \alpha .$$

De même, pour une qualité du lot égale à p_1, la probabilité β d'accepter le lot est fixée, par exemple à 0,10 :

$$P\left(X \leq a \middle| p = p_1\right) = \beta .$$

Dans les relations ci-dessus, X est la variable aléatoire représentant le nombre d'unités non conformes dans un échantillon de taille n.

Définir les deux couples (p_0, α) et (p_1, β) revient à fixer deux points particuliers de la courbe d'efficacité du plan. Cette courbe représente la probabilité d'accepter le lot en fonction de la valeur de la proportion d'articles non conformes dans la production. Nous notons cette efficacité $\beta(p)$, et on a :

$$\alpha = 1 - \beta(p_0) \text{ et } \beta = \beta(p_1).$$

Le caractère conforme ou non d'une unité d'échantillonnage est lié à des critères préalablement définis, de quelque nature qu'ils soient. Selon les applications, il pourrait s'agir des critères suivants : mauvais assemblage de pièces, soudures imparfaites, emballage détérioré, présence de contaminants, dimensions incorrectes, etc.

Si l'examen d'un échantillon de n articles conduit au dénombrement des articles non conformes, on a affaire à un contrôle qualitatif, appelé encore contrôle par attributs. Différents plans d'échantillonnage peuvent être utilisés. Ils se différencient par la manière dont les articles sont prélevés et examinés. On distingue ainsi, notamment, l'échantillonnage simple, l'échantillonnage double et l'échantillonnage séquentiel. Pour un type de plan donné, la définition du nombre d'articles à examiner et des conditions d'acceptation ou de rejet d'un lot d'articles reposent sur la courbe d'efficacité, les caractéristiques de l'échantillonnage étant déterminées à partir de la connaissance de deux points de cette courbe. En pratique, lorsque les deux points de la courbe sont donnés, la détermination de la taille de l'échantillon (ou des échantillons) ainsi que des conditions d'acceptation ou de rejet des lots se fait par la consultation de tables ou de graphiques spéciaux, disponibles notamment dans SCHILLING [1982]. L'Unité de Statistique, Mathématique et Informatique appliquées de la FUSAGx[1] propose aux utilisateurs du logiciel Minitab des macros permettant de définir les plans d'échantillonnage et d'en calculer les caractéristiques afin de permettre une comparaison aisée des différentes alternatives. Ces macros, ainsi que les notices d'utilisation, sont disponibles sur le site web de l'Unité :

www.fsagx.ac.be/si/

en cliquant sur le lien Macros, puis sur le thème en question. Les principes de l'échantillonnage qualitatif et des exemples d'utilisation de ces macros sont donnés dans un document également disponible sur le site [PALM, 2008].

Dans le cas particulier où le critère de non conformité est lié à une mesure, la conformité est souvent définie en relation avec la notion de tolérance. On considère, par exemple, comme non conforme une unité dont la mesure x est supérieure à une tolérance supérieure t_s, ou bien inférieure à une tolérance inférieure t_i[2].

1 *Faculté universitaire des Sciences agronomiques de Gembloux (Belgique).*
2 *En anglais : upper et lower specification limits, USL et LSL.*

Si la distribution de la mesure est connue, le problème de l'échantillonnage à la réception peut être posé dans les termes suivants, en considérant le cas d'une tolérance inférieure uniquement, par souci de simplification. On prélève un échantillon d'effectif n; sur les unités prélevées, on effectue la mesure et on en détermine la moyenne $\bar{x}$. Le lot est accepté si la moyenne observée est supérieure à une valeur fixée $\bar{x}_{\min}$; il est rejeté si cette moyenne est inférieure à cette valeur. Définir le plan d'échantillonnage revient, dans ce cas, à déterminer la valeur de n et la valeur de $\bar{x}_{\min}$. Le problème se pose évidemment de manière similaire dans le cas d'une limite de tolérance supérieure. Il peut aussi concerner le cas de deux limites de tolérance.

Un tel type d'échantillonnage s'appelle échantillonnage quantitatif, ou encore échantillonnage par mesures. Dans ce document, nous examinons comment le plan d'échantillonnage peut être défini dans différentes situations et nous présentons des macros Minitab, disponibles sur le site de l'Unité, permettant le calcul des caractéristiques du plan pour des distributions de mesures supposées normales. Des exemples numériques détaillés illustrent chaque fois les résultats théoriques. Certains exemples sont également traités par les macros proposées.

Nous examinons d'abord le cas des plans d'échantillonnage simple, où l'échantillon est prélevé en une seule fois (paragraphe 2). Ensuite nous considérons le cas de l'échantillonnage séquentiel, où les unités d'échantillonnage sont prélevées et observées une à une jusqu'à ce qu'une décision concernant l'acceptation ou le rejet du lot soit prise (paragraphe 3). Enfin, nous tirons quelques conclusions (paragraphe 4).

2. Echantillonnage simple

2.1. Cas d'une seule limite de tolérance

Nous considérons le cas d'une production décrite par une variable normale de moyenne m et d'écart-type connu et nous supposons d'abord qu'il n'existe qu'une tolérance inférieure t_i.

A titre d'illustration, soit X le poids en grammes d'articles produits, la distribution de X étant normale avec un écart-type de 4 g. Soit une tolérance inférieure de 1000 g. On considère donc qu'un article est non conforme si son poids est inférieur à 1000 g et qu'il est conforme si son poids est supérieur ou égal à 1000 g.

On se propose de définir un plan d'échantillonnage destiné à vérifier si, pour un lot important, la proportion d'articles dont le poids est inférieur à 1000 g n'est pas trop grande. Pour cela, il faut préciser les exigences du contrôle en termes de qualité et de risque.

Concrètement, il faut fixer deux couples de valeurs. Le premier couple correspond à la qualité acceptable, définie par la proportion p_0 d'articles non conformes, à laquelle est associé le risque α du producteur. La valeur p_0 est la proportion d'articles dans le lot dont le poids est inférieur à 1000 g, considérée comme acceptable. En d'autres mots, si le lot contient effectivement une proportion d'articles non conformes égale à p_0, il faudrait que la procédure d'échantillonnage conduise à l'acceptation du lot avec une probabilité élevée, le complément à l'unité de cette probabilité étant le risque qu'a le producteur de voir son lot refusé, alors qu'il est de qualité acceptable.

Le deuxième couple de valeurs correspond à la qualité de rejet, définie par la proportion p_1 d'articles non conformes à laquelle est associé le risque de l'acheteur. La valeur p_1 est la proportion d'articles dans le lot dont le poids est inférieur à 1000 g, considérée comme devant conduire à l'acceptation du lot avec une faible probabilité, cette probabilité étant le risque qu'a l'acheteur d'accepter le lot de mauvaise qualité.

Si on désigne par p la proportion d'articles dans le lot dont le poids est inférieur à la tolérance inférieure (t_i = 1000 g), par A la décision d'accepter le lot et par R la décision de rejeter le lot, on peut écrire :

$$P(R|p = p_0) = \alpha = 1 - \beta(p_0) \quad \text{et} \quad P(A|p = p_1) = \beta(p_1),$$

α et $\beta(p_1)$ étant respectivement le risque du producteur et le risque de l'acheteur.

Concrètement les paramètres à fixer sont donc, d'une part, p_0 et α ou $\beta(p_0)$ et, d'autre part, p_1 et $\beta(p_1)$. Supposons que, pour l'exemple, on retienne les valeurs suivantes :

$$p_0 = 0{,}01, \quad \beta(p_0) = 0{,}95, \quad p_1 = 0{,}05 \quad \text{et} \quad \beta(p_1) = 0{,}10.$$

Pour un procédé de production normal et d'écart-type σ, il est possible de définir les moyennes m_{0i} et m_{1i} qui conduisent à des proportions d'articles de poids inférieur à t_i respectivement égales à p_0 et p_1 :

$$P\left(X < t_i \middle| m_{0i}\,, \sigma\right) = p_0 \quad \text{et} \quad P\left(X < t_i \middle| m_{1i}\,, \sigma\right) = p_1\,,$$

X ayant une distribution normale de moyenne m_{0i}, à déterminer, et d'écart-type σ connu, dans le premier cas, et une distribution normale de moyenne m_{1i}, à déterminer, et d'écart-type σ connu, dans le second cas.

Le passage à la distribution normale réduite permet de résoudre chacune de ces deux équations. On trouve :

$$m_{0i} = t_i + u_{1-p_0}\,\sigma \quad \text{et} \quad m_{1i} = t_i + u_{1-p_1}\,\sigma\,,$$

la notation u_p représentant le pourcentile p de la distribution normale réduite U :

$$P\left(U \le u_p\right) = p\,.$$

Pour un échantillon de taille n, prélevé dans le lot, la règle de décision consiste à rejeter le lot si la moyenne $\bar{x}$ de l'échantillon est inférieure à $\bar{x}_{\min}$ et à accepter le lot si $\bar{x} \ge \bar{x}_{\min}$.

Compte tenu des risques d'erreur précisés ci-dessus, on peut écrire le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} P\left(A \middle| p = p_0\right) = \beta(p_0) \\ P\left(A \middle| p = p_1\right) = \beta(p_1), \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} P\left(\overline{X} \ge \bar{x}_{\min} \middle| m = m_{0i}\right) = \beta(p_0) \\ P\left(\overline{X} \ge \bar{x}_{\min} \middle| m = m_{1i}\right) = \beta(p_1). \end{cases}$$

Dans le premier cas, $\overline{X}$ est une variable normale de moyenne m_{0i} et d'écart-type égal à $\sigma/\sqrt{n}$; dans le second cas, $\overline{X}$ est une variable normale de moyenne m_{1i} et d'écart-type égal à $\sigma/\sqrt{n}$. La quantité $\sigma/\sqrt{n}$ est l'erreur-standard de la distribution d'échantillonnage de la moyenne d'un échantillon aléatoire et simple prélevé dans une population normale.

Le passage à la normale réduite permet de résoudre ce système de deux équations à deux inconnues. On obtient :

$$n = \left(\frac{(u_{\beta(p_0)} + u_{1-\beta(p_1)})\,\sigma}{m_{0i} - m_{1i}} \right)^2$$

et $$\bar{x}_{\min} = m_{0i} - u_{\beta(p_0)}\ \sigma \big/ \sqrt{n}\ .$$

Pour l'exemple considéré, on a :

$$p_0 = 0{,}01, \quad \beta(p_0) = 0{,}95, \quad p_1 = 0{,}05 \quad \text{et} \quad \beta(p_1) = 0{,}10\,,$$

$$u_{0,95} = 1{,}6449, \quad u_{0,90} = 1{,}2816\,,$$

$$m_{0i} = 1000 + (2{,}3263)(4) = 1009{,}31\,,$$

$$m_{1i} = 1000 + (1{,}6449)(4) = 1006{,}58\,,$$

$$n = \left(\frac{(1{,}6449 + 1{,}2816)(4)}{1009{,}31 - 10006{,}58} \right)^2 = 18{,}39$$

et $$\bar{x}_{\min} = 1009{,}31 - (1{,}6449)(4) \big/ \sqrt{18{,}39} = 1007{,}77\,.$$

Dans la pratique, il est évidemment nécessaire d'arrondir l'effectif de manière à obtenir un nombre entier; il en résultera une légère différence entre les risques α et β réels et les risques nominaux. Ainsi, si on arrondit vers le bas (n = 18), on trouve :

$$\beta(p_0) = 0{,}9488 \quad \text{et} \quad \beta(p_1) = 0{,}1034.$$

Si on arrondit vers le haut (n = 19), on a :

$$\beta(p_0) = 0{,}9533 \quad \text{et} \quad \beta(p_1) = 0{,}0974.$$

L'écart entre ces valeurs provenant de l'arrondi de n et les valeurs nominales ($\beta(p_0)$ = 0,95 et $\beta(p_1)$ = 0,10) est sans grande incidence pratique.

La figure 1 donne les densités des quatre distributions normales qui interviennent dans ce problème. Les densités numérotées 1 et 2 décrivent la production lorsque m = 1006,58 et lorsque m = 1009,31.

L'écart-type de ces deux distributions est égal à 4. La proportion d'articles produits ayant un poids inférieur à la tolérance (t_i = 1000) est respectivement de 5 % et de 1 % pour ces deux types de production. Les densités numérotées 3 et 4 correspondent aux distributions des moyennes des échantillons, lorsque m = 1006,58 et lorsque m = 1009,31. L'écart-type de ces deux distributions est égal à :

$$4/\sqrt{18{,}39} = 0{,}918.$$

Pour $m =$ 1006,58, la proportion d'échantillons dont la moyenne est supérieure à $\bar{x}_{\min} = 1007{,}77$ est de 10 % et correspond au risque β de l'acheteur. Lorsque la moyenne est de 1009,31, la proportion d'échantillons dont la moyenne est inférieure à $\bar{x}_{\min} = 1007{,}77$ est de 5 % et correspond au risque α du vendeur. Sur la figure, ces différentes proportions correspondent à des surfaces sous les courbes de densité de probabilité, ces surfaces étant limitées, à gauche ou à droite selon le cas, par un des deux segments verticaux.

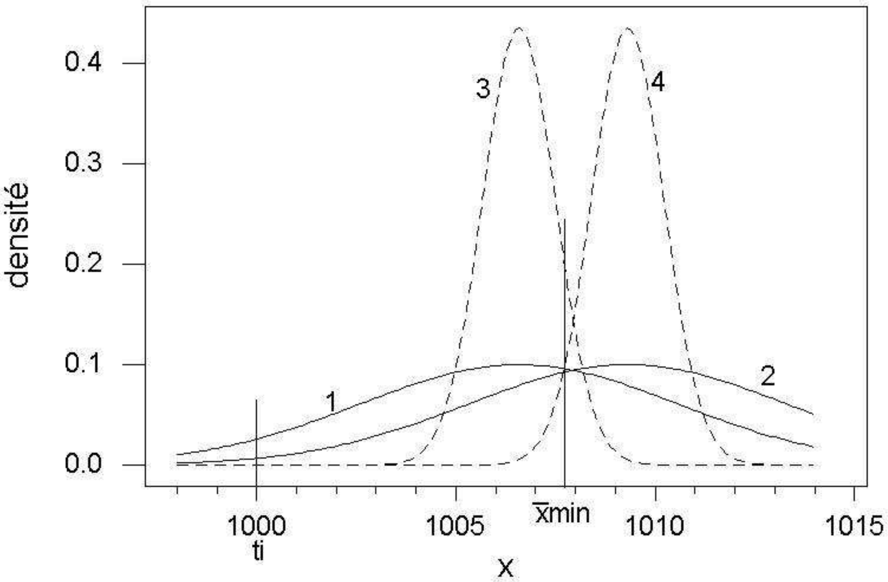

Figure 1. Distribution des observations (courbes 1 et 2) et des moyennes des échantillons (courbes 3 et 4) pour une moyenne théorique égale à 1006,58 g (courbes 1 et 3) et pour une moyenne théorique égale à 1009,31 g (courbes 2 et 4).

Dans les relations ci-dessus, la valeur de n a été exprimée en fonction de l'écart-type et de la différence $m_{0i} - m_{1i}$. On peut cependant aussi exprimer directement n en fonction de p_0, $\beta(p_0)$, p_1 et $\beta(p_1)$. On obtient alors la relation suivante :

$$n = \left(\frac{u_{\beta(p_0)} + u_{1-\beta(p_1)}}{u_{1-p_0} - u_{1-p_1}} \right)^2 .$$

De même, la valeur $\bar{x}_{\min}$ a été exprimée en fonction de m_{0i}. Elle peut cependant aussi être exprimée en fonction de la tolérance inférieure. En effet :

$$m_{0i} = t_i + u_{1-p_0}\ \sigma$$

et $$\bar{x}_{\min} = t_i + k\ \sigma,$$

avec $$k = u_{1-p_0} - u_{\beta(p_0)} \big/ \sqrt{n}.$$

En remplaçant *n* par l'expression ci-dessus, et après simplification, on obtient encore :

$$k = \frac{u_{1-p_0} u_{1-\beta(p_1)} + u_{1-p_1} u_{\beta(p_0)}}{u_{\beta(p_0)} + u_{1-\beta(p_1)}}.$$

Pour l'exemple traité précédemment, on obtient :

$$u_{0,99} = 2{,}3263,$$

$$k = \frac{(2{,}3263)(1{,}2816) + (1{,}6449)(1{,}6449)}{1{,}6449 + 1{,}2816} = 1{,}9433$$

et $$\bar{x}_{\min} = 1000 + (1{,}9433)(4) = 1007{,}77.$$

Le cas d'une limite de tolérance supérieure se traite de manière tout à fait similaire et on obtient les relations suivantes :

$$m_{0s} = t_s - u_{1-p_0}\ \sigma,$$

$$m_{1s} = t_s - u_{1-p_1}\ \sigma,$$

$$k = u_{1-p_0} - u_{\beta(p_0)} \big/ \sqrt{n} = \frac{u_{1-p_0}\ u_{1-\beta(p_1)} + u_{1-p_1}\ u_{\beta(p_0)}}{u_{\beta(p_0)} + u_{1-\beta(p_1)}}$$

et $$\bar{x}_{\max} = m_{0s} + u_{\beta(p_0)}\ \sigma \big/ \sqrt{n} = t_s - k\ \sigma,$$

le lot étant rejeté lorsque la moyenne de l'échantillon est supérieure à $\bar{x}_{\max}$.

2.2. Cas de deux limites de tolérance

Lorsque la conformité d'un article est définie par rapport à une tolérance inférieure et une tolérance supérieure, le problème peut être un peu plus complexe et nous allons distinguer trois situations différentes, liées à la longueur de l'intervalle de tolérance $t_s - t_i$ par rapport à l'écart type σ du procédé.

Le premier cas envisagé se présente lorsque l'intervalle de tolérance est grand par rapport à σ. Dans ce cas, lorsque la moyenne du procédé est égale au point central de l'intervalle de tolérance, la proportion d'articles en dehors des limites de tolérance est faible et négligeable en pratique. Nous considérons qu'on est dans cette situation lorsque l'intervalle de tolérance est au moins 7,5 fois plus grand que l'écart-type du procédé. Si le procédé est centré, la proportion d'articles non conformes est alors inférieure à 2 pour 10.000. Une diminution de la moyenne conduira à la production d'articles non conformes caractérisés par une valeur inférieure à la tolérance inférieure t_i. Inversement, une augmentation de la moyenne donnera lieu à des articles non conformes caractérisés par une valeur supérieure à la tolérance supérieure t_s. Dans la situation envisagée, les pièces non conformes correspondent toujours soit à la partie gauche, soit à la partie droite de la distribution, mais ne se situent jamais simultanément à gauche et à droite de la distribution, comme dans la seconde situation qui sera envisagée.

Pour ce premier cas, on considère d'abord une des deux tolérances, par exemple la tolérance inférieure t_i. On détermine l'effectif n de l'échantillon et la valeur k permettant d'obtenir $\bar{x}_{\min}$. Ensuite, par symétrie par rapport au point central de l'intervalle de tolérance, on trouve $\bar{x}_{\max}$:

$$\bar{x}_{\max} = t_s - k\ \sigma.$$

A titre d'illustration, reprenons le problème traité au paragraphe précédent et considérons qu'il existe en plus une limite de tolérance supérieure située en $t_s = 1030$. Un article produit est donc non conforme si son poids est soit inférieur à 1000 g soit supérieur à 1030 g. L'intervalle de tolérance a donc une longueur de 30, soit 7,5 fois la valeur de l'écart-type que nous avons fixé à 4g. On est donc bien dans le cas décrit ci-dessus.

On souhaite un plan d'échantillonnage tel que la probabilité de rejet du lot soit de 5 % si la proportion d'articles non conformes est de 1% et que la probabilité d'acceptation du lot soit de 10 % si la proportion d'articles non conformes est de 5%. Au paragraphe précédent, on a déterminé la taille du lot (n = 18,39 ou 18) et la valeur k (k = 1,9433) permettant d'obtenir $\bar{x}_{\min}$:

$$\bar{x}_{\min} = t_i + k\ \sigma = 1000 + (1{,}9433)(4) = 1007{,}77.$$

Par symétrie, on obtient :

$$\bar{x}_{\max} = t_s - k\,\sigma = 1030 - (1{,}9433)(4) = 1022{,}23.$$

Concrètement, il faut donc prélever 18 observations et rejeter le lot si la moyenne des 18 observations est inférieure à 1007,77 ou supérieure à 1022,23.

Lorsque des articles non conformes sont produits simultanément à gauche et à droite de la distribution alors que la moyenne du procédé coïncide avec le centre de l'intervalle de tolérance, le problème est plus complexe.

La difficulté réside dans la détermination des valeurs extrêmes pour la moyenne du procédé, m_{0i} et m_{0s}, qui conduisent à une proportion p_0 d'articles non conformes et des valeurs extrêmes m_{1i} et m_{1s} qui conduisent à une proportion p_1 d'articles non conformes.

Examinons d'abord en détail le cas d'une de ces moyennes, par exemple m_{0i}. Cette moyenne est telle que :

$$P\left(X < t_i \quad \text{ou} \quad X > t_s \middle| m = m_{0i}\right) = \alpha$$

ou encore :

$$P\left(X < t_i \middle| m = m_{0i}\right) + P\left(X > t_s \middle| m = m_{0i}\right) = \alpha\,.$$

Contrairement au premier cas envisagé précédemment, le deuxième terme n'est plus négligeable et le passage à la distribution normale réduite ne permet pas d'expliciter m_{0i}. Il faut faire le calcul par approximation.

Pour illustrer la détermination de m_{0i}, nous reprenons l'exemple ci-dessus, en considérant toutefois que la tolérance supérieure est 1021. La longueur de l'intervalle est maintenant égale à 5,25 σ.

Le tableau 1 donne, pour différentes valeurs de la moyenne du procédé, la proportion d'articles inférieurs à la tolérance inférieure, la proportion d'articles supérieurs à la tolérance supérieure et la proportion d'articles non conformes, qui est la somme des deux proportions précédentes. On peut déduire de ce tableau que pour m_{0i} compris entre 1009,6 et 1009,8 soit 1009,7, on a une proportion d'articles non conformes de 1 %. Pour cette moyenne, la proportion d'articles inférieurs à 1000 est de l'ordre de 0,7 % et la proportion d'articles supérieurs à 1021 est de l'ordre de 0,3 %.

L'examen du tableau nous montre aussi que la proportion d'articles non conformes est de 5 % pour une moyenne m_{1i} égale à 1006,6. Dans ce cas, la proportion d'articles supérieurs à 1021 est d'ailleurs négligeable.

On peut donc déterminer n et $\bar{x}_{\min}$:

$$n = \left(\frac{(1{,}6449 + 1{,}2816)\,4}{1009{,}7 - 1006{,}6} \right)^2 = 14{,}26$$

$$\bar{x}_{\min} = 1009{,}7 - (1{,}6449)(4) \big/ \sqrt{14{,}26} = 1007{,}96\,.$$

Par symétrie par rapport au point central de l'intervalle de tolérance qui vaut 1010,5, on obtient :

$$m_{0s} = 1011{,}3, \quad m_{1s} = 1014{,}4 \quad \text{et} \quad \bar{x}_{\max} = 1013{,}04\,.$$

Tableau 1. Proportion d'articles inférieurs à la tolérance inférieure, proportion d'articles supérieurs à la tolérance supérieure et proportion d'articles en dehors des tolérances, en fonction de la moyenne m du procédé (t_i = 1000, t_s = 1021).

m	$P(X < t_i)$	$P(X > t_s)$	$P(X < t_i) + P(X > t_s)$
1006,0	0,0668072	0,0000884	0,0668956
1006,2	0,0605708	0,0001078	0,0606786
1006,4	0,0547993	0,0001311	0,0549304
1006,6	0,0494715	0,0001591	0,0496306
1006,8	0,0445655	0,0001926	0,0447581
1007,0	0,0400592	0,0002326	0,0402918
1007,2	0,0359303	0,0002803	0,0362106
1007,4	0,0321568	0,0003369	0,0324937
1007,6	0,0287166	0,0004041	0,0291206
1007,8	0,0255881	0,0004834	0,0260715
1008,0	0,0227501	0,0005770	0,0233272
1008,2	0,0201822	0,0006871	0,0208694
1008,4	0,0178644	0,0008164	0,0186808
1008,6	0,0157776	0,0009676	0,0167452
1008,8	0,0139034	0,0011442	0,0150477
1009,0	0,0122245	0,0013499	0,0135744
1009,2	0,0107241	0,0015889	0,0123130
1009,4	0,0093867	0,0018658	0,0112525
1009,6	0,0081975	0,0021860	0,0103835
1009,8	0,0071428	0,0025551	0,0096979
1010,0	0,0062097	0,0029798	0,0091894
1010,2	0,0053861	0,0034670	0,0088531
1010,4	0,0046612	0,0040246	0,0086858
1010,6	0,0040246	0,0046612	0,0086858
1010,8	0,0034670	0,0053861	0,0088531
1011,0	0,0029798	0,0062097	0,0091894

Les valeurs $\bar{x}_{\min}$ et $\bar{x}_{\max}$ peuvent aussi se déterminer en fonction des limites de tolérance par l'intermédiaire de *k*, comme nous l'avons signalé au point précédent, à condition de remplacer p_0 par $p_0^{'}$:

$$p_0^{'} = P\left(X < t_i \middle| m = m_{0i}\right) \cong 0{,}0077 .$$

On trouve :

$$k = 2{,}425 - 1{,}6449 \big/ \sqrt{14{,}3} = 1{,}99 .$$

Le troisième cas qui peut se présenter correspond à la situation où l'intervalle de tolérance est trop étroit par rapport aux exigences et il n'est pas possible, compte tenu de l'écart-type du procédé et de l'intervalle de tolérance, d'assurer une proportion d'articles non conformes inférieure ou égale à p_0, même lorsque le procédé est centré sur cet intervalle de tolérance.

Ainsi, pour l'exemple considéré, supposons que la tolérance supérieure t_s soit égale à 1016. Au mieux, c'est-à-dire lorsque la moyenne du procédé est égale à 1008, la proportion d'articles non conformes sera de 4,6 %.

Le fait de se trouver dans un des trois cas ci-dessus dépend de l'importance de la longueur de l'intervalle de tolérance par rapport à l'écart-type du procédé comme nous l'avons déjà signalé au début de ce paragraphe, mais dépend aussi de la valeur de p_0.

2.3. Cas de l'écart-type inconnu

La définition du plan d'échantillonnage n'a été envisagée, jusqu'à présent, que dans le cas où l'écart-type de la production est connu. Le problème peut cependant être étendu au cas d'un écart-type inconnu.

Lorsqu'il n'y a qu'une seule limite de tolérance, on détermine la valeur de *k* et l'effectif de l'échantillon qu'il y aurait lieu de prélever si l'écart-type était connu. Soit *n*' cet effectif. On corrige alors cet effectif par la relation approchée suivante :

$$n = n'\left(1 + \frac{k^2}{2}\right).$$

Pour deux tolérances, on définit, comme ci-dessus, la valeur de *n* et de *k*, mais on calcule en plus la valeur :

$$\hat{\sigma}_{\max} = \frac{t_s - t_i}{2\,u_{p'}},$$

$u_{p'}$ étant le pourcentile p' de la distribution normale réduite et p' est lié à k par la relation suivante :

$$p' = 1 - [1 - P(U \leq k)]/2.$$

Lorsqu'on dispose des résultats des n observations de l'échantillon, on calcule la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type estimé $\hat{\sigma}$ et la procédure de décision se fait en deux temps :

a) si $\hat{\sigma} > \hat{\sigma}_{max}$, le lot est rejeté car l'écart-type est trop grand pour être compatible avec les critères d'acceptation;

b) si $\hat{\sigma} \leq \hat{\sigma}_{max}$, on calcule les valeurs :

$$\bar{x}_{min} = t_i + k\,\hat{\sigma} \quad \text{et} \quad \bar{x}_{max} = t_s - k\,\hat{\sigma};$$

on accepte le lot si $\bar{x}_{min} < \bar{x} < \bar{x}_{max}$ et on rejette le lot dans le cas contraire.

Une justification de cette procédure est donnée dans SCHILLING [1982].

Reprenons l'exemple d'une seule tolérance inférieure traité au paragraphe 2.1, en considérant maintenant que l'écart-type du procédé est inconnu. La taille de l'échantillon et la valeur de k, qui, rappelons-le, peuvent être déterminées sans connaître l'écart-type, sont égales à :

$$n' = 18{,}39 \quad \text{et} \quad k = 1{,}9433.$$

On en déduit :

$$n = 18{,}39\left(1 + \frac{1{,}9433^2}{2}\right) = 53{,}11$$

et

$$\bar{x}_{min} = 1000 + 1{,}9433\,\hat{\sigma}.$$

En pratique, il faudra prélever un échantillon de 53 observations, en calculer la moyenne , l'écart-type estimé $\hat{\sigma}$, et la valeur $\bar{x}_{min}$. Si la moyenne $\bar{x}$ est supérieure à $\bar{x}_{min}$ on accepte le lot; si elle est inférieure à $\bar{x}_{min}$, on rejette le lot.

Considérons maintenant le cas où, en plus de la limite de tolérance inférieure t_i = 1000, on a une tolérance supérieure t_s = 1030. Les valeurs de n et k sont inchangées et il faut encore calculer l'écart-type maximum tolérable. On obtient :

$$P(U \leq 1{,}9433) = 0{,}9740\,,$$

$$p' = 1 - (1 - 0{,}9740)/2 = 0{,}9870\,,$$

$$u_{p'} = 2{,}226\,,$$

et

$$\hat{\sigma}_{\max} = (1030 - 1000)/(2)(2{,}226) = 6{,}74\,.$$

Comme dans le cas précédent, il faudra prélever un échantillon de 53 observations, en calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type estimé $\hat{\sigma}$. Si l'écart-type est inférieur à 6,74 et si la moyenne $\bar{x}$ est comprise entre :

$$\bar{x}_{\min} = 1000 + 1{,}9433\,\hat{\sigma} \quad \text{et} \quad \bar{x}_{\max} = 1030 - 1{,}9433\,\hat{\sigma}\,,$$

on accepte le lot; sinon, on rejette le lot.

2.4. Contrôle qualitatif sur les limites modifiées

Dans le cas de la seule limite de tolérance inférieure, nous avons vu que les caractéristiques du plan d'échantillonnage sont définies en considérant les probabilités d'acceptation du lot, d'une part, si $p = p_0$ et, d'autre part, si $p = p_1$, p étant la proportion d'articles pour laquelle la caractéristique est inférieure à la limite de tolérance inférieure. Il en va de même dans le cas d'une limite de tolérance supérieure ou de deux limites de tolérance. Le contrôle décrit dans les paragraphes précédents est cependant quantitatif, car il repose sur le calcul de la moyenne des mesures.

On pourrait envisager un contrôle purement qualitatif, en ne déterminant pas la valeur exacte de chaque article de l'échantillon, mais en examinant simplement s'il est conforme ou non. Le temps consacré à une observation serait réduit mais, pour une courbe d'efficacité comparable à celle basée sur le contrôle quantitatif, la taille de l'échantillon devrait être bien supérieure. En effet, le plan d'échantillonnage qualitatif dont la courbe d'efficacité vaut 0,95 pour p_0 = 0,01 et 0,10 pour p_1 = 0,05, est défini par le couple [PALM, 2008] :

$$n = 132 \;\text{ et }\; a = 3.$$

Pour une même courbe d'efficacité, il suffit de 18 observations si on réalise des mesures (paragraphe 2.1) alors qu'il en faut 132 si on n'examine que la conformité ou non des articles.

Si la variable quantitative observée suit une distribution normale et si l'écart-type est connu, on peut arbitrairement modifier les tolérances en modifiant également les proportions d'articles non conformes.

Ainsi, dans le cas de l'exemple traité au paragraphe 2.1, dire que 1% des articles ont un poids inférieur à 1000 g lorsque la moyenne est égale à 1009,31 g est équivalent à dire, par exemple, que 14,1% des articles ont un poids inférieur à 1005 g. De même, si 5% des articles sont inférieurs à 1000 g lorsque la moyenne est égale à 1006,58 g, cela signifie aussi que 34,6% des articles sont inférieurs à 1005 g.

Dès lors, un contrôle qualitatif équivalent au contrôle quantitatif peut être réalisé en vérifiant la conformité des articles par rapport à la limite de tolérance modifiée. Le plan d'échantillonnage doit être tel que la probabilité d'accepter le lot soit égale à 0,95 si la proportion d'articles se situant en-deça de 1005 g est de 14,1% et que la probabilité d'accepter le lot soit de 10% si cette proportion est de 34,6%. L'utilisation de la macro DEFECHQUAL1 [PALM, 2008] donne le plan suivant :

$$n = 35 \text{ et } a = 8.$$

Ce plan qualitatif est évidemment beaucoup plus économique que le plan qualitatif considéré ci-dessus qui, rappelons-le, nécessitait 132 observations.

La tolérance modifiée a été fixée de façon assez arbitraire à 1005. On peut cependant rechercher la limite de tolérance qui correspond au minimum de l'effectif. CAVE [1966] a montré que la solution qui correspond à l'effectif minimum est celle pour laquelle on a :

$$n = 2a + 1.$$

De plus, dans ces conditions, l'effectif de l'échantillon dans le cas du contrôle qualitatif est environ 1,57 fois plus grand que l'échantillon dans le cas du contrôle quantitatif.

Pour l'exemple, on aurait donc :

$$n \cong (1{,}57)(18{,}39) = 29 \quad \text{et} \quad a = 14.$$

Pour ce plan, la courbe d'efficacité vaut 0,95 lorsque p_0 est égal à 0,352 et la tolérance modifiée doit par conséquent être fixée en 1007,8 puisqu'on a considéré que la moyenne m_{0i} est égale à 1009,31. Des informations complémentaires sont données par CAVE [1966].

2.5. La macro ECHMESURES

La macro ECHMESURES permet de définir le plan d'échantillonnage à la réception par mesures, dans le cas d'une seule limite de tolérance et dans le cas de deux limites de tolérance, l'écart-type étant fixé ou non. Elle donne la taille de l'échantillon et la valeur de k. Elle donne également les valeurs t_i, m_{1i}, $\bar{x}_{\min}$ et m_{0i} dans le cas d'une tolérance inférieure et les valeurs m_{0s}, $\bar{x}_{\max}$, m_{1s} et t_s dans le cas d'une tolérance supérieure.

A titre d'illustration, la figure 2 donne la liste des commandes et les résultats de ces commandes pour l'exemple traité au paragraphe 2.1. Il s'agit du cas d'une limite de tolérance inférieure et d'un écart-type connu. Les limites de tolérance modifiées ont également été déterminées, comme décrit au paragraphe 2.4.

```
%ECHMESURES 0.01 .95 .05 .10;
    ETYPE 4;
    TINF 1000;
    LIMMOD.


Caractéristiques du contrôle

sigma     4.00000
p0        0.0100000
betap0    0.950000
p1        0.0500000
betap1    0.100000


Taille de l'échantillon et valeur de k:

nobs    18.4393
k       1.94330


Limites à gauche :

ti       1000.00
M1i      1006.58
XBmin    1007.77
M0i      1009.31

Echantillonnage qualitatif avec limites modifiées
N a P0_modif P1_modif

NMOD     29.0000
A        14.0000
P0MOD    0.351864
P1MOD    0.616498

Limite de contrôle inférieure modifiée

TMODi    1007.77
```

Figure 2. Plan d'échantillonnage pour une limite de tolérance inférieure (t_i = 1000) et un écart-type connu (σ = 4) : commandes et résultats.

La figure 3 concerne l'exemple du paragraphe 2.2, où deux limites de tolérance sont considérées. Pour ce même exemple, les figures 4 et 5 donnent les courbes d'efficacité, d'une part, en fonction de la moyenne du lot (figure 4) et, d'autre part, en fonction de la proportion d'articles non conformes dans le lot, cette proportion étant fonction de la moyenne (figure 5). Enfin, la figure 6 reprend l'exemple traité au paragraphe 2.4.

```
%ECHMESURES 0.01 .95 .05 .10;
    ETYPE 4;
    TINF 1000;
    TSUP 1021.


Caractéristiques du contrôle

sigma     4.00000
p0        0.0100000
betap0    0.950000
p1        0.0500000
betap1    0.100000


Taille de l'échantillon et valeur de k:

nobs    14.0943
k       1.98822


 Limites à gauche :

ti       1000.00
M1i      1006.59
XBmin    1007.95
M0i      1009.71


 Limites à droite :

M0s      1011.29
XBmax    1013.05
M1s      1014.41
ts       1021.00
```

Figure 3. Plan d'échantillonnage pour deux limites de tolérance (t_i = 1000 et t_s = 1021) et un écart-type connu (σ = 4) : commandes et résultats.

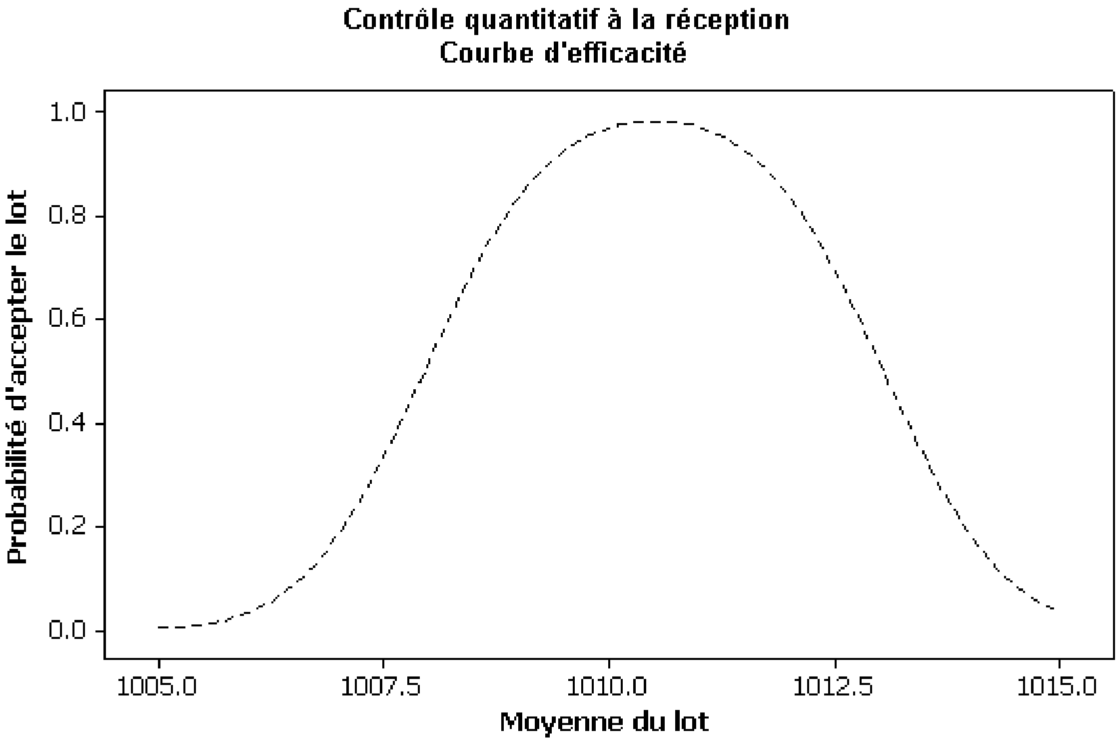

Figure 4. Efficacité de l'échantillonnage ($t_i = 1000, \quad t_s = 1021, \quad \sigma = 4$), en fonction de la moyenne du lot.

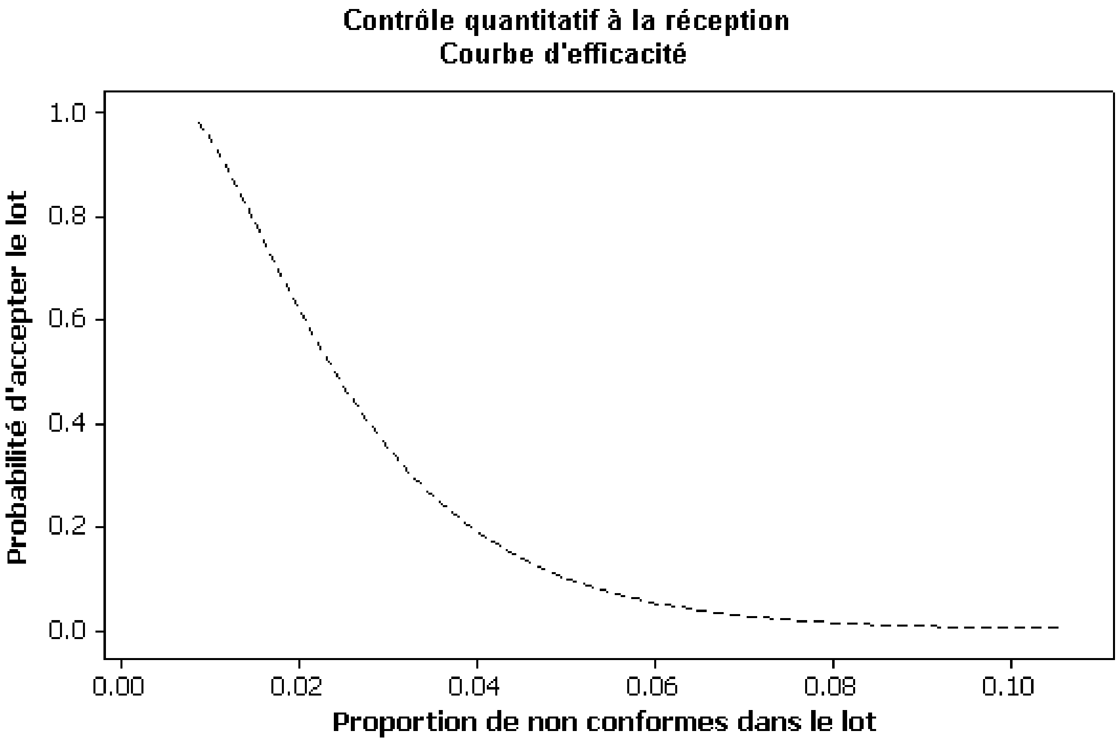

Figure 5. Efficacité de l'échantillonnage (t_i = 1000, t_s = 1021, σ = 4), en fonction de la proportion d'articles non conformes dans le lot.

```
%ECHMESURES 0.01 .95 .05 .10;
    TINF 1000;
    TSUP 1030.

Caractéristiques du contrôle

p0        0.0100000
betap0    0.950000
p1        0.0500000
betap1    0.100000


Tolérances (inférieure et supérieure) et Valeur de k

ti    1000.00
ts    1030.00
k     1.94330


Sigma connu :

écart-type maximum ( (ts-ti)/7.5 ) et taille de l'échantillon

etmax    4.00000
nobs     18.4393


Sigma inconnu :

écart-type estimé maximum et taille de l'échantillon

sigmam    6.73745
nobs2     53.2565

Calcul de XBMin et XBMax

XBMin=ti + k*Sigma  et  XBMax=ts - k*Sigma
```

Figure 6. Plan d’échantillonnage pour deux limites de tolérance ($t_i = 1000$ et $t_s = 1030$) et un écart-type inconnu : commandes et résultats.

Pour tous ces exemples, on peut vérifier qu’on retrouve bien, aux erreurs d’arrondi près, les valeurs obtenues manuellement.

Diverses options sont prévues pour supprimer les impressions et pour enregistrer les résultats dans la feuille de calcul. Nous renvoyons le lecteur à la notice d'utilisation pour des informations plus détaillées.

3. Echantillonnage séquentiel

3.1. Principe et définition du plan

Le principe de l'échantillonnage séquentiel est de prélever les articles les uns à la suite des autres et de porter, sur un graphique, les sommes des observations relatives à la variable quantitative. Des limites sont également reportées sur ce graphique qui permettent, après chacun des prélèvements, de décider s'il faut accepter le lot, rejeter le lot, ou encore continuer l'échantillonnage.

On suppose en général que la distribution de la caractéristique est normale et d'écart-type connu. On se fixe une valeur m_0 telle que la probabilité d'accepter le lot, $\beta(m_0)$, soit grande si la moyenne est effectivement égale à m_0 et on se fixe une valeur m_1 telle que la probabilité d'accepter le lot, $\beta(m_1)$, soit faible si la moyenne est effectivement égale à m_1.

Dans ces conditions, on détermine les deux droites suivantes :

$$a_i = h_0 + si \quad \text{et} \quad r_i = h_1 + si\,,$$

avec :

$$s = (m_0 + m_1)/2,$$

$$h_0 = \frac{\sigma^2}{m_1 - m_0} \log \frac{\beta(m_1)}{\beta(m_0)}\,,$$

et

$$h_1 = \frac{\sigma^2}{m_1 - m_0} \log\left(\frac{1-\beta(m_1)}{1-\beta(m_0)}\right).$$

Pour une limite de tolérance inférieure, on accepte le lot si la somme des i observations est supérieure ou égale à a_i ; on rejette le lot si la somme est inférieure ou égale à r_i et on continue l'échantillonnage si la somme est comprise entre ces deux valeurs.

A titre d'illustration, reprenons l'exemple traité au paragraphe 2.1 pour lequel on a :

$$m_0 = 1009{,}31,\ \ m_1 = 1006{,}58,\ \ \beta(m_0) = 0{,}95,\ \ \beta(m_1) = 0{,}10 \ \text{ et } \ \sigma = 4.$$

On trouve :

$$s = (1009{,}31 + 1006{,}58)\,/2 = 1007{,}94,$$

$$h_0 = \frac{4^2}{1006{,}58 - 1009{,}31} \log\left(\frac{0{,}10}{0{,}95}\right) = 13{,}21\,,$$

$$h_1 = \frac{4^2}{1006{,}58 - 1009{,}31} \log\left(\frac{0{,}90}{0{,}05}\right) = -16{,}96\ \ ;$$

on obtient donc :

$$a_i = 13{,}21 + 1007{,}941i \quad \text{et} \quad r_i = -16{,}96 + 1007{,}941i\,.$$

Le tableau 2 donne les valeurs d'observations simulées sur la base d'une distribution normale de moyenne m = 1007 et d'écart-type σ = 4. Il donne également les valeurs cumulées des observations ainsi que les valeurs a_i et r_i. On constate que, s'il s'agissait d'observations réelles faites sur des articles prélevés au hasard dans un lot, celui-ci aurait été rejeté au troisième prélèvement.

Tableau 2. Echantillonnage séquentiel dans une population normale en vue du contrôle de la moyenne.

Nombre d'observations réalisées i	Valeurs observées x_i	Limites de rejet du lot r_i	Sommes cumulées Σx_i	Limites d'acceptation du lot a_i
1	1003,90	990,98	1003,90	1021,15
2	998,26	1998,92	2002,16	2029,09
3	1003,39	3006,86	3005,55	3037,03
4	1009,32	4014,80	4014,87	4044,97
5	1006,47	5022,74	5021,34	5052,91

La procédure qui vient d'être présentée peut évidemment aussi être appliquée au cas d'une tolérance supérieure. Dans ce cas, m_0 est plus petit que m_1 et les valeurs de a_i sont inférieures aux valeurs de r_i, h_0 étant inférieur à h_1. Il en résulte qu'on rejette le lot dès que la valeur cumulée des x_i est supérieure ou égale à r_i et on accepte le lot dès que cette valeur est inférieure ou égale à a_i.

Supposons, à titre d'illustration, qu'on permute les valeurs de m_0 et de m_1 données dans l'exemple précédent. On aurait donc :

$$m_0 = 1006{,}58 \quad \text{et} \quad m_1 = 1009{,}31\,,$$
$$\beta(m_0) = 0{,}95 \quad \text{et} \quad \beta(m_1) = 0{,}10\,.$$

Dans ces conditions, on aurait :

$$s = 1007{,}94, \qquad h_0 = -13{,}21 \qquad \text{et} \qquad h_1 = 16{,}96;$$

on accepterait donc le lot si la somme des i premières observations est inférieure à :

$$a_i = -13{,}21 + 1007{,}961i$$

et on rejetterait le lot si cette somme est supérieure à :

$$r_i = 12{,}96 + 1007{,}961i.$$

Enfin, l'échantillonnage séquentiel peut encore être appliqué au cas deux limites de tolérance. Des informations à ce sujet sont données par WALD [1947].

3.2. Courbe d'efficacité et nombre moyen d'articles examinés

La courbe d'efficacité du plan d'échantillonnage séquentiel peut être déterminée par la formule suivante par l'intermédiaire d'une valeur *h*, fonction de la moyenne réelle *m* du lot [WALD, 1947] :

$$\beta(m) \cong \frac{\left(\dfrac{1-\beta(m_1)}{1-\beta(m_0)}\right)^h - 1}{\left(\dfrac{1-\beta(m_1)}{1-\beta(m_0)}\right)^h - \left(\dfrac{\beta(m_1)}{\beta(m_0)}\right)^h},$$

avec :

$$h = (m_1 + m_0 - 2m)/(m_1 - m_0).$$

D'autre part, le nombre moyen d'observations à réaliser pour le test séquentiel est donné, en fonction de *m*, par la relation [WALD, 1947] :

$$NMA = \frac{h_1 + \beta(m)(h_0 - h_1)}{m - s}.$$

Pour $m = s$, ces relations conduisent cependant à une indétermination, et WALD a montré que, lorsque *m* tend vers *s*, on a :

$$\beta(m) = \frac{\log_e\left(\dfrac{1-\beta(m_1)}{1-\beta(m_0)}\right)}{\log_e\left(\dfrac{1-\beta(m_1)}{1-\beta(m_0)}\right) - \log_e\left(\dfrac{\beta(m_1)}{\beta(m_0)}\right)}$$

et

$$NMA = -h_0 h_1 / \sigma^2.$$

A titre d'illustration, quelques valeurs de $\beta(m)$ et de *NMA* sont données dans le tableau 3, pour l'exemple envisagé ci-dessus ($m_0 = 1009{,}31$ et $m_1 = 1006{,}58$). On peut constater que le nombre moyen d'articles à examiner est plus faible que dans le cas de l'échantillonnage simple, pour lequel n = 18 (paragraphe 2.1).

Tableau 3. Evolution, en fonction de *m*, de la probabilité d'accepter le lot $\beta(m)$ et du nombre moyen d'articles à examiner *NMA* avant d'accepter ou de rejeter le lot.

m	$\beta(m)$	*NMA*
1005	0,008	5,7
1006	0,040	8,1
1007	0,187	12,0
1008	0,589	13,9
1009	0,911	9,9
1010	0,988	6,2

3.3. La macro ECHMESSEQ

A partir de deux points fixés de la courbe d'efficacité et de l'écart-type de la caractéristique faisant l'objet de la mesure, la macro ECHMESSEQ calcule les limites d'acceptation et de rejet du lot dans le cas d'une seule tolérance.

Elle détermine également la courbe d'efficacité et le nombre moyen d'articles examinés en fonction de la moyenne du lot.

La figure 7 donne la liste des commandes et les résultats de ces commandes pour l'exemple traité aux paragraphes 3.1 et 3.2. On retrouve bien les résultats des tableaux 2 et 3.

```
%ECHMESSEQ 0.01 .95 .05 .10;
     ETYPE 4;
     TINF 1000;
     MOYENNE 1005 1010 1;
     SEQ 5 1;
     NOPLOT.



ti      1000.00
M0i     1009.31
M1i     1006.58
h0      13.2139
h1      -16.9649
s       1007.94

 I,limites de rejet, limites d'acceptation

Row  NSEQ        R        A
  1     1   990.98  1021.16
  2     2  1998.92  2029.10
  3     3  3006.86  3037.04
  4     4  4014.80  4044.98
  5     5  5022.75  5052.93

 Moyenne, efficacite, nombre moyen d'articles examinés

Row      MOY    EFFICA      NMA
  1  1005.00  0.007735   5.6863
  2  1006.00  0.039793   8.1157
  3  1007.00  0.187635  11.9931
  4  1007.94  0.562147  14.0107
  5  1008.00  0.588741  13.9342
  6  1009.00  0.910688   9.9457
  7  1010.00  0.987685   6.2414
```

Figure 7. Limites d'acceptation, limites de rejet, efficacité et nombre moyen d'articles examinés pour l'échantillonnage séquentiel : commandes et résultats.

4. Conclusions

L'échantillonnage par mesures pour le contrôle de la proportion de non conformes a été présenté comme une alternative à l'échantillonnage par attributs. Se pose dès lors, en pratique, la question du choix de l'une ou de l'autre de ces deux approches.

Ce choix est essentiellement lié au coût de l'opération, qui est fonction du nombre d'observations à réaliser et du coût de l'observation. Il ne se fait donc pas sur l'efficacité du plan d'échantillonnage. En effet, il est toujours possible de déterminer un plan d'échantillonnage par mesures qui a une courbe d'efficacité équivalente à celle d'un plan d'échantillonnage par attributs.

Pour un article donné, le coût d'une mesure est généralement supérieur au coût de l'observation de la simple conformité de l'article. Par contre, le nombre d'observations est toujours supérieur pour le contrôle qualitatif. Dans ce dernier cas, la taille de l'échantillon peut toutefois être réduite si on utilise les limites de tolérance modifiées, comme nous l'avons vu au paragraphe 2.4.

Un troisième élément, plus subjectif, qui entre également en ligne de compte pour le choix d'un type de contrôle donné est la confiance qu'on a dans l'hypothèse de normalité de la caractéristique sur laquelle repose le contrôle par mesures.

Les deux macros examinées dans les paragraphes précédents complètent les macros relatives à l'échantillonnage par attributs, également disponibles et présentées dans un autre document [PALM, 2008]. L'utilisateur dispose ainsi d'outils le déchargeant de calculs fastidieux ou de consultations de tables ou de graphiques.

Bien que les macros proposées pour l'échantillonnage par mesures permettent de traiter des situations variées, elles ne couvrent cependant pas toutes les situations. Ainsi par exemple, nous n'avons pas considéré l'échantillonnage séquentiel avec deux limites de tolérance. Des informations à ce sujet sont données par SCHILLING [1982]. Par ailleurs, on notera également que les procédures d'échantillonnage à la réception ont fait l'objet de normes. Des informations à ce sujet sont données dans X [2000].

5. Références bibliographiques

CAVE R. [1966]. *Le contrôle statistique des fabrications*. Paris, Eyrolles, 543 p.

PALM R. [2008]. *Macros Minitab pour la détermination des caractéristiques des plans d'échantillonnage pour le contrôle qualitatif à la réception*. http://www.fsagx.ac.be/si/plans-ech-qualitatifs/accueil.htm

SCHILLING E.G. [1982]. *Acceptance sampling in quality control*. New York, Dekker, 775 p.

WALD A. [1947]. *Sequential analysis*. New York, Wiley, 212 p.

X [2000] *Statistical methods for quality control (vol 1) Statistical methods in general, Terminology and symbols, Acceptance sampling*. ISO Standards Handbook, Genève. International Organization of Standardization, 710 p.