

# ÉLASTICITÉ

J.F. Debonnie

2011

©DEBONGNIE (Jean-François), Liège, Belgium, 2011

*Tous droits réservés.*

Dépôt légal :D/2011/0480/1

ISBN13 : 978-29600313-8-6

# Préface

Cet ouvrage est né d'un ensemble de cours que nous avons donné à l'École Mohhamadia d'Ingénieurs à Rabat. Il n'est pas conçu comme une première introduction à la mécanique des solides, mais comme une étude complémentaire destinée à un public déjà au courant des résultats classiques de la résistance des matériaux. Nous continuons en effet de penser qu'une introduction inductive à cette discipline permet, dans un premier temps, d'acquérir progressivement une compréhension physique des principaux phénomènes de la mécanique des solides. Le fait même que cette approche est limitée incite alors à aller plus loin, ce qui motive une seconde approche, plus déductive et plus fondamentale.

L'élasticité est une science déjà ancienne et par conséquent, ses résultats sont très nombreux. Il est donc nécessaire, dans le cadre d'un cours, de faire des choix. Notre but a été d'essayer d'allier un niveau théorique acceptable à un souci d'applicabilité – nos leçons sont destinées à des élèves ingénieurs mécaniciens.

Dans cet esprit, après un premier chapitre d'introduction mathématique, nécessaire à la compréhension de la suite, nous abordons successivement la cinématique des milieux déformables, le principe des travaux virtuels et l'étude des corps hyperélastiques dans le cadre géométriquement non linéaire. Dans une première lecture, on peut passer les sections relatives aux équations générales de compatibilité, aux interprétations des contraintes de Kirchhoff-Trefftz, à la stabilité locale et aux déformations avec variations de température.

Les équations de l'élasticité linéaire sont établies au chapitre 4. En ce qui concerne la compatibilité, on peut, en première lecture, s'arrêter après les équations de Beltrami-Michell.

Suivent trois chapitres d'application. Le premier traite de la torsion des poutres prismatiques, un problème où les insuffisances de la résistance des matériaux sont criantes. À côté de solutions exactes classiques, nous y introduisons des méthodes variationnelles conduisant immédiatement à des solutions approchées. Ceci prépare le lecteur à l'étude générale des principes variationnels, qui

sera donnée plus loin. Les deux chapitres suivants forment un enchaînement : le problème de Boussinesq est étudié parce qu'il sert de base au problème de Hertz ; ce dernier trouve de nombreuses applications en mécanique, notamment en théorie des roulements. Sa résolution est complète.

Nous exposons ensuite les principes variationnels, suivant la démarche de Fraeijs de Veubeke. L'analyse duale, qui en est une conséquence, est développée dans toute sa généralité, dans une approche qui nous est propre.

Le chapitre suivant est consacré à l'élasticité plane. Après l'établissement des équations fondamentales et quelques exemples, nous développons la méthode de résolution fondée sur l'utilisation de la variable complexe. Celle-ci est appliquée aux problèmes habituels, ainsi qu'à quelques problèmes de concentration de contrainte. Nous y avons ajouté une annexe relative aux disques d'épaisseur variable en rotation, dans laquelle est présentée une méthode de conception des roues de turbines originale et particulièrement simple.

Nous avons renoncé à développer la théorie rigoureuse des poutres de Barré de Saint-Venant, qui est complexe et malheureusement, très insuffisante pour les besoins de la pratique, puisqu'elle suppose les efforts tranchants et la torsion uniformes. Au lieu de cela, nous donnons ce que nous appelons une théorie technique des poutres, fondée sur une approche variationnelle et incluant les approches de Wagner pour la torsion non uniforme et de Vlassov pour les poutres à parois minces ouvertes. Pour ces dernières, nous présentons d'ailleurs une étude de la torsion plus rigoureuse que ce dernier auteur. Le cas des caissons est également envisagé, avec une approche de type éléments finis pour la recherche du gauchissement et des champs de cisaillement de flexion.

La flexion des plaques est également étudiée dans un cadre variationnel. Dans un premier temps, nous établissons la théorie de Reissner, puis nous envisageons celle de Hencky et surtout, l'hypothèse de Kirchhoff. Les résultats de ces théories sont comparés et reliés entre eux. Nous présentons alors les méthodes de résolution pour les rectangles (série double et série simple) et les plaques circulaires.

Les théorèmes énergétiques extérieurs (Castiglano, Menabrea, Clapeyron, Betti, Maxwell) sont souvent présentés d'une manière formelle et quelque peu naïve faisant appel à des forces concentrées dont on sait bien, pourtant, qu'elles mènent à une énergie infinie en dehors de quelques cas particuliers. Rompant avec cette tradition, nous les présentons comme des applications particulières des principes variationnels, ce qui mène à un exposé précis et rigoureux. C'est du reste l'occasion d'introduire le degré d'hyperstaticité.

Nous avons tenu à présenter la théorie des diagrammes d'influence, auxquels nous continuons d'accorder un intérêt pratique et pédagogique très grand.

Le dernier chapitre est consacré à la stabilité élastique. Outre la théorie générale de la stabilité, nous y traitons un certain nombre de cas de bifurcation courants, flambage, voilement des plaques, déversement de poutres fléchies.

Enfin, nous avons consacré une annexe à l'écriture des équations de l'élasticité en coordonnées curvilignes.

De nombreux exercices sont inclus. Parmi ceux-ci, certains sont de simples applications, mais d'autres constituent des variantes de la théorie, des compléments à celle-ci ou des théories approchées utiles que nous n'avons pas cru bon d'inclure au texte principal, pour ne pas alourdir celui-ci. Beaucoup sont entièrement résolus.

À la fin de la rédaction de cet ouvrage, nous avons une pensée particulière pour nos anciens étudiants de Rabat qui, par leur exigence et leur soif de savoir, nous ont conduit à un réel approfondissement de ces matières. Qu'ils en soient remerciés.



# Table des matières

<b>Préface</b>	<b>i</b>
<b>1 Préliminaires mathématiques</b>	<b>1</b>
1.1 Préambule . . . . .	1
1.2 Vecteurs . . . . .	1
1.3 Tenseurs . . . . .	4
1.4 Transformations d'axes . . . . .	6
1.5 Opérateurs de dérivation . . . . .	7
1.6 Théorème de Gauss-Ostrogradsky . . . . .	8
1.7 Éléments propres des tenseurs symétriques . . . . .	11
1.7.1 Éléments propres . . . . .	11
1.7.2 Développement spectral du tenseur . . . . .	12
1.7.3 Caractère d'invariance des éléments propres . . . . .	13
1.7.4 Décomposition d'un tenseur symétrique en un tenseur isotrope et un déviateur . . . . .	14
1.8 Structure des tenseurs antisymétriques . . . . .	15
1.9 Exercices . . . . .	15
<b>2 Cinématique des corps continus déformables</b>	<b>19</b>
2.1 Description du mouvement . . . . .	19
2.2 Choix de la description . . . . .	20
2.3 Tenseur des déformations de Green . . . . .	21
2.4 Interprétation du tenseur de Green . . . . .	23
2.5 Équations de compatibilité . . . . .	25
2.6 Hypothèses simplificatrices . . . . .	29
2.6.1 Petites déformations . . . . .	29
2.6.2 Petits déplacements . . . . .	30

2.6.3	Gradients de déplacements modérés . . . . .	30
2.7	Exercices . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Principe des travaux virtuels</b>	<b>37</b>
3.1	Déplacements virtuels . . . . .	37
3.2	Travail virtuel de déformation . . . . .	38
3.3	Notion d'équilibre . . . . .	39
3.4	Équations locales d'équilibre . . . . .	40
3.5	Interprétation de Trefftz . . . . .	43
3.6	Relation avec les contraintes eulériennes . . . . .	45
3.6.1	Contraintes eulériennes . . . . .	45
3.6.2	Relation entre les charges dans les deux descriptions . . .	46
3.6.3	Cas des petites déformations . . . . .	47
3.7	Exercices . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Corps hyperélastiques</b>	<b>57</b>
4.1	Hyperélasticité . . . . .	57
4.2	Développement de l'énergie de déformation . . . . .	58
4.3	Postulat de la stabilité locale . . . . .	61
4.4	Stabilité structurale de l'état de référence . . . . .	63
4.5	Déformations avec variations de température . . . . .	68
4.5.1	Expression de l'énergie libre . . . . .	68
4.5.2	Coefficients de dilatation thermique . . . . .	69
4.5.3	Déformations adiabatiques . . . . .	70
4.5.4	Autre expression des modules adiabatiques . . . . .	73
4.5.5	Mesure dynamique du module de Young . . . . .	75
4.6	Exercices . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Élasticité linéaire</b>	<b>83</b>
5.1	Linéarisation géométrique . . . . .	83
5.2	Unicité de la solution . . . . .	84
5.3	Méthode directe de résolution. Équation de Navier . . . . .	85
5.4	Méthode semi-inverse. Compatibilité . . . . .	86
5.5	Propriétés du tenseur d'incompatibilité . . . . .	89
5.6	Autre forme des équations de compatibilité de Saint-Venant . . .	90
5.7	Équations de Beltrami-Michell . . . . .	91
5.8	Corps multiples connexes . . . . .	92
5.8.1	Introduction . . . . .	92
5.8.2	Topologie des corps multiples connexes . . . . .	94



5.8.3	Intégration d'un gradient sur un corps multiplement connexe	96
5.8.4	Conditions globales de compatibilité dans les corps multiplement connexes . . . . .	98
5.8.5	Interprétation de Weintgarten-Volterra . . . . .	100
5.9	Sur l'indépendance des équations de compatibilité . . . . .	101
5.9.1	Deux résultats généraux sur les champs d'autocontrainte .	103
5.9.2	Les deux théorèmes de Washizu . . . . .	103
5.9.3	Autre énoncé des théorèmes de Washizu . . . . .	104
5.10	Exercices . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Torsion des poutres prismatiques</b>	<b>115</b>
6.1	Notion de poutre . . . . .	115
6.2	Torsion uniforme . . . . .	116
6.3	Équations d'équilibre . . . . .	117
6.4	Compatibilité . . . . .	120
6.5	Choix de la constante $C$ . . . . .	121
6.6	Intégration des déplacements $u$ et $v$ . . . . .	122
6.7	Intégration du déplacement $w$ . . . . .	123
6.8	Principe variationnel (Prandtl) . . . . .	125
6.9	Principe variationnel (gauchissement) . . . . .	127
6.10	Centre de torsion . . . . .	129
6.11	Méthodes de résolution . . . . .	129
6.12	Solutions exactes . . . . .	131
6.12.1	Torsion d'une poutre à section elliptique . . . . .	131
6.12.2	Torsion d'une poutre à section rectangulaire . . . . .	132
6.12.3	Trou circulaire axial très petit dans un arbre cylindrique .	137
6.13	Solutions approchées (fonction de Prandtl) . . . . .	140
6.13.1	Théorie de Bredt . . . . .	141
6.13.2	Caissons multicellulaires . . . . .	142
6.13.3	Poutres à parois minces ouvertes . . . . .	144
6.13.4	Solution approchée pour les sections rectangulaires . . . .	146
6.14	Solutions approchées (gauchissement) . . . . .	148
6.14.1	Solution élémentaire pour les sections massives . . . . .	149
6.14.2	Sections rectangulaires . . . . .	151
6.15	Exercices . . . . .	153

<b>7</b>	<b>Le problème de Boussinesq</b>	<b>161</b>
7.1	Introduction . . . . .	161
7.2	Système de coordonnées et équations . . . . .	161
7.3	Recherche de la solution générale . . . . .	163
7.3.1	Forme générale de la solution . . . . .	163
7.3.2	Détermination de la fonction $C$ . . . . .	164
7.3.3	Détermination de la fonction $D$ . . . . .	165
7.3.4	Calcul de la fonction $A$ . . . . .	165
7.3.5	Calcul de la fonction $B$ . . . . .	166
7.3.6	Expression générale des déplacements . . . . .	167
7.3.7	Expression générale des déformations . . . . .	168
7.3.8	Expression générale des contraintes . . . . .	168
7.4	Conditions aux limites . . . . .	169
7.5	Solution du problème de Boussinesq . . . . .	171
7.6	Exercice . . . . .	172
<b>8</b>	<b>Le problème de Hertz</b>	<b>175</b>
8.1	Introduction . . . . .	175
8.2	Considérations géométriques . . . . .	176
8.2.1	Description de la surface d'un corps . . . . .	176
8.2.2	Contact de deux corps . . . . .	178
8.3	Équilibre de la surface de contact . . . . .	182
8.4	Résolution des équations . . . . .	186
8.5	Comportements asymptotiques . . . . .	190
8.5.1	Cas où $e = 1$ . . . . .	190
8.5.2	Très faibles valeurs de $e$ . . . . .	191
8.6	Tables de la solution du problème de Hertz . . . . .	192
8.6.1	Valeurs courantes de $e$ . . . . .	192
8.6.2	Valeurs asymptotiques pour $e$ proche de zéro . . . . .	193
8.7	Annexe : potentiel de l'ellipsoïde chargé . . . . .	196
8.7.1	Calcul de $\partial V/\partial x$ . . . . .	197
8.7.2	Calcul de $\partial^2 V/\partial x^2$ et de $\Delta V$ . . . . .	198
8.8	Exercice . . . . .	200
<b>9</b>	<b>Principes variationnels</b>	<b>205</b>
9.1	Introduction . . . . .	205
9.2	Principe du minimum de l'énergie totale . . . . .	205
9.3	Multiplicateurs de Lagrange . . . . .	209
9.4	Principe à quatre champs de Fraeijs de Veubeke . . . . .	213

9.5	Principe de Hellinger-Reissner . . . . .	215
9.5.1	Invertibilité des relations constitutives . . . . .	216
9.5.2	Densité d'énergie complémentaire . . . . .	216
9.5.3	Principe de Hellinger-Reissner . . . . .	218
9.6	Principe à deux champs de Fraeijis de Veubeke . . . . .	219
9.7	Principe du minimum de l'énergie complémentaire . . . . .	220
9.8	Note sur la forme faible de la compatibilité . . . . .	221
9.9	Exemple de solution approchée . . . . .	223
9.10	Classification des approches variationnelles . . . . .	228
9.11	Analyse duale . . . . .	229
9.11.1	Cas des relations constitutives linéaires . . . . .	229
9.11.2	Les cas particuliers de Fraeijis de Veubeke . . . . .	232
9.11.3	Cas de relations constitutives non linéaires . . . . .	233
9.12	Bornes des raideurs . . . . .	236
9.13	Exercices . . . . .	238
<b>10</b>	<b>Élasticité plane</b>	<b>259</b>
10.1	État plan de contrainte . . . . .	259
10.2	État plan de déformation . . . . .	262
10.3	Équations générales des états plans . . . . .	264
10.3.1	Équation plane de Navier . . . . .	264
10.3.2	Équation plane de Beltrami-Michell . . . . .	265
10.4	Fonction d'Airy . . . . .	266
10.5	Compatibilité en termes de la fonction d'Airy . . . . .	269
10.6	Problèmes axisymétriques plans . . . . .	269
10.7	Cylindre épais sous pressions interne et externe . . . . .	271
10.7.1	Cas général . . . . .	271
10.7.2	Cas du cylindre très mince . . . . .	272
10.7.3	Cas du rayon intérieur tendant vers zéro . . . . .	274
10.7.4	Cas du rayon extérieur tendant vers l'infini . . . . .	275
10.8	Frettage . . . . .	275
10.9	Disque en rotation . . . . .	277
10.9.1	Disque plein de rayon extérieur $R_e$ . . . . .	278
10.9.2	Disque creux de rayons extrêmes $R_i$ et $R_e$ . . . . .	278
10.10	Utilisation de la variable complexe . . . . .	279
10.10.1	Généralités . . . . .	279
10.10.2	Fonctions analytiques et antianalytiques . . . . .	280
10.10.3	Coordonnées curvilignes orthogonales . . . . .	282
10.10.4	Transformation des vecteurs . . . . .	285

10.10.5	Transformation des tenseurs symétriques . . . . .	286
10.10.6	Structure générale d'une fonction harmonique réelle . . . . .	287
10.10.7	Structure générale d'une fonction biharmonique réelle . . . . .	288
10.11	Solution complexe en élasticité plane . . . . .	289
10.11.1	Déplacements . . . . .	289
10.11.2	Contraintes . . . . .	290
10.11.3	Fonctions de contrainte . . . . .	291
10.11.4	Calcul des contraintes en coordonnées curvilignes ortho- gonales . . . . .	292
10.11.5	Expression des tractions de surface . . . . .	293
10.12	Problème de Kolossoff . . . . .	293
10.13	Problème de Kirsch . . . . .	300
10.14	Fissure sous contrainte uniaxiale . . . . .	302
10.15	Coin soumis à une force et à un moment . . . . .	306
10.16	Problème de Flamant . . . . .	312
10.17	Disque circulaire soumis à deux forces $P$ opposées . . . . .	316
10.18	Poutre circulaire soumise à un moment constant . . . . .	320
10.19	Problème de Neuber . . . . .	324
10.20	Problème de Neuber en flexion . . . . .	330
10.21	Annexe : disques d'épaisseur variable en rotation . . . . .	334
10.21.1	Équations générales . . . . .	334
10.21.2	Disque d'égale résistance . . . . .	335
10.21.3	Jante . . . . .	335
10.21.4	Moyeu . . . . .	337
10.21.5	Renforcement neutre . . . . .	337
10.21.6	Exemple . . . . .	340
10.22	Exercices . . . . .	342
<b>11</b>	<b>Théorie technique des poutres</b> . . . . .	<b>347</b>
11.1	Introduction . . . . .	347
11.2	Ordres de grandeur des contraintes . . . . .	347
11.3	Ordres de grandeur des déplacements . . . . .	348
11.4	Structure des déplacements $u_1$ et $u_2$ . . . . .	350
11.5	Gauchissement et énergie de déformation . . . . .	351
11.6	Définition du centre de torsion . . . . .	353
11.7	Fonction de Prandtl . . . . .	355
11.8	Résultantes et équations d'équilibre . . . . .	359
11.9	Conditions aux limites . . . . .	362
11.10	Calcul des contraintes . . . . .	363

11.11	Torsion non uniforme . . . . .	365
11.12	Étude approchée des sections massives . . . . .	368
11.13	Théorie des poutres à parois minces ouvertes . . . . .	370
11.13.1	Considérations géométriques . . . . .	370
11.13.2	Une formule d'intégration par parties . . . . .	373
11.13.3	Torsion . . . . .	374
11.13.4	Cisaillement de flexion . . . . .	379
11.14	Caissons . . . . .	382
11.14.1	Détermination du gauchissement . . . . .	382
11.14.2	Recherche des champs de cisaillement de flexion . . . . .	384
11.15	Exercices . . . . .	385
<b>12</b>	<b>Flexion des plaques</b>	<b>393</b>
12.1	Introduction . . . . .	393
12.2	Description et ordres de grandeur . . . . .	393
12.3	Structure des contraintes $\sigma_{\alpha\beta}$ . . . . .	396
12.4	Application du principe de Hellinger-Reissner . . . . .	398
12.5	Équations générales des plaques . . . . .	403
12.6	Autres types d'hypothèses . . . . .	405
12.7	L'hypothèse de Kirchhoff . . . . .	405
12.8	Le paradoxe de Kirchhoff . . . . .	408
12.9	Équation de Sophie Germain . . . . .	410
12.10	Résultantes de bord en termes des déplacements . . . . .	411
12.11	Comparaison des théories . . . . .	413
12.12	Torsion d'une plaque rectangulaire . . . . .	415
12.13	Plaque rectangulaire - Série double . . . . .	421
12.14	Plaque rectangulaire - Série simple . . . . .	425
12.15	Flexion des plaques circulaires . . . . .	430
12.16	Déformations axisymétriques . . . . .	433
12.17	Exercices . . . . .	439
<b>13</b>	<b>Théorèmes énergétiques extérieurs</b>	<b>441</b>
13.1	Préambule . . . . .	441
13.2	Théorème de Castigliano . . . . .	441
13.2.1	Déplacement d'un point d'une poutre . . . . .	443
13.2.2	Même problème pour une poutre hyperstatique . . . . .	443
13.2.3	Déplacements pondérés . . . . .	445
13.2.4	Rapprochement de deux points $A$ et $B$ . . . . .	445
13.2.5	Formules de Navier-Bresse . . . . .	446

13.3	Systèmes hyperstatiques - Théorème de Menabrea . . . . .	451
13.4	Exemples d'application des deux théorèmes précédents . . . . .	456
13.4.1	Arc à deux articulations . . . . .	456
13.4.2	Coupsures généralisées . . . . .	458
13.5	Théorème de Clapeyron extérieur . . . . .	460
13.6	Théorème de réciprocité de Betti . . . . .	461
13.7	Théorème de réciprocité de Maxwell . . . . .	463
<b>14</b>	<b>Diagrammes d'influence</b> . . . . .	<b>465</b>
14.1	Notion de diagramme d'influence . . . . .	465
14.2	Diagramme d'influence d'un déplacement généralisé . . . . .	465
14.3	Diagramme d'influence d'un effet de type effort . . . . .	466
14.3.1	Remarque . . . . .	468
14.4	Exemples . . . . .	468
14.4.1	Réaction d'une poutre sur deux appuis . . . . .	468
14.4.2	Effort tranchant d'une poutre sur deux appuis . . . . .	469
14.4.3	Moment d'une poutre cantilever . . . . .	470
14.4.4	Moment dans un arc à trois articulations avec mise en charge indirecte . . . . .	471
14.4.5	Réaction de l'appui intermédiaire d'une poutre sur trois appuis . . . . .	473
14.4.6	Effort dans une barre quelconque d'un treillis isostatique . . . . .	473
<b>15</b>	<b>Stabilité des systèmes élastiques</b> . . . . .	<b>475</b>
15.1	Introduction . . . . .	475
15.2	Principe du minimum de l'énergie . . . . .	476
15.3	Variations successives de l'énergie totale . . . . .	478
15.4	Analyse générale de la stabilité . . . . .	480
15.5	Bifurcation de l'équilibre . . . . .	483
15.6	La colonne d'Euler . . . . .	485
15.7	Autres cas d'appuis . . . . .	487
15.7.1	Poutre bi-appuyée . . . . .	487
15.7.2	Poutre encastree-appuyée . . . . .	489
15.7.3	Poutre bi-encastree . . . . .	491
15.8	Colonne flambant sous son propre poids . . . . .	494
15.8.1	Colonne encastree à sa base et flambant sous son propre poids . . . . .	494
15.8.2	Colonne bi-appuyée, soumise à la fois à une charge en bout et à une charge répartie . . . . .	496

15.9	Effet de la déformation due à l'effort tranchant . . . . .	497
15.10	Stabilité des plaques . . . . .	499
15.11	Plaque rectangulaire comprimée . . . . .	501
15.12	Flambage par flexion et torsion . . . . .	504
15.12.1	Le centre de torsion coïncide avec le centre de gravité . . . . .	507
15.12.2	La section possède un axe de symétrie . . . . .	508
15.13	Déversement des poutres fléchies . . . . .	508
15.13.1	Déversement d'une poutre soumise à un moment quelconque et appuyée à ses extrémités de telle façon que $v = 0$ et $\theta = 0$ . . . . .	510
15.13.2	Remarque sur la répartition des charges . . . . .	512
15.13.3	Déversement d'une poutre appuyée sur des fourches en ses deux extrémités, sous l'effet d'une charge centrale appliquée à une hauteur $a$ par rapport à l'axe neutre . . . . .	513
<b>A</b>	<b>Coordonnées curvilignes orthogonales</b>	<b>517</b>
A.1	Introduction . . . . .	517
A.2	Coordonnées curvilignes . . . . .	517
A.2.1	Base covariante . . . . .	517
A.2.2	Tenseur métrique . . . . .	518
A.2.3	Base contravariante . . . . .	518
A.2.4	Produit scalaire de deux vecteurs . . . . .	519
A.2.5	Produit mixte et produit vectoriel . . . . .	519
A.3	Dérivation des vecteurs de base . . . . .	521
A.3.1	Dérivées de la base covariante . . . . .	521
A.3.2	Dérivées de la base contravariante . . . . .	521
A.3.3	Relations entre les symboles de Christoffel et le tenseur métrique . . . . .	522
A.4	Dérivation covariante d'un vecteur . . . . .	522
A.5	Tenseurs du second ordre et leurs dérivées covariantes . . . . .	523
A.6	Lemme de Ricci . . . . .	524
A.7	Propriétés de $\sqrt{g}$ . . . . .	524
A.8	Opérateurs différentiels courants . . . . .	525
A.8.1	Gradient . . . . .	525
A.8.2	Élément de surface orienté . . . . .	526
A.8.3	Divergence . . . . .	526
A.8.4	Laplacien . . . . .	527
A.8.5	Rotationnel . . . . .	527
A.9	Tenseur des déformations de Green . . . . .	528

A.10 Equations d'équilibre . . . . .	528
A.11 Coordonnées curvilignes orthogonales . . . . .	529
A.12 Utilisation des composantes physiques . . . . .	531
A.12.1 Gradient . . . . .	532
A.12.2 Divergence . . . . .	532
A.12.3 Rotationnel . . . . .	532
A.12.4 Laplacien . . . . .	532
A.12.5 Dérivées covariantes . . . . .	533
A.12.6 Déformations . . . . .	533
A.12.7 Équations d'équilibre . . . . .	533
A.13 Exercices . . . . .	534



# Chapitre 1

## Préliminaires mathématiques

### 1.1 Préambule

Il est utile d'introduire des notations rendant l'établissement des équations aussi simple que possible. Cet ouvrage fait usage des *notations indicielles*. Bien qu'un peu déroutantes au premier abord, ces notations présentent le double avantage d'être concises et d'abolir la nécessité de retenir un grand nombre de formules du calcul vectoriel. Nous engageons donc le lecteur à consacrer *sa meilleure attention* à ce chapitre introductif et à ne le quitter qu'après s'être assuré qu'il le domine *parfaitement*, car de là dépend la compréhension des chapitres qui suivent.

### 1.2 Vecteurs

Étant donné une base orthonormée  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  de l'espace physique, on peut décomposer tout vecteur  $\mathbf{u}$  dans cette base, ce qui introduit les composantes  $u_i$  de ce vecteur :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i \quad (1.1)$$

Le vecteur est totalement déterminé par ses composantes et inversement, de même qu'une fonction est déterminée par ses valeurs. D'ailleurs, on peut considérer le vecteur  $\mathbf{u}$  comme une fonction de la variable  $i$  pouvant prendre les valeurs 1, 2 et 3, fonction, disions-nous, qui à chaque valeur de  $i$  associe les

composantes  $u_i$ , comme l'illustre la figure 1.1<sup>1</sup>. Lorsque l'on manipule des fonc-

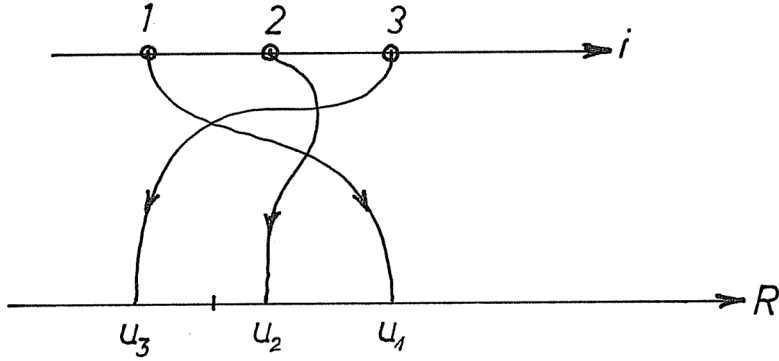


FIGURE 1.1 – Un vecteur considéré comme fonction de  $i=1,2,3$

tions, il est courant de décrire les opérations sur les valeurs et non pas sur les fonctions elles-mêmes. On écrira par exemple

$$f(x) = \sin 2x + \cos^2 x + \operatorname{arctg} x$$

notation dans laquelle on exprime les opérations à effectuer *pour un  $x$  donné*. Personne n'écrira

$$f = g + h + \ell$$

avec

$$g : x \mapsto \sin 2x$$

$$h : x \mapsto \cos^2 x$$

$$\ell : x \mapsto \operatorname{arctg} x$$

tout simplement parce que cette notation est trop lourde.

En revanche, on trouve souvent tout normal d'écrire

$$\mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mathbf{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

1. Bourbaki [5] s'est servi de ce point de vue pour définir les produits d'ensembles

quitte à expliciter séparément les opérations – souvent longues – menant au calcul effectif des composantes ! Ce faisant, on court encore le risque de ne pas s’apercevoir que cette équation équivaut à

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

et peut être traitée par les méthodes propres aux problèmes harmoniques.

La notation indicielle est au calcul vectoriel ce que la notation  $f(x)$  est au calcul des fonctions : *l’écriture la plus élémentaire*. En voici les règles. Elles sont simples et ne nécessitent aucun effort de mémoire particulier.

Un *vecteur* est donc représenté par *une composante générique* : le vecteur  $\mathbf{u}$  se note  $u_i$ . C’est précisément la présence de l’indice qui nous permettra de voir qu’il s’agit d’un vecteur : un scalaire ne possède pas d’indice.

La *somme* de deux vecteurs  $u_i$  et  $v_i$  s’obtient en sommant les composantes. On l’écrira donc tout naturellement

$$u_i + v_i \tag{1.2}$$

et en général, une combinaison linéaire de deux vecteurs s’écrira

$$\lambda u_i + \mu v_i \tag{1.3}$$

Une autre opération courante entre deux vecteurs est leur *produit scalaire*. On sait que ce produit vaut

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$$

On aurait donc pu décider de noter le produit scalaire sous cette forme. Néanmoins, le signe  $\sum_{i=1}^3$  alourdit considérablement l’écriture de la formule et, à vrai dire, on peut s’en passer moyennant une *convention de notation* introduite par Einstein, qui consiste à dire que *chaque fois qu’un indice est répété dans un monôme, celui-ci représente en fait la somme des trois termes obtenus en donnant successivement à cet indice les valeurs 1, 2 et 3*. En conséquence, nous écrirons

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i \tag{1.4}$$

L’indice  $i$  de cette expression, qui a pris toutes les valeurs possibles, disparaît du résultat, qui est un scalaire. On dit que c’est un *indice muet*.

L’avantage de ces notations apparaît déjà lorsque l’on considère la relation

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

qui, en calcul vectoriel classique, demande à être démontrée et retenue, alors que nous l'écrivons sous la forme évidente

$$a_i(b_i + c_i) = a_i b_i + a_i c_i \quad (1.5)$$

### 1.3 Tenseurs

Une grandeur  $b_{ij}$  à deux indices qui, appliquée à un vecteur  $c_j$ , donne un autre vecteur  $a_i$  selon la loi

$$a_i = b_{ij} c_j \quad (1.6)$$

est un *tenseur du second ordre*. Un vecteur est encore appelé *tenseur du premier ordre* et un scalaire, *tenseur d'ordre 0*. Plus généralement, et par récurrence, une grandeur  $b_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_\ell}$  à  $(k + \ell)$  indices qui, appliquée à un tenseur d'ordre  $\ell$ ,  $c_{j_1 \dots j_\ell}$ , donne un tenseur d'ordre  $k$ ,  $a_{i_1 \dots i_k}$  selon la loi

$$a_{i_1 \dots i_k} = b_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_\ell} c_{j_1 \dots j_\ell} \quad (1.7)$$

est un tenseur d'ordre  $(k + \ell)$ .

Le plus simple des tenseurs du second ordre est le tenseur de Kronecker, défini par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.8)$$

C'est bien un tenseur, car il applique un vecteur  $a_i$  sur lui-même :

$$a_i = \delta_{ij} a_j \quad (1.9)$$

Nous utiliserons également un tenseur du troisième ordre  $e_{ijk}$ , appelé *alternateur*, et défini par

$$e_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation paire de } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation impaire de } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{si } (i, j, k) \text{ n'est pas une permutation de } (1, 2, 3) \end{cases} \quad (1.10)$$

Ce tenseur permet d'exprimer le produit vectoriel  $a_i$  de deux vecteurs  $b_j$  et  $c_k$  par

$$a_i = e_{ijk} b_j c_k \quad (1.11)$$

comme on le vérifie aisément<sup>2</sup>. Pour  $i = 2$ , par exemple,  $e_{ijk}$  ne différera de zéro que si le triplet  $(i, j, k)$  vaut  $(2, 3, 1)$  (permutation paire) ou  $(2, 1, 3)$  (permutation impaire), ce qui donne

$$a_2 = e_{231}b_3c_1 + e_{213}b_1c_3 = b_3c_1 - b_1c_3$$

et l'on retrouve bien la deuxième composante du produit vectoriel.

La plupart des manipulations concernant l'alternateur reposent sur la formule fondamentale

$$e_{ijk}e_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \quad (1.12)$$

Tout d'abord, cette formule est évidente si  $j = k$  ou  $l = m$ . Il reste donc à examiner le cas  $j \neq k, l \neq m$ . On remarque pour commencer que

$$e_{ijk} = \det \begin{bmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} e_{ijk}e_{ilm} &= \sum_{i=1}^3 \det \left( \begin{bmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{i1} & \delta_{l1} & \delta_{m1} \\ \delta_{i2} & \delta_{l2} & \delta_{m2} \\ \delta_{i3} & \delta_{l3} & \delta_{m3} \end{bmatrix} \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \det \begin{bmatrix} 1 & \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{ji} & \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ \delta_{ki} & \delta_{kl} & \delta_{km} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De ces déterminants, un seul peut ne pas être nul, celui pour lequel  $i, j$  et  $k$  sont tous différents. Ce déterminant s'écrit

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \delta_{il} & \delta_{im} \\ 0 & \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ 0 & \delta_{kl} & \delta_{km} \end{bmatrix} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

comme annoncé.

L'égalité (1.12) mène simplement à des relations qui, en calcul vectoriel classique, n'ont aucun caractère d'évidence. Calculons par exemple la valeur du double produit vectoriel

$$\mathbf{d} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$

---

2. En toute rigueur, l'alternateur est un pseudo-tenseur, car le produit vectoriel est un pseudo-vecteur, changeant de sens lors du passage d'un système d'axes droitier à un système d'axes gaucher.

On a

$$d_i = e_{ijk}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_j c_k = e_{ijk}(e_{jlm} a_l b_m) c_k$$

Une permutation paire donne  $e_{ijk} = e_{jki}$ , d'où

$$d_i = e_{jki} e_{jlm} a_l b_m c_k = (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}) a_l b_m c_k$$

soit

$$d_i = a_l b_j c_l - a_i b_k c_k$$

ce qui équivaut à la formule classique

$$\mathbf{d} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

## 1.4 Transformations d'axes

Étant donné une base orthonormée  $\{\mathbf{e}_i\}$ , comment passer à une autre base orthonormée  $\{\mathbf{E}_i\}$ ? Le principe est évidemment que les vecteurs doivent rester les mêmes, ce qui s'écrit

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i = U_i \mathbf{E}_i \quad (1.14)$$

Chaque vecteur de la base  $\{\mathbf{e}_i\}$  peut être décomposé dans l'autre base, sous la forme

$$\mathbf{e}_i = T_{ij} \mathbf{E}_j \quad (1.15)$$

La matrice de transformation  $T^3$  possède d'ailleurs quelques propriétés liées à l'orthonormalité des deux bases : on a en effet

$$\delta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = T_{ik} T_{j\ell} \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_\ell = T_{ik} T_{jk} \quad (1.16)$$

ce qui signifie qu'il s'agit d'une *matrice orthonormale*. On sait que le déterminant d'une telle matrice vaut  $\pm 1$ . Dans le cas où il est *positif*, la transformation est dite *de signe positif* et elle conserve le caractère droitier ou gaucher du système d'axes. Dans le cas contraire, on dit que la transformation est *de signe négatif* et elle inverse le caractère gaucher ou droitier du système d'axes.

La transformation inverse est

$$\mathbf{E}_i = T_{ji} \mathbf{e}_j \quad (1.17)$$

Revenant au vecteur  $\mathbf{u}$ , on aura donc

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i = U_j \mathbf{E}_j = U_j T_{ij} \mathbf{e}_i$$

---

3. Ce n'est pas un tenseur!

soit

$$u_i = T_{ij}U_j \quad (1.18)$$

Réciproquement,

$$U_i = T_{ji}u_j \quad (1.19)$$

Telle est donc la loi de transformation d'un vecteur. Examinons à présent le cas d'un tenseur du second ordre. Nous avons défini celui-ci par le fait qu'il transforme un vecteur en un autre selon la loi

$$b_i = a_{ij}c_j$$

On en déduit successivement

$$b_i = a_{ij}T_{j\ell}C_\ell$$

et

$$B_k = T_{ik}b_i = T_{ik}T_{j\ell}a_{ij}C_\ell$$

soit

$$A_{kl} = T_{ik}T_{j\ell}a_{ij} \quad (1.20)$$

et, réciproquement,

$$a_{ij} = T_{ik}T_{j\ell}A_{kl} \quad (1.21)$$

Plus généralement, on tensor d'ordre  $n$  se transforme suivant la loi

$$a_{i_1 \dots i_n} = T_{j_1 i_1} \dots T_{j_n i_n} A_{j_1 \dots j_n} \quad (1.22)$$

## 1.5 Opérateurs de dérivation

Toujours par souci de concision, nous noterons  $D_i$  la dérivée partielle  $\partial/\partial x_i$  par rapport à la  $i^e$  variable. Ainsi, le *gradient* d'un scalaire  $\varphi$  sera le vecteur de composantes

$$D_i \varphi \quad (1.23)$$

C'est bien un vecteur, car la différentielle de  $\varphi$ , qui est un scalaire, s'écrit

$$d\varphi = D_i \varphi dx_i$$

où  $dx_i$  est un vecteur.

La *divergence* d'un vecteur  $u_i$  admettra la représentation simple

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = D_i u_i \quad (1.24)$$

et en rassemblant ces deux formules, on obtient le laplacien :

$$\operatorname{div} \mathbf{grad} \varphi = D_{ii} \varphi = \Delta \varphi \quad (1.25)$$

où l'on a noté  $D_{ii}$  pour  $D_i D_i$ .

Le *rotationnel* se construit à la manière du produit vectoriel : si  $u_i$  est un vecteur, son rotationnel  $\omega_i$  est donné par

$$\omega_i = e_{ijk} D_j u_k \quad (1.26)$$

Ici encore, on obtient très aisément des formules utiles. Ainsi, le rotationnel du rotationnel est donné par

$$\begin{aligned} (\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{u})_i &= e_{ijk} D_j (e_{krs} D_r u_s) \\ &= (\delta_{ir} \delta_{js} - \delta_{is} \delta_{jr}) D_{jr} u_s \\ &= D_{ij} u_j - D_{jj} u_i \end{aligned}$$

ce qui équivaut à

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{u} = \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} \quad (1.27)$$

résultat que nous obtenons avec la plus grande aisance.

## 1.6 Théorème de Gauss-Ostrogradsky

Considérons un champ de tenseurs  $F$ , dont nous omettons ici les indices éventuels, car ils ne jouent aucun rôle dans ce qui suit. Si  $V$  est un volume suffisamment régulier de surface  $S$ , et si  $n_i$  est le vecteur normal à cette surface, on a la formule générale

$$\int_V D_i F dV = \int_S n_i F dS \quad (1.28)$$

Il suffit évidemment de démontrer cette proposition pour une valeur quelconque de  $i$ , soit  $i = 1$ . On découpe le corps en prismes élémentaires, limités pour les grandes valeurs de  $x_1$  par une surface  $dS_+$  et, de l'autre côté, par une surface  $dS_-$  (voir figure 1.2). Ces prismes ont chacun une surface projetée sur le plan  $(Ox_2, Ox_3)$  égale à  $dS_0$ , d'où

$$\begin{aligned} \int_V D_1 F dV &= \int_{S_0} dS_0 \int_{x_1^-}^{x_1^+} D_1 F dx_1 \\ &= \int_{S_0} (F^+ - F^-) dS_0 \end{aligned}$$



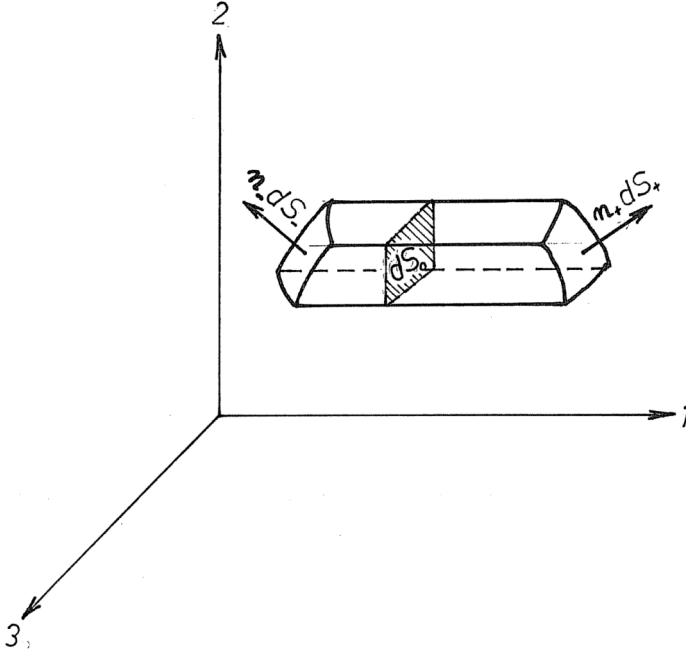


FIGURE 1.2 – Théorème de Gauss-Ostrogradsky

$S_0$  étant la projection de  $S_+$  et  $S_-$ , on a, en tenant compte des orientations relatives,

$$dS_0 = n_1^+ dS_+ = -n_1^- dS_-$$

ce qui entraîne

$$\int_{S_0} (F^+ - F^-) dS_0 = \int_{S_+} F^+ n_1^+ dS_+ + \int_{S_-} F^- n_1^- dS_-$$

soit finalement, comme  $S = S_+ \cup S_- \cup S_*$ , où  $S_*$  est l'éventuelle partie de la surface où  $n_1 = 0$ , partie dont la contribution est de toute façon nulle, on a bien

$$\int_V D_1 F dV = \int_S n_1 F dS$$

Voici quelques applications de ce théorème :

**Théorème de la divergence**

$$\int_V D_i u_i dV = \int_S n_i dS$$

soit

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$$

**Théorème du gradient**

$$\int_V D_i \varphi dV = \int_S n_i \varphi dS$$

soit

$$\int_V \mathbf{grad} \varphi dV = \int_S \varphi \mathbf{n} dS$$

**Théorème du rotationnel**

$$\int_V e_{ijk} D_j u_k dV = \int_S e_{ijk} n_j u_k dS$$

soit

$$\int_V \mathbf{rot} \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{u} dS$$

**Formule d'intégration par parties** Il convient encore de noter la formule suivante, dite d'intégration par parties : si  $F$  et  $G$  sont deux tenseurs, on a

$$\int_V F D_i G dV = \int_S F n_i G dS - \int_V G D_i F dV \quad (1.29)$$

résultat qui se déduit aisément du fait que

$$\int_S n_i F G dS = \int_V D_i (F G) dV = \int_V F D_i G dV + \int_V G D_i F dV$$

## 1.7 Éléments propres des tenseurs symétriques

### 1.7.1 Éléments propres

Un tenseur du second ordre  $a_{ij}$  est dit *symétrique* si l'on a toujours

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i \neq j$$

Les composantes de ce tenseur peuvent être représentées dans le tableau

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ \text{SYM} & & a_{33} \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

qui montre à l'évidence que seules, six d'entre elles sont indépendantes.

Par application de ce tenseur sur un vecteur  $b_j$ , on obtient en général un autre vecteur

$$c_j = a_{ij}b_j$$

qui diffère du vecteur de départ à la fois par sa norme et par son orientation. Mais ne peut-on trouver des vecteurs  $b_i$  particuliers dont l'image ne diffère que par la norme et, éventuellement, le sens, comme l'illustre la figure 1.3. Il s'agit

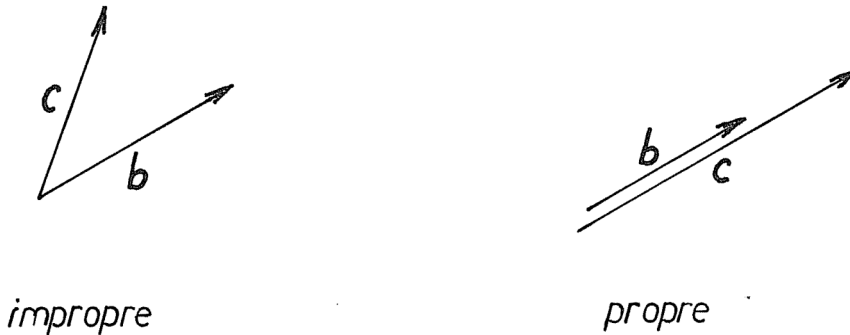


FIGURE 1.3 – Vecteurs propres et impropres

d'obtenir la relation

$$a_{ij}b_j = \lambda b_i \quad (1.31)$$

ou encore,

$$(a_{ij} - \lambda \delta_{ij})b_j = 0$$

Matriciellement, cela revient à chercher les éléments propres de la matrice (1.30). On sait qu'une matrice symétrique à  $n$  dimensions possède exactement  $n$  vecteurs propres orthogonaux entre eux. Soient donc

$$b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$$

les trois vecteurs propres orthonormés, correspondant aux trois valeurs propres  $\lambda^{(1)}$ ,  $\lambda^{(2)}$  et  $\lambda^{(3)}$ . Les trois vecteurs en question sont appelés *directions principales* du tenseur, et les valeurs propres, *valeurs principales*.

### 1.7.2 Développement spectral du tenseur

Il est équivalent de donner les composantes du tenseur symétrique  $a_{ij}$  ou de donner ses valeurs et directions principales<sup>4</sup>, comme l'atteste la formule

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^3 \lambda^{(k)} b_i^{(k)} b_j^{(k)} \quad (1.32)$$

Pour démontrer cette formule, remarquons d'abord que tout vecteur  $c_i$  admet la décomposition

$$c_j = \sum_k (c_\ell b_\ell^{(k)}) b_j^{(k)}$$

On a donc

$$\begin{aligned} a_{ij} c_j &= \sum_k a_{ij} b_j^{(k)} b_\ell^{(k)} c_\ell \\ &= \sum_k \lambda^{(k)} b_i^{(k)} b_\ell^{(k)} c_\ell \end{aligned}$$

---

4. On pourrait croire que le nombre de paramètres est différent. En fait, il n'en est rien. Pour définir la première direction principale, il faut deux angles ; pour la seconde, il n'en faut plus qu'un, car elle est orthogonale à la première, et la troisième direction principale se déduit directement par orthogonalité aux deux premières. Il faut donc les trois valeurs propres et les trois paramètres définissant la base, ce qui fait bien 6 paramètres en tout.

### 1.7.3 Caractère d'invariance des éléments propres

Lors d'une transformation de coordonnées, que devient l'équation (1.31)? Multipliant cette équation par  $T_{ik}$ , on obtient

$$T_{ik}a_{ij}b_j = \lambda T_{ik}b_i = \lambda B_k$$

soit encore

$$T_{ik}a_{ij}T_{j\ell}B_\ell = \lambda B_k$$

ce qui équivaut à

$$A_{k\ell}B_\ell = \lambda B_k \quad (1.33)$$

Dès lors, les valeurs principales sont indépendantes du système d'axes choisi. On dit qu'elles sont *invariantes*. L'équation caractéristique scalaire

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

a la forme générale

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \text{ (trace)} \\ I_2 &= \frac{1}{2}(a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji}) \\ I_3 &= \det(a_{ij}) \end{aligned} \quad (1.34)$$

Ses racines étant  $\lambda^{(1)}$ ,  $\lambda^{(2)}$  et  $\lambda^{(3)}$ , elle ne peut que s'écrire

$$(\lambda^{(1)} - \lambda)(\lambda^{(2)} - \lambda)(\lambda^{(3)} - \lambda) = 0$$

ce qui entraîne

$$I_1 = \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \lambda^{(3)} \quad (1.35)$$

$$I_2 = \lambda^{(1)}\lambda^{(2)} + \lambda^{(2)}\lambda^{(3)} + \lambda^{(3)}\lambda^{(1)}$$

$$I_3 = \lambda^{(1)}\lambda^{(2)}\lambda^{(3)} \quad (1.36)$$

Il en découle que ces trois grandeurs sont également invariantes, ce qui justifie qu'on les nomme *les trois invariants d'un tenseur symétrique*.

### 1.7.4 Décomposition d'un tenseur symétrique en un tenseur isotrope et un déviateur

Le tenseur symétrique  $\delta_{ij}$  admet n'importe quel vecteur comme vecteur propre, avec la valeur propre 1. En conséquence, si  $a_{ij}$  est un tenseur symétrique de directions principales  $b_i^{(1)}, b_i^{(2)}, b_i^{(3)}$  et de valeurs principales  $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}$ , on aura

$$(a_{ij} - \alpha\delta_{ij})b_j^{(k)} = (\lambda^{(k)} - \alpha)b_i^{(k)} \quad (1.37)$$

Le second invariant du tenseur du premier membre vaudra donc

$$\begin{aligned} I_{2,\alpha} &= (\lambda^{(1)} - \alpha)(\lambda^{(2)} - \alpha) + (\lambda^{(2)} - \alpha)(\lambda^{(3)} - \alpha) + (\lambda^{(3)} - \alpha)(\lambda^{(1)} - \alpha) \\ &= I_2 - 2\alpha I_1 + 3\alpha^2 \end{aligned}$$

et admet, pour  $\alpha = I_1/3$ , un minimum égal à

$$\hat{I}_2 = I_2 - \frac{I_1^2}{3} \quad (1.38)$$

Le tenseur ainsi obtenu s'appelle *déviateur de  $a_{ij}$*  et on le note  $\hat{a}_{ij}$  :

$$\hat{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{1}{3}a_{\ell\ell}\delta_{ij} \quad (1.39)$$

Son premier invariant est nul :

$$\hat{I}_1 = a_{ii} - \frac{1}{3}a_{\ell\ell}\delta_{ii} = 0$$

et son second invariant prend la forme

$$\hat{I}_2 = \frac{1}{2}(\hat{a}_{ii}\hat{a}_{jj} - \hat{a}_{ij}\hat{a}_{ij}) = -\frac{1}{2}\hat{a}_{ij}\hat{a}_{ij} \quad (1.40)$$

Il est donc *toujours négatif* et sa nullité entraîne celle du déviateur tout entier, dont  $(-\hat{I}_2)$  constitue une norme.

On en déduit par ailleurs qu'*un tenseur symétrique dont les deux premiers invariants sont nuls est nul*. En effet,

$$a_{ij} = \hat{a}_{ij} + \frac{I_1}{3}\delta_{ij}$$

et par la formule (1.38),  $\hat{I}_2$  est nul.

## 1.8 Structure des tenseurs antisymétriques du second ordre

Un tenseur  $\omega_{ij}$  est antisymétrique si

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} \quad (1.41)$$

En particulier, ses termes diagonaux sont nuls. Introduisant le (pseudo-) vecteur

$$\omega_k = \frac{1}{2} e_{kij} \omega_{ij} \quad (1.42)$$

on obtient alors

$$\begin{aligned} e_{pqk} \omega_k &= \frac{1}{2} e_{pqk} e_{kij} \omega_{ij} \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{pi} \delta_{qj} - \delta_{pj} \delta_{qi}) \omega_{ij} \\ &= \frac{1}{2} (\omega_{pq} - \omega_{qp}) \\ &= \omega_{pq} \end{aligned}$$

ce qui illustre la correspondance biunivoque entre le tenseur  $\omega_{ij}$  et le vecteur  $\omega_k$ . L'expression

$$\omega_{ij} = e_{ijk} \omega_k \quad (1.43)$$

est la forme canonique des tenseurs antisymétriques du second ordre.

## 1.9 Exercices

**Exercice 1** Calculer l'expression  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$

*Solution* - Le résultat  $f_i$  est donné par

$$\begin{aligned} f_i &= e_{ijk} a_j b_k e_{irs} c_r d_s \\ &= (\delta_{jr} \delta_{ks} - \delta_{js} \delta_{kr}) a_j b_k c_r d_s \\ &= a_j c_j b_k d_k - a_j d_j b_k c_k \end{aligned}$$

ce qui revient à dire que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

**Exercice 2** Montrer que si  $a_{ij}$  est un tenseur symétrique, on a  $e_{ijk}a_{jk} = 0$ . En déduire que  $\text{divrot } \mathbf{u} = 0$ .

*Solution* - On a en effet, en changeant le nom des indices muets,

$$e_{ijk}a_{jk} = \frac{1}{2}(e_{ijk}a_{jk} + e_{ikj}a_{kj})$$

et, en vertu de la symétrie de  $a_{ij}$ , le second membre s'écrit encore

$$\frac{1}{2}(e_{ijk} + e_{ikj})a_{jk} = 0$$

car  $e_{ijk} = -e_{ikj}$ .

La seconde assertion résulte du fait que

$$\text{divrot } \mathbf{u} = D_i(e_{ijk}D_j u_k) = e_{ijk}D_j u_k$$

avec  $D_{ij} = D_{ji}$ .

**Exercice 3** Montrer que  $\text{rot grad } \varphi = 0$

**Exercice 4** Démontrer la formule de Green

$$\int_V f \Delta g dV - \int_V g \Delta f dV = \int_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS - \int_S g \frac{\partial f}{\partial n} dS$$

**Exercice 5 \*** A partir de la formule de Gauss-Ostrogradsky, démontrer la formule de Stokes-Ampère

$$\int_S \text{rotu} \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} ds$$

$\mathbf{t}$  étant la tangente au contour  $C$  de la surface, orientée suivant la règle du tire-bouchon autour de la normale. La surface  $S$  sera supposée projectable sans recouvrement sur un plan.

*Solution* - Soit  $V$  le volume du cylindre limité par la surface  $S$  et sa projection  $S_0$ , et soit  $S_\ell$  sa surface latérale (fig. 1.4). Pour un vecteur  $v_i$  quelconque, on a alors

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V e_{ijk} D_j v_k dV \\ &= \int_S n_i e_{ijk} D_j v_k dS + \int_{S_0} n_i e_{ijk} D_j v_k dS + \int_{S_\ell} n_i e_{ijk} D_j v_k dS \end{aligned}$$



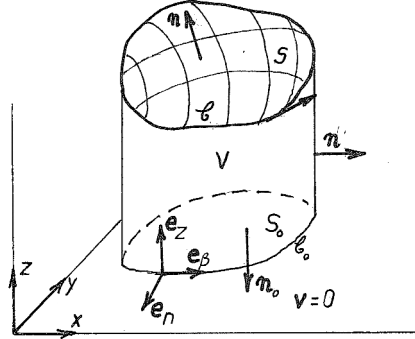


FIGURE 1.4 – Stokes-Ampère

Étant donné un vecteur  $u_i$  sur la surface  $S$  de hauteur  $h(x, y)$ , nous choisissons arbitrairement l'interpolation

$$v_i(x, y, z) = \frac{z}{h(x, y)} u_i(x, y)$$

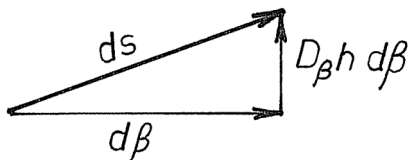
Dès lors, la contribution sur  $S_0$  est nulle. Sur la surface latérale, l'intégrand vaut, dans le système d'axes  $(\beta, z, n)$ ,

$$(D_\beta v_z - D_z v_\beta) = \frac{z}{h} (D_\beta u_z - D_z u_\beta) - \frac{z}{h^2} u_z D_\beta h - \frac{1}{h} u_\beta$$

d'où, en notant  $C_0$  la projection de  $C$  sur le plan de base,

$$\begin{aligned} \int_{S_\ell} (D_\beta u_z - D_z u_\beta) dS &= \int_{C_0} d\beta \int_0^h \left[ \frac{z}{h} D_\beta u_z - \frac{z}{h^2} u_z D_\beta h - \frac{u_\beta}{h} \right] dz \\ &= \int_{C_0} \left[ \frac{h}{2} D_\beta u_z - \frac{1}{2} u_z D_\beta h - u_\beta \right] d\beta \\ &= \int_{C_0} D_\beta \left( \frac{h}{2} u_z \right) d\beta - \int_{C_0} (u_\beta + u_z D_\beta h) d\beta \\ &= - \int_{C_0} (u_\beta + u_z D_\beta h) d\beta \end{aligned}$$

Or, sur  $C$ , on a (*fig. 1.5*)

FIGURE 1.5 – Tangente à  $C$ 

$$d\mathbf{s} = d\beta \mathbf{e}_\beta + D_\beta h d\beta \mathbf{e}_z$$

si bien que cette intégrale de contour n'est autre que

$$- \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}$$

Au total, on obtient bien

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS - \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

**Exercice 6** Montrer les relations

1.  $\int_S x_j n_j dS = (\text{mes} V) \delta_{ij}$

2.  $\int_S n_i dS = 0$

3.  $\int_S e_{ijk} n_j x_k dS = 0$

où  $S$  est la surface frontière d'un volume  $V$ .

## Chapitre 2

# Cinématique des corps continus déformables

### 2.1 Description du mouvement

Considérons un corps continu occupant, dans un état de référence arbitraire, un volume  $V$ . Un point quelconque de ce corps peut être repéré, dans cet état de référence, par ses coordonnées  $x_i$  dans un repère cartésien.

Imaginons que ce corps se déforme en fonction d'un paramètre d'évolution  $t$ , qui pourra être *le temps* (bien que cette identification ne soit pas *nécessaire* en statique). Il prendra donc, à l'instant  $t$ , une autre configuration, occupant un volume  $V(t)$ . Un point situé en  $x_i$  dans la configuration de référence, prendra alors une nouvelle position, de coordonnées  $\xi_i$  dans le même repère cartésien (*fig.2.1*). On appelle *déplacement* de ce point le vecteur

$$u_i = \xi_i - x_i \quad (2.1)$$

Il est clair que l'on peut considérer ce déplacement aussi bien comme une fonction des coordonnées de départ  $x_i$  que comme une fonction des coordonnées d'arrivée  $\xi_i$ . Les premières sont appelées *coordonnées matérielles* pour la raison que définir un corps dans une configuration de référence, convenue une fois pour toutes, revient en quelque sorte à « donner un nom » à chaque particule. D'ailleurs, en supposant que l'on ait pu graver un réseau de coordonnées sur le corps dans cette position, ce réseau se retrouvera, déformé bien sûr, dans la position au temps  $t$ , où il définira un système de coordonnées curvilignes que

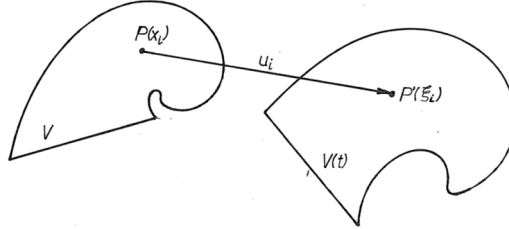


FIGURE 2.1 – Déplacement

l'on appelle les *coordonnées convectées*. Ces coordonnées ont toujours, pour un point matériel donné, la même valeur que les coordonnées matérielles (fig. 2.2).

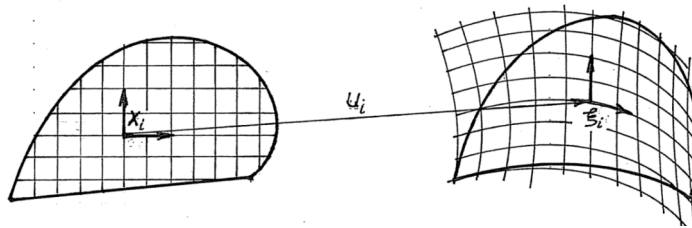


FIGURE 2.2 – Coordonnées convectées

Utiliser les coordonnées matérielles pour décrire le déplacement, c'est donc parler du déplacement du point qui, en  $t = 0$ , occupait la position  $x_i$  : il s'agit d'une *description lagrangienne*.

A l'inverse, les coordonnées  $\xi_i$  donnent la position spatiale du corps au temps  $t$ , ce qui leur vaut le nom de *coordonnées spatiales*. Décrire le mouvement à l'aide des coordonnées spatiales, c'est donc parler du déplacement du point qui, à l'instant  $t$ , occupe la position  $\xi_i$  : il s'agit d'une *description eulérienne*.

## 2.2 Choix de la description

En mécanique des fluides, la plupart des problèmes consistent à étudier des écoulements perpétuels, bien qu'éventuellement variables, et on s'intéresse gé-

néralement aux champs de vitesses et de pressions dans une portion déterminée de l'espace, sans se soucier des positions préalables des particules. Dans ces circonstances, la description eulérienne s'impose. Seuls, quelques problèmes d'oscillations admettent une formulation lagrangienne plus élégante [14].

Au contraire, en calcul des structures, les corps considérés sont fréquemment anisotropes ou même inhomogènes et, presque toujours, de forme compliquée. *La seule configuration où les directions d'anisotropie, les frontières de matériaux différents et, plus simplement, la forme des corps, sont connues, est la position de référence.* C'est pourquoi *la description lagrangienne est de règle dans le calcul des structures, et nous l'adopterons toujours dans ce qui suit.* Remarquons qu'en conséquence, les volumes et les surfaces considérés dans les diverses intégrations sont toujours des volumes et des surfaces de référence, *indépendantes des déplacements.*

### 2.3 Tenseur des déformations de Green

Nous dirons qu'un corps se déforme si la distance entre deux au moins de ses points varie. Comment mesurer cette déformation? Comme la distance est une notion cumulative le long d'un segment de droite, il suffit en fait de mesurer la variation de distance dans le voisinage de chaque point. Soit donc  $P(x_i)$  un point quelconque du corps, et  $Q(x_i + dx_i)$  un point voisin. La déformation les amène respectivement en  $P'(\xi_i)$  et  $Q'(\xi_i + d\xi_i)$ , avec (fig.2.3)

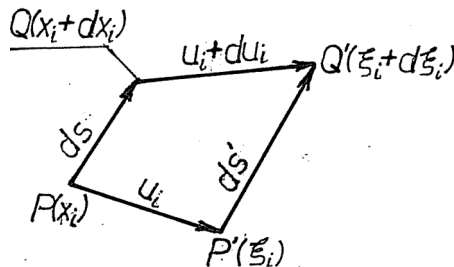


FIGURE 2.3 – Définition de la déformation

$$\begin{cases} \xi_i &= x_i + u_i \\ \xi_i + d\xi_i &= (x_i + dx_i) + (u_i + du_i) \end{cases}$$

## 22 CHAPITRE 2. CINÉMATIQUE DES CORPS CONTINUS DÉFORMABLES

Dans la configuration de référence, la distance entre ces deux points est donnée par

$$ds^2 = dx_i dx_i$$

La déformation transforme cette distance en

$$ds'^2 = d\xi_i d\xi_i = (dx_i + du_i)(dx_i + du_i)$$

Exprimant  $du_i$  comme la différentielle du déplacement :

$$du_i = D_j u_i dx_j$$

on obtient

$$\begin{aligned} ds'^2 &= (dx_i + D_j u_i dx_j)(dx_i + D_k u_i dx_k) \\ &= (\delta_{ij} + D_j u_i) dx_j (\delta_{ik} + D_k u_i) dx_k \\ &= (\delta_{jk} + D_j u_k + D_k u_j + D_j u_i D_k u_i) dx_j dx_k \end{aligned}$$

Pour savoir si cette distance diffère de la distance de référence, il suffit d'en faire la différence. L'usage veut que l'on en calcule plutôt la *demi-différence* :

$$\frac{1}{2}(ds'^2 - ds^2) = \frac{1}{2}(D_j u_k + D_k u_j + D_j u_i D_k u_i) dx_j dx_k = \gamma_{jk} dx_j dx_k \quad (2.2)$$

où apparaît le tenseur symétrique

$$\gamma_{jk} = \frac{1}{2}(D_j u_k + D_k u_j + D_j u_i D_k u_i) \quad (2.3)$$

appelé *tenseur des déformations de Green*. fait remarquable, à partir des six composantes indépendantes de ce tenseur en un point, il est possible de calculer la variation des longueurs infinitésimales dans *toutes* les directions autour du point considéré : il suffit en effet, à partir du vecteur  $dx_i$ , de calculer  $\gamma_{jk} dx_j dx_k$ .

**\* Remarque** La description ci-dessus considère que la déformation se mesure uniquement par des variations de longueur. En se rappelant la structure microscopique de la matière, on conçoit sans peine que *l'orientation relative* de deux particules voisines puisse jouer un rôle, menant à des configurations physiquement différentes, bien que  $\gamma_{ij} = 0$  partout (*fig.2.4*). (Ce serait le cas à cause d'effets magnétiques, par exemple). Dans ce cas, il faudrait encore pouvoir mesurer les variations d'orientation. De tels effets sont ignorés dans le cadre de la théorie *classique* des milieux continus. Il existe cependant des théories dites *asymétriques* où des effets de ce genre sont pris en compte à l'aide de *couples de contrainte* (*stress couples*) [58, 10].

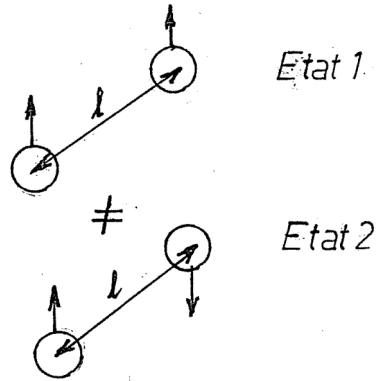


FIGURE 2.4 – Effet de l'orientation des particules

## 2.4 Interprétation du tenseur de Green

Pour interpréter les composantes du tenseur des déformations, il est utile de faire appel aux coordonnées convectées. La base  $(\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3)$  des coordonnées matérielles vérifie évidemment la relation

$$\mathbf{e}_i = D_i \mathbf{P} \quad (2.4)$$

Son image après déformation est donnée par les vecteurs

$$\mathbf{g}_i = D_i \mathbf{P}' \quad (2.5)$$

formant la base (covariante) locale des coordonnées convectées. Insistons sur le fait qu'en chaque point, la base  $(\mathbf{g}_i)$  peut avoir une orientation différente et que le plus souvent,  $|\mathbf{g}_i| \neq 1$ .

La distance entre deux points voisins  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{P} + d\mathbf{P}$  est donnée, dans la configuration de référence par

$$ds^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = dx_i dx_i$$

Dans la configuration déformée, on a

$$d\mathbf{P}' = \mathbf{g}_i dx_i$$

si bien que

$$ds'^2 = d\mathbf{P}' \cdot d\mathbf{P}' = \mathbf{g}_i dx_i \cdot \mathbf{g}_j dx_j = g_{ij} dx_i dx_j \quad (2.6)$$

où s'introduit le *tenseur métrique* de la configuration déformée

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad (2.7)$$

qui est visiblement symétrique. La comparaison des équations (2.6) et (2.2) donne visiblement

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \delta_{ij}) \quad (2.8)$$

Examinons d'abord une composante diagonale de  $\gamma_{ij}$ ,  $\gamma_{11}$  pour fixer les idées. Le vecteur  $\mathbf{e}_1$  prend, au cours de la déformation, une longueur

$$|\mathbf{g}_1| = |\mathbf{e}_1|(1 + \varepsilon) = 1 + \varepsilon \quad (2.9)$$

$\varepsilon$  étant son *allongement proportionnel*, au sens de la résistance des matériaux. On a

$$g_{11} = |\mathbf{g}_1|^2 = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$$

d'où

$$\gamma_{11} = \frac{1}{2}(g_{11} - \delta_{11}) = \frac{1}{2}(1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 - 1) = \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \quad (2.10)$$

Lorsque l'allongement proportionnel est petit, il vient simplement

$$\gamma_{11} \approx \varepsilon \quad (2.11)$$

Pourquoi, se demandera-t-on, n'avoir pas essayé de généraliser les allongements proportionnels de l'ingénieur, plutôt que d'introduire une autre mesure de déformation ? La réponse est qu'une telle approche, bien que possible, mène à un tenseur n'ayant pas de forme analytique simple avec les déplacements (déformation de Jaumann, [34, 36]). (Voir aussi exercice 10).

L'interprétation des termes croisés est aussi simple. Nous examinerons le terme  $\gamma_{12}$ . Dans la configuration de référence, les vecteurs de base  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  sont orthogonaux,

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$$

Dans la configuration déformée, les vecteurs  $\mathbf{g}_1$  et  $\mathbf{g}_2$  vérifient, en vertu de (2.8)

$$|\mathbf{g}_1| = \sqrt{1 + 2\gamma_{11}} \quad , \quad |\mathbf{g}_2| = \sqrt{1 + 2\gamma_{22}}$$

et

$$\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + 2\gamma_{12} = 2\gamma_{12}$$



Le cosinus de l'angle  $\theta_{12}$  entre  $\mathbf{g}_1$  et  $\mathbf{g}_2$  est donc donné par

$$\cos \theta_{12} = \frac{\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2}{\|\mathbf{g}_1\| \|\mathbf{g}_2\|} = \frac{2\gamma_{12}}{\sqrt{1+2\gamma_{11}}\sqrt{1+2\gamma_{22}}} \quad (2.12)$$

Pour de *petites* déformations, on a

$$\cos \theta_{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{12}\right) \approx \frac{\pi}{2} - \theta_{12}$$

et

$$\sqrt{1+2\gamma_{11}} \approx 1, \quad \sqrt{1+2\gamma_{22}} \approx 1$$

si bien que

$$\frac{\pi}{2} - \theta_{12} \approx 2\gamma_{12} \quad (2.13)$$

ce qui signifie que les termes croisés du tenseur de Green mesurent la variation des angles droits.

## 2.5 Équations de compatibilité

Nous avons vu comment calculer le tenseur des déformations à partir des déplacements. Posons-nous à présent le problème inverse [81, 53] : on donne en chaque point le tenseur de Green  $\gamma_{ij}$  ou, ce qui est équivalent, la métrique déformée  $g_{ij}$ , et on désire retrouver les coordonnées  $\xi_i$  ou les déplacements  $u_i$ . Ce problème admet-il une solution ? Si oui, est-elle unique ?

Nous ne discuterons ici que le cas de corps simplement connexes. Supposons connue la position  $\mathbf{P}'$  d'un point matériel  $\mathbf{P}$ . Pour en déduire la position de ses voisins, il faut intégrer les équations

$$D_i \mathbf{P}' = \mathbf{g}_i$$

Mais les  $\mathbf{g}_i$  eux-mêmes ne sont pas encore connus, et il faudra aussi que nous les intégrions. Sur ce point, notons d'abord la condition d'intégrabilité

$$D_i \mathbf{g}_j = D_{ij} \mathbf{P}' = D_j \mathbf{g}_i \quad (2.14)$$

Comme préliminaire à l'intégration de la base  $\{\mathbf{g}_i\}$ , remarquons que le tenseur métrique  $g_{ij}$  admet toujours un inverse  $g^{ij}$  défini par la relation

$$g^{im} g_{mj} = \delta_j^i$$

car la matrice  $\{g_{ij}\}$  est définie positive. On peut, à partir de cette inverse, définir une seconde base

$$\mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j$$

qui vérifie visiblement

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j = g^{ik} \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_j = g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$$

Pour distinguer les deux bases, on appelle  $\{\mathbf{g}_i\}$  *base covariante* et  $\{\mathbf{g}^i\}$  *base contravariante*. Selon la base choisie, on écrira

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{g}_i \text{ ou } \mathbf{a} = a_i \mathbf{g}^i$$

distinguant soigneusement les composantes contravariantes (indice supérieur) des composantes covariantes (indice inférieur). Ceci étant, si l'on pose

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{g}^i$$

on a

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{g}_j = a_i \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = a_i \delta_j^i = a_j$$

et, de même,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{g}^i = a^i$$

Nous pouvons à présent examiner l'intégration de la base covariante  $\{\mathbf{g}_i\}$ . Si cette base est connue en un point, il faut intégrer à partir de ce point les équations

$$D_k \mathbf{g}_i = (D_k \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j) \mathbf{g}^j = \Gamma_{kji} \mathbf{g}^j \quad (2.15)$$

où les  $\Gamma_{kji}$ , dits *symboles de Christoffel*, doivent vérifier, en vertu de (2.14)

$$\Gamma_{kij} = D_k \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = D_i \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_j = \Gamma_{ijk} \quad (2.16)$$

c'est-à-dire être symétrique par rapport à leurs indices extrêmes. Nous allons montrer que ces symboles peuvent être déduits du tenseur des déformations. On a en effet

$$D_k g_{ij} = D_k (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j) = D_k \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j + \mathbf{g}_i \cdot D_k \mathbf{g}_j = \Gamma_{kji} + \Gamma_{kji} \quad (2.17)$$

(*lemme de Ricci*). Écrivant cette relation en permutant les indices, on obtient les trois relations

$$\begin{aligned} D_k g_{ij} &= \Gamma_{kij} + \Gamma_{kji} \\ D_j g_{ki} &= \Gamma_{jki} + \Gamma_{jik} \\ D_i g_{jk} &= \Gamma_{ijk} + \Gamma_{ikj} \end{aligned}$$

dont on tire, en vertu de (2.16)

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}(D_k g_{ij} + D_j g_{ki} - D_i g_{jk}) \quad (2.18)$$

De plus, comme

$$D_k g_{ij} = D_k(\delta_{ij} + 2\gamma_{ij}) = 2D_k \gamma_{ij}$$

on obtient

$$\Gamma_{kij} = D_k \gamma_{ij} + D_j \gamma_{ki} - D_i \gamma_{jk} \quad (2.19)$$

Cette relation permet de calculer, à partir des déformations, les symboles de Christoffel dont on a besoin pour intégrer la base covariante à partir des équations (2.15). Il reste encore à se poser la question de la compatibilité de ces équations, qui ne sera réalisée que si les dérivées croisées sont égales, ce qui s'écrit

$$D_p(D_q \mathbf{g}_i) = D_q(D_p \mathbf{g}_i) \quad (2.20)$$

Calculons donc

$$D_p(D_q \mathbf{g}_i) = D_p(\Gamma_{qji} \mathbf{g}^j) = \mathbf{g}^j D_p \Gamma_{qji} + \Gamma_{qji} D_p \mathbf{g}^j$$

Pour obtenir les dérivées de la base contravariante ( $\mathbf{g}^j$ ), notons que

$$0 = D_p \delta_m^j = D_p(\mathbf{g}^j \cdot \mathbf{g}_m) = \mathbf{g}_m \cdot D_p \mathbf{g}^j + \mathbf{g}^j \cdot D_p \mathbf{g}_m$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} D_p \mathbf{g}^j &= (\mathbf{g}_m \cdot D_p \mathbf{g}^j) \mathbf{g}^m \\ &= -(\mathbf{g}^j \cdot D_p \mathbf{g}^m) \mathbf{g}^m \\ &= -g^{j\ell} (\mathbf{g}_\ell \cdot D_p \mathbf{g}_m) \mathbf{g}^m \\ &= -g^{j\ell} \Gamma_{p\ell m} \mathbf{g}^m \end{aligned}$$

et

$$D_p(D_q \mathbf{g}_i) = \mathbf{g}^m (D_p \Gamma_{qmi} - g^{j\ell} \Gamma_{p\ell m} \Gamma_{qji})$$

La condition de compatibilité s'écrit donc

$$R_{mipq} = D_p \Gamma_{qmi} - D_q \Gamma_{pmi} - g^{j\ell} (\Gamma_{p\ell m} \Gamma_{qji} - \Gamma_{q\ell m} \Gamma_{pji}) = 0$$

On notera que le tenseur  $R_{mipq}$  est connu sous le nom de *tenseur de courbure*. Il nous reste à l'expliciter en termes des déformations. On a

$$\begin{aligned} D_p \Gamma_{qmi} &= D_p(D_q \gamma_{mi} + D_i \gamma_{mq} - D_m \gamma_{iq}) \\ &= D_{pq} \gamma_{mi} + D_{pi} \gamma_{mq} - D_{pm} \gamma_{iq} \end{aligned}$$

et, en permutant les indices  $p$  et  $q$ ,

$$D_q \Gamma_{pmi} = D_{pq} \gamma_{mi} + D_{qi} \gamma_{mp} - D_{qm} \gamma_{pi}$$

ce qui mène à la forme finale des *équations de compatibilité*,

$$\begin{aligned} & D_{pi} \gamma_{mq} + D_{qm} \gamma_{pi} - D_{pm} \gamma_{iq} - D_{qi} \gamma_{mp} \\ & - g^{j\ell} \{ (D_p \gamma_{\ell m} + D_m \gamma_{p\ell} - D_\ell \gamma_{pm}) (D_q \gamma_{ji} + D_i \gamma_{jq} - D_j \gamma_{iq}) \\ & - (D_q \gamma_{\ell m} + D_m \gamma_{q\ell} - D_\ell \gamma_{qm}) (D_p \gamma_{ji} + D_i \gamma_{pj} - D_j \gamma_{pi}) \} = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

A priori, le tenseur de courbure possède  $3^4 = 81$  composantes. Cependant, elles ne sont pas toutes indépendantes. En effet, on peut vérifier que

$$\begin{cases} R_{impq} = -R_{mipq} & (a) \\ R_{miqp} = -R_{mipq} & (b) \\ R_{pqmi} = R_{mipq} & (c) \end{cases}$$

La relation (a) réduit à trois le nombre de valeurs du couple  $(i, m)$  pour lesquelles les  $R_{impq}$  sont indépendants et non nuls, à savoir,

$$(i, m) = (1, 2), (2, 3) \text{ et } (3, 1)$$

De même, la relation (b) permet de ne considérer que les couples

$$(p, q) = (1, 2), (2, 3) \text{ et } (3, 1)$$

Enfin, en vertu de la relation (c), la matrice

$$\begin{bmatrix} R_{1212} & R_{1223} & R_{1231} \\ R_{2312} & R_{2323} & R_{2331} \\ R_{3112} & R_{3123} & R_{3131} \end{bmatrix}$$

est symétrique, donc compte *six* composantes indépendantes, à savoir,

$$R_{1212}, R_{1223}, R_{1231}, R_{2323}, R_{2331}, R_{3131}$$

*Les équations de compatibilité sont donc au nombre de six.*

Récapitulons. Supposant les équations de compatibilité (2.21) vérifiées, on peut intégrer les équations (2.15). Il reste à se donner la base  $\{\mathbf{g}_i\}$  en un point  $\mathbf{P}_0$  arbitraire. Le choix des  $\mathbf{g}_i(\mathbf{P}_0)$  devra vérifier les conditions

$$|\mathbf{g}_1(\mathbf{P}_0)|^2 = 1 + 2\gamma_{11}(\mathbf{P}_0)$$

et de même pour les deux autres vecteurs de base, ce qui fixe leurs normes. Les angles entre les vecteurs de base sont fixés par les conditions

$$\mathbf{g}_i(\mathbf{P}_0) \cdot \mathbf{g}_j(\mathbf{P}_0) = 2\gamma_{ij}(\mathbf{P}_0), \quad i \neq j$$

L'*orientation* de cette base locale est cependant arbitraire : les bases convectées sont définies à *une rotation près*.

Les  $\mathbf{g}_i$  étant déterminés, on peut calculer les coordonnées de tous les points en intégrant les relations

$$D_i \mathbf{P}' = \mathbf{g}_i$$

mais il faut encore se donner les coordonnées  $\xi_i(\mathbf{P}_0)$  du point où démarre le processus d'intégration, ce qui donne encore la liberté d'une *translation* du corps.

En conclusion, *un champ de tenseurs symétriques  $\gamma_{ij}$  ne peut être un champ de déformation de Green, c'est-à-dire avoir la forme*

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(D_i u_j + D_j u_i + D_i u_m D_j u_m)$$

que s'il vérifie les six équations de compatibilité (2.21). Dans ce cas, le champ de déplacement  $u_i$  est déterminé à une translation et une rotation près.

## 2.6 Hypothèses simplificatrices

Les équations de compatibilité (2.21) s'appliquent dans le cas général des grandes déformations. Malheureusement, elles sont compliquées, d'une part par leur non-linéarité (équations presque linéaires) et par le fait que le tenseur de déformation apparaît implicitement dans  $g^{ij}$ . En restreignant le champ de l'analyse, on peut les simplifier quelque peu.

### 2.6.1 Petites déformations

L'hypothèse des *petites déformations* consiste à poser

$$\sup_{\mathbf{a} \neq 0} \frac{|\gamma_{ij} a_i a_j|}{a_i a_i} \leq \Gamma \ll 1 \text{ pp dans } V \quad (2.22)$$

c'est-à-dire que les déformations principales sont inférieures en valeur absolue à  $\Gamma$ . Cette hypothèse, très généralement applicable aux métaux dans le domaine élastique, permet d'écrire

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \mathcal{O}(\Gamma), \quad g^{ij} = \delta^{ij} + \mathcal{O}(\Gamma)$$

et ramène les équations de compatibilité à la forme approchée plus simple [53]

$$\begin{aligned} & D_{pi}\gamma_{mq} + D_{qm}\gamma_{pi} - D_{pm}\gamma_{iq} - D_{qi}\gamma_{mp} \\ & - (D_p\gamma_{jm} + D_m\gamma_{pj} - D_j\gamma_{pm})(D_q\gamma_{ji} + D_i\gamma_{jq} - D_j\gamma_{iq}) \\ & - (D_q\gamma_{jm} + D_m\gamma_{qj} - D_j\gamma_{qm})(D_p\gamma_{ji} + D_i\gamma_{pj} - D_j\gamma_{pi}) \} = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

où les  $\gamma_{ij}$  n'apparaissent plus que sous forme explicite.

### 2.6.2 Petits déplacements

L'hypothèse dite des *petits déplacements* – il serait plus correct de dire des *petits gradients de déplacement* – consiste à poser

$$\sup_{i,j} |D_j u_i| \leq \Gamma \ll 1 \text{ pp dans } V \quad (2.24)$$

Cette hypothèse, plus forte que la précédente, entraîne

$$\underbrace{\gamma_{ij}}_{\mathcal{O}} = \frac{1}{2} \left( \underbrace{D_i u_j}_{\Gamma} + \underbrace{D_j u_i}_{\Gamma} + \underbrace{D_i u_m D_j u_m}_{\Gamma^2} \right) \approx \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_m) = \varepsilon_{ij} \quad (2.25)$$

Nous démontrerons indépendamment au chapitre 5 que les équations de compatibilité pour les déformations linéaires  $\varepsilon_{ij}$  sont

$$D_{pi}\varepsilon_{mq} + D_{qm}\varepsilon_{pi} - D_{pm}\varepsilon_{iq} - D_{qi}\varepsilon_{mq} = 0$$

soit les relations (2.23) où les produits de  $\gamma_{ij}$  sont négligés devant leurs dérivées.

### 2.6.3 Gradients de déplacements modérés

Il s'agit d'une hypothèse intermédiaire entre les deux précédentes, bien utile en théorie de la stabilité (bifurcation de l'équilibre). Elle suppose de toute façon que les déformations sont petites ( $\mathcal{O}(\Gamma)$ ), mais ajoute une hypothèse que l'on peut présenter de deux façons équivalentes :

**Première définition :** *on admet que, quels que soient  $i$  et  $j$ , on a*

$$|D_i u_j| \leq \mathcal{O}(\Gamma^{1/2}) \quad (2.26)$$

Dans ce cadre, on a

$$\underbrace{2\gamma_{11}}_{\mathcal{O}} = \underbrace{2D_1 u_1}_{\Gamma} + \underbrace{(D_1 u_1)^2}_{\Gamma} + \underbrace{(D_1 u_2)^2}_{\Gamma} + \underbrace{(D_1 u_3)^2}_{\Gamma}$$

ce qui entraîne visiblement

$$D_1 u_1 = \mathcal{O}(\Gamma)$$

L'examen de  $\gamma_{22}$  et de  $\gamma_{33}$  donne de même

$$D_2 u_2 = \mathcal{O}(\Gamma) \text{ et } D_3 u_3 = \mathcal{O}(\Gamma)$$

**Deuxième définition :** *on admet que*

$$D_1 u_1 = \mathcal{O}(\gamma), \quad D_2 u_2 = \mathcal{O}(\Gamma) \text{ et } D_3 u_3 = \mathcal{O}(\Gamma) \quad (2.27)$$

Moyennant cette hypothèse, on a

$$2(\gamma_{11} - D_1 u_1) = \mathcal{O}(\Gamma) = (D_1 u_2)^2 + (D_1 u_3)^2$$

ce qui n'est possible que si

$$D_1 u_2 = \mathcal{O}(\Gamma^{1/2}) \text{ et } D_1 u_3 = \mathcal{O}(\Gamma^{1/2})$$

De la même façon, l'examen de  $\gamma_{22}$  conduit aux conditions

$$D_2 u_1 = \mathcal{O}(\Gamma^{1/2}) \text{ et } D_2 u_3 = \mathcal{O}(\Gamma^{1/2})$$

et celui de  $\gamma_{33}$ , aux conditions

$$D_3 u_1 = \mathcal{O}(\Gamma^{1/2}) \text{ et } D_3 u_2 = \mathcal{O}(\Gamma^{1/2})$$

de sorte que les conditions (2.26) sont également vérifiées. Les deux présentations sont donc équivalentes.

Dans ce cadre, on peut simplifier l'expression des déformations de Green à condition d'admettre une erreur  $\mathcal{O}(\Gamma^2)$  sur les déformations directes et  $\mathcal{O}(\Gamma^{3/2})$  sur les déformations croisées. En effet, considérons d'abord  $\gamma_{11}$ . Le terme  $\frac{1}{2}(D_1 u_1)^2$  est  $\mathcal{O}(\Gamma^2)$ , donc on peut écrire

$$\gamma_{11} = D_1 u_1 + \frac{1}{2}(D_1 u_2)^2 + \frac{1}{2}(D_1 u_3)^2 + \mathcal{O}(\Gamma^2) \quad (2.28)$$

Par le même raisonnement,

$$\gamma_{22} = D_2 u_2 + \frac{1}{2}(D_2 u_1)^2 + \frac{1}{2}(D_2 u_3)^2 + \mathcal{O}(\Gamma^2) \quad (2.29)$$

$$\gamma_{33} = D_3 u_3 + \frac{1}{2}(D_3 u_1)^2 + \frac{1}{2}(D_3 u_2)^2 + \mathcal{O}(\Gamma^2) \quad (2.30)$$

Passons aux déformations croisées. On a

$$2\gamma_{12} = \underset{\mathcal{O}}{D_1 u_2} + \underset{\Gamma}{D_2 u_1} + \underset{\Gamma^{3/2}}{D_1 u_1 D_2 u_1} + \underset{\Gamma^{3/2}}{D_1 u_2 D_2 u_2} + \underset{\Gamma}{D_1 u_3 D_2 u_3}$$

ce qui permet d'écrire

$$2\gamma_{12} = D_1 u_2 + D_2 u_1 + D_1 u_3 D_2 u_3 + \mathcal{O}(\Gamma^{3/2}) \quad (2.31)$$

et, de la même façon, on obtient aisément

$$2\gamma_{23} = D_2 u_3 + D_3 u_2 + D_2 u_1 D_3 u_1 + \mathcal{O}(\Gamma^{3/2}) \quad (2.32)$$

$$2\gamma_{31} = D_3 u_1 + D_1 u_3 + D_3 u_2 D_1 u_2 + \mathcal{O}(\Gamma^{3/2}) \quad (2.33)$$

## 2.7 Exercices

**Exercice 7** Déterminer, à partir de l'expression générale des déformations de Green, un champ de déplacement conduisant à

$$\begin{aligned} \gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} &= 0 \\ 2\gamma_{12} &= \alpha \\ \gamma_{13} = \gamma_{23} &= 0 \end{aligned}$$

*Solution* - On cherchera un déplacement de la forme suivante :

$$u_1 = A(y), \quad u_2 = B(y), \quad u_3 = 0$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= 0 \\ \gamma_{22} &= B' + \frac{1}{2}A'^2 + \frac{1}{2}B'^2 = 0 \\ \gamma_{33} &= 0 \\ 2\gamma_{12} &= A' = \alpha \\ 2\gamma_{13} &= 0 \\ 2\gamma_{23} &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit

$$0 = B'^2 + 2B' + A'^2 = B'^2 + 2B' + \alpha^2$$



soit

$$B' = -1 \pm \sqrt{1 - \alpha^2}$$

Cette solution n'a de sens que si  $|\alpha| < 1$ , ce qui est bien normal si l'on veut bien se référer à l'interprétation (6.12) des déformations croisées. Pour  $\alpha = 0$ , on doit avoir  $B' = 0$ , ce qui mène à choisir le signe + pour le radical. Une solution est donc

$$\begin{cases} u_1 &= \alpha y \\ u_2 &= (-1 + \sqrt{1 - \alpha^2})y \\ u_3 &= 0 \end{cases}$$

**Exercice 8** Déterminer de la même manière un champ de déplacement donnant  $\gamma_{11} = \alpha$ , les autres déformations étant nulles.

**Exercice 9** Montrer que les déformations doivent vérifier les conditions suivantes :

- a)  $1 + 2\gamma_{11} > 0$ ,  $1 + \gamma_{22} > 0$ ,  $1 + \gamma_{33} > 0$
- b)  $2|\gamma_{12}| \leq \sqrt{(1 + 2\gamma_{11})(1 + 2\gamma_{22})}$
- c) Dans le cas d'un cisaillement pur, ( $\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = 0$ ), on doit avoir

$$\sqrt{\gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2 + \gamma_{23}^2 - 4\gamma_{12}\gamma_{23}\gamma_{31}} \leq \frac{1}{2}$$

*Solution* - L'élément de longueur après déformation, qui s'écrit

$$d\xi_i d\xi_i = (\delta_{kl} + 2\gamma_{kl}) dx_k dx_l$$

doit être positif quels que soient  $dx_k$  et  $dx_l$ , ce qui signifie que la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 + 2\gamma_{11} & 2\gamma_{12} & 2\gamma_{13} \\ 2\gamma_{21} & 1 + 2\gamma_{22} & 2\gamma_{23} \\ 2\gamma_{31} & 2\gamma_{32} & 1 + 2\gamma_{33} \end{bmatrix}$$

doit être définie positive. En particulier, ses éléments diagonaux doivent être positifs, d'où a). Les déterminants emboîtés,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 1 + 2\gamma_{11} \\ \Delta_2 &= (1 + 2\gamma_{11})(1 + 2\gamma_{22}) - 4\gamma_{12}^2 \\ \Delta_3 &= (1 + 2\gamma_{11})(1 + 2\gamma_{22})(1 + 2\gamma_{33}) + 16\gamma_{13}\gamma_{21}\gamma_{32} \\ &\quad - 4\gamma_{12}^2(1 + \gamma_{33}) - 4\gamma_{13}^2(1 + 2\gamma_{22}) - 4\gamma_{23}^2(1 + 2\gamma_{11}) \end{aligned}$$

doivent être positifs. Cela étant,

- b) équivaut à  $\Delta_2 > 0$   
 c) découle directement de  $\Delta_3 > 0$

**Exercice 10** \* Montrer qu'il est possible de trouver un tenseur symétrique  $h_{ij}$  tel que

$$g_{ij} = \delta_{ij} + 2h_{ij} + h_{im}h_{jm}$$

*Solution* - La relation ci-dessus s'écrit encore

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \delta_{im}\delta_{jm} + h_{im}\delta_{jm} + \delta_{im}h_{jm} + h_{im}h_{jm} \\ &= \delta_{im}(\delta_{jm} + h_{jm}) + h_{im}(\delta_{jm} + h_{jm}) \\ &= (\delta_{im} + h_{im})(\delta_{jm} + h_{jm}) \end{aligned}$$

Passons aux axes principaux du tenseur  $g_{ij}$  par la transformation

$$g_{pq}^* = T_{pi}T_{qj}g_{ij}, \quad T_{pi}T_{qi} = \delta_{pq} \quad (\text{orthogonalité})$$

On obtient

$$\{g_{pq}^*\} = \text{diag}(g_{11}^*, g_{22}^*, g_{33}^*)$$

tous ces éléments étant strictement positifs. La transformation inverse est visiblement

$$g_{rs} = T_{pr}T_{qs}g_{pq}^*$$

Définissons alors, dans les axes principaux du tenseur métrique, le tenseur « racine carrée »

$$\{a_{pq}^*\} = \text{diag}(\sqrt{g_{11}^*}, \sqrt{g_{22}^*}, \sqrt{g_{33}^*})$$

Il est clair que

$$a_{pq}^*a_{rq}^* = g_{pr}^*$$

Les composantes du tenseur racine carrée dans le système de départ sont données par

$$a_{rs} = T_{pr}T_{qs}a_{pq}^*$$

On a donc

$$\begin{aligned} a_{im}a_{jm} &= T_{pi}T_{qm}a_{pq}^*T_{rj}T_{sm}a_{rs}^* \\ &= T_{pi}T_{rj}\delta_{qs}a_{pq}^*a_{rs}^* \\ &= T_{pi}T_{rj}a_{pq}^*a_{rq}^* \\ &= T_{pi}T_{rj}g_{pr}^* \\ &= g_{ij} \end{aligned}$$

Il suffit alors de poser

$$h_{ij} = a_{ij} - \delta_{ij}$$

On remarquera que dans les axes principaux de déformation, on a

$$h_{11}^* = \sqrt{g_{11}^*} - 1, \quad h_{22}^* = \sqrt{g_{22}^*} - 1, \quad h_{33}^* = \sqrt{g_{33}^*} - 1$$

c'est-à-dire que dans les axes principaux, ce tenseur représente les allongements proportionnels, ce qui le rend séduisant. En contrepartie, il ne contient les déplacements que de manière implicite. Ce tenseur est connu sous le nom de *tenseur de déformation de Jaumann*.



## Chapitre 3

# Principe des travaux virtuels

### 3.1 Déplacements virtuels

A partir d'une certaine configuration du corps  $V$ , décrite par des déplacements  $u_i$ , considérons une configuration très voisine, correspondant aux déplacements  $\hat{u}_i$ . On appelle *variation du déplacement* ou *déplacement virtuel* le champ

$$\delta u_i = \hat{u}_i - u_i \quad (3.1)$$

A cette variation correspond une modification des déformations de Green

$$\hat{\gamma}_{ij} - \gamma_{ij} = \frac{1}{2}(D_i \hat{u}_j + D_j \hat{u}_i + D_i \hat{u}_m D_j \hat{u}_m) - \frac{1}{2}(D_i u_j + D_j u_i + D_i u_m D_j u_m)$$

Tenant compte de la définition des déplacements virtuels, on obtient

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{ij} - \gamma_{ij} &= \frac{1}{2}(D_i \delta u_j + D_j \delta u_i + D_i u_m D_j \delta u_m + D_j u_m D_i \delta u_m) \\ &\quad + \frac{1}{2} D_i \delta u_m D_j \delta u_m \\ &= \delta \gamma_{ij} = + \frac{1}{2} \delta^2 \gamma_{ij} \end{aligned} \quad (3.2)$$

avec

$$\delta \gamma_{ij} = \frac{1}{2}(D_i \delta u_j + D_j \delta u_i + D_i u_m D_j \delta u_m + D_j u_m D_i \delta u_m) \quad (3.3)$$

et

$$\delta^2 \gamma_{ij} = D_i \delta u_m D_j \delta u_m \quad (3.4)$$

Le terme  $\delta\gamma_{ij}$ , linéaire en la variation du déplacement, est appelé *variation première* ou, simplement, *variation de la déformation*. Il constitue une espèce de différentielle de la déformation par rapport à la variation de déplacement. Le deuxième terme,  $\delta^2\gamma_{ij}$ , est la *variation seconde*. Il est du second ordre et donc négligeable pour de très petites variations de déplacement.

Plus généralement, une fonction  $f(u_i)$  admet la modification

$$f(u_i + \delta u_i) = \delta f + \frac{1}{2}\delta^2 f + \frac{1}{3!}\delta^3 f + \dots$$

où l'on regroupe les termes homogènes d'ordre 1,2,3, ... en les  $\delta u_i$ . Le terme  $\delta f$  est appelé *variation (première) de f*.

### 3.2 Travail virtuel de déformation

Nous admettrons comme axiome fondamental qu'une déformation virtuelle  $\delta\gamma_{ij}$  d'un élément de volume  $dV$  d'un corps continu quelconque nécessite un *travail de déformation virtuel*  $\delta W dV$ . Pour déformer le corps entier, il faudra donc produire un travail virtuel

$$\delta\mathcal{U} = \int_V \delta W dV \quad (3.5)$$

Il est naturel d'admettre que la densité de travail virtuel  $\delta W$  dépend directement de la déformation virtuelle, et d'exprimer en conséquence  $\delta W$  sous la forme

$$\delta W = s^{11}\delta\gamma_{11} + s^{22}\delta\gamma_{22} + s^{33}\delta\gamma_{33} + 2s^{12}\delta\gamma_{12} + 2s^{13}\delta\gamma_{13} + 2s^{23}\delta\gamma_{23} \quad (3.6)$$

ce qui fait apparaître six nouvelles grandeurs  $s^{11}$ ,  $s^{22}$ ,  $s^{33}$ ,  $s^{12}$ ,  $s^{13}$  et  $s^{23}$  dont la dimension est celle d'une pression :

$$[s^{ij}] = \frac{[\delta W]}{[\delta\gamma_{ij}]} = \frac{\frac{FL}{L^3}}{1} = \frac{F}{L^2}$$

Nous appellerons ces six grandeurs *contraintes de Kirchhoff-Trefftz*. Elles apparaissent en effet sous cette forme dans les travaux de Kirchhoff [51], mais c'est à Trefftz [89] que revient l'interprétation que nous en donnerons en section 3.5.

Les coefficients 2 introduits pour les termes croisés dans l'expression (3.6) permettent d'écrire la densité du travail virtuel de déformation d'une manière plus compacte en introduisant les termes fictifs

$$s^{21} = s^{12}, \quad s^{31} = s^{13}, \quad s^{32} = s^{23}$$

qui complètent le tenseur des contraintes : on a alors

$$\begin{aligned}\delta W &= s^{11}\delta\gamma_{11} + s^{22}\delta\gamma_{22} + s^{33}\delta\gamma_{33} + s^{12}\delta\gamma_{12} + s^{13}\delta\gamma_{13} \\ &\quad + s^{23}\delta\gamma_{23} + s^{21}\delta\gamma_{21} + s^{31}\delta\gamma_{31} + s^{32}\delta\gamma_{32} \\ &= s^{ij}\delta\gamma_{ij}\end{aligned}\quad (3.7)$$

Il convient cependant d'être attentif au fait suivant : si l'on utilise la relation (3.6), tenant explicitement compte de la symétrie des contraintes et des déformations, on obtient

$$\begin{aligned}s^{11} = \frac{\delta W}{\delta\gamma_{11}}, \quad s^{22} = \frac{\delta W}{\delta\gamma_{22}}, \quad s^{33} = \frac{\delta W}{\delta\gamma_{33}} \\ 2s^{12} = \frac{\delta W}{\delta\gamma_{12}}, \quad 2s^{13} = \frac{\delta W}{\delta\gamma_{13}}, \quad 2s^{23} = \frac{\delta W}{\delta\gamma_{23}}\end{aligned}\quad (3.8)$$

tandis que si l'on utilise la relation (3.7) en faisant volontairement abstraction des relations de symétrie, il vient uniformément

$$s^{ij} = \frac{\delta W}{\delta\gamma_{ij}}\quad (3.9)$$

Insistons finalement sur le fait que nous ne postulons nullement que  $\delta W$  soit une différentielle totale. Les considérations qui précèdent sont donc valables pour des déformations irréversibles.

### 3.3 Notion d'équilibre

Nous supposons que le corps  $V$  est soumis à un système de charges, dont nous ne précisons par pour le moment la distribution. Lors d'un déplacement virtuel  $\delta u_i$ , ces charges produisent un *travail virtuel*  $\delta\mathcal{T}$  ayant la forme générale

$$\delta\mathcal{T} = \sum_{\bar{V}} F_i \delta u_i\quad (3.10)$$

Nous dirons que *le corps  $V$  est en équilibre dans une configuration donnée si, pour tout déplacement  $\delta u_i$ , le travail virtuel de déformation  $\delta\mathcal{U}$  est exactement égal au travail virtuel des charges  $\delta\mathcal{T}$*  :

$$\delta\mathcal{U} = \delta\mathcal{T} \quad \forall \delta u_i\quad (3.11)$$

C'est le *principe des travaux virtuels*, qui constitue donc un *définition énergétique de l'équilibre*.

Cette définition admet un cas particulier important. Pour un *déplacement virtuel de corps rigide* (translation ou rotation sans déformation), on a  $\delta\gamma_{ij} = 0$  dans tout le corps et, par conséquent,  $\delta\mathcal{U} = 0$ . Il en résulte la condition d'équilibre

$$\delta\mathcal{T} = 0 \text{ pour un déplacement de corps rigide} \quad (3.12)$$

en bon accord avec une propriété connue de la statique des corps parfaitement rigides.

### 3.4 Équations locales d'équilibre

En admettant au départ que la déformation peut être mesurée par le tenseur de Green, on restreint automatiquement la classe des charges que la structure peut admettre. Pour mettre ce fait en évidence, calculons explicitement  $\delta\mathcal{U}$ . On a

$$\begin{aligned} \delta\gamma_{ij} &= \frac{1}{2}(D_i\delta u_j + D_j\delta u_i + D_i\delta u_m D_j\delta u_m + D_j\delta u_m D_i\delta u_m) \\ &= \frac{1}{2}(\delta_{jm} + D_j u_m)D_i\delta u_m + \frac{1}{2}(\delta_{im} + D_i u_m)D_j\delta u_m \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\delta W = \frac{1}{2}s^{ij}(\delta_{jm} + D_j u_m)D_i\delta u_m + \frac{1}{2}s^{ij}(\delta_{im} + D_i u_m)D_j\delta u_m \quad (3.13)$$

Il se trouve que les deux termes de cette somme sont *identiques*. En effet, la symétrie des contraintes permet d'écrire le premier sous la forme équivalente

$$\frac{1}{2}s^{ji}(\delta_{im} + D_i u_m)D_j\delta u_m$$

Les indices  $i$  et  $j$  étant muets, on peut donner à  $i$  et  $j$  les noms respectifs  $j$  et  $i$ , ce qui donne

$$\frac{1}{2}s^{ij}(\delta_{jm} + D_j u_m)D_i\delta u_m$$

soit précisément le second terme. Cette propriété permet de donner au travail virtuel de déformation la forme plus simple

$$\delta\mathcal{U} = \int_V s^{ij}(\delta_{im} + D_i u_m)D_j\delta u_m dV = \int_V t_{jm}D_j\delta u_m dV \quad (3.14)$$



en introduisant les grandeurs

$$t_{jm} = s^{ji}(\delta_{im} + D_i u_m) \quad (3.15)$$

connues sous le nom de *contraintes de Piola*. Ces contraintes *non symétriques* ne seront utilisées ici que pour abrégier les écritures et nous nous ramènerons finalement aux contraintes de Kirchhoff-Trefftz. Une simple intégration par parties donne alors

$$\delta\mathcal{U} = \int_S t_{jm} n_j \delta u_m dS - \int_V (D_j t_{jm}) \delta u_m dV \quad (3.16)$$

Les deux intégrales qui composent cette expression peuvent être identifiées, la première à un travail virtuel à la surface et la seconde, à un travail virtuel dans le volume. On en déduit que le travail virtuel des charges pourra avoir la forme

$$\delta\mathcal{T} = \int_S t_m \delta u_m dS + \int_V f_m \delta u_m dV \quad (3.17)$$

où apparaissent les *tractions de surface*  $t_m$  et les *forces de volume*  $f_m$ , liées aux contraintes par les équations locales d'équilibre

$$\begin{cases} n_j t_{jm} = t_m & \text{sur } S \\ D_j t_{jm} + f_m = 0 & \text{dans } V \end{cases} \quad (3.18)$$

soit, en termes des contraintes de Kirchhoff-Trefftz,

$$\begin{cases} D_j [s^{ji}(\delta_{im} + D_i u_m)] + f_m = 0 & \text{dans } V \\ n_j [s^{ji}(\delta_{im} + D_i u_m)] = t_m & \text{sur } S \end{cases} \quad (3.19)$$

Les équations (3.19) sont connues sous le nom d'*équations de Signorini* [34]. Elles sont non linéaires par le fait qu'elles font intervenir les déplacements. Les équations d'équilibre en termes des contraintes de Piola sont plus simples, puisque linéaires. Mais il faut leur adjoindre des équations supplémentaires pour restituer leur définition en termes des contraintes de Kirchhoff-Trefftz, qui fixe leur dissymétrie. Ces équations sont [34, 36]

$$t_{jm}(\delta_{jp} + D_j u_p) = \underbrace{s^{ji}(\delta_{im} + D_i u_m)(\delta_{jp} + D_j u_p)}_{\text{symétrique}} = t_{ip}(\delta_{im} + D_i u_m) \quad (3.20)$$

Nous avons donc montré que le principe des travaux virtuels ne peut être vérifié que si le travail virtuel des charges a la forme (3.16), les efforts  $f_m$  et  $t_m$  étant alors définis par (3.19). Montrons à présent que si le travail virtuel des

charges a la forme (3.16), le principe des travaux virtuels *impliquera* les relations d'équilibre local (3.19). On aura en effet

$$\begin{aligned} 0 = \delta\mathcal{U} - \delta\mathcal{T} &= \int_V (t_{im} D_i \delta u_m - f_m \delta u_m) dV - \int_S t_m \delta u_m dS \\ &= \int_S (n_i t_{im} - t_m) \delta u_m dS - \int_V (D_i t_{im} + f_m) \delta u_m dV \end{aligned} \quad (3.21)$$

A ce stade, le raisonnement repose sur un théorème du calcul des variations :

**Théorème 1** *Soit  $V$  un ouvert de frontière  $S$ , et soient  $f$  une fonction continue sur  $V$  et  $g$  une fonction continue sur  $S$ . Si l'égalité*

$$\int_V f \delta u dV + \int_S g \delta u dS = 0$$

*est vérifiée pour toute fonction  $\delta u$  continûment dérivable dans  $V$  et prolongeable sur  $S$ , alors on a  $f = 0$  dans  $V$  et  $g = 0$  sur  $S$ .*

*Démonstration* - Montrons d'abord que  $f = 0$ . En supposant le contraire, soit  $\mathbf{y} \in V$  un point où  $f \neq 0$ , par exemple,  $f > 0$ . Il existe une boule  $B_R(\mathbf{y})$  de centre  $\mathbf{y}$  et de rayon  $R$  où  $f > 0$ ; comme  $V$  est ouvert, on peut supposer que cette boule est entièrement contenue dans  $V$ . Considérons alors la fonction

$$\delta u(\mathbf{x}) = \begin{cases} (R^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2)^2 & \text{dans } B_R(\mathbf{y}) \\ 0 & \text{hors de } B_R(\mathbf{y}) \end{cases}$$

Cette fonction est continûment dérivable. On a

$$\int_V f \delta u dV + \int_S g \delta u dS = \int_V f \delta u dV > 0$$

en contradiction avec l'hypothèse. Donc  $f = 0$  dans  $V$ .

Au vu de cette première conclusion, on a pour tout  $\delta u$

$$\int_V f \delta u dV + \int_S g \delta u dS = \int_V 0 \cdot \delta u dV + \int_S g \delta u dS = \int_S g \delta u dS$$

Montrons à présent que  $g = 0$ . En supposant le contraire, soit  $\mathbf{z} \in S$  un point où  $g \neq 0$ , par exemple,  $g > 0$ . Il existe une boule  $B_R(\mathbf{z})$  telle que  $g > 0$  dans  $B_R(\mathbf{z}) \cap S$ . Alors, la fonction

$$\delta u(\mathbf{x}) = \begin{cases} (R^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{z}|^2)^2 & \text{dans } B_R(\mathbf{z}) \cap V \\ 0 & \text{hors de } B_R(\mathbf{z}) \cap V \end{cases}$$

est continûment dérivable dans  $V$  et continûment prolongeable à  $S$ . On a

$$\int_S g \delta u dS > 0$$

ce qui contredit l'hypothèse, donc  $g = 0$  sur  $S$ , CQFD.

L'application de ce théorème à notre problème conduit aux conclusions

$$\begin{cases} D_i t_{im} + f_m = 0 & \text{dans } V \\ n_i t_{im} = t_m & \text{sur } S \end{cases}$$

Remarquons cependant que les équations locales d'équilibre ne sont obtenues que moyennant une régularité suffisante du problème. Dans le cas où cette régularité n'est pas acquise, c'est au principe des travaux virtuels qu'il faut faire appel pour obtenir les équations dont on a besoin. Au sens du mathématicien, les solutions au sens classique (local) des équations de Signorini sont des *solutions fortes*. Les solutions de l'équilibre au sens des travaux virtuels sont des *solutions faibles*[63]. Il est peut être utile de préciser que l'univers de l'ingénieur est peuplé de solutions faibles, bien plus que de solutions fortes. Les discontinuités de matériau, les charges peu régulières mènent invariablement à des solutions faibles. Ceci justifie le parti pris dans cet exposé de présenter directement l'équilibre sous la forme des travaux virtuels.

### 3.5 Interprétation de Trefftz

Trefftz [89] a donné l'interprétation suivante des contraintes de Kirchhoff-Trefftz. Considérons les équations d'équilibre à la surface, qui s'écrivent

$$n_i [s^{ij} (\delta_{ij} + D_j u_m)] = t_m$$

Observons d'abord que le second membre représente, localement, la charge de surface divisée par la surface *de référence* (et non pas la surface déformée!). Par ailleurs, on peut écrire cette équation sous la forme

$$n_i s^{ij} D_j \xi_m = t_m$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= t_m \mathbf{e}_m = (n_i s^{ij}) D_j \xi_m \mathbf{e}_m \\ &= (n_i s^{ij}) \mathbf{g}_j \end{aligned} \tag{3.22}$$

où apparaît la base convectée. Cette relation signifie que si l'on décompose le vecteur traction de surface dans la base convectée,

$$\mathbf{t} = T^j \mathbf{g}_j \quad (3.23)$$

(ce qui équivaut à  $T^j = \mathbf{t} \cdot \mathbf{g}^j$ ), le reste du calcul revient à définir  $T^j$  comme la projection de  $s^{ij}$  sur la normale *de référence* :

$$n_i s^{ij} = T^j \quad (3.24)$$

A titre d'exemple, dans une poutre qui fléchirait à la Navier sous une traction de surface  $\mathbf{t}$  3.1, on aurait

$$T^1 = \frac{|\mathbf{t}| \sin \theta}{|\mathbf{g}_1|}, \quad T^2 = -\frac{|\mathbf{t}| \cos \theta}{|\mathbf{g}_2|}$$

et comme  $n_1 = 1$  et  $n_2 = 0$ ,

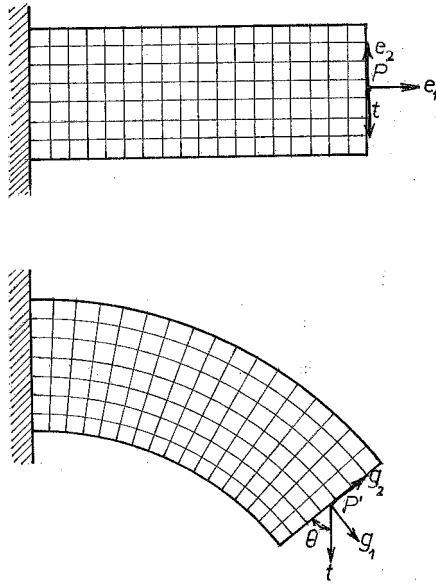


FIGURE 3.1 – Interprétation de Trefftz

$$T^1 = 1 \cdot s^{11} + 0 \cdot s^{12} = s^{11}, \quad T_2 = 1 \cdot s^{12} + 0 \cdot s^{22}$$

ce qui donne

$$s^{11} = \frac{|\mathbf{t}| \sin \theta}{\sqrt{g_{11}}}, \quad s^{12} = -\frac{|\mathbf{t}| \cos \theta}{\sqrt{g_{22}}}$$

## 3.6 Relation avec les contraintes eulériennes

### 3.6.1 Contraintes eulériennes

Une autre interprétation, beaucoup plus profonde, peut être obtenue en relation avec la description eulérienne. Nous noterons  $V'$  le volume déformé,  $S'$  sa surface et  $\mathbf{n}'$  la normale unitaire à cette surface. Nous écrirons en outre  $\partial_i$  pour  $\partial/\partial\xi_i$ . Enfin, nous utiliserons la matrice jacobienne

$$J_{ij} = D_j \xi_i \quad (3.25)$$

qui a pour inverse

$$J_{ij}^{-1} = \partial_j x_i \quad (3.26)$$

et pour déterminant

$$\mathcal{J} = \det(J) \quad (3.27)$$

Le travail virtuel de déformation peut être transformé comme suit

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U} &= \int_V s^{ij} D_j \xi_m D_i \delta u_m dV \\ &= \int_{V'} s^{ij} D_j \xi_m D_i \delta u_m \frac{1}{\mathcal{J}} dV' \\ &= \int_{V'} \frac{1}{\mathcal{J}} s^{ij} D_j \xi_m D_i \xi_p \partial_p \delta u_m dV' \\ &= \int_{V'} \sigma_{mp} \partial_p \delta u_m dV' \end{aligned} \quad (3.28)$$

où apparaissent les *contraintes eulériennes*

$$\sigma_{mp} = \frac{1}{\mathcal{J}} s^{ij} D_j \xi_m D_i \xi_p \quad (3.29)$$

qui sont visiblement symétriques. On peut écrire, en adoptant les notations

dyadiques,

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} &= \sigma_{mp} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_p \\
 &= \frac{1}{\mathcal{J}} s^{ij} (D_j \xi_m \mathbf{e}_m) \otimes (D_i \xi_p \mathbf{e}_p) \\
 &= \frac{1}{\mathcal{J}} s^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Ce qui signifie que *les contraintes de Kirchhoff-Trefftz s'identifient, au facteur  $\mathcal{J}$  près, aux composantes contravariantes du tenseur  $\sigma$  dans la base convectée.* Cette conclusion est très importante, comme nous le verrons sur un exemple plus loin. Mais auparavant, il est utile de préciser certains faits relatifs aux charges.

### 3.6.2 Relation entre les charges dans les deux descriptions

Le travail virtuel des charges appliquées s'écrit, dans la description lagrangienne,

$$\delta\mathcal{T} = \int_V f_i \delta u_i dV + \int_S t_i \delta u_i dS \tag{3.31}$$

Dans la description eulérienne, on écrira naturellement

$$\delta\mathcal{T} = \int_{V'} f'_i \delta u_i dV' + \int_{S'} t'_i \delta u_i dS' \tag{3.32}$$

ce qui mènera aux équations d'équilibre

$$\begin{cases} \partial_j \sigma_{ji} + f'_i = 0 & \text{dans } V' \\ n'_j \sigma_{ji} = t'_i & \text{sur } S' \end{cases} \tag{3.33}$$

Mais les deux expressions (3.31) et (3.32) du travail virtuel des charges ne seront équivalentes que si sont vérifiées les relations

$$f_i dV = f'_i dV' \tag{3.34}$$

et

$$t_i dS = t'_i dS' \tag{3.35}$$

Pour la première, cela implique, comme  $dV' = \mathcal{J} dV$ ,

$$f_i = \mathcal{J} f'_i \tag{3.36}$$

La condition (3.35) est un peu plus difficile à exploiter. Il nous faut pour cela déterminer le rapport entre  $dS$  et  $dS'$ . A cette fin, considérons une fonction  $\varphi$  quelconque. On a

$$\int_{S'} n'_i \varphi dS' = \int_{V'} \partial_i \varphi dV' = \int_V \mathcal{J} J_{ji}^{-1} D_j \varphi dV = \int_S \mathcal{J} n_j J_{ji}^{-1} \varphi dS$$

ce qui implique

$$n'_i dS' = \mathcal{J} n_j J_{ji}^{-1} dS \quad (3.37)$$

On en déduit

$$dS'^2 = n'_i dS' n'_i dS' = \mathcal{J}^2 n_j J_{ji}^{-1} n_k J_{ki}^{-1} dS^2 = \mathcal{J}^2 g^{kj} n_k n_j dS^2$$

soit

$$dS' = \mathcal{J} \sqrt{g^{kj} n_k n_j} dS \quad (3.38)$$

C'est la relation cherchée. On a donc

$$t'_i = t_i \frac{dS}{dS'} = \frac{t_i}{\mathcal{J} \sqrt{g^{k\ell} n_k n_\ell}} \quad (3.39)$$

Du reste, on peut encore déduire de (3.37) les composantes de la normale spatiale :

$$n'_i = \mathcal{J} n_j J_{ji}^{-1} \frac{dS}{dS'} = \mathcal{J} n_j J_{ji}^{-1} \frac{1}{\mathcal{J} \sqrt{g^{k\ell} n_k n_\ell}} = \frac{n_j J_{ji}^{-1}}{\sqrt{g^{k\ell} n_k n_\ell}} \quad (3.40)$$

### 3.6.3 Cas des petites déformations

Lorsque les déformations sont petites, on peut écrire

$$\mathcal{J} \approx 1, \quad g^{ij} n_i n_j \approx 1$$

ce qui permet de confondre sans grande erreur les charges définies dans la structure de référence et celles de la structure déformée. En outre, les angles entre les vecteurs de la base déformée diffèrent peu d'un angle droit. Les contraintes de Kirchhoff-Trefftz s'assimilent alors à des contraintes eulériennes, calculées dans un système d'axes particulier. Il se trouve d'ailleurs que ce système d'axes est *le plus pratique que l'on puisse trouver*. Imaginons par exemple un corps composé de deux pièces collées (*fig. 3.2*). Les colles résistent d'une façon très limitée en extension (contrainte  $\sigma$  sur la figure 3.3) et d'une façon bien meilleure en cisaillement (contrainte  $\tau$  sur la figure 3.3) Sur la figure 2, la contrainte normale sur

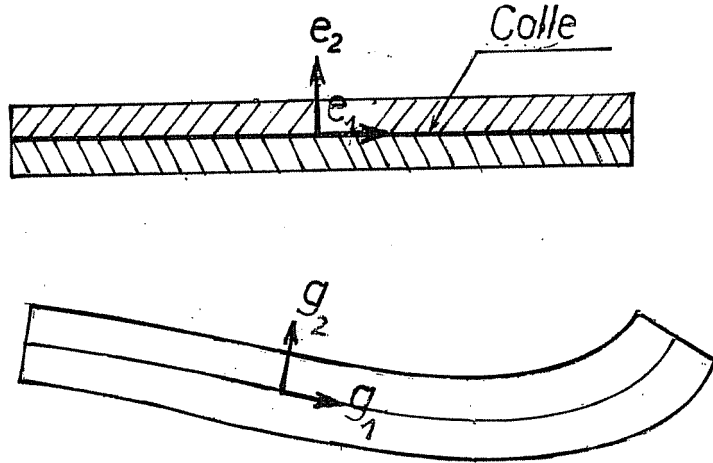


FIGURE 3.2 – Pièce collée

la colle est à peu de chose près  $s^{22}$  et celle de cisaillement, approximativement  $s^{12}$  et ce, quelle que soit la forme prise par le joint collé. En supposant que le critère de mise hors service soit de la forme

$$F\left(\frac{\sigma}{\sigma_{\text{lim}}}, \frac{\tau}{\tau_{\text{lim}}}\right)$$

on pourra l'écrire simplement

$$F\left(\frac{s^{22}}{\sigma_{\text{lim}}}, \frac{s^{12}}{\tau_{\text{lim}}}\right)$$

quel que soit le déplacement, tant que les déformations restent faibles.

### 3.7 Exercices

**Exercice 11** *Interpréter les contraintes de Piola dans le cas d'une poutre fléchissant à la Navier (fig. 3.1)*



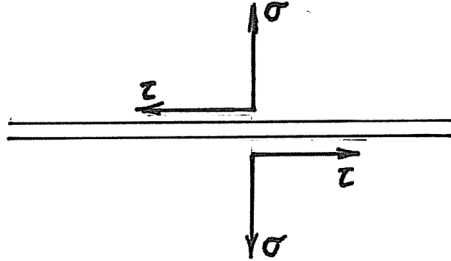


FIGURE 3.3 – Résistance de la colle

*Solution* - On a tout simplement

$$\begin{aligned} 0 &= n_1 t_{11} + n_2 t_{12} = t_{11} \\ -t &= n_1 t_{12} + n_2 t_{22} = t_{12} \end{aligned}$$

On notera le caractère artificiel de ces contraintes, qui ne tiennent aucun compte de la déformation.

**Exercice 12** \* *Déduire l'expression générale des déplacements virtuels de corps rigide à partir de la condition  $\delta\gamma_{ij} = 0$*

*Solution* - On a

$$\begin{aligned} \delta\gamma_{ij} &= \frac{1}{2}(D_i \xi_m D_j \delta u_m + D_j \xi_m D_i \delta u_m) \\ &= \frac{1}{2}(J_{mi} D_j \delta u_m + J_{mj} D_i \delta u_m) = 0 \end{aligned}$$

en faisant usage de la matrice jacobienne définie en section 3.6.1. Multipliant cette équation par  $2J_{ip}^{-1} J_{jq}^{-1}$  et contractant, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= J_{ip}^{-1} J_{jq}^{-1} J_{mi} D_j \delta u_m + J_{ip}^{-1} J_{jq}^{-1} J_{mj} D_i \delta u_m \\ &= \delta_{mp} J_{jq}^{-1} D_j \delta u_m + \delta_{mq} J_{ip}^{-1} D_i \delta u_m \\ &= \partial_p \delta u_q + \partial_q \delta u_p \end{aligned}$$

Ces équations admettent de toute évidence une solution générale du type

$$\partial_p \delta u_q = \Omega_{pq}$$

avec  $\Omega_{pq} = -\Omega_{qp}$ . Mais alors, on a

$$\partial_k \Omega_{pq} = \partial_{kp} \delta u_q = \partial_{pk} \delta u_q = \partial_p \Omega_{kq}$$

ce qui entraîne la chaîne suivante :

$$\partial_k \Omega_{pq} = \partial_p \Omega_{kq} = -\partial_p \Omega_{qk} = -\partial_q \Omega_{pk} = \partial_q \Omega_{kp} = \partial_k \Omega_{qp} = -\partial_k \Omega_{pq}$$

dont on déduit

$$\partial_k \Omega_{pq} = 0$$

On obtient donc, en donnant au tenseur antisymétrique  $\Omega_{pq}$  sa forme canonique

$$\Omega_{pq} = e_{pqr} \Omega_r$$

la forme générale

$$\begin{aligned} \delta u_q &= a_q + \Omega_{pq} \xi_p = a_p + e_{pqi} \xi_p \Omega_i \\ &= a_q + e_{qip} \Omega_i \xi_p \end{aligned}$$

soit la combinaison d'une translation et d'une rotation d'ensemble.

**Exercice 13** \* Soit un corps libre dans l'espace, chargé de forces  $f_i$  dans  $V$  et de charges  $t_i$  sur  $S$ . Montrer que pour que ce champ de forces puisse être équilibré intérieurement par un champ de contraintes de manière que  $\delta \mathcal{U} = \delta \mathcal{T}$ , il est nécessaire que soient vérifiées les conditions

$$\begin{cases} \int_V f_i dV + \int_S t_i dS = 0 & (\text{Équilibre de translation}) \\ e_{ipq} [\int_V \xi_p f_q dV + \int_S \xi_p t_q dS] = 0 & (\text{Équilibre de rotation}) \end{cases}$$

*Solution* - Pour un déplacement virtuel de corps rigide, on doit avoir  $\delta \mathcal{T} = 0$ . Or, (voir exercice 12), ces déplacements sont de la forme

$$\delta u_i = a_i + e_{ipq} \Omega_p \xi_q$$

d'où la condition

$$a_i \left( \int_V f_i dV + \int_S t_i dS \right) + \Omega_p e_{pqi} \left( \int_V \xi_q f_i dV + \int_S \xi_q t_i dS \right) = 0$$

quels que soient  $a_i$  et  $\Omega_q$ , ce qui entraîne les conditions annoncées.

**Exercice 14** La condition  $\delta \mathcal{U} = 0$  s'applique également aux mécanismes parfaits, c'est-à-dire composés de corps rigides articulés sans frottement. En déduire la réaction au point A de la poutre représentée en figure 3.4.

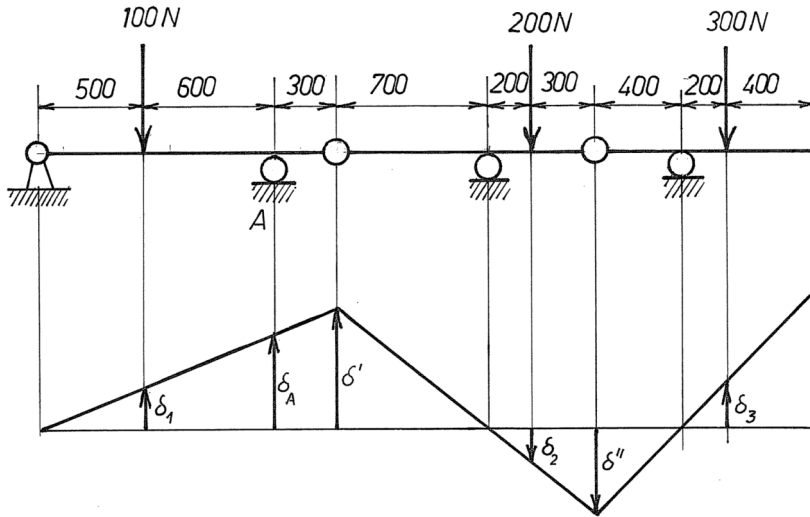


FIGURE 3.4 – Poutre

*Solution* - Il suffit de considérer  $R_A$  comme une force, l'appui en  $A$  étant coupé. Le mécanisme ainsi constitué peut alors prendre des déplacements selon la figure, ce qui permet d'écrire

$$\delta\mathcal{T} = R_A\delta_A - 100\delta_1 + 200\delta_2 - 300\delta_3 = 0$$

Or,

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \frac{500}{1100}\delta_A = 0,4545\delta_A \\ \delta' &= \frac{1400}{1100}\delta_A = 1,273\delta_A \\ \delta_2 &= \frac{200}{700}\delta' = 0,3637\delta_A \\ \delta'' &= \frac{500}{700}\delta' = 0,9093\delta_A \\ \delta_3 &= \frac{200}{400}\delta'' = 0,4546\delta_A\end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} R_A &= 100 \frac{\delta_1}{\delta_A} - 200 \frac{\delta_2}{\delta_A} + 300 \frac{\delta_3}{\delta_A} \\ &= 100 \cdot 0,4545 - 200 \cdot 0,3637 + 300 \cdot 0,4546 = \mathbf{109,1N} \end{aligned}$$

**Exercice 15** Déterminer la loi  $P = f(x)$  pour le quadrilatère articulé de la figure 3.5. Le ressort, de longueur naturelle  $\ell$ , a une énergie de déformation

$$U = k \frac{(\Delta\ell)^2}{2}$$

Les barres sont supposées indéformables et idéalement articulées.

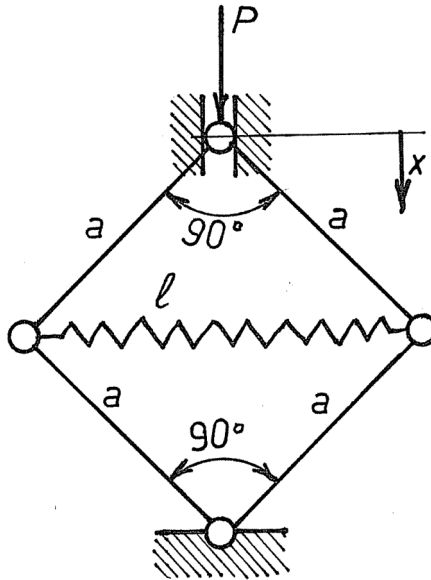


FIGURE 3.5 – Quadrilatère articulé

*Solution* - Le principe des travaux virtuels s'écrit

$$k\Delta\ell\delta\Delta\ell = P\delta x$$

Pour exprimer les liaisons entre  $\Delta\ell$  et  $x$ , le plus simple est d'utiliser le paramètre

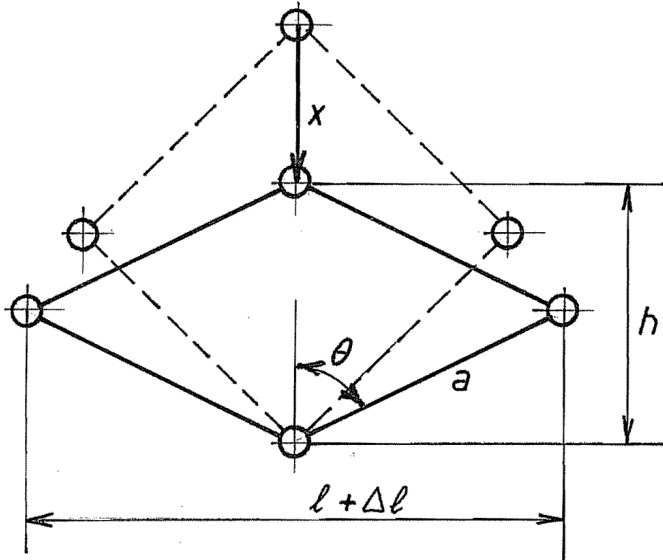


FIGURE 3.6 – Déformation du quadrilatère

$\theta$  représenté en figure 3.6. On a en effet

$$h = 2a \cos \theta \quad \text{et} \quad l + \Delta l = 2a \sin \theta$$

d'où

$$x = a\sqrt{2} - h = a(\sqrt{2} - 2 \cos \theta)$$

et

$$\Delta l = 2a \sin \theta - l = a(2 \sin \theta - \sqrt{2})$$

On en déduit

$$\delta x = 2a \sin \theta \delta \theta \quad \text{et} \quad \delta \Delta l = 2a \cos \theta \delta \theta$$

ce qui ramène l'équation d'équilibre à

$$ka(2 \sin \theta - \sqrt{2})2a \cos \theta = P \cdot 2a \sin \theta$$

Divisant les deux membres par  $2a \sin \theta$ , on obtient

$$P = ka(2 \cos \theta - \sqrt{2} \cot \theta)$$

Cette équation atteint un maximum pour

$$\frac{dP}{d\theta} = ka \left( -2 \sin \theta + \frac{\sqrt{2}}{\sin^2 \theta} \right) = 0$$

soit pour

$$\sin^3 \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ce qui donne  $\theta = 62,99^\circ$ . il y correspond la charge maximale

$$P_{max} = 0,1874ka$$

correspondant à une instabilité. On peut établir le tableau suivant :

$\theta(^{\circ})$	$P/(ka)$	$x/a$	$\delta\ell/a$
0	$-\infty$	-0,5858	-1,414
10	-6,051	-0,5786	-1,067
20	-2,006	-0,4652	-0,7302
30	-0,7174	-0,3478	-0,4142
40	-0,1533	-0,1179	-0,1286
45	0	0	0
50	0,09891	0,1286	0,1179
60	0,1835	0,4142	0,3178
62,99	0,1874	0,5059	0,3676
70	0,1693	0,7302	0,4652
80	0,09793	1,067	0,5554
90	0	1,414	0,5858

Ces résultats sont illustrés par la figure 3.7.

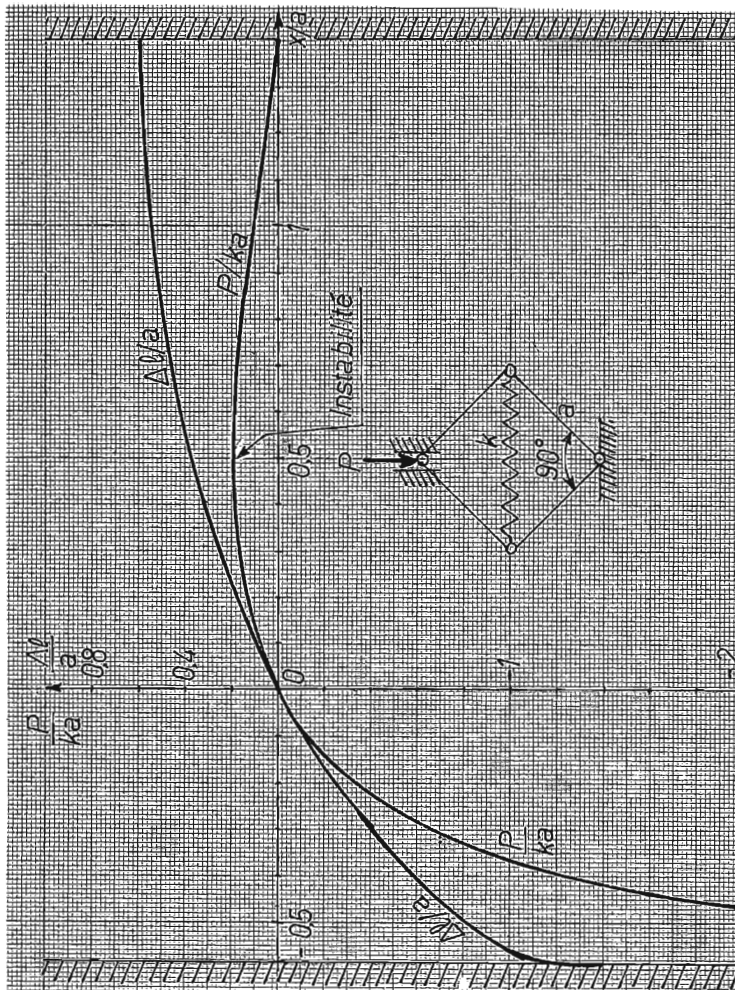


FIGURE 3.7 – Quadrilatère articulé : solution





# Chapitre 4

## Corps hyperélastiques

### 4.1 Hyperélasticité

Dans ce qui précède, le travail de déformation a été introduit sans hypothèse sur sa nature physique. Lorsque l'on suppose qu'il est *conservatif*, c'est-à-dire que  $\delta W$  est la différentielle totale d'une *densité d'énergie de déformation*  $W$ , le corps est dit *hyperélastique*. On a alors

$$s^{ij} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} \quad (4.1)$$

si l'on fait abstraction, dans la dérivation, des relations de symétrie  $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ . Les équations (4.1) n'ont de solution que si

$$\frac{\partial s^{ij}}{\partial \gamma_{kl}} = \frac{\partial s^{kl}}{\partial \gamma_{ij}} \quad (4.2)$$

ce qui exprime analytiquement la condition d'hyperélasticité.

Comme l'a fait remarquer Lord Kelvin [46], *il serait totalement erroné de croire que l'hyperélasticité implique l'absence d'échange de chaleur*. Dans le cas d'une sollicitation *statique* (mise en charge lente et progressive, comme on la réalise lors d'un essai de traction), la lenteur de la transformation permet de considérer que le corps garde constamment la température de l'ambiance, c'est-à-dire que *la température reste constante*. Si  $U$  et  $S$  sont respectivement la densité d'énergie interne et la densité d'entropie, on aura donc

$$\delta W = \delta U - T\delta S = \delta(U - TS) = \delta F \quad (4.3)$$

où  $F$  est la densité d'énergie libre. Nous verrons d'ailleurs dans la suite que la variation d'entropie *n'est pas nulle* lors de la déformation. Par contre, dans le cas des *vibrations*, la lenteur relative des échanges de chaleur permet de poser en première approximation que l'entropie ne varie pas, si bien que

$$\delta W = \delta U \quad (4.4)$$

Ainsi, la nature de l'énergie de déformation est différente dans le cas d'une sollicitation statique et dans le cas des vibrations. Il en résulte une différence entre les modules correspondant à ces deux types de sollicitations. Ceci sera étudié en détail en section 4.5 de ce chapitre.

## 4.2 Développement en série de Taylor de l'énergie de déformation

Nous nous limiterons, dans ce qui suit, à l'étude des *petites déformations*. Cette restriction permet de développer la densité d'énergie de déformation en une série de Taylor, que nous limiterons au second ordre :

$$W(\gamma) = W_0 + \left( \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} \right)_0 \gamma_{ij} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}} \right)_0 \gamma_{ij} \gamma_{kl} + \mathcal{O}(\gamma^3) \quad (4.5)$$

En dérivant ce développement par rapport aux déformations, on obtient l'expression suivantes des contraintes<sup>1</sup> :

$$s_{ij} = \left( \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} \right)_0 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}} \right)_0 \gamma_{kl} + \mathcal{O}(\gamma^2) \quad (4.6)$$

Les deux termes significatifs de cette expression s'interprètent comme suit : le terme

$$s_{ij}^0 = \left( \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} \right)_0 \quad (4.7)$$

représente les *contraintes résiduelles*, présentes dans l'état non déformé ; le second terme est linéaire en la déformation et fait apparaître le tenseur du quatrième ordre

$$C_{ijkl} = \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}} \right)_0 \quad (4.8)$$

---

1. Dorénavant, nous écrirons  $s_{ij}$  au lieu de  $s^{ij}$ , car nous ne ferons plus référence au caractère tensoriel covariant des contraintes

dit *tenseur des modules élastiques*. L'expression (4.6) donne donc, en négligeant  $\mathcal{O}(\gamma^2)$ ,

$$s_{ij} = s_{ij}^0 + C_{ijkl}\gamma_{kl} \quad (4.9)$$

et l'énergie s'écrit à  $\mathcal{O}(\gamma^3)$  près

$$W = W_0 + s_{ij}^0\gamma_{ij} + \frac{1}{2}C_{ijkl}\gamma_{ij}\gamma_{kl} \quad (4.10)$$

La question du *nombre* de modules indépendants a fait, au  $XIX^e$  siècle, l'objet de nombreuses controverses. C'est ainsi que l'on a connu des théories « à modules rares » et des théories « à modules nombreux » (de 1 à 36 modules) [46, 49, 47, 50, 66, 83, 87]. La manière la plus simple de traiter le problème consiste à remarquer que les déformations forment six grandeurs indépendantes

$$\begin{aligned} G_1 &= \gamma_{11} \\ G_2 &= \gamma_{22} \\ G_3 &= \gamma_{33} \\ G_4 &= \gamma_{12} \\ G_5 &= \gamma_{23} \\ G_6 &= \gamma_{31} \end{aligned} \quad (4.11)$$

La matrice hessienne de l'énergie, définie par

$$H_{ij} = \left( \frac{\partial^2 W}{\partial G_i \partial G_j} \right)_0 \quad (4.12)$$

est d'ailleurs appelée *matrice de Hooke*. Cette matrice symétrique de dimension  $6 \times 6$  possède en général

$$\frac{6 \times 7}{2} = 21$$

termes indépendants. Tel est le nombre de modules indépendants d'un solide *anisotrope*.

Dans le cas d'un solide *isotrope*, le terme quadratique

$$W_2 = \frac{1}{2}C_{ijkl}\gamma_{ij}\gamma_{kl} \quad (4.13)$$

de la densité d'énergie de déformation doit avoir une expression indépendante du système d'axes choisi. Il ne peut donc dépendre que des invariants du tenseur

des déformations,

$$\begin{cases} I_1 &= \gamma_{ii} \\ \hat{I}_2 &= -\frac{1}{2}(\gamma_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{\ell\ell}\delta_{ij})(\gamma_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{mm}\delta_{ij}) \\ I_3 &= \det(\gamma_{ij}) \end{cases}$$

Le choix de  $\hat{I}_2$  plutôt que  $I_2$  est dicté par des conditions de commodité. Parmi ces trois invariants, seuls  $I_1$  et  $\hat{I}_2$  sont susceptibles de former une combinaison quadratique, qui aura la forme

$$W_2 = -2G\hat{I}_2 + \frac{K}{2}I_1^2 \quad (4.14)$$

Les grandeurs  $G$  et  $K$  sont appelées respectivement *module de Coulomb* et *module de compressibilité* (Bulk modulus). Cette dernière appellation provient du fait que dans le cadre des petites déformations, on a

$$dV' = \mathcal{J}dV \approx dV$$

ce qui revient à dire que

$$|\eta| = \left| \frac{dV' - dV}{dV} \right| = |\mathcal{J} - 1| \ll 1$$

Or,

$$\det(g_{ij}) = \mathcal{J}^2 = |1 + (\mathcal{J} - 1)|^2 = 1 + 2\eta + \eta^2 \quad (4.15)$$

Calculons

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}) &= \begin{vmatrix} 1 + 2\gamma_{11} & 2\gamma_{12} & 2\gamma_{13} \\ 2\gamma_{21} & 1 + 2\gamma_{22} & 2\gamma_{23} \\ 2\gamma_{31} & 2\gamma_{32} & 1 + 2\gamma_{33} \end{vmatrix} \\ &= 1 + 2\gamma_{ii} + \mathcal{O}(\gamma^2) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Identifiant les expressions (4.15) et (4.16), on obtient

$$2\eta = 2\gamma_{ii} + \mathcal{O}(\gamma^2) + \mathcal{O}(\eta^2)$$

soit

$$\gamma_{ii} \approx \frac{dV' - dV}{dV} \quad (4.17)$$

Dans la pratique, on utilise souvent deux autres modules, à savoir le *module de Young*  $E$  et le *coefficient de Poisson*  $\nu$ , qui sont liés aux précédents par les relations

$$\begin{aligned} G &= \frac{E}{2(1+\nu)} \\ K &= \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \\ E &= \frac{9KG}{3K+2G} \\ \nu &= \frac{1}{2} \left( \frac{3K-2G}{3K+G} \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

En fonction de  $G$  et  $\nu$ , on calcule aisément

$$W_2 = G(\gamma_{ij}\gamma_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\gamma_{\ell\ell}\gamma_{ii}) \quad (4.19)$$

On rencontre aussi les *coefficients de Lamé*, provenant de l'expression de  $W_2$  en termes des invariants  $I_1$  et  $I_2$  :

$$W_2 = 2\mu I_2 + \frac{\lambda}{2} I_1^2$$

Ces modules sont liés à  $G$  et  $K$  par les relations

$$\mu = G \text{ et } \lambda = K - \frac{2}{3}G \quad (4.20)$$

### 4.3 Postulat de la stabilité locale

Isolons un morceau infiniment petit  $dV$  du corps hyperélastique. Placé dans la structure, il est en équilibre avec son voisinage, pour une certaine valeur de la déformation. Imaginons qu'on le découpe du corps : toute relation de compatibilité, c'est-à-dire d'égalité des déplacements de sa frontière avec les déplacements de ses voisins étant coupée, il tendra vers une position d'équilibre propre définie par la condition

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} = 0$$

Le postulat de *stabilité locale* consiste à affirmer que cette position d'équilibre propre correspond à un *minimum* d'énergie. Analytiquement, comme

$$W = s_{ij}^0 \gamma_{ij} + \frac{1}{2} C_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl}$$

la condition d'équilibre s'écrit

$$s_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} = s_{ij}^0 + C_{ijkl} \gamma_{kl} = 0$$

La solution  $\gamma_{ij}^0$  de cette équation constitue la *déformation de relaxation*. La condition de stabilité locale s'écrit alors

$$0 = W(\gamma_{ij}^0 + \delta\gamma_{ij}) - W(\gamma_{ij}^0) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}} \right)_{\gamma^0} \delta\gamma_{ij} \delta\gamma_{kl} + \mathcal{O}(\delta\gamma^3)$$

et, en négligeant le troisième ordre, elle s'exprime par la condition

$$\delta^2 W = C_{ijkl} \delta\gamma_{ij} \delta\gamma_{kl} > 0 \quad (4.21)$$

quelle que soit la variation de déformation  $\delta\gamma_{ij}$ . Cette condition revient à admettre que *la matrice de Hooke est définie positive*. Introduite pour la première fois par Kirchhoff [49, 52] et utilisée après lui par Clebsch [9], cette condition est actuellement admise de manière assez générale [56].

Dans le cas d'un corps isotrope, les deux formes quadratiques  $(-\hat{I}_2)$  et  $I_1^2$  sont positives et indépendantes. La positivité de la matrice de Hooke sera donc réalisée si

$$G > 0 \text{ et } K > 0 \quad (4.22)$$

Dans ce cadre, en effet, on ne pourra avoir  $W_2 = 0$  que si  $I_1$  et  $\hat{I}_2$  sont simultanément nuls, ce qui, nous l'avons vu, entraîne  $\gamma_{ij} = 0$ . En termes du module de Young et du coefficient de Poisson, les conditions (4.22) impliquent d'abord

$$E = \frac{9KG}{3K + 2G} > 0$$

c'est-à-dire que *le module de Young est positif*. Le coefficient de Poisson, donné par

$$\nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G} = \frac{3 - 2\frac{G}{K}}{6 + 2\frac{G}{K}}$$

pourra varier entre  $1/2$  pour  $G/K = 0$  et  $-1$  pour  $G/K = \infty$ . Les conditions sont donc, si les modules  $G$  et  $K$  sont finis,

$$-1 < \nu < \frac{1}{2}$$

Il est à noter que les corps élastiques connus vérifient tous  $\nu \geq 0$ , bien que des valeurs négatives ne soient pas absurdes sur le plan énergétique. Le cas extrême  $K = \infty$  se rencontre dans les corps *incompressibles*, au rang desquels on classe généralement le caoutchouc. Le fait que  $K$  soit infini entraîne quelques particularités qui nécessitent, dans les méthodes numériques, un traitement spécial [37, 13, 16, 15].

## 4.4 Stabilité structurale de l'état de référence

Il faut se garder de croire que la stabilité locale définie ci-dessus implique la stabilité structurale dans le cas général [36]. Ceci n'est vrai que dans le cas de la linéarisation géométrique (petits déplacements). Dans le cadre des grands déplacements, la non-linéarité des déformations en termes des déplacements peut être source d'instabilité. L'étude générale de la stabilité fera l'objet d'un chapitre spécial. On pourra d'ailleurs consulter à ce sujet des ouvrages spécialisés [58, 86].

Nous remarquerons cependant, que, le plus souvent, la configuration de référence est un état d'équilibre stable. Il faut entendre par là que

$$\mathcal{U}(\delta \mathbf{u}) - \mathcal{U}_0 \geq 0 \tag{4.23}$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que si  $\delta u_i$  représente un déplacement de corps rigide. Cette situation implique un certain nombre de faits que nous allons mettre en évidence. A cette fin, développons la densité d'énergie de déformation sous la forme

$$W(\delta \mathbf{u}) = W_0 + \delta W + \frac{1}{2} \delta^2 W + \dots$$

où apparaissent la variation première et la variation seconde. Par intégration, on obtiendra

$$\mathcal{U}(\delta \mathbf{u}) = \mathcal{U}_0 + \delta \mathcal{U} + \frac{1}{2} \delta^2 \mathcal{U} + \dots$$

La condition d'équilibre, en l'absence de charge, s'écrit

$$\delta \mathcal{U} = 0 \tag{4.24}$$

La condition de stabilité, déduite de (4.23), sera, au troisième ordre près,

$$\delta^2\mathcal{U} \geq 0 \quad (4.25)$$

l'égalité n'ayant lieu que si  $\delta u_i$  est un déplacement de corps rigide.

Calculons explicitement la variation première. On a, dans le cas général,

$$\delta W = s_{ij}^0 \delta \gamma_{ij} + C_{ijkl} \gamma_{ij} \delta \gamma_{kl}$$

et, l'état de référence étant défini par  $\gamma_{ij} = 0$ , il vient

$$\delta \mathcal{U} = \int_V s_{ij}^0 \delta \gamma_{ij} dV = 0 \quad (4.26)$$

quel que soit le champ de déplacements virtuels. On reconnaît l'équation des travaux virtuels en l'absence de charge, ce qui signifie que *les contraintes résiduelles sont nécessairement auto-équilibrées*. On dit encore que ce sont des *états d'autocontrainte*.

Venons-en à la variation seconde. Dans l'expression générale

$$\delta^2 W = s_{ij}^0 \delta^2 \gamma_{ij} + C_{ijkl} \delta \gamma_{ij} \delta \gamma_{kl} + C_{ijkl} \gamma_{ij} \delta^2 \gamma_{kl}$$

on note que, pour la position de référence,

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= 0 \\ \delta \gamma_{ij} &= \frac{1}{2} (D_i \delta u_j + D_j \delta u_i) \\ \delta^2 \gamma_{ij} &= D_i \delta u_m D_j \delta u_m \end{aligned}$$

ce qui mène à l'expression

$$\delta^2 \mathcal{U} = \int_V [s_{ij}^0 D_i \delta u_m D_j \delta u_m + \frac{1}{4} C_{ijkl} (D_i \delta u_j + D_j \delta u_i) (D_k \delta u_l + D_l \delta u_k)] dV \geq 0 \quad (4.27)$$

Cette condition montre que si, en chaque point, les trois valeurs principales des contraintes résiduelles sont positives, la stabilité est assurée, puisque les modules sont définis positifs. Mais cette circonstance est rare et en réalité, il existe presque toujours des zones où les contraintes résiduelles principales sont négatives. Lorsque ces contraintes résiduelles sont suffisamment grandes, la stabilité peut être compromise. La figure 4.1 donne un exemple d'une telle situation. La barre centrale, très élancée, peut être comprimée à l'aide d'une vis, ce qui provoque un état d'autocontrainte dans lequel les deux colonnes sont tendues et la



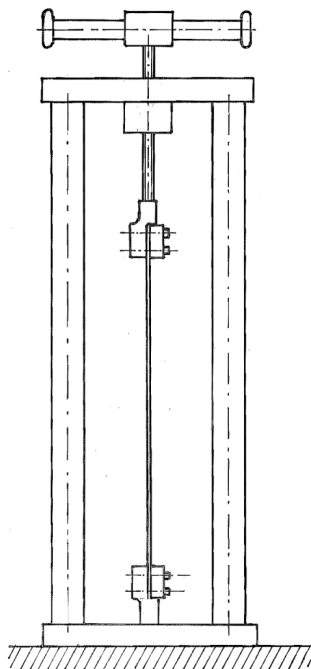


FIGURE 4.1 – Une structure pouvant être instable dans son état de référence

barre centrale, comprimée. L'équilibre exige que la somme des efforts dans les colonnes égale l'effort dans la barre centrale. Pour un effort de compression égal à la charge d'Euler, la barre flambe, ce qui constitue une instabilité. Dans ce cas, l'état de référence (barre rectiligne précomprimée) n'est pas stable, car la moindre perturbation du déplacement transversal de la barre mène à un nouvel état d'équilibre (flambé).

En conclusion, *l'état de référence ne peut être stable que si les contraintes résiduelles de compression sont suffisamment modérées.*

Passons à présent à la question de la relaxation des contraintes résiduelles : peut-on trouver un champ de déplacements  $u_i^0$  qui *relaxe*, c'est-à-dire annule totalement les tensions résiduelles ? Il est clair que si un tel champ de déplacements existe, les déformations  $\gamma_{ij}^0$  qui en dérivent doivent vérifier la condition

$$s_{ij}(\gamma_{kl}^0) = s_{ij}^0 + C_{ijkl}\gamma_{kl}^0 = 0$$

soit

$$s_{ij}^0 = -C_{ijkl}\gamma_{kl}^0$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(u_i^0) &= \mathcal{U}_0 + \int_V s_{ij}^0 \gamma_{ij}^0 dV + \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} \gamma_{ij}^0 \gamma_{kl}^0 dV \\ &= \mathcal{U}_0 - \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} \gamma_{ij}^0 \gamma_{kl}^0 dV < \mathcal{U}_0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Or, la stabilité de l'équilibre de référence implique que cette inégalité n'est pas possible *dans le voisinage* de cet état, car l'énergie n'y peut qu'augmenter. Ceci ne signifie pas que la relaxation soit nécessairement impossible, mais seulement qu'elle ne peut avoir lieu dans une configuration très voisine de l'état de référence. La stabilité de cet état équivaut en effet à dire qu'il se trouve au fond d'un puits de potentiel. Mais on peut très bien imaginer (fig 4.2) de passer

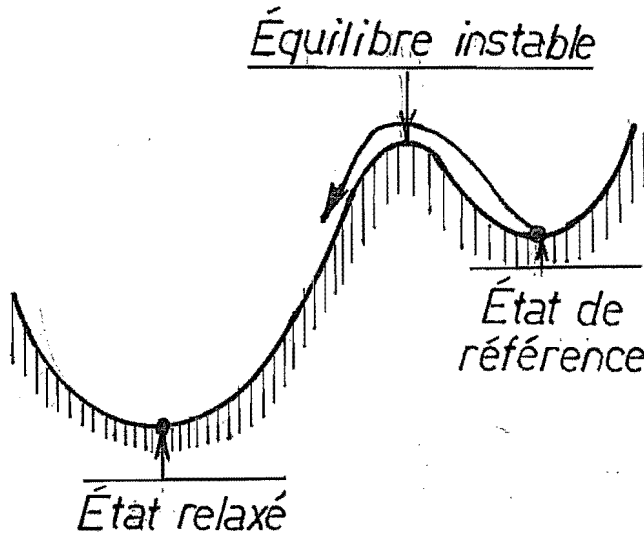


FIGURE 4.2 – Relaxation par passage d'une instabilité

d'abord au sommet d'une « montagne » (point d'équilibre instable) pour redescendre au fond d'un nouveau puits plus profond que le précédent, dans lequel les contraintes résiduelles seraient relaxées.

Ainsi, la relaxation des contraintes résiduelles, quand elle est possible, suppose toujours le passage d'une instabilité. Par ailleurs, il ressort de (4.28) que l'état relaxé correspond à un minimum absolu d'énergie<sup>2</sup>.

Il est du reste assez aisé de trouver un exemple de relaxation par passage d'une instabilité. Le système à deux barres de la figure 4.3 a étant supposé

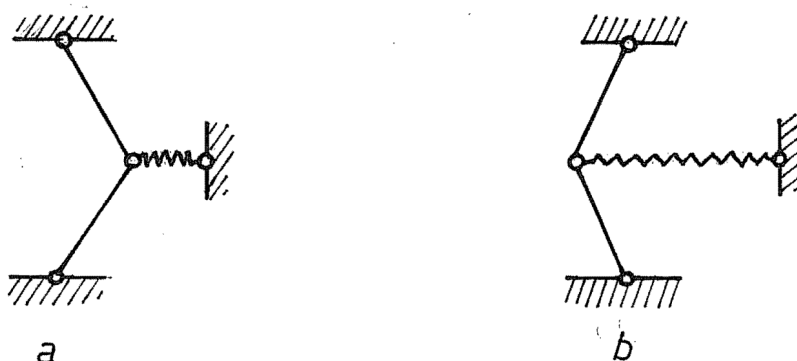


FIGURE 4.3 – Le système ci-dessus peut être relaxé par passage d'une instabilité

monté sans contraintes résiduelles, on peut faire passer les deux barres à gauche de leur leur ligne d'appui, moyennant une instabilité dite par *claquage* (snap through) après quoi le système se retrouve dans une position d'équilibre sous autocontrainte, représentée en b sur la même figure. Dans cette position, les deux barres sont comprimées, et le ressort est tendu. Cet état étant pris comme référence, il ne peut y avoir de relaxation à gauche de la ligne d'appui des barres. Pour annuler les contraintes, il faut nécessairement repasser l'instabilité en sens inverse.

2. Ce problème a été étudié dans le cadre des petits déplacements par Fraeijs de Veubeke [36]. Comme il n'existe pas, en théorie linéaire, d'instabilités, la relaxation est alors totalement impossible.

## 4.5 Déformations avec variations de température

### 4.5.1 Expression de l'énergie libre

Lorsque les températures des différents points du corps ne coïncident pas avec la température de référence  $T_0$ , il convient de développer l'énergie libre, non seulement en termes des déformations, mais encore en termes des écarts de température

$$\theta = T - T_0 \quad (4.29)$$

On écrira donc

$$\begin{aligned} F = F(\gamma_{ij}, \theta) &= F_0 + \left( \frac{\partial F}{\partial \gamma_{ij}} \right)_0 \gamma_{ij} + \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_0 \theta \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}} \right)_0 \gamma_{ij} \gamma_{kl} + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \gamma_{ij} \partial T} \right)_0 \gamma_{ij} \theta + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_0 \theta^2 \\ &+ 3^{\text{e}} \text{ordre} \end{aligned}$$

Les contraintes sont alors données par

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \frac{\partial F}{\partial \gamma_{ij}} \\ &= \left( \frac{\partial F}{\partial \gamma_{ij}} \right)_0 + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \gamma_{ij} \partial T} \right)_0 \theta + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}} \right)_0 \gamma_{kl} \end{aligned}$$

expression où l'on voit apparaître, outre les grandeurs connues  $s_{ij}^0$  et  $C_{ijkl}$ , un nouveau terme  $(-\beta_{ij}\theta)$ , avec

$$\beta_{ij} = - \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \gamma_{ij} \partial T} \right)_0 = - \left( \frac{\partial s_{ij}}{\partial T} \right)_0$$

Il s'agit des contraintes qui naissent du fait que pour  $\gamma_{ij} = 0$ , la dilatation thermique est empêchée, ce qui induit des contraintes de compression lorsque la température s'élève. Les grandeurs  $(-\beta_{ij}\theta)$  sont appelées *contraintes de bridage de Duhamel*. L'expression générale des contraintes est donc

$$s_{ij} = \underbrace{s_{ij}^0}_{\text{résiduelles}} + \underbrace{-\beta_{ij}\theta}_{\text{bridage Duhamel}} + \underbrace{C_{ijkl}\gamma_{kl}}_{\text{élastiques}} \quad (4.30)$$

Comme on le sait, la dérivée de l'énergie libre par rapport à la température est, au signe près, égale à l'entropie. On a donc

$$\begin{aligned} S &= -\frac{\partial F}{\partial T} \\ &= -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \gamma_{ij} \partial T}\right)_0 \gamma_{ij} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_0 \theta \end{aligned}$$

Le premier terme sera tout naturellement noté  $S_0$ . Le deuxième fait intervenir les  $\beta_{ij}$  déjà définis. Enfin, pour le troisième, on note que

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\gamma=\text{cte}} = \frac{\rho c_v}{T}$$

où  $c_v$  représente la capacité thermique par unité de masse, à *déformation* constante, généralisation naturelle de la capacité thermique à volume constant des fluides. On a donc

$$S = S_0 + \beta_{ij} \gamma_{ij} + \left(\frac{\rho c_v}{T}\right)_0 \theta \quad (4.31)$$

Rassemblant tous ces résultats, on obtient l'expression suivante pour la densité d'énergie libre :

$$F(\gamma_{ij}, T) = F_0 + s_{ij}^0 \gamma_{ij} - S_0 \theta + \frac{1}{2} C_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} - \beta_{ij} \theta \gamma_{ij} - \left(\frac{\rho c_v}{T}\right)_0 \frac{\theta^2}{2} \quad (4.32)$$

### 4.5.2 Coefficients de dilatation thermique

Considérons un petit volume  $dV$  du corps, supposé à l'état relaxé à la température  $T_0$ . Chauffons ce petit volume *en le bridant*, c'est-à-dire en empêchant tous ses déplacements. Au cours de cette opération, l'énergie libre prend la valeur

$$F = F_0 - S_0 \theta - \left(\frac{\rho c_v}{T}\right)_0 \frac{\theta^2}{2}$$

Relâchons à présent les brides, laissant ainsi à ce petit volume la liberté de se déformer, *tout en maintenant sa température constante*. (Ceci suppose que les brides soient relâchées progressivement et lentement.) L'énergie libre cherchera un minimum, qu'elle atteindra pour

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma_{ij}} = -\beta_{ij} \theta + C_{ijkl} \gamma_{kl} = 0$$

soit pour une déformation

$$\gamma_{ij}(\theta) = C_{ijkl}^{-1} \beta_{kl} \theta$$

Le tenseur

$$\alpha_{ij} = C_{ijkl}^{-1} \beta_{kl} \quad (4.33)$$

est appelé *tenseur des coefficients de dilatation* : c'est l'accroissement de  $\gamma_{ij}$  à  $s_{ij} = 0$ , pour une variation de température unitaire. Dans le cas d'un matériau thermiquement isotrope, on a simplement

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij} \quad (4.34)$$

$\alpha$  étant le *coefficient de dilatation thermique*. En voici quelques valeurs :

Coefficients de dilatation pour $T = 30^\circ C$	
Matériau	$10^6 \alpha \text{ (K}^{-1}\text{)}$
Acier au carbone	11,1
Fonte grise	9,9
Bronze $CuMn4Sn6$	17,2
Laiton $CuZn38$	18,0
Aluminium, dural	23,1

### 4.5.3 Déformations adiabatiques

Nous avons déjà signalé que les déformations d'un corps en vibration peuvent être considérées comme isentropiques et que cela entraîne une légère modification des modules par rapport au cas statique [47, 56]. La condition de constance de l'entropie s'écrit

$$S - S_0 = \left( \frac{\rho c_v}{T} \right)_0 \theta + \beta_{ij} \gamma_{ij} = 0,$$

ce qui fournit la *variation de température au cours de la déformation*

$$\theta = - \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 \beta_{ij} \gamma_{ij} \quad (4.35)$$

Dans le cas d'un corps isotrope,

$$\beta_{ij} = C_{ijkl} \delta_{kl} \alpha = C_{ijkk} \alpha = 3K \alpha \delta_{ij}$$

ce qui donne

$$\theta = -3 \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 K \alpha \gamma_{ii} \quad (4.36)$$

Ainsi, une augmentation de volume produit un abaissement de température, et inversement, une diminution de volume élève la température.

Le calcul des modules adiabatiques peut être mené de plusieurs façons. On pourrait par exemple développer l'expression de l'énergie interne

$$U = F + TS$$

puis la dériver deux fois par rapport aux déformations. Il est plus simple de raisonner comme suit : dans l'expression générale (4.30) des contraintes, introduisons la variation de température (4.35) exprimant la constance de l'entropie : il vient

$$s_{ij} = s_{ij}^0 + \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 \beta_{kl} \gamma_{kl} \beta_{ij} + C_{ijkl} \gamma_{kl}$$

Identifiant alors à

$$s_{ij} = s_{ij}^0 + C_{ijkl}^{ad} \gamma_{kl}$$

on obtient simplement

$$C_{ijkl}^{ad} = C_{ijkl} + \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 \beta_{ij} \beta_{kl} \quad (4.37)$$

### Cas des corps isotropes

Examinons en détail le cas des corps isotropes. Comme

$$\beta_{ij} = 3K\alpha\delta_{ij}$$

on a

$$\Delta C_{ijkl} = \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 \beta_{ij} \beta_{kl} = 9 \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 K^2 \alpha^2 \delta_{ij} \delta_{kl}$$

et

$$\Delta C_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} = 9 \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 K^2 \alpha^2 \gamma_{ii} \gamma_{kk}$$

ce qui permet d'écrire, dans le cas isentropique,

$$\begin{aligned} U &= U_0 + s_{ij}^0 \gamma_{ij} + \frac{1}{2} (C_{ijkl} + \Delta C_{ijkl}) \gamma_{ij} \gamma_{kl} \\ &= U_0 + s_{ij}^0 \gamma_{ij} - 2G\hat{I}_2 + \frac{1}{2} \left[ K + 9 \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 K^2 \alpha^2 \right] \gamma_{ii} \gamma_{kk} \end{aligned}$$

On constate donc que le module de Coulomb n'est pas affecté, tandis que le module de compressibilité  $K$  est remplacé par

$$K^{ad} = K + 9 \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 K^2 \alpha^2 \quad (4.38)$$

La correction relative est donc

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{K^{ad} - K}{K} = 9 \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 K \alpha^2 \quad (4.39)$$

Comme nous le verrons ci-dessous, cette correction est de quelques centièmes, ce qui permet de traiter les corrections du module de Young et du coefficient de Poisson comme des différentielles. Des relations (4.18), on déduit d'abord

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{E} &= \frac{\Delta K}{K} - \frac{3\Delta K}{3K + G} \\ &= \frac{(3K + G)\Delta K - 3K\Delta K}{3K + G} \\ &= \frac{G}{3K + G} \frac{\Delta K}{K} \\ &= \frac{E}{9K} \frac{\Delta K}{K} \end{aligned}$$

soit

$$\frac{\Delta E}{E} = E \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 \alpha^2 \quad (4.40)$$

de même, comme

$$1 + \nu = \frac{E}{2G}$$

on a

$$\frac{\Delta \nu}{1 + \nu} = \frac{\Delta E}{E} = E \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 \alpha^2 \quad (4.41)$$



**Exemple numérique**

Considérons par exemple le cas de l'acier. On a

$$\begin{aligned} E &= 2,1 \cdot 10^{11} Pa \\ \nu &= 0,3 \\ \alpha &= 1,1 \cdot 10^{-5} K^{-1} \\ \rho &= 7800 kg/m^3 \\ c_v &= 474 \frac{J}{K kg} \end{aligned}$$

ce qui donne, pour  $T = 293K$ ,

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 0,4} = 175 \cdot 10^9 Pa$$

et

$$\varphi = \left( \frac{T}{\rho c_v} \right)_0 \alpha^2 = \frac{293}{7800 \cdot 474} \cdot 1,21 \cdot 10^{-10} = 9,671 \cdot 10^{-15} Pa^{-1}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\Delta K}{K} &= 9K\varphi = 9 \cdot (175 \cdot 10^9) \cdot (9,671 \cdot 10^{-15}) = 0,01523 \\ \frac{\Delta E}{E} &= E\varphi = (2,1 \cdot 10^{11}) \cdot (9,671 \cdot 10^{-15}) = 2,031 \cdot 10^{-3} \\ \Delta\nu &= (1+\nu) \frac{\Delta E}{E} = 1,3 \cdot (2,031 \cdot 10^{-3}) = 0,002640 \end{aligned}$$

La plus grande variation relative est celle du module de compressibilité. Elle est de 1,5%. Pour le module de Young, elle n'est que de 2 pour mille. La petitesse de ces différences justifie la pratique courante consistant à confondre les deux types de modules.

**4.5.4 Autre expression des modules adiabatiques**

Proposons-nous d'exprimer l'entropie en termes de la température et des contraintes. A cette fin, nous inverserons les relations

$$s_{ij} - s_{ij}^0 = C_{ijkl} \gamma_{kl} - \beta_{ij} \theta$$

ce qui donne

$$\gamma_{ij} = C_{ijkl}^{-1} (s_{kl} - s_{kl}^0) + \alpha_{ij} \theta$$

L'introduction de ce résultat dans l'expression (4.31) de l'entropie conduit à

$$S = S_0 + \alpha_{ij}(s_{ij} - s_{ij}^0) + \left[ \left( \frac{\rho c_v}{T} \right)_0 + \alpha_{ij} \beta_{ij} \right] \theta$$

Le facteur entre crochets est la dérivée de l'entropie par rapport à la température, à *contraintes constantes*. Il est donc de la forme

$$\left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_s = \frac{\rho c_p}{T}$$

en notant  $c_p$  la chaleur spécifique à *contraintes constantes*. On a donc

$$S = S_0 + \alpha_{ij}(s_{ij} - s_{ij}^0) + \left( \frac{\rho c_p}{T} \right)_0 \theta \quad (4.42)$$

Quant à la liaison entre  $c_p$  et  $c_v$ , elle est donnée par

$$c_p - c_v = \frac{\alpha_{ij} \beta_{ij} T}{\rho} \quad (4.43)$$

dans le cas général. Pour des corps isotropes, cela donne

$$c_p - c_v = \frac{9K\alpha^2 T}{\rho} \quad (4.44)$$

Dans le cas de l'acier traité dans la section précédente, on obtient

$$\frac{c_p - c_v}{c_v} = \frac{9 \cdot (175 \cdot 10^9) \cdot (1,21 \cdot 10^{-10}) \cdot 293}{7800 \cdot 474} = 0,0151$$

ce qui justifie le fait que l'on néglige d'ordinaire de distinguer les deux chaleurs spécifiques.

Venons en à présent aux modules adiabatiques. De la formule (4.42) on déduit que lors d'une déformation isentropique, la variation de température est donnée par

$$\theta = - \left( \frac{T}{\rho c_p} \right)_0 \alpha_{kl}(s_{kl} - s_{kl}^0)$$

Dès lors, la déformation vaudra

$$\gamma_{ij} = C_{ijkl}(s_{ij} - s_{ij}^0) - \left( \frac{T}{\rho c_p} \right)_0 \alpha_{ij} \alpha_{kl}(s_{kl} - s_{kl}^0)$$

ce qui revient à dire que

$$(C^{ad})_{ijkl}^{-1} = C_{ijkl} - \left( \frac{T}{\rho c_p} \right)_0 \alpha_{ij} \alpha_{kl} \quad (4.45)$$

Dans le cas isotrope, on a donc

$$(C^a d)_{ijkl}^{-1} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \delta_{ik} \delta_{jl} - \nu \delta_{ij} \delta_{kl}] - \left( \frac{T}{\rho c_p} \right)_0 \alpha^2 \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (4.46)$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les deux expressions (4.37) et (4.45) des modules adiabatiques sont équivalentes, ce qui résulte de la relation (4.43) entre  $c_p$  et  $c_v$ .

#### 4.5.5 Mesure dynamique du module de Young

A ce stade, il convient de noter qu'il existe des méthodes fort précises de détermination du module de Young adiabatique par des mesures de fréquences propres. La figure 4.4 schématise un tel dispositif. Un barreau cylindrique est

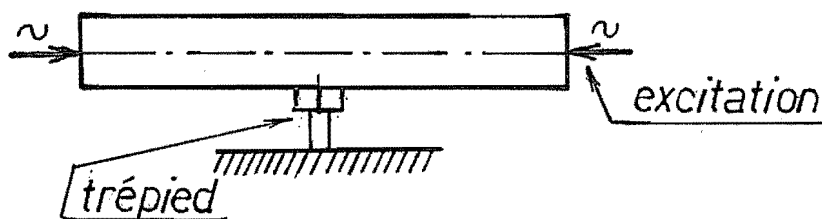


FIGURE 4.4 – Mesure du module de Young par un essai vibratoire

appuyé en son milieu sur un trépied de faibles dimensions. Ses extrémités sont excitées en vibrations longitudinales. La fréquence propre est donnée par

$$f = \frac{1}{2\ell} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

où  $\ell$  est la longueur du barreau et  $\rho$  sa masse volumique. Il en découle la relation

$$E = 4\rho\ell^2 f^2 \quad (4.47)$$

permettant de déterminer  $E$  à partir de la fréquence propre.

Couplé à un essai de traction, cet essai se fait de préférence, non pas sur un barreau cylindrique, mais sur l'éprouvette de traction elle-même. Dans ce cas, la formule (4.47) n'est plus valable, mais on peut, avec une bonne approximation, la remplacer par

$$E = \psi \cdot 4\rho\ell^2 f^2$$

le facteur correctif étant donné par (fig. 4.5)

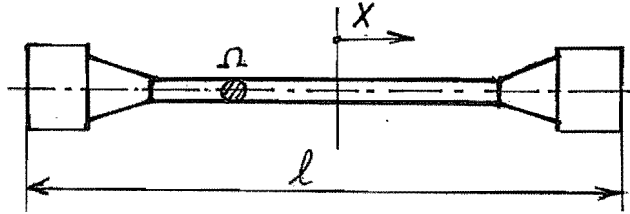


FIGURE 4.5 – Cas de l'éprouvette de traction

$$\psi = \frac{\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \Omega \sin^2 \frac{\pi x}{\ell} dx}{\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \Omega \cos^2 \frac{\pi x}{\ell} dx}$$

formule que l'on obtient aisément par la méthode de Rayleigh. Dans le cas d'éprouvettes de traction assez longues, on peut considérer que dans les régions où  $\Omega \neq \Omega_0$ ,  $\Omega_0$  étant le section de la partie cylindrique,

$$\sin^2 \frac{\pi x}{\ell} \approx 1 \text{ et } \cos^2 \frac{\pi x}{\ell} \approx 0$$

et en notant

$$\Delta\Omega = \Omega - \Omega_0$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \Omega \sin^2 \frac{\pi x}{\ell} dx &= \Omega_0 \frac{\ell}{2} + \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \Delta\Omega \sin^2 \frac{\pi x}{\ell} dx \\ &\approx \Omega_0 \frac{\ell}{2} + \Delta V \end{aligned}$$

$\Delta V$  étant la différence entre le volume de l'éprouvette et le volume d'une éprouvette cylindrique de section  $\Omega_0$  et de même longueur :

$$\Delta V = V - \Omega_0 \frac{\ell}{2}$$

(Le volume  $V$  peut du reste être obtenu par pesée ou par immersion.) De la même façon,

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \Omega \cos^2 \frac{\pi x}{\ell} dx \approx \Omega_0 \frac{\ell}{2}$$

ce qui conduit finalement à la formule approchée

$$\psi \approx 1 + 2 \frac{\Delta V}{\Omega_0 \ell}$$

Cette dernière formule est d'autant meilleure que la longueur des épaulements est plus faible devant la longueur de l'éprouvette.

## 4.6 Exercices

**Exercice 16** *Un expérimentateur obtient, à l'aide d'un essai de traction sur un matériau,  $E = 200\text{GPa}$  et, par un essai de torsion,  $G = 110\text{GPa}$ . Quel est le coefficient de Poisson ? Cette valeur est-elle normale sur le plan théorique ? Est-ce une valeur habituelle ?*

**Exercice 17** *Soit le système à deux barres de la figure 4.6, dont la position de repos correspond à l'angle  $\alpha$ . Exprimer l'énergie de déformation à l'aide du tenseur de Green pour différents angles  $\theta$  et chercher les puits de potentiel.*

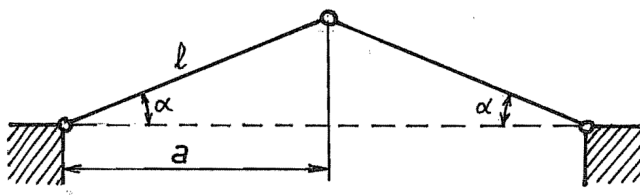


FIGURE 4.6 – Système à deux barres

*Solution* - Pour un angle  $\theta$ , la longueur d'une barre devient  $a/\cos\theta$ , si bien que

$$\gamma = \left( \frac{a^2}{\cos^2\theta} - \frac{a^2}{\cos^2\alpha} \right) \frac{\cos^2\alpha}{2a^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta} - 1 \right)$$

L'énergie de déformation vaut alors (extension simple)

$$\mathcal{U} = 2 \cdot \frac{1}{2} E\Omega\ell^2 \gamma^2 = \frac{E\Omega\ell}{4} \left( \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta} - 1 \right)^2$$

Cherchons les extrema de cette expression. On a

$$\frac{d\mathcal{U}}{d\theta} = \frac{E\Omega\ell}{2} \left( \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta} - 1 \right) \left( 2 \frac{\cos^2\alpha}{\cos^3\theta} \sin\theta \right)$$

Cette expression ne s'annule que pour les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \theta = 0 \\ \cos\theta = \cos\alpha \text{ soit } \theta = \pm\alpha \end{cases}$$

Il y a donc trois positions d'équilibre en l'absence de charge. Sont-ce des puits ? On a

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathcal{U}}{d\theta^2} = \frac{E\Omega\ell}{2} \left( \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta} - 1 \right) \left( 2 \frac{\cos^2\alpha}{\cos^3\theta} \cos\theta + 6 \frac{\cos^2\alpha}{\cos^4\theta} \sin^2\theta \right) \\ + \frac{E\Omega\ell}{2} \left( \frac{2\cos^2\alpha}{\cos^3\theta} \sin\theta \right)^2 \end{aligned} \quad (4.48)$$

- Pour  $\theta = 0$ , on a  $\cos\alpha < \cos\theta = 1$ , d'où  $d^2\mathcal{U}/d\theta^2 < 0$  : *instable*.
- Pour  $\theta = \pm\alpha$ , on a

$$\frac{d^2\mathcal{U}}{d\theta^2} = E\Omega\ell \operatorname{tg}^2\alpha > 0$$

et il s'agit d'un équilibre *stable*.

Les figures 4.7 et 4.8 représentent l'allure de la fonction  $\mathcal{U}$  et de sa dérivée.

**Exercice 18** *Exprimer directement, à partir de la loi*

$$W_2 = -2G\hat{I}_2 + \frac{K}{2} I_i^2$$

*la loi de Hooke. En particulier, montrer que  $s_{kk} = 3K\gamma_{kk}$ . Exprimer enfin la loi de Hooke inverse.*

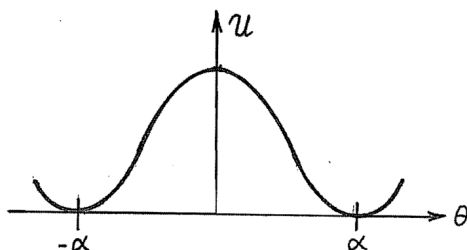


FIGURE 4.7 – Énergie du système à deux barres

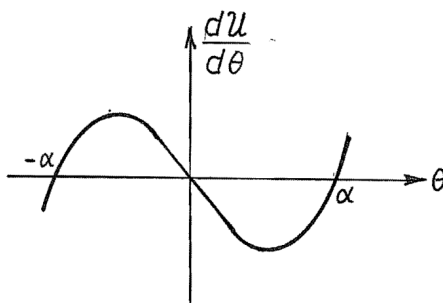


FIGURE 4.8 – Dérivée de l'énergie

*Solution* - On a

$$W_2 = 2G \frac{\hat{\gamma}_{ij} \hat{\gamma}_{ij}}{2} + \frac{K}{2} (\gamma_{kk})^2$$

d'où

$$s_{pq} = \frac{\partial W_2}{\partial \gamma_{pq}} = 2G \hat{\gamma}_{ij} \frac{\partial \hat{\gamma}_{ij}}{\partial \gamma_{pq}} + K \gamma_{kk} \frac{\partial \gamma_{kk}}{\partial \gamma_{pq}}$$

Comme

$$\hat{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{kk} \delta_{ij}$$

on a

$$\frac{\partial \hat{\gamma}_{ij}}{\partial \gamma_{pq}} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \frac{1}{3} \delta_{lp} \delta_{lq} \delta_{ij} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \frac{1}{3} \delta_{pq} \delta_{ij}$$

D'autre part,

$$\frac{\partial \gamma_{ll}}{\partial \gamma_{pq}} = \delta_{lp} \delta_{lq} = \delta_{pq}$$

Il en découle

$$s_{pq} = 2G \hat{\gamma}_{ij} (\delta_{ip} \delta_{jq} - \frac{1}{3} \delta_{pq} \delta_{ij}) + K \gamma_{kk} \delta_{pq}$$

et, comme  $\hat{\gamma}_{ii} = 0$ ,

$$s_{pq} = 2G \hat{\gamma}_{pq} + K \gamma_{kk} \delta_{pq}$$

En particulier, on a

$$s_{pp} = K \gamma_{kk} \delta_{pp} = 3K \gamma_{kk}$$

comme annoncé.

La loi inverse s'obtient en partant de

$$\hat{\gamma}_{pq} = \frac{1}{2G} s_{pq} - \frac{K}{2G} \gamma_{kk} \delta_{pq}$$

Comme

$$\gamma_{kk} = \frac{s_{kk}}{3K}$$

il vient

$$\begin{aligned} \gamma_{pq} &= \hat{\gamma}_{pq} + \frac{1}{3} \gamma_{kk} \delta_{pq} \\ &= \frac{1}{2G} s_{pq} - \frac{K}{2G} \frac{s_{kk}}{3K} \delta_{pq} + \frac{1}{3} \frac{s_{kk}}{3K} \delta_{pq} \\ &= \frac{1}{2G} s_{pq} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2G} - \frac{1}{3K} \right) s_{kk} \delta_{pq} \\ &= \frac{1+\nu}{E} s_{pq} - \frac{1}{3} \left( \frac{1+\nu}{E} - \frac{1-2\nu}{E} \right) s_{kk} \delta_{pq} \\ &= \frac{1}{E} [(1+\nu) s_{pq} - \nu s_{kk} \delta_{pq}] \end{aligned}$$

**Exercice 19** Partant de la loi connue de la résistance des matériaux

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu) s_{ij} - \nu s_{ll} \delta_{ij}]$$

- Exprimer  $s_{ij}$  en termes de  $\gamma_{ij}$ .
- Calculer la densité d'énergie de déformation  $W_2$ .
- Donner la matrice de Hooke et chercher les conditions pour qu'elle soit définie positive.

*Solution*



a) On a

$$s_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\gamma_{ij} + \frac{\nu}{1+\nu}su\delta_{ij}$$

Comme

$$\gamma_{ii} = \frac{1}{E}[(1+\nu) - 3\nu]s_{ii} = \frac{1-2\nu}{E}s_{ii}$$

on obtient

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \frac{E}{1+\nu}\gamma_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\gamma_{ii}\delta_{ij} \\ &= 2G\left[\gamma_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\gamma_{ii}\delta_{ij}\right] \end{aligned}$$

b)  $W = \int s_{ij}d\gamma_{ij} = G(\gamma_{ij}\gamma_{ij} + \frac{\nu}{1+\nu}\gamma_{ii}\gamma_{ii})$

c) Posant  $\beta = \frac{\nu}{1+\nu}$ , on a

$$H = 2G \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1+\beta & \beta & \beta & & & \\ \beta & 1+\beta & \beta & & & 0 \\ \beta & \beta & 1+\beta & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{array} \right]$$

Les conditions de positive définition sont (positivité des déterminants principaux) :

1.  $1 + \beta > 0$ , soit  $\beta > -1$ .
2.  $(1 + \beta)^2 - \beta^2 = 1 + 2\beta > 0$ , soit  $\beta > -1/2$ .
3.  $(1 + \beta)^3 + 2\beta^3 - 3\beta^2(1 + \beta) = 1 + 3\beta > 0$ , soit  $\beta > -1/3$

La plus forte de ces conditions est  $\beta > -1/3$ , ce qui s'écrit encore

$$\frac{\nu}{1-2\nu} + \frac{1}{3} = \frac{3\nu + 1 - 2\nu}{3(1-2\nu)} = \frac{1+\nu}{3(1-2\nu)} > 0$$

Le signe de cette fraction est identique à celui du produit  $(1+\nu)(1-2\nu)$ , positif pour

$$-1 < \nu < \frac{1}{2}$$



# Chapitre 5

## Élasticité linéaire

### 5.1 Linéarisation géométrique

Les équations d'équilibre, que l'on utilise les contraintes de Piola, celles de Kirchhoff-Trefftz ou encore les contraintes eulériennes, font toujours intervenir les déplacements, ce qui rend le problème non linéaire. Mais si, en plus des déformations, les *rotations* sont petites, on peut écrire

$$\delta_{ij} + D_j u_i \approx \delta_{ij} \quad (5.1)$$

ce qui constitue le cadre de la linéarisation géométrique. On parle souvent de théorie des *petits déplacements*, bien que cette dénomination soit impropre, car aucune restriction n'est nécessaire sur les déplacements de translation.

Moyennant l'hypothèse (5.1), les déformations admettent l'expression linéaire simplifiée

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(D_i u_j + D_j u_i) \quad (5.2)$$

Les contraintes de Kirchhoff-Trefftz, celles de Piola et les contraintes eulériennes sont alors pratiquement identiques, et nous les noterons  $\sigma_{ij}$  conformément à la tradition. Les équations d'équilibre s'écrivent

$$D_j \sigma_{ji} + f_i = 0 \text{ dans } V \quad (5.3)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \text{ dans } V \quad (5.4)$$

$$n_j \sigma_{ji} = t_i \text{ sur } S \quad (5.5)$$

Enfin, nous supposerons souvent, dans ce qui suit, le corps isotrope, cas où il admettra les équations constitutives

$$\sigma_{ij} = 2G \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (5.6)$$

Cet ensemble d'équations forme la base de l'élasticité linéaire. Bien que considérablement simplifiées, ces équations restent passablement difficiles à résoudre, excepté par voie numérique.

Signalons encore qu'en élasticité linéaire, la structure est toujours stable : les phénomènes du type *flambement* ne peuvent être traités à partir de ces équations. Il en résulte également que les contraintes résiduelles ne peuvent jamais être relaxées par voie élastique.

## 5.2 Unicité de la solution

Nous allons établir un résultat important dû à Kirchhoff [48, 49]. On appelle *déplacements de corps rigide* ou encore, *modes rigides* (linéarisés) les solutions des équations  $\varepsilon_{ij} = 0$ . Ces équations qui s'écrivent <sup>1</sup>

$$D_i u_j + D_j u_i = 0$$

admettent de toute évidence les solutions

$$D_i u_j = \omega_{ij}$$

avec  $\omega_{ij} = \omega_{ji}$ . Mais alors, on doit avoir

$$D_k \omega_{ij} = D_{ki} u_j = D_{ik} u_j = D_i \omega_{kj}$$

ce qui entraîne la chaîne suivante d'égalités :

$$D_k \omega_{ij} = D_i \omega_{kj} = -D_i \omega_{jk} = -D_j \omega_{ik} = D_j \omega_{ki} = D_k \omega_{ji} = -D_k \omega_{ij}$$

soit

$$D_k \omega_{ij} = 0$$

Il vient donc, en notant  $\omega_{ij} = e_{ijk} \omega_k$ ,

$$u_i = a_i + e_{ijk} \omega_j x_k$$

---

1. La démonstration peut être faite encore plus simplement à partir des équations de Beltrami (voir section 5.4), établies indépendamment de ce résultat.

### 5.3. MÉTHODE DIRECTE DE RÉOLUTION. ÉQUATION DE NAVIER 85

avec  $a_i$  et  $\omega_i$  constants, représentant respectivement une *translation d'ensemble* et une *rotation (linéarisée) d'ensemble*.

Cela étant, le théorème de Kirchhoff s'énonce comme suit :

**Théorème 2** *Deux champs de déplacements vérifiant les conditions d'équilibre ne peuvent différer que d'un mode rigide.*

En effet, soient  $u_i$  et  $v_i$  deux solutions des équations d'équilibre. On a, pour tout déplacement virtuel  $\delta u_i$

$$\int_V \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \delta \varepsilon_{ij} dV = \delta \mathcal{T} = \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{v}) \delta \varepsilon_{ij} dV$$

ce qui entraîne

$$\int_V [\sigma_{ij}(\mathbf{u}) - \sigma_{ij}(\mathbf{v})] \delta \varepsilon_{ij} = \int_V C_{ijkl} [\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) - \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})] \delta \varepsilon_{ij} dV = 0$$

Choisissant alors  $\delta u_i = u_i - v_i$ , on obtient

$$\int_V C_{ijkl} [\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) - \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})] [\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) - \varepsilon_{kl}(\mathbf{v})] dV = 0$$

ce qui, vu la positive définition des modules, implique

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 0$$

## 5.3 Méthode directe de résolution. Équation de Navier

La résolution d'un problème d'élasticité peut être menée en exprimant toutes les variables en termes des déplacements, suite à quoi on cherche pour quel champ de déplacements l'équilibre est vérifié; c'est la *méthode directe*.

Cherchons l'équation correspondante dans le cas isotrope. Les relations

$$\sigma_{ij} = 2G \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (5.7)$$

entraînent

$$D_j \sigma_{ji} = 2G \left( D_j \varepsilon_{ji} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} D_i \varepsilon_{kk} \right)$$

Notant alors que

$$2D_j\varepsilon_{ji} = D_j(D_i u_j + D_j u_i) = D_{ij} u_j + D_{jj} u_i$$

on obtient aisément l'équation de Navier

$$G \left( D_{jj} u_i + \frac{1}{1-2\nu} D_{ij} u_j \right) + f_i = 0 \quad (5.8)$$

On peut lui donner une autre forme en notant que

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{grad\,divu} - \mathbf{rot\,rotu}$$

ce qui, tous calculs faits, donne

$$G \left( \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \mathbf{grad\,divu} - \mathbf{rot\,rotu} \right) + \mathbf{f} = 0 \quad (5.9)$$

## 5.4 Méthode semi-inverse. Compatibilité

Le cheminement de la méthode directe est tellement naturel que l'on ne pense guère à en analyser les étapes. Ce n'est pourtant pas sans intérêt, pour la bonne compréhension de la méthode semi-inverse. Ces étapes sont reprises dans le schéma suivant :

$$\mathbf{u} \xrightarrow{\partial} \varepsilon \xrightarrow{C} \sigma \longrightarrow \boxed{\text{Équilibre}}$$

Partant du champ de déplacements, on en a déduit le champ des déformations à l'aide d'un opérateur de dérivation  $\partial$ ; les contraintes se calculent alors à l'aide de l'opérateur matriciel  $C$ , et il suffit alors de vérifier qu'elles sont en équilibre.

La *méthode semi-inverse* consiste à suivre le chemin opposé. Dans un certain nombre de cas, en effet, il est assez aisé de trouver la solution générale, en termes des contraintes, des équations d'équilibre (5.3), (5.4) et (5.5). On devra alors suivre le chemin inverse, représenté ci-dessous :

$$\mathbf{u} \xleftarrow{?} \varepsilon \xleftarrow{C^{-1}} \sigma \longleftarrow \boxed{\text{Équilibre}}$$

Le passage des contraintes aux déformations se fait aisément par la loi de Hooke inverse qui existe toujours, car la matrice des modules est définie positive. Mais *peut-on, à partir d'un champ de déformations, remonter aux déplacements?* Il est clair que ce n'est pas possible dans tous les cas, car s'il existe le plus souvent plusieurs champs de contraintes qui vérifient l'équilibre, le théorème de Kirchoff nous apprend qu'il n'en existe qu'*un seul* qui dérive d'un champ de déplacements<sup>2</sup>. (C'est évidemment la solution cherchée.) Il en résulte que l'in-

2. Puisque les modes rigides ne donnent pas de contraintes

tégration du champ de déplacements ne sera possible que moyennant certaines conditions sur les déformations appelées *équations de compatibilité*.

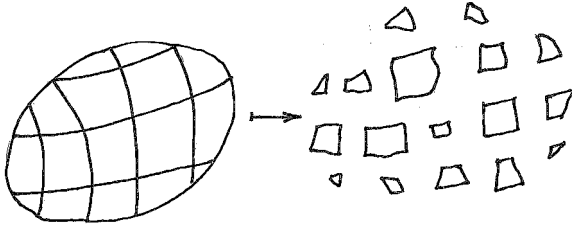


FIGURE 5.1 – Illustration de la compatibilité

Avant de déterminer ces conditions, essayons de les interpréter par un raisonnement physique. A cette fin, imaginons (*fig. 5.1*) que le corps soit découpé en morceaux très petits, et que chacun de ces morceaux soit déformé de manière arbitraire. En dehors de cas très particuliers, on ne pourra pas recoller entre eux les morceaux ainsi déformés de manière que leurs bords se correspondent parfaitement. La *compatibilité* exprime précisément que ces morceaux pourront être réassemblés correctement, comme les pièces d'un puzzle.

La présentation la plus naturelle des équations de compatibilité est celle de Beltrami, qui procède par une voie constructive, donnant ainsi une méthode d'intégration des déplacements.

Partons de l'identité

$$D_i u_j = \frac{1}{2}(D_i u_j + D_j u_i) + \frac{1}{2}(D_i u_j - D_j u_i)$$

où apparaît, outre le tenseur des déformations, le tenseur antisymétrique

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(D_i u_j - D_j u_i) \quad (5.10)$$

Ce dernier est directement lié au demi-rotationnel

$$\omega_k = \frac{1}{2} e_{krs} D_r u_s \quad (5.11)$$

puisque

$$e_{ijk} \omega_k = \frac{1}{2} e_{kij} e_{krs} D_r u_s = \frac{1}{2} (\delta_{ir} \delta_{js} - \delta_{is} \delta_{jr}) D_r u_s = \frac{1}{2} (D_i u_j - D_j u_i) = \omega_{ij}$$

On peut donc écrire

$$D_i u_j = \varepsilon_{ij} + e_{ijk} \omega_k \quad (5.12)$$

Dans cette équation, seuls les  $\varepsilon_{ij}$  sont donnés. *La question de la compatibilité se ramène donc à déterminer s'il existe un champ  $\omega_k$  tel que  $(\varepsilon_{ij} + e_{ijk} \omega_k)$  soit le gradient d'un vecteur.* Pour qu'il en soit ainsi, il faut que les dérivées croisées soient égales, ce qui s'écrit

$$0 = e_{pmi} D_m (D_i u_j) = e_{pmi} D_m \varepsilon_{ij} + e_{pmi} e_{ijk} D_m \omega_k$$

Le dernier terme du second membre s'écrit encore

$$D_m \omega_k (\delta_{pj} \delta_{km} - \delta_{pk} \delta_{jm}) = D_k \omega_k \delta_{pj} - D_j \omega_p$$

Il vient donc

$$D_j \omega_p - D_k \omega_k \delta_{pj} = e_{pmi} D_m \varepsilon_{ij} \quad (5.13)$$

En particulier, en contractant sur les indices  $p$  et  $j$ , on obtient

$$D_j \omega_j (1 - 3) = e_{jmi} D_m \varepsilon_{ij} = 0$$

puisque  $\varepsilon_{ij}$  est un tenseur symétrique. Soustrayant cette équation, combinaison de *plusieurs* des équations (5.13), à celles-ci, on obtient le système équivalent

$$D_j \omega_p = e_{pmi} D_m \varepsilon_{ij} \quad (5.14)$$

Ce sont les *équations de compatibilité de Beltrami*, auxquelles il faut donc accorder le sens suivant : *un champ de déformations  $\varepsilon_{ij}$  est compatible si et seulement si on peut lui associer un champ de vecteurs-rotation  $\omega_p$  qui vérifie les équations de Beltrami.*

Cependant, les cas où l'on peut exhiber directement le bon vecteur-rotation sont très rares (voir un exemple en section 5.9). Dans la plupart des cas, il est préférable de déterminer les conditions de son existence. Il s'agit encore de l'égalité des dérivées croisées :

$$0 = e_{qrj} D_r (D_j \omega_p) = e_{qrj} e_{pmi} D_{rm} \varepsilon_{ij}$$

ce qui correspond à la nullité du *tenseur* (symétrique) *d'incompatibilité*

$$T_{pq} = e_{pmi} e_{qrj} D_{mr} \varepsilon_{ij} \quad (5.15)$$

introduit par Washizu [93]. Les six équations

$$T_{pq} = 0 \quad (5.16)$$

sont connues sous le nom d'*équations de compatibilité de Barré de Saint-Venant*. Elle garantissent l'existence du vecteur  $\omega_i$  et donc aussi la compatibilité.



## 5.5 Propriétés du tenseur d'incompatibilité

Le tenseur d'incompatibilité jouit de quelques propriétés intéressantes. Tout d'abord, que la compatibilité soit vérifiée ou non, on a toujours

$$D_p T_{pq} = e_{pmi} e_{qrj} D_{pmr} \varepsilon_{ij} = e_{qrj} D_r (e_{pmi} D_{pm} \varepsilon_{ij}) = 0 \quad (5.17)$$

c'est-à-dire que le tenseur d'incompatibilité est toujours un champ intérieurement auto-équilibré.

Par ailleurs, ce tenseur permet de répondre à la question de l'existence d'un vecteur  $\omega_p$  unique sur une surface. Il s'agit de savoir si sur toute courbe fermée de cette surface (fig. 5.2), on a bien



FIGURE 5.2 – Unicité du vecteur-rotation sur une surface

$$0 = \int_C d\omega_p = \int_C D_j \omega_p dx_j$$

$D_j \omega_p$  étant calculé à partir de (5.14). Utilisant le théorème de Stokes-Ampère, on calcule

$$\begin{aligned} \int_C D_j \omega_p dx_j &= \int_C e_{pmi} D_m \varepsilon_{ij} dx_j \\ &= \int_S n_q e_{qrj} D_r (e_{pmi} D_m \varepsilon_{ij}) dS \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\int_C d\omega_p = \int_S n_q e_{qrj} e_{pmi} D_{rm} \varepsilon_{ij} dS = \int_S n_q T_{qp} dS$$

et la nullité de cette grandeur sur toute courbe fermée tracée sur  $S$  nécessite donc

$$n_q T_{qp} = 0 \text{ sur } S \quad (5.18)$$

C'est ce que nous appellerons les *conditions de compatibilité superficielle*.

## 5.6 Autre forme des équations de compatibilité de Saint-Venant

On emploie souvent, au lieu du tenseur d'incompatibilité ci-dessus, une autre expression équivalente, que nous utiliserons plus loin. On peut l'obtenir en s'appuyant sur le fait suivant : si  $a_{pq}$  est un tenseur symétrique, le tenseur

$$\hat{a}_{ls} = e_{klp} e_{ksq} a_{pq} \quad (5.19)$$

lui correspond biunivoquement. En effet, on a

$$\hat{a}_{ls} = (\delta_{ls} \delta_{pq} - \delta_{lq} \delta_{ps}) a_{pq} = a_{pp} \delta_{ls} - a_{ls}$$

et, en particulier,

$$\hat{a}_{ll} = 3a_{pp} - a_{ll} = 2a_{ll}$$

ce qui permet d'obtenir aisément la relation inverse

$$a_{ls} = \frac{1}{2} \hat{a}_{pp} \delta_{ls} - \hat{a}_{ls}$$

Dans le cas présent, il est donc indifférent d'annuler  $T_{ls}$  ou le tenseur  $\hat{T}_{ls}$  qui lui est associé par la relation (5.19). Or,

$$\begin{aligned} \hat{T}_{ls} &= e_{klp} e_{ksq} T_{pq} \\ &= e_{klp} e_{pmi} e_{ksq} e_{qrj} D_{mr} \varepsilon_{ij} \\ &= (\delta_{km} \delta_{li} - \delta_{ki} \delta_{lm}) (\delta_{kr} \delta_{sj} - \delta_{kj} \delta_{sr}) D_{mr} \varepsilon_{ij} \\ &= (\delta_{km} \delta_{li} - \delta_{ki} \delta_{lm}) (D_{mk} \varepsilon_{ij} - D_{ms} \varepsilon_{ik}) \end{aligned}$$

ce qui fournit une seconde forme des équations de compatibilité de Saint-Venant :

$$\hat{T}_{ls} = D_{kk} \varepsilon_{ls} - D_{li} \varepsilon_{is} - D_{ks} \varepsilon_{lk} + D_{ls} \varepsilon_{kk} = 0 \quad (5.20)$$

## 5.7 Équations de Beltrami-Michell

Dans le cas d'un corps élastique homogène et isotrope, il est possible d'exprimer directement les équations de compatibilité en termes des contraintes, ce qui constitue un raccourci avantageux.

Rappelons d'abord l'établissement de l'équation de Hooke inverse. Partant de (5.6), on calcule d'abord

$$\sigma_{ii} = 2G \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{ii}$$

d'où

$$2G\varepsilon_{ii} = \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \sigma_{ii}$$

La réintroduction de ce résultat dans (5.6) donne

$$2G\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1 - 2\nu} \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \sigma_{ll} \delta_{ij}$$

soit encore, en multipliant les deux membres par  $1/(2G) = (1 + \nu)/E$ ,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{ll}\delta_{ij}] \quad (5.21)$$

Ceci posé, on a visiblement

$$\begin{aligned} 2G\hat{T}_{ij} &= (D_{kk}\sigma_{ij} + D_{ij}\sigma_{kk} - D_{ik}\sigma_{jk} - D_{jk}\sigma_{ik}) \\ &\quad - \frac{\nu}{1 + \nu} (D_{kk}\sigma_{ll}\delta_{ij} + D_{ij}\sigma_{ll}\delta_{kk} - D_{ik}\sigma_{ll}\delta_{jk} - D_{jk}\sigma_{ll}\delta_{ik}) \end{aligned}$$

Notant alors que, si l'équilibre est vérifié, on a

$$D_k\sigma_{kj} = -f_j$$

on transforme l'expression obtenue en

$$2G\hat{T}_{ij} = D_{kk}\sigma_{ij} + \frac{1}{1 + \nu} D_{ij}\sigma_{kk} + (D_i f_j + D_j f_i) - \frac{\nu}{1 + \nu} D_{kk}\sigma_{ll}\delta_{ij}$$

Ce résultat peut encore être amélioré si l'on note que la contraction sur les indices  $i$  et  $j$  donne

$$2G\hat{T}_{ii} = 2\frac{1 - \nu}{1 + \nu} D_{kk}\sigma_{ii} + 2D_i f_i = 0$$

c'est-à-dire

$$D_{kk}\sigma_{ii} = -\frac{1+\nu}{1-\nu}D_i f_i$$

Il vient donc finalement

$$2G\hat{T}_{ij} = D_{kk}\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}D_{ij}\sigma_{kk} + \left(D_i f_j + D_j f_i + \frac{\nu}{1-\nu}D_k f_k \delta_{ij}\right) = 0 \quad (5.22)$$

Ce sont les *équations de Beltrami-Michell* [61]. En l'absence de forces de volume, elles se ramènent à l'expression simple

$$D_{kk}\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}D_{ij}\sigma_{kk} = 0 \quad (5.23)$$

Ce sont des combinaisons de l'équilibre et de la compatibilité, qui n'auront donc la valeur d'équations de compatibilité que si l'équilibre intérieur est déjà vérifié par ailleurs.

## 5.8 Compatibilité dans les corps multiples connexes

### 5.8.1 Introduction

Les conditions de compatibilité obtenues ci-dessus sont *nécessaires* pour assurer l'existence des déplacements. Mais sont-elles suffisantes ? Cette question se réduit fondamentalement à la suivante : étant donné un champ  $f_i$  irrotationnel dans  $V$ , admet-il un potentiel  $\varphi$  tel que  $f_i = D_i\varphi$  dans  $V$  ? La construction du potentiel est classique : étant donné un point  $\mathbf{a} \in V$ , on calcule  $\varphi$  en un point  $\mathbf{x} \in V$  par la formule

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{a}) + \int_{\mathcal{C}_{ax}} f_i dx_i \quad (5.24)$$

$\mathcal{C}_{ax}$  étant une courbe quelconque de  $V$  joignant  $\mathbf{a}$  à  $\mathbf{x}$  (fig. 5.3). Bien entendu, cette formule ne définit un potentiel unique que si la valeur  $\varphi(\mathbf{x})$  ne dépend pas de la courbe choisie. Étant donné deux courbes différentes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  (fig. 5.4), on doit donc avoir

$$\int_{\mathcal{C}_1} f_i dx_i = \int_{\mathcal{C}_2} f_i dx_i$$

ou, ce qui revient au même

$$\int_{\mathcal{C}_1 \cup (-\mathcal{C}_2)} f_i dx_i = 0 \quad (5.25)$$

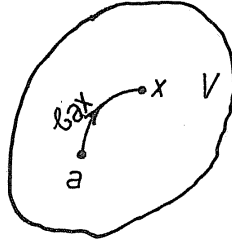


FIGURE 5.3 – Intégration du potentiel

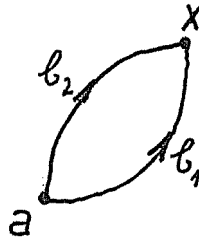


FIGURE 5.4 – Unicité du potentiel

en notant  $(-C_2)$  la courbe  $C_2$  parcourue en sens inverse. En d'autres termes, *la circulation de  $f_i$  sur tout circuit fermé doit être nulle.*

A ce stade, deux cas sont possibles :

1. Sur tout circuit fermé de  $V$ , on peut appuyer une surface  $S$  entièrement contenue dans  $V$ . On dit alors que  $V$  est *simplement connexe* (fig. 5.5).
2. Il existe des circuits fermés de  $V$  sur lesquels on ne peut appuyer aucune surface entièrement contenue dans  $V$ . On dit alors que  $V$  est *multiplement connexe* (fig. 5.5).

Considérons d'abord le premier cas, qui est du reste le seul à être traité dans les manuels élémentaires d'analyse. Par application du théorème de Stokes-Ampère, on a alors sur un circuit quelconque (fig. 5.7)

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{f} dS$$

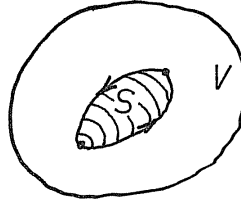


FIGURE 5.5 – Simplement connexe

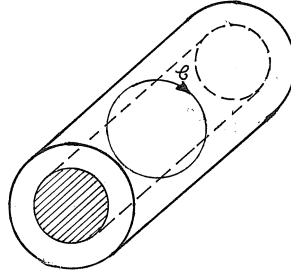


FIGURE 5.6 – Multiplement connexe

soit, dans nos notations,

$$\int_C f_i dx_i = \int_S n_i e_{ijk} D_j f_k dS$$

et comme  $f_i$  est irrotationnel,

$$\int_C f_i dx_i = 0$$

donc l'existence du potentiel est assurée. Il en découle que *dans un corps simplement connexe, les conditions de compatibilité suffisent à assurer l'existence du champ de déplacements.*

### 5.8.2 Topologie des corps multiplement connexes

Dans un corps  $V$  quelconque, deux circuits sont dits *réconciliables* si l'on peut faire coïncider le premier avec le second par une déformation continue ne

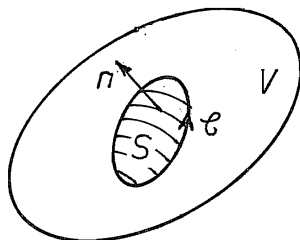
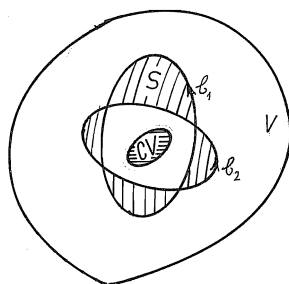


FIGURE 5.7 – Cas d'un ouvert simplement connexe

FIGURE 5.8 –  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont réconciliables

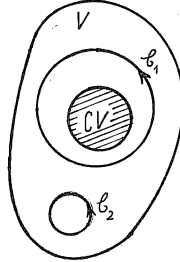
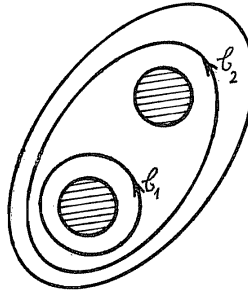
le faisant pas sortir du corps. La trajectoire de réconciliation définit donc une surface  $S \subset V$  (fig. 5.8).

Certains circuits peuvent être déformés jusqu'à ne plus former qu'un point : on les appelle *réductibles*. Tout autre circuit est *irréductible*. Toute surface  $S$  construite sur un circuit irréductible coupe donc  $\mathbb{C}V$  (fig. 5.9).

Un circuit irréductible  $\mathcal{C}$  est dit *simple* si l'on peut construire sur  $\mathcal{C}$  une surface  $S$  telle que  $S \cap \mathbb{C}V$  soit *d'un seul tenant*. Sinon,  $\mathcal{C}$  est dit *composé*. Intuitivement, un circuit simple « n'entoure qu'un trou ».

Appliquée aux circuits simples, la condition  $\mathcal{C}_1 \text{ R } \mathcal{C}_2$  (R signifie « réconciliable avec ») est une relation d'équivalence (fig. 5.11) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}_1 \text{ R } \mathcal{C}_2 \text{ et } \mathcal{C}_2 \text{ R } \mathcal{C}_3 \Rightarrow \mathcal{C}_1 \text{ R } \mathcal{C}_3 \\ \mathcal{C}_1 \text{ R } \mathcal{C}_2 \Rightarrow \mathcal{C}_2 \text{ R } \mathcal{C}_1 \end{array} \right.$$

FIGURE 5.9 –  $C_1$  est irréductible,  $C_2$  est réductibleFIGURE 5.10 –  $C_1$  est simple,  $C_2$  est composé

Elle divise donc les circuits simples en *classes d'équivalence*. Le nombre de ces classes,  $+1$  (pour les circuits réductibles) définit la *multiplicité de la connexion du corps  $V$* .

### 5.8.3 Intégration d'un gradient sur un corps multiplement connexe

L'intérêt des définitions précédentes réside dans la propriété que voici :

**Théorème 3** *Étant donné un champ irrotationnel  $f_i$ , ses circulations sur deux circuits simples réconciliables sont identiques.*

Soient en effet  $\mathbf{a} \in C_1$  et  $\mathbf{b} \in C_2$  deux points qui se correspondent dans la déformation de  $C_1$  à  $C_2$  (*fig.* 5.12). Lions-les par la trajectoire  $C_3$  de  $\mathbf{a}$  vers  $\mathbf{b}$



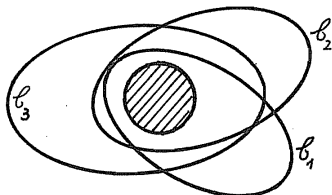


FIGURE 5.11 – « réconciliable avec » est une relation d'équivalence.

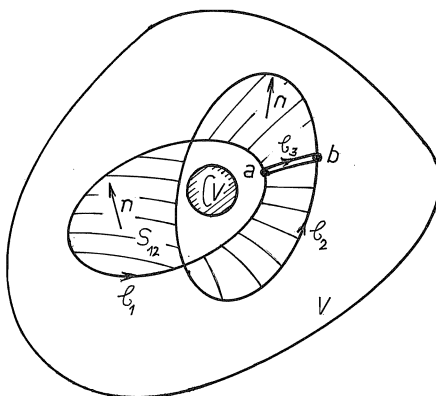


FIGURE 5.12 – Constantes cycliques

lors de cette déformation. Alors,

$$\int_{C_1} f_i dx_i - \int_{C_2} f_i dx_i = \int_{C_3} f_i dx_i + \int_{C_2} f_i dx_i - \int_{C_3} f_i dx_i - \int_{C_1} f_i dx_i = 0$$

car le circuit  $C = (C_3, C_2, -C_3, -C_1)$  est réductible, si bien que

$$\int_C f_i dx_i = \int_{S_{12}} n_i e_{ijk} D_j f_k dS = 0$$

Ainsi, il existe, associée à chaque classe de circuits simples, une *constante cyclique*  $\Delta\varphi$  égale à la circulation de  $f_i$  sur un quelconque des circuits de cette classe.

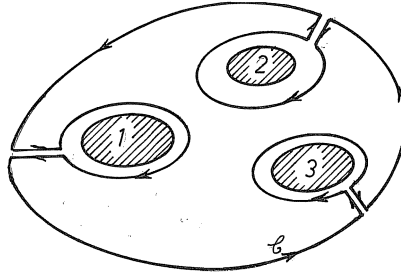


FIGURE 5.13 – Cas des circuits composés

Le cas des *circuits composés* s'y réduit aisément. En effet, comme le montre la figure 5.13, il est possible de tracer autour de chaque composante connexe de  $S \cap \mathbb{C}V$  un circuit simple. A l'aide de ponts comme ci-dessus, on obtient que la valeur de la circulation de  $f_i$  vaut la somme des constantes cycliques relatives aux différents trous embrassés.

De tout ceci, il résulte qu'*un champ irrotationnel dans un ouvert de connexion  $m$ -uple admet un potentiel si et seulement si les  $(m - 1)$  constantes cycliques des classes de circuits simples sont nulles.*

#### 5.8.4 Conditions globales de compatibilité dans les corps multiplement connexes

Partant des relations

$$D_j \omega_p = e_{pmi} D_m \varepsilon_{ij}$$

on commence par intégrer les rotations, en supposant vérifiées les conditions de compatibilité de Saint-Venant :

$$\omega_p(\mathbf{y}) = \omega_p(0) + \int_0^{\mathbf{y}} e_{pmi} D_m \varepsilon_{ij} dx_j$$

par un chemin quelconque. Pour assurer l'unicité, il faudra que sur chaque classe de circuits simples, les trois constantes cycliques

$$\Delta\omega_p = \int_{\mathcal{C}} e_{pmi} D_m \varepsilon_{ij} dx_j \tag{5.26}$$

s'annulent, ce qui donne  $3(m - 1)$  conditions pour un corps  $m$  fois connexe.

Les déplacements se calculent alors à partir des relations

$$D_i u_j = \varepsilon_{ij} + e_{ijp} \omega_p$$

Dans ce cas-ci, il faut faire attention à l'existence possible de  $\Delta\omega_p$ . Pour deux

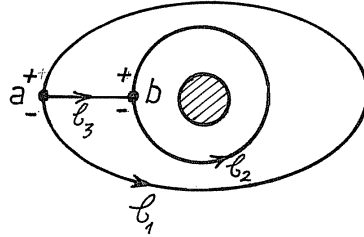


FIGURE 5.14 – Intégration des déplacements

circuits  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  réconciliables (fig. 5.14), on a, avant de faire un tour,

$$u_j^-(\mathbf{b}) = u_j^-(\mathbf{a}) + \int_{\mathcal{C}_3} (\varepsilon_{ij} + e_{ijp} \omega_p^-) dx_i$$

et, après avoir fait un tour,

$$u_j^+(\mathbf{b}) = u_j^+(\mathbf{a}) + \int_{\mathcal{C}_3} (\varepsilon_{ij} + e_{ijp} \omega_p^+) dx_i$$

soit, par différence,

$$\Delta u_j(\mathbf{b}) = \Delta u_j(\mathbf{a}) + e_{ijp} \Delta\omega_p (b_i - a_i) \tag{5.27}$$

c'est-à-dire que le saut de déplacement se compose d'une translation  $\Delta u_j(\mathbf{a})$  et d'une rotation  $e_{ijp} \Delta\omega_p (b_i - a_i)$ . Tout saut est annulé moyennant les conditions  $\Delta\omega_p = 0$  et

$$\Delta u_j = \int_{\mathcal{C}} (\varepsilon_{ij} + e_{ijp} \omega_p) dx_i = 0 \tag{5.28}$$

### 5.8.5 Interprétation de Weintgarten-Volterra

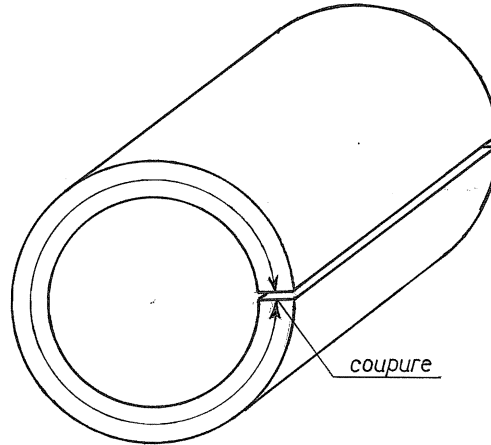


FIGURE 5.15 – Coupure rendant le corps simplement connexe

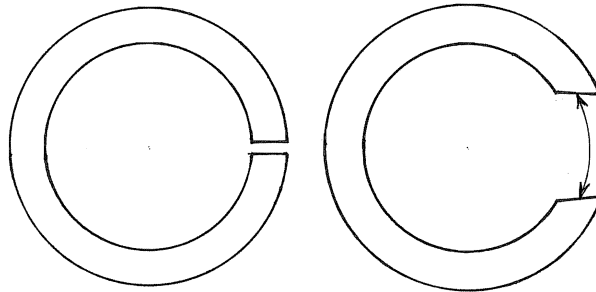


FIGURE 5.16 – Déplacements des lèvres de la coupure

Comment interpréter le fait que les conditions locales de compatibilité ne suffisent pas dans le cas d'un corps multiplement connexe? Faisons des *coupures* rendant le corps simplement connexe. Il suffit pour cela de supprimer l'existence de circuits irréductibles (*fig. 5.15*). A partir des relations locales de compatibilité, on peut alors construire un champ de déplacements dans le corps ainsi transformé. Mais en général, les lèvres de la coupure vont alors s'écarter d'une translation et d'une rotation : ce sont les *dislocations de Volterra* [96, 91].

Pour recoller les lèvres de la coupure, il faudra appliquer au corps des *efforts* capables de l'obliger à vérifier les équations globales  $\Delta u_p = 0$  et  $\Delta \omega_p = 0$ . Il est donc possible, en fabriquant par exemple un tube par cintrage et soudage, d'introduire des *contraintes résiduelles*. Ces contraintes ne pourront pas être annulées sans rompre la compatibilité. C'est pourquoi on dit encore qu'un corps  $m$  fois connexe est  $6(m-1)$  fois cinématiquement *hyperstatique*.

## 5.9 Sur l'indépendance des équations de compatibilité

Les équations de compatibilité de Saint-Venant sont au nombre de six. Mais sont-elles totalement indépendantes? Nous allons montrer que, moyennement certaines conditions sur la surface du corps, on peut se limiter à ne vérifier que *trois* équations de compatibilité. Nous commencerons par établir deux lemmes dus à Fraeijs de Veubeke [36], qui nous aideront à obtenir des théorèmes plus généraux dus à Washizu [93].

**Lemme 1** *Si l'on se donne arbitrairement les éléments diagonaux  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{33}$  du champ de déformation, il est toujours possible de le compléter de manière à le rendre compatible.*

En effet, soit  $(u_1^0, u_2^0, u_3^0)$  une solution particulière des équations

$$D_1 u_1^0 = \varepsilon_{11}, \quad D_2 u_2^0 = \varepsilon_{22}, \quad D_3 u_3^0 = \varepsilon_{33}$$

Il suffira d'écrire

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(D_1 u_2^0 + D_2 u_1^0), \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}(D_2 u_3^0 + D_3 u_2^0), \quad \varepsilon_{31} = \frac{1}{2}(D_3 u_1^0 + D_1 u_3^0)$$

**Lemme 2** *Si l'on se donne arbitrairement les termes non diagonaux  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{23}$ ,  $\varepsilon_{31}$  du champ de déformation, il est toujours possible de le compléter de manière à le rendre compatible.*

En effet <sup>3</sup>, il suffit de copier partiellement le raisonnement de Beltrami, en écrivant

$$\begin{aligned}
 D_2 u_1 &= \varepsilon_{21} - \omega_3 \\
 D_3 u_1 &= \varepsilon_{31} + \omega_2 \\
 D_1 u_2 &= \varepsilon_{12} + \omega_3 \\
 D_3 u_2 &= \varepsilon_{32} - \omega_1 \\
 D_1 u_3 &= \varepsilon_{13} - \omega_2 \\
 D_2 u_3 &= \varepsilon_{23} + \omega_1
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Les deux premières équations seront compatibles, c'est-à-dire que l'on pourra trouver un déplacement  $u_1$ , si

$$D_3 \omega_3 + D_2 \omega_2 = D_3 \varepsilon_{21} - D_2 \varepsilon_{31} \tag{5.30}$$

La deuxième paire d'équations, relative à l'existence de  $u_2$ , exige

$$D_3 \omega_3 + D_1 \omega_1 = D_1 \varepsilon_{32} - D_3 \varepsilon_{12} \tag{5.31}$$

Enfin, le troisième couple d'équations, relatif à l'existence de  $u_3$ , conduit à la condition

$$D_1 \omega_1 + D_2 \omega_2 = D_2 \varepsilon_{13} - D_1 \varepsilon_{23} \tag{5.32}$$

Visiblement, la somme des trois conditions (5.30), (5.31), (5.32) donne

$$D_1 \omega_1 + D_2 \omega_2 + D_3 \omega_3 = 0$$

ce qui nous ramène aux conditions

$$\begin{aligned}
 D_1 \omega_1 &= -D_3 \varepsilon_{21} + D_2 \varepsilon_{31} \\
 D_2 \omega_2 &= -D_1 \varepsilon_{32} + D_3 \varepsilon_{12} \\
 D_3 \omega_3 &= -D_2 \varepsilon_{13} + D_1 \varepsilon_{23}
 \end{aligned}$$

qui permettent toujours de trouver une solution particulière  $\omega_i^0$ . Il suffit alors d'introduire ce champ  $\omega_i^0$  dans les relations (5.29) pour obtenir une solution particulière  $u_i^0$  dont on pourra déduire les déformations manquantes.

---

3. La présente démonstration diffère de celle de Fraeijs de Veubeke

### 5.9.1 Deux résultats généraux sur les champs d'autocontrainte

Les deux lemmes ci-dessus vont nous permettre d'établir deux théorèmes sur les états d'autocontrainte.

**Théorème 4** *Soit  $\sigma_{ij}$  un état d'autocontrainte, c'est à dire vérifiant  $D_j\sigma_{ij} = 0$  dans  $V$  et  $n_j\sigma_{ij} = 0$  sur  $S$ . Si ce champ a ses termes diagonaux nuls dans  $V$ , il est identiquement nul.*

En effet, il résulte du deuxième lemme ci-dessus que l'on peut trouver un champ de déplacement  $v_i$  tel que

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(D_i v_j + D_j v_i), \quad i \neq j$$

Alors, comme  $\sigma_{11} = 0$ ,  $\sigma_{22} = 0$  et  $\sigma_{33} = 0$ , on a

$$\begin{aligned} \int_V (2\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{23}^2 + 2\sigma_{31}^2) dV &= \int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} (D_i v_j + D_j v_i) dV \\ &= \int_S n_j \sigma_{ij} v_i dS - \int_V v_i D_j \sigma_{ji} dV \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisqu'il s'agit d'un état d'autocontrainte.

**Théorème 5** *Soit  $\sigma_{ij}$  un état d'autocontrainte, c'est à dire vérifiant  $D_j\sigma_{ij} = 0$  dans  $V$  et  $n_j\sigma_{ij} = 0$  sur  $S$ . Si ce champ a ses termes non diagonaux nuls dans  $V$ , il est identiquement nul.*

Le schéma de la démonstration est le même, en se basant sur le premier lemme ci-dessus.

### 5.9.2 Les deux théorèmes de Washizu

Revenons au tenseur d'incompatibilité  $T_{ij}$ . On sait qu'il vérifie l'équilibre intérieur :

$$D_j T_{ji} = 0 \text{ dans } V$$

Il en découle les deux théorèmes suivants :

**Théorème 6** *Si un champ de déformations satisfait aux seules équations de compatibilité  $T_{11} = 0$ ,  $T_{22} = 0$  et  $T_{33} = 0$  dans un domaine  $V$ , le tenseur  $T_{ij}$  est nul dans  $V$  chaque fois que les conditions de surface  $n_j T_{ji} = 0$  sont vérifiées<sup>4</sup>.*

En effet, les conditions sont telles que le tenseur d'incompatibilité est un état d'autocontrainte dont les éléments diagonaux sont nuls. De la même façon, on a le

**Théorème 7** *Si un champ de déformations satisfait aux seules équations de compatibilité  $T_{12} = 0$ ,  $T_{23} = 0$  et  $T_{31} = 0$  dans un domaine  $V$ , le tenseur  $T_{ij}$  est nul dans  $V$  chaque fois que les conditions de surface  $n_j T_{ji} = 0$  sont vérifiées<sup>5</sup>.*

### 5.9.3 Autre énoncé des théorèmes de Washizu

Nous avons vu en section 5.5 que la nullité de l'expression  $n_i T_{ip}$  sur la surface du corps est une condition nécessaire à l'existence d'un vecteur rotation univoque sur cette surface. On peut donc encore énoncer le

**Théorème 8** *Si le vecteur rotation est défini de manière univoque sur la surface, il suffira, pour assurer la nullité du tenseur d'incompatibilité, d'exiger un des deux triplets de conditions  $T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0$  ou  $T_{12} = T_{23} = T_{31} = 0$ .*

## 5.10 Exercices

**Exercice 20** *Écrire explicitement les six composantes du tenseur d'incompatibilité  $T_{ij}$*

*Solution*

$$\begin{aligned} T_{11} &= D_{22}\varepsilon_{33} + D_{33}\varepsilon_{22} - 2D_{23}\varepsilon_{23} \\ T_{22} &= D_{33}\varepsilon_{11} + D_{11}\varepsilon_{33} - 2D_{13}\varepsilon_{13} \\ T_{33} &= D_{11}\varepsilon_{22} + D_{22}\varepsilon_{11} - 2D_{12}\varepsilon_{12} \\ T_{12} &= D_{23}\varepsilon_{31} + D_{31}\varepsilon_{23} - D_{21}\varepsilon_{33} - D_{33}\varepsilon_{21} \\ T_{23} &= D_{31}\varepsilon_{12} + D_{12}\varepsilon_{31} - D_{32}\varepsilon_{11} - D_{11}\varepsilon_{32} \\ T_{31} &= D_{12}\varepsilon_{23} + D_{23}\varepsilon_{12} - D_{13}\varepsilon_{22} - D_{22}\varepsilon_{31} \end{aligned}$$

---

4. Washizu exigeait en fait  $T_{ij} = 0$  sur  $S$ , ce qui est plus restrictif

5. Même remarque que pour le théorème précédent



**Exercice 21** *Montrer qu'un champ de contraintes en équilibre homogène à l'intérieur de  $V$  est en général formé des dérivées secondes de trois fonctions de contrainte que l'on peut définir d'au moins deux manières différentes.*

*Solution* - Les relations

$$D_j \sigma_{ji} = 0$$

admettent, si l'on fait provisoirement abstraction de la symétrie des contraintes, la solution générale

$$\sigma_{ji} = e_{jkl} D_k A_{li}$$

les  $A_{li}$  étant des fonctions de contrainte du premier ordre. On jouit, dans cette expression, d'une *invariance de jauge*, en ce sens que l'on ne modifie pas les contraintes en remplaçant les  $A_{li}$  par

$$\hat{A}_{li} = A_{li} + D_l \psi_i$$

$\psi_i$  étant un vecteur quelconque. On peut en particulier choisir les  $\psi_i$  de manière à annuler  $\hat{A}_{11}$ ,  $\hat{A}_{22}$  et  $\hat{A}_{33}$  : il suffit pour cela que

$$D_1 \psi_1 = -A_{11}, \quad D_2 \psi_2 = -A_{22}, \quad D_3 \psi_3 = -A_{33}$$

La condition de symétrie des contraintes s'écrit alors

$$0 = e_{rji} \sigma_{ji} = e_{jir} e_{jpp} D_p \hat{A}_{qi} = D_p \hat{A}_{qi} (\delta_{ip} \delta_{qr} - \delta_{iq} \delta_{pr})$$

soit

$$0 = D_i \hat{A}_{ri} - D_r \hat{A}_{ii} = D_i \hat{A}_{ri}$$

puisque, par construction,  $\hat{A}_{ii} = 0$ . La solution générale de cette équation a la forme

$$\hat{A}_{ri} = e_{imn} D_m B_{rn}$$

A nouveau, on jouit d'une invariance de jauge, car on ne modifie pas les  $\hat{A}_{li}$  en remplaçant  $B_{rn}$  par

$$\hat{B}_{rn} = B_{rn} + D_n \chi_r \tag{5.33}$$

Remarquons d'abord que l'on peut choisir les  $\chi_r$  de manière à symétriser  $\hat{B}_{rn}$  : en effet, pour obtenir

$$e_{irn} \hat{B}_{rn} = e_{irn} B_{rn} + e_{irn} D_n \chi_r = 0$$

il faut que

$$e_{inr} D_n \chi_r = e_{irn} B_{rn}$$

ce qui est possible si

$$D_i(e_{irn}B_{rn}) = 0$$

ce qui revient à dire

$$-e_{rin}D_iB_{rn} = -\hat{A}_{rr} = 0$$

condition effectivement vérifiée. On obtient ainsi l'expression

$$\sigma_{ij} = e_{ikl}e_{jmn}D_{km}\hat{B}_{ln} \quad (5.34)$$

avec  $\hat{B}_{ln}$  symétrique. Mais on peut aller plus loin en jouant sur une nouvelle forme de l'invariance de jauge, qui ne rompt pas la symétrie : il résulte en effet de l'expression du tenseur d'incompatibilité que les contraintes ne sont pas altérées si l'on remplace  $\hat{B}_{ij}$  par

$$\tilde{B}_{ij} = \hat{B}_{ij} + \frac{1}{2}(D_i\beta_j + D_j\beta_i)$$

Or, il est possible de trouver un champ  $\beta_i$  qui vérifie l'une des deux conditions suivantes :

1.  $\frac{1}{2}(D_i\beta_j + D_j\beta_i) = -\hat{B}_{ij}$  pour  $i \neq j$
2.  $D_1\beta_1 = -\hat{B}_{11}$ ,  $D_2\beta_2 = -\hat{B}_{22}$ ,  $D_3\beta_3 = -\hat{B}_{33}$

Pour le choix (1), le tenseur  $\tilde{B}_{ij}$  se réduit à la seule diagonale. En notant  $\varphi_1 = \tilde{B}_{11}$ ,  $\varphi_2 = \tilde{B}_{22}$  et  $\varphi_3 = \tilde{B}_{33}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= D_{22}\varphi_3 + D_{33}\varphi_2 \\ \sigma_{22} &= D_{33}\varphi_1 + D_{11}\varphi_3 \\ \sigma_{33} &= D_{11}\varphi_2 + D_{22}\varphi_1 \\ \sigma_{12} &= -D_{12}\varphi_3 \\ \sigma_{23} &= -D_{23}\varphi_1 \\ \sigma_{31} &= -D_{31}\varphi_2 \end{aligned}$$

C'est le système de *fonctions de contrainte de Maxwell* (1870) [75].

Le choix (2) mène à un tenseur  $\tilde{B}_{ij}$  réduit à ses termes non diagonaux. En notant  $\Phi_1 = -2\tilde{B}_{23}$ ,  $\Phi_2 = -2\tilde{B}_{31}$  et  $\Phi_3 = -2\tilde{B}_{12}$ , on obtient

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= D_{23}\Phi_1 \\ \sigma_{22} &= D_{13}\Phi_2 \\ \sigma_{33} &= D_{12}\Phi_3 \\ \sigma_{12} &= -\frac{1}{2}D_3(D_1\Phi_1 + D_2\Phi_2 - D_3\Phi_3) \\ \sigma_{13} &= -\frac{1}{2}D_2(D_3\Phi_3 + D_1\Phi_1 - D_2\Phi_2) \\ \sigma_{23} &= -\frac{1}{2}D_1(D_2\Phi_2 + D_3\Phi_3 - D_1\Phi_1)\end{aligned}$$

C'est le système de *fonctions de contrainte de Morera* (1892) [75].

**Exercice 22** *En théorie des poutres, on pose*

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= a(z) + xb(z) + yc(z) \\ \sigma_{xx} = \sigma_{yy} &= 0\end{aligned}$$

*Montrer que, dans le cadre de ces hypothèses, et pour autant que la poutre soit simplement connexe, il est toujours possible de trouver des contraintes  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yz}$  et  $\sigma_{zx}$  de manière à assurer la compatibilité.*

**Exercice 23** *Analyser les conséquences du théorèmes d'unicité de Kirchhoff en ce qui concerne*

- la stabilité ;
- les contraintes résiduelles.

*Peut-on étudier le flambement dans le cadre de la théorie linéaire ?*

**Exercice 24** *Quelles sont les conditions pour qu'un champ de déformation de la forme  $\varepsilon_{ij} = f(\mathbf{x})\delta_{ij}$  soit compatible ?*

*Solution* - On a

$$\begin{aligned}T_{pq} &= e_{pmi}e_{qri}D_{mr}f\delta_{ij} = D_{mr}f e_{pmi}e_{qri} \\ &= D_{mr}f(\delta_{pq}\delta_{mr} - \delta_{pr}\delta_{qm}) \\ &= D_{mm}f\delta_{pq} - D_{qp}f\end{aligned}$$

soit

$$D_{pq}f = D_{mm}f\delta_{pq} \tag{5.35}$$

Contractant sur  $p$  et  $q$ , on obtient

$$D_{pp}f = 3D_{mm}f \text{ soit } D_{mm}f = 0$$

ce qui, comparé à (5.35) donne

$$D_{pq}f = 0$$

La solution de ces 6 équations est

$$f = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$$

**Exercice 25** *A partir des équations de Navier, étudier le problème d'une sphère creuse épaisse soumise à une pression interne. En déduire le cas limite d'une faible épaisseur.*

*Solution* - La symétrie du problème implique  $u_\theta = u_\varphi = 0$  (dans les coordonnées sphériques), soit  $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_r$ . On a encore  $\partial u / \partial \theta = \partial u / \partial \varphi = 0$ . Il en résulte

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta u) + 0 + 0 \right] = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u)$$

et

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ u & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Les forces de volume étant nulles, on a simplement

$$\mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

ce qui signifie que

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = C$$

soit, explicitement,

$$\frac{d}{dr} (r^2 u) = Cr^2$$

On en déduit successivement

$$r^2 u = C \frac{r^3}{3} + D$$

puis

$$u = C \frac{r}{3} + \frac{D}{r^2}$$

ce que l'on peut encore écrire

$$u = Ar + \frac{B}{r^2}$$

Les déformations sont donc

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} = A - \frac{2B}{r^3} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{u}{r} = A + \frac{B}{r^3} \\ \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi} &= 3A\end{aligned}$$

On en déduit aisément les contraintes :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= 2G \left( \varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) \\ &= 2G \left( A - \frac{2B}{r^3} + \frac{3\nu}{1-2\nu} A \right) \\ &= 2G \left( \frac{1+\nu}{1-2\nu} A - \frac{2B}{r^3} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &= 2G \left( \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) \\ &= 2G \left( A + \frac{B}{r^3} + \frac{3\nu}{1-2\nu} A \right) \\ &= 2G \left( \frac{1+\nu}{1-2\nu} A + \frac{B}{r^3} \right)\end{aligned}$$

Les conditions aux limites sont

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -p & \text{en } r = R_i \\ \sigma_{rr} = 0 & \text{en } r = R_e \end{cases}$$

On en déduit d'abord

$$B = \frac{R_e^3}{2} \frac{1+\nu}{1-2\nu} A$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= 2GA \frac{1+\nu}{1-2\nu} \left( 1 - \frac{R_e^3}{r^3} \right) = \frac{EA}{1-2\nu} \left( 1 - \frac{R_e^3}{r^3} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &= 2GA \frac{1+\nu}{1-2\nu} \left( 1 + \frac{R_e^3}{2r^3} \right) = \frac{EA}{1-2\nu} \left( 1 + \frac{R_e^3}{2r^3} \right)\end{aligned}$$

Pour  $r = R_i$ , on trouve

$$-p = \frac{EA}{1-2\nu} \left( 1 - \frac{R_e^3}{R_i^3} \right)$$

soit

$$A = \frac{p(1-2\nu)}{E \left( \frac{R_e^3}{R_i^3} - 1 \right)}$$

La solution finale est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = -p \frac{\frac{R_e^3}{r^3} - 1}{\frac{R_e^3}{R_i^3} - 1} \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = p \frac{\frac{R_e^3}{2r^3} + 1}{\frac{R_e^3}{R_i^3} - 1} \end{array} \right. \quad (5.36)$$

Quant au déplacement, il vaut

$$\begin{aligned} u &= Ar + \frac{B}{r^2} = A \left[ r + \frac{1}{2} \frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{R_e^3}{r^2} \right] \\ &= \frac{pr}{2E \left( \frac{R_e^3}{R_i^3} - 1 \right)} \left[ (2-4\nu) + (1+\nu) \frac{R_e^3}{r^3} \right] \end{aligned}$$

soit

$$u = \frac{pr}{2E} \frac{(2-4\nu) + (1+\nu) \frac{R_e^3}{r^3}}{\frac{R_e^3}{R_i^3} - 1} \quad (5.37)$$

Dans le cas d'une *faible épaisseur*, c'est-à-dire  $t/R = \eta \ll 1$ , où  $t$  est l'épaisseur, et  $R$ , le rayon, on a

$$r = R(1 + \eta\rho), \text{ avec } -\frac{1}{2} \leq \rho \leq \frac{1}{2}$$

$$\rho = \left( \frac{r}{R} - 1 \right) \frac{1}{\eta}$$

et

$$R_e = R\left(1 + \frac{\eta}{2}\right), \quad R_i = R\left(1 - \frac{\eta}{2}\right)$$

d'où

$$\frac{R_e}{R_i} = \frac{1 + \eta/2}{1 - \eta/2} = 1 + \frac{\eta}{1 - \eta/2} = 1 + \eta + \mathcal{O}(\eta^2)$$

et

$$\left(\frac{R_e}{R_i}\right)^3 = 1 + 3\eta + \mathcal{O}(\eta^2)$$

De la même façon, on a

$$r = R(1 + \mathcal{O}(\eta))$$

et

$$\frac{R_e}{r} = \frac{1 + \eta/2}{1 + \eta\rho} = \frac{1 + \eta\rho + \eta(\frac{1}{2} - \rho)}{1 + \eta\rho} = 1 + \eta\left(\frac{1}{2} - \rho\right) + \mathcal{O}(\eta^2)$$

d'où

$$\left(\frac{R_e}{r}\right)^3 = 1 + 3\eta\left(\frac{1}{2} - \rho\right) + \mathcal{O}(\eta^2)$$

On en déduit

$$\sigma_{rr} = -p \frac{3\eta(\frac{1}{2} - \rho) + \mathcal{O}(\eta^2)}{3\eta + \mathcal{O}(\eta^2)} = -p \frac{(\frac{1}{2} - \rho) + \mathcal{O}(\eta)}{1 + \mathcal{O}(\eta)} = -p\left(\frac{1}{2} - \rho\right) + \mathcal{O}(\eta)$$

puis

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &= p \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\eta(\frac{1}{2} - \rho) + \mathcal{O}(\eta^2) + 1}{3\eta + \mathcal{O}(\eta^2)} \\ &= p \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\eta(\frac{1}{2} - \rho) + \mathcal{O}(\eta^2)}{3\eta(1 + \mathcal{O}(\eta))} = \frac{p}{2\eta}(1 + \mathcal{O}(\eta)) \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} u &= \frac{pR(1 + \mathcal{O}(\eta))}{2E} \frac{(2 - 4\nu) + (1 + \nu)[1 + 3\eta(\frac{1}{2} - \rho) + \mathcal{O}(\eta^2)]}{3\eta + \mathcal{O}(\eta^2)} \\ &= \frac{pR}{2E} \frac{(3 - 3\nu)(1 + \mathcal{O}(\eta))}{3\eta(1 + \mathcal{O}(\eta))} = \frac{pR}{2E\eta}(1 - \nu)(1 + \mathcal{O}(\eta)) \end{aligned}$$

A un ordre de  $\eta$  près, on a donc

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &\approx -p\left(\frac{1}{2} - \rho\right) (= \mathcal{O}(p)) \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &\approx \frac{pR}{2t} (= \mathcal{O}(p/\eta)) \\ u &\approx \frac{pR^2(1-\nu)}{2Et}\end{aligned}\tag{5.38}$$

On le constate, en comparaison des autres contraintes,  $\sigma_{rr}$  est de l'ordre des termes négligés. Il est donc raisonnable de la considérer comme *approximativement nulle*. C'est pourquoi on considère généralement qu'une sphère mince sous pression est en *état plan de contrainte* ( $\sigma_{rr} \approx 0$ ).

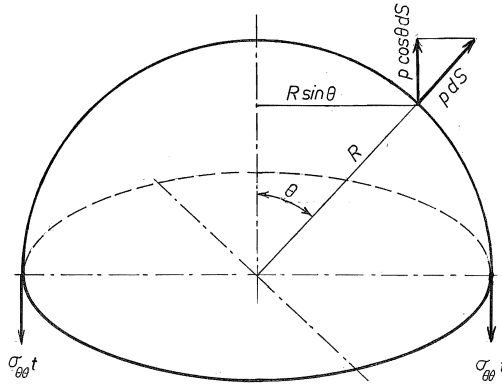


FIGURE 5.17 – Sphère mince : calcul de  $\sigma_{\theta\theta}$ .



La valeur de  $\sigma_{\theta\theta}$  peut être obtenue par le raisonnement simple que voici (fig. 5.17) : la résultante verticale des pressions sur la demi-sphère vaut

$$\begin{aligned}
 p \int_S \cos \theta dS &= p \int_0^{\pi/2} \cos \theta \cdot 2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta \\
 &= p\pi R^2 \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta \\
 &= p\pi R^2 \left[ -\frac{\cos 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} \\
 &= p \frac{\pi R^2}{2} (\cos 0 - \cos \pi) \\
 &= p\pi R^2
 \end{aligned}$$

Cet effort est équilibré par les contraintes  $\sigma_{\theta\theta}$  sur l'équateur, dont la résultante vaut

$$\sigma_{\theta\theta} t \cdot 2\pi R$$

On a donc

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p\pi R^2}{2\pi R t} = \frac{pR}{2t}$$

Un raisonnement semblable prouverait que  $\sigma_{\varphi\varphi}$  a la même valeur. On en déduit d'ailleurs

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{R} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{\varphi\varphi}) = \frac{1-\nu}{E} \sigma_{\theta\theta} = \frac{pR}{2Et} (1-\nu)$$

d'où

$$u = \frac{pR^2}{2Et} (1-\nu)$$

**Exercice 26** Montrer que les hypothèses de Saint-Venant pour les poutres,

$$\sigma_x = \tau_{xy} = \sigma_y = 0$$

impliquent

$$\sigma_z = a_0(z) + xa_1(z) + ya_2(z)$$

où  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  sont des fonctions affines de  $z$  pour que la compatibilité soit vérifiée.

*Solution* - Les équations de Beltrami-Michell s'écrivent alors

1.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} &= 0\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\sigma_z = a_0(z) + xa_1(z) + ya_2(z)$$

2.

$$\begin{aligned}\Delta \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0 \\ \Delta \tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z} &= 0 \Rightarrow \Delta \tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{da_1}{dz} = 0 \\ \Delta \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} &= 0 \Rightarrow \Delta \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{da_2}{dz} = 0\end{aligned}$$

# Chapitre 6

## Torsion des poutres prismatiques

### 6.1 Notion de poutre

Une poutre est un corps *élancé*, c'est-à-dire qu'une de ses dimensions surpasse largement les autres (*fig.* 6.1). Nous placerons l'axe des  $z$  suivant la grande dimension. Dans une poutre prismatique, la section  $\Omega$  est indépendante de  $z$ . Nous placerons l'origine des axes  $Gx, Gy$  de la section au centre de gravité de celle-ci, dans les axes principaux d'inertie (le trièdre  $(G, x, y, z)$  est supposé dextrorsum). Dès lors,

$$\int_{\Omega} x d\Omega = \int_{\Omega} y d\Omega = \int_{\Omega} xy d\Omega = 0 \quad (6.1)$$

Nous noterons

$$\Omega = \int_{\Omega} 1 d\Omega, \quad I_x = \int_{\Omega} x^2 d\Omega, \quad I_y = \int_{\Omega} y^2 d\Omega \quad (6.2)$$

La surface latérale de la poutre, y compris celle des trous éventuels, est appelée *manteau*.

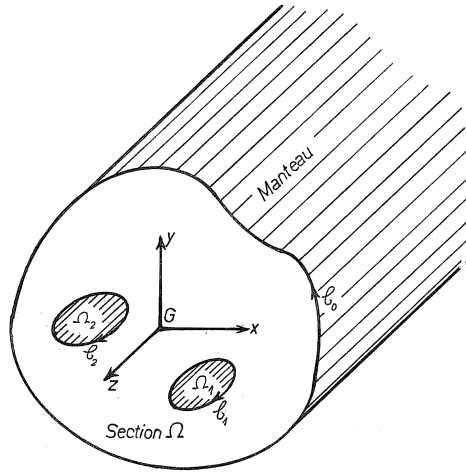


FIGURE 6.1 – Poutre

## 6.2 Torsion uniforme

Les hypothèses de la théorie classique des poutres de Barré de Saint-Venant [4, 3] sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0 \\ \text{Pas de charge sur le manteau} \\ \text{Pas de forces de volume} \end{array} \right. \quad (6.3)$$

Parmi les différents états de contrainte possibles dans ce cadre, la torsion uniforme se caractérise par la condition supplémentaire

$$\sigma_z = 0 \quad (6.4)$$

### 6.3 Équations d'équilibre

Les équations générales d'équilibre<sup>1</sup>

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases}$$

se réduisent, dans le cadre des hypothèses ci-dessus, à

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (6.5)$$

et

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (6.6)$$

On satisfait à ces trois conditions en posant

$$\tau_{xz} = G\theta \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -G\theta \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (6.7)$$

$\theta$  étant une constante arbitraire et  $\varphi$ , une fonction de  $x$  et  $y$  seulement, appelée *fonction de Prandtl* [70]. Elle est définie à une constante additive près.

Sur le manteau, on a  $n_z = 0$ , et les conditions d'équilibre s'écrivent

$$\begin{cases} n_x \sigma_x + n_y \tau_{xy} = 0 \\ n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_y = 0 \\ n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} = 0 \end{cases}$$

Vu les hypothèses, il ne subsiste que la seule équation

$$n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} = 0 \quad (6.8)$$

En termes de la fonction de Prandtl, elle s'écrit

$$n_x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - n_y \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (6.9)$$

Définissons sur le contour (*fig. 6.2*) le vecteur unitaire tangent positif comme

---

1. Dans les applications, nous utiliserons librement les notations d'ingénieur  $\sigma_x = \sigma_{xx}$ ,  $\tau_{xy} = \sigma_{xy}$  et  $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$ , etc., pour autant qu'aucune confusion ne soit possible avec les déformations de Green

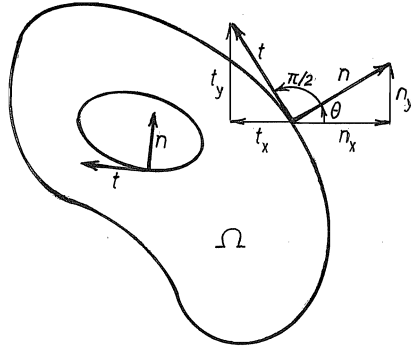


FIGURE 6.2 – Normale et tangente sur le contour

obtenu par rotation du vecteur normal extérieur de  $\pi/2$  selon la règle du tire-bouchon autour de l'axe  $z$ . Alors, comme

$$n_x = \cos \theta, \quad n_y = \sin \theta$$

on obtient

$$\begin{aligned} t_x &= \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta = -n_y \\ t_y &= \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta = n_x \end{aligned}$$

L'équation (6.9) devient alors

$$t_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + t_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

ce qui signifie que  $\varphi$  est constante sur toute composante connexe du contour  $\mathcal{C}$ . Appelant  $\mathcal{C}_0$  le contour extérieur, on fixe la constante arbitraire dans la définition (6.7) de la fonction de Prandtl par la condition

$$\varphi|_{\mathcal{C}_0} = 0 \tag{6.10}$$

Sur les contours intérieurs  $\mathcal{C}_i$ , on peut seulement dire

$$\varphi|_{\mathcal{C}_i} = \varphi_i \text{ (cte)} \tag{6.11}$$

On peut également prolonger la fonction  $\varphi$  à  $\Omega_0 = \Omega \cup (\bigcup_i \Omega_i)$  où les  $\Omega_i$  sont les trous, en posant

$$\begin{cases} \hat{\varphi} = \varphi & \text{dans } \Omega \\ \hat{\varphi} = \varphi_i & \text{dans } \Omega_i \end{cases}$$

La fonction prolongée  $\hat{\varphi}$  permet dans bien des cas de simplifier le problème.

Proposons-nous de calculer les résultantes du champ de cisaillement. Les efforts tranchants sont définis par

$$T_x = \int_{\Omega} \tau_{xz} d\Omega, \quad T_y = \int_{\Omega} \tau_{yz} d\Omega$$

On a

$$\begin{aligned} T_x &= G\theta \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\Omega = G\theta \int_{\Omega_0} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} d\Omega = G\theta \int_{C_0} \hat{\varphi} n_y ds = 0 \\ T_y &= -G\theta \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\Omega = -G\theta \int_{\Omega_0} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} d\Omega = -G\theta \int_{C_0} \hat{\varphi} n_x ds = 0 \end{aligned}$$

La résultante du torseur des contraintes tangentielles étant nulle, il possède donc un moment indépendant du point par rapport auquel il est calculé. Ce moment, dit *moment de torsion*, vaut (fig. 6.3)

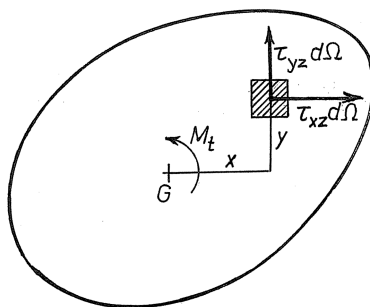


FIGURE 6.3 – Moment de torsion

$$M_t = \int_{\Omega} (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) d\Omega$$

On a

$$\begin{aligned}
 M_t &= -G\theta \int_{\Omega} \left( x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) d\Omega \\
 &= -G\theta \int_{\Omega_0} \left( x \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} + y \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right) d\Omega \\
 &= -G\theta \int_{C_0} (xn_x + yn_y) \hat{\varphi} ds + G\theta \int_{\Omega_0} \hat{\varphi} \left( \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \right) d\Omega \\
 &= 2G\theta \int_{\Omega_0} \hat{\varphi} d\Omega
 \end{aligned}$$

Ce résultat peut s'écrire

$$J = \frac{M_t}{G\theta} = 2 \int_{\Omega_0} \hat{\varphi} d\Omega \quad (6.12)$$

## 6.4 Compatibilité

Nous exprimerons la compatibilité à l'aide des équations de Beltrami-Michell

$$D_{kk}\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} D_{ij}\sigma_{kk} = 0$$

Tenant compte des hypothèses et des équations d'équilibre (6.5), on obtient

$$\nabla^2 \tau_{xz} = 0, \quad \nabla^2 \tau_{yz} = 0 \quad (6.13)$$

en notant

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (6.14)$$

Ces équations, qui s'écrivent encore

$$\nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

impliquent

$$\nabla^2 \varphi = C = cte \quad (6.15)$$



## 6.5 Choix de la constante C

Partant des relations générales

$$\frac{1}{G}\tau_{xz} = \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{1}{G}\tau_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

on obtient, en termes de  $\varphi$ ,

$$\theta \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad -\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (6.16)$$

Dérivons la première de ces équations par rapport à  $y$ , et la seconde par rapport à  $x$ . On obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \end{aligned}$$

En sommant ces deux équations, on élimine  $w$ , ce qui donne

$$\theta \nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0$$

Le groupement entre parenthèses n'est autre que le double du vecteur rotation local  $\omega$  autour de l'axe de la poutre. On a donc

$$2 \frac{\partial \omega}{\partial z} = -\theta \nabla^2 \varphi = -C\theta$$

Par conséquent, la torsion  $\partial \omega / \partial z$  des fibres est constante par rapport à  $z$ . On s'aperçoit qu'en posant

$$C = -2 \quad (6.17)$$

on a simplement

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \theta \quad (6.18)$$

ce qui donne à  $\theta$  une signification simple. L'équation régissant la fonction de Prandtl est alors

$$\nabla^2 \varphi = -2 \quad (6.19)$$

## 6.6 Intégration des déplacements $u$ et $v$

Les déplacements  $u$  et  $v$  vérifient les équations constitutives

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) = 0 \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x - \nu\sigma_z) = 0 \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = 0 \quad (6.22)$$

De plus,

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega$$

ce qui, couplé avec (6.22), donne

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \omega \quad (6.23)$$

Les équations (6.20) et (6.21) entraînent alors

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

c'est-à-dire que *l'angle de rotation  $\omega$  a une valeur unique dans toute la section.*

On déduit donc de (6.23), (6.20) et (6.21)

$$u = u_0(z) - \omega(z)y, \quad v = v_0(z) + \omega(z)x \quad (6.24)$$

Examinons la variation de  $u_0$  et  $v_0$ . Des équations

$$\tau_{xz} = G \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \tau_{yz} = G \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

on déduit

$$0 = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right), \quad 0 = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = G \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right)$$

et comme

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) = 0$$

on obtient, à partir de (6.24) et (6.18)

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}, \quad 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} \quad (6.25)$$

Par conséquent,

$$u_0 = A_1 + A_2 z, \quad v_0 = B_1 + B_2 z \quad (6.26)$$

Les paramètres  $A_1$  et  $A_2$  régissent un déplacement de corps rigide et peuvent donc être omis. On a alors

$$u = A_2 z - (\theta z)y, \quad v = B_2 z + (\theta z)x$$

Posant

$$y_T = \frac{A_2}{\theta}, \quad x_T = -\frac{B_2}{\theta}$$

on obtient

$$u = -\theta z(y - y_T), \quad v = \theta z(x - x_T) \quad (6.27)$$

$x_T$  et  $y_T$  définissant les coordonnées d'un centre de torsion.

## 6.7 Intégration du déplacement $w$

Éliminant  $\varphi$  entre les deux équations (6.16), on obtient, par (6.20) et (6.22)

$$\begin{aligned} \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\nabla^2 w = 0 \quad (6.28)$$

Les conditions aux limites relatives au champ  $w$  s'obtiennent comme suit : par (6.16),

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \theta \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} = \theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + y - y_T \right) \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= -\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} = -\theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x - x_T \right) \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \theta \left[ n_x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - n_y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + n_x(y - y_T) - n_y(x - x_T) \right]$$

soit

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \theta \left[ t_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + t_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + n_x(y - y_T) - n_y(x - x_T) \right]$$

Comme  $\partial \varphi / \partial t = 0$  sur le contour, on a simplement

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \theta [n_x(y - y_T) - n_y(x - x_T)] \quad (6.29)$$

Tenant compte du fait que

$$n_x = t_y = \frac{d}{dt}(y - y_T) \text{ et } n_y = -t_x = -\frac{d}{dt}(x - x_T)$$

on peut encore écrire

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \theta \frac{d}{dt} \left[ \frac{(x - x_T)^2 + (y - y_T)^2}{2} \right] \quad (6.30)$$

Dans le cas de sections *multiplement connexes*, l'intégrabilité de  $w$  n'est pas garantie sans condition. En effet, on a, sur les  $\mathcal{C}_i$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= t_x \frac{\partial w}{\partial x} + t_y \frac{\partial w}{\partial y} \\ &= \theta \left[ t_x \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + y - y_T \right) - t_y \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x - x_T \right) \right] \\ &= -\theta \left[ n_y \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + y - y_T \right) + n_x \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x - x_T \right) \right] \\ &= -\theta \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n} + n_x(x - x_T) + n_y(y - y_T) \right] \end{aligned}$$

La condition d'intégrabilité de  $w$  est alors

$$0 = \int_{\mathcal{C}_i} \frac{\partial w}{\partial t} ds = -\theta \left\{ \int_{\mathcal{C}_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds + \int_{\mathcal{C}_i} [n_x(x - x_T) + n_y(y - y_T)] ds \right\}$$

soit, en faisant usage de la normale intérieure  $\mathbf{n}^- = -\mathbf{n}$  (fig. 6.4),

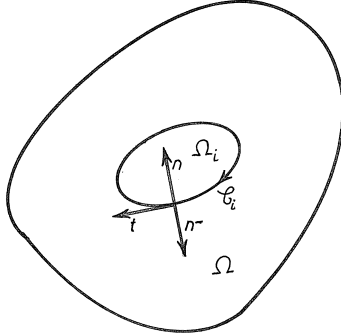


FIGURE 6.4 – Normale intérieure

$$\begin{aligned}
 \int_{C_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds &= \int_{C_i} [n_x^-(x - x_T) + n_y^-(y - y_T)] ds \\
 &= \int_{\Omega_i} \left[ \frac{\partial}{\partial x}(x - x_T) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_T) \right] d\Omega \\
 &= 2\Omega_i
 \end{aligned}$$

Ainsi, dans le cas de sections multiples connexes, la fonction de Prandtl devra encore vérifier les conditions

$$\int_{C_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 2\Omega_i \tag{6.31}$$

pour que l'unicité du déplacement  $w$  soit assurée.

## 6.8 Principe variationnel régissant la fonction de Prandtl étendue

De l'équation

$$\nabla^2 \varphi = -2 \text{ dans } \Omega$$

on déduit, comme  $\varphi|_{c_0} = 0$  et  $\varphi|_{c_i} = \varphi_i$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\nabla^2 \varphi + 2) \delta \varphi d\Omega \\ &= \sum_i \delta \varphi_i \int_{c_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \mathbf{grad} \varphi \cdot \mathbf{grad} \delta \varphi d\Omega + 2 \int_{\Omega} \delta \varphi d\Omega \end{aligned}$$

Tenant compte du fait que

$$\int_{c_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 2\Omega_i$$

on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \sum_i \delta \varphi_i \Omega_i + 2 \int_{\Omega} \delta \varphi d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{grad} \varphi \cdot \mathbf{grad} \delta \varphi d\Omega \\ &= 2 \int_{\Omega_0} \delta \hat{\varphi} d\Omega - \int_{\Omega_0} \mathbf{grad} \hat{\varphi} \cdot \mathbf{grad} \delta \hat{\varphi} d\Omega \end{aligned}$$

ou encore,

$$\delta \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} |\mathbf{grad} \hat{\varphi}|^2 d\Omega - 2 \int_{\Omega_0} \hat{\varphi} d\Omega \right] = 0 \quad (6.32)$$

les variations  $\delta \hat{\varphi}$  étant astreintes aux conditions

$$\delta \hat{\varphi}|_{c_0} = 0, \quad \delta \hat{\varphi}|_{\Omega_i} = \delta \varphi_i (cte) \quad (6.33)$$

Ce principe variationnel peut d'ailleurs servir de base pour démontrer l'unicité de la solution  $\hat{\varphi}$ . En effet, supposons qu'il existe deux solutions  $\hat{\varphi}^{(1)}$  et  $\hat{\varphi}^{(2)}$ . Elles vérifient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \mathbf{grad} \hat{\varphi}^{(1)} \cdot \mathbf{grad} \delta \hat{\varphi} d\Omega &= 2 \int_{\Omega_0} \delta \hat{\varphi} d\Omega \\ \int_{\Omega_0} \mathbf{grad} \hat{\varphi}^{(2)} \cdot \mathbf{grad} \delta \hat{\varphi} d\Omega &= 2 \int_{\Omega_0} \delta \hat{\varphi} d\Omega \end{aligned}$$

Soustrayant ces équations variationnelles, on obtient

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{grad} (\hat{\varphi}^{(1)} - \hat{\varphi}^{(2)}) \cdot \mathbf{grad} \delta \hat{\varphi} d\Omega = 0$$

ou, en posant  $\hat{\psi} = \hat{\varphi}^{(1)} - \hat{\varphi}^{(2)}$ ,

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{grad} \hat{\psi} \cdot \mathbf{grad} \delta \hat{\varphi} d\Omega = 0$$

Or,  $\hat{\psi}$  est une variation  $\delta\hat{\varphi}$  admissible, car elle vérifie les conditions (6.33) :

$$\begin{aligned}\hat{\psi}|_{\mathcal{C}_0} &= \hat{\varphi}^{(1)}|_{\mathcal{C}_0} - \hat{\varphi}^{(2)}|_{\mathcal{C}_0} = \mathbf{0} - \mathbf{0} = \mathbf{0} \\ \hat{\psi}|_{\Omega_i} &= \hat{\varphi}^{(1)}|_{\Omega_i} - \hat{\varphi}^{(2)}|_{\Omega_i} = \hat{\varphi}_i - \hat{\varphi}_i = \hat{\psi}_i(\text{cte})\end{aligned}$$

On a donc

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{grad}\hat{\psi} \cdot \mathbf{grad}\hat{\psi} d\Omega = 0$$

ce qui implique

$$\mathbf{grad}\hat{\psi} = 0 \text{ dans } \Omega_0$$

et, comme  $\hat{\psi}|_{\mathcal{C}_0} = 0$ , on a  $\hat{\psi} = 0$ .

## 6.9 Principe variationnel régissant le gauchissement

Rappelons que l'on a

$$\begin{aligned}\nabla^2 w &= 0 \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial n} &= \theta[n_x(y - y_T) - n_y(x - x_T)] \text{ sur } \mathcal{C}\end{aligned}$$

Il est donc naturel de poser

$$w = \theta g_T \tag{6.34}$$

ce qui définit le *gauchissement*  $g_T$ , ce qui donne

$$\begin{aligned}\nabla^2 g_T &= 0 \text{ dans } \Omega \\ n_x \left( \frac{\partial g_T}{\partial x} - y + y_T \right) + n_y \left( \frac{\partial g_T}{\partial y} + x - x_T \right) &= 0 \text{ sur } \mathcal{C}\end{aligned}$$

Il est encore équivalent d'écrire l'équation dans  $\Omega$  sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial g_T}{\partial x} - y + y_T \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial g_T}{\partial y} + x - x_T \right) = 0 \tag{6.35}$$

Pour éviter de faire apparaître explicitement  $x_T$  et  $y_T$ , définissons la fonction auxiliaire

$$g = g_T + y_T x - x_T y \tag{6.36}$$

Elle vérifie les équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial g}{\partial x} - y \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial g}{\partial y} + x \right) &= 0 \text{ dans } \Omega \\ n_x \left( \frac{\partial g}{\partial x} - y \right) + n_y \left( \frac{\partial g}{\partial y} + x \right) &= 0 \text{ sur } \mathcal{C} \end{aligned} \quad (6.37)$$

On a donc

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial g}{\partial x} - y \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial g}{\partial y} + x \right) \right] \delta g d\Omega \\ &= \int_{\mathcal{C}} \left[ n_x \left( \frac{\partial g}{\partial x} - y \right) + n_y \left( \frac{\partial g}{\partial y} + x \right) \right] \delta g ds \\ &\quad - \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x} - y \right) \frac{\partial \delta g}{\partial x} + \left( \frac{\partial g}{\partial y} + x \right) \frac{\partial \delta g}{\partial y} \right] \delta g d\Omega \end{aligned}$$

L'intégrale de contour est nulle et comme

$$\delta \left( \frac{\partial g}{\partial x} - y \right) = \frac{\partial \delta g}{\partial x}, \quad \delta \left( \frac{\partial g}{\partial y} + x \right) = \frac{\partial \delta g}{\partial y}$$

on obtient le principe

$$\delta \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x} - y \right)^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial y} + x \right)^2 \right] d\Omega \right\} = 0 \quad (6.38)$$

Ici encore, ce principe variationnel permet d'assurer l'unicité de la solution. Supposons en effet qu'il existe deux solutions  $g_1$  et  $g_2$ . Elles vérifient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial g_1}{\partial x} - y \right) \frac{\partial \delta g}{\partial x} + \left( \frac{\partial g_1}{\partial y} + x \right) \frac{\partial \delta g}{\partial y} \right] d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial g_2}{\partial x} - y \right) \frac{\partial \delta g}{\partial x} + \left( \frac{\partial g_2}{\partial y} + x \right) \frac{\partial \delta g}{\partial y} \right] d\Omega &= 0 \end{aligned}$$

Soustrayons ces deux équations et posons  $\psi = g_1 - g_2$ . Il vient

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \delta g}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \delta g}{\partial y} \right) d\Omega = 0$$

Or,  $\psi$  est une variation  $\delta g$  admissible, ce qui implique

$$\int_{\Omega} |\mathbf{grad} \psi|^2 d\Omega = 0$$



soit

$$\mathbf{grad}\psi = 0$$

ou encore,

$$\psi = cte$$

La solution est donc définie à une constante additive près. On fixe cette constante en imposant la condition

$$\int_{\Omega} g d\Omega = 0 \quad (6.39)$$

qui exprime que *le déplacement d'ensemble est nul*.

## 6.10 Centre de torsion

Le moment est venu de choisir un centre de torsion  $(x_T, y_T)$ . On exigera à cet effet que

$$\int_{\Omega} g_T x d\Omega = 0, \quad \int_{\Omega} g_T y d\Omega = 0 \quad (6.40)$$

c'est-à-dire que les rotations moyennes de la section s'annulent. Comme

$$g_T = g - y_T x + x_T y$$

on obtient les conditions

$$y_T = \frac{1}{I_x} \int_{\Omega} x g d\Omega, \quad x_T = -\frac{1}{I_y} \int_{\Omega} y g d\Omega \quad (6.41)$$

Ces coordonnées définissent le centre de torsion de Weinstein-Kappus [36, 28].

## 6.11 Méthodes de résolution

Dans ce qui suit, nous présenterons d'abord quelques solutions exactes. Malheureusement, la théorie ne s'applique facilement qu'à quelques sections simples. Pour des géométries plus compliquées, on ne peut s'en tirer sans faire d'approximations. Un outil fécond pour construire celles-ci est constitué par les deux principes variationnels ci-dessus.

En approchant la fonction de Prandtl, on obtient une théorie *sous-estimant*<sup>2</sup> la raideur de torsion, mesurée par le module

$$J = \frac{M_t}{G\theta} = 2 \int_{\Omega_0} \hat{\varphi} d\Omega$$

Au contraire, en approchant les gauchissements, on *surestime* la raideur de torsion<sup>3</sup>. Le module  $J$  se calcule alors par

$$J = \frac{M_t}{G\theta} = \int_{\Omega} \left[ x \left( \frac{\partial g}{\partial y} + x \right) - y \left( \frac{\partial g}{\partial x} - y \right) \right] d\Omega \quad (6.42)$$

Notant que, pour  $\delta g = g$ , on obtient par (6.38)

$$0 = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial g}{\partial y} \left( \frac{\partial g}{\partial y} + x \right) + \frac{\partial g}{\partial x} \left( \frac{\partial g}{\partial x} - y \right) \right] d\Omega \quad (6.43)$$

on a encore

$$J = \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial y} + x \right)^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial x} - y \right)^2 \right] d\Omega \quad (6.44)$$

On remarquera d'ailleurs que la relation(6.43) implique

$$\int_{\Omega} \left( x \frac{\partial g}{\partial y} - y \frac{\partial g}{\partial x} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 \right] d\Omega$$

si bien que

$$J = I_x + I_y - \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 \right] d\Omega$$

Ainsi, la raideur de torsion de Barré de Saint-Venant est inférieure à la raideur de torsion de Coulomb ( $I_x + I_y$ ) chaque fois que le gauchissement  $g$  diffère de zéro.

En effectuant deux calculs approchés, l'un pour la fonction de Prandtl, l'autre par le gauchissement  $g$ , on obtient deux valeurs différentes de  $J$ . Leur proximité relative permet de juger de la qualité des approximations.

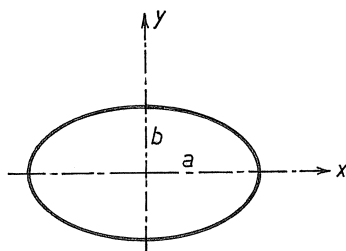


FIGURE 6.5 – Ellipse

## 6.12 Solutions exactes

### 6.12.1 Torsion d'une poutre à section elliptique

La fonction de Prandtl doit s'annuler sur le contour de l'ellipse de la figure 6.5 dont le contour a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Mais on a justement

$$\nabla^2 \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 2 \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$$

si bien que la fonction

$$\varphi(x, y) = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

vérifie l'équation

$$\nabla^2 \varphi = -2$$

et constitue donc la solution cherchée. On en déduit les contraintes

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= G\theta \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2G\theta \frac{a^2 y}{a^2 + b^2} \\ \tau_{yz} &= -G\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2G\theta \frac{b^2 x}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

---

2. La justification de cette assertion sera donnée dans le chapitre relatif aux principes variationnels en élasticité.

3. Idem.

En ce qui concerne la raideur de torsion, il faut calculer

$$J = 2 \int_{\Omega} \varphi d\Omega = 2 \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \int_{\Omega} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) d\Omega$$

Posons

$$x = a\rho \cos \theta, \quad y = b\rho \sin \theta$$

avec

$$\rho \in ]0, 1[, \quad \theta \in ]0, 2\pi[$$

Le jacobien vaut  $ab\rho$  et on obtient

$$J = 2 \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \cdot 2\pi \int_0^1 (1 - \rho^2) d\rho = \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

Vu la symétrie du profil par rapport aux axes, le centre de torsion devra se trouver à l'origine. Le gauchissement  $g$  vérifie les équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + y = -\frac{2a^2 y}{a^2 + b^2} + y = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} y \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - x = -\frac{2b^2 x}{a^2 + b^2} - x = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} x \end{aligned}$$

ce qui donne, en tenant compte de la condition  $\int_{\Omega} g d\Omega = 0$ ,

$$g = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} xy$$

### 6.12.2 Torsion d'une poutre à section rectangulaire

Supposons que, dans la section représentée en figure 6.6, on ait  $b \leq a$  et définissons la coordonnée auxiliaire

$$\eta = y + \frac{b}{2}$$

On cherche alors une solution par la méthode des séries simples de Lévy, qui consiste à poser

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \sin \frac{n\pi\eta}{b}$$

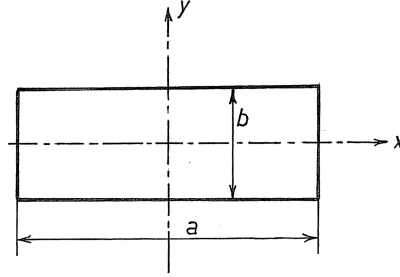


FIGURE 6.6 – Rectangle

ce qui permet de vérifier dès le départ les conditions de nullité de  $\varphi$  en  $y = \pm b/2$ . On a immédiatement

$$\nabla^2 \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n'' - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} A_n \right) \sin \frac{n\pi\eta}{b}$$

Pour résoudre l'équation  $\nabla^2 \varphi = -2$ , il convient de développer la fonction unité en série de sinus. En raison de l'orthogonalité des sinus,

$$\int_0^b \sin \frac{m\pi\eta}{b} \sin \frac{n\pi\eta}{b} d\eta = \frac{b}{2} \delta_{mn}$$

on obtient, pour

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi\eta}{b}$$

les relations

$$\frac{b}{2} \alpha_n = \int_0^b \sin \frac{n\pi\eta}{b} d\eta = -\frac{b}{n\pi} \left[ \cos \frac{n\pi\eta}{b} \right]_0^b = \frac{b}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

ce qui donne

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

si bien que

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\eta}{b}$$

L'équation à résoudre se développe donc en

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \left( A_n'' - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} A_n + \frac{8}{n\pi} \right) \sin \frac{n\pi\eta}{b} + \sum_{\substack{n=2 \\ \text{pair}}}^{\infty} \left( A_n'' - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} A_n \right) \sin \frac{n\pi\eta}{b} = 0$$

Pour  $n$  pair, on obtient

$$A_n'' - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} A_n = 0$$

ce qui donne

$$A_n = B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} + C_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b}$$

Les conditions  $A_n(\pm a/2) = 0$  mènent alors à  $B_n = C_n = 0$ .

Pour  $n$  impair, l'équation s'écrit

$$A_n'' - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} A_n = -\frac{8}{n\pi}$$

et admet pour solution particulière

$$A_n = \frac{8b^2}{n^3 \pi^3}$$

d'où la solution générale

$$A_n = B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} + C_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} + \frac{8b^2}{n^3 \pi^3}$$

Les conditions de nullité aux extrémités  $x = \pm a/2$  s'écrivent

$$B_n \operatorname{ch} \left( \pm \frac{n\pi a}{2b} \right) + C_n \operatorname{sh} \left( \pm \frac{n\pi a}{2b} \right) + \frac{8b^2}{n^3 \pi^3} = 0$$

ce qui implique  $C_n = 0$  et

$$B_n = -\frac{8b^2}{n^3 \pi^3} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}}$$

Il vient donc

$$A_n = \frac{8b^2}{n^3 \pi^3} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \right)$$

et la solution finale s'écrit

$$\varphi = \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \right) \sin \frac{n\pi \eta}{b}$$

A ce stade, il est intéressant de remarquer que la série

$$-\frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi \eta}{b}$$

est la primitive seconde de la série représentant la fonction  $(-2)$ , nulle en  $\eta = 0$  et  $\eta = b$ . Elle est donc égale à

$$\eta(\eta - b) = y^2 - \frac{b^2}{4}$$

ce qui permet d'écrire  $\varphi$  sous la forme

$$\varphi = \left( \frac{b^2}{4} - y^2 \right) - \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \sin \frac{n\pi(y + b/2)}{b}$$

La série restante se présente alors comme une correction aux extrémités des deux premiers termes qui constituent la solution-limite pour  $b/a \rightarrow \infty$ .

Une simple dérivation conduit à l'expression des contraintes :

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{xz}}{G\theta} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2y - \frac{8b}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \cos \frac{n\pi(y + b/2)}{b} \\ \frac{\tau_{yz}}{G\theta} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{8b}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \sin \frac{n\pi(y + b/2)}{b} \end{aligned}$$

La valeur maximale de  $\tau_{xz}$  est obtenue en  $x = 0$ ,  $y = \pm b/2$  et vaut

$$|\tau_{xz}|_{max} = G\theta \left( b + \frac{8b}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \right)$$

Calculons à présent la raideur de torsion. On a

$$\begin{aligned}
 J &= 2 \int_{\Omega} \varphi d\Omega \\
 &= \frac{ab^3}{2} - 2a \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy \\
 &\quad - \frac{16b^2}{\pi^3} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^3} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} dx \int_{-b/2}^{b/2} \sin \frac{n\pi(y+b/2)}{b} dy \\
 &= \frac{ab^3}{2} - \frac{ab^3}{6} - \frac{16b^2}{\pi^3} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{2b}{n\pi} \operatorname{th} \frac{n\pi a}{2b} \frac{b}{n\pi} \cdot 2
 \end{aligned}$$

soit finalement

$$J = \frac{ab^3}{3} \left( 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{b}{a} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \frac{n\pi a}{2b} \right)$$

Dans cette expression, le facteur entre parenthèses constitue la correction par rapport à la valeur  $ab^3/3$  qui est la limite du module de torsion pour  $a/b \rightarrow \infty$ .

On peut approcher la valeur ci-dessus par une expression plus simple que l'on obtient de la manière suivante. A partir de  $n = 3$ , on a nécessairement (puisque  $a \geq b$ )

$$\frac{n\pi a}{2b} \geq \frac{3\pi}{2} = 4,712$$

Pour cette valeur de l'argument, la tangente hyperbolique vaut 0,99984 et diffère donc de l'unité de moins de deux dix-millièmes. On a donc

$$J \approx \frac{ab^3}{3} \left[ 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{b}{a} \left( \operatorname{th} \frac{\pi a}{2b} + \sum_{\substack{n=3 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^5} \right) \right]$$

Il suffit alors de calculer, à partir des résultats bien connus relatifs aux séries de Riemann [1]

$$\sum_{\substack{n=3 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^5} = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^5} - 1 = 1,00425376279513961613\dots - 1 = 4,253763\dots 10^{-3}$$



ce qui donne la formule

$$J \approx \frac{ab^3}{3} \left[ 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{b}{a} \left( \operatorname{th} \frac{\pi a}{2b} + 4,524 \cdot 10^{-3} \right) \right]$$

qui a au moins le mérite de ne plus contenir de série à calculer.

Venons-en au calcul du gauchissement. Ici encore, la symétrie implique que le centre de torsion coïncide avec le centre de gravité. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + y \\ &= -y - \frac{8b}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \cos \frac{n\pi(y+b/2)}{b} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - x \\ &= -x + \frac{8b}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \sin \frac{n\pi(y+b/2)}{b} \end{aligned}$$

d'où

$$g = -xy - \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b}} \cos \frac{n\pi(y+b/2)}{b}$$

Il se décompose en un terme relatif aux sections longues – le terme  $(-xy)$  – et un effet de bord à décroissance rapide si  $a/b$  est grand.

### 6.12.3 Trou circulaire axial très petit dans un arbre cylindrique

La section est représentée en figure 6.7. Le trou circulaire est supposé très petit, c'est-à-dire que la distance  $r$  du centre du trou au contour de l'arbre vérifie

$$\left( \frac{a}{r} \right)^2 = \varepsilon \ll 1$$

pour tout  $\beta$ . L'équation du contour est

$$r^2 + b^2 - 2br \cos \beta = R^2$$

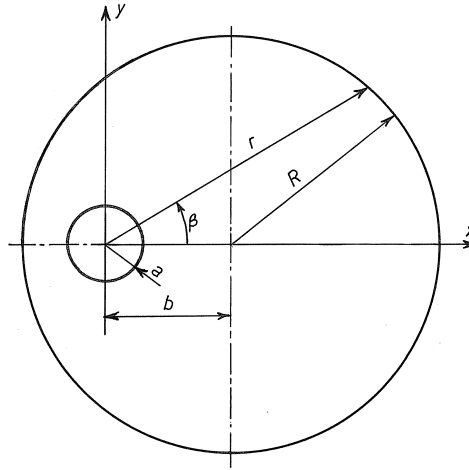


FIGURE 6.7 – Arbre avec trou

Par ailleurs, la fonction

$$\varphi_0 = -\frac{1}{2}r^2 + br \cos \beta + \frac{R^2 - b^2}{2}$$

est une solution particulière de l'équation  $\nabla^2 \varphi = -2$ , car il en est ainsi de  $(-r^2/2)$ , et les autres termes sont de la forme  $\Re F(z)$  avec

$$F(z) = bz + \frac{R^2 - b^2}{2}$$

et donc harmoniques. Visiblement, la fonction  $\varphi_0$  s'annule sur le contour extérieur. Par contre, sur le cercle de rayon  $a$ , elle vaut

$$\varphi_0 = -\frac{a^2}{2} + ab \cos \beta + \frac{R^2 - b^2}{2}$$

ce qui n'est pas constant. Mais en y ajoutant la fonction

$$\varphi_1 = -\Re \left( \frac{a^2 b}{z} \right) = -\frac{a^2 b}{r} \cos \beta$$

on obtient une fonction constante sur le cercle de rayon  $a$ , à savoir

$$\varphi = -\frac{r^2}{2} + b \cos \beta \left( r - \frac{a^2}{r} \right) + \frac{R^2 - b^2}{2}$$

La valeur de cette fonction sur le contour intérieur est

$$-\frac{a^2}{2} + \frac{R^2 - b^2}{2} = \mathcal{O}(R^2)$$

tandis que sur le contour extérieur, sa valeur absolue est

$$\left| -\frac{a^2 b \cos \beta}{r} \right| \leq \frac{a^2}{r^2} b r = \mathcal{O}(\varepsilon R^2)$$

très petite devant la précédente, et tendant vers zéro avec  $\varepsilon$ .

Les contraintes valent alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{G\theta} \tau_{rz} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = -b \sin \beta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \\ \frac{1}{G\theta} \tau_{\beta z} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = r - b \cos \beta \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \end{aligned}$$

Sur le contour intérieur, on a

$$\tau_{\beta z} = G\theta(a - 2b \cos \beta)$$

et cette contrainte atteint pour  $\beta = \pi$  son maximum

$$\tau_{max} = G\theta(2b + a)$$

Pour  $a \rightarrow 0$ , le coefficient de concentration de contrainte vaut donc

$$\alpha_k = \frac{\tau_{max}}{G\theta b} = 2$$

Sur le contour extérieur, on a

$$\begin{aligned} \tau_{rz}^2 + \tau_{\beta z}^2 &= (G\theta)^2 \left[ r^2 - 2br \cos \beta \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + b^2 \cos^2 \beta \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + b^2 \sin^2 \beta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \right] \end{aligned}$$

et, pour  $a \rightarrow 0$ ,

$$\tau^2 = (G\theta)^2 [r^2 - 2br \cos \beta + b^2] = (G\theta)^2 R^2$$

Il n'y a donc pas de supplément de contrainte sur le contour. En conclusion, l'influence du trou sur la résistance ne se fait sentir que si

$$2G\theta b > G\theta R$$

c'est-à-dire si

$$b > \frac{R}{2}$$

### 6.13 Solutions approchées (fonction de Prandtl)

On peut obtenir de nombreuses solutions approchées en torsion en considérant des fonctions d'essai  $\hat{\varphi}$  nulles sur  $\mathcal{C}_0$  et constantes sur les  $\Omega_i$ , dépendant de quelques paramètres :

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(x, y; \alpha_1, \dots, \alpha_k)$$

On détermine alors les paramètres de manière que la fonctionnelle

$$\mathcal{B}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \int_{\Omega_0} \left[ \frac{1}{2} |\mathbf{grad} \hat{\varphi}|^2 - 2\hat{\varphi} \right] d\Omega_0$$

soit minimale, ce qui conduit aux  $k$  équations

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \alpha_j} = 0$$

Pour déterminer les  $\alpha_j$ . C'est la *méthode de Rayleigh-Ritz*. Les  $\alpha_j$  étant obtenus, on peut déterminer le champ de cisaillement par

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz}) = \mathbf{grad} \hat{\varphi} \times \mathbf{e}_z$$

et la constante  $J$  par

$$J = \int_{\Omega_0} \hat{\varphi} d\Omega_0$$

On notera que dans le cas d'une solution approchée, la constante  $J$  est toujours *sous-estimée* (d'autant moins que la solution est plus proche de la réalité).

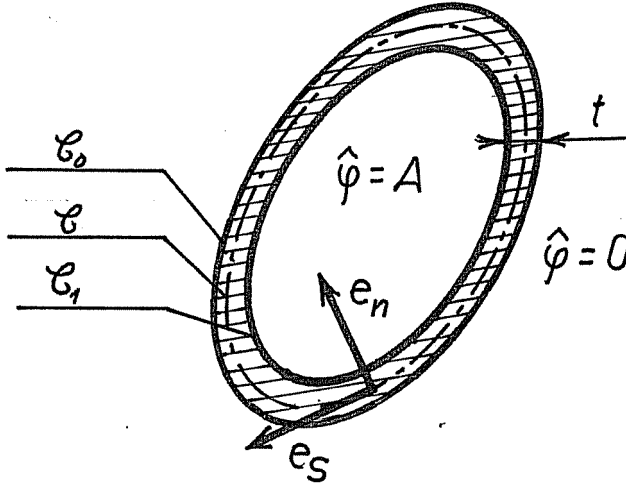


FIGURE 6.8 – Théorie de Bredt

### 6.13.1 Théorie de Bredt

Pour traiter les caissons à parois minces à une cellule (*fig.* 6.8), Bredt [7] a proposé la solution approchée suivante. On peut admettre que la variation de  $\hat{\varphi}$ , entre le contour  $\mathcal{C}_0$  où cette fonction est nulle et le contour  $\mathcal{C}_1$  où elle prend une valeur constante  $A$ , est linéaire. On a alors

$$\mathbf{grad}\hat{\varphi} = \frac{A}{t}\mathbf{e}_n$$

$\mathbf{e}_n$  étant le vecteur unitaire normal à la courbe moyenne  $\mathcal{C}$  de la paroi, pointant vers l'intérieur. On en déduit immédiatement

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_0} |\mathbf{grad}\hat{\varphi}|^2 d\Omega_0 = \frac{A^2}{2} \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{t^2} t ds = \frac{A^2}{2} \int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{t}$$

et

$$2 \int_{\Omega_0} \hat{\varphi} d\Omega_0 = 2A\Omega_1 + 2 \int_{\mathcal{C}} \frac{A}{2} t ds = 2AS$$

en notant  $S$  la surface contenue dans la courbe  $C$ . Il vient finalement

$$\mathcal{B}(A) = \frac{1}{2}A^2 \int_C \frac{ds}{t} - 2AS$$

Le minimum est obtenu pour

$$A = \frac{2S}{\int_C \frac{ds}{t}}$$

On en déduit

$$J = 2AS = \frac{4S^2}{\int_C \frac{ds}{t}}$$

résultat connu sous le nom de *deuxième formule de Bredt*. Par ailleurs, la contrainte de cisaillement, toujours tangentielle, vaut

$$\begin{aligned} \tau &= G\theta \frac{A}{t} \\ &= G\theta \frac{2S}{\int_C \frac{ds}{t}} \frac{1}{t} \\ &= G\theta J \frac{1}{2St} \\ &= \frac{M_t}{2St} \end{aligned}$$

C'est la *première formule de Bredt*.

### 6.13.2 Caissons multicellulaires

La même méthode permet de traiter avec autant de facilité le problème de la torsion d'un caisson multicellulaire. Illustrons la méthode sur le caisson à trois cellules de la figure 6.9. Le cisaillement dans la courbe  $C_{10}$  vaudra  $G\theta\varphi_1/t$ , celui qui règne sur  $C_{12}$  vaudra  $G\theta(\varphi_1 - \varphi_2)/t$ , etc. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} |\mathbf{grad}\hat{\varphi}|^2 d\Omega_0 &= \frac{\varphi_1^2}{2} \int_{C_{10}} \frac{ds}{t} + \frac{\varphi_2^2}{2} \int_{C_{20}} \frac{ds}{t} + \frac{\varphi_3^2}{2} \int_{C_{30}} \frac{ds}{t} \\ &\quad + \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} \int_{C_{12}} \frac{ds}{t} + \frac{(\varphi_2 - \varphi_3)^2}{2} \int_{C_{23}} \frac{ds}{t} \end{aligned}$$

et

$$2 \int_{\Omega_0} \hat{\varphi} d\Omega_0 = 2\varphi_1 S_1 + 2\varphi_2 S_2 + 2\varphi_3 S_3$$

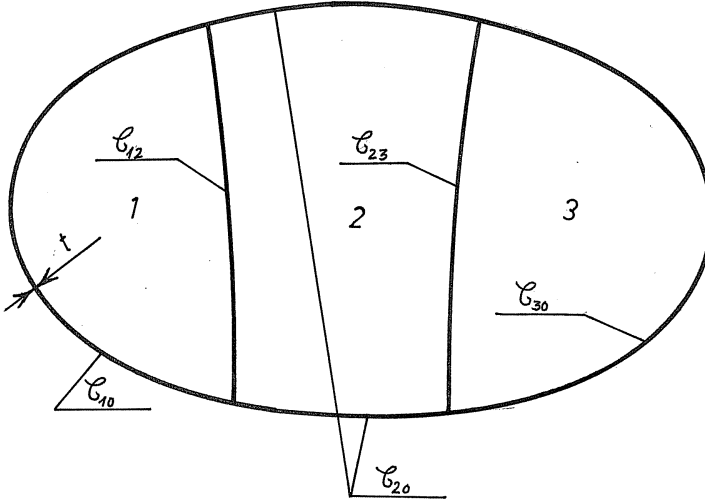


FIGURE 6.9 – Caisson à trois cellules

$S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  étant les surfaces arrêtées à mi-paroi. La minimisation de la différence  $\mathcal{B}$  de ces deux expressions mène aux trois équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \varphi_1} &= \left( \int_{C_{10}} \frac{ds}{t} + \int_{C_{12}} \frac{ds}{t} \right) \varphi_1 - \left( \int_{C_{12}} \frac{ds}{t} \right) \varphi_2 - 2S_1 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \varphi_2} &= - \left( \int_{C_{12}} \frac{ds}{t} \right) \varphi_1 + \left( \int_{C_{20}} \frac{ds}{t} + \int_{C_{12}} \frac{ds}{t} + \int_{C_{23}} \frac{ds}{t} \right) \varphi_2 \\ &\quad - \left( \int_{C_{23}} \frac{ds}{t} \right) \varphi_3 - 2S_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \varphi_3} &= - \left( \int_{C_{23}} \frac{ds}{t} \right) \varphi_2 + \left( \int_{C_{30}} \frac{ds}{t} + \int_{C_{23}} \frac{ds}{t} \right) \varphi_3 - 2S_3 = 0 \end{aligned}$$

permettant de déterminer aisément  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$ . Ceux-ci connus, on a simplement

$$J = 2(\varphi_1 S_1 + \varphi_2 S_2 + \varphi_3 S_3)$$

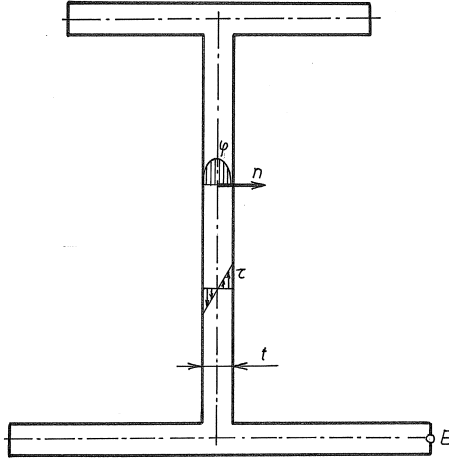


FIGURE 6.10 – Poutre à parois minces ouverte

### 6.13.3 Poutres à parois minces ouvertes

Dans le cas de poutre à parois minces ouvertes comme celle de la figure 6.10, la fonction de Prandtl doit s'annuler sur tout le contour. On écrira donc

$$\varphi = A \left( 1 - \frac{4n^2}{t^2} \right) \text{ avec } A = cte$$

En principe, il faudrait encore tenir compte de la nullité de  $\varphi$  aux extrémités comme le point  $B$  de la figure. Cependant, cet effet de bord se fait sur une longueur très faible, de l'ordre de l'épaisseur  $t$ , et nous le négligerons à titre d'*approximation supplémentaire*<sup>4</sup>. Le champ de cisaillement se déduit par dérivation :

$$|\mathbf{grad}\varphi| = \frac{8An}{t^2}$$

Il est linéaire sur l'épaisseur. Calculons les deux termes de la fonctionnelle  $\mathcal{B}$  à minimiser :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{grad}\varphi|^2 d\Omega = 32A^2 \int_C \frac{t^3}{12t^4} ds = \frac{8}{3} A^2 \int_C \frac{ds}{t}$$

4. Strictement parlant, il s'agit d'une violation des principes de la méthode de Rayleigh-Ritz.



et

$$2 \int_{\Omega} \varphi d\Omega = 2A \int_{\mathcal{C}} \frac{2}{3} t ds = \frac{4}{3} A \int_{\mathcal{C}} t ds$$

ce qui donne

$$\mathcal{B}(A) = \frac{8}{3} A^2 \int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{t} - \frac{4}{3} A \int_{\mathcal{C}} t ds$$

Le minimum de cette fonction de A s'obtient pour

$$0 = \frac{d\mathcal{B}}{dA} = \frac{16}{3} A \int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{t} - \frac{4}{3} \int_{\mathcal{C}} t ds$$

ce qui donne

$$A = \frac{1}{4} \frac{\int_{\mathcal{C}} t ds}{\int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{t}}$$

On obtient donc

$$J = \frac{4}{3} A \int_{\mathcal{C}} t ds = \frac{1}{3} \frac{(\int_{\mathcal{C}} t ds)^2}{\int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{t}}$$

et

$$\tau_{max} = G\theta |\mathbf{grad}\varphi|_{max} = G\theta \frac{4A}{t_{min}} = \frac{G\theta}{t_{min}} \frac{\int_{\mathcal{C}} t ds}{\int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{t}}$$

ou, en termes du moment de torsion,

$$\tau_{max} = \frac{3M_t}{t_{min} \int_{\mathcal{C}} t ds}$$

Pour une épaisseur  $t$  constante, on a simplement

$$J = \frac{1}{3} G h t^3$$

avec

$$h = \int_{\mathcal{C}} ds$$

et

$$\tau = G\theta t = \frac{3M_t}{h t^2}$$

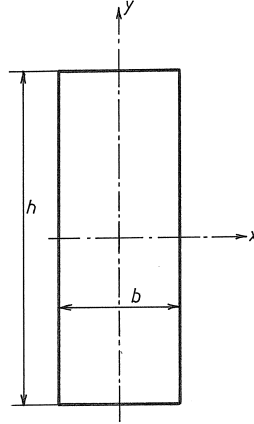


FIGURE 6.11 – Section rectangulaire

### 6.13.4 Solution approchée pour les sections rectangulaires

Pour la section rectangulaire représentée en figure 6.11, on suppose  $b < h$ . On cherche une solution de la forme

$$\varphi(x, y) = \left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right) f(y)$$

$f(y)$  étant une fonction à déterminer, avec la condition  $f(\pm h/2) = 0$ . On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{8x}{b^2} f(y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right) f'(y) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{grad} \varphi|^2 d\Omega &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} dy \int_{-b/2}^{b/2} \left[ \frac{64x^2}{b^4} f^2 + \left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right)^2 f'^2 \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{16}{3b} f^2 + \frac{8}{15} b f'^2 \right) dy \end{aligned}$$

On a d'autre part

$$2 \int_{\Omega} \varphi d\Omega = 2 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{2}{3} b f dy$$

La condition d'extremum mène à l'équation

$$-\frac{8}{15} b f'' + \frac{16}{3b} f - \frac{4}{3} b = 0$$

soit

$$f'' - \frac{10}{b^2} f = -\frac{5}{2}$$

La solution générale de l'équation homogène s'écrit

$$f_0 = A \operatorname{sh} \sqrt{\frac{10}{b}} \left( y - \frac{h}{2} \right) + B \operatorname{sh} \sqrt{\frac{10}{b}} \left( y + \frac{h}{2} \right)$$

et une solution particulière de l'équation complète est visiblement donnée par

$$f_1 = \frac{b^2}{4}$$

ce qui donne au total

$$f = f_0 + f_1 = A \operatorname{sh} \sqrt{\frac{10}{b}} \left( y - \frac{h}{2} \right) + B \operatorname{sh} \sqrt{\frac{10}{b}} \left( y + \frac{h}{2} \right) + \frac{b^2}{4}$$

Les conditions aux limites sont

$$\text{en } y = h/2 : B \operatorname{sh} \sqrt{\frac{10}{b^2}} h = -\frac{b^2}{4}$$

$$\text{en } y = -h/2 : -A \operatorname{sh} \sqrt{\frac{10}{b^2}} h = -\frac{b^2}{4}$$

ce qui donne, en notant, pour la concision,  $\beta = \frac{\sqrt{10}}{b}$ ,

$$f = \frac{b^2}{4} \left[ 1 + \frac{\operatorname{sh} \beta \left( y - \frac{h}{2} \right)}{\operatorname{sh} \beta h} - \frac{\operatorname{sh} \beta \left( y + \frac{h}{2} \right)}{\operatorname{sh} \beta h} \right]$$

On notera que

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \beta \left( y - \frac{h}{2} \right) - \operatorname{sh} \beta \left( y + \frac{h}{2} \right) &= \operatorname{sh} \beta y \operatorname{ch} \beta \frac{h}{2} - \operatorname{sh} \beta \frac{h}{2} \operatorname{ch} \beta y \\ &\quad - \operatorname{sh} \beta y \operatorname{ch} \beta \frac{h}{2} - \operatorname{sh} \beta \frac{h}{2} \operatorname{ch} \beta y \\ &= -2 \operatorname{sh} \beta \frac{h}{2} \operatorname{ch} \beta y \end{aligned}$$

et que

$$\operatorname{sh} \beta h = 2 \operatorname{sh} \beta \frac{h}{2} \operatorname{ch} \beta \frac{h}{2}$$

ce qui donne finalement

$$f = \frac{b^2}{4} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \beta y}{\operatorname{ch} \beta \frac{h}{2}} \right)$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} J &= \frac{b^3}{3} \int_{-h/2}^{h/2} f dy \\ &= \frac{b^3}{3} \left( h - \frac{2 \operatorname{sh} \beta \frac{h}{2}}{\beta \operatorname{ch} \beta \frac{h}{2}} \right) \\ &= \frac{b^3}{3} \left( h - \frac{2}{\beta} \operatorname{th} \beta \frac{h}{2} \right) \end{aligned}$$

soit, en réintroduisant la valeur de  $\beta$ ,

$$J = \frac{1}{3} h b^3 \left( 1 - \frac{b}{h\sqrt{2,5}} \operatorname{th} \frac{h\sqrt{2,5}}{b} \right)$$

On a par ailleurs

$$\tau_{max} = \frac{4}{b} f(0) G \theta = G \theta b \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{h\sqrt{2,5}}{b}} \right)$$

Cette solution approchée est très proche de la réalité, comme le montre le tableau suivant :

$h/b$		1	1,5	2	3	4	$\infty$
$J/(hb^3)$	approché	0,140	0,195	0,228	0,263	0,281	0,333
	exact	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,333
$\tau_{max}/(G\theta b)$	approché	0,605	0,815	0,915	0,983	0,996	1,000
	exact	0,675	0,852	0,928	0,977	0,990	1,000

## 6.14 Solutions approchées (gauchissement)

La fonctionnelle à minimiser est ici

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x} - y \right)^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial y} + x \right)^2 \right] d\Omega$$

la fonction  $g$  n'étant astreinte à aucune condition aux limites à priori. Le résultat de la minimisation fournit la fonction  $g$  à une constante additive près, que l'on fixe par la condition

$$\int_{\Omega} g d\Omega = 0$$

On peut alors obtenir le centre de torsion par les relations

$$x_T = -\frac{1}{I_y} \int_{\Omega} g y d\Omega, \quad y_T = \frac{1}{I_x} \int_{\Omega} g x d\Omega$$

La raideur de torsion est alors donnée par

$$J = I_p - \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 \right] = 2\mathcal{A}$$

et les contraintes valent

$$\tau_{xz} = G\theta \left( \frac{\partial g}{\partial x} - y \right), \quad \tau_{yz} = G\theta \left( \frac{\partial g}{\partial y} + x \right)$$

### 6.14.1 Solution élémentaire pour les sections massives

La forme la plus simple que l'on puisse imaginer pour la fonction  $g$  est

$$g = Axy$$

Cette fonction a bien son intégrale nulle. On obtient

$$\mathcal{A} = \int_{\Omega} [(A-1)^2 y^2 + (A+1)^2 x^2] d\Omega = (A-1)^2 I_y + (A+1)^2 I_x$$

Minimisons par rapport à la constante  $A$  :

$$0 = \frac{d\mathcal{A}}{dA} = 2(A-1)I_y + 2(A+1)I_x$$

soit

$$A = \frac{I_y - I_x}{I_p}$$

Pour la raideur de torsion, on obtient

$$J = 2\mathcal{A} = \left( \frac{I_y - I_x - I_x - I_y}{I_p} \right)^2 I_y + \left( \frac{I_y - I_x + I_x + I_y}{I_p} \right)^2 I_x$$

soit

$$J = \frac{4I_x I_y}{I_p}$$

Les contraintes de cisaillement valent

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= G\theta(A-1)y = -2G\theta \frac{I_x}{I_p} y \\ \tau_{yz} &= G\theta(A+1)y = 2G\theta \frac{I_y}{I_p} x\end{aligned}$$

Enfin,

$$|\tau| = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = 2G\theta \frac{\sqrt{I_x^2 y^2 + I_y^2 x^2}}{I_p}$$

$r$  étant la distance à l'axe.

Cette théorie, exacte pour une section elliptique, représente la correction la plus élémentaire que l'on puisse apporter à celle de Coulomb. Elle donne souvent une première approximation raisonnable. Examinons par exemple le cas des sections rectangulaires. On a

$$I_x = \frac{hb^3}{12}, \quad I_y = \frac{bh^3}{12}$$

Nous poserons, pour fixer les idées,  $h \geq b$ . On a donc

$$I_p = \frac{bh^3}{12} \left(1 + \frac{b^2}{h^2}\right)$$

et

$$J = \frac{1}{3}hb^3 \frac{1}{1 + \frac{b^2}{h^2}}$$

Quant aux contraintes, elles valent, selon cette théorie,

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= -2G\theta \frac{b^2}{h^2} \frac{y}{1 + \frac{b^2}{h^2}} \\ \tau_{yz} &= 2G\theta \frac{x}{1 + \frac{b^2}{h^2}}\end{aligned}$$

Le maximum de leur résultante a lieu pour  $x = b/2$ ,  $y = h/2$  et vaut

$$\tau_{max} = G\theta b \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{h^2}}}$$

En comparaison, la théorie de Coulomb donne la valeur

$$\tau_{max} = G\theta\sqrt{b^2 + h^2} = G\theta b\sqrt{1 + \frac{h^2}{b^2}}$$

On peut donc établir le tableau suivant :

$h/b$		1	1,5	2	3	4	$\infty$
$J/(hb^3)$	approché	0,167	0,231	0,267	0,300	0,314	0,333
	exact	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,333
	Coulomb	0,167	0,271	0,417	0,833	1,42	$\infty$
$\tau_{max}/(G\theta b)$	approché	0,707	0,832	0,894	0,949	0,970	1,000
	exact	0,675	0,852	0,928	0,977	0,990	1,000
	Coulomb	1,000	1,803	2,236	3,162	4,123	$\infty$

On remarquera cependant que les contraintes maximales sont mal positionnées.

### 6.14.2 Sections rectangulaires

On peut également approcher les sections rectangulaires en prenant un gauchissement de la forme

$$g(x, y) = yf(x)$$

en supposant que le grand côté  $h$  est dirigé suivant l'axe des  $x$ . L'autre côté a pour longueur  $b$ . On a alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} - y &= (f'(x) - 1)y \\ \frac{\partial g}{\partial y} + x &= f(x) + x\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{b^3}{12} (f' - 1)^2 + b(f + x)^2 \right] dx$$

Variant  $f$ , on obtient l'équation

$$-\frac{b^3}{12} f''' + bf + bx = 0$$

soit

$$f''' - \frac{12}{b^2} f = \frac{12}{b} x$$

et les conditions naturelles d'extrémité

$$\frac{b^3}{12}(f' - 1) = 0 \text{ en } x = \pm h/2$$

Une solution partielle de l'équation différentielle est

$$f = -x$$

Comme la solution générale de l'équation homogène associée est

$$f = A \operatorname{ch} \beta x + B \operatorname{sh} \beta x$$

avec

$$\beta = \frac{\sqrt{12}}{b}$$

on obtient comme solution générale de l'équation complète

$$f = -x + A \operatorname{ch} \beta x + B \operatorname{sh} \beta x$$

Les conditions d'extrémité sont

$$\begin{aligned} f' \left( \frac{h}{2} \right) &= -1 + \beta A \operatorname{sh} \beta \frac{h}{2} + \beta B \operatorname{ch} \beta \frac{h}{2} = 1 \\ f' \left( -\frac{h}{2} \right) &= -1 - \beta A \operatorname{sh} \beta \frac{h}{2} + \beta B \operatorname{ch} \beta \frac{h}{2} = 1 \end{aligned}$$

On en déduit aisément  $A = 0$  et

$$B = \frac{2}{\beta \operatorname{ch} \beta \frac{h}{2}}$$

ce qui donne finalement

$$f = -x + 2 \frac{\operatorname{sh} \beta x}{\beta \operatorname{ch} \beta \frac{h}{2}}$$

Pour effectuer le calcul de  $J$ , notons que

$$\begin{aligned} J &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{b^3}{12}(f' - 1)f + b(f + x)f \right] dx \\ &\quad + \int_{-h/2}^{h/2} \left[ -\frac{b^3}{12}(f' - 1) + b(f + x)x \right] dx \end{aligned}$$



La première de ces intégrales est nulle, comme on s'en rend compte en posant  $\delta f = f$  dans la variation première de  $\mathcal{A}$ . Il suffit donc de calculer

$$\begin{aligned} - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{b^3}{12} (f' - 1) dx &= - \frac{b^3}{12} \int_{-h/2}^{h/2} 2 \left( \frac{\operatorname{ch} \beta x}{\operatorname{ch} \beta \frac{h}{2}} - 1 \right) dx \\ &= \frac{b^3}{12} \left( 2h - \frac{4}{\beta} \operatorname{th} \beta \frac{h}{2} \right) \\ &= \frac{hb^3}{6} - \frac{b^3}{3\beta} \operatorname{th} \beta \frac{h}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} bx(f+x) dx &= \frac{2b}{\beta \operatorname{ch} \beta \frac{h}{2}} \int_{-h/2}^{h/2} x \operatorname{sh} \beta x dx \\ &= \frac{2b}{\beta \operatorname{ch} \beta \frac{h}{2}} \left\{ \left[ \frac{x \operatorname{ch} \beta x}{\beta} \right]_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\operatorname{ch} \beta x}{\beta} dx \right\} \\ &= \frac{2b}{\beta^2 \operatorname{ch} \beta \frac{h}{2}} \left[ 2 \frac{h}{2} \operatorname{ch} \beta \frac{h}{2} - \frac{2}{\beta} \operatorname{sh} \beta \frac{h}{2} \right] \\ &= \frac{hb^3}{6} - \frac{b^3}{3\beta} \operatorname{th} \beta \frac{h}{2} \end{aligned}$$

Au total, il vient

$$J = \frac{hb^3}{3} - \frac{2b^3}{3\beta} \operatorname{th} \beta \frac{h}{2} = \frac{hb^3}{3} \left( 1 - \frac{b}{h\sqrt{3}} \operatorname{th} \frac{h\sqrt{3}}{b} \right)$$

Il est intéressant de noter que ce résultat est très proche de celui de la section 6.13.4. La seule différence est le facteur  $\sqrt{3} = 1,732$  au lieu de  $\sqrt{2,5} = 1,581$ . La présente théorie est un petit peu plus raide que celle de la section 6.13.4 :

$h/b$		1	1,5	2	3	4	$\infty$
$J/(hb^3)$	$\hat{\varphi}$	0,140	0,195	0,228	0,263	0,280	0,333
	exact	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,333
	$g$	0,153	0,207	0,237	0,269	0,285	0,333

## 6.15 Exercices

**Exercice 27** Étudier la torsion d'une barre dont la section est un triangle équilatéral (problème de Barré de Saint-Venant).

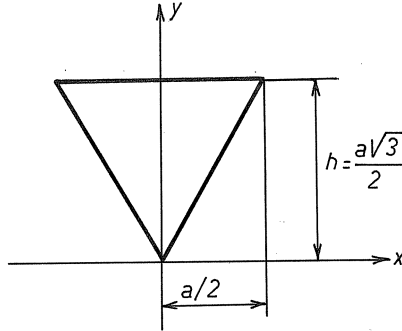


FIGURE 6.12 – Triangle équilatéral

*Suggestion* - La fonction de Prandtl est le produit des équations des trois côtés, à un facteur constant près.

*Solution* - Dans le système d'axes de la figure 6.12, les équations des trois côtés sont

$$y = x\sqrt{3}, \quad y = -x\sqrt{3}, \quad y = h$$

Essayons une fonction de Prandtl de la forme

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= K (y - x\sqrt{3}) (y + x\sqrt{3}) (y - h) \\ &= K (y^2 - 3x^2) (y - h) \\ &= K (y^3 - hy^2 - 3x^2y + 3hx^2) \end{aligned}$$

On obtient successivement

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= K(-6xy + 6hx) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= K(-6y + 6h) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= K(3y^2 - 2hy - 3x^2) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= K(6y - 2h) \end{aligned}$$

si bien que

$$\nabla^2 \varphi = K(-6y + 6h + 6y - 2h) = 4Kh = -2$$

à condition de poser

$$K = -\frac{1}{2h} = -\frac{1}{a\sqrt{3}}$$

Le résultat est donc

$$\varphi = -\frac{1}{2h}(y^3 - hy^2 - 3x^2y + 3hx^2)$$

Un examen des lignes de niveau de la fonction  $\varphi$  indique que la contrainte tangentielle est maximale au milieu des côtés. On a

$$\tau_{xz} = G\theta \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{2h}(3y^2 - 2hy - 3x^2)$$

et en  $x = 0$ ,  $y = h$ ,

$$\tau_{xz} = -\frac{G\theta}{2h}(3h^2 - 2h^2) = -\frac{G\theta h}{2}$$

soit

$$\tau_{max} = \frac{G\theta h}{2} = \frac{G\theta a\sqrt{3}}{4} = 0,4330G\theta a$$

On calcule  $J$  par

$$\begin{aligned} J &= 2 \int_{\Omega} \varphi d\Omega \\ &= -\frac{1}{h} \int_0^h dy \int_{-y/\sqrt{3}}^{y/\sqrt{3}} (y^3 - hy^2 - 3x^2y + 3hx^2) dx \\ &= \frac{h^4}{15\sqrt{3}} \end{aligned}$$

soit encore

$$J = \frac{\sqrt{3}}{80} a^4$$

On a enfin

$$\frac{\tau_{max}}{M_t} = \frac{20}{a^3}$$

**Exercice 28** *Problème de Weber (1921)[94] - Étudier la torsion d'une barre ronde de diamètre  $b$  comportant une rainure semi-circulaire centrée sur la circonférence (fig. 6.13).*

- Chercher la fonction de Prandtl.
- Rechercher la tension maximale.
- Calculer le coefficient de concentration de contrainte

$$\alpha_k = \frac{\tau_{max}}{G\theta b/2}$$

et sa limite pour  $a/b \rightarrow 0$ .

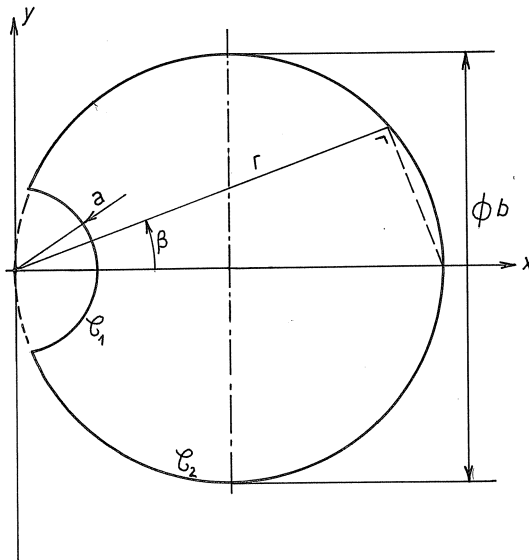


FIGURE 6.13 – Barre rainurée

*Suggestion pour le point a :*

- Équation de  $\mathcal{C}_1$  :  $r^2 - a^2 = 0$
- Équation de  $\mathcal{C}_2$  :  $r - a \cos \beta = 0$

Multiplier ces deux équations, diviser par  $r$ , multiplier le tout par une constante à déterminer, repasser en coordonnées cartésiennes, vérifier si l'équation de Prandtl est satisfaite

*Solution de c :* la limite du coefficient de concentration de contrainte est 2.

**Exercice 29** Exprimer, pour  $M_t = 20Nm$ , les contraintes dans la poutre à parois minces de la figure 6.14, aux points A, B, C et le rapport  $k = M_t/\theta$ . On donne :  $G = 80GPa$ .

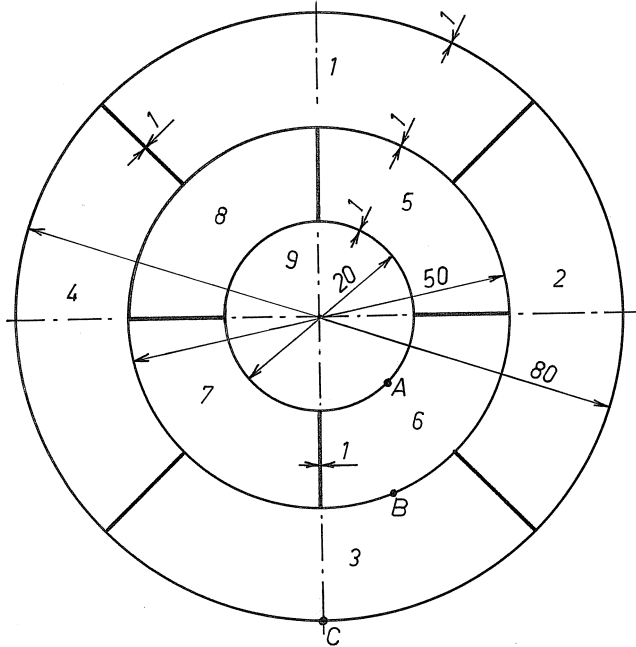


FIGURE 6.14 – Poutre à parois minces

*Solution* - Par symétrie, la fonction  $\hat{\varphi}$  ne prend que trois valeurs différentes dans les cellules, à savoir,

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4, \quad \varphi_5 = \varphi_6 = \varphi_7 = \varphi_8 \quad \text{et} \quad \varphi_9$$

et les parois radiales ne jouent aucun rôle (si ce n'est le positionnement). On a donc

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_0} |\mathbf{grad} \hat{\varphi}|^2 d\Omega = \frac{1}{2} \frac{\varphi_1^2}{1} \pi \cdot 80 + \frac{1}{2} \frac{(\varphi_1 - \varphi_5)^2}{1} \pi \cdot 50 + \frac{1}{2} \frac{(\varphi_5 - \varphi_9)^2}{1} \pi \cdot 20$$

et

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega_0} \hat{\varphi} d\Omega &= \varphi_1 \pi \frac{80^2 - 50^2}{2} + \varphi_5 \pi \frac{50^2 - 20^2}{2} + \varphi_9 \pi \frac{20^2}{2} \\ &= 1950\pi\varphi_1 + 1050\pi\varphi_5 + 200\pi\varphi_9 \end{aligned}$$

ce qui conduit aux équations

$$\begin{cases} 130\varphi_1 - 50\varphi_5 &= 1950 & (1) \\ -50\varphi_1 + 70\varphi_5 - 20\varphi_9 &= 200 & (2) \\ -20\varphi_2 + 20\varphi_9 &= 200 & (3) \end{cases}$$

On en déduit

$$(3) \Rightarrow \varphi_9 = \varphi_5 + 10$$

$$(2) \text{ et } (3) \Rightarrow \varphi_5 = \varphi_1 + 25$$

et en conjuguant ce résultat avec (1),

$$\varphi_1 = 40$$

d'où

$$\varphi_1 = 40, \varphi_5 = 65, \varphi_9 = 75$$

Il en résulte

$$J = \pi(1950 \cdot 40 + 1050 \cdot 65 + 200 \cdot 75) = 506,6 \cdot 10^3 \text{mm}^4 = 506,6 \cdot 10^{-9} \text{m}^4$$

d'où

$$k = \frac{M_t}{\theta} = GJ = 80 \cdot 10^9 \cdot 506,6 \cdot 10^{-9} = 40530 \text{Nm}^2/\text{rad}$$

On a alors

$$\begin{aligned} |\mathbf{grad}\hat{\varphi}|_A &= \frac{10}{1} = 10 \text{mm} \\ |\mathbf{grad}\hat{\varphi}|_B &= \frac{25}{1} = 25 \text{mm} \\ |\mathbf{grad}\hat{\varphi}|_C &= \frac{40}{1} = 40 \text{mm} \end{aligned}$$

et pour  $M_t = 20 \text{Nm} = 2 \cdot 10^4 \text{Nmm}$ , on a

$$G\theta = \frac{M_t}{J} = 39,48 \cdot 10^{-3} \text{N/mm}^2$$

On calcule alors les contraintes en  $A$ ,  $B$  et  $C$  par  $\tau = G\theta|\mathbf{grad}\hat{\varphi}|$ , ce qui donne

$$\tau_A = 0,3948MPa$$

$$\tau_B = 0,9870MPa$$

$$\tau_C = 1,579MPa$$





# Chapitre 7

## Le problème de Boussinesq

### 7.1 Introduction

Le problème de Boussinesq [6] consiste à étudier un corps semi-infini soumis à une charge ponctuelle normale au plan qui le limite. En lui-même, ce problème n'a guère d'intérêt pratique, mais il constitue une solution élémentaire utile dans les problèmes de contact.

### 7.2 Système de coordonnées et équations

La symétrie du problème suggère l'usage de coordonnées sphériques ayant pour origine le point d'application de la charge (voir fig. 7.1). Toujours pour des raisons de symétrie, le déplacement  $u_\varphi$  doit être nul, de même que toute espèce de dérivées par rapport à la longitude  $\varphi$ . Nous utiliserons alors les équations de Navier, ce qui nécessite le calcul des opérateurs divergence et rotationnel. On a

$$\Theta = \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta u_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta u_\theta) \right] \quad (7.1)$$

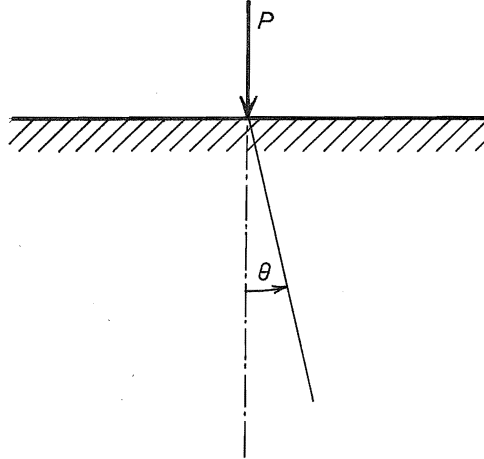


FIGURE 7.1 – Problème de Boussinesq

et

$$\begin{aligned}
 \mathbf{rotu} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ u_r & ru_\theta & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\varphi \\
 &= 2\omega \mathbf{e}_\varphi
 \end{aligned}$$

en posant

$$2\omega = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \quad (7.2)$$

Nous avons encore besoin de calculer

$$\begin{aligned}
 \mathbf{rotrotu} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega r \sin \theta \end{bmatrix} \\
 &= \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\omega r \sin \theta) \mathbf{e}_r - \frac{2}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (\omega r \sin \theta) \mathbf{e}_\theta \quad (7.3)
 \end{aligned}$$

L'introduction de ces résultats dans l'équation de Navier

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mathbf{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 \quad (7.4)$$

conduit aux deux équations suivantes :

$$\text{Selon } \mathbf{e}_r : \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\omega r \sin \theta) = 0 \quad (7.5)$$

$$\text{Selon } \mathbf{e}_\theta : \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (\omega r \sin \theta) = 0 \quad (7.6)$$

On peut simplifier quelque peu ce système en remarquant que l'équation (7.4) implique, par passage à la divergence, la suivante :

$$\Delta \operatorname{div} \mathbf{u} = \Delta \Theta = 0 \quad (7.7)$$

relation qui peut avantageusement remplacer l'une des deux précédentes.

## 7.3 Recherche de la solution générale

### 7.3.1 Forme générale de la solution

La solution générale procédera de la résolution des équations d'équilibre (7.5) et (7.6). Mais on peut d'emblée remarquer qu'un changement d'échelle ne peut changer la distribution angulaire des déplacements, car il n'affecte que les valeurs du rayon et non celles de la colatitude  $\theta$ . On peut donc donner aux déplacements la forme générale séparée

$$f(r)g(\theta)$$

Par ailleurs, la force appliquée  $P$  doit être équilibrée par des contraintes agissant sur l'hémisphère de rayon  $r$ , dont la surface vaut  $2\pi r^2$ . Les contraintes seront donc de la forme

$$\frac{h(\theta)}{r^2}$$

Les déplacements, combinaisons de primitives des contraintes, seront donc de la forme

$$u_r = \frac{A(\theta)}{r}, \quad u_\theta = \frac{B(\theta)}{r} \quad (7.8)$$

$A$  et  $B$  étant des fonctions de  $\theta$  seul. De ces expressions, on déduit par (7.1) et (7.2) celles de la divergence et du rotationnel : d'une part,

$$\Theta = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(r \sin \theta A) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta B) \right] = \frac{C(\theta)}{r^2} \quad (7.9)$$

avec

$$C = A + B' + B \cotg \theta \quad (7.10)$$

et, d'autre part,

$$\omega \sin \theta = \frac{\sin \theta}{2r} \left( \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{A'}{r} \right) = -\frac{D(\theta)}{r^2} \quad (7.11)$$

où

$$D = \frac{A' \sin \theta}{2} \quad (7.12)$$

### 7.3.2 Détermination de la fonction $C$

Exprimons à présent l'harmonicité de la divergence : on a d'abord

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} \Theta &= \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{C}{r^2} \right) + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{C}{r^2} \right) \\ &= -2 \frac{C}{r^3} \mathbf{e}_r + \frac{C'}{r^3} \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \Delta \Theta &= \operatorname{div} \mathbf{grad} \Theta \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( -2r^2 \sin \theta \frac{C}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( r \sin \theta \frac{C'}{r^3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ 2 \frac{C}{r^2} \sin \theta + \frac{C''}{r^2} \sin \theta + \frac{C'}{r^2} \cos \theta \right] \end{aligned}$$

La nullité de cette expression s'écrit

$$C'' + C' \cotg \theta + 2C = 0 \quad (7.13)$$

Cette équation différentielle linéaire à coefficients variables admet visiblement la solution particulière suivante :

$$C_1 = \cos \theta$$

La méthode générale de résolution des équations différentielles linéaires voudrait que l'on recherche une seconde solution particulière de la forme

$$C_2 = z(\theta) \cos \theta$$

mais en réalité, on pourra résoudre le présent problème en se limitant à la solution

$$C = a \cos \theta \quad (7.14)$$

a étant une constante à déterminer.

### 7.3.3 Détermination de la fonction $D$

Nous utiliserons à présent l'équation (7.6) qui, par (7.9) et (7.10), devient

$$\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{1}{r^3} C' - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{D}{r} \right) = 0$$

soit

$$\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{C'}{r^3} + \frac{1}{r^3 \sin \theta} D = 0$$

ou encore

$$D = -\frac{1-\nu}{1-2\nu} C' \sin \theta \quad (7.15)$$

Combinant cette relation avec (7.14), on obtient

$$D = \frac{1-\nu}{1-2\nu} a \sin^2 \theta \quad (7.16)$$

### 7.3.4 Calcul de la fonction $A$

On déduit alors la fonction  $A$  de l'équation (7.12) :

$$A' = \frac{2D}{\sin \theta} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} a \sin \theta$$

d'où

$$A = -\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} a \cos \theta + b \quad (7.17)$$

b étant une constante à déterminer.

### 7.3.5 Calcul de la fonction $B$

En vertu de la relation (7.10), la fonction  $B$  vérifie l'équation

$$B' + B \cotg \theta = C - A = a + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} a \cos \theta - b$$

soit

$$B' + B \cotg \theta = \frac{3-4\nu}{1-2\nu} a \cos \theta - b \quad (7.18)$$

La solution générale  $B_1$  de l'équation homogène associée qui s'écrit encore

$$\frac{dB_1}{B_1} = -\cotg \theta d\theta = -\frac{\cos \theta d\theta}{\sin \theta}$$

est donnée par

$$\ln B_1 = -\ln \sin \theta + \ln c$$

ou encore, par

$$B_1 = \frac{c}{\sin \theta} \quad (7.19)$$

Nous chercherons alors une solution particulière de l'équation complète par la méthode de variation des constantes, ce qui revient à la chercher sous la forme

$$B_2 = \frac{E(\theta)}{\sin \theta} \quad (7.20)$$

Ceci mène à l'équation

$$\frac{E'}{\sin \theta} - \frac{E \cos \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{E \cotg \theta}{\sin \theta} = \frac{3-4\nu}{1-2\nu} a \cos \theta - b$$

soit

$$E' = \frac{3-4\nu}{1-2\nu} a \sin \theta \cos \theta - b \sin \theta$$

ce qui entraîne

$$E = \frac{3-4\nu}{1-2\nu} a \frac{\sin^2 \theta}{2} + b \cos \theta \quad (7.21)$$

Rassemblant les résultats (7.19), (7.20) et (7.21), on obtient

$$B = \frac{c}{\sin \theta} + \frac{3-4\nu}{2(1-2\nu)} a \sin \theta + b \cotg \theta \quad (7.22)$$

Mais cette expression ne peut être admise telle quelle, car en  $\theta = 0$ , elle donnerait un déplacement  $u_\theta$  infini pour tout  $r$ , du fait du  $\sin \theta$  aux dénominateurs des deux termes extrêmes. Il est donc nécessaire d'imposer une liaison entre  $b$  et  $c$  garantissant que

$$\lim_{\theta=0} \frac{b \cos \theta + c}{\sin \theta} \neq \infty$$

Ceci ne sera réalisé que moyennant la condition  $c = -b$  qui, introduite dans les deux derniers termes du second membre de (7.22), donne

$$b \frac{\cos \theta - 1}{\sin \theta} = b \frac{\cos^2 \theta - 1}{\sin \theta (\cos \theta + 1)} = -\frac{b \sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

et ramène donc  $B$  à l'expression suivante :

$$B = \frac{3 - 4\nu}{2(1 - 2\nu)} a \sin \theta - b \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \quad (7.23)$$

### 7.3.6 Expression générale des déplacements

Les relations (7.17) et (7.23) permettent d'écrire

$$u_r = -\frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu} a \frac{\cos \theta}{r} + \frac{b}{r} \quad (7.24)$$

$$u_\theta = \frac{3 - 4\nu}{2(1 - \nu)} a \frac{\sin \theta}{r} - \frac{b}{r} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \quad (7.25)$$

### 7.3.7 Expression générale des déformations

On a

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{a \cos \theta}{r^2} - \frac{b}{r^2} \quad (7.26)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \quad (7.27)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3-4\nu}{2(1-2\nu)} a \frac{\cos \theta}{r^2} - \frac{b}{r^2} \frac{\cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{(1+\cos \theta)^2} \\ &\quad - \frac{4-4\nu}{2(1-2\nu)} a \frac{\cos \theta}{r^2} + \frac{b}{r^2} \frac{1+2\cos \theta + \cos^2 \theta}{(1+\cos \theta)^2} \\ &= -\frac{1}{2(1-2\nu)} a \frac{\cos \theta}{r^2} + \frac{b}{r^2} \frac{\cos \theta}{1+\cos \theta} \end{aligned} \quad (7.28)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi &= \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r} \cotg \theta \\ &= \frac{a \cos \theta}{2(1-2\nu)r^2} (3-4\nu-4+4\nu) + \frac{b}{r^2} \frac{1+\cos \theta - \cos \theta}{1+\cos \theta} \\ &= -\frac{1}{2(1-2\nu)} \frac{a \cos \theta}{r^2} + \frac{b}{r^2} \frac{1}{1+\cos \theta} \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) \\ &= \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{a}{r^2} \sin \theta - \frac{3-4\nu}{1-2\nu} \frac{a}{r^2} \sin \theta + 2 \frac{b}{r^2} \frac{\sin \theta}{1+\cos \theta} \\ &= -\frac{a \sin \theta}{r^2} + \frac{b}{r^2} \frac{2 \sin \theta}{1+\cos \theta} \end{aligned} \quad (7.30)$$

$$\gamma_{\theta\varphi} = 0 \quad (7.31)$$

$$\gamma_{r\varphi} = 0 \quad (7.32)$$

### 7.3.8 Expression générale des contraintes

Partant de la relation de Hooke

$$\sigma_{ij} = 2G \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{ll} \delta_{ij} \right)$$

notons d'abord que

$$\varepsilon_{ll} = \Theta = \frac{C}{r^2} = \frac{a \cos \theta}{r^2}$$



On obtient alors aisément

$$\frac{\sigma_r}{2G} = \frac{a \cos \theta}{r^2} \frac{2 - \nu}{1 - 2\nu} - \frac{b}{r^2} \quad (7.33)$$

$$\frac{\sigma_\theta}{2G} = -\frac{a \cos \theta}{2r^2} + \frac{b}{r^2} \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} \quad (7.34)$$

$$\frac{\sigma_\varphi}{2G} = -\frac{a \cos \theta}{2r^2} + \frac{b}{r^2} \frac{1}{1 + \cos \theta} \quad (7.35)$$

$$\frac{\tau_{r\theta}}{2G} = -\frac{a \sin \theta}{r^2} + \frac{2b}{r^2} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \quad (7.36)$$

$$\tau_{\theta\varphi} = 0 \quad (7.37)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0 \quad (7.38)$$

## 7.4 Conditions aux limites

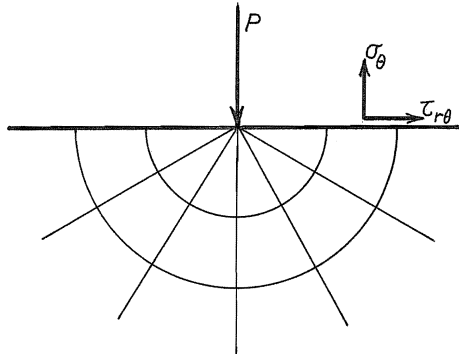


FIGURE 7.2 – Conditions sur la surface libre

Pour  $r > 0$ , les conditions sur la surface libre sont (*fig.* 7.2)

$$\sigma_\theta|_{\theta=\pm\pi/2} = 0, \quad \tau_{r\theta}|_{\theta=\pm\pi/2} = 0$$

On notera que la condition portant sur  $\sigma_\theta$  est automatiquement vérifiée. Quant à la nullité de  $\tau_{r\theta}$ , elle nécessite

$$-a + 2b = 0$$

soit

$$b = \frac{a}{2} \quad (7.39)$$

Il faut à présent exprimer  $a$  en termes de la charge  $P$ . Pour ce faire, on notera que la résultante des contraintes sur n'importe quel hémisphère centré sur le point d'application de la charge doit équilibrer  $P$ . Ainsi que le montre la

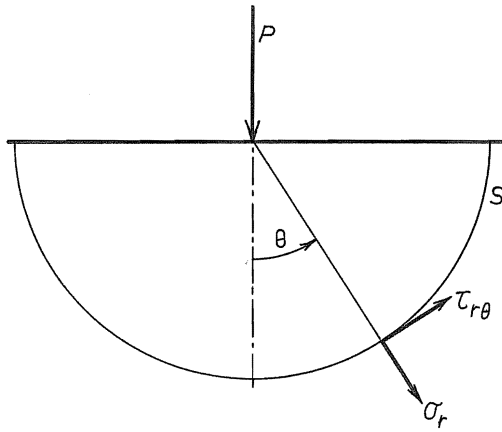


FIGURE 7.3 – Équilibre global

figure 7.3, cette condition s'écrit

$$\int_S (\tau_{r\theta} \sin \theta - \sigma_r \cos \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = P$$

ou, en tenant compte de la symétrie par rapport à  $\varphi$ ,

$$P = \int_0^{\pi/2} (\tau_{r\theta} \sin \theta - \sigma_r \cos \theta) 2\pi r^2 \sin \theta d\theta \quad (7.40)$$

Nous ferons le calcul en séparant les termes contenant  $a$  et les termes contenant  $b$  :

a) Termes contenant  $a$

$$\begin{aligned}
 P_a &= 2\pi Ga \int_0^{\pi/2} \left( -\sin^3 \theta - 2 \frac{2-\nu}{1-2\nu} \cos^2 \theta \sin \theta \right) d\theta \\
 &= -2\pi Ga \int_0^{\pi/2} \left[ (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \frac{3}{1-2\nu} \cos^2 \theta \right] \sin \theta d\theta \\
 &= -2\pi Ga \left\{ -[\cos \theta]_0^{\pi/2} - \frac{3}{1-2\nu} \left[ \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi/2} \right\} \\
 &= -\frac{4\pi Ga(1-\nu)}{1-2\nu}
 \end{aligned}$$

b) Termes contenant  $b$

$$\begin{aligned}
 P_b &= 4\pi Gb \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\sin^2 \theta}{1+\cos \theta} + \cos \theta \right) \sin \theta d\theta \\
 &= 4\pi Gb \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \theta + \cos \theta) \sin \theta d\theta \\
 &= 4\pi Gb [-\cos \theta]_0^{\pi/2} \\
 &= 4\pi Gb
 \end{aligned}$$

Au total, et en tenant compte de la relation  $b = a/2$ , on obtient

$$P = P_a + P_b = 4\pi Ga \left[ -\frac{1-\nu}{1-2\nu} + \frac{1}{2} \right] = -4\pi Ga \frac{1}{2(1-2\nu)}$$

soit

$$a = -\frac{(1-2\nu)P}{2\pi G}, \quad b = \frac{a}{2} \quad (7.41)$$

## 7.5 Solution du problème de Boussinesq

Connaissant ces valeurs, on peut enfin les réintroduire dans la solution générale, ce qui fournit la *solution du problème de Boussinesq* :

1. Déplacements :

$$u_r = \frac{P}{4\pi Gr} [4(1-\nu)\cos\theta - (1-2\nu)] \quad (7.42)$$

$$u_\theta = \frac{P\sin\theta}{4\pi Gr} \left[ \frac{1-2\nu}{1+\cos\theta} - (3-4\nu) \right] \quad (7.43)$$

$$u_\varphi = 0 \quad (7.44)$$

$$(7.45)$$

2. Contraintes :

$$\sigma_r = \frac{(1-2\nu)P}{2\pi r^2} \left( 1 - \frac{4-2\nu}{1-2\nu} \cos\theta \right) \quad (7.46)$$

$$\sigma_\theta = \frac{(1-2\nu)P}{2\pi r^2} \frac{\cos^2\theta}{1+\cos\theta} \quad (7.47)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{(1-2\nu)P}{2\pi r^2} \frac{\cos\theta - \sin^2\theta}{1+\cos\theta} \quad (7.48)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{(1-2\nu)P}{2\pi r^2} \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta} \quad (7.49)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0 \quad (7.50)$$

$$\tau_{\theta\varphi} = 0 \quad (7.51)$$

Dans les problèmes de contact, on s'intéresse spécialement aux déplacements des points du plan limitant le demi-espace, qui valent

$$\begin{aligned} u_r|_{\theta=\pi/2} &= -\frac{P(1-2\nu)}{4\pi Gr} \\ u_\theta|_{\theta=\pi/2} &= -\frac{P(1-\nu)}{2\pi Gr} = -\frac{P(1-\nu^2)}{\pi Er} \end{aligned} \quad (7.52)$$

## 7.6 Exercice

**Exercice 30** Étudier le problème de Lord Kelvin, consistant en une charge concentrée dans un massif indéfini (fig. 7.4)

*Suggestion :* Ce problème ne diffère de celui de Boussinesq que par ses conditions aux limites.

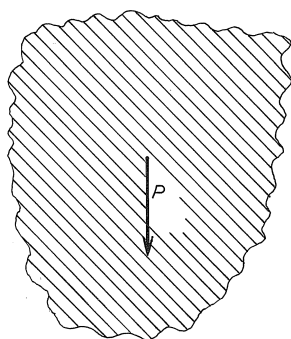


FIGURE 7.4 – Problème de Lord Kelvin



# Chapitre 8

## Le problème de Hertz

### 8.1 Introduction

Le problème de Hertz [44] consiste à étudier les forces naissant lors du contact pressé de deux solides élastiques. Ce problème a notamment une importance considérable dans l'étude des roulements à billes [82]. Bien que l'on se place

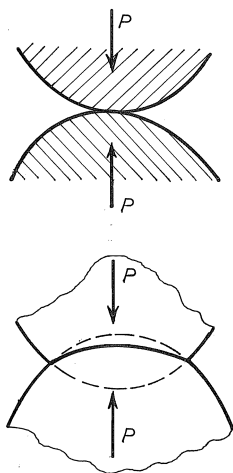


FIGURE 8.1 – Problème de Hertz

dans le cadre de la linéarisation géométrique et d'un matériau linéaire, la relation entre la force et le rapprochement des deux corps en contact n'est pas linéaire, pour la raison suivante : sous l'effet de la charge, les deux corps s'aplatissent en leur contact (*fig. 8.1*), si bien qu'il se forme une *aire de contact* d'autant plus grande que l'effort est plus important. La raideur s'accroît donc avec la force.

La théorie des contacts ponctuels – on dit encore des contacts *hertziens* – repose sur la solution du problème de Boussinesq, qu'il convient donc d'avoir étudié au préalable.

## 8.2 Considérations géométriques

### 8.2.1 Description de la surface d'un corps

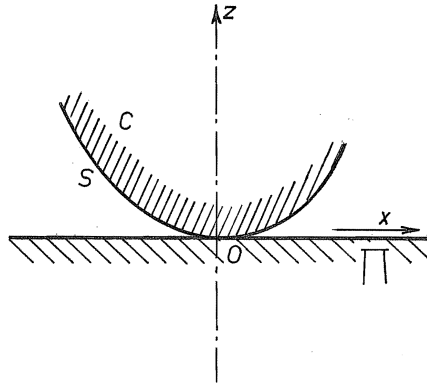


FIGURE 8.2 – Courbure de la surface d'un corps

Considérons un corps  $C$  de surface régulière  $S$  (au moins deux fois différentiable), posé en un point  $O$  sur un plan  $\Pi$  auquel sa surface est tangente (*fig. 8.2*). Nous adopterons le système d'axes suivants :  $Oz$  sera l'axe normal au plan, dirigé vers l'intérieur du corps  $C$ ;  $Ox$  et  $Oy$  seront deux axes orthogonaux à  $Oz$  et entre eux (et, par conséquent, situés dans le plan  $\Pi$ ). Dans ce système, la surface du corps  $C$  admet, dans un voisinage du point de contact  $O$ , une équation de la forme

$$z = Z(x, y) \quad (8.1)$$



Notre hypothèse de régularité de la surface nous permet, dans un voisinage éventuellement plus petit que le précédent, d'utiliser un développement de Taylor limité :

$$Z(x, y) = Z(0, 0) + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_0 y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}\right)_0 xy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)_0 y^2 + o(x^2 + y^2)$$

Les conditions de contact entre le corps et le plan s'écrivant

$$Z(0, 0) = 0, \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_0 = 0$$

on se ramène à

$$Z(x, y) \approx \frac{1}{2} K_{11} x^2 + K_{12} xy + \frac{1}{2} K_{22} y^2 \quad (8.2)$$

où apparaît le *tenseur de courbure*  $K_{ij}$  défini par

$$K_{11} = \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right)_0, \quad K_{12} = \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}\right)_0, \quad K_{22} = \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)_0 \quad (8.3)$$

Comme tout tenseur symétrique à deux dimensions, il admet deux axes propres orthogonaux  $\bar{Ox}$  et  $\bar{Oy}$  tels que

$$Z(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2} \bar{K}_{11} \bar{x}^2 + \frac{1}{2} \bar{K}_{22} \bar{y}^2$$

Ces axes propres sont appelés *axes principaux de courbure*. Les valeurs propres  $\bar{K}_{11}$  et  $\bar{K}_{22}$  sont les *courbures principales* et leurs inverses sont les *rayons principaux de courbure*. On notera dans la suite

$$\rho_1 = \frac{1}{R_1} = \bar{K}_{11}, \quad \rho_2 = \frac{1}{R_2} = \bar{K}_{22}$$

En fonction du signe des courbures principales, on dit que le corps est *convexe* ou *concave* : *convexe* dans toute direction principale dont la courbure est *positive*, *concave* dans toute direction principale dont la courbure est *négative* et enfin *rectiligne* dans toute direction principale de courbure nulle. Une surface dont une courbure principale est nulle est *développable*. Seuls les plans ont leurs deux courbures principales nulles.

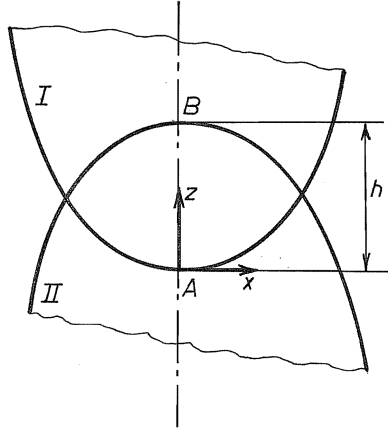


FIGURE 8.3 – Interpénétration fictive des deux corps

### 8.2.2 Contact de deux corps

Étant donné deux corps élastiques en contact, imaginons un instant qu'ils puissent s'interpénétrer. Partant de leur position de premier contact, ils se pénétreraient mutuellement d'une profondeur  $h$ . Prenant l'origine des axes au point  $A$  de la figure 8.3, les surfaces des deux corps admettraient donc les équations suivantes, en se limitant au second ordre :

$$\begin{aligned} \text{Corps I} & : z^I = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 K_{ij}^I x_i x_j \\ \text{Corps II} & : z^{II} = h - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 K_{ij}^{II} x_i x_j \end{aligned} \quad (8.4)$$

Le choix des signes est destiné à maintenir la convention de positivité des courbures en cas de convexité. La réalité, bien entendu, est tout autre, et les deux corps vont *se repousser mutuellement* comme le montre la figure 8.4. Le corps I admettra un déplacement  $w^I$  dirigé vers le haut (c'est-à-dire dans le sens des  $z$  positifs) et le corps II, un déplacement  $w^{II}$  dirigé vers le bas, d'où les valeurs

$$\begin{aligned} z^I & = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 K_{ij}^I x_i x_j + w^I \\ z^{II} & = h - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 K_{ij}^{II} x_i x_j - w^{II} \end{aligned}$$

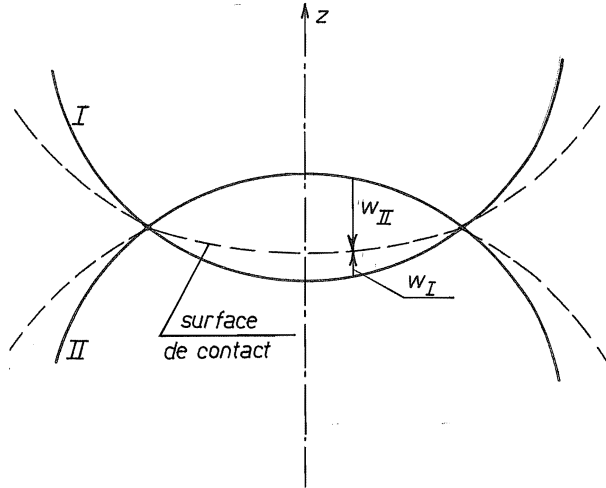


FIGURE 8.4 – Situation réelle

de manière à assurer, dans la zone de contact, l'égalité des cotes,  $z^I = z^{II}$ , ce qui implique un déplacement total

$$w = w^I + w^{II} = h - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 (K_{ij}^I + K_{ij}^{II}) x_i x_j \quad (8.5)$$

où apparaît le *tenseur des courbures résultantes* défini par

$$K_{ij}^R = K_{ij}^I + K_{ij}^{II} \quad (8.6)$$

Dans ce qui suit, nous omettrons l'indice supérieur  $R$  pour alléger les écritures. L'étude de ce tenseur est particulièrement instructive. Il admet en effet, comme les tenseurs de courbure des corps, deux directions principales orthogonales, dans lesquelles on peut écrire

$$w = h - A\bar{x}^2 - B\bar{y}^2, \quad A = \frac{1}{2}\bar{K}_{11}, \quad B = \frac{1}{2}\bar{K}_{22} \quad (8.7)$$

Lorsque les deux valeurs propres  $\bar{K}_{11}$  et  $\bar{K}_{22}$  sont positives, les lignes  $w = cte$  sont des ellipses : on dit que le contact est *ponctuel*. Lorsque l'une des deux est positive et l'autre, nulle, ces mêmes lignes sont des droites : le contact est

*linéaire*. Enfin, lorsque l'une au moins de ces valeurs propres est négative, le déplacement est d'autant plus grand que l'on s'éloigne du centre de contact dans les directions correspondantes, ce qui signifie que le contact ne peut débuter à l'origine : le problème est alors mal posé. Dans ce qui suit, nous nous limiterons aux contacts *ponctuels*.

Dans le cas relativement fréquent où les deux corps se présentent de manière telle que leurs axes principaux de courbure soient confondus, on a simplement, dans ces axes,

$$w = h - Ax^2 - By^2$$

avec

$$A = \frac{1}{2} (\rho_1^I + \rho_1^{II}), \quad B = \frac{1}{2} (\rho_2^I + \rho_2^{II}) \quad (8.8)$$

Dans le cas général, les axes principaux  $Ox^{II}$  et  $Oy^{II}$  du corps II peuvent

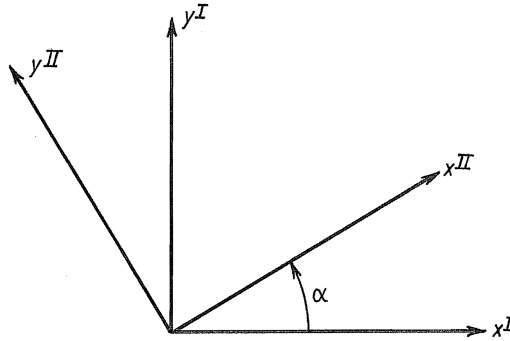


FIGURE 8.5 – Axes principaux de courbure des deux corps

former un angle  $\alpha$  avec ceux du corps I (*fig.* 8.5). Dans les axes principaux des deux corps, on aura donc

$$z^I = \frac{1}{2} \rho_1^I (x^I)^2 + \frac{1}{2} \rho_2^I (y^I)^2$$

et

$$h - z^{II} = \frac{1}{2} \rho_1^{II} (x^{II})^2 + \frac{1}{2} \rho_2^{II} (y^{II})^2$$

On peut ramener le tout dans les axes du corps I en notant que

$$\begin{aligned} x^{II} &= x^I \cos \alpha + y^I \sin \alpha \\ y^{II} &= -x^I \sin \alpha + y^I \cos \alpha \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$h - z^{II} = \frac{1}{2} (\rho_1^{II} \cos^2 \alpha + \rho_2^{II} \sin^2 \alpha) (x^I)^2 + (\rho_1^{II} - \rho_2^{II}) \sin \alpha \cos \alpha x^I y^I \\ + \frac{1}{2} (\rho_1^{II} \sin^2 \alpha + \rho_2^{II} \cos^2 \alpha) (y^I)^2$$

et

$$w = h - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \hat{K}_{ij} x_i^I x_j^I \quad (8.9)$$

avec

$$\begin{cases} \hat{K}_{11} &= \rho_1^I + \rho_1^{II} \cos^2 \alpha + \rho_2^{II} \sin^2 \alpha \\ \hat{K}_{12} &= (\rho_1^{II} - \rho_2^{II}) \sin \alpha \cos \alpha \\ \hat{K}_{22} &= \rho_2^I + \rho_2^{II} \cos^2 \alpha + \rho_1^{II} \sin^2 \alpha \end{cases} \quad (8.10)$$

Les valeurs principales de la courbure résultante sont donc les solutions  $2A$  et  $2B$  de l'équation séculaire

$$\begin{vmatrix} \hat{K}_{11} - \lambda & \hat{K}_{12} \\ \hat{K}_{12} & \hat{K}_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

soit

$$\lambda^2 - \lambda (\hat{K}_{11} + \hat{K}_{22}) + (\hat{K}_{11} \hat{K}_{22} - \hat{K}_{12}^2) = 0 \quad (8.11)$$

Il vient donc, en posant *arbitrairement*  $B \geq A$ ,

$$2(B + A) = \hat{K}_{11} + \hat{K}_{22} = (\rho_1^I + \rho_1^{II} + \rho_2^I + \rho_2^{II}) = \sum \rho \quad (8.12)$$

et

$$\begin{aligned} 2(B - A) &= \sqrt{(\hat{K}_{11} + \hat{K}_{22})^2 - 4(\hat{K}_{11} \hat{K}_{22} - \hat{K}_{12}^2)} \\ &= \sqrt{(\hat{K}_{11} - \hat{K}_{22})^2 + 4\hat{K}_{12}^2} \\ &= \left\{ [\rho_1^I - \rho_2^I + (\rho_1^{II} - \rho_2^{II}) \cos 2\alpha]^2 + (\rho_1^{II} - \rho_2^{II})^2 \sin^2 2\alpha \right\}^{1/2} \\ &= \left[ (\rho_1^I - \rho_2^I)^2 + (\rho_1^{II} - \rho_2^{II})^2 + 2(\rho_1^I - \rho_2^I)(\rho_1^{II} - \rho_2^{II}) \cos 2\alpha \right]^{1/2} \\ &= F(\rho) \end{aligned} \quad (8.13)$$

On utilise souvent l'angle auxiliaire  $\delta$  défini par

$$\cos \delta = \frac{B - A}{B + A} = \frac{F(\rho)}{\sum \rho} \quad (8.14)$$

en fonction duquel on obtient aisément

$$A = (A + B) \frac{A}{A + B} = \frac{1}{2} (A + B) (1 - \cos \delta) = \frac{1}{2} \sum \rho \sin^2 \frac{\delta}{2} \quad (8.15)$$

et

$$B = (A + B) \frac{B}{A + B} = \frac{1}{2} \sum \rho \cos^2 \frac{\delta}{2} \quad (8.16)$$

Ainsi, il existe un système d'axes  $\overline{Ox}, \overline{Oy}$  dans lequel le déplacement total prend la forme

$$w = h - A\bar{x}^2 - B\bar{y}^2 \quad (8.17)$$

$A$  et  $B$  ayant les expressions (8.15) et (8.16).

### 8.3 Équilibre de la surface de contact des corps

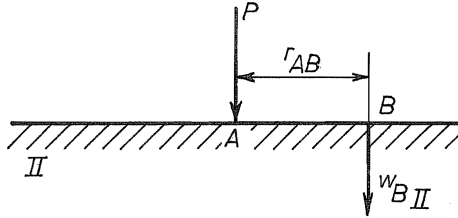


FIGURE 8.6 – Déplacement en  $B$  dû à une charge en  $A$

La surface de contact étant supposée très petite par rapport aux dimensions des corps, on peut identifier ceux-ci à des massifs indéfinis en ce qui concerne les efforts. L'étude du problème de Boussinesq nous a montré qu'une charge concentrée en un point  $A$  produit en un autre point  $B$  situé sur la surface (*fig.* 8.6) un déplacement

$$w_B^{II} = \frac{1 - \nu_{II}^2}{\pi E_{II}} \frac{P}{r_{AB}} \quad (8.18)$$

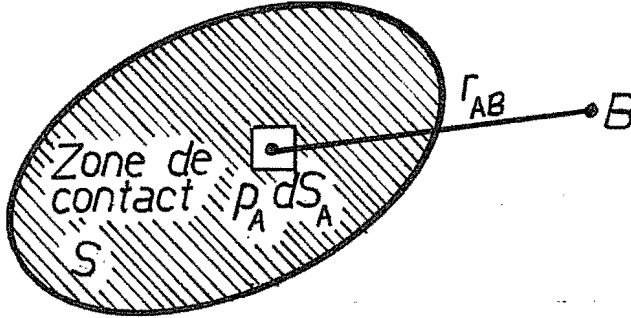


FIGURE 8.7 – Superposition de l'effet des pressions dans la zone de contact

Dès lors, par superposition, un système de pressions  $p$  appliquées sur la surface de contact  $S$  (fig. 8.7) produit dans le corps II un déplacement

$$w_B^{II} = \frac{1 - \nu_{II}^2}{\pi E_{II}} \int_S \frac{p_A}{r_{AB}} dS_A = \varepsilon_{II} \int_S \frac{p_A}{r_{AB}} dS_A \quad (8.19)$$

en posant

$$\varepsilon_{II} = \frac{1 - \nu_{II}^2}{\pi E_{II}} \quad (8.20)$$

De la même façon, le déplacement du corps I vaut

$$w_B^I = \varepsilon_I \int_S \frac{p_a}{r_{AB}} dS_A \quad (8.21)$$

valeur proportionnelle à la précédente, dans le rapport

$$\frac{w_B^I}{w_B^{II}} = \frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_{II}} \quad (8.22)$$

Le déplacement est donc identique dans les deux corps dans le cas assez habituel où ils sont constitués de matériaux de mêmes constantes élastiques  $E$  et  $\nu$ .

Enfin, le déplacement total, qui a la forme (8.17), vaut

$$w_B = (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) \int_S \frac{p_A}{r_{AB}} dS_A \quad (8.23)$$

Il s'agit d'une équation intégrale en  $p_A$ , que l'on désire résoudre analytiquement pour des valeurs quelconques de  $h$ ,  $A$  et  $B$ . On notera l'analogie entre ce problème et l'expression donnant le potentiel en électrostatique :

$$V_B = \int_V \frac{\rho_A}{r_{AB}} dS_A$$

où

$$\rho_A = \frac{\text{densité de charge}}{4\pi\epsilon_0}$$

Or, il est bien connu (voir annexe) que le potentiel d'une charge uniforme dans un ellipsoïde s'écrit

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= \int_{\text{ellipsoïde}} \frac{\rho(\alpha, \beta, \gamma)}{\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}} d\alpha d\beta d\gamma \\ &= \pi\rho abc \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} - \frac{z^2}{c^2 + \xi}\right) \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)}} \end{aligned} \quad (8.24)$$

L'expression de ce potentiel présente une forte ressemblance avec l'équation de  $w$ , n'était-ce le terme en  $z$ . Nous le supprimerons, ainsi que  $\gamma$ , de la façon suivante. Commençons par mettre les variables à l'échelle :

$$\begin{cases} x = a\hat{x} & , & y = b\hat{y} & , & z = c\hat{z} \\ \alpha = a\hat{\alpha} & , & \beta = b\hat{\beta} & , & \gamma = c\hat{\gamma} \end{cases}$$

et exprimons  $V(x, y, 0)$  en termes de ces variables sans dimensions. On a, en notant  $B_1$  la boule unité,

$$\begin{aligned} V(x, y, 0) &= \int_{B_1} \frac{\rho abc d\hat{\alpha} d\hat{\beta} d\hat{\gamma}}{\sqrt{a^2(\hat{x} - \hat{\alpha})^2 + b^2(\hat{y} - \hat{\beta})^2 + c^2\hat{\gamma}^2}} \\ &= \pi\rho abc \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi}\right) \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)}} \end{aligned}$$

Divisons les deux derniers membres par  $c$  et faisons ensuite tendre  $c$  vers zéro.



On obtient l'identité

$$\int_{B_1} \frac{\rho ab d\hat{\alpha} d\hat{\beta} d\hat{\gamma}}{\sqrt{a^2(\hat{x} - \hat{\alpha})^2 + b^2(\hat{y} - \hat{\beta})^2}} = \pi \rho ab \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi}\right) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)}}$$

dont le premier membre peut être intégré par rapport à  $\hat{\gamma}$  entre les limites  $\pm\sqrt{1 - \hat{\alpha}^2 - \hat{\beta}^2}$  ce qui donne

$$\begin{aligned} \text{Premier membre} &= \int_{\text{disque unité}} \frac{2\rho ab d\hat{\alpha} d\hat{\beta} \sqrt{1 - \hat{\alpha}^2 - \hat{\beta}^2} d\hat{\gamma}}{\sqrt{a^2(\hat{x} - \hat{\alpha})^2 + b^2(\hat{y} - \hat{\beta})^2}} \\ &= \int_{\text{ellipse}(a,b)} \frac{2\rho \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}} d\alpha d\beta}{r} \end{aligned}$$

Le résultat final de ces manipulations est

$$\begin{aligned} \int_{\text{ellipse}(a,b)} \frac{\rho \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}} d\alpha d\beta}{r} \\ = \rho \frac{\pi ab}{2} \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi}\right) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)}} \end{aligned} \quad (8.25)$$

Nous avons donc obtenu une distribution du type (8.23) conduisant à un déplacement de la forme voulue (8.17). Ceci signifie que la solution consiste en une pression de la forme

$$p = p_H \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (8.26)$$

à laquelle correspondent les variables  $h$ ,  $A$ ,  $B$  par les relations

$$h = (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) p_H \frac{\pi ab}{2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)}} \quad (8.27)$$

$$A = (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) p_H \frac{\pi ab}{2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(a^2 + \xi)^3(b^2 + \xi)}} \quad (8.28)$$

$$B = (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) p_H \frac{\pi ab}{2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)^3}} \quad (8.29)$$

La pression maximale, encore appelée *pression de Hertz*, est liée à la résultante  $P$  des pressions réciproques par la relation

$$P = \int_{\text{ellipse}(a,b)} p_H \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dS$$

Posant

$$x = a\rho \cos \varphi, \quad y = b\rho \sin \varphi, \quad \rho \in ]0, 1[, \quad \varphi \in ]0, 2\pi[$$

on obtient

$$dS = ab \cdot 2\pi\rho d\rho, \quad \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \rho^2}$$

d'où

$$P = p_H 2\pi ab \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho$$

Posant encore  $\rho = \sin \xi$ , on obtient

$$P = p_H 2\pi ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 \xi \sin \xi d\xi = \frac{2}{3} \pi ab p_H$$

soit

$$p_H = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} \tag{8.30}$$

équation qui signifie que *la pression de Hertz vaut 1,5 fois la pression moyenne*.

On peut ré-exprimer les résultats (8.27), (8.28) et (8.29) en termes de  $P$  au lieu de  $p_H$ , ce qui donne

$$h = (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) \frac{3P}{4} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)}} \tag{8.31}$$

$$A = (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) \frac{3P}{4} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(a^2 + \xi)^3(b^2 + \xi)}} \tag{8.32}$$

$$B = (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) \frac{3P}{4} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)^3}} \tag{8.33}$$

## 8.4 Résolution des équations

Les équations (8.31) à (8.33) donnent la *solution de principe* du problème : connaissant  $A$ ,  $B$  et  $P$ , on peut déterminer  $a$  et  $b$  par les deux dernières équations, puis  $h$  par la première. Mais il faut pour cela parvenir à calculer les intégrales des seconds membres.

Tout d'abord, nous introduirons les *intégrales elliptiques complètes*

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - m \sin^2 x}}, \quad E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m \sin^2 x} dx \quad (8.34)$$

avec  $m \in ]0, 1[$ , dont voici une table [1].

$m$	$K(m)$	$E(m)$
0	1,5780	1,5780
0,1	1,61244	1,53076
0,2	1,65962	1,48094
0,3	1,71386	1,44536
0,4	1,77752	1,39939
0,5	1,85407	1,35064
0,6	1,94957	1,29843
0,7	2,07536	1,24167
0,8	2,25721	1,17849
0,9	2,57809	1,10477
0,95	2,90834	1,06047
1	$\infty$	1

On remarquera que ces intégrales admettent l'expression équivalente

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - m \cos^2 x}}, \quad E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m \cos^2 x} dx \quad (8.35)$$

Cela étant, il est aisé de transformer les intégrales apparaissant dans les formules (8.31) à (8.33).

1. Tout d'abord, en posant  $\xi = a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi$  et  $e = b/a$ ,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)}} = \frac{2}{a} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}{\sqrt{e^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} \\ &= \frac{2}{a} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{e^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}} \\ &= \frac{2}{a} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - (1 - e^2) \cos^2 \varphi}} \\ &= \frac{2}{a} K(1 - e^2) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$h = (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) \frac{3P}{2a} K(1 - e^2) \quad (8.36)$$

2. Le même changement de variables permet d'écrire

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(a^2 + \xi)^3(b^2 + \xi)}} = \frac{2}{a^3} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{e^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}} \\ &= \frac{2}{a^3} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - (1 - e^2) \cos^2 \varphi}} \end{aligned}$$

Comme, par ailleurs,

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 - e^2} (1 - e^2) \cos^2 \varphi = \frac{1}{1 - e^2} - \frac{1}{1 - e^2} [1 - (1 - e^2) \cos^2 \varphi]$$

on obtient

$$I_2 = \frac{2}{a^3(1 - e^2)} [K(1 - e^2) - E(1 - e^2)]$$

d'où

$$A = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{3P}{2a^3(1 - e^2)} [K(1 - e^2) - E(1 - e^2)] \quad (8.37)$$

3. Posant enfin  $\xi = b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi$ , on obtient

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)^3}} = \frac{2}{b^3} \int_0^{\pi/2} \frac{e \cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{e^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}} \\ &= \frac{2}{b^3} \int_0^{\pi/2} \frac{e \cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - (1 - e^2) \cos^2 \varphi}} \end{aligned}$$

Notant que

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi &= \frac{1 - e^2}{1 - e^2} \cos^2 \varphi \\ &= \frac{1}{1 - e^2} [(1 - e^2) - (1 - e^2) \sin^2 \varphi] \\ &= \frac{1 - (1 - e^2) \sin^2 \varphi}{1 - e^2} - \frac{e^2}{1 - e^2} \end{aligned}$$

on obtient

$$I_3 = \frac{2e}{b^3} K(1 - e^2) - \frac{2e^3}{b^3} E(1 - e^2)$$

ce qui entraîne

$$B = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{3P}{2a^3(1-e^2)} \left[ \frac{1}{e^2} E(1-e^2) - K(1-e^2) \right] \quad (8.38)$$

Les équations (8.15), (8.16), (8.37) et (8.38) impliquent

$$\frac{A}{B} = \operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} = \frac{K(1-e^2) - E(1-e^2)}{\frac{1}{e^2} E(1-e^2) - K(1-e^2)} \quad (8.39)$$

Cette équation permet de calculer  $e$  en fonction du paramètre  $\delta$  (graphiquement, on peut tracer une courbe de  $\delta$  en fonction de  $e$ ). La valeur de  $e$  étant connue, on calcule  $a$  à partir de (8.37) et (8.38), en notant que

$$A = \frac{1}{2} \sum \rho \sin^2 \frac{\delta}{2}, \quad B = \frac{1}{2} \sum \rho \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

ce qui donne

$$a = \left\{ \frac{3}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \frac{1}{1-e^2} [K(1-e^2) - E(1-e^2)] \right\}^{1/3} (\varepsilon_I + \varepsilon_{II})^{1/3} \left( \frac{P}{\sum \rho} \right)^{1/3} \quad (8.40)$$

Pour une plus grande simplicité, on utilise généralement un *module de Young équivalent*  $E_m$  défini par

$$\frac{1}{E_m} = \frac{1}{2} \left( \frac{1-\nu_I^2}{E_I} + \frac{1-\nu_{II}^2}{E_{II}} \right) = \frac{\pi}{2} (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) \quad (8.41)$$

à l'aide duquel on peut écrire

$$a = k_a \left( \frac{P}{E_m \sum \rho} \right)^{1/3} \quad (8.42)$$

avec

$$k_a = \left\{ \frac{6}{\pi \sin^2 \frac{\delta}{2}} \frac{1}{1-e^2} [K(1-e^2) - E(1-e^2)] \right\}^{1/3} \quad (8.43)$$

On en déduit d'abord

$$b = k_b \left( \frac{P}{E_m \sum \rho} \right)^{1/3} \quad (8.44)$$

avec

$$k_b = ek_a \quad (8.45)$$

puis

$$p_H = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} = k_p P^{1/3} \left( E_m \sum \rho \right)^{2/3} \quad (8.46)$$

avec

$$k_p = \frac{3}{2\pi k_a k_b} \quad (8.47)$$

et enfin,

$$h = \frac{3P}{\pi a E_m} K(1 - e^2) = k_h \frac{P^{2/3}}{(E_m \sum \rho)^{1/3}} \quad (8.48)$$

où

$$k_h = \frac{3}{\pi k_a} K(1 - e^2) \quad (8.49)$$

## 8.5 Comportements asymptotiques

### 8.5.1 Cas où $e = 1$

Pour  $e = 1$ , les formules ci-dessus mènent à des formes indéterminées, ce qui rend nécessaire une étude du comportement des fonctions  $K$  et  $E$  au voisinage de  $e = 1$ . On a, pour  $e$  proche de l'unité,

$$\begin{aligned} K(1 - e^2) &= \int_0^{\pi/2} [1 - (1 - e^2) \sin^2 \theta]^{-1/2} d\theta \\ &\approx \int_0^{\pi/2} \left( 1 + \frac{1 - e^2}{2} \sin^2 \theta \right) \\ &\approx \frac{\pi}{2} + (1 - e^2) \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E(1 - e^2) &= \int_0^{\pi/2} [1 - (1 - e^2) \sin^2 \theta]^{1/2} d\theta \\ &\approx \int_0^{\pi/2} \left( 1 - \frac{1 - e^2}{2} \sin^2 \theta \right) \\ &\approx \frac{\pi}{2} - (1 - e^2) \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\lim_{e \rightarrow 1} \frac{K(1 - e^2) - E(1 - e^2)}{1 - e^2} = \frac{\pi}{4}$$

Comme, pour  $e = 1$ , on a  $\delta = 90^\circ$  et  $\sin^2(\delta/2) = 1/2$ , il vient

$$\begin{aligned} k_a &= \left( \frac{6\pi}{\pi \cdot 4} \cdot 2 \right)^{1/3} = \sqrt[3]{3} = 1,442 \\ k_b &= k_a \\ k_p &= \frac{3}{2\pi} \frac{1}{3^{2/3}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{2\pi} = 0,2295 \\ k_h &= \frac{3}{\pi} \frac{1}{3^{1/3}} \frac{\pi}{2} = \frac{3^{2/3}}{2} = 1,040 \end{aligned}$$

### 8.5.2 Très faibles valeurs de $e$

Pour  $e \rightarrow 0$ , on peut montrer [1] que

$$K(1 - e^2) \approx \ln(4e)$$

tandis que

$$E(1 - e^2) \approx 1$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2} &= \frac{K - E}{\frac{E}{e^2} - K} \\ &\approx \frac{\ln(4/e) - 1}{\frac{1}{e^2} - \ln(4/e)} \\ &\approx e^2 \ln(4/e) \end{aligned}$$

Comme c'est une petite valeur, on a encore

$$\sin^2 \frac{\delta}{2} \approx \operatorname{tg}^2 \frac{\delta}{2}$$

d'où, par les formules (6.40) et suivantes,

$$\begin{aligned}
 k_a &\approx \left[ \frac{6}{\pi} \frac{\frac{E}{e^2} - K}{K - E} \frac{1}{1 - e^2} (K - E) \right]^{1/3} \\
 &\approx \left[ \frac{6}{\pi} \frac{1}{1 - e^2} \left( \frac{E}{e^2} - K \right) \right]^{1/3} \\
 &\approx \left( \frac{6}{\pi} \right)^{1/3} e^{-2/3} \\
 k_b &\approx \left( \frac{6}{\pi} \right)^{1/3} e^{1/3} \\
 k_p &= \frac{3}{2\pi k_a k_b} \approx \frac{1}{4} \left( \frac{6}{\pi} \right)^{1/3} e^{1/3} \\
 k_h &\approx \frac{1}{2} \left( \frac{6}{\pi} \right)^{2/3} e^{2/3} \ln(4/e)
 \end{aligned}$$

## 8.6 Tables de la solution du problème de Hertz

### 8.6.1 Valeurs courantes de $e$

$1 - e^2$	$e$	$\delta(^{\circ})$	$k_a$	$k_b$	$k_p$	$k_h$
0	1	90	1,442	1,442	0,2296	1,040
0,1	0,9487	87,33	1,481	1,405	0,2294	1,040
0,2	0,8944	85,19	1,526	1,365	0,2292	1,039
0,3	0,8367	82,37	1,580	1,322	0,2286	1,036
0,4	0,7746	79,09	1,645	1,274	0,2278	1,032
0,5	0,7071	75,25	1,728	1,222	0,2261	1,025
0,6	0,6325	70,66	1,837	1,162	0,2237	1,013
0,7	0,5477	64,88	1,992	1,091	0,2197	0,9949
0,8	0,4472	57,16	2,241	1,002	0,2126	0,9618
0,9	0,3162	45,28	2,763	0,8737	0,1978	0,8910
0,95	0,2236	35,26	3,434	0,7678	0,1811	0,8088
1	0	0	$\infty$	0	0	0



**8.6.2 Valeurs asymptotiques pour  $e$  proche de zéro**

$e$	$\delta(^{\circ})$	$k_a$	$k_b$	$k_p$	$k_h$
0,01	2,560	26,73	0,2673	0,06683	0,2140
0,02	4,754	16,84	0,3368	0,08420	0,3005
0,05	10,57	9,142	0,4571	0,1143	0,4577
0,1	18,97	5,759	0,5759	0,1440	0,6117
0,15	26,50	4,395	0,6592	0,1648	0,7134
0,20	33,52	3,628	0,7256	0,1814	0,7885

Ces résultats sont représentés graphiquement en figures 8.8 et 8.9

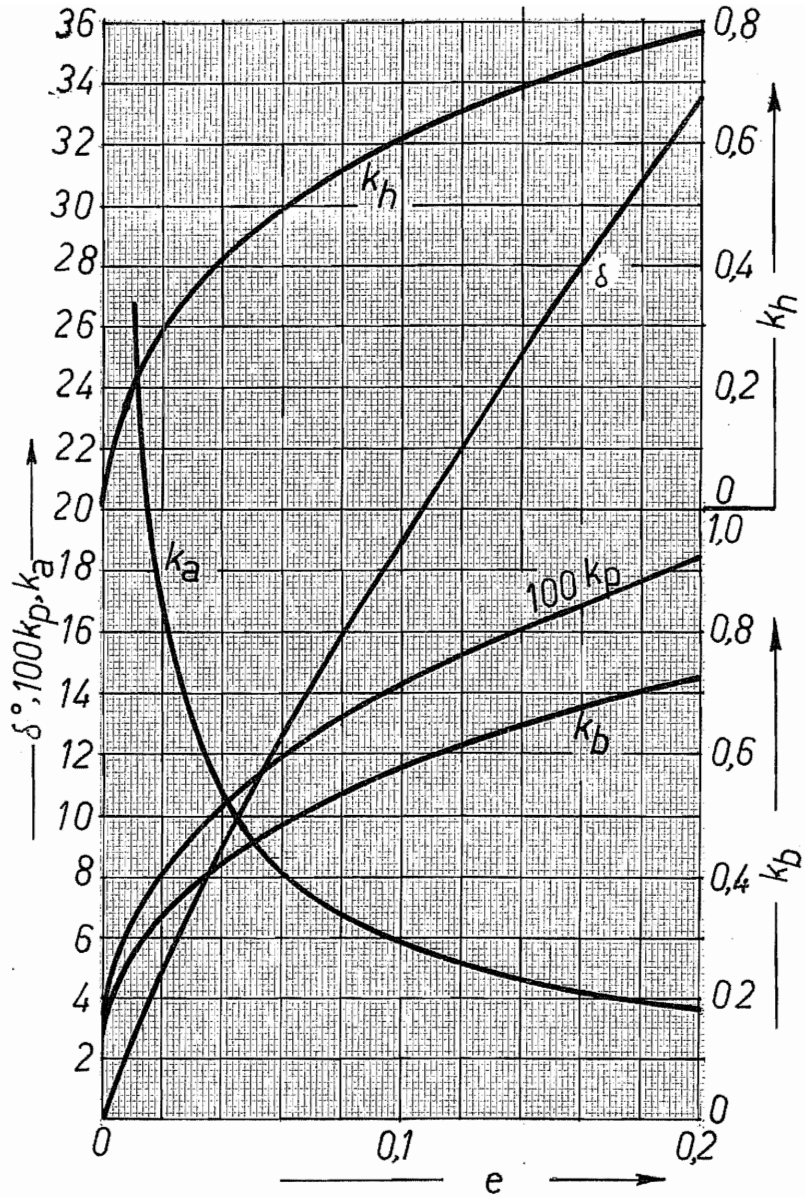


FIGURE 8.8 – Solution du problème de Hertz pour les valeurs courantes de  $e$

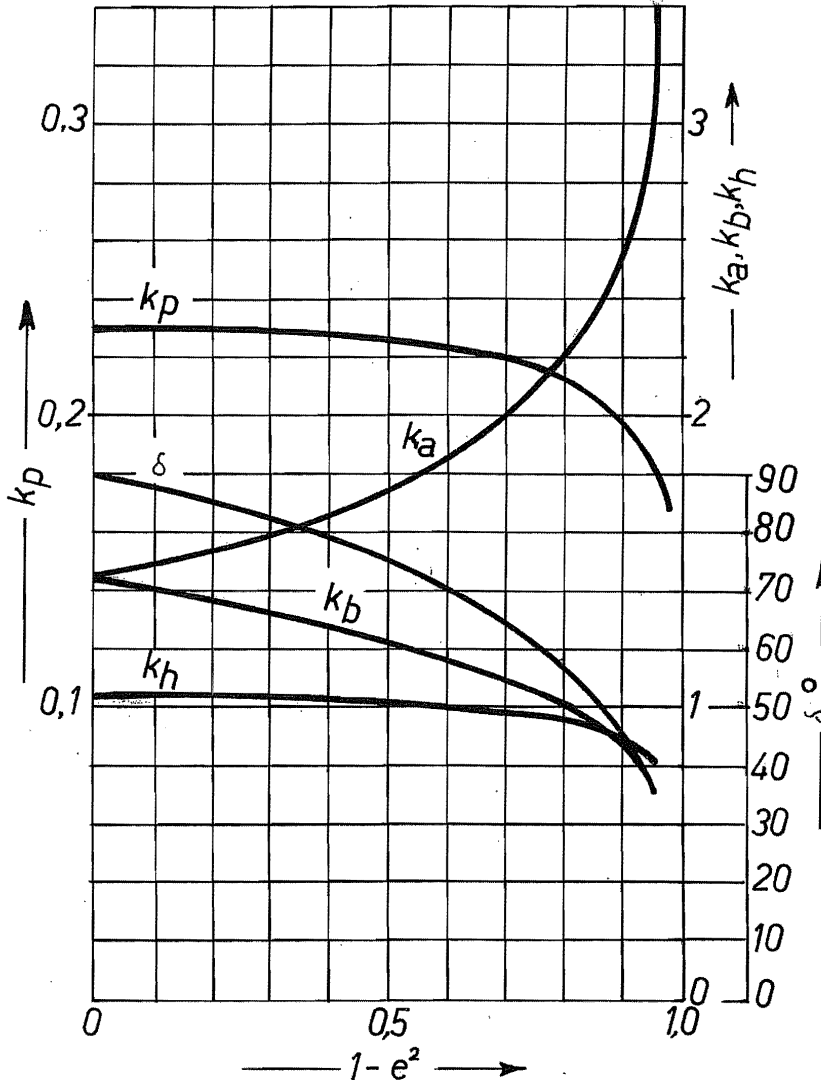


FIGURE 8.9 – Solution du problème de Hertz pour  $e$  proche de zéro

## 8.7 Annexe : potentiel de l'ellipsoïde chargé

Soit à chercher la solution du problème

$$\Delta V = \begin{cases} -4\pi\rho & \text{dans un ellipsoïde} \\ 0 & \text{en dehors} \end{cases} \quad (8.50)$$

La solution qui suit est due à Dirichlet [57]. Nous nous référons à Appell [2]. La surface de l'ellipsoïde ayant pour équation

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0$$

tout point extérieur vérifie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 > 0$$

En un tel point, l'équation

$$\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} - 1 = 0 \quad (8.51)$$

admet une et une seule solution  $u > 0$ . En effet, en appelant  $f(u)$  le premier membre de cette équation, on a le schéma de variation suivant :

$$\begin{array}{c|ccc} u & 0 & \nearrow & \infty \\ \hline f(u) & + & \searrow & -1 \end{array}$$

et on ne peut avoir qu'une seule fois  $f(\xi) = 0$ . Ceci définit une fonction  $\xi$  des points  $P = (x, y, z)$  telle que

$$\begin{cases} \xi(P) = 0 & \text{si } P \text{ est sur la surface de l'ellipsoïde} \\ \xi(P) > 0 & \text{si } P \text{ est extérieur à l'ellipsoïde} \end{cases}$$

Cela étant, nous allons montrer que *le potentiel  $V$  cherché est :*

1. Si  $P$  est extérieur à l'ellipsoïde,

$$V(P) = \pi\rho abc \int_u^\infty \left( 1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} - \frac{z^2}{c^2 + \xi} \right) \frac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}}$$

où

$$\varphi(\xi) = (a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)$$

2. Si  $P$  est intérieur à l'ellipsoïde,

$$V(P) = \pi\rho abc \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} - \frac{z^2}{c^2 + \xi}\right) \frac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}}$$

en donnant la même signification à  $\varphi(\xi)$ .

On notera que les deux formules se raccordent sur la surface de l'ellipsoïde, où  $u = 0$ .

Pour démontrer ce résultat, il nous suffira de calculer  $\Delta V$  dans les deux cas et de vérifier qu'à l'infini,  $V$  tend vers zéro. Ce dernier point est évident, car  $u \rightarrow 0$  à l'infini.

### 8.7.1 Calcul de $\partial V/\partial x$

$P$  extérieur

Tenant compte du fait que  $u$  varie avec  $x$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} = & -2\pi\rho abc x \int_u^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi)\sqrt{\varphi(\xi)}} \\ & - \pi\rho abc x \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} - \frac{z^2}{c^2 + \xi}\right) \frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}} \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

Le dernier terme, résultant du fait que la limite inférieure d'intégration est variable, s'annule en vertu de la relation (8.51) qui définit  $u$ . Il reste donc

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi\rho abc x \int_u^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi)\sqrt{\varphi(\xi)}}$$

$P$  intérieur

On trouve immédiatement

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi\rho abc x \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi)\sqrt{\varphi(\xi)}}$$

### 8.7.2 Calcul de $\partial^2 V / \partial x^2$ et de $\Delta V$

$P$  extérieur

On calcule

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -2\pi\rho abc \int_u^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi)\sqrt{\varphi(\xi)}} + 2\pi\rho abc \frac{1}{(a^2 + u)\sqrt{\varphi(u)}} \frac{\partial u}{\partial x}$$

Il est aisé de déterminer  $\partial^2 V / \partial y^2$  et  $\partial^2 V / \partial z^2$  par analogie. Il vient ainsi

$$\Delta V = 2\pi\rho abc \left[ - \int_u^\infty \left( \frac{1}{a^2 + \xi} + \frac{1}{b^2 + \xi} + \frac{1}{c^2 + \xi} \right) \frac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} + \frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}} \left( \frac{x}{a^2 + u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{b^2 + u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{c^2 + u} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]$$

Arrivé à ce point, on notera d'abord que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\sqrt{\varphi(\xi)}} \right) &= -\frac{1}{2[\varphi(\xi)]^{3/2}} [(b^2 + \xi)(c^2 + \xi) + (a^2 + \xi)(c^2 + \xi) \\ &\quad + (a^2 + \xi)(b^2 + \xi)] \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\varphi(\xi)}} \left[ \frac{1}{a^2 + \xi} + \frac{1}{b^2 + \xi} + \frac{1}{c^2 + \xi} \right] \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\int \left[ \frac{1}{a^2 + \xi} + \frac{1}{b^2 + \xi} + \frac{1}{c^2 + \xi} \right] \frac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} = -\frac{2}{\sqrt{\varphi(\xi)}}$$

et

$$\int_u^\infty \left[ \frac{1}{a^2 + \xi} + \frac{1}{b^2 + \xi} + \frac{1}{c^2 + \xi} \right] \frac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} = -\frac{2}{\sqrt{\varphi(u)}}$$

Nous obtenons donc

$$\Delta V = 2\pi\rho abc \left[ \frac{x}{a^2 + u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{b^2 + u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{c^2 + u} \frac{\partial u}{\partial z} - 2 \right] \frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}$$

Le facteur entre crochets est nul. En effet, en dérivant successivement la relation (8.51) par rapport à  $x$ ,  $y$  et  $z$ , on obtient

$$\begin{aligned}\frac{2x}{a^2 + u} - \left[ \frac{x^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + u)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + u)^2} \right] \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{2y}{b^2 + u} - \left[ \frac{x^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + u)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + u)^2} \right] \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ \frac{2z}{c^2 + u} - \left[ \frac{x^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + u)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + u)^2} \right] \frac{\partial u}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

Multiplions la première équation par  $x/(a^2 + u)$ , la deuxième par  $y/(b^2 + u)$  et la troisième par  $z/(c^2 + u)$  et additionnons. On obtient, en notant

$$[\dots] = \left[ \frac{x^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + u)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + u)^2} \right]$$

la relation

$$2[\dots] - [\dots] \left( \frac{x}{a^2 + u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{b^2 + u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{c^2 + u} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0$$

soit

$$2 = \frac{x}{a^2 + u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{b^2 + u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{c^2 + u} \frac{\partial u}{\partial z}$$

Ainsi,  $\Delta V = 0$  à l'extérieur de l'ellipsoïde.

### ***P* intérieur**

On a directement

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -2\pi\rho abc \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi)\sqrt{\varphi(\xi)}}$$

et

$$\begin{aligned}\Delta V &= -2\pi\rho abc \int_0^\infty \left( \frac{1}{a^2 + \xi} + \frac{1}{b^2 + \xi} + \frac{1}{c^2 + \xi} \right) \frac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} \\ &= 4\pi\rho abc \left( \frac{1}{\sqrt{\varphi(\infty)}} - \frac{1}{\sqrt{\varphi(0)}} \right)\end{aligned}$$

et comme

$$\sqrt{\varphi(0)} = abc$$

il vient

$$\Delta V = -4\pi\rho$$

La démonstration est donc achevée.

## 8.8 Exercice

**Exercice 31** Étudier le problème de Hertz dans le cas de deux sphères, sans passer par les intégrales elliptiques complètes.

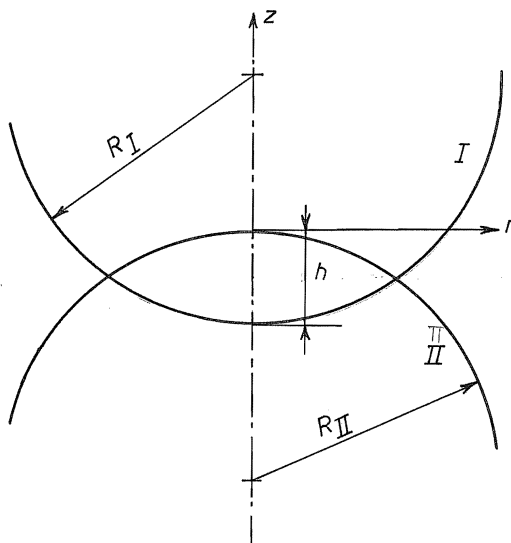


FIGURE 8.10 – Contact de deux sphères

*Solution* - En supposant possible l'interférence des deux corps, on aurait (fig. 8.10)

$$z_I = -h + \frac{r^2}{2R_I}, \quad z_{II} = -\frac{r^2}{2R_{II}}$$



en assimilant les sphères à des paraboloides. La déformation mène à

$$z_I = -h + \frac{r^2}{2R_I} + w_I, \quad z_{II} = -\frac{r^2}{2R_{II}} + w_{II}$$

avec  $z_I = z_{II}$ , ce qui implique

$$w = w_I + w_{II} = h - \beta r^2$$

avec

$$\beta = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_I} + \frac{1}{R_{II}} \right) = \frac{1}{4} \sum \rho$$

où

$$\sum \rho = \frac{2}{R_I} + \frac{2}{R_{II}}$$

Le problème de Boussinesq donne, pour une charge concentrée (*fig.* 8.7)

$$w_{BII} = \frac{1 - \nu_{II}^2}{\pi E_{II}} \frac{P}{r_{AB}} = \varepsilon_{II} \frac{P}{r_{AB}}$$

et, par superposition, si  $S$  est la surface de contact,

$$w_{BII} = \varepsilon_{II} \int_S \frac{p_A}{r_{AB}} dS_A$$

De la même façon, on a

$$w_{BI} = \varepsilon_I \int_S \frac{p_A}{r_{AB}} dS_A$$

d'où la relation toujours vérifiée

$$\frac{w_{BII}}{w_{BI}} = \frac{\varepsilon_{II}}{\varepsilon_I}$$

(Dans le cas de deux matériaux identiques, on a donc  $w_{BII} = w_{BI}$ ). Il faut donc résoudre l'équation intégrale

$$w_B = (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) \int_S \frac{p_A}{r_{AB}} dS_A = h - \beta r^2$$

ou encore,

$$w_B = \frac{2}{\pi E_m} \int_S \frac{p_A}{r_{AB}} dS_A = h - \beta r^2$$

en définissant  $E_m$  par

$$\frac{1}{E_m} = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \nu_I^2}{E_I} + \frac{1 - \nu_{II}^2}{E_{II}} \right)$$

Par symétrie, la zone de contact est un cercle de rayon  $a$ . Montrons que la solution a la forme

$$p = p_H \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} = \frac{p_H}{a} \sqrt{r^2 - a^2}$$

Soit (*fig. 8.11*)  $B$  un point de la zone de contact situé à une distance  $r$  du centre

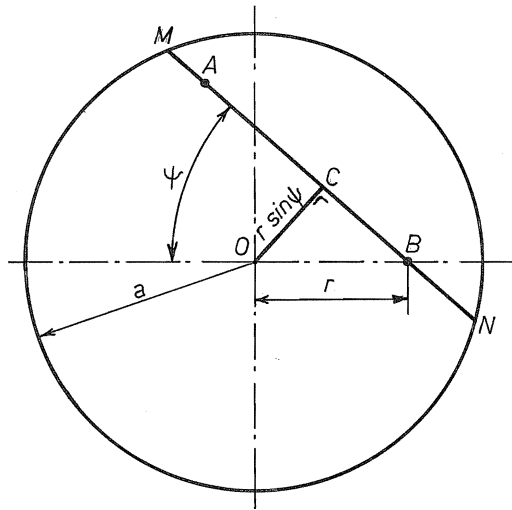


FIGURE 8.11 – Distance du point  $A$  au point  $B$

de celle-ci. Considérons un segment  $MN$  passant par  $B$ , limité à la circonférence, et faisant un angle  $\psi$  avec  $OB$ . On a donc

$$\begin{aligned} OC &= r \sin \psi \\ CN &= \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \psi} \end{aligned}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \int_S \frac{p_A}{r_{AB}} dS &= \int_S \frac{p_A}{r_{AB}} r_{AB} dr_{AB} d\psi \\ &= \int_S p_A dr_{AB} d\psi \end{aligned}$$

Ainsi que l'illustre la figure (8.12), le diagramme de  $p$  étant sphérique, la section

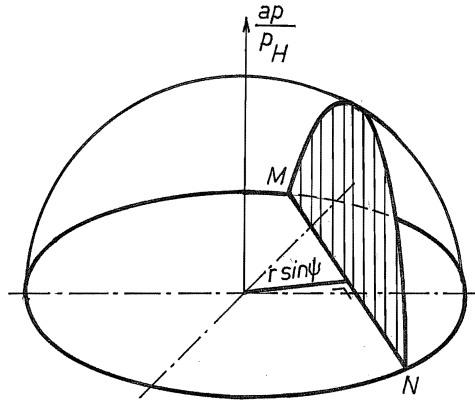


FIGURE 8.12 – Calcul du déplacement en  $B$

verticale  $MN$  est encore un demi-cercle de rayon  $\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \psi}$ , dont la surface vaut

$$\frac{\pi}{2} (a^2 - r^2 \sin^2 \psi)$$

Il suffit donc de calculer

$$\begin{aligned} \frac{a}{p_H} \int_S p dr d\psi &= \frac{a}{p_H} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\pi}{2} (a^2 - r^2 \sin^2 \psi) d\psi \\ &= \frac{a}{p_H} \frac{\pi}{2} (a^2 \pi - \frac{\pi}{2} r^2) \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} w_B &= \frac{2}{\pi E_m} \int_S p_A dr_{AB} d\psi \\ &= \frac{2}{\pi E_m} \frac{p_H}{a} \left( \frac{\pi^2 a^2}{2} - \frac{\pi^2 r^2}{4} \right) \\ &= \frac{p_H \pi a}{E_m} - \frac{p_H \pi}{2a E_m} r^2 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$h = \frac{p_H \pi a}{E_m} \quad (8.52)$$

et

$$\beta = \frac{1}{4} \sum \rho = \frac{p_H \pi}{2a E_m}$$

d'où

$$a = \frac{2p_H \pi}{E_m \sum \rho} \quad (8.53)$$

On détermine  $p_H$  par la condition

$$P = \int_S p dS = \frac{p_H}{a} \frac{2}{3} \pi a^3 = \frac{2}{3} \pi p_H a^2$$

ce qui donne

$$p_H = \frac{3P}{2\pi a^2} \quad (8.54)$$

Il vient alors, en combinant (8.53), (8.54) et (8.52),

$$a = \sqrt[3]{3 \frac{P}{E_m \sum \rho}} = 1,442 \sqrt[3]{\frac{P}{E_m \sum \rho}} \quad (8.55)$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{9}{8} \left( \frac{P}{E_m} \right)^2 \sum \rho} = 1,040 \sqrt[3]{\left( \frac{P}{E_m} \right)^2 \sum \rho} \quad (8.56)$$

$$p_H = \sqrt[3]{\frac{3}{8\pi^3} P \left( E_m \sum \rho \right)^2} = 0,2295 \sqrt[3]{P \left( E_m \sum \rho \right)^2} \quad (8.57)$$

# Chapitre 9

## Principes variationnels de l'élasticité géométriquement linéaire

### 9.1 Introduction

Les principes variationnels constituent un outil fécond pour la construction de solutions approchées en élasticité. De telles solutions ont déjà été construites dans le chapitre relatif à la torsion. Le présent chapitre développe ce concept dans le cas général de l'élasticité géométriquement linéaire.

### 9.2 Principe du minimum de l'énergie totale

Considérons un corps élastique  $V$ . Pour exprimer ses liaisons avec la fondation, nous distinguerons sur sa frontière  $S$  deux parties distinctes et complémentaires  $S_1$  et  $S_2$  telles que

$$\begin{cases} S & = S_1 \cup S_2 \\ \text{mes}(S_1) & \neq 0 \\ \text{mes}(S_1 \cap S_2) & = 0 \end{cases} \quad (9.1)$$

Sur  $S_1$ , on imposera des déplacements  $\bar{u}_i$ , tandis que sur  $S_2$ , on imposera des tractions de surface  $\bar{t}_i$ . En outre, le corps est soumis à des forces de volume

$\bar{f}_i$ . Dans ce qui suit, nous considérerons que les charges  $\bar{f}_i$  et  $\bar{t}_i$  sont *mortes*, c'est-à-dire indépendantes des déplacements.

Un champ de déplacements  $u_i$  sera dit *cinématiquement admissible* si, d'une part,

$$u_i = \bar{u}_i \text{ sur } S_1 \quad (9.2)$$

et si, d'autre part,

$$\mathcal{U}(u) = \int_V W(Du) dv < \infty \quad (9.3)$$

où  $W(Du)$  est la densité d'énergie de déformation calculée à partir de ce champ de déplacements,  $D$  symbolisant l'opérateur de calcul des déformations. Notons que dans les développements qui suivent, il n'est pas nécessaire de supposer le matériau linéaire.

Définissons le potentiel des charges  $\mathcal{P}$  par les conditions

$$\begin{cases} \mathcal{P}(0) & = 0 \\ \delta\mathcal{P}(u) & = -\delta\mathcal{T}(u) = -\int_V \bar{f}_i \delta u_i dV - \int_{S_2} \bar{t}_i \delta u_i dS \end{cases} \quad (9.4)$$

On considère alors l'énergie totale

$$\mathcal{E}(u) = \mathcal{U}(u) + \mathcal{P}(u) \quad (9.5)$$

Le *principe du minimum de l'énergie totale*, encore appelé *principe de variation des déplacements*, stipule que *parmi tous les déplacements cinématiquement admissibles, celui qui vérifie l'équilibre est caractérisé par le fait qu'il minimise l'énergie totale.*

Soit en effet  $u$  la solution cherchée. Tout autre champ de déplacements cinématiquement admissible  $v$  vérifiera par définition les conditions (9.2) et (9.3), ce qui implique que la variation

$$\delta u = v - u$$

vérifiera

$$\delta u_i = 0 \text{ sur } S_1 \quad (9.6)$$

Il est équivalent de dire qu'une variation de déplacement d'énergie finie est admissible si elle vérifie la condition (9.6). Cela étant, la recherche du minimum est classique. On a

$$\mathcal{E}(u + \delta u) = \mathcal{E}(u) + \delta\mathcal{E} + \frac{1}{2}\delta^2\mathcal{E} + o((\delta u)^2)$$

et les conditions de minimum sont

$$\delta\mathcal{E} = 0, \delta^2\mathcal{E} > 0 \quad \forall \delta u \text{ admissible} \tag{9.7}$$

La condition de nullité de la variation première s'écrit

$$\delta\mathcal{U} = \delta\mathcal{U} + \delta\mathcal{P} = \delta\mathcal{U} - \delta\mathcal{T} = 0 \quad \forall \delta(u) \text{ admissible} \tag{9.8}$$

Il s'agit d'un cas particulier du principe des travaux virtuels, restreint aux seuls déplacements admissibles. Pour obtenir les équations locales qui en résultent, on calcule

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U} &= \int_V \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{1}{2} (D_i \delta u_j + D_j \delta u_i) dV \\ &= \int_{S_2} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} n_j \delta u_i dS - \int_V D_j \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \delta u_i dV \end{aligned}$$

d'où, en tenant compte de l'expression (9.4) de  $\delta\mathcal{P}$ , on tire

$$\begin{cases} D_j \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} + \bar{f}_i &= 0 \quad \text{dans } V \\ n_j \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} &= \bar{t}_i \quad \text{sur } S_2 \end{cases} \tag{9.9}$$

L'énoncé du principe du minimum de l'énergie totale est dû à Kirchhoff [48] (1850).

De manière générale, un principe variationnel contient certaines variables soumises à priori à ce que l'on appelle des *conditions essentielles*. Le résultat de la variation de ces variables conduit à ce que l'on appelle les *conditions naturelles*. Dans le cas présent, on peut donc établir le tableau suivant :

Principe de l'énergie potentielle totale		
Variable	Conditions essentielles	Conditions naturelles
$u_i$	$u_i = \bar{u}_i$ sur $S_1$	Équilibre dans $V$ et sur $S_1$

Supposons que l'on cherche une solution *approchée* en se limitant à certains déplacements particuliers : on écrira par exemple

$$u_i = \varphi_i(x; \alpha_1, \dots, \alpha_p) \tag{9.10}$$

les  $\alpha_k$  étant des paramètres scalaires. L'application correcte du principe de variation des déplacements suppose que les conditions  $u_i = \bar{u}_i$  soient vérifiées

*exactement*, quelles que soient les valeurs des  $\alpha_k$ . On calculera alors

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(\alpha_1, \dots, \alpha_p) &= \int_V W(D\varphi(x; \alpha_1, \dots, \alpha_p)) dV \\ \mathcal{P}(\alpha_1, \dots, \alpha_p) &= - \int_V \bar{f}_i \varphi_i(x; \alpha_1, \dots, \alpha_p) dV - \int_{S_2} \bar{t}_i \varphi_i(x; \alpha_1, \dots, \alpha_p) dS\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{E}(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = \mathcal{U}(\alpha_1, \dots, \alpha_p) + \mathcal{P}(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$$

ce qui ramène le problème élastique à la minimisation d'une fonction de  $p$  variables scalaires. La solution approchée sera donc caractérisée par les conditions

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha_k} = 0, \quad k = 1, \dots, p \quad (9.11)$$

Que perd-on par rapport à la solution exacte en travaillant de la sorte? En adoptant la forme restrictive (9.10) pour les déplacements, on limite évidemment l'ensemble des variations possibles. Ces variations sont « responsables » de la vérification de l'équilibre. De fait, la solution approchée ne vérifiera pas les équations d'équilibre locales, mais seulement  *$p$  conditions d'équilibre globales, qui s'écrivent*

$$\int_V \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\varphi)}{\partial \alpha_k} dV = \int_V \bar{f}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_k} dV + \int_{S_2} \bar{t}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_k} dS \quad (9.12)$$

La procédure décrite ci-dessus pour construire une approximation est connue sous le nom de *méthode de Rayleigh-Ritz* [71, 77, 88, 69, 95]. Dans ce type d'approche, ce sont toujours les conditions naturelles qui sont affaiblies (globalisées).

Enfin, la condition  $\delta^2 \mathcal{E} = \delta^2 \mathcal{U} > 0$  permet de distinguer les minima des maxima. Elle s'écrit explicitement

$$\int_V \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \delta \varepsilon_{ij}(u) \delta \varepsilon_{kl}(u) dV > 0$$

et est vérifiée a priori si l'on admet la stabilité locale du matériau, condition qui s'écrit

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \text{ définie positive} \quad (9.13)$$



### 9.3 Multiplicateurs de Lagrange

Rappelons brièvement la technique des multiplicateurs de Lagrange pour la résolution des problèmes *d'extrema liés*. Soit à chercher le minimum d'une fonction  $f(x_1, \dots, x_n)$  dans la variété  $\mathcal{V}$  définie par les conditions

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_p(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (p < n) \quad (9.14)$$

Nous supposons que ces  $p$  liaisons sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire que

$$\sum_{k=1}^p \alpha_k \mathbf{grad} g_k = 0 \implies \alpha_k = 0, \quad k = 1, \dots, p$$

Considérons de nouvelles variables

$$\begin{cases} \xi_1 = g_1(x), \dots, \xi_p = g_p(x) \\ \xi_{p+1}, \dots, \xi_n \text{ arbitraires} \end{cases}$$

pourvu que la relation  $x \leftrightarrow \xi$  soit biunivoque :

$$\frac{\partial(x)}{\partial(\xi)} \neq 0, \quad \frac{\partial(\xi)}{\partial(x)} \neq 0$$

On a alors

$$df = \frac{\partial f}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \xi_p} d\xi_p + \frac{\partial f}{\partial \xi_{p+1}} d\xi_{p+1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \xi_n} d\xi_n$$

Il est clair que pour des accroissements vérifiant les conditions (9.14),  $d\xi_1 = \dots = d\xi_p = 0$ , si bien que la condition d'extremum s'écrira

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_{p+1}} d\xi_{p+1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \xi_n} d\xi_n = 0 \quad \forall (d\xi_{p+1}, \dots, d\xi_n)$$

Or, cette condition s'écrit encore

$$df - \frac{\partial f}{\partial \xi_1} d\xi_1 - \dots - \frac{\partial f}{\partial \xi_p} d\xi_p = 0 \quad \forall (d\xi_1, \dots, d\xi_n)$$

Il existe donc  $p$  nombres

$$\lambda_1 = \frac{\partial f}{\partial \xi_1}, \dots, \lambda_p = \frac{\partial f}{\partial \xi_p} \quad (9.15)$$

tels que

$$d(f - \lambda_1 g_1 - \dots - \lambda_p g_p) = 0 \quad (9.16)$$

Le système de  $(n + p)$  équations aux  $(n + p)$  inconnues  $(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_p)$

$$\begin{cases} \mathbf{grad}(f - \lambda_1 g_1 - \dots - \lambda_p g_p) = 0 \\ g_k = 0 \quad , \quad k = 1, \dots, p \end{cases} \quad (9.17)$$

permet de déterminer le point extrémal cherché. Les  $p$  inconnues supplémentaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont appelées *multiplicateurs de Lagrange*. En définissant la *fonction augmentée*

$$f^*(x, \lambda) = f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_p g_p(x) \quad (9.18)$$

on constate que le système (9.17) s'écrit encore

$$\begin{cases} \frac{\partial f^*}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n \\ \frac{\partial f^*}{\partial \lambda_k} = 0 \quad , \quad k = 1, \dots, p \end{cases} \quad (9.19)$$

Les relations (9.15) permettent de donner l'interprétation suivante des multi-

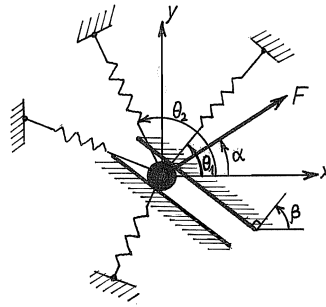


FIGURE 9.1 – Interprétation des multiplicateurs de Lagrange

plicateurs de Lagrange obtenus à la solution :  $\lambda_k$  est le *taux de variation de  $f$  lorsque l'on perturbe la  $k^e$  liaison*. Illustrons ces considérations par un exemple. Soit (fig. 9.1) un point lié à  $n$  ressorts et astreint à se déplacer dans une glissière, de telle façon que ses déplacements soient soumis à l'équation

$$g = u \cos \beta + v \sin \beta = 0 \quad (9.20)$$

( $\beta$  est l'inclinaison par rapport à l'axe des  $x$  de la normale à la glissière). Le point considéré est soumis à une force  $\mathbf{F}$  inclinée d'un angle  $\alpha$  sur l'axe des  $x$ . L'énergie du ressort  $n^{\circ}i$  vaut

$$\mathcal{U}_i = \frac{1}{2}k_i u_i^2$$

où  $u_i$  est le déplacement dans la direction de ce ressort :

$$u_i = u \cos \theta_i + v \sin \theta_i$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \frac{1}{2} \sum_i k_i (u \cos \theta_i + v \sin \theta_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} K_{uu} u^2 + K_{uv} uv + \frac{1}{2} K_{vv} v^2 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} K_{uu} &= \sum_i k_i \cos^2 \theta_i \\ K_{uv} &= \sum_i k_i \sin \theta_i \cos \theta_i \\ K_{vv} &= \sum_i k_i \sin^2 \theta_i \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{P} = -F(u \cos \alpha + v \sin \alpha)$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{U} + \mathcal{P} \\ &= \frac{1}{2} \sum_i k_i (u \cos \theta_i + v \sin \theta_i)^2 - F(u \cos \alpha + v \sin \alpha) \end{aligned}$$

En l'absence de liaison, la solution s'obtiendrait en écrivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u} = K_{uu} u + K_{uv} v - F \cos \alpha = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v} = K_{uv} u + K_{vv} v - F \sin \alpha = 0 \end{cases} \quad (9.21)$$

Pour tenir compte de la liaison, on considérera la fonction augmentée

$$\mathcal{E}^*(u, v, \lambda) = \mathcal{U} + \mathcal{P} - \lambda(u \cos \beta + v \sin \beta)$$

dont le point stationnaire est donné par

$$\begin{cases} K_{uu}u + K_{uv}v &= F \cos \alpha + \lambda \cos \beta \\ K_{uv}u + K_{vv}v &= F \sin \alpha + \lambda \sin \beta \\ u \cos \beta + v \sin \beta &= 0 \end{cases} \quad (9.22)$$

Comparant le système (9.22) au système (9.21), on constate que  $\lambda$  s'interprète comme une *force normale à la glissière*. De fait, par (9.15),

$$\lambda = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g} \quad (9.23)$$

représente l'effort nécessaire pour obtenir

$$\delta g = \delta u \cos \beta + \delta v \sin \beta = 1$$

C'est donc la *réaction* de la glissière, positive dans la direction indiquée par l'angle  $\beta$ .

Les résultats qui précèdent peuvent être généralisés aux problèmes variationnels. Le problème consistant à chercher l'extremum de

$$\mathcal{A}(u_1, \dots, u_n) = \int_V f(u_1, \dots, u_n) dV$$

moyennant les conditions

$$g_1(u) = 0, \dots, g_p(u) = 0 \text{ dans } V$$

revient à écrire, *en chaque point de V*

$$\sum_i \frac{\delta f}{\delta u_i} \delta u_i = 0$$

chaque fois que

$$\sum_i \frac{\delta g_1}{\delta u_i} \delta u_i = 0, \dots, \sum_i \frac{\delta g_p}{\delta u_i} \delta u_i = 0$$

Il faut donc, en chaque point de  $V$ , résoudre le problème

$$\begin{cases} \delta f - \sum_{k=1}^p \lambda_k \delta g_k &= 0 \\ g_k &= 0 \end{cases}$$

Les multiplicateurs  $\lambda_k$  varient évidemment d'un point à l'autre : on a donc des *champs de multiplicateurs de Lagrange*. La fonctionnelle augmentée est alors

$$\mathcal{A}^*(u, \lambda) = \int_V \left[ f(u) - \sum_k \lambda_k g_k(u) \right] dV$$

les  $\lambda_k$  étant des fonctions des coordonnées.

## 9.4 Principe à quatre champs de Fraeijs de Veubeke

Dans le principe de variation des déplacements, les déformations n'apparaissent que comme dérivées des déplacements. La compatibilité intérieure, exprimée par

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(D_i u_j + D_j u_i) \quad \text{dans } V \quad (9.24)$$

est donc vérifiée a priori. De même les conditions de compatibilité sur  $S_1$ ,

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{sur } S_1 \quad (9.25)$$

doivent être vérifiées a priori.

Une autre manière de procéder consiste à considérer les déformations  $\varepsilon_{ij}$  comme des variables indépendantes et à ignorer au départ les relations (9.25). Dans cette optique, le problème élastique consiste à minimiser la fonctionnelle

$$\mathcal{E}(\varepsilon, u) = \mathcal{U}(\varepsilon) + \mathcal{P}(u) \quad (9.26)$$

avec

$$\mathcal{U}(\varepsilon) = \int_V W(\varepsilon) dV \quad (9.27)$$

moyennant les *liaisons* (9.24) et (9.25), dont on tiendra compte à l'aide d'un champ spatial de multiplicateurs de Lagrange  $\sigma_{ij}$  pour la condition (9.24) et d'un champ superficiel de multiplicateurs de Lagrange  $t_i$  pour la condition (9.25). La fonctionnelle augmentée sera donc

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^*(\varepsilon, u, \sigma, t) = & \int_V \left\{ W(\varepsilon) + \sigma_{ij} \left[ \frac{1}{2}(D_i u_j + D_j u_i) - \varepsilon_{ij} \right] - \bar{f}_i u_i \right\} dV \\ & - \int_{S_2} \bar{t}_i u_i dS - \int_{S_1} t_i (u_i - \bar{u}_i) dS \quad (9.28) \end{aligned}$$

Elle sera extrémale par rapport à toutes les variables, sans conditions essentielles. Ce principe est souvent attribué à Washizu [93], bien qu'il ait été énoncé cinq ans plus tôt par Fraeijs de Veubeke [27]. L'exposé ci-dessus suit du reste ce dernier auteur qui, pour la méthode utilisée, faisait référence à Friedrichs [11, 38]. En variant la fonctionnelle  $\mathcal{E}^*$  par rapport aux quatre champs  $\varepsilon, u, \sigma, t$ , libres de toute liaison, on obtient toutes les équations de l'élasticité.

1. En variant les déformations, on obtient visiblement l'équation

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad (9.29)$$

qui donne aux multiplicateurs  $\sigma_{ij}$  la signification *énergétique* de contraintes, en tant que grandeurs liées aux déformations. Les relations (9.29) sont en fait les *équations constitutives*.

2. La variation des déplacements donne

$$\int_V \left[ \sigma_{ij} \frac{1}{2} (D_i \delta u_j + D_j \delta u_i) - \bar{f}_i \delta u_i \right] dV - \int_{S_2} \bar{t}_i \delta u_i ds - \int_{S_1} t_i \delta u_i dS = 0 \quad (9.30)$$

Effectuant une intégration par parties, on obtient

$$\int_S n_j \sigma_{ij} \delta u_i dS - \int_V (D_j \sigma_{ij}) \delta u_i dV - \int_V \bar{f}_i \delta u_i dV - \int_{S_2} \bar{t}_i \delta u_i dS - \int_{S_1} t_i \delta u_i dS = 0 \quad (9.31)$$

ce qui conduit aux équations

$$D_j \sigma_{ij} + \bar{f}_i = 0 \text{ dans } V \quad (9.32)$$

$$n_j \sigma_{ij} = \bar{t}_i \text{ sur } S_2 \quad (9.33)$$

$$n_j \sigma_{ij} = t_i \text{ sur } S_1 \quad (9.34)$$

L'équation (9.32) exprime l'équilibre intérieur pour les contraintes  $\lambda_{ij}$ ; l'équation (9.33), l'équilibre sur  $S_2$ ; enfin, l'équation (9.34) permet d'interpréter les  $t_i$  comme des tractions de surface, réactions sur  $S_1$ .

3. La variation des contraintes  $\sigma_{ij}$  restitue les relations de compatibilité (9.24). Ces contraintes apparaissent donc comme les réactions aux forces qui voudraient provoquer la dislocation du corps.

4. La variation des réactions  $t_i$  restitue la compatibilité superficielle. Les  $t_i$  apparaissent donc comme les réactions aux forces qui voudraient rompre les liaisons cinématiques sur  $S_1$ .

Ces relations sont résumées dans le tableau suivant :

Principe à 4 champs de FdV		
Variable	Conditions essentielles	Conditions naturelles
$u_i$	néant	Équilibre dans $V$ , sur $S_1$ et sur $S_2$
$\varepsilon_{ij}$	néant	Équations constitutives
$\sigma_{ij}$	néant	Compatibilité intérieure
$t_i$	néant	Compatibilité sur $S_1$

On constate donc que, dans un langage imagé,

- la variation des déplacements est « responsable » de l'équilibre : toute restriction sur les déplacements mènera à des équations d'équilibre globalisées ;
- la variation des contraintes  $\sigma_{ij}$  est « responsable » de la compatibilité intérieure : toute restriction sur les contraintes mènera à des conditions de compatibilité globalisées ;
- la variation des réactions  $t_i$  est « responsable » de la compatibilité extérieure : toute restriction sur les  $t_i$  mènera à une compatibilité superficielle globalisée ;
- la variation des déformations  $\varepsilon_{ij}$  est « responsable » des équations constitutives : toute restriction sur les déformations mènera à une globalisation des équations constitutives.

## 9.5 Principe de Hellinger-Reissner

A partir du principe à quatre champs de Fraeijs de Veubeke, on peut en obtenir d'autres, plus simples, en supposant certaines relations vérifiées à priori.

Supposons les équations constitutives (9.29) vérifiées. La fonctionnelle à utiliser sera alors

$$\mathcal{R}(u, \sigma, t) = \min_{\varepsilon} \mathcal{E}^*(\varepsilon, u, \sigma, t)$$

où, bien entendu, les déformations cesseront d'être indépendantes, et devront être exprimées en termes des  $\sigma_{ij}$ , ce qui pose le problème de l'invertibilité des relations constitutives.

### 9.5.1 Invertibilité des relations constitutives

Les relations constitutives

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

peuvent-elles être inversées en une relation donnant  $\varepsilon$  en fonction de  $\sigma$ ? Pour construire une telle relation, on partira d'un couple  $(\sigma, \varepsilon)$  donné et on notera que les relations constitutives impliquent

$$d\sigma_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} d\varepsilon_{kl} = H_{ijkl} d\varepsilon_{kl}$$

Si l'on peut inverser cette relation sous la forme

$$d\varepsilon_{kl} = H_{ijkl}^{-1} d\sigma_{kl} \quad (9.35)$$

on peut calculer  $\varepsilon$  en fonction de  $\sigma$  par intégration. Cette inversion est possible si et seulement si

$$(H_{ijkl}\eta_{kl} = 0 \quad \text{avec} \quad \eta_{kl} = \eta_{lk}) \Rightarrow \eta_{kl} = 0$$

Comme nous le verrons en exercice, on peut aisément imaginer des structures de la densité d'énergie de déformation pour lesquelles cette relation n'est pas vérifiée. Il faut en outre remarquer que les relations (9.35) ne définissent des déformations univalentes que si

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl} \partial \sigma_{pq}} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{pq} \partial \sigma_{kl}}$$

soit

$$\frac{\partial H_{ijkl}^{-1}}{\partial \sigma_{pq}} = \frac{\partial H_{ijpq}^{-1}}{\partial \sigma_{kl}}$$

condition dont la vérification a priori n'est pas évidente. Une autre manière de procéder est fondée sur la transformation de Legendre, que nous allons introduire ci-dessous.

### 9.5.2 Densité d'énergie complémentaire

Dans le principe à quatre champs, on voit apparaître le groupement

$$A(\sigma, \varepsilon) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - W(\varepsilon)$$



dont les propriétés sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial \sigma_{ij}} &= \varepsilon_{ij} \\ \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} &= \sigma_{ij} - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}\end{aligned}$$

Définissons la fonction

$$\Phi(\sigma) = \max_{\varepsilon} A(\sigma, \varepsilon) \quad (9.36)$$

Il s'agit d'une fonction de  $\sigma$  uniquement, ayant pour dérivées

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial A}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij} \quad (9.37)$$

On l'appelle *densité d'énergie complémentaire*. Ce procédé de construction de la fonction  $\Phi$ , qui permet en fait d'inverser les relations constitutives, porte le nom de *transformation de Legendre* ou encore, de *transformation de contact*.

On donne à la fonction  $\Phi(\sigma)$  le nom de *densité d'énergie complémentaire*. Cette appellation provient du fait que dans le cas d'un problème unidimensionnel, si l'on trace la courbe  $\sigma = F(\varepsilon)$ , la densité d'énergie de déformation représente l'aire comprise entre cette courbe et l'axe des  $\varepsilon$ . La densité d'énergie complémentaire représente l'aire comprise entre la courbe et l'axe des  $\sigma$  (fig. 9.2). Elles se complètent mutuellement pour former un rectangle d'aire  $\sigma\varepsilon$ .

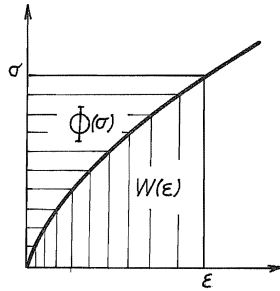


FIGURE 9.2 – Énergie complémentaire

Dans le cas de relations constitutives linéaires et, plus généralement, *homogènes de degré 1*, on a, pour  $\alpha \in [0, 1]$

$$\sigma_{ij}(\alpha\varepsilon) = \alpha\sigma_{ij}(\varepsilon)$$

et en progressant par accroissement homogène des déformations,

$$\begin{aligned}
 W(\varepsilon) &= \int_0^\varepsilon \sigma_{ij}(\varepsilon^*) d\varepsilon_{ij}^* \\
 &= \int_0^1 \sigma_{ij}(\alpha\varepsilon) \varepsilon_{ij} d\alpha \\
 &= \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \int_0^1 \alpha d\alpha \\
 &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}
 \end{aligned} \tag{9.38}$$

si bien que la densité d'énergie de déformation et la densité d'énergie complémentaire ont constamment la même valeur. Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de Clapeyron intérieur*.

### 9.5.3 Principe de Hellinger-Reissner

Nous sommes à présent en mesure d'explicitier la fonctionnelle de Hellinger-Reissner,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}(u, \sigma, \mu) &= \min_{\varepsilon} \mathcal{E}^*(\varepsilon, u, \sigma, \mu) = \\
 &= \int_V \left[ \sigma_{ij} \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) - \Phi(\sigma) - \bar{f}_i u_i \right] dV \\
 &\quad - \int_{S_2} \bar{t}_i u_i dS - \int_{S_1} t_i (u_i - \bar{u}_i) dS
 \end{aligned} \tag{9.39}$$

C'est le principe de Hellinger-Reissner (Reissner l'a énoncé en 1950 [74] mais il a été découvert plus tard que Hellinger l'avait déjà publié en 1914). Dans ce principe,

1. la variation des contraintes conduit à une expression des conditions de compatibilité sous la forme de relations entre les contraintes et les dérivées des déplacements :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) \tag{9.40}$$

2. la variation des réactions  $t_i$  conduit aux conditions de compatibilité extérieures ;

3. la variation des déplacements mène aux équations d'équilibre

$$\begin{cases} D_j \sigma_{ji} + \bar{f}_i = 0 & \text{dans } V \\ n_j \sigma_{ji} = \bar{t}_i & \text{sur } S_2 \\ n_j \sigma_{ji} = t_i & \text{sur } S_1 \end{cases} \quad (9.41)$$

Ces résultats sont résumés dans le tableau suivant :

Principe de Hellinger-Reissner		
Variation	Conditions essentielles	Conditions naturelles
$u_i$	néant	Équilibre dans $V$ , sur $S_1$ et sur $S_2$
$\sigma_{ij}$	néant	Compatibilité intérieure (sous forme d'équations constitutives)
$t_i$	néant	Compatibilité sur $S_1$

## 9.6 Principe à deux champs de Fraeijis de Veubeke [33]

Dans le principe à quatre champs, on peut également imposer à priori l'équilibre, sous forme des travaux virtuels :

$$\int_V \left[ \sigma_{ij} \frac{1}{2} (D_i \delta u_j + D_j \delta u_i) - \bar{f}_i \delta u_i \right] dV - \int_{S_2} \bar{t}_i \delta u_i dS - \int_{S_1} t_i \delta u_i dS = 0 \quad (9.42)$$

Comme aucune restriction n'est imposée aux déplacements, on peut en particulier poser  $\delta u_i = u_i$ , ce qui donne

$$\int_V \left[ \sigma_{ij} \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) - \bar{f}_i u_i \right] dV - \int_{S_2} \bar{t}_i u_i dS - \int_{S_1} t_i u_i dS = 0 \quad (9.43)$$

Soustrayant cette relation à l'expression générale de  $\mathcal{E}^*$ , on obtient

$$\int_V [W(\varepsilon) - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}] dV + \int_{S_1} t_i \bar{u}_i dS$$

et comme l'équilibre implique en particulier

$$t_i = n_j \sigma_{ij}$$

on est conduit à la fonctionnelle

$$\mathcal{F}(\varepsilon, \sigma) = \int_V [W(\varepsilon) - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}]dV + \int_{S_1} n_j\sigma_{ji}\bar{u}_i dS \quad (9.44)$$

dont le caractère stationnaire constitue le principe à deux champs de Fraeijs de Veubeke. Dans ce principe, les déformations sont libres de toute liaison, et leur variation fournit les équations constitutives

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$$

Le résultat de la variation des contraintes  $\sigma_{ij}$ , soumises aux conditions d'équilibre, est la compatibilité, comme on peut s'en rendre compte en supprimant, dans le tableau relatif au principe à quatre champs, les lignes relatives aux déplacements et aux  $t_i$  :

Principe à 2 champs de FDV		
Variable	Conditions essentielles	Conditions naturelles
$\varepsilon_{ij}$	néant	Équations constitutives
$\sigma_{ij}$	équilibre dans $V$ , sur $S_1$ et sur $S_2$	Compatibilité

Signalons qu'il est possible de vérifier a priori l'équilibre pour  $\bar{f}_i = 0$  à l'aide de fonctions de contrainte : fonction d'Airy en état plan de contrainte, fonctions de Maxwell ou de Morera dans le cas tridimensionnel et fonction de Prandtl en torsion.

## 9.7 Principe du minimum de l'énergie complémentaire

Ce principe, encore appelé principe de variation des contraintes, est le symétrique du principe de variation des déplacements. On peut l'établir de deux manières.

1. Dans le principe à deux champs de Fraeijs de Veubeke, on assure a priori les équations constitutives, ce qui mène à utiliser, comme dans le principe de Hellinger-Reissner, la densité d'énergie complémentaire  $\Phi(\sigma)$ . On obtient ainsi, après un changement de signe, la fonctionnelle

$$\mathcal{C}(\sigma) = \int_V \Phi(\sigma)dV - \int_{S_1} n_j\sigma_{ji}\bar{u}_i dS \quad (9.45)$$

stationnaire par rapport à tous les états de contrainte *statiquement admissibles*, c'est-à-dire vérifiant l'équilibre intérieur et extérieur.

2. Dans le principe de Hellinger-Reissner, on suppose l'équilibre vérifié à priori. La transformation suit la même voie que pour la déduction du principe à deux champs de Fraeijs de Veubeke et donne également la fonctionnelle (9.45).

Ce principe est résumé par le tableau suivant :

Principe de variation des contraintes		
Variable	Conditions essentielles	Conditions naturelles
$\sigma_{ij}$	équilibre dans $V$ , sur $S_1$ et sur $S_2$	Compatibilité

Si l'on utilise le principe de l'énergie complémentaire pour construire des solutions approchées, les champs de contrainte utilisés doivent tous vérifier exactement les conditions d'équilibre. La solution approchée ne vérifiera la compatibilité que sous certaines formes globales. Il ne sera donc plus possible de définir des déplacements locaux et il faudra se satisfaire de certaines valeurs moyennes.

## 9.8 Note sur la forme faible de la compatibilité

Notons  $E$  l'espace des champs de tenseurs symétriques du second ordre sur  $V$ , muni du produit scalaire

$$(\varphi, \psi) = \int_V \varphi_{ij} \psi_{ij} dV \tag{9.46}$$

Un champ de tenseurs compatible est par définition de la forme

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(D_i u_j + D_j u_i)$$

où  $u_i$  est un champ de déplacements admissible, c'est-à-dire vérifiant

$$\begin{cases} \|\varepsilon(u)\|^2 &= \int_V \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u) dV < \infty \\ u_i &= \bar{u}_i \text{ sur } S_1 \end{cases}$$

Une *variation de tenseur compatible* est de la forme

$$\delta \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\delta u)$$

où  $\delta u$  est la différence de deux champs de déplacements admissibles, de telle sorte que sur  $S_1$ , on a

$$\delta u_i = 0$$

Les variations de tenseurs compatibles forment un sous-espace  $C_0$  de  $E$ . On peut montrer que, muni du produit scalaire (9.46), ce sous-espace est complet et donc, fermé dans  $E$ . On notera que si l'on connaît un champ de déplacements particulier  $u_0$  tel que  $u_{0i} = \bar{u}_i$  sur  $S_1$ , tout champ de déplacements admissible est de la forme

$$u = u_0 + \Delta u$$

où  $\Delta u$  est une variation admissible de déplacement.

Considérons à présent le complément orthogonal  $S_0$  de  $C_0$ . Il est défini par la condition

$$\sigma \in S_0 \Leftrightarrow \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = 0 \quad \forall \varepsilon \in C_0$$

Ceci s'écrit explicitement

$$\int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} (D_i \delta u_j + D_j \delta u_i) dV = 0$$

ce qui signifie que  $\sigma$  est un champ d'autocontrainte. Ainsi,  $S_0$  n'est autre que l'ensemble des champs d'autocontrainte. Comme  $C_0$  est fermé, l'orthogonal de  $S_0$  est  $C_0$ .

Soit à présent un champ de tenseurs  $\varphi_{ij}$  vérifiant

$$\int_V \varphi_{ij} \delta \sigma_{ij} dV - \int_{S_1} n_j \delta \sigma_{ij} \bar{u}_i dS = 0 \quad (9.47)$$

pour tout champ d'autocontrainte  $\delta \sigma_{ij}$ . Introduisant un champ de déplacements  $u_0$  tel que  $u_{0i} = \bar{u}_i$  sur  $S_1$ , on a

$$\begin{aligned} \int_V \varepsilon_{ij}(u_0) \delta \sigma_{ij} dV &= \int_V \delta \sigma_{ij} \frac{1}{2} (D_i u_{0j} + D_j u_{0i}) dV \\ &= \int_{S_1} n_j \delta \sigma_{ij} u_{0i} dS + \int_{S_2} n_j \delta \sigma_{ij} u_{0i} dS + \int_V u_{0i} D_j \delta \sigma_{ij} dV \\ &= \int_{S_1} n_j \delta \sigma_{ij} u_{0i} dS + 0 + 0 \end{aligned}$$

La condition (9.47) est donc équivalente à

$$\int_V \delta \sigma_{ij} [\varphi_{ij} - \varepsilon_{ij}(u_0)] dV = 0 \quad \forall \delta \sigma$$

ou

$$\varphi_{ij} - \varepsilon_{ij}(u_0) \in C_0$$

ce qui revient à dire qu'il existe une variation admissible de déplacement  $\Delta u$  telle que

$$\varphi_{ij} = \varepsilon_{ij}(u_0) + \varepsilon_{ij}(\Delta u)$$

ou encore

$$\varphi_{ij} = \varepsilon_{ij}(u_0 + \Delta u)$$

et ceci exprime précisément la compatibilité.

## 9.9 Exemple de solution approchée construite par le calcul des variations

Pour illustrer la méthode variationnelle de construction de solutions approchées, étudions la flexion des poutres en  $I$  (fig. 9.3). Nous ferons les hypothèses suivantes :

1. Les *semelles* sont parfaitement flexibles dans le plan  $xOy$ , ce qui revient à dire qu'elles ne résistent qu'à l'extension. On posera donc

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \text{ dans les semelles} \quad (9.48)$$

On supposera en outre le déplacement axial uniforme dans chacune des semelles :

$$u = u_{\pm}(x) \quad (9.49)$$

l'indice (+) correspondant à la semelle inférieure (située en  $y > 0$ ) et l'indice (-), à l'autre semelle.

2. Dans *l'âme*, on admettra d'abord que l'état de contrainte est plan

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (9.50)$$

On ajoutera les hypothèses cinématiques suivantes :

$$\begin{cases} u &= U(x) + y\alpha(x) \\ v &= V(x) \end{cases} \quad (9.51)$$

La première représente une flexion à la Navier. La seconde, assez bien vérifiée si la poutre est raidie par des éléments transversaux non représentés

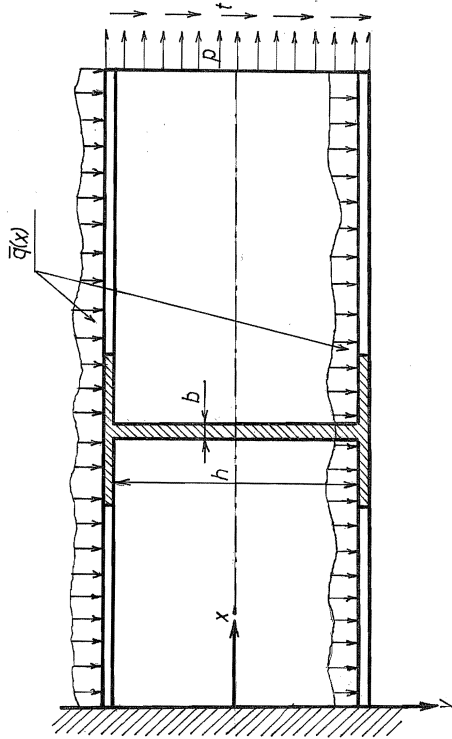


FIGURE 9.3 – Poutre en I

ici, entraîne que les charges transversales, de densité linéique  $q(x)$ , ont un travail virtuel

$$\delta\mathcal{T}_q = \int_0^\ell \bar{q}(x)\delta V(x)dx \quad (9.52)$$

quel que soit leur point d'application sur la section de la poutre. C'est pour cette raison que nous les avons représentées distribuées sur les deux semelles.

3. La *liaison* entre l'âme et la semelle sera assurée par les équations de compatibilité

$$v_{\text{semelles}} = V \quad (9.53)$$



et

$$u_+ = U + \frac{h}{2}\alpha, \quad u_- = U - \frac{h}{2}\alpha \quad (9.54)$$

Pour fixer les idées, nous considérerons une poutre console de longueur  $\ell$ . les conditions d'encastrement sont

$$U(0) = 0, \quad \alpha(0) = 0, \quad V(0) = 0 \quad (9.55)$$

En  $x = \ell$ , la poutre est soumise à des efforts longitudinaux  $\bar{p}$  et transversaux  $\bar{t}$ . Au vu des hypothèses relatives aux efforts dans les semelles, on doit avoir  $\bar{t} = 0$  sur celles-ci. Par contre, ces charges sont compatibles avec les hypothèses relatives à l'âme, et fournissent un travail virtuel

$$\delta\mathcal{T}_t = \int_{\Omega_{\hat{\text{âme}}}} \bar{t}\delta V(\ell)d\Omega = \bar{T}\delta V(\ell) \quad \text{où} \quad \bar{T} = \int_{\Omega_{\hat{\text{âme}}}} \bar{t}d\Omega \quad (9.56)$$

$\bar{T}$  étant l'effort tranchant imposé. Cette globalisation des efforts résulte des hypothèses cinématiques. Quant aux efforts  $\bar{p}$ , ils peuvent être répartis aussi bien sur l'âme que sur les semelles. Leur travail virtuel vaut

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{T}_p &= \int_{\Omega_+} \bar{p} \left[ \delta U(\ell) + \frac{h}{2} \delta\alpha(\ell) \right] d\Omega + \int_{\Omega_-} \bar{p} \left[ \delta U(\ell) - \frac{h}{2} \delta\alpha(\ell) \right] d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega_a} \bar{p} [\delta U(\ell) + y\delta\alpha(\ell)] d\Omega \\ &= \bar{N}\delta U(\ell) + \bar{M}\delta\alpha(\ell) \end{aligned} \quad (9.57)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \bar{N} &= \int_{\Omega_+} \bar{p}d\Omega + \int_{\Omega_-} \bar{p}d\Omega + \int_{\Omega_a} \bar{p}d\Omega && \text{(effort normal)} \\ \bar{M} &= \frac{h}{2} \int_{\Omega_+} \bar{p}d\Omega - \frac{h}{2} \int_{\Omega_-} \bar{p}d\Omega + \int_{\Omega_a} \bar{p}y d\Omega && \text{(moment)} \end{aligned} \right\} \quad (9.58)$$

La fonctionnelle du principe de Hellinger-Reissner s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \int_0^\ell \left\{ \int_{\Omega_a} \left[ \sigma_x \left( \frac{dU}{dx} + y \frac{d\alpha}{dx} \right) + \tau_{xy} \left( \alpha + \frac{dV}{dx} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y}{2E} - \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \right] d\Omega \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega_+} \left[ \sigma_x \left( \frac{dU}{dx} + \frac{h}{2} \frac{d\alpha}{dx} \right) - \frac{\sigma_x^2}{2E} \right] d\Omega + \int_{\Omega_-} \left[ \sigma_x \left( \frac{dU}{dx} - \frac{h}{2} \frac{d\alpha}{dx} \right) - \frac{\sigma_x^2}{2E} \right] d\Omega \right. \\ &\quad \left. - q(x)V(x) \right\} dx - \bar{N}U(\ell) - \bar{M}\alpha(\ell) - \bar{T}V(\ell) \end{aligned} \quad (9.59)$$

Par variation des différentes grandeurs qui interviennent dans cette fonctionnelle, on peut obtenir les équations de la poutre.

1. *Variation de  $\sigma_y$*  : on obtient

$$\frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E} = 0$$

soit

$$\sigma_y = \nu\sigma_x \quad (9.60)$$

2. *Variation de  $\sigma_x$  : dans l'âme*, on obtient

$$\sigma_x - \nu\sigma_y = E \left( \frac{dU}{dx} + y \frac{d\alpha}{dx} \right)$$

ce qui, combiné avec (9.60), donne

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \left( \frac{dU}{dx} + y \frac{d\alpha}{dx} \right) \quad (9.61)$$

*Dans les semelles*, on a

$$(\sigma_x)_\pm = E \left( \frac{dU}{dx} \pm \frac{h}{2} \frac{d\alpha}{dx} \right) \quad (9.62)$$

3. *Variation de  $U$*  : ce déplacement ne dépendant que de  $x$ , il faut d'abord intégrer sur la section, ce qui donne

$$\int_0^\ell \left[ \int_{\Omega_+} \sigma_x d\Omega + \int_{\Omega_-} \sigma_x d\Omega + \int_{\Omega_a} \sigma_x d\Omega \right] \frac{d\delta U}{dx} dx = \bar{N} \delta U(\ell) = 0$$

ce qui fait apparaître le groupement

$$N = \int_{\Omega_+} \sigma_x d\Omega + \int_{\Omega_-} \sigma_x d\Omega + \int_{\Omega_a} \sigma_x d\Omega \quad (9.63)$$

qui s'identifie à l'*effort normal*. Il vient donc

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\ell N \frac{d\delta U}{dx} dx - \bar{N} \delta U(\ell) \\ &= [N\delta U]_0^\ell - \bar{N} \delta U(\ell) - \int_0^\ell \frac{dN}{dx} \delta U(x) dx \end{aligned}$$

Tenant compte de la condition d'encastrement  $\delta U(0) = 0$ , on obtient

$$\begin{cases} \frac{dN}{dx} = 0 & \text{dans } ]0, \ell[ \\ N(\ell) = \bar{N} \end{cases} \quad (9.64)$$

4. *Variation de  $V$*  : on obtient

$$\int_0^\ell \left\{ \left[ \int_{\Omega_a} \tau_{xy} dS \right] \frac{d\delta V}{dx} - q\delta V \right\} dx - \bar{T}\delta V(\ell) = 0$$

En définissant l'*effort tranchant*

$$T = \int_{\Omega_a} \tau_{xy} dS \quad (9.65)$$

on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\ell \left( T \frac{d\delta V}{dx} - q\delta V \right) dx - \bar{T}\delta V(\ell) \\ &= [T\delta V]_0^\ell - \bar{T}\delta V(\ell) - \int_0^\ell \left( \frac{dT}{dx} + q \right) \delta V dx \end{aligned}$$

d'où, comme  $\delta V(0) = 0$ , les équations

$$\begin{cases} \frac{dT}{dx} + q = 0 & \text{dans } ]0, \ell[ \\ T(\ell) = \bar{T} \end{cases} \quad (9.66)$$

5. *Variation de  $\alpha$*  : on obtient ici

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \left\{ \left[ \int_{\Omega_+} \frac{h}{2} \sigma_x d\Omega - \int_{\Omega_-} \frac{h}{2} \sigma_x d\Omega + \int_{\Omega_a} y \sigma_x d\Omega \right] \frac{d\delta \alpha}{dx} \right. \\ \left. + \left[ \int_{\Omega_a} \tau_{xy} d\Omega \right] \delta \alpha \right\} dx - \bar{M}\delta \alpha(\ell) = 0 \end{aligned}$$

Définissant le *moment*

$$M = \frac{h}{2} \int_{\Omega_+} \sigma_x d\Omega - \frac{h}{2} \int_{\Omega_-} \sigma_x d\Omega + \int_{\Omega_a} \sigma_x y d\Omega \quad (9.67)$$

et tenant compte de la définition (9.65), on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\ell \left( M \frac{d\delta \alpha}{dx} + T\delta \alpha \right) dx \\ &= [M\delta \alpha]_0^\ell - \bar{M}\delta \alpha(\ell) - \int_0^\ell \left( \frac{dM}{dx} - T \right) \delta \alpha dx \end{aligned}$$

ce qui, comme  $\delta\alpha(0) = 0$ , donne

$$\begin{cases} \frac{dM}{dx} = T & \text{dans } ]0, \ell[ \\ M(\ell) = \bar{M} \end{cases} \quad (9.68)$$

6. *Variation de  $\tau_{xy}$*  : il vient

$$\tau_{xy} = G \left( \alpha + \frac{dV}{dx} \right) \text{ dans l'âme} \quad (9.69)$$

Comme on peut le voir, les contraintes étant libres de toute liaison, les équations de compatibilité (9.60), (9.61), 9.62) et (9.69) sont vérifiées localement. Au contraire, les restrictions faites sur les déplacements mènent à des équations d'équilibre globales. Ceci était prévisible à partir du tableau résumant le fonctionnement du principe de Hellinger-Reissner.

Par ailleurs, en combinant les équations ((9.60), (9.61), 9.62) et (9.69) aux définitions (9.63), (9.65) et (9.67) des résultantes, on peut obtenir des équations constitutives globales. Ce seront, en notant  $b$  l'épaisseur de l'âme,

$$\begin{cases} N = EA \frac{dU}{dx} & \text{avec } A = \Omega_+ + \Omega_- + \frac{bh}{1-\nu^2} \\ T = GS \left( \alpha + \frac{dV}{dx} \right) & \text{avec } S = bh \\ M = EI \frac{d\alpha}{dx} & \text{avec } I = \Omega_+ \frac{h^2}{4} + \Omega_- \frac{h^2}{4} + \frac{bh^3}{12(1-\nu^2)} \end{cases} \quad (9.70)$$

On retrouve ici des calculs simplifiés assez courants dans la pratique, consistant, d'une part, à utiliser la section de l'âme comme section de cisaillement et, d'autre part, à négliger l'inertie propre des semelles. Quant au facteur  $(1-\nu^2)$ , il provient de l'hypothèse selon laquelle le déplacement vertical ne dépend pas de  $y$ .

## 9.10 Classification des approches variationnelles

D'après le type d'hypothèses adoptées, on peut distinguer :

- les approches dont les hypothèses ne portent que sur les déplacements (avec respect des conditions sur  $S_1$ ), que l'on appelle *cinématiquement admissibles* (C.A.) ;
- les approches dont les hypothèses ne portent que sur les contraintes (avec respect de l'équilibre dans  $V$  et sur  $S_2$ ), que l'on appelle *statiquement admissibles* (S.A.) ;
- les approches dont les hypothèses portent à la fois sur les contraintes et les déplacements, que l'on appelle *mixtes*.

Les approches C.A. mènent à des équations d'équilibre approchées (globales), tandis que les approches S.A. donnent des équations de compatibilité approchées. Dans les approches mixtes, ni les équations d'équilibre, ni les équations de compatibilité ne sont vérifiées localement.

Ainsi, la théorie de la section précédente est une approche mixte. Cependant, si l'on considère que les hypothèses (9.48), (9.49) et (9.50) *définissent* la notion de poutre en I, il s'agit d'une théorie C.A. dans ce cadre. On trouvera dans les exercices du présent chapitre une théorie S.A. dans le cadre des poutres, qui mène à une vérification locale de l'équilibre, mais non de la compatibilité.

## 9.11 Analyse duale

Qui dit solution approchée dit erreur. Ne peut-on pas essayer de chiffrer cette dernière? C'est l'objet de l'analyse duale, consistant à effectuer, pour un même problème, une analyse C.A. *et* une analyse S.A., puis de les comparer.

### 9.11.1 Cas des relations constitutives linéaires

Nos commencerons par envisager le cas de relations constitutives linéaires, qui est le plus simple et celui dont les conclusions sont les plus fortes. Le présent mode d'exposé suit la méthode développée par l'auteur [17, 21, 20, 18].

Soit donc un problème élastique linéaire, dont la solution est caractérisée par des déplacements  $u$  et des contraintes  $\sigma$ , obtenues par variation des fonctionnelles

$$\begin{cases} \mathcal{E}(u) &= \int_V W(Du)dV - \int_V \bar{f}_i u_i dV - \int_{S_2} \bar{t}_i u_i dS \\ \mathcal{C}(\sigma) &= \int_V \Phi(\sigma)dV - \int_{S_1} n_j \sigma_{ji} \bar{u}_i dS \end{cases}$$

Par définition de l'énergie complémentaire, on a

$$\int_V W(Du)dV + \int_V \Phi(\sigma)dV = \int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) dV$$

Or, en posant, dans le théorème des travaux virtuels,

$$\delta u_i = u_i \text{ dans } V \cup S_2 \text{ et } \delta u_i = \bar{u}_i \text{ sur } S_1$$

on obtient

$$\int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) dV - \int_V \bar{f}_i u_i dS - \int_{S_2} \bar{t}_i u_i dS - \int_{S_1} n_j \sigma_{ji} \bar{u}_i dS = 0$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{E}(u) + \mathcal{C}(\sigma) = 0 \quad (9.71)$$

Pour un *quelconque* autre champ de déplacements C.A.  $\tilde{u}$ , on peut écrire  $\tilde{u}_i = u_i + \Delta u_i$  et, comme l'énergie totale est une fonction quadratique,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\tilde{u}) &= \mathcal{E}(u + \Delta u) \\ &= \mathcal{E}(u) + \delta\mathcal{E}(u; \Delta u) + \frac{1}{2}\delta^2\mathcal{E}(u; \Delta u) \\ &= \mathcal{E}(u) + \frac{1}{2}\delta^2\mathcal{E}(u; \Delta u) \end{aligned} \quad (9.72)$$

puisque le déplacement  $u$  réalise la stationnarité. On a d'ailleurs

$$\delta^2\mathcal{E}(u; \Delta u) = \int_V C_{ijkl}\varepsilon_{ij}(\Delta u)\varepsilon_{kl}(\Delta u)dV \geq 0 \quad (9.73)$$

et cette grandeur est une mesure énergétique de l'erreur, définie positive, que l'on peut noter  $\|\Delta u\|$ .

De la même façon, pour un *quelconque* autre champ de contraintes  $\tilde{\sigma}$ , on peut écrire  $\tilde{\sigma} = \sigma + \Delta\sigma$  et on a comme ci-dessus

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\tilde{\sigma}) &= \mathcal{C}(\sigma + \Delta\sigma) \\ &= \mathcal{C}(\sigma) + \delta\mathcal{C}(\sigma; \Delta\sigma) + \frac{1}{2}\delta^2\mathcal{C}(\sigma; \Delta\sigma) \\ &= \mathcal{C}(\sigma) + \frac{1}{2}\delta^2\mathcal{C}(\sigma; \Delta\sigma) \end{aligned} \quad (9.74)$$

avec

$$\delta^2\mathcal{C}(\sigma; \Delta\sigma) = \int_V C_{ijkl}^{-1}\Delta\sigma_{ij}\Delta\sigma_{kl}dV \geq 0 \quad (9.75)$$

cette grandeur étant une mesure énergétique de l'erreur, définie positive, que l'on peut noter  $\|\Delta\sigma\|$ . Additionnant les résultats (9.72) et (9.74), on obtient

$$\mathcal{E}(\tilde{u}) + \mathcal{C}(\tilde{\sigma}) = \mathcal{E}(u) + \mathcal{C}(\sigma) + \frac{1}{2}\delta^2\mathcal{E}(u; \Delta u) + \frac{1}{2}\delta^2\mathcal{C}(\sigma; \Delta\sigma) \quad (9.76)$$

soit, en tenant compte de (9.71),

$$\mathcal{E}(\tilde{u}) + \mathcal{C}(\tilde{\sigma}) = \frac{1}{2}(\|\Delta u\|^2 + \|\Delta\sigma\|^2) \quad (9.77)$$

Cette formule sert de fondement à l'analyse duale de l'erreur : *pour connaître la somme des erreurs d'énergie, il suffit d'additionner les valeurs des deux fonctionnelles  $\mathcal{E}(\tilde{u})$  et  $\mathcal{C}(\tilde{\sigma})$* . On peut d'ailleurs développer certaines relations d'orthogonalité et, à partir de là, montrer que  $\sqrt{2[\mathcal{E}(\tilde{u}) + \mathcal{C}(\tilde{\sigma})]}$  définit une distance entre les deux approximations, mais ces faits, bien qu'intéressants, ne nous serviront pas.

Dans le cadre de méthodes numériques comme celle des éléments finis, il est utile de représenter la convergence d'approximations successives sur un diagramme. A cette fin, définissons l'énergie complémentaire prolongée  $\mathcal{C}^*$  par

$$\mathcal{C}^* = \begin{cases} -\mathcal{E}(\tilde{u}) & \text{pour l'approche C.A.} \\ \mathcal{C}(\tilde{\sigma}) & \text{pour l'approche S.A.} \end{cases} \quad (9.78)$$

On obtient alors, en fonction des paramètres de la discrétisation, des courbes de convergence d'un des deux types représentés en figure (9.4). La première version,

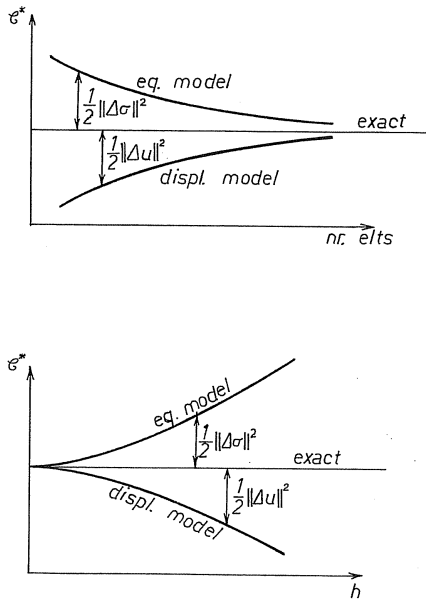


FIGURE 9.4 – Courbes de convergence

où la convergence est exprimée en termes du nombre de degrés de liberté ou de

l'inverse de la taille des éléments finis, est la plus courante. La seconde, dont l'abscisse est l'inverse du nombre de degrés de liberté ou la taille d'une maille, est par certains côtés préférable, car la solution exacte est alors la valeur à l'origine de  $\mathcal{C}^*$ , plus facile à estimer que la valeur asymptotique de la première représentation.

### 9.11.2 Les cas particuliers de Fraeijns de Veubeke

La formule (9.77) admet deux cas particuliers, obtenus antérieurement par Fraeijns de Veubeke [30, 32, 35]. Pour abrégier les notations, nous écrivons

$$\begin{cases} \mathcal{U}(u) = \int_V W(Du)dV & , \quad \mathcal{P}(u) = -\int_V \bar{f}_i u_i dV - \int_{S_2} \bar{t}_i u_i dS \\ \Psi(\sigma) = \int_V \Phi(\sigma)dV & , \quad \mathcal{Q}(\sigma) = -\int_{S_1} n_j \sigma_{ji} \bar{u}_i dS \end{cases} \quad (9.79)$$

1. On suppose que sur  $S_1$ , on a  $\bar{u}_i = 0$ . On suppose en outre que le champ de déplacement  $\tilde{u}$  a été obtenu par une technique de Rayleigh-Ritz, c'est-à-dire que

$$\delta\mathcal{U}(\tilde{u}; \delta\tilde{u}) + \delta\mathcal{P}(\delta\tilde{u}) = 0$$

pour tout  $\delta\tilde{u}$  de l'espace des déplacements approchés. Alors, la solution exacte  $u$  et la solution approchée  $\tilde{u}$  sont des variations admissibles de déplacement et on a

$$\delta\mathcal{U}(u; u) = 2\mathcal{U}(u) = -\mathcal{P}(u)$$

et de même

$$\delta\mathcal{U}(\tilde{u}; \tilde{u}) = 2\mathcal{U}(\tilde{u}) = -\mathcal{P}(\tilde{u})$$

ce qui entraîne

$$\mathcal{E}(u) = -\mathcal{U}(u) \text{ et } \mathcal{E}(\tilde{u}) = -\mathcal{U}(\tilde{u})$$

et

$$\mathcal{U}(\tilde{u}) \leq \mathcal{U}(u)$$

D'autre part,

$$\mathcal{C}(\sigma) = \Psi(\sigma) \leq \mathcal{C}(\tilde{\sigma}) = \Psi(\tilde{\sigma})$$

On a alors

$$\mathcal{U}(\tilde{u}) \leq \mathcal{U}(u) = \Psi(\sigma) \leq \Psi(\tilde{\sigma}) \quad (9.80)$$

et

$$\mathcal{E}(\tilde{u}) + \mathcal{C}(\tilde{\sigma}) = \Psi(\tilde{\sigma}) - \mathcal{U}(\tilde{u}) \quad (9.81)$$



2. On suppose que  $\bar{f}_i = 0, \bar{t}_i = 0$ . On suppose en outre que le champ de contraintes  $\tilde{\sigma}$  a été obtenu par une technique de Rayleigh-Ritz, c'est-à-dire que

$$\delta\Psi(\tilde{\sigma}, \delta\tilde{\sigma}) + \delta\mathcal{Q}(\delta\tilde{\sigma}) = 0$$

pour tout  $\delta\tilde{\sigma}$  de l'espace des contraintes approchées. Alors, la solution exacte  $\sigma$  et la solution approchée  $\tilde{\sigma}$  sont des variations admissibles de contrainte et on a

$$\delta\Psi(\sigma; \sigma) = 2\Psi(\sigma) = -\mathcal{Q}(\sigma)$$

et

$$\delta\Psi(\tilde{\sigma}; \tilde{\sigma}) = 2\Psi(\tilde{\sigma}) = -\mathcal{Q}(\tilde{\sigma})$$

ce qui entraîne

$$\mathcal{C}(\sigma) = -\Psi(\sigma) \text{ et } \mathcal{C}(\tilde{\sigma}) = -\Psi(\tilde{\sigma})$$

Par ailleurs,

$$\mathcal{E}(u) = \mathcal{U}(u) \leq \mathcal{E}(\tilde{u}) = \mathcal{U}(\tilde{u})$$

On a donc

$$\Psi(\tilde{\sigma}) \leq \Psi(\sigma) = \mathcal{U}(u) \leq \mathcal{U}(\tilde{u}) \tag{9.82}$$

et

$$\mathcal{E}(\tilde{u}) + \mathcal{C}(\tilde{\sigma}) = \mathcal{U}(\tilde{u}) - \Psi(\tilde{\sigma}) \tag{9.83}$$

### 9.11.3 Cas de relations constitutives non linéaires

On peut se poser la question de ce qu'il subsiste de l'analyse duale lorsque les relations constitutives sont non linéaires. En examinant la démonstration du cas linéaire, on remarque que tout repose sur le fait que la variation seconde de l'énergie totale et de l'énergie complémentaire totale est positive. En fait, cela revient à dire que  $W(\varepsilon)$  et que  $\Phi(\sigma)$  sont *convexes*.

Rappelons qu'une fonction  $W(\varepsilon)$  est convexe si pour tout couple  $(\varepsilon^1, \varepsilon^2)$ , on a systématiquement, pour  $0 \leq \lambda \leq 1$ , la relation

$$W((1-\lambda)\varepsilon^1 + \lambda\varepsilon^2) \leq (1-\lambda)W(\varepsilon^1) + \lambda W(\varepsilon^2) \tag{9.84}$$

On notera d'abord le théorème suivant :

**Théorème 9** *Si  $W(\varepsilon)$  est convexe, il en est de même de  $\Phi(\sigma)$ .*

En effet, partant de la définition de  $\Phi(\sigma)$ ,

$$\Phi(\sigma) = \max_{\varepsilon} (\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - W(\varepsilon))$$

il est clair que pour un choix *quelconque*  $\varepsilon^*$  de  $\varepsilon$ , on a

$$\Phi(\sigma) \geq \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* - W(\varepsilon^*)$$

Choisissons  $\varepsilon^*$  correspondant par les équations constitutives au champ de contrainte  $(1 - \lambda)\sigma^1 + \lambda\sigma^2$ . On a donc

$$\Phi((1 - \lambda)\sigma^1 + \lambda\sigma^2) = ((1 - \lambda)\sigma_{ij}^1 + \lambda\sigma_{ij}^2) \varepsilon_{ij}^* - W(\varepsilon^*) \quad (9.85)$$

Mais

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma^1) &\geq \sigma_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^* - W(\varepsilon^*) \\ \Phi(\sigma^2) &\geq \sigma_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^* - W(\varepsilon^*) \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$(1 - \lambda)\Phi(\sigma^1) + \lambda\Phi(\sigma^2) \geq ((1 - \lambda)\sigma_{ij}^1 + \lambda\sigma_{ij}^2) \varepsilon_{ij}^* - W(\varepsilon^*) \quad (9.86)$$

La comparaison de (9.85) et (9.86) donne

$$\Phi((1 - \lambda)\sigma^1 + \lambda\sigma^2) \leq (1 - \lambda)\Phi(\sigma^1) + \lambda\Phi(\sigma^2)$$

**Remarque** - La réciproque est vraie, car on a également

$$W(\varepsilon) = \max_{\sigma} (\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - \Phi(\sigma))$$

En outre, il est aisé de montrer le

**Théorème 10** *Si  $W(\varepsilon)$  est convexe et différentiable, on a*

$$W(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \geq W(\varepsilon) + \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{\varepsilon} \Delta\varepsilon_{ij}$$

En effet, pour  $\lambda \in [0, 1]$ , on a

$$\begin{aligned} W(\varepsilon + \lambda\Delta\varepsilon) &\leq (1 - \lambda)W(\varepsilon) + \lambda W(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \\ &\leq W(\varepsilon) + \lambda[W(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - W(\varepsilon)] \end{aligned}$$

si bien que

$$\frac{W(\varepsilon + \lambda\delta\varepsilon) - W(\varepsilon)}{\lambda} \leq W(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - W(\varepsilon)$$

Or,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{W(\varepsilon + \lambda\delta\varepsilon) - W(\varepsilon)}{\lambda} = \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_\varepsilon \Delta \varepsilon_{ij}$$

Revenons à l'analyse duale. On a

$$\mathcal{E}(u + \Delta u) - \mathcal{E}(u) = \int_V [W(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - W(\varepsilon)] + \mathcal{P}(\Delta u)$$

Le fait que  $\mathcal{E}$  soit stationnaire en  $u$  s'écrit

$$\delta\mathcal{E}(u; \Delta u) = \int_V \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_\varepsilon \Delta \varepsilon_{ij} + \mathcal{P}(\Delta u) = 0$$

Soustrayant ces deux relations, on obtient

$$\mathcal{E}(u + \Delta u) - \mathcal{E}(u) = \int_V [W(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - W(\varepsilon) - \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_\varepsilon \Delta \varepsilon_{ij}] dV \geq 0$$

en vertu du théorème 10. De la même façon, on obtient aisément

$$\mathcal{C}(\sigma + \Delta\sigma) \geq \mathcal{C}(\sigma)$$

et du reste, la relation (9.71) subsiste, car elle ne fait appel qu'au théorème des travaux virtuels et à la définition de  $\Phi(\sigma)$  par transformation de Legendre.

Malheureusement, cela ne suffit pas pour obtenir une idée de la distance entre les solutions approchées et la solution exacte. Il faut pour cela faire une hypothèse plus restrictive, à savoir, la *convexité forte*, qui consiste à supposer qu'il existe deux constantes positives  $\alpha$  et  $\beta$  telles que

$$\begin{cases} W(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \geq W(\varepsilon) + \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_\varepsilon \Delta \varepsilon_{ij} + \alpha |\Delta \varepsilon|^2 \\ \Phi(\sigma + \Delta\sigma) \geq \Phi(\sigma) + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \right)_\sigma \Delta \sigma_{ij} + \beta |\Delta \sigma|^2 \end{cases} \quad (9.87)$$

Ces conditions sont remplies si  $W$  et  $\Phi$  sont de classe  $C^2$  et que les valeurs propres (v.p.) de leurs matrices hessiennes respectives

$$H_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}$$

et

$$H_{ijkl}^{-1} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}}$$

vérifient

$$\begin{aligned} \inf_{x \in V} \min_{\varepsilon} [\text{v.p.}(H)] &= \alpha > 0 \\ \inf_{x \in V} \min_{\sigma} [\text{v.p.}(H^{-1})] &= \beta > 0 \end{aligned}$$

On obtient alors une forme affaiblie de l'analyse duale, à savoir,

$$\begin{aligned} \alpha \|\varepsilon(\Delta u)\|_0^2 &\leq \mathcal{E}(\tilde{u}) - \mathcal{E}(u) \\ \beta \|\Delta \sigma\|_0^2 &\leq \mathcal{C}(\tilde{\sigma}) - \mathcal{C}(\sigma) \end{aligned}$$

où  $\|\cdot\|_0$  figure la norme dans  $L^2$ . En d'autres termes, la différence d'énergie totale ou d'énergie complémentaire totale *majore* l'erreur en norme  $L^2$  des déformations ou des contraintes

## 9.12 Bornes des raideurs et coefficients d'influence directs

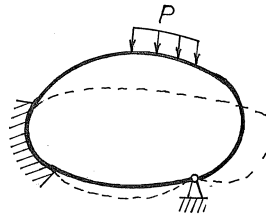


FIGURE 9.5 – Bornes des raideurs

Les relations (9.80) et (9.82) impliquent également la possibilité d'encadrer les coefficients directs d'influence ou de raideur [79, 78, 80, 95]. Soit d'abord un système de charges dont l'intensité est contrôlée par un paramètre  $P$ , appelé *charge généralisée* (fig. 9.5). Sous ce système de charges, la structure subira des déplacements conduisant à un travail  $\mathcal{T}$ . On appelle *déplacement généralisé conjugué à la charge généralisée  $P$*  le rapport

$$U = \frac{\mathcal{T}}{P} = \frac{2\mathcal{U}}{P} = \frac{2\Psi}{P} \quad (9.88)$$

Le *coefficient d'influence direct* de la charge  $P$  est alors défini par

$$F = \frac{U}{P} = \frac{\mathcal{T}}{P^2} \quad (9.89)$$

Pour le déterminer, on peut utiliser un modèle C.A. : on aura alors, puisque  $\bar{u}_i = 0$  sur  $S_1$ ,

$$F_{CA} = \frac{\mathcal{T}}{P^2} = \frac{2\mathcal{U}_{CA}}{P^2}$$

Dans un modèle S.A., on définira  $F_{SA}$  par

$$F_{SA} = \frac{2\Psi_{SA}}{P^2}$$

Il résulte alors de (9.80) que

$$F_{CA} \leq F \leq F_{SA} \quad (9.90)$$

De la même façon, supposons que l'on impose à la structure un système de déplacements de frontière contrôlés par un paramètre  $U$ , appelé *déplacement généralisé*. Si  $\mathcal{T}$  est le travail de ces déplacements, la *force généralisée conjuguée* est par définition

$$P = \frac{\mathcal{T}}{U} = \frac{2\mathcal{U}}{U} = \frac{2\Psi}{U} \quad (9.91)$$

et la *raideur directe*,

$$K = \frac{P}{U} = \frac{\mathcal{T}}{U^2} \quad (9.92)$$

Dans le cadre d'un modèle S.A., on calculera

$$K_{SA} = -\frac{Q_{SA}}{U^2} = \frac{2\Psi_{SA}}{U^2}$$

et dans le cadre d'un modèle C.A.,

$$K_{CA} = \frac{2\mathcal{U}}{U^2}$$

Il résulte alors de (9.82) que

$$K_{SA} \leq K \leq K_{CA} \quad (9.93)$$

Cette possibilité d'encadrer la vraie valeur des raideurs ou des coefficients d'influence rend de nombreux services en pratique.

### 9.13 Exercices

**Exercice 32** Montrer qu'il est possible d'imaginer des relations constitutives homogènes de degré 1 mais non linéaires.

*Suggestion* - Pour

$$W = \sqrt{\varepsilon_{11}^4 + \varepsilon_{22}^4 + \varepsilon_{33}^4 + \gamma_{12}^4 + \gamma_{23}^4 + \gamma_{31}^4}$$

(homogène de degré 2), on a

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{2\varepsilon_{11}^3}{W}, & \sigma_{22} &= \frac{2\varepsilon_{22}^3}{W}, & \sigma_{33} &= \frac{2\varepsilon_{33}^3}{W} \\ \tau_{12} &= \frac{2\gamma_{12}^3}{W}, & \tau_{23} &= \frac{2\gamma_{23}^3}{W}, & \tau_{31} &= \frac{2\gamma_{31}^3}{W} \end{aligned}$$

et ces relations sont visiblement homogènes de degré 1 :

$$\sigma_{11}(\alpha\varepsilon) = \frac{2\alpha^3\varepsilon_{11}^3}{\alpha^2W} = \alpha \frac{2\varepsilon_{11}^3}{W} = \alpha\sigma_{11}(\varepsilon), \text{ etc.}$$

On vérifie que

$$\begin{aligned} \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + \tau_{12}\gamma_{12} + \tau_{23}\gamma_{23} + \tau_{31}\gamma_{31} \\ = \frac{2(\varepsilon_{11}^4 + \varepsilon_{22}^4 + \varepsilon_{33}^4 + \gamma_{12}^4 + \gamma_{23}^4 + \gamma_{31}^4)}{W} = 2W \end{aligned}$$

**Exercice 33** Montrer que si les relations constitutives sont invertibles,

1.  $W(\varepsilon)$  ne peut être homogène de degré 1.
2.  $\Phi(\sigma)$  ne peut être constante.

*Solution*

1. Si  $W(\varepsilon)$  est homogène de degré 1, on a, par le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes,

$$W(\varepsilon) = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij}$$

ce qui entraîne

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} d\varepsilon_{kl}$$

Comme, par ailleurs,

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}$$

on obtient

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{ij} d\varepsilon_{kl} \quad \forall d\varepsilon_{kl}$$

ce qui implique

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{ij} = 0$$

en contradiction avec l'hypothèse.

2. Si  $\Phi(\sigma) = \text{cte}$ , on a

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = 0$$

donc la relation entre  $\sigma$  et  $\varepsilon$  n'est pas bijective.

**Exercice 34** Étudier la poutre en  $I$  décrite en section 9.9, pour  $q(x) \equiv 0$ , en faisant les hypothèses suivantes :

H1. Les semelles sont parfaitement souples en flexion,

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

et leur déplacement est uniforme :

$$u = u_{\pm}(x)$$

H2. L'âme ne résiste qu'au cisaillement :

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

- Quelles distributions de charges d'extrémité  $\bar{p}$  et  $\bar{t}$  peut-elle admettre dans ces hypothèses ?
- Écrire les équations de la poutre.
- Dans le cadre des hypothèses H1, la solution de la section 9.9 est C.A., et celle de cet exercice est S.A.. Que peut-on en déduire pour les coefficients d'influence relatifs à l'effort tranchant d'extrémité ? Vérifier que c'est bien le cas.
- Étudier la compatibilité des déplacements de l'âme et des déplacements de la semelle.

*Solution*

a) Dans l'âme, les équations d'équilibre s'écrivent

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ 0 &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

La contrainte  $\tau_{xy}$  est donc une constante, que nous noterons  $\tau$ . Dès lors, à l'extrémité,

- les charges  $\bar{p}$  doivent être concentrées sur les semelles;
- les charges  $\bar{t}$  doivent être uniformément réparties sur l'âme seule.

b) L'énergie complémentaire de l'âme s'écrit

$$\int_0^\ell \frac{\tau^2}{2G} \Omega_a dx = \frac{\tau^2}{2G} \Omega_a \ell \quad (9.94)$$

et la fonctionnelle de Hellinger-Reissner pour l'âme a pour expression

$$\mathcal{R}_a = \int_0^\ell \left[ \int_{\Omega_a} \tau \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega_a \right] dx - \frac{\tau^2}{2G} \Omega_a \ell \quad (9.95)$$

Pour les semelles, on a

$$\mathcal{R}_s = \int_0^\ell \left[ \int_{\Omega_+} \left( \sigma_+ \frac{du_+}{dx} - \frac{\sigma_+^2}{2E} \right) d\Omega + \int_{\Omega_-} \left( \sigma_- \frac{du_-}{dx} - \frac{\sigma_-^2}{2E} \right) d\Omega \right] dx \quad (9.96)$$

Enfin, les charges ont pour contribution

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_c = \mathcal{P} &= -u_+(\ell) \int_{\Omega_+} \bar{p} d\Omega - u_-(\ell) \int_{\Omega_-} \bar{p} d\Omega - \bar{t} \int_{\Omega_a} v(\ell) d\Omega \\ &= -\bar{N}_+ u_+(\ell) - \bar{N}_- u_-(\ell) - \bar{T} \frac{1}{\Omega_a} \int_{\Omega_a} v(\ell) d\Omega \end{aligned} \quad (9.97)$$

où l'on a posé

$$\bar{N}_+ = \int_{\Omega_+} \bar{p} d\Omega, \quad \bar{N}_- = \int_{\Omega_-} \bar{p} d\Omega \quad (9.98)$$



et

$$\bar{T} = \bar{t}\Omega_a \quad (9.99)$$

La fonctionnelle complète est

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_a + \mathcal{R}_s + \mathcal{R}_c \quad (9.100)$$

Varions les différentes grandeurs :

(i) **Variation de  $\tau$**  : on obtient

$$\delta\tau \int_0^\ell \left[ \int_{\Omega_a} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega_a \right] dx - \frac{\tau}{G} \Omega_a \ell \delta\tau = 0$$

soit

$$\tau = \frac{G}{\Omega_a \ell} \int_0^\ell \left[ \int_{\Omega_a} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega_a \right] dx \quad (9.101)$$

(ii) **Variation de  $\sigma_\pm$**  : il vient

$$\int_0^\ell \left[ \int_{\Omega_\pm} \delta\sigma_\pm \left( \frac{du_\pm}{dx} - \frac{\sigma_\pm}{E} \right) d\Omega \right] dx = 0$$

ce qui donne

$$\sigma_\pm(x) = E \frac{du_\pm}{dx} \quad (9.102)$$

(iii) **Variation de  $u$**  : Dans l'âme,  $\delta u$  est arbitraire; à la jonction de l'âme et des semelles, on a

$$\delta u_\pm = \delta u(x, \pm \frac{h}{2})$$

Il en découle

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell \left[ \int_{\Omega_a} \tau \frac{\partial \delta u}{\partial y} d\Omega \right] dx + \int_0^\ell \left( \int_{\Omega_+} \sigma_+ d\Omega_+ \right) \frac{d}{dx} \delta u(x, \frac{h}{2}) dx \\ & + \int_0^\ell \left( \int_{\Omega_-} \sigma_- d\Omega_- \right) \frac{d}{dx} \delta u(x, -\frac{h}{2}) dx - \bar{N}_+ \delta u_+(\ell) - \bar{N}_- \delta u_-(\ell) = 0 \end{aligned}$$

Posant

$$N_+(x) = \int_{\Omega_+} \sigma_+(x) d\Omega, \quad N_-(x) = \int_{\Omega_-} \sigma_-(x) d\Omega \quad (9.103)$$

on obtient, comme  $\tau$  est constant,

$$\int_0^\ell \left[ b\tau \delta u(x, \frac{h}{2}) - b\tau \delta u(x, -\frac{h}{2}) - \frac{dN_+}{dx} \delta u(x, \frac{h}{2}) - \frac{dN_-}{dx} \delta u(x, -\frac{h}{2}) \right] dx \\ + [N_+(\ell) - \bar{N}_+] \delta u(\ell, \frac{h}{2}) + [N_-(\ell) - \bar{N}_-] \delta u(\ell, -\frac{h}{2}) = 0$$

On en déduit les conditions d'extrémité

$$N_+(\ell) = \bar{N}_+, \quad N_-(\ell) = \bar{N}_- \quad (9.104)$$

et les conditions de transition âme-semelles

$$\frac{dN_+}{dx} = b\tau, \quad \frac{dN_-}{dx} = -b\tau \quad (9.105)$$

(iv) **Variation de  $v$  :** on obtient

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \quad \tau(\ell) = q = \tau \quad (9.106)$$

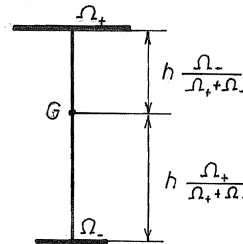


FIGURE 9.6 – Poutre en I à âmes inégales

Il est intéressant de ramener ces équations à la forme classique des poutres. Notons que le centre de gravité de la section est placé du côté de la semelle

la plus large, avec un rapport de segments  $\Omega_+/\Omega_-$  (fig. 9.6). Nous poserons donc

$$\begin{aligned}
 N(x) &= N_+(x) + N_-(x) \\
 \bar{N} &= \bar{N}_+ + \bar{N}_- \\
 M(x) &= \frac{h}{\Omega_+ + \Omega_-} (\Omega_- N_+(x) - \Omega_+ N_-(x)) \\
 \bar{M} &= \frac{h}{\Omega_+ + \Omega_-} (\Omega_- \bar{N}_+ - \Omega_+ \bar{N}_-) \\
 T(x) &= \tau bh = \bar{T}
 \end{aligned} \tag{9.107}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
 \frac{dN}{dx} &= \frac{dN_+}{dx} + \frac{dN_-}{dx} = 0, & N(x) &= \text{cte} = \bar{N} \\
 \frac{dM}{dx} &= \frac{h}{\Omega_+ + \Omega_-} \left( \Omega_- \frac{dN_+}{dx} - \Omega_+ \frac{dN_-}{dx} \right) = bh\tau = T, & M(\ell) &= \bar{M} \\
 \frac{dT}{dx} &= 0, & T(x) &= \bar{T} \quad (9.108)
 \end{aligned}$$

On en déduit directement

$$M(x) = \bar{M} - Tx$$

et comme

$$N(x) + \frac{\Omega_+ + \Omega_-}{\Omega_+ h} M(x) = N_+(x) + \frac{\Omega_-}{\Omega_+} N_+(x)$$

on a

$$\begin{aligned}
 N_+(x) &= \frac{1}{1 + \frac{\Omega_-}{\Omega_+}} \left( N(x) + \frac{\Omega_+ + \Omega_-}{\Omega_+ h} M(x) \right) \\
 &= \frac{\Omega_+}{\Omega_+ + \Omega_-} N(x) + \frac{1}{h} M(x) \quad (9.109)
 \end{aligned}$$

et, de même,

$$N_-(x) = \frac{\Omega_-}{\Omega_+ + \Omega_-} N(x) - \frac{1}{h} M(x)$$

On peut également établir les équations constitutives globales. On a d'abord

$$N_+ = E\Omega_+ \frac{du_+}{dx}, \quad N_- = E\Omega_- \frac{du_-}{dx}$$

puis

$$N = E \left( \Omega_+ \frac{du_+}{dx} + \Omega_- \frac{du_-}{dx} \right) = E(\Omega_+ + \Omega_-) \frac{d\hat{u}}{dx} \quad (9.110)$$

avec

$$\hat{u} = \frac{\Omega_+}{\Omega_+ + \Omega_-} u_+ + \frac{\Omega_-}{\Omega_+ + \Omega_-} u_-$$

Pour le moment de flexion,

$$\begin{aligned} M &= \frac{hE}{\Omega_+ + \Omega_-} \left( \Omega_- \Omega_+ \frac{du_+}{dx} - \Omega_+ \Omega_- \frac{du_-}{dx} \right) \\ &= \frac{E\Omega_+ \Omega_- h}{\Omega_+ + \Omega_-} \left( \frac{du_+}{dx} - \frac{du_-}{dx} \right) \\ &= E\hat{I} \frac{d\alpha}{dx} \end{aligned} \quad (9.111)$$

avec

$$\hat{I} = \Omega_+ \left( \frac{h\Omega_-}{\Omega_+ + \Omega_-} \right)^2 + \Omega_- \left( \frac{h\Omega_+}{\Omega_+ + \Omega_-} \right)^2 = \frac{h^2 \Omega_+ \Omega_-}{\Omega_+ + \Omega_-} \quad (9.112)$$

et

$$\alpha = \frac{u_+ - u_-}{h} \quad (9.113)$$

Enfin, pour l'effort tranchant,

$$\begin{aligned} T &= G \int_{\Omega_a} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega_a \\ &= G \left[ b(u_+ - u_-) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\Omega_a} v d\Omega_a \right] \\ &= Gbh \left( \alpha + \frac{d\hat{v}}{dx} \right) \end{aligned} \quad (9.114)$$

avec

$$\hat{v} = \frac{1}{bh} \int_{\Omega_a} v d\Omega \quad (9.115)$$

- c) Dans la théorie de la section 9.9, pour une charge en bout, on a (en posant  $\Omega_+ = \Omega_- = \Omega_s$ )

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx} &= 0 \Rightarrow \frac{d^2M}{dx^2} = 0, \quad M = -\bar{T}(\ell - x) \\ \alpha &= \frac{1}{EI} \int M dx = -\frac{\bar{T}}{EI} \left( \ell x - \frac{x^2}{2} \right) \\ \frac{dV}{dx} &= \frac{\bar{T}}{GS} - \alpha = \frac{\bar{T}}{GS} + \frac{\bar{T}}{EI} \left( \ell x - \frac{x^2}{2} \right) \\ V &= \bar{T} \left( \frac{x}{GS} + \frac{\ell x^2}{2EI} - \frac{x^3}{6EI} \right) \end{aligned}$$

et, à l'extrémité,

$$V(\ell) = \bar{T} \left( \frac{\ell}{GS} + \frac{\ell^3}{3EI} \right)$$

Le travail vaut donc

$$\mathcal{T} = \bar{T}V(\ell) = \bar{T}^2 \left( \frac{\ell}{GS} + \frac{\ell^3}{EI} \right)$$

d'où

$$F_{CA} = \frac{\ell}{GS} + \frac{\ell^3}{EI}$$

Dans la présente théorie, les mêmes équations s'appliquent, et on a

$$F_{SA} = \frac{\ell}{G\hat{S}} + \frac{\ell^3}{E\hat{I}}$$

Mais

$$\begin{cases} I &= \Omega_s \frac{h^2}{2} + \frac{bh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \hat{I} = \Omega_s \frac{h^2}{2} \leq I \\ \hat{S} &= S = bh \end{cases}$$

On a donc

$$F_{CA} \leq F_{\text{réel}} \leq F_{SA}$$

- d) Nous nous limiterons au cas des semelles identiques. On a, d'une part,

$$\frac{du_{\pm}}{dx} = \frac{N_{\pm}}{E\Omega_{\pm}} = \frac{1}{E\Omega_s} \left[ \bar{N} \pm \frac{2}{h}(\bar{M} - \bar{T}x) \right] = \frac{1}{E\Omega_s} [\bar{N} \mp \bar{T}\ell]$$

et, d'autre part,

$$\tau = G \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

ce qui entraîne

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau}{G} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

et

$$\int_{\Omega_a} \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{\tau bh}{G} - \hat{S} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x}$$

soit

$$\begin{aligned} \left[ u(x, \frac{h}{2}) - u(x, -\frac{h}{2}) \right] b &= \frac{\tau bh}{G} - \hat{S} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \\ &= \frac{\bar{T}}{G} - \hat{S} \left[ \frac{\bar{T}}{G\hat{S}} + \frac{\bar{T}}{E\hat{I}} \left( \ell x - \frac{x^2}{2} \right) \right] \\ &= -\frac{\bar{T}\hat{S}}{E\hat{I}} \left( \ell x - \frac{x^2}{2} \right) \end{aligned}$$

à comparer à

$$b[u_+(x) - u_-(x)] = -\frac{2b}{E\Omega_s} \bar{T} \ell x$$

On constate que ces déplacements sont différents : *la compatibilité locale est violée*, du fait des restrictions sur les contraintes.

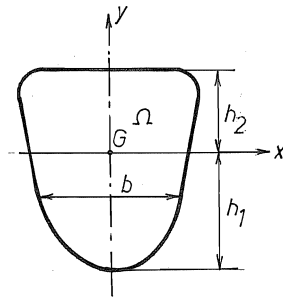


FIGURE 9.7 – Poutre à section symétrique par rapport au plan de flexion

**Exercice 35** Établir une théorie statiquement admissible de la flexion des poutres ayant le plan de flexion comme plan de symétrie (fig. 9.7), en faisant les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_z = \frac{y}{I}M(z), & \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{yz} = \frac{1}{I}A(y, z) \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} \frac{x}{b} \frac{db}{dy} \end{cases}$$

où  $M$  est le moment de flexion,  $I$  l'inertie de la section ( $\int_{\Omega} y^2 d\Omega$ ), et  $b(y)$  la largeur de la section selon  $x$ .

1. Montrer que ce système d'hypothèses garantit l'équilibre sur le manteau de la poutre.
2. Écrire le principe de Hellinger-Reissner dans le cadre des hypothèses ci-dessus, pour une poutre console chargée en bout.
3. Étudier comment est vérifiée la compatibilité.
4. Déterminer la fonction  $A(y, z)$  pour que l'équilibre interne soit réalisé.
5. Transformer le principe variationnel en tenant compte de la forme obtenue de  $A(y, z)$ , de manière à obtenir les équations globales de la poutre.

*Solution*

1. Appelant  $\mathcal{C}_+$  la partie du contour de la section située en  $x > 0$  et  $\mathcal{C}_-$  l'autre partie, la normale sur  $\mathcal{C}_{\pm}$  a ses composantes proportionnelles à  $(1, \mp \frac{1}{2} \frac{db}{dy})$  (fig. 9.8). En vertu des hypothèses, sur le manteau, le « vecteur »  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz})$  vaut

$$\boldsymbol{\tau} = \left( \pm \frac{1}{2} \frac{db}{dy} \tau_{yz}, \tau_{yz} \right)$$

donc

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = k \left( \pm \frac{1}{2} \frac{db}{dy} \tau_{yz} \mp \frac{1}{2} \frac{db}{dy} \tau_{yz} \right) = 0$$

2. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = \int_0^{\ell} dz \int_{\Omega} \left\{ \frac{My}{I} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{A}{I} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{x}{b} \frac{db}{dy} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \right. \\ \left. - \frac{M^2}{2EI} - \frac{A^2}{2GI^2} \left[ 1 + \frac{x^2}{b^2} \left( \frac{db}{dy} \right)^2 \right] \right\} d\Omega + \mathcal{P} \quad (9.116) \end{aligned}$$

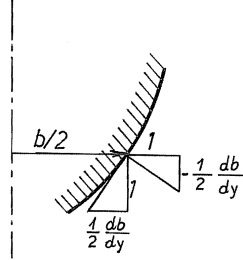


FIGURE 9.8 – Normale au manteau

Pour  $\mathcal{P}$ , on considère des charges en bout :

$$\mathcal{P} = - \int_{\Omega} [\bar{p}w(\ell) - \bar{q}_x u(\ell) - \bar{q}_y v(\ell)] d\Omega$$

3. a) En variant  $M$ , on obtient

$$\delta M \left( \frac{1}{I} \int_{\Omega} y \frac{\partial w}{\partial z} d\Omega - \frac{M}{EI} \right) = 0$$

soit

$$\frac{d\alpha}{dz} = \frac{M}{EI}$$

en introduisant la *rotation moyenne*

$$\alpha = \frac{1}{I} \int_{\Omega} y w d\Omega$$

b) En variant  $A$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{I} \int_{-b/2}^{b/2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{x}{b} \frac{db}{dy} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dx \\ - \frac{A}{GI^2} \int_{-b/2}^{b/2} \left[ 1 + \frac{x^2}{b^2} \left( \frac{db}{dy} \right)^2 \right] dx = 0 \quad (9.117) \end{aligned}$$

On a immédiatement

$$\int_{-b/2}^{b/2} \left[ 1 + \frac{x^2}{b^2} \left( \frac{db}{dy} \right)^2 \right] dx = b \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{db}{dy} \right)^2 \right]$$



L'intégrale contenant les déplacements peut être transformée comme suit. On a d'abord

$$\int_{-b/2}^{b/2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{x}{b} \frac{db}{dy} \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx = \frac{\partial}{\partial z} \int_{-b/2}^{b/2} \left( v + \frac{x}{b} \frac{db}{dy} u \right) dx = b \frac{\partial \hat{v}}{\partial z}$$

en posant

$$\hat{v} = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \left( v + \frac{x}{b} \frac{db}{dy} u \right) dx \quad (\text{déplacement vertical moyen})$$

Passons à présent aux termes contenant  $w$ , qui s'écrivent

$$\int_{-b/2}^{b/2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{x}{b} \frac{db}{dy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx$$

Dans le but de faire également apparaître des moyennes, on notera que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} w dx \right\} = -\frac{1}{b^2} \frac{db}{dy} \int_{-b/2}^{b/2} w dx + \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b/2}^{b/2} w dx \quad (9.118)$$

Or, d'une part,

$$\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b/2}^{b/2} w dx = \frac{1}{b} \frac{1}{2} \frac{db}{dy} \left[ w \left( \frac{b}{2} \right) + w \left( -\frac{b}{2} \right) \right] + \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\partial w}{\partial y} dy \quad (9.119)$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{b^2} \frac{db}{dy} \int_{-b/2}^{b/2} w dx &= -\frac{1}{b^2} \frac{db}{dy} [xw]_{-b/2}^{b/2} + \frac{1}{b^2} \frac{db}{dy} \int_{-b/2}^{b/2} x \frac{\partial w}{\partial x} dx \\ &= -\frac{1}{b} \frac{1}{2} \frac{db}{dy} \left[ w \left( \frac{b}{2} \right) + w \left( -\frac{b}{2} \right) \right] + \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{x}{b} \frac{db}{dy} \frac{\partial w}{\partial x} dx \quad (9.120) \end{aligned}$$

Rassemblant les résultats (9.118), (9.119) et (9.120), on obtient donc simplement

$$\int_{-b/2}^{b/2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{x}{b} \frac{db}{dy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx = b \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} w dx \right\} = b \frac{\partial \hat{w}}{\partial y}$$

en posant

$$\hat{w} = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} w dx \quad (\text{déplacement axial moyen d'un segment } y=\text{cte})$$

Cela étant, l'équation de compatibilité cherchée est

$$A = \frac{GI}{1 + \frac{1}{12} \left(\frac{db}{dy}\right)^2} \left( \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \right)$$

Il s'agit d'une équation globalisée par segments  $y = \text{cte}$ , ce qui est logique, puisque  $A$  est constante sur un tel segment.

4. Les équations d'équilibre s'obtiennent en variant les déplacements.

a) La variation de  $u$  donne

$$\begin{cases} -\frac{1}{I} \frac{x}{b} \frac{db}{dy} \frac{dA}{dz} = 0 & \Rightarrow \frac{dA}{dz} = 0 \\ \frac{1}{I} \frac{x}{b} \frac{db}{dy} A(y, \ell) = \bar{q}_x \end{cases}$$

La forme de  $\hat{q}_x$  doit donc être bien définie pour s'accorder au champ intérieur.

b) Variant  $v$ , on obtient

$$\begin{cases} -\frac{1}{I} \frac{dA}{dz} = 0 & \Rightarrow \frac{dA}{dz} = 0 \\ \frac{1}{I} A(y, \ell) = \bar{q}_y \end{cases}$$

Également,  $\bar{q}_y$  doit avoir une forme bien définie.

c) Venons-en à la variation de  $w$ . Il vient, dans  $\Omega$ ,

$$-\frac{y}{I} \frac{dM}{dz} - \frac{1}{I} \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{Ib} \frac{db}{dy} A = 0$$

et, sur le contour,

$$\frac{A}{I} \left( n_y + \frac{x}{b} \frac{db}{dy} n_x \right) = 0$$

Cette dernière relation est une identité. La précédente s'écrit

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{1}{b} \frac{db}{dy} A = -y \frac{dM}{dz}$$

Pour  $dM/dz = 0$ , cette équation se réduit à

$$\frac{\frac{\partial A}{\partial y}}{A} = -\frac{\frac{db}{dy}}{b}$$

et a pour solution générale

$$A_1(y, z) = \frac{B(z)}{b}$$

Cherchons donc une solution particulière de l'équation complète sous la forme

$$A_2(y, z) = \frac{C(y, z)}{b}$$

Il vient

$$\frac{1}{b} \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{1}{b^2} \frac{db}{dy} C + \frac{1}{b^2} \frac{db}{dy} C = -y \frac{dM}{dz}$$

soit

$$\frac{\partial C}{\partial y} = -\frac{dM}{dz} by$$

Comme solution particulière, on peut adopter

$$C(y, z) = \frac{dM}{dz} S(y)$$

avec

$$S(y) = \int_y^{h_2} b(Y) Y dY$$

Il s'agit du moment statique de la partie de la section située au-dessus de  $y$ . Rappelons que

$$S(-h_1) = \int_{-h_1}^{h_2} b(y) y dy = 0$$

dès lors que l'origine des axes est située au centre de gravité de la section. La solution générale de l'équation complète est donc

$$A(y, z) = \frac{B(z)}{b} + \frac{dM}{dz} \frac{S(y)}{b}$$

On détermine  $B(z)$  en examinant les points  $y = -h_1$  et  $y = h_2$ . Trois cas sont possibles :

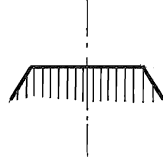


FIGURE 9.9 – Section avec méplat

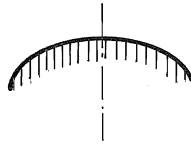


FIGURE 9.10 – Section régulière



FIGURE 9.11 – Section à sommet anguleux

- *Premier cas* : la section  $y$  présente un méplat :  $b(h_2) \neq 0$ , par exemple (fig. 9.9). Alors, sur ce méplat, on a la condition  $\tau_{yz} = 0$ , ce qui entraîne

$$0 = A(h_2, z) = \frac{B(z)}{b(h_2)} + \frac{dM}{dz} \cdot 0 \Rightarrow B(z) = 0$$

La même conclusion vaut si le méplat est situé en  $y = -h_1$ , car  $S(-h_1) = 0$ .

- *Deuxième cas* : la section coupe l'axe de  $y$  en lui étant perpendiculaire (fig 9.10). Alors,  $\tau_{yz} = 0$  en ce point ( $h_2$ , pour fixer les idées). On a

$$0 = \lim_{y \rightarrow h_2} \left( \frac{B(z)}{b(y)} + S(y) \frac{dM}{dz} \right) \Rightarrow \lim_{y \rightarrow h_2} \frac{B(z)}{b(y)} = 0$$

ce qui n'est possible que si  $B(z) = 0$ .

- *Troisième cas : la section coupe l'axe de  $y$  en faisant avec lui un angle  $\theta$ , avec  $0 < \theta < \pi$  (fig 9.11). Alors, en supposant que cela se passe en  $y = h_2$ , posons  $\xi = h_2 - y$ . Il vient*

$$b(h_2 - \xi) = \xi \operatorname{tg} \theta + \mathcal{O}(\xi^2)$$

et

$$\begin{aligned} S(h_2 - \xi) &= \int_{h_2 - \xi}^{h_2} y b(y) dy \\ &= \int_{-\xi}^0 (h_2 - \Xi) (\Xi \operatorname{tg} \theta + \mathcal{O}(\Xi^2)) d\Xi \\ &= h_2 \frac{\xi^2}{2} \operatorname{tg} \theta + \mathcal{O}(\xi^3) \end{aligned}$$

donc  $\frac{S}{b} \rightarrow 0$  pour  $\xi \rightarrow 0$  et comme  $b \rightarrow 0$ , il faudra que  $B(z) = 0$  pour que  $A(y, z)$  reste fini.

En résumé, dans les trois cas ci-dessus, on a  $B = 0$  et

$$A(y, z) = \frac{dM}{dz} \frac{S(y)}{b}$$

Les contraintes de cisaillement ont donc la forme définitive suivante :

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= \frac{dM}{dz} \frac{S(y)}{Ib} \\ \tau_{xz} &= \frac{dM}{dz} \frac{S(y)}{Ib} \frac{x}{b} \frac{db}{dy} \end{aligned}$$

5. On notera que

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \frac{S}{Ib} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{x}{b} \frac{db}{dy} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] d\Omega \\ &= \int_{-h_1}^{h_2} \frac{S}{I} \left\{ \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{x}{b} \frac{db}{dy} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dx \right\} dy \\ &= \int_{-h_1}^{h_2} \frac{S}{I} \left( \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \right) dy \end{aligned}$$

comme nous l'avons vu en 3). On peut encore écrire

$$\int_{-h_1}^{h_2} \frac{S}{I} \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} dy = \frac{dV}{dz}$$

avec

$$V = \int_{-h_1}^{h_2} \frac{S}{I} \hat{v} dy = \int_{\Omega} \frac{S}{Ib} \left( v + \frac{x}{b} \frac{db}{dy} u \right) d\Omega$$

De plus,

$$\begin{aligned} \int_{-h_1}^{h_2} \frac{S}{I} \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} dy &= \left[ \frac{S}{I} \hat{w} \right]_{-h_1}^{h_2} - \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\hat{w}}{I} \frac{dS}{dy} dy \\ &= \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\hat{w}}{I} y b dy \\ &= \frac{1}{I} \int_{\Omega} w y dy = \alpha \end{aligned}$$

On a donc

$$\int_{-h_1}^{h_2} \frac{S}{I} \left( \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \right) dy = \alpha + \frac{dV}{dz}$$

Ceci permet d'écrire le principe variationnel, en posant

$$A = \frac{TS}{b}$$

sous la forme

$$\mathcal{R} = \int_0^\ell \left[ M \frac{d\alpha}{dz} + T \left( \alpha + \frac{dV}{dz} \right) - \frac{M^2}{2EI} - \frac{T^2}{2G\Omega^*} \right] dx - \bar{M}\alpha(\ell) - \bar{T}V(\ell)$$

où l'on a posé

$$\frac{1}{\Omega^*} = \int_{\Omega} \frac{S^2}{I^2 b^2} \left[ 1 + \frac{x^2}{b^2} \left( \frac{db}{dy} \right)^2 \right] d\Omega$$

soit

$$\Omega^* = \frac{I^2}{\int_{\Omega} \frac{S^2}{b} \left[ 1 + \frac{x^2}{b^2} \left( \frac{db}{dy} \right)^2 \right] d\Omega} = \frac{I^2}{\int_{-h_1}^{h_2} \frac{S^2}{b} \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{db}{dy} \right)^2 \right] dy}$$

C'est la *section réduite de cisaillement*. Les équations globales sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dM}{dz} = T, \\ \frac{dT}{dz} = 0, \\ M = EI \frac{d\alpha}{dz} \\ T = G\Omega^* \left( \alpha + \frac{dV}{dz} \right) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} M(\ell) = \bar{M} \\ T(\ell) = \bar{T} \end{array}$$

**Exercice 36** Étudier la même poutre que ci-dessus, en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} w = y\alpha(z) \\ u = 0 \\ v = v(z) \\ \sigma_x = 0 \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{array} \right.$$

Comparer aux résultats de l'exercice précédent.

*Solution* - Le principe de Hellinger-Reissner s'écrit ici

$$\int_0^\ell \int_\Omega \left[ \sigma_z y \alpha'(z) + \tau_{yz} \left( \alpha + \frac{dv}{dz} \right) - \frac{\sigma_z^2}{2E} - \frac{\tau_{yz}^2}{2G} \right] d\Omega dz - \int_\Omega [p y \alpha(\ell) + q_y v(\ell)] d\Omega \text{ stat.}$$

Variant  $\sigma_z$  on obtient

$$\sigma_z = E y \alpha'(z)$$

La variation de  $\tau_{yz}$  donne

$$\tau_{yz} = G \left( \alpha + \frac{dv}{dz} \right)$$

En variant  $\alpha$ , on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d}{dz} \int_{\Omega} \sigma_z y d\Omega + \int_{\Omega} \tau_{yz} d\Omega = 0 \\ \left[ \int_{\Omega} \sigma_z y d\Omega \right]_{z=\ell} = \int_{\Omega} p y d\Omega \end{array} \right.$$

Ceci mène à définir

- le moment  $M = \int_{\Omega} y \sigma_z d\Omega$
- l'effort tranchant  $T = \int_{\Omega} \tau_{yz} d\Omega$
- le moment d'extrémité  $\bar{M} = \int_{\Omega} p y d\Omega$

en fonction desquels ces équations s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dM}{dx} = T \\ M(\ell) = \bar{M} \end{array} \right.$$

En variant  $v$ , on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz} \int_{\Omega} \tau_{yz} d\Omega = \frac{dT}{dz} = 0 \\ T(\ell) = \bar{T} = \int_{\Omega} q_y d\Omega \end{array} \right.$$

On peut réécrire ces équations en termes des résultantes. De simples intégrations donnent

$$\begin{aligned} M &= \int_{\Omega} y \sigma_z d\Omega = EI \frac{d\alpha}{dz} \\ T &= \int_{\Omega} \tau_{yz} d\Omega = G\Omega \left( \alpha + \frac{dv}{dz} \right) \end{aligned}$$

et

$$\sigma_z = \frac{M}{I} y, \quad \tau_{yz} = \frac{T}{G\Omega}$$

d'où la forme globale de la fonctionnelle de Hellinger-Reissner :

$$\int_0^\ell \left[ M \frac{d\alpha}{dz} + T \left( \alpha + \frac{dv}{dz} \right) - \frac{M^2}{2EI} - \frac{T^2}{2G\Omega} \right] - \bar{M}\alpha(\ell) - \bar{T}v(\ell)$$

Par rapport à la solution de l'exercice précédent, qui est S.A., celle-ci est C.A. dans le cadre des hypothèses de poutre  $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ . La seule différence



finale est la présence de  $\Omega$  à la place de  $\Omega^*$ . La théorie des bornes nous permet d'affirmer que

$$\Omega^*_{\text{exercice précédent}} \leq \Omega^*_{\text{réel}} \leq \Omega$$

(ce qui prouve en particulier que les sections de cisaillement sont toujours inférieures aux sections).



# Chapitre 10

## Élasticité plane

### 10.1 État plan de contrainte

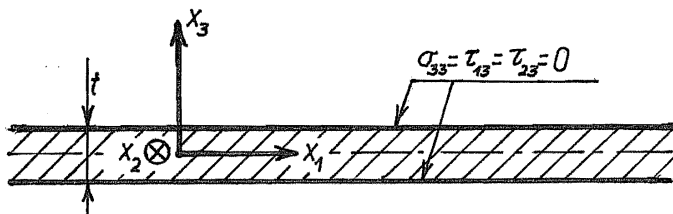


FIGURE 10.1 – Etat plan de contrainte

Considérons (*fig. 10.1*) une plaque d'épaisseur  $t$ , sollicitée dans son plan et ayant ses surfaces  $x_3 = \pm t/2$  libres. On aura donc

$$\sigma_{33} = \tau_{\alpha 3} = 0 \text{ en } x_3 = \pm t/2 \quad (10.1)$$

en convenant que les indices grecs peuvent valoir 1 ou 2. La sollicitation étant symétrique par rapport au plan moyen, on aura encore

$$\begin{cases} u_\alpha(x_\beta, x_3) &= u_\alpha(x_\beta, -x_3) \\ u_3(x_\beta, x_3) &= -u_3(x_\beta, -x_3) \end{cases} \quad (10.2)$$

Dans ces conditions, comme

$$2\varepsilon_{\alpha 3} = D_{\alpha}u_3 + D_3u_{\alpha}$$

on a encore

$$\int_{-t/2}^{t/2} 2\varepsilon_{\alpha 3} dx_3 = D_{\alpha} \int_{-t/2}^{t/2} u_3 dx_3 + [u_{\alpha}]_{-t/2}^{t/2} = 0 \quad (10.3)$$

ce qui entraîne

$$\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\alpha 3} dx_3 = 2G \int_{-t/2}^{t/2} \varepsilon_{\alpha 3} dx_3 = 0 \quad (10.4)$$

Les équations locales d'équilibre selon  $x_1$  et  $x_2$  s'écrivent

$$D_{\beta}\sigma_{\alpha\beta} + D_3\tau_{\alpha 3} + f_{\alpha} = 0$$

Intégrons les sur l'épaisseur, et introduisons les *moyennes*

$$\sigma_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \quad \text{et} \quad f_{\alpha}^* = \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} f_{\alpha} dx_3$$

On obtient

$$D_{\beta}\sigma_{\alpha\beta}^* + \frac{1}{t} [\tau_{\alpha 3}]_{-t/2}^{t/2} + f_{\alpha}^* = 0$$

ce qui, vu les conditions (10.1), se ramène à

$$D_{\beta}\sigma_{\alpha\beta}^* + f_{\alpha}^* = 0 \quad (10.5)$$

De même, intégrons sur l'épaisseur l'équation d'équilibre selon  $x_3$ , qui s'écrit

$$D_{\alpha}\tau_{\alpha 3} + D_3\sigma_{33} + f_3 = 0$$

Il vient

$$D_{\alpha} \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\alpha 3} dx_3 + [\sigma_{33}]_{-t/2}^{t/2} + \int_{-t/2}^{t/2} f_3 dx_3 = 0$$

Tenant compte des relations (10.1) et (10.4), on obtient la condition supplémentaire

$$\int_{-t/2}^{t/2} f_3 dx_3 = 0 \quad (10.6)$$

qui ne fait qu'exprimer la symétrie de la sollicitation par rapport au plan moyen de la plaque.

Les équations constitutives locales s'écrivent

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{\alpha\beta} - \nu(\sigma_{\gamma\gamma} + \sigma_{33})\delta_{\alpha\beta}] \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= \frac{1 + \nu}{E} \tau_{\alpha 3} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{33} - \nu(\sigma_{\gamma\gamma} + \sigma_{33})]\end{aligned}$$

En les intégrant sur l'épaisseur, on obtient respectivement

$$\begin{aligned}\int_{-t/2}^{t/2} \varepsilon_{\alpha\beta} dx_3 &= \frac{1}{E} \left[ (1 + \nu) \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \right. \\ &\quad \left. - \nu \left( \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\gamma\gamma} dx_3 + \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{33} dx_3 \right) \delta_{\alpha\beta} \right] \\ 0 &= 0 \\ \int_{-t/2}^{t/2} \varepsilon_{33} dx_3 &= \frac{1}{E} \left[ (1 + \nu) \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{33} dx_3 \right. \\ &\quad \left. - \nu \left( \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\gamma\gamma} dx_3 + \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{33} dx_3 \right) \right]\end{aligned}$$

Faisant l'hypothèse supplémentaire

$$\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{33} dx_3 = 0 \quad (10.7)$$

et définissant en outre les *déformations moyennes*

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} \varepsilon_{\alpha\beta} dx_3 = \frac{1}{2} (D_\alpha u_\beta^* + D_\beta u_\alpha^*) \quad (10.8)$$

où apparaissent naturellement les *déplacements moyens*

$$u_\alpha^* = \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} u_\alpha dx_3 \quad (10.9)$$

ainsi que le *gonflement*

$$q = \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} \varepsilon_{33} dx_3 = \frac{1}{t} [u_3]_{-t/2}^{t/2} \quad (10.10)$$

on obtient

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{\alpha\beta}^* - \nu\sigma_{\gamma\gamma}^*\delta_{\alpha\beta}] \quad (10.11)$$

et

$$q = -\frac{\nu}{E}\sigma_{\gamma\gamma}^* \quad (10.12)$$

Les relations (10.11) s'inversent sous la forme

$$\begin{cases} \sigma_1^* &= \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_1^* + \nu\varepsilon_2^*) \\ \sigma_2^* &= \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_2^* + \nu\varepsilon_1^*) \\ \tau^* &= G\gamma^* \end{cases} \quad (10.13)$$

en écrivant

$$\varepsilon_1^* = \varepsilon_{11}^*, \quad \varepsilon_2^* = \varepsilon_{22}^*, \quad \gamma^* = 2\varepsilon_{12}^*$$

et

$$\sigma_1^* = \sigma_{11}^*, \quad \sigma_2^* = \sigma_{22}^*, \quad \tau^* = \tau_{12}^*$$

et on a donc

$$\varepsilon_1^* = D_1 u_1^*, \quad \varepsilon_2^* = D_2 u_2^*, \quad \gamma^* = D_1 u_2^* + D_2 u_1^* \quad (10.14)$$

Les équations moyennes (10.5), (10.13) et (10.14), fondées sur les hypothèses (10.1), (10.2), (10.6) et (10.7), forment le système de l'état plan de contrainte. Il s'agit évidemment d'une *théorie approchée* et, en particulier, les équations générales de Navier et de Beltrami-Michell ne s'appliquent pas directement à cet état. Dans la pratique courante, on omet les étoiles dans les notations. Il ne faut pas perdre de vue, cependant, que les solutions obtenues représentent des *moyennes*.

## 10.2 État plan de déformation

L'état plan de déformation, qui s'applique aux corps très longs dans la direction  $x_3$  et sollicités uniquement selon  $x_1$  et  $x_2$ , se caractérise par les conditions

$$\begin{cases} u_\alpha &= u_\alpha(x_\beta) \\ u_3 &= 0 \\ f_3 &= 0 \end{cases} \quad (10.15)$$

On a alors *exactement*

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(D_\alpha u_3 + D_3 u_\alpha) = 0, \quad \varepsilon_{33} = 0 \quad (10.16)$$

Par conséquent, comme

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu\sigma_{\alpha\alpha})$$

on obtient

$$\sigma_{33} = \nu\sigma_{\alpha\alpha} \quad (10.17)$$

et, dès lors,

$$\sigma_{kk} = \sigma_{\alpha\alpha} + \sigma_{33} = (1 + \nu)\sigma_{\alpha\alpha} \quad (10.18)$$

Introduisant ces résultats dans les autres relations de Hooke, on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{E}[(1 + \nu)\sigma_{\alpha\beta} - \nu\sigma_{kk}\delta_{\alpha\beta}] \\ &= \frac{1}{E}[(1 + \nu)\sigma_{\alpha\beta} - \nu(1 + \nu)\sigma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}] \end{aligned} \quad (10.19)$$

et

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2G}\tau_{\alpha 3} \quad (10.20)$$

Ces dernières équations entraînent

$$\tau_{\alpha 3} = 0 \quad (10.21)$$

On peut unifier la théorie des deux états plans en écrivant la relation (10.19) sous la forme

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{\hat{E}}[(1 + \hat{\nu})\sigma_{\alpha\beta} - \hat{\nu}\sigma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}] \quad (10.22)$$

Pour réaliser l'équivalence, il faut que le *module de Young effectif*  $\hat{E}$  et le *coefficient de Poisson effectif*  $\hat{\nu}$  vérifient les relations

$$\frac{1 + \hat{\nu}}{\hat{E}} = \frac{1 + \nu}{E} \quad (10.23)$$

et

$$\frac{\hat{\nu}}{\hat{E}} = \frac{\nu(1 + \nu)}{E} = \frac{\nu(1 + \hat{\nu})}{\hat{E}} \quad (10.24)$$

Cette dernière condition implique

$$\nu = \frac{\hat{\nu}}{1 + \hat{\nu}} \quad (10.25)$$

ce qui s'inverse en

$$\hat{\nu} = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (10.26)$$

et

$$\hat{E} = E \frac{1 + \hat{\nu}}{1 + \nu} = E \frac{1 + \frac{\nu}{1 - \nu}}{1 + \nu} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (10.27)$$

La relation inverse est

$$E = \hat{E} \frac{1 + 2\hat{\nu}}{(1 + \hat{\nu})^2} \quad (10.28)$$

On notera enfin que la relation (10.23) équivaut à

$$\hat{G} = G \quad (10.29)$$

### 10.3 Équations générales des états plans

Contrairement à la théorie de l'état plan de contrainte, celle de l'état plan de déformation est rigoureuse et on peut lui appliquer les équations de Navier et de Beltrami-Michell. L'équivalence exposée ci-dessus permet d'obtenir les équations correspondantes pour l'état plan de contrainte par l'artifice suivant :

- dans un premier temps, on particularise les équations générales de l'élasticité au cas de la déformation plane ;
- ensuite, on y fait apparaître les valeurs effectives  $\hat{E}$  et  $\hat{\nu}$  ;
- il suffit alors de remplacer  $\hat{E}$  par  $E$  et  $\hat{\nu}$  par  $\nu$  pour obtenir les équations relatives à l'état plan de contrainte.

#### 10.3.1 Équation plane de Navier

Dans l'équation générale

$$G \left[ \frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu} \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} \right] + \mathbf{f} = 0$$

on calcule

$$\begin{aligned} 1 - \nu &= 1 - \frac{\hat{\nu}}{1 + \hat{\nu}} = \frac{1}{1 + \hat{\nu}} \\ 1 - 2\nu &= 1 - \frac{2\hat{\nu}}{1 + \hat{\nu}} = \frac{1 - \hat{\nu}}{1 + \hat{\nu}} \end{aligned}$$



ce qui mène à l'équation

$$G \left[ \frac{2}{1-\hat{\nu}} \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} \right] + \mathbf{f} = 0 \quad (10.30)$$

Posant

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{div} \mathbf{u}}{1-\hat{\nu}} = \frac{D_1 u_1 + D_2 u_2}{1-\hat{\nu}} \quad (10.31)$$

$$2\omega = D_1 u_2 - D_2 u_1 \quad (10.32)$$

on a

$$\mathbf{rot} \mathbf{u} = 2\omega \mathbf{e}_3$$

et

$$\mathbf{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ 0 & 0 & 2\omega \end{vmatrix} = 2(\mathbf{e}_1 D_2 \omega - \mathbf{e}_2 D_1 \omega)$$

ce qui permet d'écrire l'équation (10.30) sous la forme

$$\begin{cases} D_1 \varepsilon - D_2 \omega + \frac{f_1}{2G} = 0 \\ D_2 \varepsilon + D_1 \omega + \frac{f_2}{2G} = 0 \end{cases} \quad (10.33)$$

### 10.3.2 Équation plane de Beltrami-Michell

L'équation générale s'écrit

$$D_{kk} \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} D_{ij} \sigma_{kk} + \left( D_i f_j + D_j f_i + \frac{\nu}{1-\nu} D_k f_k \delta_{ij} \right) = 0$$

On a d'abord

$$\sigma_{kk} = (1+\nu) \sigma_{\gamma\gamma}$$

De plus, comme  $f_3 = 0$ ,

$$\frac{\nu}{1-\nu} D_k f_k = \hat{\nu} D_\gamma f_\gamma$$

Il vient donc, comme toutes les dérivées par rapport à  $x_3$  sont nulles,

$$D_{\gamma\gamma} \sigma_{ij} + D_{ij} \sigma_{\gamma\gamma} + (D_i f_j + D_j f_i + \hat{\nu} D_\gamma f_\gamma \delta_{ij}) = 0$$

Pour  $(i, j) = (\alpha, \beta)$ , on obtient

$$D_{\gamma\gamma}\sigma_{\alpha\beta} + D_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\gamma} + (D_{\alpha}f_{\beta} + D_{\beta}f_{\alpha} + \hat{\nu}D_{\gamma}f_{\gamma}\delta_{\alpha\beta}) = 0 \quad (10.34)$$

Pour  $(i, j) = (\alpha, 3)$ , il vient, du fait que  $\sigma_{\alpha 3} = 0$ ,

$$D_{\alpha 3}\sigma_{\gamma\gamma} + D_3f_{\alpha} = 0$$

équation identiquement vérifiée. Enfin, pour  $(i, j) = (3, 3)$ , on obtient

$$D_{\gamma\gamma}\sigma_{33} + D_{33}\sigma_{\gamma\gamma} + \hat{\nu}D_{\gamma}f_{\gamma} = 0$$

et, en exprimant  $\sigma_{33}$  en termes de  $\sigma_{\gamma\gamma}$ ,

$$\sigma_{33} = \nu\sigma_{\gamma\gamma} = \frac{\hat{\nu}}{1 + \hat{\nu}}\sigma_{\gamma\gamma}$$

il vient

$$D_{\gamma\gamma}\sigma_{\alpha\alpha} + (1 + \hat{\nu})D_{\gamma}f_{\gamma} = 0 \quad (10.35)$$

Or, en contractant (10.34) sur  $\alpha$  et  $\beta$ , on obtient précisément

$$2D_{\gamma\gamma}\sigma_{\alpha\alpha} + D_{\alpha}f_{\alpha} + D_{\alpha}f_{\alpha} + 2\hat{\nu}D_{\alpha}f_{\alpha} = 0$$

c'est-à-dire (10.35), qui est donc un corollaire de (10.34). Les seules équations de Beltrami-Michell à prendre en compte sont donc les équations (10.34).

## 10.4 Fonction d'Airy

Lorsque les forces de volume sont nulles, les équations d'équilibre s'écrivent

$$\begin{cases} D_1\sigma_{11} + D_2\sigma_{12} & = & 0 \\ D_1\sigma_{12} + D_2\sigma_{22} & = & 0 \end{cases}$$

Pour un corps *simplement connexe*, il existe donc deux fonctions  $\psi_1$  et  $\psi_2$  telles que

$$\begin{cases} \sigma_{11} & = & D_2\psi_1, & \sigma_{12} & = & -D_1\psi_1 \\ \sigma_{12} & = & D_2\psi_2, & \sigma_{22} & = & -D_1\psi_2 \end{cases} \quad (10.36)$$

Pour garantir la symétrie des contraintes, on doit avoir

$$D_1\psi_1 + D_2\psi_2 = 0 \quad (10.37)$$

ce qui entraîne, toujours pour un corps simplement connexe, l'existence d'une fonction  $\varphi$  telle que

$$\psi_1 = D_2\varphi, \quad \psi_2 = -D_1\varphi \quad (10.38)$$

C'est la *fonction d'Airy*. Les contraintes en dérivent par les relations

$$\sigma_{11} = D_{22}\varphi, \quad \sigma_{22} = D_{11}\varphi, \quad \sigma_{12} = -D_{12}\varphi \quad (10.39)$$

Sur la frontière du corps (*fig. 10.2*), les tractions de surface  $T_1$  et  $T_2$  vérifient

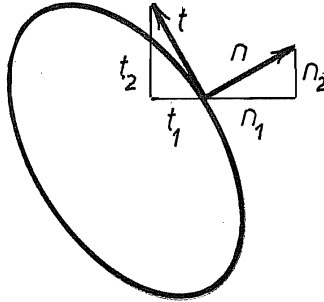


FIGURE 10.2 – Normale et tangente au contour

$$\begin{aligned} T_1 &= n_1 D_2 \psi_1 - n_2 D_1 \psi_1 \\ T_2 &= n_1 D_2 \psi_2 - n_2 D_1 \psi_2 \end{aligned}$$

et, comme le vecteur unitaire tangent  $\mathbf{t}$  est lié au vecteur unitaire normal  $\mathbf{n}$  par les relations

$$n_1 = t_2, \quad n_2 = -t_1$$

on obtient

$$T_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial t}, \quad T_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \quad (10.40)$$

ou encore

$$T_1 = \frac{\partial}{\partial t} D_2 \varphi, \quad T_2 = -\frac{\partial}{\partial t} D_1 \varphi \quad (10.41)$$

Lorsque le plan considéré est percé de trous, (*fig. 10.3*), l'univocité de la fonction d'Airy est soumise à certaines conditions supplémentaires. Tout d'abord,

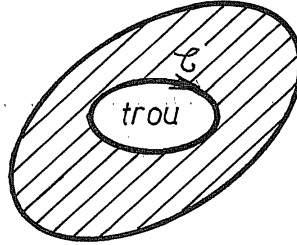


FIGURE 10.3 – Plan percé d'un trou

$\psi_1$  et  $\psi_2$  ne sont univoques que si, sur le contour  $\mathcal{C}$  de chaque trou,

$$0 = \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial t} ds = \int_{\mathcal{C}} T_{\alpha} ds$$

c'est-à-dire que *la résultante des tractions de surface au bord du trou doit être nulle*. Supposons cette condition satisfaite. Alors, l'univocité de la fonction d'Airy nécessite que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} ds \\ &= \int_{\mathcal{C}} (t_1 D_1 \varphi + t_2 D_2 \varphi) ds \\ &= \int_{\mathcal{C}} (-t_1 \psi_2 + t_2 \psi_1) ds \\ &= \int_{\mathcal{C}} \left( -\psi_2 \frac{dx_1}{dt} + \psi_1 \frac{dx_2}{dt} \right) ds \end{aligned}$$

Intégrant par parties et tenant compte de l'univocité de  $\psi_1$  et  $\psi_2$ , on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \text{saut}(-\psi_2 x_1 + \psi_1 x_2) + \int_{\mathcal{C}} \left( x_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - x_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right) ds \\ &= \int_{\mathcal{C}} (x_1 T_2 - x_2 T_1) ds \end{aligned}$$

ce qui exprime la nullité du *moment* des tractions de surface.

En conclusion, *la condition d'univocité de la fonction d'Airy sur un corps multiplément connexe est que les forces appliquées sur le bord de chaque trou forment un torseur nul*.

## 10.5 Compatibilité en termes de la fonction d'Airy

Appliquant les équations de Beltrami-Michell (10.34) aux contraintes écrites sous la forme (10.39), on obtient, en posant

$$\nabla^2 = D_{11} + D_{22} \tag{10.42}$$

les conditions

$$\begin{cases} \nabla^2 D_{22}\varphi + D_{11}\nabla^2\varphi = 0 \\ -\nabla^2 D_{12}\varphi + D_{12}\nabla^2\varphi = 0 \\ \nabla^2 D_{11}\varphi + D_{22}\nabla^2\varphi = 0 \end{cases}$$

qui se ramènent visiblement à une seule équation de compatibilité, à savoir,

$$\nabla^4\varphi = 0 \tag{10.43}$$

## 10.6 Problèmes axisymétriques plans<sup>1</sup>

Un problème plan est *axisymétrique* si sa géométrie est circulaire et la sollicitation, purement radiale. Dans les coordonnées polaires, on a alors

$$\mathbf{u} = u\mathbf{e}_r \tag{10.44}$$

et

$$\mathbf{rotu} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_3 \\ D_r & 0 & 0 \\ u & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

si bien que l'équation plane de Navier se ramène à

$$\frac{2G}{1-\nu} \mathbf{graddivu} = \frac{E}{1-\nu^2} \mathbf{graddivu} = -\mathbf{f}$$

soit, pour  $\mathbf{f} = f\mathbf{e}_r$ ,

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) \right) = -f$$

Pour  $f = 0$ , tout d'abord, on a

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) = 2A = \text{cte}$$

---

1. Les sections qui suivent sont systématiquement écrites dans le cadre de l'état plan de contrainte. Pour convertir ces résultats au cas de l'état plan de déformation, il suffit d'y remplacer  $E$  et  $\nu$  par  $\hat{E}$  et  $\hat{\nu}$  tels que définis en section 10.2.

d'où

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{d}{dr}(ru) = 2Ar$$

et

$$\frac{E}{1-\nu^2} ru = Ar^2 + B$$

soit

$$u = \frac{1-\nu^2}{E} \left( Ar + \frac{B}{r} \right) \quad (10.45)$$

Pour le cas  $f \neq 0$ , cherchons une solution particulière de la forme

$$u = rC(r) + \frac{D(r)}{r}$$

On a alors

$$\frac{d}{dr}(ru) = \frac{d}{dr}(r^2C + D) = 2Cr + C'r^2 + D'$$

et

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ru) = 2C + C'r + \frac{D'}{r}$$

Posant

$$D' = -C'r^2 \quad (10.46)$$

on obtient alors

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ru) \right) = 2C' = -\frac{1-\nu^2}{E} f$$

et

$$D' = -C'r^2 = \frac{1-\nu^2}{2E} fr^2$$

d'où

$$C = -\frac{1-\nu^2}{2E} \int f dr$$

$$D = \frac{1-\nu^2}{2E} \int fr^2 dr$$

La solution générale de l'équation est donc

$$u = \frac{1-\nu^2}{E} \left[ Ar + \frac{B}{r} - \frac{r}{2} \int f dr + \frac{1}{2r} \int fr^2 dr \right] \quad (10.47)$$

On en déduit aisément les déformations

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{du}{dr} = \frac{1-\nu^2}{E} \left[ A - \frac{B}{r^2} - \frac{1}{2} \int f dr - \frac{1}{2r^2} \int fr^2 dr \right] \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} = \frac{1-\nu^2}{E} \left[ A + \frac{B}{r^2} - \frac{1}{2} \int f dr + \frac{1}{2r^2} \int fr^2 dr \right]\end{aligned}$$

auxquelles correspondent les contraintes

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta) \\ &= (1+\nu)A - (1-\nu)\frac{B}{r^2} - \frac{1+\nu}{2} \int f dr - \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{r^2} \int fr^2 dr \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r) \\ &= (1+\nu)A + (1-\nu)\frac{B}{r^2} - \frac{1+\nu}{2} \int f dr + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{r^2} \int fr^2 dr\end{aligned}\tag{10.48}$$

## 10.7 Cylindre épais sous pressions interne et externe

Ce problème a été résolu par Lamé et Clapeyron en 1833 [55].

### 10.7.1 Cas général

Pour traiter le cas d'un cylindre sous pressions interne et externe, il suffit, dans les équations (10.48), de poser  $\mathbf{f} = 0$  et

$$\begin{cases} \sigma_r(R_i) = (1+\nu)A - (1-\nu)\frac{B}{R_i^2} = -p_i \\ \sigma_r(R_e) = (1+\nu)A - (1-\nu)\frac{B}{R_e^2} = -p_e \end{cases}$$

En éliminant alternativement  $A$  et  $B$ , on obtient

$$\begin{aligned}(1+\nu)A &= \frac{\frac{p_i}{R_e^2} - \frac{p_e}{R_i^2}}{\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2}} = \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ (1+\nu)B &= \frac{p_i - p_e}{\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2}} = \frac{(p_i - p_e)R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}\end{aligned}$$

d'où

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} - \frac{p_i - p_e}{R_e^2 - R_i^2} \frac{R_i^2 R_e^2}{r^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} + \frac{p_i - p_e}{R_e^2 - R_i^2} \frac{R_i^2 R_e^2}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (10.49)$$

Les contraintes circonférentielles aux rayons extrêmes sont

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(R_i) &= \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2 + (p_i - p_e) R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ &= p_i \frac{R_i^2 + R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} - p_e \frac{2R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \end{aligned} \quad (10.50)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(R_e) &= \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2 + (p_i - p_e) R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ &= p_i \frac{2R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} - p_e \frac{2R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \end{aligned} \quad (10.51)$$

Enfin, le déplacement radial est donné par

$$u = \frac{1 - \nu^2}{E} \left\{ \frac{r}{1 + \nu} \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} + \frac{1}{1 - \nu} \frac{p_i - p_e}{R_e^2 - R_i^2} \frac{R_i^2 R_e^2}{r} \right\} \quad (10.52)$$

aux rayons extrêmes, il vaut

$$\left. \begin{aligned} u(R_i) &= \frac{R_i}{E(R_e^2 - R_i^2)} \{ p_i [(1 - \nu)R_i^2 + (1 + \nu)R_e^2] - 2p_e R_e^2 \} \\ u(R_e) &= \frac{R_e}{E(R_e^2 - R_i^2)} \{ 2p_i R_i^2 - p_e [(1 - \nu)R_e^2 + (1 + \nu)R_i^2] \} \end{aligned} \right\} \quad (10.53)$$

### 10.7.2 Cas du cylindre très mince

Examinons le cas particulier d'un cylindre *très mince*. Posant, dans ce cas,

$$t = R_e - R_i, \quad R = \frac{R_e + R_i}{2} \quad (10.54)$$

la condition de minceur s'écrit

$$\frac{t}{R} = \eta \ll 1 \quad (10.55)$$



Alors,

$$\begin{aligned} r &= R(1 + \rho\eta), & \rho &\in [-1/2, 1/2] \\ R_i &= R(1 - \eta/2), & R_e &= R(1 + \eta/2) \end{aligned}$$

et, en notant  $p^*$  l'ordre de grandeur des pressions,

$$\left\{ \begin{array}{l} R_e^2 - R_i^2 = R^2(1 + \eta + \frac{\eta^2}{4}) - R^2(1 - \eta + \frac{\eta^2}{4}) = 2R^2\eta \\ R_i^2 = R^2[1 - \eta + \mathcal{O}(\eta^2)] \\ R_e^2 = R^2[1 + \eta + \mathcal{O}(\eta^2)] \\ r^2 = R^2[1 + 2\rho\eta + \mathcal{O}(\eta^2)] \\ R_i^2 R_e^2 = R^4[1 + \mathcal{O}(\eta^2)] \\ p_i R_i^2 - p_e R_e^2 = p_i R^2(1 - \eta) - p_e R^2(1 + \eta) + \mathcal{O}(p^* \eta^2) \\ \phantom{p_i R_i^2 - p_e R_e^2} = R^2[(p_i - p_e) - \eta(p_i + p_e) + \mathcal{O}(p^* \eta^2)] \end{array} \right.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{2R^2\eta} [R^2(p_i - p_e) - \eta R^2(p_i + p_e) - (p_i - p_e)R^2(1 - 2\rho\eta) + \mathcal{O}(\eta^2 p^*)] \\ &= -\frac{1}{2}[(p_i + p_e) - 2\rho(p_i - p_e)] + \mathcal{O}(\eta p^*) \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{2R^2\eta} [R^2(p_i - p_e) - \eta R^2(p_i + p_e) + (p_i - p_e)R^2(1 - 2\rho\eta) + \mathcal{O}(\eta^2 p^*)] \\ &= \frac{p_i - p_e}{\eta} - \frac{1}{2}[(p_i + p_e) - 2\rho(p_i - p_e)] + \mathcal{O}(\eta p^*) \end{aligned}$$

La plus grande contrainte est visiblement

$$\sigma_\theta = (p_i - p_e) \frac{R}{t} + \mathcal{O}(p^*) \quad (10.56)$$

Comme

$$\sigma_r = \mathcal{O}(p^*) \quad (10.57)$$

cette contrainte est négligeable devant la première. On a d'autre part

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{E} \left[ (1 - \nu) \frac{R^2(p_i - p_e)}{2R\eta} + (1 + \nu) \frac{R^2(p_i - p_e)}{2R\eta} + \mathcal{O}(p^* R) \right] \\ &= \frac{(p_i - p_e)R}{E\eta} + \mathcal{O}\left(\frac{p^* R}{E}\right) \\ &= \frac{(p_i - p_e)R^2}{Et} + \mathcal{O}\left(\frac{p^* R}{E}\right) \end{aligned} \quad (10.58)$$

Les formules (10.56) à (10.58) sont connues sous le nom de *formules des chaudières*.

### 10.7.3 Cas du rayon intérieur tendant vers zéro

Dans le cas d'un cylindre creux sous pression externe, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\theta}(R_i) = -\frac{2p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ \sigma_r(R_i) = 0 \\ u(R_i) = -\frac{2p_e R_e^2 R_i}{E(R_e^2 - R_i^2)} \\ u(R_e) = -\frac{p_e R_e}{E(R_e^2 - R_i^2)} [(1 - \nu)R_e^2 + (1 + \nu)R_i^2] \end{array} \right.$$

Dans ces formules, faisons tendre le rayon intérieur vers zéro. Il vient

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{R_i \rightarrow 0} \sigma_{\theta}(R_i) = -2p_e, \quad \lim_{R_i \rightarrow 0} \sigma_r(R_i) = 0 \\ \lim_{R_i \rightarrow 0} u(R_i) = 0, \quad \lim_{R_i \rightarrow 0} u(R_e) = -\frac{p_e R_e (1 - \nu)}{E} \end{array} \right\} \quad (10.59)$$

Comparons cette solution à celle d'un *cylindre plein*. Dans ce dernier cas, le déplacement devant être fini en  $r = 0$ , on doit avoir  $B = 0$  et

$$u = \frac{1 - \nu^2}{E} Ar$$

ce qui donne

$$\sigma_r = (1 + \nu)A, \quad \sigma_{\theta} = (1 + \nu)A \quad (10.60)$$

d'où

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_{\theta} &= -p_e \\ A &= -\frac{p_e}{1 + \nu} \\ u &= -\frac{1 - \nu}{E} p_e r \end{aligned} \quad (10.61)$$

Le comparaison de ces résultats avec les formules (10.59) montre que les déplacements sont identiques, mais que la contrainte maximale dans le cylindre ayant un trou infiniment petit est double de celle qui règne dans le cylindre plein. Le trou infiniment petit provoque donc une concentration de contrainte mesurée par

$$\alpha_k = \frac{\lim_{R_i \rightarrow 0} \sigma_{\theta}(R_i)}{\sigma_{\theta}(\text{sans trou})} = 2$$

### 10.7.4 Cas du rayon extérieur tendant vers l'infini

Le cas  $R_e \rightarrow \infty$  correspond à un tunnel profondément enfoncé dans le sol. On a alors, pour  $p_e = 0$  et en posant  $n = R_i/R_e$ ,

$$\sigma_r = p_i \frac{n^2}{1-n^2} - \frac{p_i}{1-n^2} \frac{R_i^2}{r^2} \longrightarrow -p_i \frac{R_i^2}{r^2} \quad (10.62)$$

et

$$\sigma_\theta = p_i \frac{n^2}{1-n^2} + \frac{p_i}{1-n^2} \frac{R_i^2}{r^2} \longrightarrow p_i \frac{R_i^2}{r^2} \quad (10.63)$$

La contrainte maximale vaut donc  $p_i$ . Le déplacement se calcule par

$$u = \frac{1}{E} \left[ (1-\nu) r p_i \frac{n^2}{1-n^2} + (1+\nu) \frac{p_i}{1-n^2} \frac{R_i^2}{r} \right] \longrightarrow \frac{1+\nu}{E} p_i \frac{R_i^2}{r} \quad (10.64)$$

Sa valeur maximale est

$$u(R_i) = \frac{1+\nu}{E} p_i R_i$$

## 10.8 Fretage

Le *fretage* consiste à assembler un arbre à un moyeu dont le diamètre est très légèrement supérieur à celui de l'arbre. Pour réaliser cet assemblage, on peut

- Utiliser une presse si l'interférence est modérée.
- Chauffer le moyeu de manière à le dilater, enfiler l'arbre et laisser refroidir.
- Refroidir l'arbre de manière à le contracter, l'enfiler dans le moyeu et le laisser reprendre la température ambiante.

La pression régnant à l'interface arbre/moyeu permet alors de transmettre un couple ou une force axiale par frottement.

Avant l'assemblage, l'arbre a un rayon extérieur  $R_{ea}$  et le moyeu, un rayon intérieur  $R_{im}$ . Après assemblage, leur rayon commun sera  $R$ , les deux pièces ayant subi des variations de rayon

$$u_{im} = R - R_{im} > 0 \text{ et } u_{ea} = R - R_{ea} < 0$$

La condition d'équilibre est l'égalité des pressions :

$$p = -\sigma_{rim} = -\sigma_{rea}$$

Par les formules des cylindres épais, on a, en posant  $Q_m = R_{im}/R_{em}$  et  $Q_a = R_{ia}/R_{ea}$ ,

$$\begin{aligned} u_{im} &= \frac{R_{im}}{E_m(R_{em}^2 - R_{im}^2)} p [(1 - \nu_m)R_{im}^2 + (1 + \nu_m)R_{em}^2] \\ &= \frac{pR_{im}}{E_m(1 - Q_m^2)} [(1 + \nu_m) + (1 - \nu_m)Q_m^2] \\ u_{ea} &= -\frac{R_{ea}}{E_a(R_{ea}^2 - R_{ia}^2)} p [(1 - \nu_a)R_{ea}^2 + (1 + \nu_a)R_{ia}^2] \\ &= -\frac{pR_{ea}}{E_a(1 - Q_a^2)} [(1 - \nu_a) + (1 + \nu_a)Q_a^2] \end{aligned}$$

ce que nous noterons simplement

$$u_{im} = C_m p R_{im}, \quad u_{ea} = -C_a p R_{ea} \quad (10.65)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} C_m &= \frac{1}{E_m} \left[ \frac{1 + Q_m^2}{1 - Q_m^2} + \nu_m \right] \\ C_a &= \frac{1}{E_a} \left[ \frac{1 + Q_a^2}{1 - Q_a^2} - \nu_a \right] \end{aligned} \right\} \quad (10.66)$$

Comme on doit avoir

$$|u_{im}| + |u_{ea}| = u_{im} - u_{ea} = R - R_{im} - R + R_{ea} = R_{ea} - R_{im}$$

on obtient la condition

$$p(C_m R_{im} + C_a R_{ea}) = R_{ea} - R_{im} \quad (10.67)$$

En général, on se donne la pression à obtenir, à partir du couple et de la force axiale à transmettre. Supposant alors que l'on se fixe d'avance le rayon  $R_{im}$ , on déduit de la relation précédente

$$R_{ea}(1 - C_a p) = R_{im}(1 + C_m p)$$

soit

$$R_{ea} = R_{im} \frac{1 + C_m p}{1 - C_a p}$$

En pratique, la différence de rayons est très petite, de l'ordre de quelques centièmes de millimètres pour un diamètre de 50 mm. En d'autres termes,

$$\frac{R_{ea} - R_{im}}{R} = \frac{\delta}{R} \ll 1$$

ce qui permet d'écrire sans grande erreur la formule (10.67) sous la forme

$$\frac{\delta}{R} = (C_a + C_m)p$$

qui est celle qu'utilisent les ingénieurs.

## 10.9 Disque en rotation

Considérons à présent un disque tournant à la vitesse angulaire  $\omega$ . Un élément de volume  $dV$  de ce disque subit la force centrifuge

$$f dV = \rho dV \omega^2 r$$

ce qui donne

$$f = \rho \omega^2 r$$

On a alors

$$\begin{aligned} \int f dr &= \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} \\ \int f r^2 dr &= \rho \omega^2 \frac{r^4}{4} \end{aligned}$$

En introduisant ces valeurs dans les formules (10.47) et (10.48), on obtient

$$\begin{aligned} u &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left[ Ar + \frac{B}{r} - \frac{\rho \omega^2 r^3}{4} + \frac{\rho \omega r^3}{8} \right] \\ &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left[ Ar + \frac{B}{r} - \frac{1}{8} \rho \omega^2 r^3 \right] \end{aligned} \quad (10.68)$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (1 + \nu)A - (1 - \nu) \frac{B}{r^2} - (1 + \nu) \frac{\rho \omega^2 r^2}{4} - (1 - \nu) \frac{\rho \omega^2 r^2}{8} \\ &= (1 + \nu)A - (1 - \nu) \frac{B}{r^2} - \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \end{aligned} \quad (10.69)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta &= (1 + \nu)A + (1 - \nu)\frac{B}{r^2} - (1 + \nu)\frac{\rho\omega^2 r^2}{4} + (1 - \nu)\frac{\rho\omega^2 r^2}{8} \\
&= (1 + \nu)A + (1 - \nu)\frac{B}{r^2} - \frac{1 + 3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2
\end{aligned} \tag{10.70}$$

### 10.9.1 Disque plein de rayon extérieur $R_e$

Dans ce cas, on doit avoir  $B = 0$  pour que la solution soit finie à l'origine. En  $r = R_e$ , la condition  $\sigma_r = 0$  entraîne

$$(1 + \nu)A = \frac{3 + \nu}{8}\rho\omega^2 R_e^2$$

La solution est donc

$$u = \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\rho\omega^2 r^2}{8} \left( \frac{3 + \nu}{1 + \nu} R_e^2 r - r^3 \right) \tag{10.71}$$

$$\sigma_r = \frac{3 + \nu}{8}\rho\omega^2 (R_e^2 - r^2) \tag{10.72}$$

$$\sigma_\theta = \frac{3 + \nu}{8}\rho\omega^2 \left( R_e^2 - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} r^2 \right) \tag{10.73}$$

Les deux contraintes atteignent leur maximum au centre du disque, où

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{3 + \nu}{8}\rho\omega^2 R_e^2$$

### 10.9.2 Disque creux de rayons extrêmes $R_i$ et $R_e$

Les conditions  $\sigma_r(R_i) = 0$  et  $\sigma_r(R_e) = 0$  s'écrivent ici

$$\begin{cases}
(1 + \nu)A - (1 - \nu)\frac{B}{R_i^2} = \frac{3 + \nu}{8}\rho\omega^2 R_i^2 \\
(1 + \nu)A - (1 - \nu)\frac{B}{R_e^2} = \frac{3 + \nu}{8}\rho\omega^2 R_e^2
\end{cases}$$

On en déduit

$$(1 - \nu)B \left( \frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2} \right) = \frac{3 + \nu}{8}\rho\omega^2 (R_e^2 - R_i^2)$$

soit

$$(1 - \nu)B = \frac{3 + \nu}{8}\rho\omega^2 R_e^2 R_i^2$$

et

$$(1 + \nu)A = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 (R_e^2 + R_i^2)$$

ce qui mène à la solution suivante :

$$u = \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\rho \omega^2}{8} \left[ \frac{3 + \nu}{1 + \nu} (R_e^2 + R_i^2) r + \frac{3 + \nu}{1 - \nu} \frac{R_e^2 R_i^2}{r} - r^3 \right] \quad (10.74)$$

$$\sigma_r = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 \left[ (R_e^2 + R_i^2) - \frac{R_e^2 R_i^2}{r^2} - r^2 \right] \quad (10.75)$$

$$\sigma_\theta = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 \left[ (R_e^2 + R_i^2) + \frac{R_e^2 R_i^2}{r^2} - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} r^2 \right] \quad (10.76)$$

La contrainte radiale maximale se produit pour  $r = \sqrt{R_i R_e}$  et vaut

$$\sigma_r \max = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 (R_e^2 - R_i^2)$$

La contrainte azimutale maximale a lieu pour  $r = R_i$ . Elle vaut

$$\sigma_\theta \max = \frac{3 + \nu}{4} \rho \omega^2 \left( R_e^2 + \frac{1 - \nu}{3 + \nu} R_i^2 \right)$$

En particulier, pour  $R \rightarrow 0$ ,  $\sigma_\theta \max$  tend vers une valeur *double* de celle du disque plein. Ici encore,

$$\alpha_k = \frac{\sigma_\theta \max(R_i \rightarrow 0)}{\sigma_\theta \max(\text{plein})} = 2$$

## 10.10 Utilisation de la variable complexe [22, 62, 54, 75, 36]

### 10.10.1 Généralités

Les variables complexes rendent de grands services dans la résolution de nombreux problèmes plans. Commençons par rappeler qu'un nombre complexe  $a + ib$  peut être représenté comme un vecteur  $(a, b)$  dans l'espace  $R^2$  (fig. 10.4). Les changements d'axes orthogonaux sont très simples en variables complexes : si  $\eta$  est l'angle avec l'axe des  $x$  de la direction de la normale à une courbe (fig. 10.5), un vecteur

$$a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y = \alpha\mathbf{n} + \beta\mathbf{t}$$

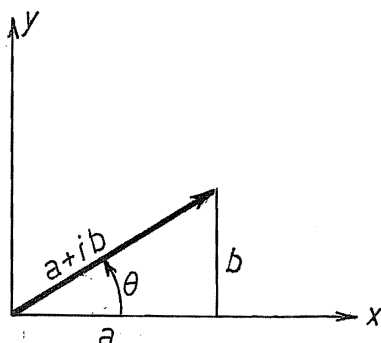


FIGURE 10.4 – Représentation d'un nombre complexe dans le plan

s'exprime par

$$a = \alpha \cos \eta + \beta \sin \eta$$

$$b = \alpha \sin \eta - \beta \cos \eta$$

ce qui équivaut à

$$a + ib = e^{i\eta}(\alpha + i\beta) \quad (10.77)$$

Par ailleurs, on a la relation géométrique utile

$$\begin{aligned} \bar{a}b &= (a_1 - ia_2)(b_1 + ib_2) \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2) + i(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\mathbf{a} \times \mathbf{b} \end{aligned} \quad (10.78)$$

en notant  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  pour la troisième composante du produit vectoriel. Deux vecteurs sont donc *orthogonaux* si  $\Re(\bar{a}b) = 0$  et on aura alors

$$\bar{a}b = i|a||b|$$

### 10.10.2 Fonctions analytiques et antianalytiques

La différentielle d'une fonction  $f(x, y)$  s'écrit en général

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$



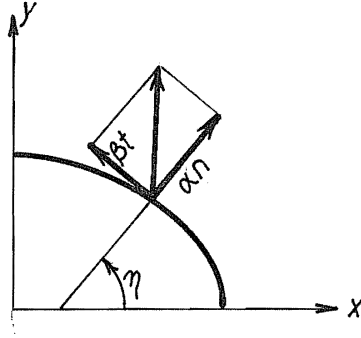


FIGURE 10.5 – Changement d'axes

Notant  $z = x + iy$ , on a

$$dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2} \text{ et } dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i} = -\frac{i}{2}(dz - d\bar{z})$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} df &= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} (dz + d\bar{z}) - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y} (dz - d\bar{z}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \end{aligned}$$

avec

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (10.79)$$

Cela étant, une fonction est *analytique* si elle ne dépend pas de  $\bar{z}$ , soit si

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0 \quad (10.80)$$

ce qui, sous forme réelle, s'écrit

$$\frac{\partial \Re f}{\partial x} = \frac{\partial \Im f}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Re f}{\partial y} = -\frac{\partial \Im f}{\partial x} \quad (10.81)$$

Une fonction est *antianalytique* si elle ne dépend pas de  $z$ , ce qui s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0 \quad (10.82)$$

ou sous forme réelle :

$$\frac{\partial \Re f}{\partial x} = -\frac{\partial \Im f}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Re f}{\partial y} = \frac{\partial \Im f}{\partial x} \quad (10.83)$$

Notons que si une fonction est  $\left\{ \begin{array}{l} \text{analytique} \\ \text{antianalytique} \end{array} \right\}$ ,  $\bar{f}$  est  $\left\{ \begin{array}{l} \text{antianalytique} \\ \text{analytique} \end{array} \right\}$ , car le passage de  $f$  à  $\bar{f}$  se fait en changeant le signe de  $\Im f$ . De plus, si  $f$  est analytique, on a

$$\begin{aligned} \overline{\left( \frac{df}{dz} \right)} &= \overline{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)} \\ &= \frac{1}{2} \overline{\left( \frac{\partial \Re f}{\partial x} + i \frac{\partial \Im f}{\partial x} - i \frac{\partial \Re f}{\partial y} + \frac{\partial \Im f}{\partial y} \right)} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Re f}{\partial x} - i \frac{\partial \Im f}{\partial x} + i \frac{\partial \Re f}{\partial y} + \frac{\partial \Im f}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\Re f - i \Im f) + i \frac{\partial}{\partial y} (\Re f - i \Im f) \right] \\ &= \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} \end{aligned}$$

Il est donc légitime d'écrire cette dérivée  $\bar{f}'$ .

### 10.10.3 Coordonnées curvilignes orthogonales

Considérons deux nouvelles coordonnées  $\alpha$  et  $\beta$  et le changement de variables

$$x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta) \quad (10.84)$$

Elles définissent un système orthogonal si les nombres  $\partial z / \partial \alpha$  et  $\partial z / \partial \beta$  sont représentés dans  $R^2$  par des vecteurs orthogonaux, soit si (*fig. 10.6*)

$$\Re \left( \frac{\partial \bar{z}}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial \beta} \right) = 0 \quad (10.85)$$

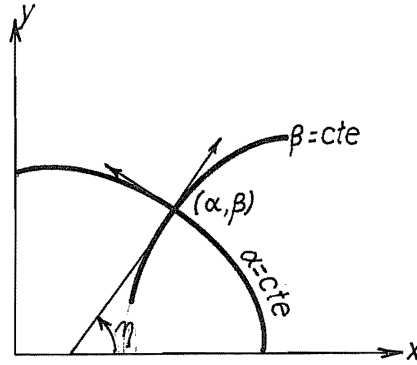


FIGURE 10.6 – Coordonnées curvilignes orthogonales

quels que soient  $\alpha$  et  $\beta$ . Dans ce cas, les courbes  $\alpha = \text{cte}$  et  $\beta = \text{cte}$  forment un réseau orthogonal. En un point  $(\alpha, \beta)$  quelconque, la normale unitaire à la courbe  $\alpha = \text{cte}$  est donnée par

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial \alpha}}{\left| \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right|}$$

Si  $\eta$  est l'angle que fait cette normale avec l'axe de  $x$ , on a

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial \alpha}}{\left| \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right|} = e^{i\eta} \quad (10.86)$$

Le vecteur

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial \beta}}{\left| \frac{\partial z}{\partial \beta} \right|}$$

est normal au précédent. Nous le supposons obtenu en tournant le précédent de  $\pi/2$  dans le sens trigonométrique<sup>2</sup>. Alors,

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial \beta}}{\left| \frac{\partial z}{\partial \beta} \right|} = ie^{i\eta}$$

Notant

$$A = \left| \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right|, \quad B = \left| \frac{\partial z}{\partial \beta} \right| \quad (10.87)$$

on a donc

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = Ae^{i\eta}, \quad \frac{\partial z}{\partial \beta} = Bie^{i\eta} \quad (10.88)$$

Il en résulte évidemment

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial z}{\partial \beta} d\beta = e^{i\eta}(Ad\alpha + Bd\beta) \quad (10.89)$$

et

$$d\bar{z} = e^{-i\eta}(Ad\alpha - iBd\beta) \quad (10.90)$$

Ces relations s'inversent en

$$\begin{aligned} Ad\alpha &= \frac{1}{2}(e^{-i\eta}dz + e^{i\eta}d\bar{z}) \\ Bd\beta &= -\frac{i}{2}(e^{-i\eta}dz - e^{i\eta}d\bar{z}) \end{aligned} \quad (10.91)$$

Soit alors une fonction  $f(x, y)$ . On a

$$\begin{aligned} df &= \frac{1}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} Ad\alpha + \frac{1}{B} \frac{\partial f}{\partial \beta} Bd\beta \\ &= \frac{1}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{1}{2}(e^{-i\eta}dz + e^{i\eta}d\bar{z}) - \frac{1}{B} \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{i}{2}(e^{-i\eta}dz - e^{i\eta}d\bar{z}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{i}{B} \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) e^{-i\eta}dz + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{i}{B} \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) e^{i\eta}d\bar{z} \end{aligned}$$

---

2. Si ce n'est pas le cas, il suffit de permuter le rôle des variables  $\alpha$  et  $\beta$

ce qui implique

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}e^{-i\eta} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{i}{B} \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) = e^{-i\eta} \mathcal{D}f \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}e^{i\eta} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{i}{B} \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) = e^{i\eta} \bar{\mathcal{D}}f \end{cases} \quad (10.92)$$

en introduisant les opérateurs

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{i}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right), \quad \bar{\mathcal{D}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{i}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \quad (10.93)$$

En particulier, la condition d'analyticité de  $f$  s'écrit

$$\bar{\mathcal{D}}f = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{i}{B} \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) = 0 \quad (10.94)$$

Un système de coordonnées  $(\alpha, \beta)$  définit une *transformation conforme* si  $A=B$ . Dans ce cas,

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2A} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} - i \frac{\partial}{\partial \beta} \right), \quad \bar{\mathcal{D}} = \frac{1}{2A} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} + i \frac{\partial}{\partial \beta} \right)$$

c'est-à-dire que les fonctions analytiques sont, dans ce système, également fonctions de  $\gamma = \alpha + i\beta$  seulement. On vérifie aisément qu'alors,

$$A = B = \left| \frac{dz}{d\gamma} \right|$$

et

$$e^{i\eta} = \frac{\left( \frac{dz}{d\gamma} \right)}{\left| \frac{dz}{d\gamma} \right|}$$

#### 10.10.4 Transformation des vecteurs

Comme le montre la figure 10.7, un vecteur  $(T_x, T_y)$  dont l'image complexe est  $T_x + iT_y$ , se transforme selon la normale et la tangente à la courbe  $\alpha = \text{cte}$  par

$$\begin{aligned} T_x &= T_\alpha \cos \eta - T_\beta \sin \eta \\ T_y &= T_\alpha \sin \eta + T_\beta \cos \eta \end{aligned}$$

ce qui donne

$$T_x + iT_y = T_\alpha e^{i\eta} + iT_\beta e^{i\eta} = e^{i\eta}(T_\alpha + iT_\beta) \quad (10.95)$$

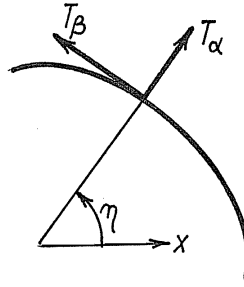


FIGURE 10.7 – Transformation d'un vecteur

### 10.10.5 Transformation des tenseurs symétriques

Dans le système d'axes  $(x, y)$ , le tenseur  $\sigma$  s'applique à un vecteur  $\mathbf{n}$  pour donner un nouveau vecteur  $\mathbf{T}$ , selon la loi

$$\begin{aligned} T_x &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \\ T_y &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \end{aligned}$$

On recherche les composantes de ce même tenseur dans le système  $(\alpha, \beta)$ , c'est-à-dire que ces composantes doivent vérifier

$$\begin{aligned} T_\alpha &= \sigma_\alpha n_\alpha + \tau_{\alpha\beta} n_\beta \\ T_\beta &= \tau_{\alpha\beta} n_\alpha + \sigma_\beta n_\beta \end{aligned}$$

A cette fin, on remarquera d'abord que

$$\begin{aligned} T_x + iT_y &= (\sigma_x + i\tau_{xy})n_x + (\tau_{xy} + i\sigma_y)n_y \\ &= (\sigma_x + i\tau_{xy})n_x + (\sigma_y - i\tau_{xy})in_y \\ &= \left[ \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) + i\tau_{xy} \right] n_x \\ &\quad + \left[ \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) - i\tau_{xy} \right] in_y \end{aligned}$$

ce qui donne l'expression complexe de l'application d'un tenseur sur un vecteur :

$$T_x + iT_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}(n_x + in_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy})(n_x - in_y) \quad (10.96)$$

Cette expression équivaut à

$$e^{i\eta}(T_\alpha + iT_\beta) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} e^{i\eta}(n_\alpha + in_\beta) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}) e^{-i\eta}(n_\alpha - in_\beta)$$

soit

$$T_\alpha + iT_\beta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}(n_\alpha + in_\beta) + e^{-2i\eta} \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy})(n_\alpha - in_\beta)$$

c'est-à-dire que

$$\begin{cases} \sigma_\alpha + \sigma_\beta &= \sigma_x + \sigma_y \\ \sigma_\alpha - \sigma_\beta + 2i\tau_{\alpha\beta} &= e^{-2i\eta}(\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}) \end{cases} \quad (10.97)$$

### 10.10.6 Structure générale d'une fonction harmonique réelle

On peut écrire l'opérateur de Laplace sous la forme

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) f \\ &= 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} f \end{aligned}$$

Pour  $\nabla^2 f = 0$ , on a donc

$$\frac{\partial f}{\partial z} = F'(z)$$

et

$$f = F(z) + G(\bar{z}) \quad (10.98)$$

Si la fonction  $f$  est réelle, on a

$$\Im f = \Im F + \Im G = 0$$

Comme les fonctions  $F$  et  $G$  vérifient les relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Re F}{\partial x} &= \frac{\partial \Im F}{\partial y}, & \frac{\partial \Im F}{\partial x} &= -\frac{\partial \Re F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Re G}{\partial x} &= -\frac{\partial \Im G}{\partial y}, & \frac{\partial \Im G}{\partial x} &= \frac{\partial \Re G}{\partial y} \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Re F}{\partial x} &= \frac{\partial \Im F}{\partial y} = -\frac{\partial \Im G}{\partial y} = \frac{\partial \Re G}{\partial x} \\ \frac{\partial \Re F}{\partial y} &= -\frac{\partial \Im F}{\partial x} = \frac{\partial \Im G}{\partial x} = \frac{\partial \Re G}{\partial y}\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\Re F = \Re G + \text{cte}$$

Faisant rentrer la constante dans  $F$ , on obtient  $G = \bar{F}$ , d'où

$$f = F + \bar{F}, \text{ avec } F \text{ analytique} \quad (10.99)$$

C'est la forme générale des solutions réelles de l'équation de Laplace.

### 10.10.7 Structure générale d'une fonction biharmonique réelle

L'équation biharmonique  $\nabla^4 \varphi = 0$  équivaut évidemment à

$$\nabla^2 \varphi = \text{harmonique}$$

ce qui permet d'écrire

$$\nabla^2 \varphi = 4F' + 4\bar{F}'$$

$F$  étant une fonction analytique. Le facteur 4 est introduit pour la commodité. Cela revient encore à dire

$$4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} \varphi = 4F' + 4\bar{F}'$$

Intégrant, on obtient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \bar{z}F' + \bar{F} + G'(z)$$

Une nouvelle intégration donne

$$\varphi = \bar{z}F + z\bar{F} + G(z) + H(\bar{z})$$

Les deux premières fonctions de cette expression ont une somme réelle. Par le même raisonnement que ci-dessus, on trouve que la somme ne sera réelle que si  $H = \bar{G}$ . La solution générale est donc

$$\varphi = \bar{z}F + z\bar{F} + G + \bar{G} \text{ avec } F \text{ et } G \text{ analytiques} \quad (10.100)$$



Cette formule est due à Goursat [41].

Une autre expression peut être obtenue en posant

$$F(z) = zH(z)$$

Il vient alors

$$\varphi = |z|^2(H + \bar{H}) + (G + \bar{G})$$

ou encore,

$$\varphi = (x^2 + y^2)h(x, y) + g(x, y) \quad (10.101)$$

où  $h$  et  $g$  sont deux fonctions harmoniques.

## 10.11 Forme complexe de la solution des équations de l'élasticité plane en l'absence de forces de volume [54, 62]

### 10.11.1 Déplacements

Les équations de Navier, sous la forme (10.33), avec  $f_1 = f_2 = 0$ , sont des équations de Cauchy-Riemann. On peut donc écrire

$$\varepsilon + i\omega = \frac{4}{E}F'(z) \quad (10.102)$$

On a alors

$$\varepsilon = \frac{2}{E}(F' + \bar{F}'), \quad \omega = \frac{2}{Ei}(F' - \bar{F}')$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(u + iv) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1 - \nu}{2} \varepsilon + i\omega \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(u + iv) &= \frac{1 - \nu}{E}(F' + \bar{F}') + \frac{2}{E}(F' - \bar{F}') \\ &= \frac{3 - \nu}{E}F' - \frac{1 + \nu}{E}\bar{F}' \end{aligned}$$

Intégrant cette équation, on trouve la forme générale des déplacements :

$$u + iv = \frac{1}{E} [(3 - \nu)F - (1 + \nu)z\bar{F}' - (1 + \nu)\bar{K}'] \quad (10.103)$$

### 10.11.2 Contraintes

Les contraintes se déduisent de ce résultat par dérivation. Notant d'abord que

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{1 - \nu} = \frac{1}{E(1 - \nu)} (\sigma_x - \nu\sigma_y + \sigma_y - \nu\sigma_x) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{E}$$

on obtient, en tenant compte de (10.102),

$$(\sigma_x + \sigma_y) + iE\omega = 4F' \quad (10.104)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + iv) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \gamma_{xy} \end{aligned}$$

La loi de Hooke donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \frac{1}{2E} (\sigma_x - \nu\sigma_y - \sigma_y + \nu\sigma_x) \\ &= \frac{1 + \nu}{2E} (\sigma_x - \sigma_y) \\ &= \frac{1}{4G} (\sigma_x - \sigma_y) \end{aligned}$$

et

$$\frac{i}{2} \gamma_{xy} = \frac{i}{4G} 2\tau_{xy}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} &= 4G \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + iv) \\ &= \frac{2E}{1 + \nu} \frac{1}{E} [-(1 + \nu)z\bar{F}'' - (1 + \nu)\bar{K}'''] \end{aligned}$$

soit

$$\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} = -2z\bar{F}'' - 2\bar{K}''' \quad (10.105)$$

### 10.11.3 Fonctions de contrainte

Calculons à présent les fonctions de contrainte du premier ordre  $\psi_1$  et  $\psi_2$  et la fonction d'Airy  $\varphi$ . On remarquera d'abord que les relations

$$\psi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \psi_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

entraînent

$$\psi = \psi_1 + i\psi_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - i\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -i \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = -2i\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \quad (10.106)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + i \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \\ &= -i \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + i\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + i\frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) \\ &= -2i \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} + i\frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} \right) \end{aligned}$$

soit

$$\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} = -2i\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} \quad (10.107)$$

Enfin, comme

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x}, \quad \tau_{xy} - \tau_{xy} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = 0$$

on a

$$2\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - i\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + i\frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = -i(\sigma_x + \sigma_y) \quad (10.108)$$

Ces relations permettent de calculer la fonction  $\psi$ . Par (10.107) et (10.105), on a

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = i(-z\bar{F}'' - \bar{K}'')$$

d'où

$$\psi = i(-z\bar{F}' - \bar{K}' - L) \quad (10.109)$$

$L$  étant une nouvelle fonction analytique. Par ailleurs, on déduit de (10.108) et (10.104)

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{i}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{i}{2}4\Re F' = -i(F' + \bar{F}')$$

ce qui entraîne

$$\psi = -i(F + z\bar{F}' + \bar{M}) \quad (10.110)$$

avec  $M$  analytique. La comparaison des résultats (10.109) et (10.110) donne

$$F = L, \quad \bar{M} = \bar{K}'$$

si bien que

$$\psi = -i(F + z\bar{F}' + \bar{K}') \quad (10.111)$$

On en déduit directement l'expression de la fonction d'Airy : comme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = \frac{i}{2} \psi = \frac{1}{2}(F + z\bar{F}' + \bar{K}')$$

on obtient par intégration

$$\varphi = \frac{1}{2}(\bar{z}F + z\bar{F} + \bar{K} + N)$$

$N$  étant analytique. Pour que cette expression soit réelle, il faudra que  $N=K$ , ce qui mène à la forme définitive

$$\varphi = \frac{1}{2}(\bar{z}F + z\bar{F} + K + \bar{K}) \quad (10.112)$$

en bon accord avec l'expression de Goursat des fonctions biharmoniques.

#### 10.11.4 Calcul des contraintes en coordonnées curvilignes orthogonales

Dans le cas de coordonnées curvilignes orthogonales, le calcul des contraintes se fait simplement à partir des relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha + \sigma_\beta &= \sigma_x + \sigma_y \\ &= \nabla^2 \varphi \\ &= 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \\ &= 4e^{-i\eta} \mathcal{D} (e^{-i\eta} \bar{\mathcal{D}} \varphi) \end{aligned} \quad (10.113)$$

et

$$\begin{aligned}
 \sigma_\alpha - \sigma_\beta + 2i\tau_{\alpha\beta} &= e^{-2i\eta}(\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}) \\
 &= -4e^{-2i\eta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}^2} \\
 &= -4e^{-2i\eta} e^{i\eta} \bar{\mathcal{D}} (e^{i\eta} \bar{\mathcal{D}} \varphi) \\
 &= -4e^{-i\eta} \bar{\mathcal{D}} (e^{i\eta} \bar{\mathcal{D}} \varphi)
 \end{aligned} \tag{10.114}$$

### 10.11.5 Expression des tractions de surface

Les tractions de surface sur un bord sont données par

$$T_x = \frac{\partial \psi_1}{\partial t}, \quad T_y = \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \tag{10.115}$$

soit

$$T_x + iT_y = \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{10.116}$$

En coordonnées curvilignes orthogonales,

$$T_\alpha + iT_\beta = e^{-i\eta}(T_x + iT_y) = e^{-i\eta} \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{10.117}$$

## 10.12 Problème de Kolossoff (1910) [54]

On considère un plaque plane très large dans laquelle est percé un trou elliptique de demi-axes  $a$  et  $b$ , le grand axe étant incliné d'un angle  $\gamma$  par rapport à la direction des tractions à l'infini (*fig. 10.8*). On peut fonder l'étude de ce problème sur la transformation

$$z = f(\zeta) = c\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right), \quad 0 \leq m \leq 1, \quad c > 0 \tag{10.118}$$

qui, pour un bon choix de  $c$  et  $m$ , applique l'ellipse du plan des  $z$  en un cercle du plan des  $\zeta$ . En effet, pour  $|\zeta| = 1$ , on a

$$f(\zeta) = c(e^{i\theta} + me^{-i\theta})$$

soit

$$x = c(1 + m) \cos \theta, \quad y = c(1 - m) \sin \theta$$

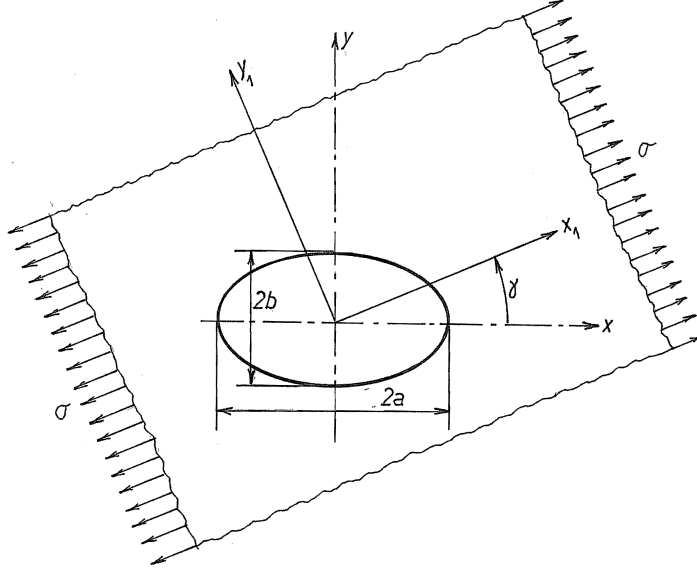


FIGURE 10.8 – Problème de Kolosov

si bien que

$$\frac{x^2}{c^2(1+m)^2} + \frac{y^2}{c^2(1-m)^2} = 1 \quad (10.119)$$

On reconnaît là l'équation d'une ellipse de demi-axes

$$a = c(1+m), \quad b = c(1-m) \quad (10.120)$$

Ces demi-axes étant donnés, on calcule  $c$  et  $m$  par

$$c = \frac{a+b}{2}, \quad m = \frac{a-b}{a+b} \quad (10.121)$$

L'inclinaison d'un angle  $\gamma$  du champ de contraintes par rapport à l'ellipse entraîne

$$\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} = \sigma_x + \sigma_y; \quad \sigma_{x_1} - \sigma_{y_1} + 2i\tau_{x_1y_1} = e^{-2i\gamma}(\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy})$$

Dès lors, à l'infini, les conditions

$$\sigma_{x_1} = \sigma, \quad \sigma_{y_1} = 0, \quad \tau_{x_1y_1} = 0$$

se transforment en

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma, \quad \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} = e^{2i\gamma}\sigma$$

ou, en termes des fonctions  $F$  et  $K$ ,

$$4\Re F' = \sigma, \quad -2(z\bar{F}'' + \bar{K}'') = \sigma e^{2i\gamma} \quad (10.122)$$

Les conditions sur le bord du trou sont

$$i\psi = F + z\bar{F}' + \bar{K}' = 0 \quad (10.123)$$

En fait, nous exprimerons  $F$  et  $K$  en termes de  $\zeta$  :

$$F(z) = F(f(\zeta)) = F_1(\zeta), \quad K(z) = K(f(\zeta)) = K_1(\zeta)$$

On calculera donc

$$F'(z) = \frac{F_1'(\zeta)}{f'(\zeta)}, \quad K'(z) = \frac{K_1'(\zeta)}{f'(\zeta)}$$

et

$$\begin{aligned} F''(z) &= \frac{1}{f'(\zeta)} \frac{F_1''(\zeta)f'(\zeta) - F_1'(\zeta)f''(\zeta)}{[f'(\zeta)]^2} \\ &= \frac{F_1''f' - F_1'f''}{f'^3} \\ K''(z) &= \frac{K_1''f' - K_1'f''}{f'^3} \end{aligned}$$

Tenant compte de ces transformations, on aura

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x + iu_y = \frac{1}{E} \left[ (3 - \nu)F_1 - (1 + \nu)\frac{f}{f'}\bar{F}_1' - (1 + \nu)\frac{\bar{K}_1'}{f'} \right] \\ \sigma_x + \sigma_y = 4\Re\left(\frac{F_1'}{f'}\right) \\ \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} = -2 \left( f \frac{\bar{F}_1''f' - \bar{F}_1'f''}{f'^3} + \frac{\bar{K}_1''f' - \bar{K}_1'f''}{f'^3} \right) \\ i\psi = F_1 + \frac{f}{f'}\bar{F}_1' + \frac{\bar{K}_1'}{f'} \end{array} \right. \quad (10.124)$$

A l'infini, on aura

$$f(\zeta) \approx c\zeta, \quad f'(\zeta) = c \left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right) \approx c, \quad f''(\zeta) = 2m\zeta^{-3} \approx 0 \quad (10.125)$$

ce qui permet d'écrire

$$\sigma \approx 4\Re \frac{F_1'}{c}, \quad \sigma e^{2i\gamma} \approx -2 \left( \frac{\zeta}{c} \bar{F}_1'' + \frac{\bar{K}_1''}{c^2} \right) \quad (10.126)$$

De telles conditions peuvent être vérifiées par des développements de la forme

$$F_1' = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^{-n}, \quad K_1'' = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \zeta^{-n} \quad (10.127)$$

Les conditions à l'infini donnent immédiatement

$$\Re A_0 = \frac{\sigma c}{4}, \quad B_0 = -\frac{\sigma c^2}{2} e^{-2i\gamma} \quad (10.128)$$

Il nous faut à présent intégrer les déplacements pour vérifier leur univocité. On a

$$\begin{cases} F_1 &= A_0 \zeta + A_1 \ln \zeta + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \frac{\zeta^{1-n}}{1-n} \\ K_1' &= B_0 \zeta + B_1 \ln \zeta + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{\zeta^{1-n}}{1-n} \end{cases}$$

Les seuls termes qui n'assurent pas l'univocité sont ceux en  $\ln \zeta$ , qui changent de définition à chaque tour du trou. Ces termes sont

$$\frac{1}{E} \left[ (3 - \nu) A_1 \ln \zeta - (1 + \nu) B_1 \frac{\ln \zeta}{f'} \right]$$

d'où la condition  $A_1 = B_1 = 0$ .

Venons-en aux conditions au bord du trou, représenté dans le plan des  $\zeta$  par le cercle  $|\zeta| = 1$ . On a

$$\begin{cases} f = c \left( \zeta + \frac{m}{\zeta} \right) = c(e^{i\theta} + me^{-i\theta}) = ce^{i\theta}(1 + me^{-2i\theta}) \\ f' = c \left( 1 - \frac{m}{\zeta^2} \right) = c(1 - me^{-2i\theta}) \end{cases}$$



La condition  $i\psi = 0$  équivaut à la suivante :

$$0 = \bar{f}'F_1 + f\bar{F}'_1 + \bar{K}'_1 = (1 - me^{2i\theta})F_1 + (e^{i\theta} + me^{-i\theta})\bar{F}'_1 + \bar{K}'_1$$

avec

$$\begin{cases} F_1 &= A_0 e^{i\theta} - \sum_{n=2}^{\infty} A_n \frac{e^{i(1-n)\theta}}{n-1} \\ \bar{F}'_1 &= \bar{A}_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n e^{in\theta} \\ \bar{K}'_1 &= \bar{B}_0 e^{-i\theta} - \sum_{n=2}^{\infty} \bar{B}_n \frac{e^{i(1-n)\theta}}{n-1} \end{cases}$$

En identifiant les coefficients des différentes puissances de  $e^{i\theta}$ , on obtient les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &\mapsto A_0 + A_2 m + \bar{A}_0 + \bar{A}_2 m - \frac{\bar{B}_2}{c} = 0 \\ e^{2i\theta} &\mapsto \bar{A}_3 m - \frac{1}{2} \frac{\bar{B}_3}{c} = 0 \\ e^{3i\theta} &\mapsto -A_0 m + \bar{A}_2 + m\bar{A}_4 - \frac{\bar{B}_4}{c} = 0 \\ e^{ik\theta}, k > 3 &\mapsto \bar{A}_{k-1} + m\bar{A}_{k+1} + \frac{\bar{B}_{k+1}}{kc} = 0 \\ e^{-i\theta} &\mapsto -A_2 + \bar{A}_0 m + \frac{A_4 m}{3} + \frac{\bar{B}_0}{c} = 0 \\ e^{-ik\theta}, k > 1 &\mapsto -\frac{A_{k+1}}{k} + m\frac{A_{k-1}}{k-2} = 0 \end{aligned}$$

Cherchons une solution telle que  $A_k = 0, k \geq 3$  et  $B_k = 0, k \geq 5$ . Tenant compte des conditions (10.128) et supposant  $\Im A_0 = 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} e^{2i\theta} &\mapsto B_3 = 0 \\ e^{-i\theta} &\mapsto A_2 = m\bar{A}_0 + \frac{\bar{B}_0}{c} = \frac{\sigma c}{4}(m - 2e^{2i\gamma}) \\ e^{3i\theta} &\mapsto B_4 = 3c(A_2 - A_0 m) = -\frac{3\sigma c^2}{2}e^{2i\gamma} \\ e^{i\theta} &\mapsto B_2 = c(\bar{A}_0 + A_0 + m\bar{A}_2 + mA_2) = \frac{\sigma c^2}{2}(1 + m^2 - 2m \cos 2\gamma) \end{aligned}$$

Les fonctions cherchées sont donc

$$\begin{cases} F_1' &= \frac{\sigma c}{4} + \frac{\sigma c}{4}(m - 2e^{2i\gamma})\zeta^{-2} \\ K_1'' &= -\frac{\sigma c^2}{2}e^{-2i\gamma} + \frac{\sigma c^2}{2}(1 + m^2 - 2m \cos \gamma)\zeta^{-2} - \frac{3\sigma c^2}{2}e^{2i\gamma}\zeta^{-4} \end{cases} \quad (10.129)$$

Au bord du trou, la contrainte normale est évidemment nulle, si bien que

$$\sigma_t = \sigma_x + \sigma_y = 4\Re F' = 4\Re \left( \frac{F_1'}{f'} \right) = \sigma \Re \frac{1 + (m - 2e^{2i\gamma})\zeta^{-2}}{1 - m\zeta^{-2}}$$

comme  $|\zeta| = 1$ , on a  $\zeta = e^{i\theta}$ , ce qui donne

$$\sigma_t = \sigma \frac{1 - m^2 + 2m \cos 2\gamma - 2 \cos(2\gamma - 2\theta)}{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta} \quad (10.130)$$

Examinons deux cas particuliers.

1. Pour  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , le grand axe du trou est perpendiculaire au champ de contrainte principal et

$$\sigma_t = \sigma \frac{1 - m^2 - 2m + 2 \cos 2\theta}{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta}$$

Son maximum se produit pour  $\theta = 0$  et vaut

$$\sigma_t \max = \sigma \frac{3 - 2m - m^2}{(1 - m)^2} = \sigma \frac{3 + m}{1 - m} = \sigma \left( 1 + 2 \frac{1 + m}{1 - m} \right) = \sigma \left( 1 + 2 \frac{a}{b} \right)$$

le coefficient de concentration de contrainte vaut donc

$$\alpha_k = \frac{\sigma_t \max}{\sigma} = 1 + 2 \frac{a}{b} \quad (10.131)$$

C'est la conclusion fondamentale du problème de Kolosoff.

2. Pour  $\gamma = 0$ , le petit axe du trou est perpendiculaire au champ de contrainte principal. On a

$$\sigma_t = \sigma \frac{1 - m^2 + 2m - 2 \cos 2\theta}{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta}$$

Le maximum se produit alors en  $\theta = \frac{\pi}{2}$  et vaut

$$\sigma_t \max = \sigma \left( 1 + 2 \frac{b}{a} \right)$$

On peut exprimer les résultats précédents sous une autre forme : au voisinage du sommet de l'ellipse, on peut écrire

$$x = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \approx a - \frac{ay^2}{2b^2} = a - \frac{y^2}{2R}$$

où  $R$  est le rayon de courbure. On a donc

$$R = \frac{b^2}{a}, \quad \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{R}{a}}, \quad \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{a}{R}}$$

et, en notant  $T$  le demi-axe  $a$ , on a donc

$$\alpha_k = 1 + 2\sqrt{\frac{T}{R}} \quad (10.132)$$

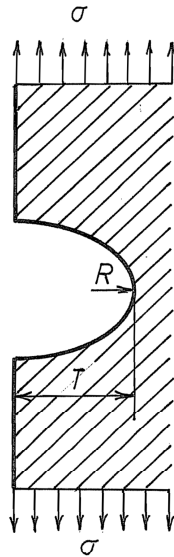


FIGURE 10.9 – Entaille elliptique

Cette formule, due à Inglis (1913), est fréquemment employée, même lorsque le trou n'est pas elliptique. On l'utilise également pour les *entailles elliptiques*

(fig. 10.9). C'est là une approximation, car cela suppose que l'on peut couper la tôle du problème de Kolossoff le long de son axe sans rien changer, ce qui serait vrai si l'on avait  $\sigma_t = 0$  en  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Or, en fait, en ce point,

$$\sigma_t = \sigma \frac{1 - m^2 - 2m - 2}{1 + m^2 + 2m} = -\sigma$$

et cette valeur n'est négligeable devant le maximum que pour les très grandes valeurs de  $T/R$ .

### 10.13 Problème de Kirsch (1898)

Le problème de Kirsch est le cas particulier du précédent où l'ellipse est un cercle, ce qui revient à dire que  $m = 0$ . On a alors

$$a = b = c = R, \quad z = R\zeta, \quad f' = c = R, \quad \gamma = 0$$

et

$$\begin{aligned} F' &= \frac{F_1'}{c} = \frac{\sigma}{4} \left( 1 - 2 \frac{R^2}{z^2} \right) \\ &= \frac{\sigma}{4} \left( 1 - 2 \frac{R^2}{r^2} e^{-2i\theta} \right) \\ K'' &= \frac{K_1''}{c^2} = -\frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma R^2}{2 r^2} - \frac{3}{2} \sigma \frac{R^2}{z^4} \\ &= -\frac{\sigma}{2} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} e^{-2i\theta} + 3 \frac{R^4}{r^4} e^{-4i\theta} \right) \\ F''' &= \sigma \frac{R^2}{z^3} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4\Re F' = \sigma \left( 1 - 2 \frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta \right) \\ \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau xy &= -2(z\bar{F}''' + \bar{K}''') \\ &= -2\sigma R^2 \frac{z}{\bar{z}^3} + \sigma \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} e^{2i\theta} + 3 \frac{R^4}{r^4} e^{4i\theta} \right) \\ &= \sigma \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} e^{2i\theta} - 2 \frac{R^2}{r^2} e^{4i\theta} + 3 \frac{R^4}{r^4} e^{4i\theta} \right) \end{aligned}$$

et, en composantes polaires,

$$\begin{aligned}\sigma_r + \sigma_\theta &= \sigma \left( 1 - 2 \frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta \right) \\ \sigma_r - \sigma_\theta + 2i\tau_{r\theta} &= e^{-2i\theta} (\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}) \\ &= \sigma \left( e^{-2i\theta} - \frac{R^2}{r^2} - 2 \frac{R^2}{r^2} e^{2i\theta} + 3 \frac{R^4}{r^4} e^{2i\theta} \right)\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{cases} \sigma_r &= \frac{\sigma}{2} \left[ \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \left( 1 - 4 \frac{R^2}{r^2} + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma}{2} \left[ \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \left( 1 + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\sigma}{2} \left( 1 + 2 \frac{R^2}{r^2} - 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \end{cases} \quad (10.133)$$

Au bord du trou, la contrainte  $\sigma_\theta$  vaut

$$\sigma_\theta = \sigma(1 - 2 \cos 2\theta)$$

Elle atteint son maximum en  $\theta = \pi/2$ , où elle vaut  $3\sigma$ . La perturbation de l'état de contrainte décroît comme  $1/r^2$ . Son gradient relatif est donné par

$$\chi = \left| \frac{1}{\sigma_\theta} \frac{d\sigma_\theta}{dr} \right|_{\text{au maximum}} = \frac{7}{3R} \quad (10.134)$$

Les coefficients de concentration de contrainte relatifs à d'autres sollicitations s'obtiennent par superposition : en superposant un état de contrainte  $\sigma_x^\infty$  à un état de contrainte  $\sigma_y^\infty$ , on aura, au bord du trou,

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \sigma_x^\infty (1 - 2 \cos 2\theta) + \sigma_y^\infty \left( 1 - 2 \cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &= \sigma_x^\infty (1 - 2 \cos 2\theta) + \sigma_y^\infty (1 + 2 \cos 2\theta) \\ &= (\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) + 2(\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty) \cos 2\theta\end{aligned}$$

dont le maximum vaudra

$$\sigma_\theta \text{ max} = (\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) + 2|\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty| \quad (10.135)$$

Pour un état de traction uniforme  $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \sigma$ , on obtient ainsi

$$\sigma_\theta \text{ max} = 2\sigma, \quad \alpha_k = 2$$

Dans le cas d'un cisaillement uniforme,  $\sigma_x^\infty = -\sigma_y^\infty = \tau$ , il vient

$$\sigma_\theta \text{ max} = 4\tau$$

Le coefficient de concentration de contrainte sera ici le rapport des diamètres des cercles de Mohr, soit

$$\alpha_k = \frac{4\tau - 0}{\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty} = 2$$

## 10.14 Fissure sous contrainte uniaxiale

Si, dans le problème de Kolossoff, on pose  $m = 1$ , on obtient une fissure rectiligne, de longueur  $2a = 4c$ , perpendiculaire au champ principal de contrainte pour  $\gamma = \pi/2$ . Il vient alors

$$\begin{aligned} F_1' &= \frac{\sigma c}{4}(1 + 3\zeta^{-2}) \\ K_1'' &= \frac{\sigma c^2}{2}(1 + 4\zeta^{-2} + 3\zeta^{-4}) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\sigma c}{4}(\zeta - 3\zeta^{-1}) \\ K_1 &= \frac{\sigma c^2}{2} \left( \frac{\zeta^2}{2} - 2 \ln \zeta - \frac{1}{2}\zeta^{-2} \right) \end{aligned} \quad (10.136)$$

On simplifie ces expressions en posant

$$\zeta = e^\xi$$

soit

$$z = c \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) = 2c \operatorname{ch} \xi = a \operatorname{ch} \xi$$

ce qui revient à utiliser les coordonnées elliptiques. On a alors, comme  $dz/d\xi = a \operatorname{sh} \xi$ ,

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{\sigma a}{4} (2 \operatorname{sh} \xi - \operatorname{ch} \xi) \\
 F' &= \frac{\sigma}{4} \left( 2 \frac{\operatorname{ch} \xi}{\operatorname{sh} \xi} - 1 \right) \\
 F'' &= -\frac{\sigma}{2a \operatorname{sh}^3 \xi} \\
 K' &= \frac{\sigma a}{2} \left( \operatorname{ch} \xi - \frac{1}{\operatorname{sh} \xi} \right) \\
 K'' &= \frac{\sigma}{2} \left( 1 + \frac{\operatorname{ch} \xi}{\operatorname{sh}^3 \xi} \right)
 \end{aligned} \tag{10.137}$$

On en déduit aisément les contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \sigma_x + \sigma_y = 4\Re F' = \sigma \left( \frac{\operatorname{ch} \xi}{\operatorname{sh} \xi} + \frac{\operatorname{ch} \bar{\xi}}{\operatorname{sh} \bar{\xi}} - 1 \right) \\
 \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} = -2(z\bar{F}'' + \bar{K}'') = -\sigma \left( -\frac{\operatorname{ch} \xi}{\operatorname{sh}^3 \xi} + 1 + \frac{\operatorname{ch} \bar{\xi}}{\operatorname{sh}^3 \bar{\xi}} \right)
 \end{array} \right. \tag{10.138}$$

La zone intéressante est évidemment le voisinage de la fissure. Dans cette région, on peut poser

$$z = a \operatorname{ch} \xi = a + re^{i\theta} = a(1 + \epsilon e^{i\theta}), \quad \epsilon \ll 1$$

Il vient alors

$$\operatorname{sh} \xi = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - 1} = \sqrt{1 + 2\epsilon e^{i\theta} + \mathcal{O}(\epsilon^2)} - 1 = \sqrt{2\epsilon} e^{i\theta/2} (1 + \mathcal{O}(\epsilon))$$

Introduisant ces valeurs dans les expressions (10.138) des contraintes, on obtient

$$\begin{aligned}
 \sigma_x + \sigma_y &= \sigma \left( \frac{1 + \epsilon e^{i\theta}}{\sqrt{2\epsilon}} e^{-i\theta/2} + \frac{1 + \epsilon e^{-i\theta}}{\sqrt{2\epsilon}} e^{i\theta/2} - 1 \right) \\
 &= \frac{2\sigma}{\sqrt{2\epsilon}} \cos \frac{\theta}{2} + \mathcal{O}(\sigma) \\
 \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} &= -\sigma \left[ -\frac{(1 + \epsilon e^{i\theta})e^{3i\theta/2}}{(2\epsilon)^{3/2}} + 1 + \frac{(1 + \epsilon e^{-i\theta})e^{3i\theta/2}}{(2\epsilon)^{3/2}} \right] \\
 &= \sigma \left[ 2^{-3/2} \epsilon^{-1/2} e^{3i\theta/2} 2i \sin \theta + \mathcal{O}(1) \right] \\
 &= \frac{\sigma}{2\sqrt{2\epsilon}} \left( \cos \frac{3\theta}{2} + i \sin \frac{3\theta}{2} \right) 4i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \mathcal{O}(\sigma) \\
 &= \frac{2\sigma}{\sqrt{2\epsilon}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left( -\sin \frac{3\theta}{2} + i \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \mathcal{O}(\sigma)
 \end{aligned}$$

On en déduit les expressions asymptotiques suivantes des contraintes :

$$\begin{cases}
 \sigma_x &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\epsilon}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \mathcal{O}(\sigma) \\
 \sigma_y &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\epsilon}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \mathcal{O}(\sigma) \\
 \tau_{xy} &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\epsilon}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \mathcal{O}(\sigma)
 \end{cases} \quad (10.139)$$

En *mécanique de la rupture*, on introduit le *facteur d'intensité de contrainte*  $K_I$  défini par

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (10.140)$$

en fonction duquel les expressions asymptotiques (10.139) s'écrivent encore

$$\begin{cases}
 \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \mathcal{O}(\sigma) \\
 \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \mathcal{O}(\sigma) \\
 \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \mathcal{O}(\sigma)
 \end{cases} \quad (10.141)$$

Il est à noter que, bien que ces contraintes tendent vers l'infini pour  $r \rightarrow 0$ ,



leur énergie élastique dans une zone de rayon  $R$  reste finie. En effet,

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y}{2E} + \frac{\tau_{xy}}{2G} \\
 &= \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y + 2(1+\nu)\tau_{xy}^2}{2E} \\
 &= \frac{K_I^2}{4\pi r E} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left\{ \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)^2 + \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)^2 \right. \\
 &\quad \left. - 2\nu \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \right. \\
 &\quad \left. + 2(1+\nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{3\theta}{2} \right\} \\
 &= \frac{K_I^2}{4\pi r E} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left\{ 2 - 2\nu + (2+2\nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{3\theta}{2} \right. \\
 &\quad \left. + 2(1+\nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{3\theta}{2} \right\} \\
 &= \frac{K_I^2}{2\pi r E} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[ (1-\nu) + (1+\nu) \sin^2 \frac{3\theta}{2} \right] \\
 &= \frac{K_I^2}{4\pi r E} (1 + \cos \theta) \left[ (1-\nu) + \frac{1+\nu}{2} (1 - \cos 3\theta) \right] \\
 &= \frac{K_I^2}{4\pi r E} \left[ (1-\nu)(1 + \cos \theta) + \frac{1+\nu}{2} (1 + \cos \theta - \cos 3\theta - \cos \theta \cos 3\theta) \right]
 \end{aligned}$$

Intégrant sur un cercle de rayon  $R$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}_R &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^R W r dr = \int_0^R \frac{K_I^2}{4\pi r E} r dr [(1-\nu)2\pi + (1+\nu)\pi] \\
 &= \frac{3-\nu}{4E} K_I^2 R
 \end{aligned} \tag{10.142}$$

De la même façon, la contrainte équivalente de Tresca est donnée par

$$\sigma_T = |\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}| = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} |\sin \theta| \tag{10.143}$$

Elle tend vers l'infini pour  $r \rightarrow 0$ , mais sa moyenne quadratique sur une zone

de rayon  $R$  est donnée par

$$\tilde{\sigma}_T^2 = \frac{1}{2\pi R} \int_0^R dr \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_T r dr d\theta = \frac{1}{2\pi R} \frac{K_I^2}{2\pi} \int_0^R \frac{r dr}{r} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{K_I^2}{4\pi}$$

soit

$$\tilde{\sigma}_T = \frac{K_I}{2\sqrt{\pi}} \quad (10.144)$$

On admet, en mécanique de la rupture, que dans un matériau fragile, la fissure progresse de manière instable, sans augmentation de charge, dès que le facteur d'intensité des contraintes admet une valeur critique  $K_{Ic}$ . Le facteur  $K_I$  est également considéré comme la grandeur à prendre en compte pour expliquer la propagation des fissures en fatigue.

La plasticité du matériau a pour effet de perturber la distributions des contraintes ci-dessus. Si l'on adopte le critère de Tresca, on a  $\sigma_T \geq \sigma_e$  (limite élastique) si

$$\sqrt{r} \leq \frac{K_I |\sin \theta|}{\sqrt{2\pi} \sigma_e}$$

ce qui signifie que la zone plastique est contenue dans la boule de rayon

$$r_p = \frac{K_I^2}{2\pi \sigma_e^2} \quad (10.145)$$

soit encore

$$\frac{r_p}{a} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\sigma_e} \right)^2 \quad (10.146)$$

On admet généralement que les résultats de la mécanique de la rupture représentent bien la réalité tant que la zone plastique reste relativement petite.

## 10.15 Coin soumis à une force et à un moment (Problème de Michell, 1900)

Dans ce problème, illustré par la figure 10.10, il est clair que les contraintes doivent s'évanouir à l'infini, puisque la section ne fait qu'augmenter quand  $x$  croît. On a donc à l'infini,

$$\begin{cases} 4\Re F' \rightarrow 0 \\ -2(z\bar{F}'' + \bar{K}'' ) \rightarrow 0 \end{cases}$$

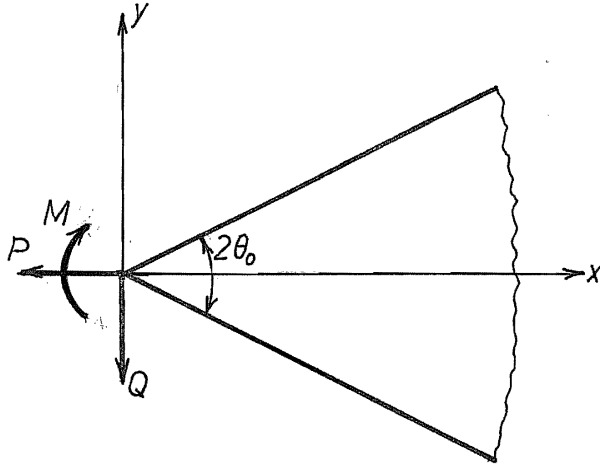


FIGURE 10.10 – Problème de Michell

En conséquence, on cherchera une solution de la forme

$$F' = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^{-n}, \quad K'' = \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^{-n} \quad (10.147)$$

Sur les bords  $\theta = \pm\theta_0$ , on doit avoir

$$\psi = -i(F + z\bar{F}' + \bar{K}') = cte \quad (\text{bords libres}) \quad (10.148)$$

On calcule aisément

$$\left\{ \begin{array}{l} F(z) = A_1 \ln z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \frac{z^{1-n}}{1-n} \\ \bar{K}'(z) = \bar{B}_1 \ln \bar{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \bar{B}_n \frac{\bar{z}^{1-n}}{1-n} \\ z\bar{F}' = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n z\bar{z}^{-n} \end{array} \right.$$

soit, en termes de  $r$  et  $\theta$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} F = A_1(\ln r + i\theta) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n}{1-n} r^{1-n} e^{i(1-n)\theta} \\ \bar{K}' = B_1(\ln r - i\theta) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\bar{B}_n}{1-n} r^{1-n} e^{i(n-1)\theta} \\ z\bar{F}' = A_1 e^{2i\theta} + \sum_{n=2}^{\infty} \bar{A}_n r^{1-n} e^{i(n+1)\theta} \end{array} \right.$$

ce qui permet d'écrire

$$i\psi = (A_1 + \bar{B}_1) \ln r + (A_1 - \bar{B}_1)i\theta + \bar{A}_1 e^{2i\theta} + \sum_{n=2}^{\infty} r^{1-n} \left[ \frac{A_n}{1-n} e^{i(1-n)\theta} + \bar{A}_n e^{i(n+1)\theta} + \frac{\bar{B}_n}{1-n} e^{i(n-1)\theta} \right] \quad (10.149)$$

La condition(10.148) revient à dire qu'en  $\theta = \pm\theta_0$ , la fonction  $\psi$  ne dépend pas de  $r$ . En annulant les coefficients des différentes puissances de  $r$ , on obtient les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{B}_1 = -A_1 \\ \bar{B}_n = -A_n e^{-2i(n-1)\theta_0} + (n-1)\bar{A}_n e^{2i\theta_0} \quad (\text{calculé en } \theta_0) \\ \bar{B}_n = -A_n e^{+2i(n-1)\theta_0} + (n-1)\bar{A}_n e^{-2i\theta_0} \quad (\text{calculé en } (-\theta_0)) \end{array} \right. \quad (10.150)$$

En soustrayant les deux dernières conditions, on obtient

$$\bar{A}_n + A_n \frac{\sin 2(n-1)\theta_0}{(n-1) \sin 2\theta_0} = 0$$

ce qui équivaut à

$$\Re A_n \left[ 1 + \frac{\sin 2(n-1)\theta_0}{(n-1) \sin 2\theta_0} \right] + i\Im A_n \left[ -1 + \frac{\sin 2(n-1)\theta_0}{(n-1) \sin 2\theta_0} \right] = 0$$

Il est clair qu'en dehors des cas particuliers où l'un des coefficients est nul, on aura  $\Re A_n = \Im A_n = 0$ . La nullité en question suppose vérifiée l'une des relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 2(n-1)\theta_0 = -(n-1) \sin 2\theta_0 \\ \sin 2(n-1)\theta_0 = (n-1) \sin 2\theta_0 \end{array} \right.$$

ce qui n'a lieu que pour  $n = 2$ , valeur pour laquelle on trouve

$$\Re A_2 = 0, \quad \Im A_2 \text{ arbitraire}$$

On obtient alors, en additionnant les deux dernières équations du système (10.150),

$$\bar{B}_2 = -2A_2 \cos 2\theta_0 = -2i\Im A_2 \cos 2\theta_0$$

Les seules constantes qui subsistent sont donc

$$C_1 = \Re A_1, \quad C_2 = \Im A_1, \quad C_3 = \Im A_2$$

en fonction desquelles on peut écrire

$$\bar{B}_1 = -(C_1 + iC_2), \quad \bar{B}_2 = -2iC_3 \cos 2\theta_0$$

Il vient donc

$$\begin{cases} F &= (C_1 + iC_2) \ln z - \frac{iC_3}{z} \\ K' &= -(C_1 - iC_2) \ln z - \frac{2iC_3 \cos 2\theta_0}{z} \end{cases} \quad (10.151)$$

et

$$\begin{aligned} F' &= \frac{C_1 + iC_2}{z} + \frac{iC_3}{z^2} \\ &= \frac{C_1 + iC_2}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) + \frac{iC_3}{r^2} (\cos 2\theta - i \sin 2\theta) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y = 4\Re F' &= 4r^{-1}(C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta) \\ &\quad + 4C_3 r^{-2} \sin 2\theta = \sigma_r + \sigma_\theta \end{aligned} \quad (10.152)$$

Les dérivées secondes sont données par

$$\bar{F}'' = -(C_1 - iC_2)z\bar{z}^{-2} + 2iC_3\bar{z}^{-3}, \quad \bar{K}'' = -(C_1 + iC_2)\bar{z}^{-1} - 2iC_3 \cos 2\theta_0 \bar{z}^{-2}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} &= 2(C_1 - iC_2)z\bar{z}^{-2} - 4iC_3z\bar{z}^{-3} + 2(C_1 + iC_2)\bar{z}^{-1} + 4iC_3 \cos 2\theta_0 \bar{z}^{-2} \\ &= 2(C_1 - iC_2)r^{-1}e^{3i\theta} - 4iC_3r^{-2}e^{4i\theta} + 2(C_1 + iC_2)r^{-1}e^{i\theta} \\ &\quad + 4iC_3 \cos 2\theta_0 r^{-2}e^{2i\theta} \end{aligned}$$

On passe aux coordonnées polaires par la transformation

$$\begin{aligned}\sigma_r - \sigma_\theta + 2i\tau_{r\theta} &= e^{-2i\theta}(\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}) \\ &= 2(C_1 - iC_2)r^{-1}e^{i\theta} - 4iC_3r^{-2}e^{2i\theta} + 2(C_1 + iC_2)r^{-1}e^{-i\theta} \\ &\quad + 4iC_3 \cos 2\theta_0 r^{-2}\end{aligned}$$

On en déduit directement

$$\begin{aligned}\sigma_r - \sigma_\theta &= \frac{4}{r}(C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta) + \frac{4C_3}{r^2} \sin 2\theta \\ 2\tau_{r\theta} &= \frac{4C_3}{r^2}(\cos 2\theta_0 - \cos 2\theta)\end{aligned}$$

d'où, par comparaison avec (10.152)

$$\begin{cases} \sigma_r &= \frac{4}{r}(C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta) + \frac{4C_3}{r^2} \sin 2\theta \\ \sigma_\theta &= 0 \\ \tau_{r\theta} &= \frac{2C_3}{r^2}(\cos 2\theta_0 - \cos 2\theta) \end{cases} \quad (10.153)$$

Il reste à déterminer les constantes. Comme, par (10.149),

$$\psi = 2(C_1 + iC_2)\theta + (C_1 - iC_2)\frac{e^{2i\theta}}{i}$$

on a

$$P + iQ = \psi(\theta_0) - \psi(-\theta_0) = 4(C_1 + iC_2)\theta_0 + 2(C_1 - iC_2) \sin 2\theta_0$$

si bien que

$$4C_1 = \frac{P}{\theta_0 + \frac{1}{2} \sin 2\theta_0}, \quad 4C_2 = \frac{Q}{\theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0} \quad (10.154)$$

Pour la détermination de  $C_3$ , le plus simple est de calculer directement le moment  $M$  sur un cercle de rayon  $R$  : on a en effet (fig .10.11)

$$\begin{aligned}M &= \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \tau_{r\theta} R \cdot R d\theta \\ &= 2C_3 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (\cos 2\theta_0 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= 2C_3(2\theta_0 \cos 2\theta_0 - \sin 2\theta_0)\end{aligned}$$

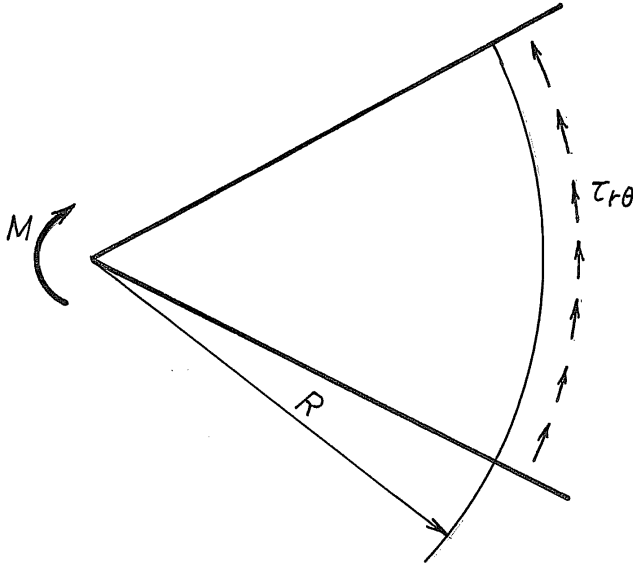


FIGURE 10.11 – Calcul du moment

soit

$$2C_3 = \frac{M}{2\theta_0 \cos 2\theta_0 - \sin 2\theta_0} \tag{10.155}$$

Rassemblant les résultats (10.153), (10.154) et (10.155), on obtient comme expression finale des contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{P}{\theta_0 + \frac{1}{2} \sin 2\theta_0} \frac{\cos \theta}{r} + \frac{Q}{\theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0} \frac{\sin \theta}{r} \\ \quad + \frac{M}{2\theta_0 \cos 2\theta_0 - \sin 2\theta_0} \frac{\sin 2\theta}{r^2} \\ \sigma_\theta = 0 \\ \tau_{r\theta} = \frac{M}{2\theta_0 \cos 2\theta_0 - \sin 2\theta_0} \frac{\cos 2\theta_0 - \cos 2\theta}{r^2} \end{array} \right.$$

### 10.16 Problème de Flamant (1892)

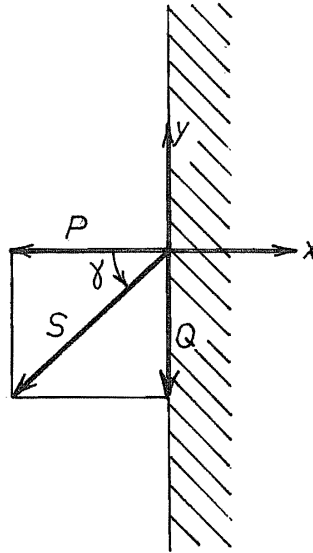


FIGURE 10.12 – Problème de Flamant

Pour  $\theta_0 = \pi/2$ , le problème précédent correspond à un demi-plan indéfini : c'est le problème de Flamant. On a alors

$$\sin 2\theta_0 = \sin \pi = 0, \quad \cos 2\theta_0 = \cos \pi = -1$$

et, en se limitant à la seule charge  $(P, Q)$ , il vient

$$\begin{cases} \sigma_r &= 2 \frac{P \cos \theta + Q \sin \theta}{\pi r} \\ \sigma_\theta &= 0 \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{cases}$$

En notant que selon la figure 10.12,

$$P = S \cos \gamma, \quad Q = S \sin \gamma$$



on peut encore écrire

$$\sigma_r = 2S \frac{\cos(\theta - \gamma)}{\pi r}, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (10.156)$$

les composantes cartésiennes des contraintes sont liées aux précédentes par

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= \sigma_r + \sigma_\theta = 2S \frac{\cos(\theta - \gamma)}{\pi r} \\ \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} &= e^{2i\theta}(\sigma_r - \sigma_\theta + 2i\tau_{r\theta}) = e^{2i\theta} 2S \frac{\cos(\theta - \gamma)}{\pi r} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{S \cos(\theta - \gamma)}{\pi r} (1 + \cos 2\theta) = \frac{2S \cos(\theta - \gamma)}{\pi r} \cos^2 \theta \\ \sigma_y &= \frac{S \cos(\theta - \gamma)}{\pi r} (1 - \cos 2\theta) = \frac{2S \cos(\theta - \gamma)}{\pi r} \sin^2 \theta \\ \tau_{xy} &= \frac{S \cos(\theta - \gamma)}{\pi r} \sin 2\theta = \frac{2S \cos(\theta - \gamma)}{\pi r} \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \right. \quad (10.157)$$

On utilise aussi parfois le système  $Ox_1y_1$  de la charge, représenté en figure 10.13. Alors, comme l'angle  $\lambda$  compté à partir de l'axe des  $x_1$  est donné par

$$\lambda = \theta - \gamma$$

on a

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} &= \sigma_r + \sigma_\theta = 2S \frac{\cos(\theta - \gamma)}{\pi r} = 2S \frac{\cos \lambda}{\pi r} \\ \sigma_{x_1} - \sigma_{y_1} &= e^{2i\lambda}(\sigma_r - \sigma_\theta + 2i\tau_{r\theta}) = e^{2i\lambda} 2S \frac{\cos \lambda}{\pi r} \end{aligned}$$

soit

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{x_1} &= \frac{S \cos \lambda}{\pi r} (1 + \cos 2\lambda) = \frac{2S \cos^3 \lambda}{\pi r} = \frac{2S \cos^4 \lambda}{\pi x_1} \\ \sigma_{y_1} &= \frac{S \cos \lambda}{\pi r} (1 - \cos 2\lambda) = \frac{2S \cos \lambda \sin^2 \lambda}{\pi r} = \frac{2S \sin^2 \cos^2 \lambda}{\pi x_1} \\ \tau_{x_1 y_1} &= \frac{2S \cos \lambda}{\pi r} \sin \lambda \cos \lambda = \frac{2S \sin \lambda \cos^3 \lambda}{\pi x_1} \end{aligned} \right. \quad (10.158)$$

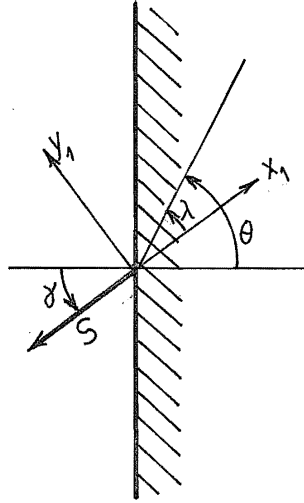


FIGURE 10.13 – Système d'axes de la charge

Fait remarquable, ces dernières expressions ne font pas intervenir l'angle  $\gamma$  de la charge.

Intégrons les déplacements. Avec

$$C_1 = \frac{P}{2\pi}, \quad C_2 = \frac{Q}{2\pi}$$

les formules (10.151) donnent

$$F = \frac{P+iQ}{2\pi} \ln z, \quad \bar{F}' = \frac{P-iQ}{2\pi} \frac{1}{\bar{z}}, \quad \bar{K}' = -\frac{P-iQ}{2\pi} \ln \bar{z}$$

d'où

$$\begin{aligned} u+iv &= \frac{1}{E} \left[ (3-\nu) \frac{P+iQ}{2\pi} \ln z - (1+\nu) \frac{P-iQ}{2\pi} \frac{z}{\bar{z}} + (1+\nu) \frac{P-iQ}{2\pi} \ln \bar{z} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi E} \left[ (3-\nu)(P+iQ)(\ln r + i\theta) - (1+\nu)(P-iQ)e^{2i\theta} \right. \\ &\quad \left. + (1+\nu)(P-iQ)(\ln r - i\theta) \right] \end{aligned}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi E} [(3 - \nu)(P \ln r - Q\theta) - (1 + \nu)(P \cos 2\theta + Q \sin 2\theta) \\ &\quad + (1 + \nu)(P \ln r - Q\theta)] \\ &= \frac{1}{2\pi E} \{P[4 \ln r - (1 + \nu) \cos 2\theta] - Q[4 + (1 + \nu) \sin 2\theta]\} \quad (10.159) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2\pi E} [(3 - \nu)(P\theta + Q \ln r) - (1 + \nu)(P \sin 2\theta - Q \cos 2\theta) \\ &\quad - (1 + \nu)(P\theta + Q \ln r)] \\ &= \frac{1}{2\pi E} \{P[2(1 - \nu)\theta - (1 + \nu) \sin 2\theta] + Q[2(1 - \nu) \ln r + (1 + \nu) \cos 2\theta]\} \quad (10.160) \end{aligned}$$

Ces déplacements sont évidemment définis à un mouvement de corps rigide près. On ne peut lever l'indétermination en exigeant la nullité à l'infini, du fait de leur structure. Mais on peut imposer qu'en un point de coordonnées  $(R, 0)$ ,  $R$  étant fixé,  $u = v = \omega = 0$ . Comme

$$\begin{aligned} u(R, 0) &= \frac{1}{2\pi E} \{P[4 \ln R - (1 + \nu)] - 4Q\} = u_0 \\ v(R, 0) &= \frac{1}{2\pi E} \{Q[2(1 - \nu) \ln R + (1 + \nu)]\} = v_0 \\ \omega(R, 0) &= \frac{4}{E} \Im F'(R, 0) = \frac{4}{E} \Im \left[ \frac{P + iQ}{2\pi} \frac{1}{R} \right] = \frac{1}{2\pi E} \frac{4Q}{R} = \omega_0 \end{aligned}$$

le déplacement à soustraire a pour composantes

$$\begin{cases} \tilde{u} &= u_0 - \omega_0 y = u_0 - \omega_0 r \sin \theta \\ \tilde{v} &= v_0 + \omega_0(x - R) = v_0 - \omega_0 R + \omega_0 r \cos \theta \end{cases}$$

Il vient alors

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{u} = u - \tilde{u} &= \frac{1}{2\pi E} \{P[4 \ln \frac{r}{R} + (1 + \nu)(1 - \cos 2\theta)] \\ &\quad - Q[-\frac{r}{R} \sin \theta + (1 + \nu) \sin 2\theta]\} \\ \hat{v} = v - \tilde{v} &= \frac{1}{2\pi E} \{P[2(1 - \nu)\theta - (1 + \nu) \sin 2\theta] \\ &\quad + Q[2(1 - \nu) \ln \frac{r}{R} - (1 + \nu)(1 - \cos 2\theta) + 4(1 - \frac{r}{R} \sin \theta)] \} \end{aligned} \right. \quad (10.161)$$

### 10.17 Disque circulaire soumis à deux forces $P$ opposées

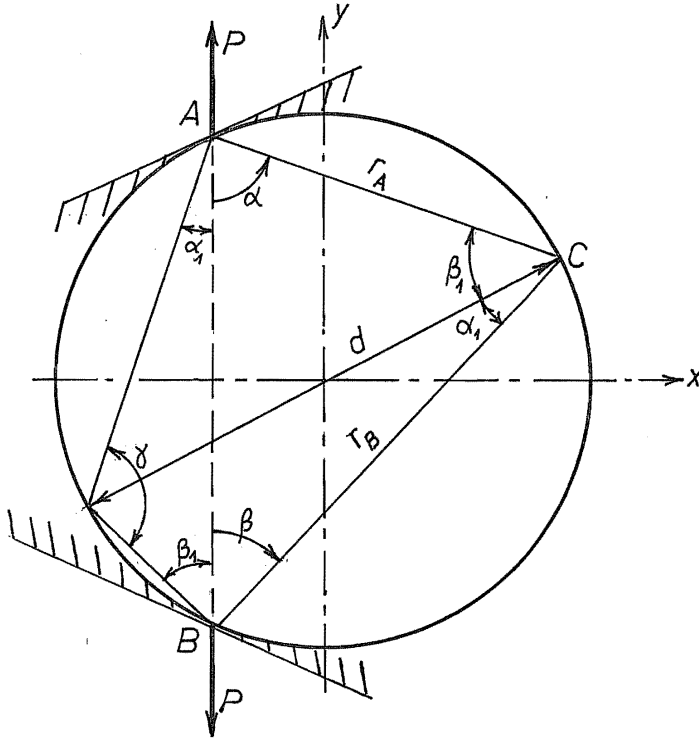


FIGURE 10.14 – Disque soumis à deux forces opposées

Ce problème se résout par superposition. La charge  $P$  située en  $A$  (fig. 10.14) provoquerait, dans le demi-plan situé sous la tangente en  $A$ , des contraintes données par

$$\begin{cases} \sigma_{r_A} + \sigma_{\theta_A} = \frac{2P \cos \alpha}{\pi r_A} \\ \sigma_{r_A} - \sigma_{\theta_A} + 2i\tau_{r_A\theta_A} = \frac{2P \cos \alpha}{\pi r_A} \end{cases}$$

10.17. DISQUE CIRCULAIRE SOUMIS À DEUX FORCES  $P$  OPPOSÉES 317

De même, la charge située en  $B$  provoquerait, dans le demi-plan situé au-dessus de la tangente en  $B$ , des contraintes données par

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{r_B} + \sigma_{\theta_B} = \frac{2P \cos \beta}{\pi r_B} \\ \sigma_{r_B} - \sigma_{\theta_B} + 2i\tau_{r_B\theta_B} = \frac{2P \cos \beta}{\pi r_B} \end{array} \right.$$

En superposant ces deux états, on obtient, en un point  $C$  situé sur la circonférence, et dans les coordonnées polaires du cercle,

– Contraintes dues à  $P_A$  :  $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r + \sigma_\theta = \frac{2P \cos \alpha}{\pi r_A} \\ \sigma_r - \sigma_\theta + 2i\tau_{r\theta} = \frac{2P \cos \alpha}{\pi r_A} e^{-2i\beta_1} \end{array} \right\}$ , d'où,

en notant  $d$  le diamètre du cercle,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{P \cos \alpha}{\pi r_A} (1 + \cos 2\beta_1) = \frac{2P \cos \alpha}{\pi r_A} \cos^2 \beta_1 = \frac{2P}{\pi d} \cos \alpha \cos \beta_1 \\ \sigma_\theta = \frac{P \cos \alpha}{\pi r_A} (1 - \cos 2\beta_1) = \frac{2P \cos \alpha}{\pi r_A} \sin^2 \beta_1 = \frac{2P}{\pi d} \cos \alpha \operatorname{tg} \beta_1 \sin \beta_1 \\ \tau_{r\theta} = -\frac{P \cos \alpha}{\pi r_A} \sin 2\beta_1 = -\frac{2P \cos \alpha}{\pi r_A} \sin \beta_1 \cos \beta_1 = -\frac{2P}{\pi d} \cos \alpha \sin \beta_1 \end{array} \right.$$

– Contraintes dues à  $P_B$  :  $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r + \sigma_\theta = \frac{2P \cos \beta}{\pi r_B} \\ \sigma_r - \sigma_\theta + 2i\tau_{r\theta} = \frac{2P \cos \beta}{\pi r_B} e^{2i\alpha_1} \end{array} \right\}$ , d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{2P}{\pi d} \cos \beta \cos \alpha_1 \\ \sigma_\theta = \frac{2P}{\pi d} \cos \beta \operatorname{tg} \alpha_1 \sin \alpha_1 \\ \tau_{r\theta} = \frac{2P}{\pi d} \cos \beta \sin \alpha_1 \end{array} \right.$$

Additionnant, et tenant compte des relations  $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$  et  $\beta_1 = \frac{\pi}{2} - \beta$  (voir

figure 10.14), on obtient, toujours sur la circonférence,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{2P}{\pi d} (\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta) = \frac{2P}{\pi d} \sin(\alpha + \beta) \\ \sigma_\theta = \frac{2P}{\pi d} (\cos \alpha \cotg \beta \cos \beta + \cos \beta \cotg \alpha \cos \alpha) \\ = \frac{2P}{\pi d} \cotg \alpha \cotg \beta \sin(\alpha + \beta) \\ \tau_{r\theta} = \frac{2P}{\pi d} (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) = 0 \end{array} \right.$$

Cette distribution de contraintes permet d'équilibrer les deux charges, mais elle ne vérifie pas l'équilibre à la frontière du cercle, où

$$\sigma_r = \frac{2P}{\pi d} \sin(\alpha + \beta) = p = \text{cte}$$

puisque (voit figure 10.14)

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2} \frac{\text{arc}(ACB)}{d/2} = \gamma$$

En additionnant un état de contrainte hydrostatique

$$\sigma_x = \sigma_y = -p$$

évidemment en équilibre à l'intérieur, puisqu'il s'agit d'un champ de contraintes constantes, on rétablit l'équilibre à la frontière, sans déséquilibrer les charges qui produisent un état de contrainte *infini* dans leur voisinage. C'est le résultat obtenu par Michell en 1900 : *l'état de contrainte dans un cylindre soumis à deux charges opposées s'obtient en superposant les contraintes de Flamant relatives à ces deux charges et un état hydrostatique*

$$-p = -\frac{2P}{\pi d} \sin \gamma$$

Les composantes cartésiennes du champ de contrainte résultant sont données par (fig. 10.15)

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= \frac{2P \cos \alpha}{\pi r_A} + \frac{2P \cos \beta}{\pi r_B} - \frac{2P}{\pi d} \sin \gamma \\ \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} &= \frac{2P \cos \alpha}{\pi r_A} e^{-2i\alpha'} + \frac{2P \cos \beta}{\pi r_B} e^{-2i\beta'} \end{aligned}$$

10.17. DISQUE CIRCULAIRE SOUMIS À DEUX FORCES  $P$  OPPOSÉES 319

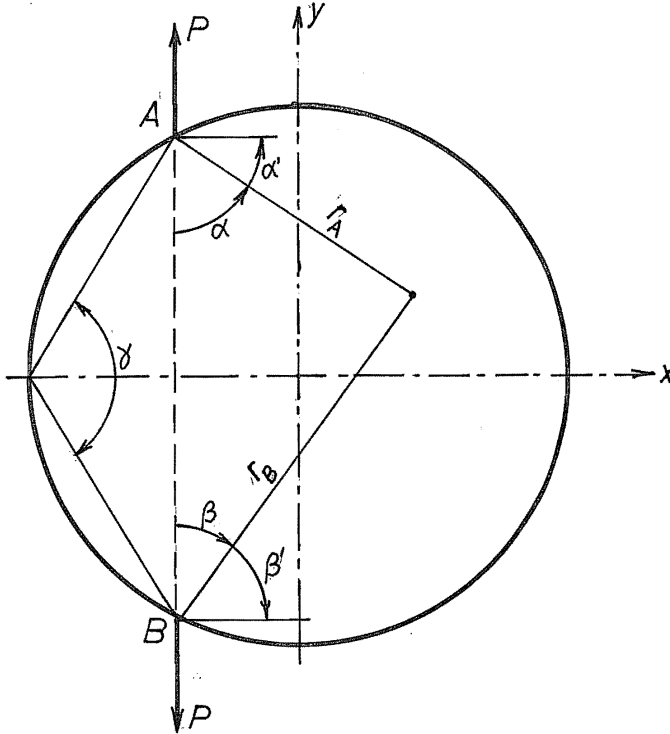


FIGURE 10.15 – Calcul des contraintes en un point du disque

ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \sigma_x = \frac{P}{\pi} \left[ \frac{\cos \alpha}{r_A} (1 + \cos 2\alpha') + \frac{\cos \beta}{r_B} (1 + \cos 2\beta') - \frac{2 \sin \gamma}{d} \right] \\
 = \frac{2P}{\pi} \left[ \frac{\cos \alpha \sin^2 \alpha}{r_A} + \frac{\cos \beta \sin^2 \beta}{r_B} - \frac{\sin \gamma}{d} \right] \\
 \sigma_y = \frac{P}{\pi} \left[ \frac{\cos \alpha}{r_A} (1 - \cos 2\alpha') + \frac{\cos \beta}{r_B} (1 - \cos 2\beta') - \frac{2 \sin \gamma}{d} \right] \\
 = \frac{2P}{\pi} \left[ \frac{\cos^3 \alpha}{r_A} + \frac{\cos^3 \beta}{r_B} - \frac{\sin \gamma}{d} \right] \\
 \tau_{xy} = \frac{P}{\pi} \left[ -\frac{\cos \alpha \sin 2\alpha'}{r_A} + \frac{\cos \beta \sin 2\beta'}{r_B} \right] \\
 = \frac{P}{\pi} \left[ -\frac{\sin \alpha \cos^2 \alpha}{r_A} + \frac{\sin \beta \cos^2 \beta}{r_B} \right]
 \end{array} \right. \quad (10.162)$$

### 10.18 Poutre circulaire soumise à un moment constant (Golovin, 1881) [40]

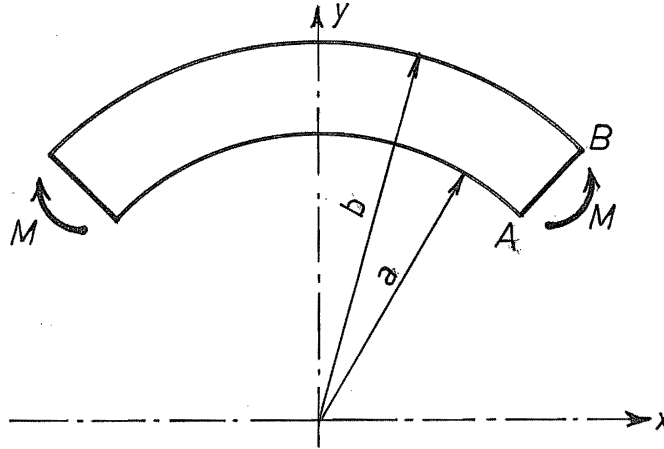


FIGURE 10.16 – Poutre circulaire en flexion pure

Dans ce problème illustré par la figure 10.16, il est clair que les contraintes doivent être indépendantes de  $\theta$ . Il doit donc en être de même de la fonction d’Airy. Dans l’expression générale

$$\varphi = \frac{1}{2}(\bar{z}F + z\bar{F} + K + \bar{K})$$

posons  $F = zH$ . Il vient alors

$$\varphi = \frac{1}{2}(|z|^2(H + \bar{H}) + K + \bar{K})$$

Il suffira donc de trouver des fonctions analytiques  $H$  et  $K$  dont les parties réelles ne dépendent pas de  $\theta$ . Les seules fonctions de ce type sont

$$H = A \ln z + B, \quad K = C \ln z + D$$

La constante  $D$  est improductive et peut donc, sans perte de généralité, être posée nulle. On a alors

$$F = Az \ln z + Bz, \quad K = C \ln z$$



10.18. POUTRE CIRCULAIRE SOUMISE À UN MOMENT CONSTANT 321

et

$$\varphi = Ar^2 \ln r + Br^2 + C \ln r \quad (10.163)$$

Sur le contour, les cercles de rayon  $a$  et  $b$  sont libres de toute charge ; en outre, sur le segment  $AB$ , la résultante des charges est nulle. On peut donc poser

$$i\psi = 0 \text{ en } r = a \text{ et } r = b$$

soit explicitement

$$\begin{aligned} 0 = F + z\bar{F}' + \bar{K}' &= A(z \ln z + z \ln \bar{z} + z) + 2Bz + \frac{C}{\bar{z}} \\ &= e^{i\theta} \left[ A(2r \ln r + r) + 2Br + \frac{C}{r} \right] \text{ en } r = a \text{ et } r = b \end{aligned}$$

Il en résulte les conditions

$$\begin{cases} A(2b \ln b + b) + 2Bb + \frac{C}{b} = 0 \\ A(2a \ln a + a) + 2Ba + \frac{C}{a} = 0 \end{cases} \quad (10.164)$$

Par ailleurs, sur le segment  $AB$ , on a

$$\begin{aligned} M &= \int_A^B (xT_y - yT_x) ds \\ &= \int_A^B \left( x \frac{\partial \psi_y}{\partial t} - y \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right) ds \\ &= [x\psi_y - y\psi_x]_A^B - \int_A^B (\psi_y dx - \psi_x dy) \\ &= \int_A^B \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \right) \\ &= [\varphi]_A^B \end{aligned}$$

soit

$$M = \varphi(b) - \varphi(a) = A(b^2 \ln b - a^2 \ln a) + B(b^2 - a^2) + C \ln \frac{b}{a} \quad (10.165)$$

Cette condition, jointe aux deux équations (10.164), permet de calculer

$$\begin{cases} A = -\frac{2M}{N}(b^2 - a^2) \\ B = \frac{M}{N}[(b^2 - a^2) + 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a)] \\ C = -\frac{4M}{N}a^2b^2 \ln \frac{b}{a} \end{cases} \quad (10.166)$$

avec

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 \ln^2 \frac{b}{a} \quad (10.167)$$

Nous sommes à présent en mesure de calculer les contraintes :

$$\begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= \sigma_x + \sigma_y = 4\Re F' = 4A(\ln r + 1) + 4B \\ \sigma_r - \sigma_\theta + 2i\tau_{r\theta} &= e^{-2i\theta}(-2z\bar{F}'' - 2\bar{K}'') = e^{-2i\theta} \left( -2A\frac{z}{z} + 2\frac{C}{z^2} \right) \\ &= -2A + \frac{2C}{r^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} \sigma_r = A(2 \ln r + 1) + 2B + \frac{C}{r^2} \\ \sigma_r = A(2 \ln r + 3) + 2B - \frac{C}{r^2} \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

soit, explicitement,

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{4M}{N} \left[ \frac{a^2b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} - b^2 \ln \frac{b}{r} - a^2 \ln \frac{r}{a} \right] \\ \sigma_\theta = -\frac{4M}{N} \left[ b^2 - a^2 - \frac{a^2b^2 \ln \frac{b}{a}}{r^2} - b^2 \ln \frac{b}{r} - a^2 \ln \frac{r}{a} \right] \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases} \quad (10.168)$$

Calculons à présent les déplacements. On a

$$\begin{aligned}
 u + iv &= \frac{1}{E} [(3 - \nu)F - (1 + \nu)z\bar{F}' - (1 + \nu)\bar{K}'] \\
 &= \frac{1}{E} \left\{ (3 - \nu)(Az \ln z + Bz) - (1 + \nu)z[A(\ln \bar{z} + 1) + B] - (1 + \nu)\frac{C}{\bar{z}} \right\} \\
 &= \frac{1}{E} \left\{ (3 - \nu)[Ar e^{i\theta}(\ln r + i\theta) + Bre^{i\theta}] \right. \\
 &\quad \left. - (1 + \nu)r e^{i\theta}[A(\ln r - i\theta + 1) + B] - (1 + \nu)\frac{C}{r} e^{i\theta} \right\}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 u_r + iu_\theta &= e^{-i\theta}(u + iv) \\
 &= \frac{1}{E} \left\{ (3 - \nu)[Ar(\ln r + i\theta) + Br] - (1 + \nu)r[A(\ln r - i\theta + 1) + B] \right. \\
 &\quad \left. - (1 + \nu)\frac{C}{r} \right\}
 \end{aligned}$$

ce qui donne (à un déplacement de corps rigide près)

$$\begin{cases} u_r &= \frac{1}{E} \{ 2(1 - \nu)(Ar \ln r + Br) - (1 + \nu)(Ar + \frac{C}{r}) \} \\ u_\theta &= \frac{4}{E} Ar\theta \end{cases} \quad (10.169)$$

On remarquera que  $u_\theta$  varie linéairement en fonction du rayon, c'est-à-dire que l'hypothèse de Bernoulli (conservation de la planéité des sections droites) est vérifiée. Par ailleurs, la théorie de Winkler [97, 98], dans laquelle  $\sigma_\theta$  varie selon un loi hyperbolique, donne pour cette contrainte des valeurs très voisines de la présente solution.

Lorsque la poutre est très mince, c'est-à-dire pour  $\frac{b-a}{2R} \ll 1$ , on a, en posant

$$\begin{aligned}
 t &= (b - a) = 2R\epsilon, \quad \epsilon \ll 1 \\
 r &= R + y = R(1 + \epsilon\rho)
 \end{aligned}$$

les relations asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 &= 4\epsilon R^2 \\ \frac{a^2 b^2 \ln \frac{b}{a}}{r^2} &= 2R^2 \epsilon (1 - 2\epsilon \rho) (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) \\ b^2 \ln \frac{b}{r} &= R^2 [\epsilon (1 - \rho) + \mathcal{O}(\epsilon^2)] \\ a^2 \ln \frac{r}{a} &= R^2 [\epsilon (1 + \rho) + \mathcal{O}(\epsilon^2)] \\ N &= \frac{64}{3} R^4 \epsilon^4 (1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= -\frac{3M}{16R^4 \epsilon^4} [4R^2 \epsilon - 2R^2 \epsilon (1 - 2\epsilon \rho) - R^2 \epsilon (1 - \rho) - R^2 \epsilon (1 + \rho)] (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) \\ &= -\frac{3M \epsilon \rho}{4R^2 \epsilon^3} (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) \\ &= -\frac{6My}{t^3} (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la formule de la flexion des poutres droites s'applique avec une erreur de l'ordre de  $t/R$ .

## 10.19 Problème de Neuber [64, 65]

On considère une portion de plan limitée par des hyperboles et soumise à une extension sous une charge  $P$ . On désire connaître la contrainte à fond d'entaille (point  $A$  sur la figure 10.17).

La solution de ce problème repose sur la transformation conforme

$$z = a \operatorname{sh} \xi \tag{10.170}$$

soit, en termes réels, pour  $\xi = \alpha + i\beta$ ,

$$x = a \operatorname{sh} \alpha \cos \beta, \quad y = a \operatorname{ch} \alpha \sin \beta$$

Dans cette transformation, les courbes  $\alpha = \text{cte}$  ont pour équation

$$\frac{x^2}{a^2 \operatorname{sh}^2 \alpha} + \frac{y^2}{a^2 \operatorname{ch}^2 \alpha} = 1 \tag{10.171}$$

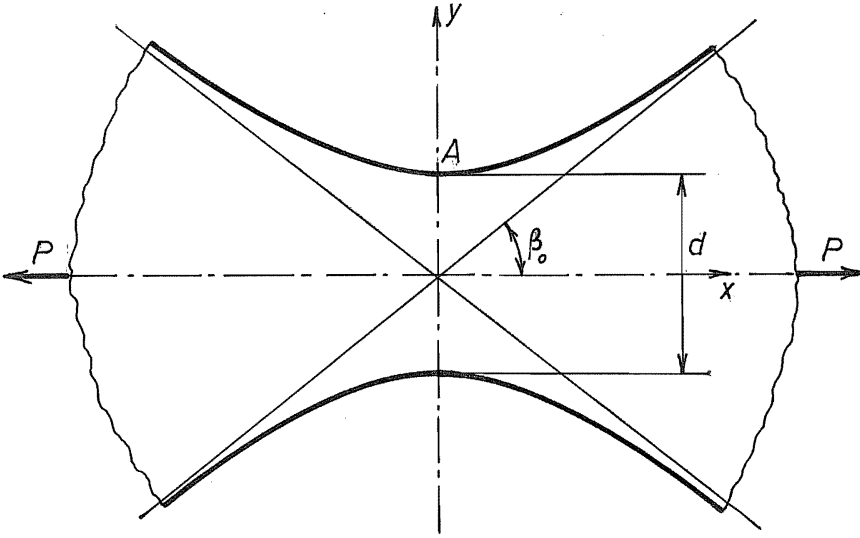


FIGURE 10.17 – Problème de Neuber

Ce sont donc des ellipse de demi-axes  $a \operatorname{sh} \alpha$  et  $a \operatorname{ch} \alpha$ . Les courbes  $\beta = \text{cte}$  ont pour équation

$$\frac{y^2}{a^2 \sin^2 \beta} - \frac{x^2}{a^2 \cos^2 \beta} = 1 \quad (10.172)$$

Il s'agit d'hyperboles, d'axe réel selon  $y$  et égal à  $2a \sin \beta$  et d'axe imaginaire  $2a \cos \beta$  sur l'axe des  $x$ . Ces hyperboles admettent les asymptotes

$$y = \pm x \operatorname{tg} \beta$$

faisant un angle  $\pm \beta$  avec l'axe des  $x$ . Pour  $\alpha$  suffisamment grand, les ellipses (10.171) tendent à devenir circulaires, avec un rayon

$$r \approx a \operatorname{sh} \alpha \approx a \operatorname{ch} \alpha \approx a \frac{e^\alpha}{2}$$

A ces grandes distances de l'origine, on a donc

$$x \approx r \cos \beta, \quad y \approx r \sin \beta$$

c'est-à-dire que  $\beta$  représente asymptotiquement l'angle  $\theta$  de la trigonométrie.

Nous écrivons les fonctions  $F$  et  $K$  en termes de  $\xi$  :

$$F(z) = F(a \operatorname{sh} \xi) = F_1(\xi), \quad K(z) = K(a \operatorname{sh} \xi) = K_1(\xi)$$

Les dérivées se calculent alors par la relation

$$F'(z) = \frac{F'_1(\xi)}{a \operatorname{ch} \xi}$$

et de même pour  $K'$ .

A l'infini, la distribution des contraintes doit approcher celle du coin de Michell,

$$F(z) = C \ln z$$

Comme, pour  $\alpha$  suffisamment grand,

$$\ln z = \ln(a \operatorname{sh} \xi) \approx \ln\left(\frac{a}{2} e^\xi\right) = \ln \frac{a}{2} + \xi$$

nous chercherons une solution pour laquelle

$$F_1(\xi) = C\xi \tag{10.173}$$

Pour déterminer la fonction  $K_1$ , nous partirons du fait que sur les frontières  $\beta = \pm\beta_0$  du domaine, la fonction  $\psi$  doit être constante, puisque ces bords sont libres de toute charge. Considérons le bord  $\beta = \beta_0$ . On a

$$\begin{aligned} i\psi &= F + z\bar{F}' + \bar{K}' \\ &= C\xi + \frac{Ca \operatorname{sh} \xi + \bar{K}'_1}{a \operatorname{ch} \xi} \\ &= C(\alpha + i\beta_0) + \frac{Ca \operatorname{sh}(\alpha + i\beta_0) + \bar{K}'_1(\alpha, \beta_0)}{a \operatorname{ch}(\alpha - i\beta_0)} \end{aligned}$$

Sa constance s'exprime par la condition

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial \alpha}(i\psi) &= \frac{1}{a^2 \operatorname{ch}^2(\alpha - i\beta_0)} [Ca^2 \operatorname{ch}^2(\alpha - i\beta_0) + Ca^2 \cos 2\beta_0 \\ &\quad + a \operatorname{ch}(\alpha - i\beta_0) \bar{K}'_1(\alpha, \beta_0) - a \operatorname{sh}(\alpha - i\beta_0) \bar{K}'_1(\alpha, \beta_0)] \end{aligned}$$

Ceci sera réalisé si

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(\alpha - i\beta_0) \bar{K}'_1(\alpha, \beta_0) - \operatorname{sh}(\alpha - i\beta_0) \bar{K}'_1(\alpha, \beta_0) \\ = -Ca \cos 2\beta_0 - Ca \operatorname{ch}^2(\alpha - i\beta_0) \end{aligned} \tag{10.174}$$

En l'absence de second membre, cette équation peut s'écrire

$$\frac{\bar{K}_1''(\alpha, \beta_0)}{\bar{K}_1'(\alpha, \beta_0)} = \frac{\text{sh}(\alpha - i\beta_0)}{\text{ch}(\alpha - i\beta_0)}$$

et admet visiblement la solution

$$\bar{K}_1'(\alpha, \beta_0) = A \text{ch}(\alpha - i\beta_0)$$

On trouve aisément une solution particulière pour le premier terme du second membre, sous la forme

$$\bar{K}'_{1I}(\alpha, \beta_0) = B \text{sh}(\alpha - i\beta_0)]$$

qui mène à la condition

$$B[\text{ch}^2(\alpha - i\beta_0) - \text{sh}^2(\alpha - i\beta_0)] = -Ca \cos 2\beta_0$$

On a donc

$$\bar{K}'_{1I}(\alpha, \beta_0) = -Ca \cos 2\beta_0 \text{sh}(\alpha - i\beta_0) \quad (10.175)$$

Pour le second terme du second membre, on utilisera la méthode de variation des constantes : en posant

$$\bar{K}'_{1II} = \bar{A}(\alpha, \beta_0) \text{ch}(\alpha - i\beta_0)$$

on obtient

$$\bar{A}'(\alpha, \beta_0) \text{ch}^2(\alpha - i\beta_0) = -Ca \text{ch}^2(\alpha - i\beta_0)$$

d'où  $\bar{A}(\alpha, \beta_0) = -Ca(\alpha - i\beta_0)$  et

$$\bar{K}'_{1II}(\alpha, \beta_0) = -Ca(\alpha - i\beta_0) \text{ch}(\alpha - i\beta_0) \quad (10.176)$$

Au total, la constance de  $\psi$  est assurée sur le bord  $\beta = \beta_0$  si  $\bar{K}_1$  y est de la forme

$$\bar{K}'_1(\alpha, \beta_0) = -Ca \cos 2\beta_0 \text{sh}(\alpha - i\beta_0) - Ca(\alpha - i\beta_0) \text{ch}(\alpha - i\beta_0) \quad (10.177)$$

La condition sur le bord  $\beta = -\beta_0$  s'obtient en remplaçant dans la condition (10.174)  $\beta_0$  par  $(-\beta_0)$ . On vérifie sans peine qu'elle sera réalisée si

$$\bar{K}'_1(\alpha, -\beta_0) = -Ca \cos 2\beta_0 \text{sh}(\alpha + i\beta_0) - Ca(\alpha + i\beta_0) \text{ch}(\alpha + i\beta_0) \quad (10.178)$$

On constate donc que la fonction

$$K_1'(\xi) = -Ca \cos 2\beta_0 \operatorname{sh} \xi - Ca\xi \operatorname{ch} \xi \quad (10.179)$$

permet de vérifier l'équilibre sur le contour. Avec cette fonction, on obtient, en  $\beta = \pm\beta_0$ ,

$$\begin{aligned} i\psi &= C \left( \xi + \frac{\operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi} - \frac{\cos 2\beta_0 \operatorname{sh} \bar{\xi}}{\operatorname{ch} \bar{\xi}} - \frac{\bar{\xi} \operatorname{ch} \bar{\xi}}{\operatorname{ch} \bar{\xi}} \right) \\ &= C(\pm 2i\beta_0 \pm i \sin 2\beta_0) \end{aligned}$$

La charge  $P$  vaut donc

$$P = \psi(\beta_0) - \psi(-\beta_0) = C(4\beta_0 + 2 \sin \beta_0)$$

ce qui détermine la constante  $C$  :

$$C = \frac{P}{4\beta_0 + 2 \sin \beta_0} \quad (10.180)$$

Au fond de l'entaille, la contrainte normale est nulle, donc la contrainte tangentielle vaut

$$\sigma_t = \sigma_x + \sigma_y = 4\Re F' = 4\Re \left( \frac{F_1'}{a \operatorname{ch} \xi} \right) = \Re \frac{4C}{a \operatorname{ch} \xi}$$

Au point  $A$  a pour coordonnées  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \beta_0$ , cela donne

$$\sigma_t = \Re \frac{4C}{a \cos \beta_0} = \frac{4C}{a \cos \beta_0} = \sigma_{\max}$$

La contrainte nominale dans la section est naturellement

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{P}{d} = \frac{P}{2a \sin \beta_0} = \frac{C(2\beta_0 + \sin \beta_0)}{a \sin \beta_0}$$

ce qui donne la valeur suivante du coefficient de concentration de contrainte :

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} = \frac{4 \operatorname{tg} \beta_0}{2\beta_0 + \sin 2\beta_0} \quad (10.181)$$

Il est de coutume d'employer le rayon de courbure à fond d'entaille pour décrire celle-ci. Pour déterminer ce rayon, notons que le bord est une hyperbole dont l'équation (10.172) peut être écrite, pour les petites valeurs de  $x$ ,

$$y = a \sin \beta_0 \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 \cos^2 \beta_0}} \approx a \sin \beta_0 \left( 1 + \frac{x^2}{2a^2 \cos^2 \beta_0} \right) = y_0 + \frac{x^2}{2R}$$



ce qui donne

$$\frac{1}{R} = \frac{\sin \beta_0}{a \cos^2 \beta_0}$$

et, puisque  $d/2 = a \sin \beta_0$ ,

$$\frac{d}{2R} = \operatorname{tg}^2 \beta_0$$

Tenant compte de la formule classique

$$\sin 2\beta_0 = \frac{2 \operatorname{tg} \beta_0}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_0}$$

on obtient

$$\alpha_k = \frac{2\sqrt{\frac{d}{2R}}}{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{d}{2R}}\right) + \frac{\sqrt{\frac{d}{2R}}}{1 + \frac{d}{2R}}} \quad (10.182)$$

Pour  $d/R \rightarrow 0$ , on a  $\alpha_k \rightarrow 1$ ; pour  $d/R \rightarrow \infty$ ,

$$\alpha_k \approx \frac{2\sqrt{\frac{d}{2R}}}{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{0,8106 \frac{d}{R}}$$

La formule (10.182) étant compliquée, Neuber a proposé de l'approcher par une expression de la forme

$$\alpha_k = 1 + \left( \sqrt{A + B \frac{d}{R}} - \sqrt{A} \right) \quad (10.183)$$

Pour être correct à l'infini, il faudra évidemment que  $B = 0,8106$ . Par ailleurs, les valeurs de  $d/R$  les plus courantes en pratique sont de l'ordre de  $d/R = 30$ . Pour cette valeur, le calcul donne  $\alpha_k = 4,963$ . On détermine alors  $A$  en résolvant la relation (10.183) comme suit :

$$(\alpha_k - 1)^2 + 2\sqrt{A}(\alpha_k - 1) + A = A + B \frac{d}{R}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sqrt{A} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{B \frac{d}{R}}{(\alpha_k - 1)} - (\alpha_k - 1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{0,8106 \cdot 30}{3,963} - 3,963 \right] = 1,087 \end{aligned}$$

soit  $A = 1,181$ . La formule approchée est donc <sup>3</sup>

$$\alpha_k = \sqrt{1,181 + 0,8106 \frac{d}{R}} - 0,087 \quad (10.184)$$

Le tableau suivant compare les valeurs obtenues par ces deux formules :

$d/R$	$\alpha_k$ exact	$\alpha_k$ approché	erreur %
0	1	0,9997	-0,03
1	1,301	1,324	+1,8
2	1,556	1,587	+2
5	2,168	2,201	+1,5
10	2,937	2,960	+0,8
20	4,075	4,083	+0,2
50	6,387	6,371	-0,3
100	9,014	8,982	-0,4
200	12,74	12,69	-0,4
500	20,13	20,07	-0,3
1000	28,47	28,40	-0,2

Comme on peut le constater, la correspondance est excellente (moins de 2 % d'erreur).

## 10.20 Problème de Neuber en flexion

Pour la même géométrie, considérons à présent une flexion pure. Dans le cas du coin, on a, pour cette sollicitation,

$$F = \frac{iA}{z}, \quad K = iB \ln z$$

Cet état devra se retrouver au voisinage de l'infini. Or, pour  $\xi \rightarrow \infty$ , on a

$$a \operatorname{sh} \xi \approx \frac{a}{2} e^\xi, \quad \ln(a \operatorname{sh} \xi) \approx \ln \frac{a}{2} + \xi$$

Ceci suggère de chercher une solution de la forme

$$F = iAe^{-\xi}, \quad K = iB\xi \quad (10.185)$$

---

3. La formule proposée par Neuber est  $\alpha_k = \sqrt{0,8d/R + 1,2} - 0,1$ .

ce qui entraîne

$$F' = \frac{-iAe^{-\xi}}{a \operatorname{ch} \xi} \qquad K' = \frac{iB}{a \operatorname{ch} \xi}$$

et

$$\begin{aligned} i\psi &= F + a \operatorname{sh} \xi \bar{F}' + \bar{K}' \\ &= i \left[ Ae^{-\xi} + A \frac{\operatorname{sh} \xi e^{-\bar{\xi}}}{\operatorname{ch} \bar{\xi}} - \frac{B}{a \operatorname{ch} \bar{\xi}} \right] \\ &= i \frac{Ae^{-\xi} \operatorname{ch} \bar{\xi} + A \operatorname{sh} \xi e^{-\bar{\xi}} - B/a}{\operatorname{ch} \bar{\xi}} \\ &= i \frac{\frac{A}{2} \left( e^{-\xi+\bar{\xi}} + e^{-\xi-\bar{\xi}} + e^{\xi-\bar{\xi}} - e^{-\xi-\bar{\xi}} \right) - B/a}{\operatorname{ch} \bar{\xi}} \\ &= i \frac{A \cos 2\beta - B/a}{\operatorname{ch} \bar{\xi}} \end{aligned}$$

Cette fonction sera nulle en  $\beta = \pm\beta_0$  si l'on pose

$$B = Aa \cos 2\beta_0 \qquad (10.186)$$

On détermine alors  $A$  par la relation entre le moment et la fonction d'Airy (voir section 10.18) :

$$M = [\varphi]_{-\beta_0}^{\beta_0}$$

Dans notre cas,

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2} (\bar{z}F + z\bar{F} + K + \bar{K}) \\ &= \frac{1}{2} \left( iAa \operatorname{sh} \bar{\xi} e^{-\xi} - iAa \operatorname{sh} \xi e^{-\bar{\xi}} + iB\xi - iB\bar{\xi} \right) \\ &= \frac{iAa}{4} \left( e^{\bar{\xi}-\xi} - e^{-\bar{\xi}-\xi} - e^{\xi-\bar{\xi}} + e^{-\xi-\bar{\xi}} \right) + \frac{iB}{2} (\xi - \bar{\xi}) \\ &= \frac{iAa}{4} 2 \operatorname{sh}(-2i\beta) + iB \cdot 2i\beta \\ &= \frac{Aa}{2} \sin 2\beta - Aa \cos 2\beta_0 \cdot \beta \\ &= \frac{Aa}{2} (\sin 2\beta - 2\beta \cos 2\beta_0) \end{aligned}$$

d'où

$$M = Aa(\sin 2\beta_0 - 2\beta_0 \cos 2\beta_0)$$

ce qui donne

$$A = \frac{M}{a(\sin 2\beta_0 - 2\beta_0 \cos 2\beta_0)}$$

On a alors

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\Re F' = \Re \left( \frac{-4iAe^{-\xi}}{a \operatorname{ch} \xi} \right)$$

A fond d'entaille, pour  $\alpha = 0$ ,  $\beta = -\beta_0$ , cela donne

$$\sigma_x + \sigma_y = \Re \left( \frac{-4iAe^{i\beta_0}}{a \cos \beta_0} \right) = \frac{4A}{a} \operatorname{tg} \beta_0 = \sigma_{\max}$$

La contrainte nominale dans la section est définie par la loi d'équarrissage classique,

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{6M}{d^2} = \frac{6Aa(\sin 2\beta_0 - 2\beta_0 \cos 2\beta_0)}{4a^2 \sin^2 \beta_0}$$

ce qui conduit à la valeur suivante du coefficient de concentration de contrainte :

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} = \frac{8}{3} \operatorname{tg} \beta_0 \frac{\sin^2 \beta_0}{\sin 2\beta_0 - 2\beta_0 \cos 2\beta_0} \quad (10.187)$$

On vérifie que pour  $\beta_0 \rightarrow 0$ , on a

$$\sin 2\beta_0 - 2\beta_0 \cos 2\beta_0 \approx 2\beta_0 - \frac{8\beta_0^3}{6} - 2\beta_0 + \frac{8\beta_0^3}{2} \approx \frac{8\beta_0^3}{3}$$

si bien que  $\alpha_k \rightarrow 1$ , comme on pouvait s'y attendre. Exprimons à présent  $\alpha_k$  en termes de  $d/(2R)$ . Tenant compte des relations

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_0 &= \sqrt{\frac{d}{2R}} \\ \sin \beta_0 &= \frac{\operatorname{tg} \beta_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_0}} = \frac{\sqrt{\frac{d}{2R}}}{\sqrt{1 + \frac{d}{2R}}} \\ \sin 2\beta_0 &= \frac{2 \operatorname{tg} \beta_0}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_0} = \frac{2\sqrt{\frac{d}{2R}}}{1 + \frac{d}{2R}} \\ \cos 2\beta_0 &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \beta_0}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_0} = \frac{1 - \frac{d}{2R}}{1 + \frac{d}{2R}} \end{aligned}$$

on obtient

$$\alpha_k = \frac{4}{3} \frac{\left(\frac{d}{2R}\right)^{3/2}}{\sqrt{\frac{d}{2R}} - \left(1 - \frac{d}{2R}\right) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{d}{2R}}} \quad (10.188)$$

De la même façon qu'en extension, on peut approcher cette formule par une expression de la forme

$$\alpha_k = 1 + \left( \sqrt{A + B \frac{d}{R}} - \sqrt{A} \right)$$

A l'infini, on a

$$\alpha_k \approx \frac{\frac{4}{3} \frac{d}{2R} \sqrt{\frac{d}{2R}}}{\frac{d}{2R} \frac{\pi}{2}} = \sqrt{0,3603 \frac{d}{R}}$$

d'où  $B = 0,3603$ . Pour  $d/R = 30$ , le calcul donne  $\alpha_k = 3,469$ , ce qui donne

$$\sqrt{A} = \frac{1}{2} \left( \frac{0,3603 \cdot 30}{2,469} - 2,469 \right) = 0,9544$$

soit  $A = 9110$ . On obtient ainsi la formule<sup>4</sup>

$$\alpha_k \approx \sqrt{0,9110 + 0,3663 \frac{d}{R}} + 0,0456 \quad (10.189)$$

Les résultats donnés par la formule exacte et par la formule approchée sont comparés dans le tableau suivant :

$d/R$	$\alpha_k$ exact	$\alpha_k$ approché	erreur %
0	1	1	0
1	1,180	1,173	-0,6
2	1,333	1,323	-0,8
5	1,705	1,693	-0,7
10	2,180	2,170	-0,5
20	2,899	2,895	-0,1
50	4,390	4,396	+0,1
100	6,110	6,124	+0,2
200	8,567	8,588	+0,2
500	13,47	13,50	+0,2
1000	19,02	19,05	+0,2

4. La formule originale de Neuber est  $\alpha_k \approx \sqrt{0,355d/R + 0,85} + 0,08$

Ici encore, la correspondance est excellente (moins de 0,8 % d'erreur).

## 10.21 Annexe : disques d'épaisseur variable en rotation

### 10.21.1 Équations générales

Les disques de turbines sont d'épaisseur  $t$  variable en fonction du rayon. Une étude approchée de ces disques peut être faite en admettant les hypothèses suivantes :

$$u_r = u(r) \qquad \sigma_z = \tau_{rz} = 0$$

Il vient alors, par les travaux virtuels, en considérant une variation  $\delta u$  nulle aux rayons d'extrémité  $R_1$  et  $R_2$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \left( rt\sigma_r \frac{\partial \delta u}{\partial r} + t\sigma_\theta \delta u - \rho\omega^2 r^2 t \delta u \right) dr \\ &= 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \left[ -\frac{d}{dr}(rt\sigma_r) + t\sigma_\theta - \rho\omega^2 r^2 t \right] \delta u dr \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'équation d'équilibre

$$\frac{d}{dr}(rt\sigma_r) - t\sigma_\theta = \rho\omega^2 r^2 t \quad (10.190)$$

Les relations entre les déformations et les contraintes sont

$$\begin{cases} \frac{du}{dr} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \\ \frac{u}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \end{cases}$$

Pour que ces deux relations soient compatibles, il faut que

$$\frac{d}{dr}[r(\sigma_\theta - \nu\sigma_r)] = \sigma_r - \nu\sigma_\theta$$

ce qui s'écrit encore

$$r \frac{d}{dr}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) = (1 + \nu)(\sigma_r - \sigma_\theta) \quad (10.191)$$

### 10.21.2 Disque d'égal résistance

Il est possible d'obtenir

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{d\sigma_\theta}{dr} = 0$$

dans certaines conditions. A partir de la relation (10.191), on déduit immédiatement

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma = \text{cte}$$

La relation (10.190) fournit alors une expression de l'épaisseur : elle devient en effet

$$\sigma \frac{d}{dr}(rt) - t\sigma + \rho\omega^2 r^2 t = 0$$

soit

$$\sigma \left( r \frac{dt}{dr} + 1 - 1 \right) = -\rho\omega^2 r^2 t$$

ce qui entraîne

$$\frac{dt}{t} = -\frac{\rho\omega^2 r dr}{\sigma}, \quad \ln \frac{t}{t_0} = -\frac{\rho\omega^2 r^2}{2\sigma}$$

et

$$t = t_0 \exp\left(-\frac{\rho\omega^2 r^2}{2\sigma}\right)$$

Cette expression suppose que le disque va de  $r = 0$  à  $r = \infty$ . Les déplacements dans le disque sont alors donnés par

$$u = \frac{r}{E}(\sigma - \nu\sigma) = \frac{(1 - \nu)\sigma r}{E}$$

### 10.21.3 Jante

En pratique, le disque se termine par une jante à laquelle sont accrochés les aubages. On peut admettre que la jante se comporte comme une barre courbe en extension, avec

$$\varepsilon = \frac{u}{r} = \text{cte}$$

L'effort circonférentiel dans la jante est donc donné par

$$N_j = E\Omega \left( \frac{u}{r} \right)_j$$

Les forces agissant sur la jante sont (*fig.* 10.18)

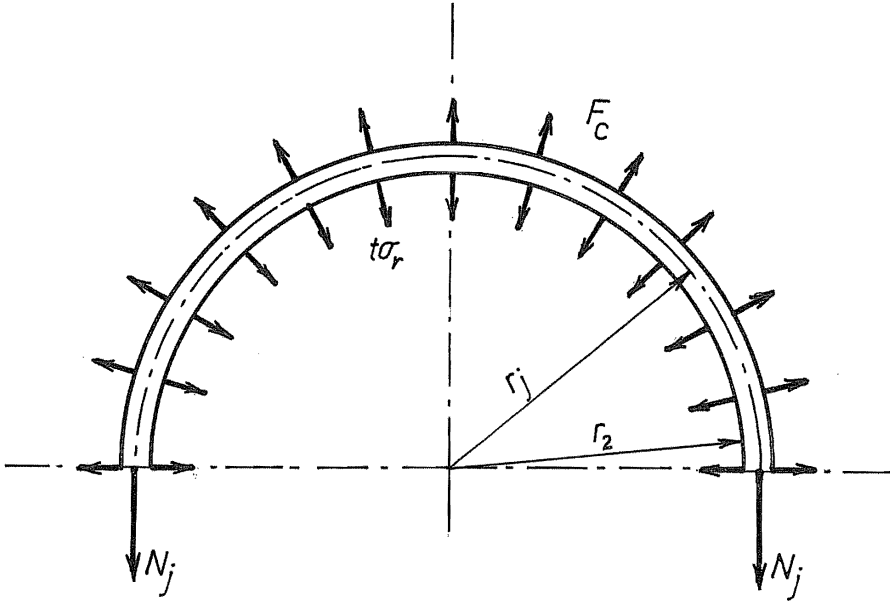


FIGURE 10.18 – Equilibre de la jante

- La force centrifuge de la jante, dont la résultante sur une demi-circonférence est

$$\rho\Omega\omega^2 r_j \cdot 2r_j = 2\rho\Omega\omega^2 r_j^2$$

- La force centrifuge des aubes. Si la masse des aubes par unité de longueur est de  $\mu$  au rayon  $r_a$ , cette force vaut, pour une demi-circonférence,

$$\mu\omega^2 r_a \cdot 2r_a = 2\mu\omega^2 r_a^2$$

- Les forces de rappel du disque, résultantes des  $\sigma_r$  en  $r = r_2$ , rayon de la jonction du disque et de la jante. Leur résultante sur une demi-circonférence est

$$\sigma_r(r_2)t_2 \cdot 2r_2$$



Au total, on a donc

$$2N_j = 2 \underbrace{\left( \rho\Omega + \mu \frac{r_a^2}{r_j^2} \right)}_{\mu^*} \omega^2 r_j^2 - 2\sigma_r(r_2)t_2 r_r$$

soit

$$E\Omega \left( \frac{u}{r} \right)_j = E\Omega \frac{u_2}{r_2} = \mu^* \omega^2 r_j^2 - \sigma_r(r_2)t_2 r_2$$

ce qui donne

$$u_2 = \frac{r_2}{E\Omega} [\mu^* \omega^2 r_j^2 - \sigma_r(r_2)t_2 r_2] \quad (10.192)$$

#### 10.21.4 Moyeu

On munit également les disques d'un moyeu, allant de l'arbre (rayon  $r_0$ ) à un rayon  $r_1 = 1,8$  à  $2r_0$ . Ce moyeu, d'épaisseur  $t_m$  constante, vérifie les équations classiques des disques d'épaisseur constante en rotation :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1-\nu^2}{E} \left[ Ar + \frac{B}{r} - \frac{1}{8} \rho \omega^2 r^3 \right] \\ \sigma_r = (1+\nu)A - (1-\nu) \frac{B}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \\ \sigma_\theta = (1+\nu)A + (1-\nu) \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \end{array} \right. \quad (10.193)$$

#### 10.21.5 Renforcement neutre

Nous dirons qu'une jante et un moyeu constituent un *renforcement neutre d'un disque d'égale résistance* si leur comportement est identique à celui de la portion de disque qu'ils remplacent, c'est-à-dire s'ils donnent le même  $u$  et le même  $(t\sigma_r)$ . Cette notion permet le dimensionnement complet du disque.

1. *Condition de jante* - La jante et les aubages étant donnés, la relation entre le déplacement et l'effort est fournie par l'équation (10.192). Si  $\sigma$  est la contrainte dans le disque, on doit avoir

$$\sigma(r_2) = \sigma, \quad u(r_2) = \frac{\sigma r_2(1-\nu)}{E}$$

d'où la condition

$$\frac{\sigma r_2(1-\nu)}{E} = \frac{r_2}{E\Omega}(\mu^* \omega^2 r_j^2 - \sigma t_2 r_2)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} t_2 &= -\frac{E\Omega}{\sigma r_2^2} \frac{\sigma r_2(1-\nu)}{E} + \frac{\mu^* \omega^2 r_j^2}{\sigma r_2} \\ &= \frac{\mu^* \omega^2 r_j^2}{\sigma r_2} - \frac{(1-\nu)\Omega}{r_2} \end{aligned} \quad (10.194)$$

On en déduit les épaisseurs du disque en  $r \neq r_2$  à partir des relations

$$\begin{aligned} t_2 &= t_0 \exp\left(-\frac{\rho\omega^2 r_2^2}{2\sigma}\right) \\ t &= t_0 \exp\left(-\frac{\rho\omega^2 r^2}{2\sigma}\right) \end{aligned}$$

qui se combinent en

$$\frac{t}{t_2} = \exp\left(\frac{\rho\omega^2(r_2^2 - r^2)}{2\sigma}\right) \quad (10.195)$$

En particulier, pour  $r = r_1$ , on a

$$t_1 = t_2 \exp\left(\frac{\rho\omega^2(r_2^2 - r_1^2)}{2\sigma}\right) \quad (10.196)$$

2. *Condition de moyeu* - Le moyeu doit d'abord vérifier

$$\sigma_r(r_0) = (1+\nu)A - (1-\nu)\frac{B}{r_0^2} - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r_0^2 = -p \quad (10.197)$$

où  $p$  est l'éventuelle pression de frettage sur l'arbre. Une second relation est donnée par l'égalité des déplacements du dsque et du moyeu en  $r = r_1$  :

$$u(r_1) = \frac{1-\nu^2}{E} \left[ Ar_1 + \frac{B}{r_1} - \frac{1}{8}\rho\omega^2 r_1^2 \right] = \frac{(1-\nu)\sigma r_1}{E}$$

soit

$$A + \frac{B}{r_1^2} = \frac{\sigma}{1+\nu} + \frac{1}{8}\rho\omega^2 r_1^2 \quad (10.198)$$

10.21. ANNEXE : DISQUES D'ÉPAISSEUR VARIABLE EN ROTATION 339

Les deux équations (10.197) et (10.198) définissent  $A$  et  $B$ . On en déduit

$$\sigma_r(r_1) = (1 + \nu)A - (1 - \nu)\frac{B}{r_1^2} - \frac{3 + \nu}{8}\rho\omega^2 r_1^2$$

ce qui permet de fixer l'épaisseur du moyeu par la condition d'équilibre

$$\sigma_r(r_1)t_m = \sigma t_1$$

soit

$$t_m = t_1 \frac{\sigma}{\sigma_r(r_1)} \quad (10.199)$$

3. *Raccordement du moyeu* - Il est évidemment nécessaire de réaliser un congé pour le raccordement du moyeu au disque, de manière à limiter les concentrations de contrainte. Une idée raisonnable de cette concentration est donnée par la formule suivante, relative aux changements de section des barres [19] :

$$\alpha_k = \max(1, \alpha_k^*) \quad \text{avec} \quad \alpha_k^* = 0,9616 + B\sqrt{\frac{t_1}{R}}$$

où  $B$  dépend du rapport  $t_1/t_m$ , selon le tableau suivant :

$t_1/t_m$	$B$
1	0,075
1,1	0,2
1,2	0,285
1,3	0,34
1,4	0,37
1,5	0,395
1,6	0,415
1,7	0,43
1,8	0,44
1,9	0,455
2	0,46
>2	$0,27 + 0,095t_1/t_m$

### 10.21.6 Exemple

$$\left\{ \begin{array}{ll} \omega = 314 \text{ rad/s} & \Omega = 2480 \text{ mm}^2 \\ r_0 = 90 \text{ mm} & \mu = 8 \text{ kg/m} \\ r_j = 579 \text{ mm} & \rho = 7800 \text{ kg/m}^3 \\ r_2 = 545 \text{ mm} & E = 210 \text{ GPa} \\ r_a = 615 \text{ mm} & \nu = 0,3 \\ r_1 = 180 \text{ mm} & \sigma = 100 \text{ MPa} \\ & p = 0 \end{array} \right.$$

On calcule successivement

#### Jante et voile

$$\mu^* = \rho\Omega + \mu \frac{r_a^2}{r_j^2} = 7800 \cdot 2,480 \cdot 10^{-3} + 8 \left( \frac{615}{579} \right)^2 = 28,37 \text{ kg/m}$$

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{28,37 \cdot \overline{314^2} \cdot \overline{0,579^2}}{10^8 \cdot 0,545} - \frac{0,7 \cdot 2,480 \cdot 10^{-3}}{0,545} \\ &= 17,21 \cdot 10^{-3} - 3,185 \cdot 10^{-3} = \mathbf{14,02 \cdot 10^{-3} m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{t}{t_2} &= \exp \left( \frac{7800 \cdot \overline{314^2} (\overline{0,545^2} - r^2)}{2 \cdot 10^8} \right) \\ &= \exp \left( 3,845 (\overline{0,545^2} - r^2) \right) \end{aligned}$$

$$t_1 = 14,02 \cdot 10^{-3} \cdot \exp \left( 3,845 (\overline{0,545^2} - \overline{0,180^2}) \right) = \mathbf{38,78 \cdot 10^{-3} m}$$

#### Moyeu

– Condition d'équilibre à l'arbre

$$1,3A - 0,7 \frac{B}{0,09^2} = \frac{3,3}{8} 7800 \cdot \overline{314^2} \cdot \overline{0,09^2}$$

soit

$$1,3A - 86,42B = 2,570 \cdot 10^{-6} \Leftrightarrow A - 66,48B = 1,997 \cdot 10^{-6}$$

– Compatibilité à la jonction moyeu-voile

$$A + \frac{B}{0,180^2} = \frac{10^8}{1,3} + \frac{1}{8} 7800 \cdot \overline{314^2} \cdot \overline{0,180^2} = 76,92 \cdot 10^6 + 3,115 \cdot 10^6 = 80,04 \cdot 10^6$$

10.21. ANNEXE : DISQUES D'ÉPAISSEUR VARIABLE EN ROTATION 341

soit

$$A + 30,86B = 80,04 \cdot 10^6$$

– On déduit de ces deux conditions

$$A = \mathbf{55,29 \cdot 10^6 Pa}, \quad B = \mathbf{802,0 \cdot 10^3 N}$$

On a donc

$$\sigma_r = 1,3A - 0,7 \frac{B}{r^2} - \frac{3,3}{8} 7800 \cdot 314^2 r^2 = 71,88 \cdot 10^6 - \frac{561,4 \cdot 10^3}{r^2} - 317,2 \cdot 10^6 r^2$$

En  $r = 0,180m$ , il vient

$$\sigma_r = 44,27 \cdot 10^6 Pa$$

si bien que

$$t_m = t_1 \frac{100}{44,27} = \mathbf{87,59 mm}$$

**Contrainte circonférentielle en  $r = r_0$**

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(r_0) &= 1,3A + 0,7 \frac{B}{r_0^2} - \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 r_0^2 \\ &= 71,88 \cdot 10^6 + 69,31 \cdot 10^6 - 1,479 \cdot 10^6 = \mathbf{139,7 \cdot 10^6 Pa} \end{aligned}$$

**Congé** - Le plus grand rayon possible, en se raccordant à  $90^\circ$  sur le moyeu, est approximativement égal à

$$R = \frac{t_m - t_1}{2} = \frac{87,59 - 38,78}{2} = \mathbf{24,41 mm}$$

En adoptant cette valeur, on obtient  $t_1/R = 1,589$ . Il en découle, dans la formule relative à  $\alpha_k$ ,  $B = 0,485$ , ce qui donne

$$\alpha_k = 0,9616 + 0,485 \sqrt{1,589} = 1,573$$

La contrainte maximale est donc

$$\sigma_{\max} = 1,573 \cdot 100 = \mathbf{157,3 MPa}$$

Le profil obtenu est représenté en figure 10.19.

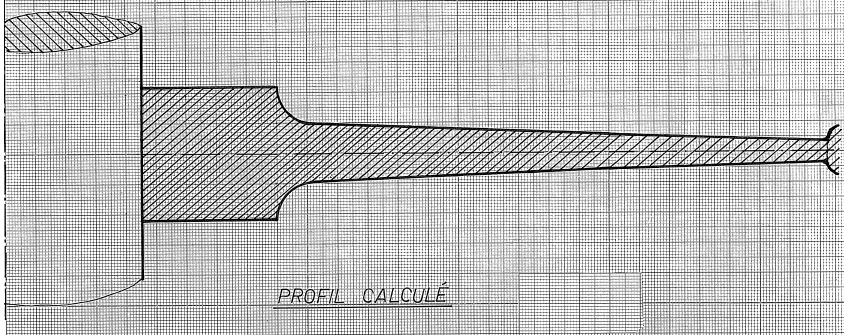


FIGURE 10.19 – Profil calculé

## 10.22 Exercices

**Exercice 37** Trouver directement l'état de contrainte le long du trou dans le problème de Kirsch sans passer par la formulation complexe.

*Solution* - A l'infini, on doit avoir

$$\varphi_\infty \approx \sigma \frac{y^2}{2}$$

Au bord du trou, on a

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0$$

ce qui permet de poser  $\varphi = \partial \varphi / \partial r = 0$ . L'expression asymptotique de  $\varphi$  à l'infini peut encore s'écrire

$$\varphi_\infty = \sigma \frac{r^2}{2} \sin^2 \theta = \frac{\sigma r^2}{4} (1 - \cos 2\theta)$$

Ceci suggère de chercher une fonction d'Airy qui soit la somme d'une fonction de périodicité 0 et d'une fonction de périodicité 2. On écrira donc

$$\varphi = r^2 f_1 + f_2$$

en donnant aux fonctions harmoniques  $f_1$  et  $f_2$  les expressions suivantes :

$$f_1 = \Re(A \ln z + B + Cz^2 + Dz^{-2}) = A \ln r + B + Cr^2 \cos 2\theta + Dr^{-2} \cos 2\theta$$

$$f_2 = \Re(E \ln z + F + Gz^2 + Hz^{-2}) = E \ln r + F + Gr^2 \cos 2\theta + Hr^{-2} \cos 2\theta$$

Il vient ainsi

$$\varphi = Ar^2 \ln r + Br^2 + Cr^4 \cos 2\theta + D \cos 2\theta + E \ln r + F + Gr^2 \cos 2\theta + Hr^{-2} \cos 2\theta$$

Au voisinage de l'infini, cette expression devient

$$\varphi = Ar^2 \ln r + Cr^4 \cos 2\theta + (B + G \cos 2\theta)r^2 + o(r^2)$$

On doit donc avoir

$$A = C = 0, \quad B = \frac{\sigma}{4}, \quad G = -\frac{\sigma}{4}$$

Il reste

$$\varphi = \frac{\sigma r^2}{4}(1 - \cos 2\theta) + D \cos 2\theta + E \ln r + F + Hr^{-2} \cos 2\theta$$

Au rayon  $a$  du trou, on doit avoir

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\sigma a^2}{4} + E \ln a + F + \left(-\frac{\sigma a^2}{4} + D + Ha^{-2}\right) \cos 2\theta = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{\sigma a}{2} + \frac{E}{a} + \left(-\frac{\sigma a}{2} - 2Ha^{-3}\right) \cos 2\theta = 0 \end{aligned}$$

ce qui mène aux conditions

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\sigma a^2}{2} \\ H &= -\frac{\sigma a^2}{4} \\ F &= -\frac{\sigma a^2}{4} - E \ln a = \frac{\sigma a^2}{4} - \frac{\sigma a^2}{2} \ln a \\ D &= \frac{\sigma a^2}{4} - Ha^{-2} = \frac{\sigma a^2}{4} + \frac{\sigma a^2}{4} = \frac{\sigma a^2}{2} \end{aligned}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\sigma}{4} + \frac{\sigma a^2}{2r^2} \cos 2\theta \\ f_2 &= -\frac{\sigma a^2}{2} \ln r + \frac{\sigma a^2}{4} - \frac{\sigma a^2}{2} \ln a - \frac{\sigma}{4} r^2 \cos 2\theta - \frac{\sigma a^4}{4r^2} \cos 2\theta \end{aligned}$$

Les contraintes au bord du trou vérifient  $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$ ,  $\sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y = \nabla^2\varphi$ . Or,  $f_2$  est harmonique, donc

$$\nabla^2\varphi = \nabla^2[(x^2 + y^2)f_1]$$

On calcule aisément

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}[(x^2 + y^2)f_1] &= 2xf_1 + (x^2 + y^2)\frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}[(x^2 + y^2)f_1] &= 2f_1 + 4x\frac{\partial f_1}{\partial x} + (x^2 + y^2)\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \end{aligned}$$

et, de même,

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}[(x^2 + y^2)f_1] = 2f_1 + 4y\frac{\partial f_1}{\partial y} + (x^2 + y^2)\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}$$

ce qui donne

$$\nabla^2\varphi = 4\left(f_1 + x\frac{\partial f_1}{\partial x} + y\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) = 4(f_1 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{grad}f_1) = 4\left(f_1 + r\frac{\partial f_1}{\partial r}\right)$$

soit, au bord du trou,

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= 4\left[\frac{\sigma}{4} + \frac{\sigma a^2}{2r^2}\cos 2\theta - r\frac{\sigma}{2}\frac{a^2}{r^3}\cos 2\theta\right]_{r=a} \\ &= 4\left(\frac{\sigma}{4} - \frac{\sigma}{2}\cos 2\theta\right) \\ &= \sigma(1 - 2\cos 2\theta) \end{aligned}$$

Le maximum a lieu pour  $\theta = \pm\pi/2$  et vaut  $3\sigma$ .

**Exercice 38** Soit un arbre de rayon  $R_i$  sur lequel est fretté un moyeu de rayon extérieur  $R_e$ . Les deux pièces sont en acier ( $E = 210\text{GPa}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho = 7800\text{kg/m}^3$ ). Avant pose, le rayon de l'arbre surpasse le rayon intérieur du moyeu. On donne

$$R_i = 40\text{mm}, \quad R_e = 150\text{mm}, \quad \delta = 100\mu\text{m}$$

On demande

1. La pression de contact de l'arbre sur le moyeu lors de la pose.
2. Comment évolue cette pression lorsque l'ensemble tourne ?



3. A quelle vitesse la pression de l'arbre sur le moyeu s'annule-t-elle ?

*Solution*

1.

$$Q_m = \frac{40}{150} = 0,2267$$

$$C_m = \frac{1}{210000 \cdot 0,9289} (1,3 + 0,7 \cdot 0,711) = 6,919 \cdot 10^{-6} (MPa)^{-1}$$

$$C_a = \frac{1}{210000} (0,7 + 1,3 \cdot 0) = 3,333 \cdot 10^{-6} (MPa)^{-1}$$

$$\frac{\delta}{R} = \frac{0,1}{40} = 2,5 \cdot 10^{-3}$$

$$p = \frac{\frac{\delta}{R}}{C_a + C_m} = \frac{2,500 \cdot 10^{-3}}{(6,919 + 3,333) \cdot 10^{-6}} = \mathbf{243,9 MPa}$$

2. Le frettage conduit à une distribution de contraintes de la forme représentée en figure 10.20. Il s'y superpose le champ de contraintes d'un disque

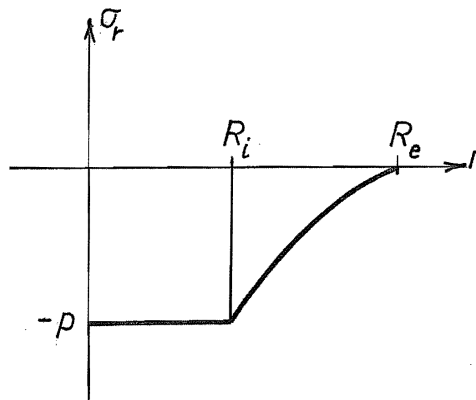


FIGURE 10.20 – Distribution des contraintes de frettage

en rotation de rayon  $R_e$ , du moins tant que le décollement n'a pas lieu. La contrainte radiale de ce champ est donnée, en  $r = R_i$ , par

$$\sigma_r = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 R_e^2 (1 - Q^2)$$

Superposant, on obtient

$$-\sigma_r = \left( 243,9 \cdot 10^6 - \frac{3,3}{8} 7800 \cdot 0,15^5 \cdot 0,9289\omega^2 \right)$$

soit

$$-\sigma_r = (243,9 \cdot 10^6 - 67,25\omega^2)$$

3.  $\sigma_r = 0$  pour

$$\omega^2 = \frac{243,9 \cdot 10^6}{67,25} = 3,627 \cdot 10^6 (\text{rad/s})^2$$

$$\omega = 1904 \text{rad/s} = 18190 \text{tr/min}$$

# Chapitre 11

## Théorie technique des poutres

### 11.1 Introduction

La théorie des poutres de Barré de Saint-Venant, bien qu'exacte, n'est pas entièrement satisfaisante pour les besoins de la pratique. Tout d'abord, elle est compliquée. Ensuite, elle ne permet pas de prendre en compte la torsion non uniforme de manière correcte. Par ailleurs, pour toutes les poutres longues, on peut négliger les déformations dues à l'effort tranchant. Nous présentons ici une théorie approchée d'application plus générale, fondée sur une approche variationnelle et une étude approfondie des ordres de grandeur.

### 11.2 Ordres de grandeur des contraintes

Soit  $\rho$  une dimension caractéristique des sections. Une valeur raisonnable est par exemple

$$\rho = \sqrt{\frac{I_p}{\Omega}}, \quad \text{avec } \Omega = \text{section}, \quad I_p = \int_{\Omega} (x^2 + y^2) d\Omega \quad (11.1)$$

Soit encore  $\ell$  une dimension caractérisant la longueur de la poutre. Nous nous intéressons ici aux phénomènes à grande longueur d'onde, c'est-à-dire que nous admettrons que les contraintes varient significativement, le long de l'axe longitudinal  $z$  de la poutre, sur une longueur de l'ordre de  $\ell$ . Les équations d'équilibre

intérieur, qui s'écrivent

$$\begin{aligned} D_\beta \sigma_{\alpha\beta} + D_3 \sigma_{\alpha 3} &= 0 \\ D_\alpha \sigma_{\alpha 3} + D_3 \sigma_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (11.2)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent prendre les valeurs 1 et 2, impliquent alors les relations suivantes, si  $\sigma$  est l'ordre de grandeur de  $\sigma_{33}$  :

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3} &= \mathcal{O}\left(\sigma \frac{\rho}{\ell}\right) \\ \sigma_{\alpha\beta} &= \mathcal{O}\left(\sigma \frac{\rho^2}{\ell^2}\right) \end{aligned} \quad (11.3)$$

Supposant  $\rho^2/\ell^2$  très petit devant l'unité, on peut donc écrire le principe de Hellinger-Reissner sous la forme

$$\int_V \left( \sigma_{33} D_3 u_3 + \sigma_{\alpha 3} (D_\alpha u_3 + D_3 u_\alpha) - \frac{\sigma_{33}^2}{2E} - \frac{\sigma_{\alpha 3} \sigma_{\alpha 3}}{2G} \right) dV + \mathcal{P}(u_\alpha, u_3) \text{ stat}$$

ce qui donne, par variation des contraintes,

$$\sigma_{33} = ED_3 u_3, \quad \sigma_{\alpha 3} = G(D_\alpha u_3 + D_3 u_\alpha) \quad (11.4)$$

On peut, en réintroduisant ces valeurs dans le principe, se ramener à un principe de variation des déplacements :

$$\int_V \left[ \frac{E}{2} (D_3 u_3)^2 + \frac{G}{2} (D_1 u_3 + D_3 u_1)^2 + \frac{G}{2} (D_2 u_3 + D_3 u_2)^2 \right] dV + \mathcal{P}(u_1, u_2, u_3) \text{ stat} \quad (11.5)$$

### 11.3 Ordres de grandeur des déplacements

Commençons par examiner les restrictions nécessaires à la validité de la linéarisation géométrique. On peut s'attendre à observer des déplacements  $u_3$  d'un ordre de grandeur différent de celui des deux autres. C'est pourquoi nous écrirons

$$u_3 = \mathcal{O}(W), \quad u_\alpha = \mathcal{O}(U)$$

La déformation de Green  $\gamma_{33}$  s'écrit

$$\gamma_{33} = D_3 u_3 + \frac{1}{2} (D_3 u_1)^2 + \frac{1}{2} (D_3 u_2)^2 + \frac{1}{2} (D_3 u_3)^2$$

et ses termes successifs ont les ordres de grandeur suivants :

$$\frac{W}{\ell}, \quad \frac{U^2}{\ell^2}, \quad \frac{U^2}{\ell^2}, \quad \frac{W^2}{\ell^2}$$

Pour que la linéarisation géométrique soit valable, il faut donc que

$$\frac{W^2}{\ell^2} \ll \frac{W}{\ell}, \quad \frac{U^2}{\ell^2} \ll \frac{W}{\ell}$$

soit encore

$$\frac{W}{\ell} \ll 1 \tag{11.6}$$

et

$$\frac{U^2}{\rho^2} \ll \frac{W}{\ell} \frac{\ell^2}{\rho^2} \tag{11.7}$$

Par ailleurs, les déformations  $\gamma_{\alpha\beta}$  ont pour expression

$$2\gamma_{\alpha\beta} = D_\alpha u_\beta + D_\beta u_\alpha + D_\alpha u_\gamma D_\beta u_\gamma + D_\alpha u_3 D_\beta u_3$$

et leurs différents termes ont pour ordre de grandeur

$$\frac{U}{\rho}, \quad \frac{U}{\rho}, \quad \frac{U^2}{\rho^2}, \quad \frac{W^2}{\rho^2}$$

ce qui mène aux conditions

$$\frac{U}{\rho} \ll 1 \tag{11.8}$$

et

$$\frac{W^2}{\ell^2} \frac{\ell^2}{\rho^2} \ll \frac{U}{\rho} \tag{11.9}$$

Les conditions (11.6) et (11.8) signifient que *le déplacement axial est très petit devant la longueur de la poutre et que les déplacements transversaux sont très petits devant les dimensions de la section*. Les relations (11.7) et (11.9) se combinent pour donner

$$\frac{U^2/\rho^2}{W/\ell} \ll \frac{\ell^2}{\rho^2} \ll \frac{U/\rho}{W^2/\ell^2} \tag{11.10}$$

En écrivant

$$X = \frac{U/\rho}{W/\ell}$$

cela donne

$$X \frac{U}{\rho} \ll \frac{\ell^2}{\rho^2} \ll \frac{X}{W/\rho}$$

Une valeur raisonnable de  $X$  est donc

$$X = \frac{U/\rho}{W/\ell} \approx \frac{\ell^2}{\rho^2} \quad (11.11)$$

ce qui implique

$$U \approx W \frac{\ell}{\rho} \quad (11.12)$$

c'est-à-dire que les déplacements transversaux sont aux déplacements axiaux comme la longueur est à la dimension  $\rho$ . Dans ces conditions, les déformations  $\gamma_{\alpha 3}$ , données par

$$2\gamma_{\alpha 3} = D_\alpha u_3 + D_3 u_\alpha + D_\alpha u_\gamma D_3 u_\gamma + D_\alpha u_3 D_3 u_3$$

ont leurs termes d'ordres de grandeur respectifs

$$\frac{W}{\rho}, \quad \frac{U}{\ell}, \quad \frac{U^2}{\rho \ell}, \quad \frac{W^2}{\rho \ell}$$

On constate que le troisième terme est au second comme  $U/\rho$  et que le quatrième est au premier comme  $W/\ell$ , ce qui justifie l'emploi de la théorie linéaire.

## 11.4 Structure des déplacements $u_1$ et $u_2$

En régime élastique, les déformations restent petites, du moins pour les corps suffisamment raides. Soit donc  $\epsilon \ll 1$  l'ordre de grandeur attendu des déformations. Commençons par examiner  $\varepsilon_{33}$ . On a

$$\varepsilon_{33} = D_3 u_3 = \mathcal{O}(W/\ell)$$

ce qui mène à poser

$$W = \epsilon \ell, \quad U = \epsilon \frac{\ell^2}{\rho} \quad (11.13)$$

Examinons à partir de là les trois déformations dans le plan d'une section. La physique du problème suppose

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(D_\alpha u_\beta + D_\beta u_\alpha) = \mathcal{O}(\epsilon)$$

alors qu'à priori,

$$D_\alpha u_\beta = \mathcal{O}\left(\epsilon \frac{\ell^2}{\rho^2}\right), \quad D_\beta u_\alpha = \mathcal{O}\left(\epsilon \frac{\ell^2}{\rho^2}\right)$$

Par conséquent, on peut écrire que les déplacements  $u_\alpha$  vérifient

$$D_\alpha u_\beta = -D_\beta u_\alpha \quad \text{à } \mathcal{O}\left(\frac{\rho^2}{\ell^2}\right) \text{ près} \quad (11.14)$$

soit

$$\begin{cases} D_1 u_1 \approx 0 & \text{d'où } u_1 \approx u(z) + \theta_1(z)y \\ D_2 u_2 \approx 0 & \text{d'où } u_2 \approx v(z) + \theta_2(z)x \\ D_1 u_2 \approx -D_2 u_1 & \text{d'où } \theta_1 \approx -\theta_2 = -\theta(z) \end{cases}$$

On obtient ainsi la structure suivante du champ de déplacement :

$$\begin{cases} u_3 = u_3(x, y, z) \\ u_1 = u(z) - y\theta(z) \\ u_2 = v(z) + x\theta(z) \end{cases} \quad (11.15)$$

Il en découle directement, dans les notations classiques de l'ingénieur,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33} &= D_3 u_3 \\ \gamma_{13} &= D_1 u_3 + u' - \theta' y \\ \gamma_{23} &= D_2 u_3 + v' + \theta' x \end{aligned} \quad (11.16)$$

en marquant d'un prime les dérivées des fonctions de  $z$ .

## 11.5 Gauchissement de torsion et structure de l'énergie de déformation

L'énergie de déformation par unité de longueur de la poutre s'écrit

$$2\mathcal{U}' = E \int_{\Omega} (D_3 u_3)^2 d\Omega + G \int_{\Omega} [(D_1 u_3 + u' - \theta' y)^2 + (D_2 u_3 + v' + \theta' x)^2] d\Omega$$

On vérifie aisément que la première intégrale est d'ordre  $E\Omega\epsilon^2$ , tandis que la seconde est d'ordre  $E\Omega\epsilon^2 \frac{\ell^2}{\rho^2}$ . Dans le processus de minimisation, on pourra donc, avec une bonne approximation, varier  $u_3$  séparément dans la seconde, car les termes apportés par la première seront  $\rho^2/\ell^2$  fois plus petits. Cette minimisation

ne faisant intervenir que les dérivées selon  $x$  et  $y$ , elle pourra être effectuée section par section, ce qui mène au principe variationnel

$$\int_{\Omega} [(D_1 u_3 + u' - \theta' y)^2 + (D_2 u_3 + v' + \theta' x)^2] d\Omega = \min_{u_3}$$

La solution de ce problème est visiblement de la forme suivante<sup>1</sup> :

$$u_3 = w(z) - u'x - v'y + \theta'\psi(x, y) \quad (11.17)$$

où la fonction  $\psi$  minimise l'intégrale

$$\int_{\Omega} [(D_1 \psi - y)^2 + (D_2 \psi + x)^2] d\Omega \quad (11.18)$$

Ceci ne définit  $\psi$  qu'à une constante près. On fixe cette dernière en imposant la condition

$$\int_{\Omega} \psi d\Omega = 0 \quad (11.19)$$

Cette fonction est appelée *gauchissement de torsion*. En notant  $J$  la valeur minimale obtenue,

$$J = \min_{\psi} \int_{\Omega} [(D_1 \psi - y)^2 + (D_2 \psi + x)^2] d\Omega \quad (11.20)$$

on constate que l'énergie de cisaillement par unité de longueur de la poutre se ramène à

$$2\mathcal{U}'_c = GJ\theta'^2 \quad (11.21)$$

A propos de la constante  $J$ , notons que, pour toute variation  $\delta\psi$  de  $\psi$ , on a

$$\int_{\Omega} [(D_1 \psi - y)D_1 \delta\psi + (D_2 \psi + x)D_2 \delta\psi] d\Omega = 0 \quad (11.22)$$

Pour le choix particulier  $\delta\psi = \psi$ , on obtient

$$\int_{\Omega} [(D_1 \psi)^2 + (D_2 \psi)^2] d\Omega = \int_{\Omega} (yD_1 \psi - xD_2 \psi) d\Omega$$

---

1. Cette formule a été introduite pour la première fois par Timoshenko [84], sous une forme restreinte à la torsion. Elle a été généralisée par Wagner [92] et, surtout, par Vlassov [90]. C'est pourquoi on parle souvent de *théorie de Vlassov*.



Il en découle que

$$J = \int_{\Omega} [(D_1\psi)^2 + (D_2\psi)^2] d\Omega - 2 \int (yD_1\psi - xD_2\psi) d\Omega + I_p$$

avec

$$I_p = \int_{\Omega} (x^2 + y^2) d\Omega$$

soit

$$J = I_p - \int_{\Omega} [(D_1\psi)^2 + (D_2\psi)^2] d\Omega \leq I_p$$

l'égalité n'ayant lieu que si la gauchissement est nul.

A partir de l'expression (11.17), on déduit aisément

$$D_3u_3 = w' - u''x - v''y + \theta''\psi$$

ce qui permet de donner à l'énergie de déformation par unité de longueur de la poutre la forme suivante :

$$2\mathcal{U}' = E\Omega w'^2 + EI_x u''^2 + EI_y v''^2 + EK\theta''^2 + 2EL_x\theta''u'' + 2EL_y\theta''v'' + GJ\theta'^2 \quad (11.23)$$

en posant

$$\begin{aligned} \Omega &= \int_{\Omega} d\Omega, & I_x &= \int_{\Omega} x^2 d\Omega, & I_y &= \int_{\Omega} y^2 d\Omega \\ K &= \int_{\Omega} \psi^2 d\Omega, & L_x &= - \int_{\Omega} \psi x d\Omega, & L_y &= - \int_{\Omega} \psi y d\Omega \end{aligned} \quad (11.24)$$

Nous supposons ici implicitement vérifiées les conditions

$$I_{xy} = \int_{\Omega} xy d\Omega = 0, \quad \int_{\Omega} x d\Omega, \quad \int_{\Omega} y d\Omega = 0 \quad (11.25)$$

qui signifient que l'on travaille dans les axes principaux d'inertie de la section.

## 11.6 Définition du centre de torsion

Considérons le changement de variables à deux paramètres  $x_T$  et  $y_T$  défini par

$$u = u_T + \theta y_T, \quad v = v_T - \theta x_T \quad (11.26)$$

revenant à écrire

$$u_1 = u_T - \theta(y - y_T), \quad u_2 = v_T + \theta(x - x_T)$$

Le point  $(x_T, y_T)$  se présente alors comme le point où l'on mesure les déplacements  $u_T$  et  $v_T$ . En choisissant bien ce point, il est possible de découpler la flexion et la torsion. On a en effet

$$\begin{aligned} 2\mathcal{U}' &= E\Omega w'^2 + EI_x(u_T'' + \theta'' y_T)^2 + EI_y(v_T'' - \theta'' x_T)^2 + EK\theta''^2 \\ &\quad + EL_x\theta''(u_T'' + \theta'' y_T) + 2EL_y\theta''(v_T'' - \theta'' x_T) + GJ\theta'^2 \\ &= E\Omega w'^2 + EI_x u_T''^2 + EI_y v_T''^2 + 2E(L_x + y_T I_x)\theta'' u_T'' \\ &\quad + 2E(L_y - x_T I_y)\theta'' v_T'' + E(K + y_T^2 I_x + x_T^2 I_y + 2L_x y_T - 2L_y x_T)\theta''^2 \\ &\quad + GJ\theta'^2 \end{aligned}$$

Il suffit donc de poser

$$\begin{cases} y_T &= -\frac{L_x}{I_x} = \frac{1}{I_x} \int_{\Omega} x\psi d\Omega \\ x_T &= -\frac{L_y}{I_y} = -\frac{1}{I_y} \int_{\Omega} y\psi d\Omega \end{cases} \quad (11.27)$$

pour obtenir l'expression découplée suivante de l'énergie :

$$2\mathcal{U}' = E\Omega w'^2 + EI_x u_T''^2 + EI_y v_T''^2 + EK_T \theta''^2 + GJ\theta'^2 \quad (11.28)$$

avec

$$K_T = K - y_T^2 I_x - x_T^2 I_y \quad (11.29)$$

Le point défini par les coordonnées  $x_T, y_T$  est le *centre de torsion de Kappus-Weinstein* [36, 45].

Remarquons que l'on a encore

$$u_3 = w(z) - u_T' x - v_T' y + \theta' \psi_T \quad (11.30)$$

avec

$$\psi_T = \psi - y_T x + x_T y \quad (11.31)$$

et que

$$J = \int_{\Omega} [(D_1 \psi_T - y + y_T)^2 + (D_2 \psi_T + x - x_T)^2] d\Omega \quad (11.32)$$

## 11.7 Fonction de Prandtl

Les équations régissant le gauchissement de torsion s'obtiennent aisément à partir de (11.18) :

$$\begin{cases} D_1(D_1\psi - y) + D_2(D_2\psi + x) = 0 & \text{dans } \Omega \\ n_1(D_1\psi - y) + n_2(D_2\psi + x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On satisfait à ces conditions en posant

$$D_1\psi - y = D_2\varphi, \quad D_2\psi + x = -D_1\varphi \quad (11.33)$$

avec la condition de contour

$$n_1D_2\varphi - n_2D_1\varphi = 0$$

soit, comme (fig. 11.1)  $n_1 = t_2$  et  $n_2 = -t_1$ ,

$$t_1D_1\varphi + t_2D_2\varphi = D_t\varphi = 0 \quad (11.34)$$

La fonction  $\varphi$  ainsi définie porte le nom de *fonction de Prandtl* [70].

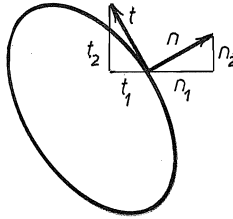


FIGURE 11.1 – Normale et tangente au contour

L'exploitation de la condition de contour (11.34) appelle quelques commentaires. En effet, il ne faut pas perdre de vue que les sections creuses ne sont pas rares. Pour celles-ci,

$$\partial\Omega = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_k$$

où  $\mathcal{C}_0$  est le contour extérieur et  $\mathcal{C}_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , les contours intérieurs (fig. 11.2). Comme la fonction de Prandtl n'est définie qu'à une constante additive près, on pose généralement

$$\varphi|_{\mathcal{C}_0} = 0 \quad (11.35)$$

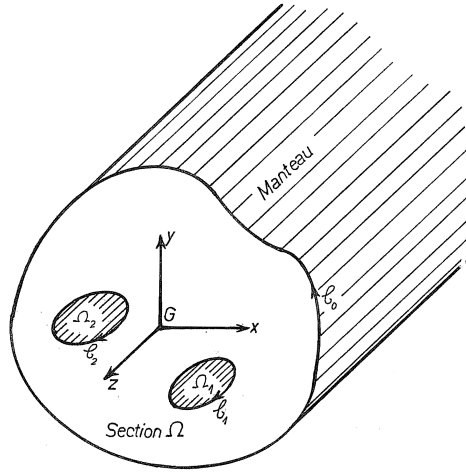


FIGURE 11.2 – Poutre à section creuse

Pour les autres contours, on a alors

$$\varphi|_{C_i} = \varphi_i \quad (\text{cte sur } C_i) \quad (11.36)$$

Cependant, il est clair que toutes les fonctions  $\varphi$  vérifiant ces conditions ne peuvent pas convenir, car il faut encore assurer l'existence du gauchissement de torsion, solution de (11.33). L'intégrabilité locale de  $\psi$  sera assurée si

$$D_2(D_1\psi) = D_{22}\varphi + 1 = D_1(D_2\psi) = -D_{11}\varphi - 1$$

soit si

$$\nabla^2\varphi + 2 = 0 \quad (11.37)$$

Sur chaque  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , on devra en outre assurer l'unicité de la fonction  $\psi$ ,

c'est-à-dire la condition

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{C_i} D_t \psi ds \\
 &= \int_{C_i} (t_1 D_1 \psi + t_2 D_2 \psi) ds \\
 &= \int_{C_i} (-n_2 D_1 \psi + n_1 D_2 \psi) ds \\
 &= \int_{C_i} [-n_2 (D_2 \varphi + y) - n_1 (D_1 \varphi + x)] ds
 \end{aligned}$$

soit

$$\int_{C_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = - \int_{C_i} (n_1 x + n_2 y) ds$$

Cette dernière intégrale de contour peut être transformée comme suit : appelant

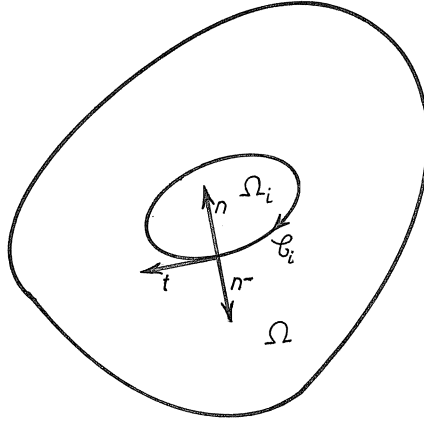


FIGURE 11.3 – Définition de la normale  $\mathbf{n}^-$

$\Omega_i$  l'aire du trou  $n^\circ i$ , la normale extérieure à  $\Omega_i$  est  $\mathbf{n}^- = -\mathbf{n}$  (fig. 11.3) et on a

$$- \int_{C_i} (n_1 x + n_2 y) ds = \int_{C_i} (n_1^- x + n_2^- y) ds = \int_{\Omega_i} (D_1 x + D_2 y) d\Omega = 2\Omega_i$$

ce qui ramène les conditions de contour à

$$\int_{\mathcal{C}_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 2\Omega_i \quad (11.38)$$

On remarquera que le problème (11.37), assorti des conditions aux limites (11.35), (11.36) et (11.38) n'est pas d'un type classique, puisque l'on impose en fait deux conditions sur les  $\mathcal{C}_i$ . On pourrait donc se poser des questions quant à l'existence de la solution. Pour dissiper ces doutes, définissons la fonction prolongée  $\hat{\varphi}$  sur  $\Omega_0 = \Omega \cup \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k$  par

$$\begin{cases} \hat{\varphi} = \varphi & \text{dans } \Omega \\ \hat{\varphi} = \varphi_i & \text{dans les } \Omega_i \end{cases} \quad (11.39)$$

et considérons le problème de minimisation de la fonctionnelle

$$\mathcal{I} = \int_{\Omega_0} [(D_1 \hat{\varphi})^2 + (D_2 \hat{\varphi})^2 - 2\hat{\varphi}] d\Omega \quad (11.40)$$

Ce problème admet visiblement une solution, et celle-ci vérifie les relations suivantes pour tout  $\delta \hat{\varphi}$  nul sur  $\mathcal{C}_0$  :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_0} (D_1 \hat{\varphi} D_1 \delta \hat{\varphi} + D_2 \hat{\varphi} D_2 \delta \hat{\varphi} - 2\delta \hat{\varphi}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (D_1 \hat{\varphi} D_1 \delta \hat{\varphi} + D_2 \hat{\varphi} D_2 \delta \hat{\varphi} - 2\delta \hat{\varphi}) d\Omega - \sum_i \delta \varphi_i \Omega_i \\ &= \sum_i \delta \varphi_i \int_{\mathcal{C}_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \delta \varphi (\nabla^2 \varphi + 2) d\Omega - 2 \sum_i \Omega_i \delta \varphi_i \end{aligned}$$

soit précisément

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi + 2 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \int_{\mathcal{C}_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 2\Omega_i & \text{sur les } \mathcal{C}_i \end{cases}$$

Le principe variationnel (11.40) sert de base à de nombreuses solutions approchées. La variation particulière  $\delta \hat{\varphi} = \hat{\varphi}$  fournit la relation importante

$$\int_{\Omega_0} [(D_1 \hat{\varphi})^2 + (D_2 \hat{\varphi})^2] d\Omega_0 = 2 \int_{\Omega_0} \hat{\varphi} d\Omega$$

qui entraîne

$$\begin{aligned}
 J &= \int_{\omega} [(D_1\psi - y)^2 + (D_2\psi + x)^2] d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} [(D_1\varphi)^2 + (D_2\varphi)^2] d\Omega \\
 &= \int_{\Omega_0} [(D_1\hat{\varphi})^2 + (D_2\hat{\varphi})^2] d\Omega \\
 &= 2 \int_{\Omega_0} \hat{\varphi} d\Omega
 \end{aligned} \tag{11.41}$$

### 11.8 Résultantes et équations d'équilibre

Considérons un système de forces de volume  $f_1, f_2, f_3$  et calculons leur énergie potentielle sur une section donnée :

$$\mathcal{P}' = - \int_{\Omega} (f_1 u_1 + f_2 u_2 + f_3 u_3) d\Omega$$

On a tout d'abord

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} (f_1 u_1 + f_2 u_2) d\Omega &= - \int_{\Omega} \{f_1 [u_T - \theta(y - y_T)] + f_2 [v_T + \theta(x - x_T)]\} d\Omega \\
 &= -q_x u_T - q_y v_T - m_T \theta
 \end{aligned}$$

en définissant les résultantes

$$\left. \begin{aligned}
 q_x &= \int_{\Omega} f_1 d\Omega && \text{(résultante des forces selon } Ox) \\
 q_y &= \int_{\Omega} f_2 d\Omega && \text{(résultante des forces selon } Oy) \\
 m_t &= \int_{\Omega} [(x - x_T)f_2 - (y - y_T)f_1] d\Omega && \text{(moment autour de } Oz)
 \end{aligned} \right\} \tag{11.42}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} f_3 u_3 d\Omega &= - \int_{\Omega} f_3 (w - x u'_T - y v'_T + \psi_T \theta') d\Omega \\
 &= -n w + m_x u'_T + m_y v'_T - b \theta'
 \end{aligned}$$

en posant

$$\left. \begin{aligned} n &= \int_{\Omega} f_3 d\Omega && \text{(résultante des forces selon } Oz) \\ m_x &= \int_{\Omega} f_3 x d\Omega && \text{(moment des forces } f_3 \text{ dans le plan } xOz) \\ m_y &= \int_{\Omega} f_3 y d\Omega && \text{(moment des forces } f_3 \text{ dans le plan } yOz) \\ b &= \int_{\Omega} f_3 \psi_T d\Omega && \text{(bimoment des forces } f_3) \end{aligned} \right\} \quad (11.43)$$

La variation de l'énergie de déformation par unité de longueur vaut, à partir de (11.28)

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U}' &= E\Omega w' \delta w' + EI_x u_T'' \delta u_T'' + EI_y v_T'' \delta v_T'' + EK_T \theta'' \delta \theta'' + GJ \theta' \delta \theta' \\ &= N \delta w' - M_x \delta u_T'' - M_y \delta v_T'' + B \delta \theta'' + M_t \delta \theta' \end{aligned}$$

à condition de définir les résultantes suivantes :

$$\left. \begin{aligned} N &= E\Omega w' = \int_{\Omega} \sigma_{33} d\Omega && \text{(effort normal)} \\ M_x &= -EI_x u_T'' = \int_{\Omega} \sigma_{33} x d\Omega && \text{(moment de flexion} \\ &&& \text{dans le plan } xOz) \\ M_y &= -EI_y v_T'' = \int_{\Omega} \sigma_{33} y d\Omega && \text{(moment de flexion} \\ &&& \text{dans le plan } yOz) \\ B &= EK_T \theta'' = \int_{\Omega} \sigma_{33} \psi_T d\Omega && \text{(bimoment de Vlassov)} \\ M_t &= GJ \theta' = \int_{\Omega} [\sigma_{13}^t (D_1 \psi - y) \\ &&& + \sigma_{23}^t (D_2 \psi + x)] d\Omega && \text{(moment de torsion)} \end{aligned} \right\} \quad (11.44)$$

où  $\sigma_{13}^t$  et  $\sigma_{23}^t$  représentent les contraintes de torsion. Comme celles-ci sont de la forme

$$\sigma_{13}^t = G\theta' D_2 \varphi, \quad \sigma_{23}^t = -G\theta' D_1 \varphi$$

où  $\varphi$  est la fonction de Prandtl, on a l'égalité

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\sigma_{13}^t D_1 \psi + \sigma_{23}^t D_2 \psi) d\Omega &= G\theta' \int_{\Omega} (D_2 \varphi D_1 \psi - D_1 \varphi D_2 \psi) d\Omega \\ &= G\theta' \left\{ \sum_{i \neq 0} \int_{C_i} \psi (n_1 D_2 \varphi - n_2 D_1 \varphi) ds - \int_{\Omega} \psi (D_{12} \varphi - D_{12} \varphi) d\Omega \right\} = 0 \end{aligned}$$



qui ramène  $M_t$  à sa définition classique

$$M_t = \int_{\Omega} (x\sigma_{23}^t - y\sigma_{13}^t) d\Omega \quad (11.45)$$

Le problème de l'équilibre intérieur se traite en minimisant l'énergie totale par rapport à toute variation de déplacements nulle avec toutes ses dérivées aux extrémités. On a

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E} = \int_0^\ell (N\delta w' - M_x\delta u_T'' - M_y\delta v_T'' + B\delta\theta'' + M_t\delta\theta' \\ - n\delta w + m_x\delta u_T' + m_y\delta v_T' - b\delta\theta' - q_x\delta u_T - q_y\delta v_t - m_t\delta\theta) dz = 0 \end{aligned}$$

ce qui mène aux équations suivantes :

$$N' + n = 0 \quad (11.46)$$

et

$$\left. \begin{aligned} M_x'' - m_x' + q_x &= 0 \\ M_y'' - m_y' + q_y &= 0 \\ -B'' + b' + m_t &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.47)$$

Introduisant les grandeurs

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= M_x' - m_x \\ Q_y &= M_y' - m_y \\ R &= B' - b \end{aligned} \right\} \quad (11.48)$$

on peut mettre les équations (11.47) sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} Q_x' + q_x &= 0 \\ Q_y' + q_y &= 0 \\ R' &= m_t \end{aligned} \right\} \quad (11.49)$$

Il se trouve que les trois nouvelles grandeurs définies en (11.48) peuvent être interprétées comme des résultantes simples. En effet, si l'on admet l'équilibre local,

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ R \end{bmatrix} = \int_{\Omega} (D_3\sigma_{33} + f_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ \psi_T \end{bmatrix} d\Omega = - \int_{\Omega} D_{\alpha}\sigma_{\alpha 3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \psi_T \end{bmatrix} d\Omega$$

d'où, en intégrant par parties,

$$\left. \begin{aligned}
 Q_x &= \int_{\Omega} \sigma_{13} d\Omega && \text{(effort tranchant selon } xOz) \\
 Q_y &= \int_{\Omega} \sigma_{23} d\Omega && \text{(effort tranchant selon } yOz) \\
 R &= \int_{\Omega} (\sigma_{13} D_1 \psi_T + \sigma_{23} D_2 \psi_T) d\Omega && \text{(bi-effort tranchant)}
 \end{aligned} \right\} \quad (11.50)$$

## 11.9 Conditions aux limites

Considérant à présent des variations quelconques des déplacements, on obtient les termes aux limites suivants :

$$\begin{aligned}
 [N\delta w]_0^\ell - [M_x \delta u'_T]_0^\ell - [M_y \delta v'_T]_0^\ell + [B\delta\theta']_0^\ell + [M_t \delta\theta]_0^\ell \\
 + [M'_x \delta u_T]_0^\ell + [M'_y \delta v_T]_0^\ell - [B'\delta\theta]_0^\ell \quad (11.51)
 \end{aligned}$$

Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agit d'une poutre console. A l'extrémité libre, les tractions de surface  $\bar{t}_1, \bar{t}_2$  et  $\bar{t}_3$  induiront une énergie potentielle

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P} &= - \int_{\Omega} [\bar{t}_1 u_1(\ell) + \bar{t}_2 u_2(\ell) + \bar{t}_3 u_3(\ell)] d\Omega \\
 &= - \int_{\Omega} \{ \bar{t}_1 [u_T(\ell) - (y - y_T)\theta(\ell)] + \bar{t}_2 [v_T(\ell) + (x - x_T)\theta(\ell)] \\
 &\quad + \bar{t}_3 [w(\ell) - x u'_T(\ell) - y v'_T(\ell) + \psi_T \theta'(\ell)] \} d\Omega \\
 &= \bar{N} w(\ell) + \bar{x} u_T(\ell) + \bar{Q}_y v_T(\ell) - \bar{M}_x u'_T(\ell) - \bar{M}_y v'_T(\ell) \\
 &\quad + \bar{M}_t \theta(\ell) + \bar{B} \theta'(\ell) \quad (11.52)
 \end{aligned}$$

avec

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{N} &= \int_{\Omega} \bar{t}_3 d\Omega, & \bar{Q}_x &= \int_{\Omega} \bar{t}_1 d\Omega, & \bar{Q}_y &= \int_{\Omega} \bar{t}_2 d\Omega \\
 \bar{M}_x &= \int_{\Omega} \bar{t}_3 x d\Omega, & \bar{M}_y &= \int_{\Omega} \bar{t}_3 y d\Omega, & \bar{M}_t &= \int_{\Omega} [\bar{t}_2 (x - x_T) - \bar{t}_1 (y - y_T)] d\Omega \\
 \bar{B} &= \int_{\Omega} \bar{t}_3 \psi_T d\Omega
 \end{aligned} \right\} \quad (11.53)$$

Les conditions d'extrémité sont alors

$$\left\{ \begin{array}{l} N(\ell) = \bar{N}, \quad Q_x(\ell) = \bar{Q}_x, \quad Q_y(\ell) = \bar{Q}_y \\ M_x(\ell) = \bar{M}_x, \quad M_y(\ell) = \bar{M}_y, \quad M_t(\ell) - B'(\ell) = \bar{M}_t \\ B(\ell) = \bar{B} \end{array} \right\} \quad (11.54)$$

Les conditions d'encastrement varient avec la *perfection* de celui-ci. Au minimum, on aura, en  $z = 0$ ,  $u_T = v_T = w_T = u'_T = v'_T = \theta = 0$ . Si, de plus, l'encastrement assure la nullité du gauchissement, on aura en outre  $\theta' = 0$ . Nous appellerons le premier cas *encastrement imparfait* et le second, *encastrement parfait*.

## 11.10 Calcul des contraintes

A partir des résultantes, il est aisé de calculer les contraintes normales

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= E(w' - xu_T''' - yv_T''' + \psi_T\theta''') \\ &= \frac{N}{\Omega} + x\frac{M_x}{I_x} + \frac{M_y}{I_y} + \psi_T\frac{B}{K_T} \end{aligned} \quad (11.55)$$

De même, les contraintes de torsion s'obtiennent par

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^t &= G\theta'(D_1\psi - y) = G\theta'D_2\varphi \\ \sigma_{23}^t &= G\theta'(D_2\psi + x) = -G\theta'D_1\varphi \end{aligned}$$

ou encore, par

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^t &= \frac{M_t}{J}(D_1\psi - y) = \frac{M_t}{J}D_2\varphi \\ \sigma_{23}^t &= \frac{M_t}{J}(D_2\psi + x) = -\frac{M_t}{J}D_1\varphi \end{aligned} \quad (11.56)$$

Par contre, le calcul des contraintes de cisaillement de flexion est plus délicat, car du fait de nos hypothèses, ces contraintes ne travaillent pas. Au sens variationnel, on n'a accès qu'aux résultantes (11.50), ce qui signifie que le calcul local de ces contraintes revêt une part inévitable de convention dans le cas d'une distribution arbitraire des forces  $f_1, f_2, f_3$ . On mène généralement le calcul en admettant que  $f_3$  a la même forme que  $\sigma_{33}$ , soit

$$f_3 = \frac{n}{\Omega} + x\frac{m_x}{I_x} + y\frac{m_y}{I_y} + \psi_T\frac{b}{K_T}$$

Il vient alors

$$\begin{cases} D_\alpha \sigma_{\alpha 3}^f &= -x \frac{Q_x}{I_x} - y \frac{Q_y}{I_y} - \psi_T \frac{B}{K_T} & \text{dans } \Omega \\ n_\alpha \sigma_{\alpha 3}^f &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (11.57)$$

Mais la solution de ce problème n'est pas unique : à toute solution particulière de (11.57), on peut ajouter une solution de l'équation homogène, qui est de la forme

$$\sigma_{13} = D_2 \Phi, \quad \sigma_{23} = -D_1 \Phi, \quad \Phi|_{\mathcal{C}_0} = 0, \quad \Phi|_{\mathcal{C}_i} = \Phi_i$$

qui s'interprète comme un champ de torsion. Comme le moment de torsion des contraintes de flexion doit être nul, le plus simple est d'imposer la condition d'orthogonalité à tout champ de torsion :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \left( \sigma_{13}^f D_2 \Phi - \sigma_{23}^f D_1 \Phi \right) d\Omega \\ &= \sum_{i \neq 0} \Phi_i \int_{\mathcal{C}_i} \left( n_2 \sigma_{13}^f - n_1 \sigma_{23}^f \right) ds - \int_{\Omega} \Phi \left( D_2 \sigma_{13}^f - D_1 \sigma_{23}^f \right) d\Omega \end{aligned}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} D_2 \sigma_{13}^f = D_1 \sigma_{23}^f & \text{dans } \Omega \\ \int_{\mathcal{C}_i} \left( t_1 \sigma_{13}^f + t_2 \sigma_{23}^f \right) ds = 0 & \text{sur les } \mathcal{C}_i \end{cases} \quad (11.58)$$

Ces relations assurent l'existence d'un potentiel  $g$  tel que

$$\sigma_{13}^f = D_1 g, \quad \sigma_{23}^f = D_2 g \quad (11.59)$$

et ramènent le problème (11.57) à

$$\begin{cases} \nabla^2 g + x \frac{Q_x}{I_x} + y \frac{Q_y}{I_y} + \psi_T \frac{B}{K_T} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial g}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (11.60)$$

La solution de ce problème a la forme

$$g = \frac{Q_x}{I_x} g_x + \frac{Q_y}{I_y} g_y + \frac{B}{K_T} g_\psi \quad (11.61)$$

les fonctions  $g_x$ ,  $g_y$  et  $g_\psi$  étant définies comme les solutions des problèmes partiels

$$\begin{cases} \nabla^2 \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_\psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ \psi_T \end{bmatrix} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n} \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_\psi \end{bmatrix} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (11.62)$$

ou, ce qui revient au même, comme les fonctions qui minimisent les fonctionnelles

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_x &= \int_{\Omega} (|\mathbf{grad}g_x|^2 - xg_x) d\Omega \\ \mathcal{I}_y &= \int_{\Omega} (|\mathbf{grad}g_y|^2 - yg_y) d\Omega \\ \mathcal{I}_\psi &= \int_{\Omega} (|\mathbf{grad}g_\psi|^2 - \psi_T g_\psi) d\Omega \end{aligned} \quad (11.63)$$

Le champ de cisaillement de flexion défini par les relations (11.59) à (11.63) est appelé *champ principal de flexion* [36].

### 11.11 Torsion non uniforme

Attardons-nous un peu sur le cas particulier de la torsion, c'est-à-dire d'une sollicitation n'excitant que la rotation  $\theta$ . Nous considérerons le cas d'une poutre console, parfaitement encastree en  $z = 0$ . On a donc

$$\delta\mathcal{E} = \int_0^\ell (EK_T\theta'' \delta\theta'' + GJ\theta' \delta\theta') dz - \bar{M}_t \delta\theta(\ell) - \bar{B} \delta\theta'(\ell) = 0 \quad (11.64)$$

On observera tout d'abord la possibilité d'exciter la torsion par un bimoment d'extrémité, qui consiste en un système de charges *axiales* (de résultante et de moments nuls). Il est aisé de déduire de (11.64) l'équation différentielle

$$EK_T\theta^{IV} - GJ\theta'' = 0 \quad \text{dans } ]0, \ell[ \quad (11.65)$$

et les conditions d'extrémité

$$\theta(0) = \theta'(0) = 0 \quad (11.66)$$

$$EK_T\theta''(\ell) = \bar{B} \quad (11.67)$$

$$GJ\theta'(\ell) - EK_T\theta'''(\ell) = \bar{M}_t \quad (11.68)$$

Des conditions (11.65) et (11.68), on déduit aisément l'équation

$$\theta''' - \frac{GJ}{EK_T} \theta' = -\frac{\bar{M}_t}{EK_T} \quad \text{dans } ]0, \ell[$$

dont la solution générale a la forme

$$\theta = \frac{\bar{M}_t}{GJ} z + C_1 + C_2 \operatorname{ch} \frac{z}{z_0} + C_3 \operatorname{sh} \frac{z}{z_0}$$

avec

$$z_0^2 = \frac{EK_T}{GJ} \quad (11.69)$$

Des conditions d'appui, on déduit

$$C_1 + C_2 = 0, \quad \frac{\bar{M}_t}{GJ} + \frac{C_3}{z_0} = 0$$

d'où

$$\theta = \frac{\bar{M}_t}{GJ} \left( z - z_0 \operatorname{sh} \frac{z}{z_0} \right) + C_1 \left( 1 - \operatorname{ch} \frac{z}{z_0} \right)$$

A l'extrémité  $z = \ell$ , on a par (11.67)

$$-\frac{\bar{M}_t}{GJ} \frac{\operatorname{sh}(\ell/z_0)}{z_0} - \frac{1}{z_0^2} C_1 \operatorname{ch}(\ell/z_0) = \frac{\bar{B}}{EK_T}$$

d'où

$$C_1 = -\frac{\bar{M}_t}{GJ} z_0 \operatorname{th}(\ell/z_0) - z_0^2 \frac{\bar{B}}{EK_T \operatorname{ch}(\ell/z_0)}$$

La solution est donc

$$\theta = \frac{\bar{M}_t}{GJ} \left[ z - z_0 \operatorname{sh} \frac{z}{z_0} - z_0 \operatorname{th} \frac{\ell}{z_0} + z_0 \operatorname{ch} \frac{z}{z_0} \operatorname{th} \frac{\ell}{z_0} \right] + \frac{\bar{B}}{EK_T} z_0^2 \frac{\operatorname{ch} \frac{z}{z_0} - 1}{\operatorname{sh} \frac{\ell}{z_0}}$$

soit

$$\theta = \frac{\bar{M}_t}{GJ} \left[ z - z_0 \operatorname{th} \frac{\ell}{z_0} + z_0 \frac{\operatorname{sh} \frac{\ell-z}{z_0}}{\operatorname{ch} \frac{\ell}{z_0}} \right] + \frac{\bar{B}}{EK_T} z_0^2 \frac{\operatorname{ch} \frac{z}{z_0} - 1}{\operatorname{sh} \frac{\ell}{z_0}} \quad (11.70)$$

Dans le cas où la poutre est suffisamment longue ( $\ell/z_0 > 3$ ), on peut écrire à  $5^\circ/\infty$  près  $\operatorname{th}(\ell/z_0) \approx 1$ , ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sh} \frac{\ell-z}{z_0}}{\operatorname{ch} \frac{\ell}{z_0}} &= \frac{\operatorname{sh} \frac{\ell}{z_0} \operatorname{ch} \frac{z}{z_0} - \operatorname{sh} \frac{z}{z_0} \operatorname{ch} \frac{\ell}{z_0}}{\operatorname{ch} \frac{\ell}{z_0}} \\ &\approx \operatorname{ch} \frac{z}{z_0} - \operatorname{sh} \frac{z}{z_0} = \exp\left(-\frac{z}{z_0}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{ch} \frac{z}{z_0} - 1}{\operatorname{sh} \frac{\ell}{z_0}} &= \frac{\operatorname{ch} \left[ \frac{\ell}{z_0} - \left( \frac{\ell-z}{z_0} \right) \right] - 1}{\operatorname{sh} \frac{\ell}{z_0}} \\ &= \frac{\operatorname{ch} \frac{\ell}{z_0} \operatorname{ch} \frac{\ell-z}{z_0} - \operatorname{sh} \frac{\ell}{z_0} \operatorname{sh} \frac{\ell-z}{z_0} - 1}{\operatorname{sh} \frac{\ell}{z_0}} \\ &\approx \operatorname{ch} \frac{\ell-z}{z_0} - \operatorname{sh} \frac{\ell-z}{z_0} - 1 = \exp \left( -\frac{\ell-z}{z_0} \right) - 1 \end{aligned}$$

d'où

$$\theta \approx \frac{\bar{M}_t}{GJ} \left[ z - z_0 + z_0 \exp \left( -\frac{z}{z_0} \right) \right] - \frac{\bar{B}}{EK_T} z_0^2 \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\ell-z}{z_0} \right) \right] \quad (11.71)$$

La solution se présente donc comme la superposition d'une torsion uniforme

$$\theta_u = \frac{\bar{M}_t}{GJ} (z - z_0) \quad (11.72)$$

et de termes d'extrémité, dont la profondeur de pénétration est  $z_0$  (c'est-à-dire qu'ils décroissent d'un facteur  $e$  tous les  $z_0$ ). Le terme de torsion uniforme correspond à un encastrement imparfait fictif à une distance  $z_0$ , comme le montre la figure 11.4. Le comportement de la solution dépend évidemment de la longueur

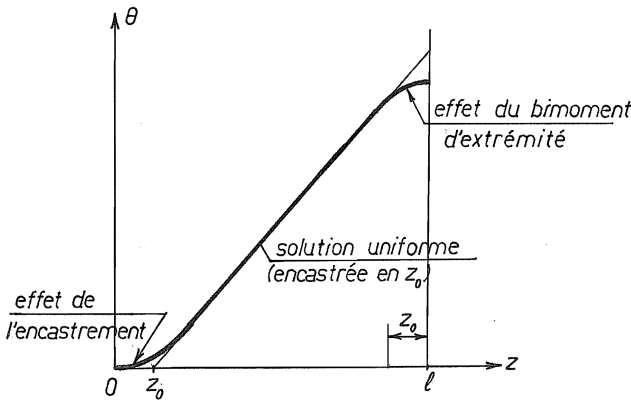


FIGURE 11.4 – Torsion non uniforme

$$z_0 = \sqrt{\frac{EK_T}{GJ}}$$

Cette affirmation est générale. En effet, la torsion sera non uniforme si les termes  $EK_T\theta'^2$  et  $GJ\theta'^2$  de l'énergie de déformation sont du même ordre de grandeur. Or, si  $\lambda$  est la longueur d'onde de l'angle de torsion  $\theta$ , lui-même d'ordre de grandeur  $\Theta$ , on a

$$EK_T\theta'^2 = \mathcal{O}\left(EK_T \frac{\Theta^2}{\lambda^4}\right), \quad GJ\theta'^2 = \mathcal{O}\left(GJ \frac{\Theta^2}{\lambda^2}\right)$$

et l'interaction n'aura lieu que si

$$\lambda^2 = \mathcal{O}\left(\frac{EK_T}{GJ}\right) \quad (11.73)$$

ce qui détermine la profondeur de pénétration. Il est donc utile de chiffrer ce rapport dans les cas courants.

## 11.12 Étude approchée des sections massives

Pour les sections massives, on peut, en première approximation, utiliser la méthode de Rayleigh, avec un gauchissement de la forme [90]

$$\psi(x, y) = Axy \quad (11.74)$$

qui vérifie visiblement la condition

$$\int_{\Omega} \psi(x, y) dx dy = 0$$

On a alors

$$\int_{\Omega} [(D_1\psi - y)^2 + (D_2\psi + x)^2] d\Omega = (A - 1)^2 I_x + (A + 1)^2 I_y$$

et cette expression est minimale pour

$$2(A - 1)I_x + 2(A + 1)I_y = 0$$

soit

$$A = \frac{I_x - I_y}{I_x + I_y} \quad (11.75)$$



On en déduit les coordonnées approchées du centre de torsion par

$$\left. \begin{aligned} x_T &= -\frac{1}{I_y} \int_{\Omega} y\psi d\Omega = \frac{1}{I_y} \frac{I_y - I_x}{I_x + I_y} \int_{\Omega} xy^2 d\Omega \\ y_T &= \frac{1}{I_x} \int_{\Omega} x\psi d\Omega = \frac{1}{I_x} \frac{I_x - I_y}{I_x + I_y} \int_{\Omega} x^2y d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (11.76)$$

et la constante  $K$  est donnée par

$$K = \int_{\Omega} \psi^2 d\Omega = \frac{(I_x - I_y)^2}{(I_x + I_y)^2} \int_{\Omega} x^2y^2 d\Omega \quad (11.77)$$

On a alors

$$K_T = K - y_T^2 I_x - x_T^2 I_y \quad (11.78)$$

Quant à la constante de torsion, elle est donnée par

$$J = \left( \frac{I_x - I_y}{I_x + I_y} - 1 \right)^2 I_x + \left( \frac{I_x - I_y}{I_x + I_y} + 1 \right)^2 I_y = \frac{4I_x I_y}{I_x + I_y} \quad (11.79)$$

Pour une section symétrique ayant les deux moments d'inertie égaux, comme le cercle ou le carré, on obtient donc

$$K_T = 0, \quad J = 2I$$

conformément à la théorie élémentaire de Coulomb. Dans le cas d'une section dont un des moments d'inertie est très inférieur à l'autre ( $I_y \ll I_x$ ), comme une ellipse très allongée ou un rectangle très mince, on obtient, si la section est symétrique,

$$J = \frac{4I_y}{1 + \frac{I_y}{I_x}}, \quad K = \frac{\left(1 - \frac{I_y}{I_x}\right)^2}{\left(1 + \frac{I_y}{I_x}\right)^2} \int_{\Omega} x^2y^2 d\Omega$$

Ainsi, pour un rectangle très mince, de largeur  $a$  et d'épaisseur  $t \ll a$ ,

$$J = \frac{1}{3} \frac{at^3}{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2}, \quad K = \frac{\left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)^2}{\left(1 + \frac{t^2}{a^2}\right)^2} \frac{1}{144} a^3 t^3$$

ce qui donne

$$z_0^2 = \frac{1}{48} a^2 \frac{\left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)^2}{1 + \frac{t^2}{a^2}}$$

soit, dans le cas extrême où  $t/a \rightarrow 0$ ,

$$z_0 \approx \frac{a}{\sqrt{48}} \approx \frac{a}{7} \quad (11.80)$$

C'est donc *la plus grande* dimension de la section qui importe. Ce phénomène est encore renforcé dans le cas des poutres à parois minces comme nous allons le voir.

## 11.13 Théorie des poutres à parois minces ouvertes

### 11.13.1 Considérations géométriques

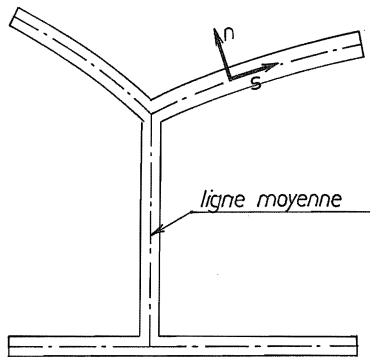


FIGURE 11.5 – Poutre à parois minces ouverte

Une poutre à parois minces a sa section constituée de corps très minces reliés en des nœuds. On dit qu'elle est *ouverte* si son profil est simplement connexe. En admettant une certaine approximation géométrique aux nœuds, on décrit la section à l'aide de sa ligne moyenne, repérée par une coordonnée  $s$ , et une coordonnée  $n$  selon l'épaisseur (*fig. 11.5*). La longueur totale  $a$  de la ligne moyenne est supposée très grande devant l'épaisseur du profil. Par ailleurs, la ligne moyenne peut être courbe, pourvu que son rayon de courbure  $R$  vérifie la condition  $t/R \ll 1$ . Enfin, on suppose toujours que la poutre est longue, ce qui s'écrit ici  $a/\ell \ll 1$ . En un point quelconque de la ligne moyenne, de coordonnées

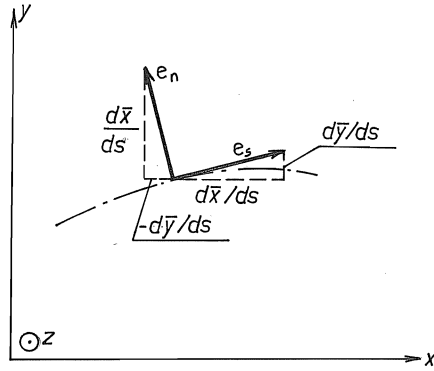


FIGURE 11.6 – Normale et tangente unitaires

$(\bar{x}(s), \bar{y}(s))$ , on définit le vecteur unitaire tangent

$$\mathbf{e}_s = \left( \frac{d\bar{x}}{ds}, \frac{d\bar{y}}{ds} \right) \quad (11.81)$$

et le vecteur normal (à gauche, dans le sens de parcours)

$$\mathbf{e}_n = \left( -\frac{d\bar{y}}{ds}, \frac{d\bar{x}}{ds} \right) \quad (11.82)$$

comme le montre la construction vectorielle de la figure 11.6. La courbure de la

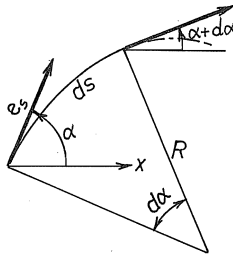


FIGURE 11.7 – Courbure de la ligne moyenne

ligne moyenne,  $1/R(s)$ , peut être définie comme le taux de variation de l'orientation de la tangente lors d'une progression le long du feuillet moyen (fig. 11.7) :

$$\frac{1}{R} = -\frac{d\alpha}{ds} \quad (11.83)$$

Le signe négatif provient de la convention définissant  $\alpha$  comme l'angle entre l'axe des  $x$  et la tangente orientée positivement. Notant que

$$\cos \alpha = \frac{d\bar{x}}{ds}, \quad \sin \alpha = \frac{d\bar{y}}{ds}$$

on obtient aisément

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\bar{x}}{ds^2} = -\sin \alpha \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R} \frac{d\bar{y}}{ds} \\ \frac{d^2\bar{y}}{ds^2} = \cos \alpha \frac{d\alpha}{ds} = -\frac{1}{R} \frac{d\bar{x}}{ds} \end{array} \right. \quad (11.84)$$

Un point quelconque de la section a ses coordonnées égales à

$$(x, y) = (\bar{x}, \bar{y}) + n\mathbf{e}_n$$

soit explicitement

$$\left. \begin{array}{l} x(s, n) = \bar{x}(s) - n \frac{d\bar{y}}{ds} \\ y(s, n) = \bar{y}(s) + n \frac{d\bar{x}}{ds} \end{array} \right\} \quad (11.85)$$

En conséquence, le jacobien de la transformation  $(s, n) \mapsto (x, y)$  s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, n)} &= \begin{vmatrix} \frac{d\bar{x}}{ds} - n \frac{d^2\bar{y}}{ds^2} & -\frac{d\bar{y}}{ds} \\ \frac{d\bar{y}}{ds} + n \frac{d^2\bar{x}}{ds^2} & \frac{d\bar{x}}{ds} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \left(1 + \frac{n}{R}\right) \frac{d\bar{x}}{ds} & -\frac{d\bar{y}}{ds} \\ \left(1 + \frac{n}{R}\right) \frac{d\bar{y}}{ds} & \frac{d\bar{x}}{ds} \end{vmatrix} = 1 + \frac{n}{R} \end{aligned} \quad (11.86)$$

car on a toujours

$$\left(\frac{d\bar{x}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{ds}\right)^2 = 1$$

L'élément de surface vaut donc

$$dx dy = \left(1 + \frac{n}{R}\right) ds dn \approx ds dn \tag{11.87}$$

puisque  $t/R \ll 1$ .

### 11.13.2 Une formule d'intégration par parties [31]

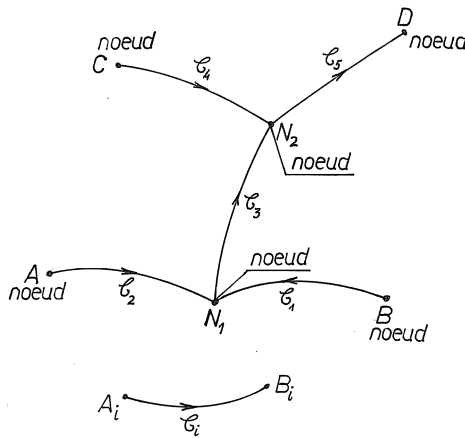


FIGURE 11.8 – Description d'un profil ramifié

Dans le cas d'un profil ramifié, on définit *arbitrairement* un sens de parcours sur chaque branche  $\mathcal{C}_i$  de la ligne moyenne, comme le montre la figure 11.8. On a alors, pour une fonction quelconque de  $s$ ,

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \sum_i \int_{\mathcal{C}_i} f ds$$

L'intégration par parties demande alors une certaine attention. En effet, si  $f$  est

une fonction continue aux nœuds,  $g$  ne l'étant pas nécessairement, on aura

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{C}} g D_s f ds &= \sum_i \int_{\mathcal{C}_i} g D_s f ds \\
 &= \sum_i [g f]_{A_i}^{B_i} - \sum_i \int_{\mathcal{C}_i} f D_s g ds \\
 &= \sum_{\text{nœuds } N} f_N T_N(g) - \sum_i \int_{\mathcal{C}_i} f D_s g ds \quad (11.88)
 \end{aligned}$$

en posant en chaque nœud

$$T_N(g) = \sum g_{\text{convergent}} - \sum g_{\text{divergent}}$$

un  $g$  étant convergent s'il appartient à une branche convergeant vers  $N$ , divergent sinon.

### 11.13.3 Torsion

Le problème fondamental en torsion est de minimiser l'intégrale

$$\int_{\Omega} [(D_1 \psi - y)^2 + (D_2 \psi + x)^2] d\Omega = \int_{\Omega} |\mathbf{f}|^2 d\Omega$$

avec

$$\mathbf{f} = \left( D_1 \psi - \bar{y} - n \frac{d\bar{x}}{ds} \right) \mathbf{e}_1 + \left( D_2 \psi + \bar{x} - n \frac{d\bar{y}}{ds} \right) \mathbf{e}_2 \quad (11.89)$$

Notant que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_s &= \frac{d\bar{x}}{ds}, & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_n &= \frac{d\bar{y}}{ds} \\
 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_s &= -\frac{d\bar{y}}{ds}, & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_n &= \frac{d\bar{x}}{ds}
 \end{aligned}$$

on a encore

$$f_s = \left( D_1 \psi - \bar{y} - n \frac{d\bar{x}}{ds} \right) \frac{d\bar{x}}{ds} + \left( D_2 \psi + \bar{x} - n \frac{d\bar{y}}{ds} \right) \frac{d\bar{y}}{ds} = D_s \psi - r - n \quad (11.90)$$

avec

$$r = \bar{y} \frac{d\bar{x}}{ds} - \bar{x} \frac{d\bar{y}}{ds} \quad (11.91)$$

et

$$\begin{aligned}
 f_n &= - \left( D_1 \psi - \bar{y} - n \frac{d\bar{x}}{ds} \right) \frac{d\bar{y}}{ds} + \left( D_2 \psi + \bar{x} - n \frac{d\bar{y}}{ds} \right) \frac{d\bar{x}}{ds} \\
 &= D_n \psi + \bar{x} \frac{d\bar{x}}{ds} + \bar{y} \frac{d\bar{y}}{ds}
 \end{aligned} \tag{11.92}$$

La grandeur  $r$  définie ci-dessus a une interprétation géométrique utile : c'est,

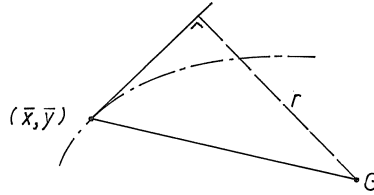


FIGURE 11.9 – Interprétation géométrique de  $r$

comme l'illustre la figure 11.9, la projection sur la normale au profil de la distance au centre de gravité de la section.

On est donc amené à minimiser l'expression

$$\int_{\Omega} \left[ (D_s \psi - r - n)^2 + \left( D_n \psi + \bar{x} \frac{d\bar{x}}{ds} + \bar{y} \frac{d\bar{y}}{ds} \right)^2 \right] d\Omega \tag{11.93}$$

On remarquera que le premier terme entre parenthèses de l'intégrale est d'ordre  $\mathcal{O}(\frac{\psi}{a} + \rho)$  et le second, d'ordre  $\mathcal{O}(\frac{\psi}{l} + \rho)$ . Le second est donc beaucoup plus grand et, moyennant une erreur d'ordre  $t^2/a^2$ , on peut le minimiser séparément, ce qui mène à la condition

$$D_n \psi = -\bar{x} \frac{d\bar{x}}{ds} - \bar{y} \frac{d\bar{y}}{ds}$$

ce qui mène à

$$\psi(s, n) = \bar{\psi}(s) - n \left( \bar{x} \frac{d\bar{x}}{ds} + \bar{y} \frac{d\bar{y}}{ds} \right) \tag{11.94}$$

Introduisant cette valeur dans la premier terme, on trouve

$$\begin{aligned} D_s\psi - r - n &= D_s\bar{\psi} - n - n \left( \bar{x} \frac{d^2\bar{x}}{ds^2} + \bar{y} \frac{d^2\bar{y}}{ds^2} \right) - r - n \\ &= D_s\bar{\psi} - n - \frac{n}{R} \left( \bar{x} \frac{d\bar{y}}{ds} - \bar{y} \frac{d\bar{x}}{ds} \right) - r - n \\ &= D_s\bar{\psi} - 2n - r \left( 1 + \frac{n}{R} \right) \end{aligned}$$

soit, en négligeant  $n/R$  devant l'unité,

$$D_s\psi - r - n \approx D_s\bar{\psi} - r - 2n$$

Il reste donc à minimiser l'expression

$$\int_{\Omega} (D_s\bar{\psi} - r - 2n)^2 d\Omega = \int_{\mathcal{C}} t(D_s\bar{\psi} - r)^2 ds + \int_{\mathcal{C}} \frac{t^3}{3} ds \quad (11.95)$$

Variant  $\bar{\psi}$ , on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{C}} t(D_s\bar{\psi} - r) D_s \delta\bar{\psi} ds \\ &= \sum_N T_N [t(D_s\bar{\psi} - r)] \delta\bar{\psi}_N - \int_{\mathcal{C}} \delta\bar{\psi} D_s [t(D_s\bar{\psi} - r)] ds \end{aligned}$$

ce qui mène aux conditions

$$\begin{cases} D_s [t(D_s\bar{\psi} - r)] = 0 & \text{dans les } \mathcal{C}_i \\ T_N [t(D_s\bar{\psi} - r)] = 0 & \text{aux nœuds} \end{cases}$$

La solution de ce problème est aisée à construire (*fig. 11.10*) : aux nœuds d'extrémité, la condition est simplement  $D_s\bar{\psi} = r$ , et en maintenant cette propriété sur tout l'arc adjacent, on satisfait à l'équation différentielle sur cet arc. Par conséquent, de proche en proche, on obtient en tout nœud  $D_s\bar{\psi} = r$  sur tous les arcs adjacents. Il suffit donc de construire la fonction

$$\omega = \omega_0 + \int r ds \quad (11.96)$$

obtenue en partant d'un nœud quelconque, et continue aux nœuds. On détermine finalement  $\omega_0$  par la condition

$$\int_{\Omega} \psi d\Omega = \int_{\mathcal{C}} \bar{\psi} t ds = \int_{\mathcal{C}} \omega t ds = 0 \quad (11.97)$$



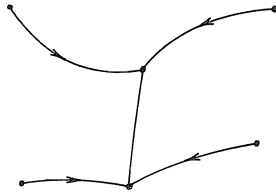


FIGURE 11.10 – Construction de la solution

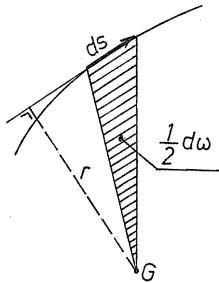


FIGURE 11.11 – Aire sectorielle

La fonction  $\omega$  ainsi définie porte le nom d'*aire sectorielle*, car la grandeur

$$d\omega = r ds$$

vaut deux fois l'aire balayée par le vecteur joignant le point courant sur la courbe moyenne au centre de gravité, comme l'illustre la figure 11.10. On a évidemment

$$D_s \bar{\psi} - r = D_s \omega - r = 0$$

ce qui entraîne que

$$J = \int_c \frac{t^3}{3} ds \tag{11.98}$$

C'est la formule classique de la raideur de torsion des sections minces<sup>2</sup>.

2. Vlassov [90] néglige dans ses développements la variation sur l'épaisseur des glissements, ce qui revient à négliger dans (11.95) le terme  $(2n)$  devant  $r$ , alors que ce dernier peut être petit. Cette hyperidéalisaiton conduit à  $J = 0$  et oblige à réintroduire la valeur correcte (11.98) ... comme un fait d'expérience.

Les coordonnées du centre de torsion sont données par

$$y_T = \frac{1}{I_x} \int_{\Omega} x\psi d\Omega \quad (11.99)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{I_x} \int_{\Omega} \left( \bar{x} - n \frac{d\bar{y}}{ds} \right) \left[ \bar{\psi} - n \left( \bar{x} \frac{d\bar{x}}{ds} + \bar{y} \frac{d\bar{y}}{ds} \right) \right] d\Omega \\ &= \frac{1}{I_x} \left\{ \int_{\mathcal{C}} t\bar{x}\omega ds + \int_{\mathcal{C}} \frac{t^3}{12} \left[ \bar{x} \frac{d\bar{x}}{ds} \frac{d\bar{y}}{ds} + \bar{y} \left( \frac{d\bar{y}}{ds} \right)^2 \right] ds \right\} \\ &\approx \frac{1}{I_x} \int_{\mathcal{C}} t\bar{x}\omega ds \end{aligned} \quad (11.100)$$

avec une erreur relative  $\mathcal{O}(t^2/a^2)$  et, de même,

$$x_T \approx -\frac{1}{I_y} \int_{\mathcal{C}} t\bar{y}\omega ds \quad (11.101)$$

Calculons à présent la constante  $K$ . On a

$$\begin{aligned} K &= \int_{\Omega} \psi^2 d\Omega \\ &= \int_{\mathcal{C}} t\omega^2 ds + \int_{\mathcal{C}} \frac{t^3}{12} \left( \bar{x} \frac{d\bar{x}}{ds} + \bar{y} \frac{d\bar{y}}{ds} \right)^2 ds \\ &\approx \int_{\mathcal{C}} t\omega^2 ds \end{aligned} \quad (11.102)$$

avec une erreur relative  $\mathcal{O}(t^2/a^2)$ . On en déduit directement

$$K_T = K - x_T^2 I_y - y_T^2 I_x$$

Il est intéressant d'évaluer la grandeur du rapport  $K/J$ . On a

$$\omega = \mathcal{O}(ra) = \mathcal{O}(a^2)$$

d'où

$$K = \mathcal{O}(ta^5)$$

et, par ailleurs

$$J = \mathcal{O}(t^3 a)$$

ce qui donne

$$\frac{K}{J} = \mathcal{O}\left(\frac{a^4}{t^2}\right)$$

si bien que la longueur fictive d'encastrement vérifie

$$z_0 = \mathcal{O}\left(a \cdot \frac{a}{t}\right) \quad (11.103)$$

Ainsi, dans une poutre à section mince, les effets de torsion non uniforme ont une profondeur de pénétration nettement plus grande que la plus grande dimension du profil, ce qui a d'ailleurs fait dire à certains auteurs que le principe de Saint-Venant ne s'applique pas à ce genre de poutres. La section rectangulaire mince fait exception à cette règle parce que, dans ce cas,  $r$  est toujours nul, de même que  $\omega$ , si bien que c'est le terme négligé dans (11.102) qui subsiste seul. Il est d'ailleurs habituel de dire que  $K \approx 0$  pour ce profil.

#### 11.13.4 Cisaillement de flexion

Tout revient à minimiser les trois intégrales définies en (11.63), qui s'écrivent ici

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_x &= \int_{\Omega} \left[ (D_s g_x)^2 + (D_n g_x)^2 - \left( \bar{x} - n \frac{d\bar{y}}{ds} \right) g_x \right] d\Omega \\ \mathcal{I}_y &= \int_{\Omega} \left[ (D_s g_y)^2 + (D_n g_y)^2 - \left( \bar{y} + n \frac{d\bar{x}}{ds} \right) g_y \right] d\Omega \\ \mathcal{I}_{\psi} &= \int_{\Omega} \left[ (D_s g_{\psi})^2 + (D_n g_{\psi})^2 - \psi_T g_{\psi} \right] d\Omega \end{aligned}$$

Dans les trois cas, le terme  $(D_n g^*)^2$ ,  $a^2/t^2$  fois plus grand que le terme  $(D_s g^*)^2$ , peut être minimisé séparément, ce qui conduit à

$$g_x \approx \bar{g}_x(s), \quad g_y \approx \bar{g}_y(s), \quad g_{\psi} \approx \bar{g}_{\psi}(s)$$

et ramène les intégrales à minimiser à

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_x &= \int_C t \left[ (D_s \bar{g}_x)^2 - \bar{x} \bar{g}_x \right] ds \\ \mathcal{I}_y &= \int_C t \left[ (D_s \bar{g}_y)^2 - \bar{y} \bar{g}_y \right] ds \\ \mathcal{I}_{\psi} &= \int_C t \left[ (D_s \bar{g}_{\psi})^2 - \bar{\psi}_T \bar{g}_{\psi} \right] ds \\ &= \int_C t \left[ (D_s \bar{g}_{\psi})^2 - (\omega - y_T \bar{x} + x_T \bar{y}) \bar{g}_{\psi} \right] ds \quad (11.104) \end{aligned}$$

Les solutions de ces trois problèmes vérifient les équations

$$\left. \begin{aligned} D_s(tD_s\bar{g}_x) + \bar{x} &= 0 \\ D_s(tD_s\bar{g}_y) + \bar{y} &= 0 \\ D_s(tD_s\bar{g}_\psi) + \omega - y_T\bar{x} + x_T\bar{y} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ dans les } \mathcal{C}_i \quad (11.105)$$

et les conditions

$$\left. \begin{aligned} T_N(tD_s\bar{g}_x) &= 0 \\ T_N(tD_s\bar{g}_y) &= 0 \\ T_N(tD_s\bar{g}_\psi) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ aux nœuds} \quad (11.106)$$

L'introduction des *flux de cisaillement*

$$S_x = tD_s\bar{g}_x = t\tau_{(x)}^f \quad (11.107)$$

$$S_y = tD_s\bar{g}_y = t\tau_{(y)}^f \quad (11.108)$$

$$S_\psi = tD_s\bar{g}_\psi = t\tau_{(\psi)}^f \quad (11.109)$$

permet de réécrire ces relations comme suit :

$$\left\{ \begin{aligned} D_s S_x + \bar{x} &= 0 \\ D_s S_y + \bar{y} &= 0 \\ D_s S_\psi + \omega - y_T\bar{x} + x_T\bar{y} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ dans les } \mathcal{C}_i, \quad \left\{ \begin{aligned} T_N(S_x) &= 0 \\ T_N(S_y) &= 0 \\ T_N(S_\psi) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ aux nœuds} \quad (11.110)$$

Il s'agit donc, dans les trois cas, de résoudre un problème de la forme

$$D_s S = \Psi \text{ dans les } \mathcal{C}_i, \quad T_N(S) = 0 \text{ aux nœuds} \quad (11.111)$$

Un tel problème n'admet de solution que si

$$\int_{\mathcal{C}} \Psi ds = 0$$

car

$$\int_{\mathcal{C}} D_s S ds = \sum_N T_N(S) = 0$$

Si cette condition est vérifiée, on obtient la fonction  $S$  comme suit (*fig.* 11.12) :

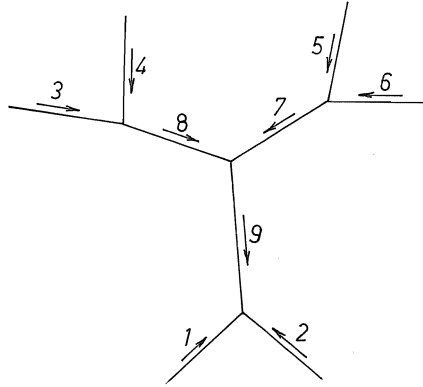


FIGURE 11.12 – Construction de la fonction  $S$

on part d'un nœud d'extrémité et on détermine

$$S = \int_0^s \Psi(\zeta) d\zeta$$

jusqu'à atteindre un nouveau nœud. On procède de même pour toutes les branches possédant un nœud d'extrémité. Il est alors possible de progresser de nœud en nœud, grâce aux relations

$$\sum S_{\text{conv}} - \sum S_{\text{div}} = 0$$

en partant d'abord des nœuds où une seule branche reste inconnue.

Dans le cas présent, on a

$$\begin{aligned} \int_C \bar{x} ds &= \int_{\Omega} x d\Omega = 0 \\ \int_C \bar{y} ds &= \int_{\Omega} y d\Omega = 0 \\ \int_C \omega ds &= \int_{\Omega} \psi d\Omega = 0 \end{aligned}$$

ce qui garantit l'existence des trois solutions. On notera que  $S_x$  et  $S_y$  ne sont autres que les *moments statiques*, en conformité avec les cours élémentaires de résistance des matériaux (formules du type  $\tau = \frac{QS}{It}$ ).

## 11.14 Caissons

Dans le cas des caissons mono- ou multicellulaires, la méthode la plus simple de calcul de la torsion uniforme est la théorie de Bredt, déjà exposée en sections 6.13.1 et 6.13.2 et sur laquelle nous ne reviendrons pas. Nous nous intéresserons cependant à la détermination du gauchissement et des flux de contrainte de cisaillement de flexion.

### 11.14.1 Détermination du gauchissement

On peut déduire le gauchissement par une voie analogue à celle que nous avons suivie pour les poutres à parois minces ouvertes. Mais ici, on peut écrire

$$\int_{\Omega} (D_s \bar{\psi} - r - 2n^2) d\Omega \approx \int_{\Omega} (D_s \bar{\psi} - r)^2 d\Omega = \int_C t (D_s \bar{\psi} - r)^2 ds \quad (11.112)$$

car la raideur de torsion est beaucoup plus grande que

$$\int_C \frac{t^3}{3} ds$$

du fait que l'on ne peut obtenir  $D_s \bar{\psi} = r$  partout. En effet, la fonction  $r$  n'est pas intégrable sur un contour fermé, du fait que

$$\int_{C_{\text{fermé}}} r ds = 2 \cdot (\text{aire du contour})$$

Au problème de la recherche de  $\bar{\psi}$  vérifiant les conditions

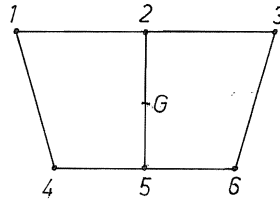


FIGURE 11.13 – Maillage du contour

$$\begin{cases} D_s(tD_s \bar{\psi}) = 0 & \text{dans les } C_i \\ T_N(tD_s \bar{\psi}) = 0 & \text{aux nœuds} \end{cases} \quad (11.113)$$

on peut donner une solution approchée par la méthode suivante (*fig.* 11.13) : on décompose le contour en un certain nombre de segments approximativement rectilignes, appelés *éléments*, et limités par des *nœuds de maillage*. Sur chaque élément,  $r$  est une constante. On y approche  $\bar{\psi}$  par une fonction affine, entièrement définie par ses valeurs aux nœuds de maillage. Ainsi, sur l'élément 1 – 2 de la figure 11.13, on écrira

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}_1 \left( 1 - \frac{s}{\ell_{12}} \right) + \bar{\psi}_2 \frac{s}{\ell_{12}}$$

en notant  $s$  la coordonnée allant de 1 vers 2, et  $\ell_{12}$  la longueur de cet élément. On a alors

$$D_s \bar{\psi} - r = \frac{\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1}{\ell_{12}} - r_{12}$$

en notant  $r_{12}$  la valeur unique de  $r$  sur l'élément 1 – 2. On en déduit

$$\begin{aligned} \int_{1-2} t(D_s \bar{\psi} - r)^2 ds &= \left( \frac{\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1}{\ell_{12}} - r_{12} \right)^2 \int_{1-2} t ds \\ &= t_{12} \ell_{12} \left[ \left( \frac{\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1}{\ell_{12}} \right)^2 - 2r_{12} \frac{\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1}{\ell_{12}} + r_{12}^2 \right] \end{aligned}$$

où  $t_{12}$  est l'épaisseur moyenne de l'élément 1 – 2. Procédant de même pour tous les éléments, on obtient une expression de la forme

$$\int_C t(D_s \bar{\psi} - r)^2 ds = \sum_{ij} K_{ij} \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j - 2 \sum_i g_i \bar{\psi}_i + \text{terme indépendant des } \bar{\psi}_i$$

dont le minimum est atteint pour

$$\sum_j K_{ij} \bar{\psi}_j = g_i$$

soit

$$Kq = g$$

en notant  $q$  le vecteur dont les éléments sont les  $\bar{\psi}_i$ . Le problème se ramène ainsi à l'inversion d'une matrice. Cependant, sa résolution se heurte à une petite difficulté technique, car la matrice  $K$  est singulière. En effet,

$$q^T Kq = \int_C t(D_s \bar{\psi})^2 ds = 0$$

pour  $q =$  vecteur constant, soit pour  $\bar{\psi}_1 = \dots = \bar{\psi}_n$ . Pour s'en sortir, il suffit de poser arbitrairement  $\bar{\psi} = 0$  en un nœud de maillage quelconque, ce qui diminue d'une unité la dimension du système matriciel et fait disparaître la singularité puisque dans ce cas

$$D_s \bar{\psi} = 0 \Rightarrow \bar{\psi} = 0 \text{ partout}$$

A la solution  $\bar{\psi}^*$  ainsi obtenue, on ajoute uniformément  $\bar{\psi}_0$  choisi de telle façon que

$$\int_C t (\bar{\psi}_0 + \bar{\psi}^*) ds = 0$$

soit

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_0 &= -\frac{1}{\Omega} \int_C t \bar{\psi}^* ds \\ &= -\frac{1}{\Omega} \sum_{\text{élts } i-j} \int_{i-j} \left[ \bar{\psi}_i^* \left(1 - \frac{s}{\ell_{ij}}\right) + \bar{\psi}_j^* \frac{s}{\ell_{ij}} \right] t ds \\ &\approx -\frac{1}{\Omega} \sum_{\text{élts } i-j} \frac{\bar{\psi}_i^* + \bar{\psi}_j^*}{2} \ell_{ij} t_{ij} \end{aligned}$$

l'égalité étant exacte si les éléments sont d'épaisseur constante. Il est alors aisé de calculer les coordonnées du centre de torsion, ainsi que toutes les grandeurs dépendant de  $\bar{\psi}$ . On notera en particulier que

$$J = \sum_{\text{élts } i-j} \left( \frac{\bar{\psi}_i - \bar{\psi}_j}{\ell_{ij}} - r_{ij} \right)^2 \ell_{ij} t_{ij}$$

Cette procédure n'est d'ailleurs rien d'autre qu'une méthode d'éléments finis.

### 11.14.2 Recherche des champs de cisaillement de flexion

La même méthode peut être appliquée pour la recherche des champs de cisaillement de flexion, en minimisant les fonctionnelle  $\mathcal{I}_x$ ,  $\mathcal{I}_y$  et  $\mathcal{I}_\psi$ , après discrétisation des fonctions  $g_x$ ,  $g_y$  et  $g_\psi$ . Celles-ci obtenues, on obtient aisément les flux de cisaillement, par des formules du type

$$S_{x_{ij}} = t_{ij} \frac{g_{x_i} - g_{x_j}}{\ell_{ij}}$$

(Les flux sont constants dans chaque élément.)



## 11.15 Exercices

**Exercice 39** Calculer la raideur de torsion d'une poutre en I à ailes en dépouille (fig. 11.14).

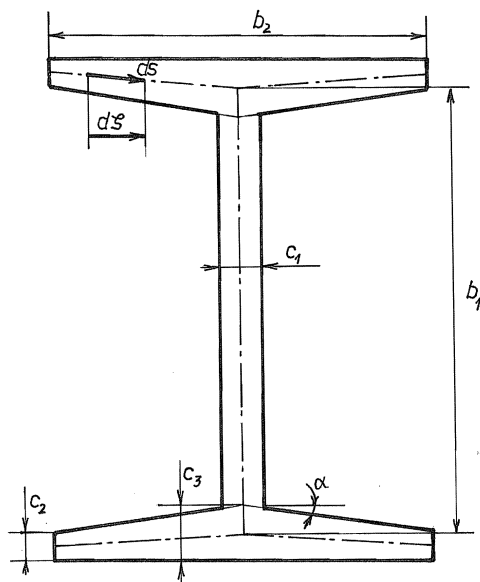


FIGURE 11.14 – Poutre en I à ailes en dépouille

*Solution* - On a

$$J = J_{\text{âme}} + 2J_{\text{semelle}}$$

avec

$$J_{\text{âme}} = \frac{1}{3} b_1 c_1^3$$

Pour la semelle supérieure, on a

$$ds = \frac{d\zeta}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

et

$$t = c_2 \left( 1 - \frac{2\zeta}{b_2} \right) + c_3 \frac{2\zeta}{b_2}$$

Posant

$$\xi = \frac{2\zeta}{b_2}, \quad d\zeta = \frac{b_2}{2} d\xi$$

on a

$$\begin{aligned} J_{\text{semelle}} &= \frac{1}{3} \frac{2}{\cos \frac{\alpha}{2}} \int_0^{b_2/2} \left[ c_2 \left( 1 - \frac{2\zeta}{b_2} \right) + c_3 \frac{2\zeta}{b_2} \right]^3 d\zeta \\ &= \frac{1}{3} \frac{b_2}{\cos \frac{\alpha}{2}} \int_0^1 [c_2(1-\xi) + c_3\xi]^3 d\xi \\ &= \frac{1}{3} \frac{b_2}{\cos \frac{\alpha}{2}} \left\{ c_2^3 \int_0^1 (1-\xi)^3 d\xi + 3c_2^2 c_3 \int_0^1 (1-\xi)^2 \xi d\xi \right. \\ &\quad \left. + 3c_2 c_3^2 \int_0^1 (1-\xi) \xi^2 d\xi + c_3^3 \int_0^1 \xi^3 d\xi \right\} \end{aligned}$$

Tenant compte du fait que

$$\int_0^1 \xi^m (1-\xi)^n d\xi = B(m+1, n+1) = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-\xi)^3 d\xi &= \int_0^1 \xi^3 d\xi = \frac{3!0!}{4!} = \frac{1}{4} \\ \int_0^1 (1-\xi)^2 \xi d\xi &= \int_0^1 \xi^2 (1-\xi) d\xi = \frac{2!1!}{4!} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} J_{\text{semelle}} &= \frac{1}{3} \frac{b_2}{4 \cos \frac{\alpha}{2}} (c_2^3 + 3c_2^2 c_3 + c_2 c_3^2 + c_3^3) \\ &= \frac{1}{3} \frac{b_2}{4 \cos \frac{\alpha}{2}} (c_2 + c_3)(c_2^2 + c_3^2) \end{aligned}$$

si bien que

$$J = \frac{1}{3} b_1 c_1^3 + \frac{2}{3} \frac{b_2}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{4} (c_2 + c_3)(c_2^2 + c_3^2)$$

Dans la plupart des cas, on peut confondre  $\cos \frac{\alpha}{2}$  avec l'unité, ce qui donne

$$J \approx \frac{1}{3} b_1 c_1^3 + \frac{2}{3} b_2 \cdot \frac{1}{4} (c_2 + c_3)(c_2^2 + c_3^2)$$

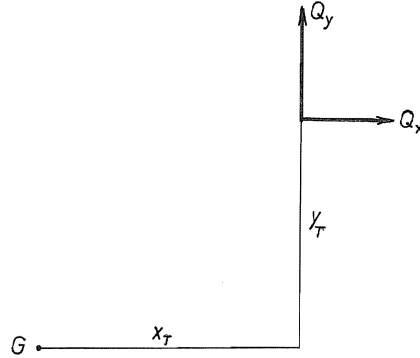


FIGURE 11.15 – Résultante des contraintes de cisaillement

**Exercice 40** Montrer que la résultante  $(Q_x, Q_y)$  des contraintes de cisaillement de flexion passe par le centre de torsion.

*Solution* - Il suffit de montrer (fig. 11.15) que

$$M_t(\tau^f) = -Q_x y_T + Q_y x_T$$

Or,

$$M_t(\tau^f) = \int_{\Omega} \left[ x D_2 \left( \frac{Q_x}{I_x} g_x + \frac{Q_y}{I_y} g_y \right) - y D_1 \left( \frac{Q_x}{I_x} g_x + \frac{Q_y}{I_y} g_y \right) \right] d\Omega$$

Notant que

$$\int_{\Omega} \left[ (D_1 \psi - y) D_1 \left( \frac{Q_x}{I_x} g_x + \frac{Q_y}{I_y} g_y \right) + (D_2 \psi + x) D_2 \left( \frac{Q_x}{I_x} g_x + \frac{Q_y}{I_y} g_y \right) \right] d\Omega = 0$$

on a encore

$$\begin{aligned} M_t(\tau^f) &= - \int_{\Omega} \left[ D_1 \psi D_1 \left( \frac{Q_x}{I_x} g_x + \frac{Q_y}{I_y} g_y \right) + D_2 \psi D_2 \left( \frac{Q_x}{I_x} g_x + \frac{Q_y}{I_y} g_y \right) \right] d\Omega \\ &= - \int_{\partial\Omega} \psi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{Q_x}{I_x} g_x + \frac{Q_y}{I_y} g_y \right) ds + \int_{\Omega} \psi \nabla^2 \left( \frac{Q_x}{I_x} g_x + \frac{Q_y}{I_y} g_y \right) d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \psi \left( \frac{Q_x}{I_x} x + \frac{Q_y}{I_y} y \right) d\Omega \\ &= -Q_x y_T + Q_y x_T \end{aligned}$$

**Exercice 41** *A partir de l'exercice précédent, montrer que le centre de torsion d'une section composée de parois minces rectilignes convergeant en un point se trouve en ce point de concours (fig. 11.16).*

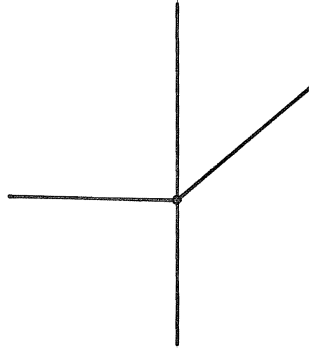


FIGURE 11.16 – Poutre à parois minces convergeant en un point

*Solution* - Les efforts tranchants partiels des parois rectilignes ont la direction de ces parois, donc leur résultante passe par leur intersection.

**Exercice 42** *Définissant, à partir d'un point quelconque de la section d'une poutre, la fonction*

$$\psi_A = \psi - y_A x + x_A y$$

où  $\psi$  est le gauchissement de torsion, on considère la grandeur

$$K(A) = \int_{\Omega} \psi_A^2 d\Omega$$

1. *Quelle fonctionnelle est minimisée par  $\psi_A$  ?*
2. *Montrer que  $K(A)$  admet un minimum lorsque  $A$  est le centre de torsion et que ce minimum est précisément  $K_T$ .*
3. *En déduire que le centre de torsion d'un profil composé de segments rectilignes concurrents est le point d'intersection de ces segments.*

*Solution*

1. On a

$$\psi = \psi_A + y_A x - x_A y$$

d'où

$$D_1\psi = D_1\psi_A + y_A, \quad D_2\psi = D_2\psi_A - x_A, \quad \delta\psi = \delta\psi_A$$

et, par conséquent,

$$J = \inf_{\psi} \int_{\Omega} [(\psi_A - y + y_A)^2 + (\psi_A + x - x_A)^2] d\Omega$$

2. On a évidemment

$$\begin{aligned} K(A) &= \int_{\Omega} (\psi - y_A x + x_A y)^2 d\Omega \\ &= K + y_A^2 I_x + x_A^2 I_y - 2y_A \int_{\Omega} x\psi d\Omega + 2x_A \int_{\Omega} y\psi d\Omega \\ &= K + y_A^2 I_x + x_A^2 I_y - 2y_A I_x y_T - 2x_A I_y x_T \end{aligned}$$

et cette expression est minimale pour

$$y_A = y_T, \quad x_A = x_T$$

Elle vaut alors

$$K(T) = K - y_T^2 I_x - x_T^2 I_y = K_T$$

3. Lorsque  $A$  est le point de concours (*fig.* 11.17), on a sur chaque segment

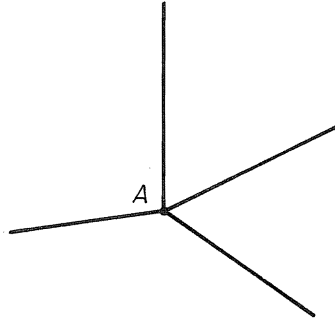


FIGURE 11.17 –  $A$  est le point de concours des parois

$$r_A = (\bar{y} - y_A) \frac{d\bar{x}}{ds} - (\bar{x} - x_A) \frac{d\bar{y}}{ds}$$

d'où

$$\omega_A = 0, \quad K_A = 0$$

Pour tout autre point  $B$ ,  $\omega_B \neq 0$ ,  $K_B > 0$ . Donc  $A$  est le centre de torsion.

**Exercice 43** Calculant, à partir d'un point quelconque  $(x_A, y_A)$ , la fonction  $\psi_A$  minimisant

$$\int_{\Omega} [(\psi_A - y + y_A)^2 + (\psi_A + x - x_A)^2] d\Omega,$$

montrer que

$$y_T - y_A = \frac{1}{I_x} \int_{\Omega} x\psi_A d\Omega, \quad x_T - x_A = -\frac{1}{I_y} \int_{\Omega} y\psi_A d\Omega$$

En déduire la position du centre de torsion d'une poutre en  $U$ .

*Solution* - On a en effet

$$\psi = \psi_A + y_A x - x_A y$$

d'où

$$\begin{aligned} y_T &= \frac{1}{I_x} \int_{\Omega} x(\psi_A + y_A x - x_A y) d\Omega = \frac{1}{I_x} \int_{\Omega} x\psi_A d\Omega + y_A \\ x_T &= -\frac{1}{I_y} \int_{\Omega} y(\psi_A + y_A x - x_A y) d\Omega = -\frac{1}{I_y} \int_{\Omega} y\psi_A d\Omega + x_A \end{aligned}$$

Pour la poutre en  $U$  (fig. 11.18), en partant du point  $O$ , centre de l'âme, on a visiblement

$$r_{A_{12}} = \frac{h}{2}, \quad r_{A_{34}} = -\frac{h}{2}, \quad r_{A_{23}} = 0$$

d'où

$$\omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \omega_1 = -\frac{bht}{2}, \quad \omega_4 = \frac{bht}{2}$$

et

$$x_T = -\frac{1}{I_y} \left( -\frac{b^2 h^2 t}{8} - \frac{b^2 h^2 t}{8} \right) = \frac{b^2 h^2 t}{4I_y}$$

Quant à  $y_T$ , il est nul par symétrie.

**Exercice 44** Est-il possible de provoquer la torsion d'un poutre en sollicitant sa section finale par des contraintes  $\sigma_{33}$  ?

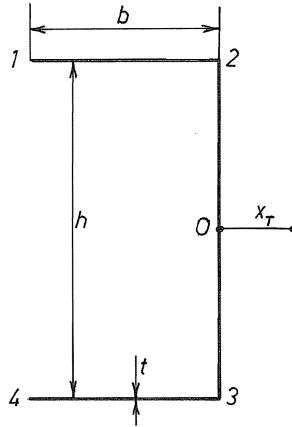


FIGURE 11.18 – Poutre en U

*Réponse* - Il suffit pour cela d'appliquer des contraintes  $\sigma_{33}$  telles que

$$\begin{aligned}
 N &= \int_{\Omega} \sigma_{33} d\Omega = 0 \\
 M_x &= \int_{\Omega} \sigma_{33} x d\Omega = 0 \\
 M_y &= \int_{\Omega} \sigma_{33} y d\Omega = 0 \\
 B_T &= \int_{\Omega} \sigma_{33} \Psi_T d\Omega \neq 0
 \end{aligned}$$

La figure 11.19 illustre un tel système de charges pour une poutre en I.

**Exercice 45** Comparer la raideur de torsion d'un tube de rayon  $R$  et d'épaisseur  $t$  à celle du même tube fendu longitudinalement, pour  $R = 25\text{mm}$ ,  $t = 1\text{mm}$ .

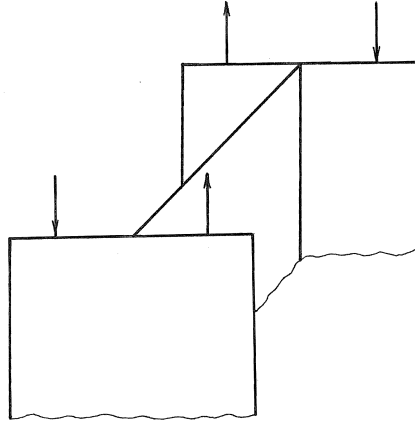


FIGURE 11.19 – Système de contraintes normales provoquant la torsion

*Solution -*

$$\begin{aligned}
 J_{\text{non fendu}} &= 2\pi R^3 t \\
 J_{\text{fendu}} &= 2\pi R \frac{t^3}{3} \\
 \frac{J_{\text{non fendu}}}{J_{\text{fendu}}} &= 3 \left( \frac{R}{t} \right)^2 = 3 \cdot 625 = 1875
 \end{aligned}$$

On notera que ce rapport est considérable!



# Chapitre 12

## Flexion des plaques

### 12.1 Introduction

La théorie des plaques traite de la flexion des corps plans dont l'épaisseur est faible devant les deux autres dimensions.

### 12.2 Description de la plaque et évaluation des ordres de grandeur

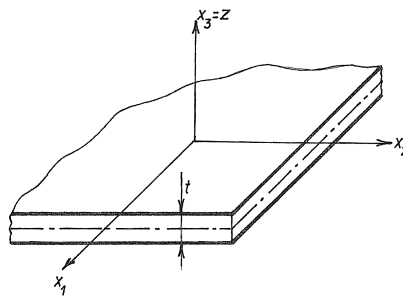


FIGURE 12.1 – Plaque

Pour décrire la géométrie de la plaque, on repère les points du feuillet moyen

par deux coordonnées  $x_1$  et  $x_2$ , parcourant une surface  $S$ . Un point quelconque de la plaque a la forme  $(x_1, x_2, z)$ ,  $z$  variant de  $-t/2$  à  $t/2$  (*fig. 12.1*). Par convention, nous écrirons  $x_\alpha$  l'une quelconque des coordonnées  $x_1$  ou  $x_2$ . La coordonnée  $x_3 = z$  est toujours soigneusement distinguée des deux autres.

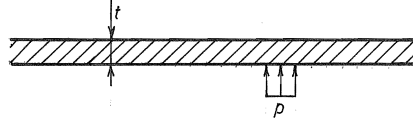


FIGURE 12.2 – Sollicitation par pression

Un cas typique de sollicitation de plaque est celui où une pression  $p$  agit sur une des deux faces de la plaque (*fig. 12.2*). Dans ce cas, la contrainte  $\sigma_{33}$  prend la valeur  $-p$  sur la face comprimée et s'annule sur l'autre face. Notant  $S_3$  l'ordre de grandeur de  $\sigma_{33}$  et  $P$  celui de la pression, on aura donc

$$S_3 = P, \quad D_3\sigma_{33} = \mathcal{O}\left(\frac{P}{t}\right) \quad (12.1)$$

A partir de l'équation d'équilibre

$$D_\alpha\sigma_{\alpha 3} + D_3\sigma_{33} = 0$$

on tire, en notant  $T$  l'ordre de grandeur des contraintes  $\sigma_{\alpha 3}$  et  $\lambda$  leur longueur d'onde définie par

$$D_\alpha\sigma_{\alpha 3} = \mathcal{O}\left(\frac{T}{\lambda}\right)$$

la relation

$$\frac{T}{\lambda} = \frac{S_3}{t}$$

c'est-à-dire

$$T = S_3 \frac{\lambda}{t} = P \frac{\lambda}{t} \quad (12.2)$$

On peut s'attendre à ce que les contraintes  $\sigma_{\alpha\beta}$  varient de leur ordre de grandeur sur une distance du même ordre de grandeur  $\lambda$ ; d'autre part, les contraintes tangentielles sont nulles sur les deux faces de la plaque, ce qui implique

$$D_3\sigma_{\alpha 3} = \mathcal{O}\left(\frac{T}{t}\right)$$

De l'équation d'équilibre

$$D_\beta \sigma_{\beta\alpha} + D_3 \sigma_{\alpha 3} = 0 \quad (12.3)$$

on déduit donc, en notant  $S_\alpha$  l'ordre de grandeur des contraintes  $\sigma_{\alpha\beta}$ ,

$$\frac{S_\alpha}{\lambda} = \frac{T}{t}$$

soit

$$S_\alpha = T \frac{\lambda}{t} = S_3 \left( \frac{\lambda}{t} \right)^2 = P \left( \frac{\lambda}{t} \right)^2 \quad (12.4)$$

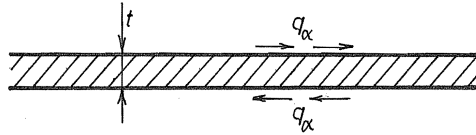


FIGURE 12.3 – Sollicitation par efforts tangentiels

Un autre type de mise en charge en flexion consiste à imposer des efforts tangentiels opposés sur les deux faces (*fig.* 12.3). Dans ce cas, on a

$$\sigma_{\alpha 3}(\pm \frac{t}{2}) = q_\alpha = \mathcal{O}(Q)$$

et on s'attend à ce que les  $\sigma_{\alpha 3}$  soient des fonctions paires de  $z$ . Alors, comme

$$D_3 \sigma_{33} = -D_\alpha \sigma_{\alpha 3}$$

$\sigma_{33}$  sera impaire de  $z$ . Or, cette contrainte doit s'annuler en  $\pm t/2$ . Il en résulte que

$$D_3 \sigma_{33} = \mathcal{O}(S_3/t)$$

On en déduit

$$D_\beta \sigma_{\beta\alpha} = \mathcal{O}\left(\frac{T}{\lambda}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{S_3}{t}\right)$$

d'où

$$S_3 = T \frac{t}{\lambda}$$

Enfin, on déduit à nouveau de l'équation (12.3) que

$$S_\alpha = T \frac{\lambda}{t}$$

On constate que dans les deux cas,

$$\begin{cases} T &= S_\alpha \frac{t}{\lambda} \\ S_3 &= S_\alpha \left(\frac{t}{\lambda}\right)^2 \end{cases} \quad (12.5)$$

Dès lors, si l'on restreint l'analyse aux effets à une distance grande devant l'épaisseur, ce qui revient à admettre que  $\lambda$  est grand devant  $t$ , on obtient que les contraintes de cisaillement  $\sigma_{\alpha 3}$  sont  $t/\lambda$  plus petites que les contraintes d'extension  $\sigma_{\alpha\beta}$  et la contrainte  $\sigma_{33}$ ,  $(t/\lambda)^2$  fois plus petite que les  $\sigma_{\alpha\beta}$ . En admettant une erreur de l'ordre de  $(t/\lambda)^2$  sur les contraintes, on peut donc poser  $\sigma_{33} \approx 0$ , ce qui ramène à un *état plan de contrainte*.

### 12.3 Structure des contraintes $\sigma_{\alpha\beta}$

La symétrie gauche en  $z$  des problèmes de flexion mène à écrire les contraintes  $\sigma_{\alpha\beta}$  comme des fonctions impaires de  $z$ , que nous développerons en série de Taylor :

$$\sigma_{\alpha\beta} = zA_{\alpha\beta}(x_1, x_2) + \frac{z^3}{3}B_{\alpha\beta}(x_1, x_2) + \dots \quad (12.6)$$

Il en découle en particulier

$$D_{33}\sigma_{\alpha\beta} = zB_{\alpha\beta} + \dots \quad (12.7)$$

Nous allons montrer que ces derniers termes doivent être négligeables. En effet, une des équations de compatibilité de Beltrami-Michell s'écrit

$$D_{\gamma\gamma}\sigma_{\alpha\beta} + D_{33}\sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{1+\nu}D_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\gamma} + \frac{1}{1+\nu}D_{\alpha\beta}\sigma_{33} = 0$$

Eu égard aux ordres de grandeur obtenus ci-dessus, on a à priori

$$\begin{aligned} D_{\gamma\gamma}\sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{1+\nu}D_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\gamma} &= \mathcal{O}\left(\frac{S_\alpha}{\lambda^2}\right) \\ D_{\alpha\beta}\sigma_{33} &= \mathcal{O}\left(\frac{S_3}{\lambda^2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{S_\alpha t^2}{\lambda^2 \lambda^2}\right) \end{aligned}$$

ce qui donne, à  $t^2/\lambda^2$  près,

$$D_{33}\sigma_{\alpha\beta} = \mathcal{O}\left(\frac{S_\alpha}{\lambda^2}\right)$$

L'introduction de ce résultat dans (12.6) et (12.7) donne

$$\sigma_{\alpha\beta} - zA_{\alpha\beta} = \mathcal{O}\left(S_{\alpha} \frac{t^2}{\lambda^2}\right)$$

Ainsi, l'erreur commise en limitant l'expression des contraintes  $\sigma_{\alpha\beta}$  au seul terme linéaire en  $z$  est du même ordre que celle qui provient de l'hypothèse d'un état plan de contrainte. Nous écrivons donc à juste titre

$$\sigma_{\alpha\beta} = zA_{\alpha\beta} \quad (12.8)$$

Il est d'usage d'utiliser d'autres grandeurs que les variables  $A_{\alpha\beta}$ , à savoir les *moments*

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-t/2}^{t/2} z\sigma_{\alpha\beta} dz = A_{\alpha\beta} \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz = A_{\alpha\beta} \frac{t^3}{12} \quad (12.9)$$

En fonctions de ceux-ci, on a donc

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{12z}{t^3} M_{\alpha\beta} \quad (12.10)$$

Traditionnellement, on appelle  $M_{11}$  et  $M_{22}$  *moments de flexion* et  $M_{12}$ , *moment de torsion*. Ils sont représentés en figure 12.4.

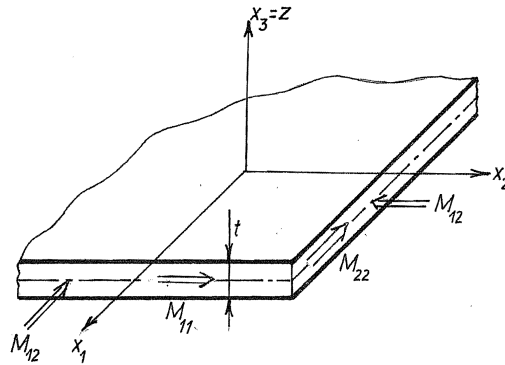


FIGURE 12.4 – Représentation des moments

## 12.4 Application du principe de Hellinger-Reissner

Tenant compte de l'hypothèse d'état plan de contrainte, le principe de Hellinger-Reissner d'écrit

$$\int_S \left\{ \int_{-t/2}^{t/2} \left[ \sigma_{\alpha\beta} \frac{1}{2} (D_\alpha u_\beta + D_\beta u_\alpha) + \sigma_{\alpha 3} (D_\alpha u_3 + D_3 u_\alpha) - \Phi(\sigma) \right] dz \right\} dS + \mathcal{P}(u) \text{ stationnaire} \quad (12.11)$$

en notant  $\mathcal{P}(u)$  l'énergie potentielle des charges. Dans le cas d'un corps isotrope, on a

$$\Phi(\sigma) = \frac{1+\nu}{2E} \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{2E} \sigma_{\alpha\alpha} \sigma_{\beta\beta} + \frac{1}{2G} \sigma_{\alpha 3} \sigma_{\alpha 3} \quad (12.12)$$

Pour les contraintes  $\sigma_{\alpha\beta}$ , nous appliquerons le résultat de structure linéaire en  $z$ ; par contre, nous ne ferons pas d'hypothèses particulières sur les contraintes  $\sigma_{\alpha 3}$ , ni sur les déplacements. On a d'abord

$$\begin{aligned} \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\alpha\beta} \frac{1}{2} (D_\alpha u_\beta + D_\beta u_\alpha) dz &= \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} \int_{-t/2}^{t/2} \frac{12}{t^3} z (D_\alpha u_\beta + D_\beta u_\alpha) dz \\ &= \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} \left\{ D_\alpha \left( \int_{-t/2}^{t/2} \frac{12z}{t^3} u_\beta dz \right) + D_\beta \left( \int_{-t/2}^{t/2} \frac{12z}{t^3} u_\alpha dz \right) \right\} \end{aligned}$$

ce qui suggère d'introduire les *rotations moyennes*

$$\varphi_\alpha = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{12z}{t^3} u_\alpha dz \quad (12.13)$$

Pour justifier cette appellation, notons d'abord que si les déplacements étaient linéaires en  $z$ , c'est-à-dire de la forme  $u_\alpha = z\psi_\alpha$ , on aurait bien

$$\varphi_\alpha = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{12}{t^3} z^2 \psi_\alpha dz = \psi_\alpha$$

De plus, comme

$$z = -D_3 \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right)$$

une simple intégration par parties fournit

$$\varphi_\alpha = \underbrace{\left[ -\frac{12}{t^3} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) u_\alpha \right]_{-t/2}^{t/2}}_0 + \frac{12}{t^3} \int_{-t/2}^{t/2} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) D_3 u_\alpha dz \quad (12.14)$$

ce qui fait effectivement apparaître  $\varphi_\alpha$  comme une moyenne pondérée de la pente  $D_3 u_\alpha$  puisque

$$\frac{12}{t^3} \int_{-t/2}^{t/2} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) dz = \frac{12}{t^3} \left( \frac{t^3}{8} - \frac{t^3}{24} \right) = 1 \quad (12.15)$$

A l'aide de ces rotations moyennes, on peut donc écrire

$$\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\alpha\beta} \frac{1}{2} (D_\alpha u_\beta + D_\beta u_\alpha) dz = M_{\alpha\beta} \frac{1}{2} (D_\alpha \varphi_\beta + D_\beta \varphi_\alpha) \quad (12.16)$$

Par ailleurs, on calcule aisément

$$\int_{-t/2}^{t/2} \left( \frac{1+\nu}{2E} \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{2E} \sigma_{\alpha\alpha} \sigma_{\beta\beta} \right) dz = \frac{12}{t^3} \left\{ \frac{1+\nu}{2E} M_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{2E} M_{\alpha\alpha} M_{\beta\beta} \right\} \quad (12.17)$$

Pour pouvoir traiter d'une manière analogue les autres termes de la fonctionnelle (12.11), il nous faut recourir aux équations d'équilibre qui résultent, comme on sait, de la variation des déplacements  $u_\alpha$ . On obtient, pour autant que  $\mathcal{P}(\delta u_\alpha) = 0$ , les équations d'équilibre intérieur

$$D_\beta \sigma_{\alpha\beta} + D_3 \sigma_{\alpha 3} = 0$$

Les conditions de contour seront traitées plus loin. On déduit de la structure de  $\sigma_{\alpha\beta}$

$$D_3 \sigma_{\alpha 3} = -\frac{12z}{t^3} D_\beta M_{\alpha\beta}$$

et, tenant compte de la nullité des contraintes de cisaillement sur les deux faces de la plaque,

$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{12}{t^3} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) D_\beta M_{\alpha\beta}$$

L'intégration de ces relations sur l'épaisseur fournit les *efforts tranchants*

$$Q_\alpha = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\alpha 3} dz = D_\beta M_{\alpha\beta} \quad (12.18)$$

en vertu de (12.15). La relation inverse s'écrit

$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{12}{t^3} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) Q_\alpha \quad (12.19)$$

A partir de ce résultat, on peut calculer

$$\begin{aligned} \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\alpha 3}(D_\alpha u_3 + D_3 u_\alpha) dz &= Q_\alpha \frac{12}{t^3} \int_{-t/2}^{t/2} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) (D_\alpha u_3 + D_3 u_\alpha) dz \\ &= Q_\alpha \left\{ D_\alpha \left[ \frac{12}{t^3} \int_{-t/2}^{t/2} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) u_3 dz \right] + \frac{12}{t^3} \int_{-t/2}^{t/2} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) D_3 u_\alpha dz \right\} \end{aligned}$$

On retrouve dans le second terme la rotation moyenne  $\varphi_\alpha$ ; quant au premier, il s'interprète comme la dérivée par rapport à  $x_\alpha$  d'un *déplacement transversal moyen*

$$w = \frac{12}{t^3} \int_{-t/2}^{t/2} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) u_3 dz \quad (12.20)$$

ce qui permet d'écrire finalement

$$\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\alpha 3}(D_\alpha u_3 + D_3 u_\alpha) dz = Q_\alpha (\varphi_\alpha + D_\alpha w) \quad (12.21)$$

Il reste à calculer le terme

$$\begin{aligned} \int_{-t/2}^{t/2} \frac{\sigma_{\alpha 3} \sigma_{\alpha 3}}{2G} dz &= \frac{1}{2G} \frac{144}{t^6} Q_\alpha Q_\alpha \int_{-t/2}^{t/2} \left( \frac{t^4}{64} - \frac{t^2 z^2}{8} + \frac{z^4}{4} \right) dz \\ &= \frac{1}{2G} \frac{144}{t^6} Q_\alpha Q_\alpha \frac{t^5}{120} \\ &= \frac{1}{2G} \frac{Q_\alpha Q_\alpha}{5t/6} \end{aligned} \quad (12.22)$$

Ayant pris pour point de départ une structure particulière des contraintes, nous avons par le fait même restreint les charges qu'il est possible de prendre en compte. Pour préciser celles-ci, il faut examiner les conditions d'équilibre. Ainsi, par exemple, en posant à priori  $\sigma_{\alpha 3} = 0$  en  $z = \pm t/2$ , nous avons implicitement éliminé la cas d'une mise en charge par des efforts tangentiels opposés sur les deux faces, du reste moins important en pratique. Les seules charges possibles découlent de l'équation d'équilibre selon  $z$ , qui s'écrit

$$D_\alpha \sigma_{\alpha 3} + f_3 = 0$$

$f_3$  étant une charge de volume verticale. Cette charge a d'ailleurs une structure en  $z$  déterminée :

$$f_3 = -\frac{12}{t^3} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) D_\alpha Q_\alpha$$



Sa résultante

$$p = \int_{-t/2}^{t/2} f_3 dz = -D_\alpha Q_\alpha \tag{12.23}$$

doit être considérée comme une représentation « équivalente » d'une éventuelle charge de pression. Cette approximation est nécessitée par l'hypothèse d'état plan de contrainte. On notera que l'on a exactement

$$\int_{-t/2}^{t/2} f_3 u_3 dz = pw \tag{12.24}$$

Examinons enfin les conditions qu'il est possible d'imposer sur la partie  $\partial S_2$  du contour où l'on impose les efforts. Si  $n_\alpha$  sont les composantes de la normale au contour, les tractions de surface imposées  $\bar{T}_\alpha$  doivent avoir la même structure que les contraintes pour vérifier la condition d'équilibre local :

$$\bar{T}_\alpha = n_\beta \sigma_{\beta\alpha} = \frac{12z}{t^3} n_\beta M_{\beta\alpha}$$

Après multiplication par  $z$  et intégration, cela donne

$$n_\beta M_{\alpha\beta} = \int_{-t/2}^{t/2} z \bar{T}_\alpha dz = \bar{M}_{n\alpha}$$

Pour les tractions de surface  $\bar{T}_3$ , on devra avoir

$$\bar{T}_3 = n_\beta \sigma_{\beta 3} = \frac{12}{t^3} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) n_\beta Q_\beta$$

Intégrant sur  $z$ , on obtient

$$n_\beta Q_\beta = \int_{-t/2}^{t/2} \bar{T}_3 dz = \bar{Q}_n$$

On vérifie sans peine qu'à l'aide de ces résultantes et moments, le travail virtuel des tractions de surface s'écrit

$$\int_{\partial S_2} (\bar{M}_{n\alpha} \delta\varphi_\alpha + \bar{Q}_n \delta w) ds$$

Adoptant sur  $\partial S_2$  le système d'axes curvilignes défini par la normale et la

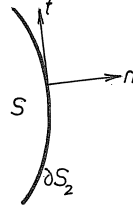


FIGURE 12.5 – Normale et tangente sur le contour

tangente au contour parcouru dans le sens laissant l'aire à gauche (fig. 12.5), on peut écrire

$$\delta\varphi_\alpha = (\delta\varphi_\beta n_\beta)n_\alpha + (\delta\varphi_\beta t_\beta)t_\alpha = \delta\varphi_n n_\alpha + \delta\varphi_t t_\alpha$$

où  $\delta\varphi_n$  est la rotation normale et  $\delta\varphi_t$ , la rotation tangentielle. Il en découle que

$$\bar{M}_{n\alpha}\delta\varphi_\alpha = n_\alpha\bar{M}_{n\alpha}\delta\varphi_n + t_\alpha\bar{M}_{n\alpha}\delta\varphi_t = \bar{M}_n\delta\varphi_n + \bar{M}_{nt}\delta\varphi_t$$

où s'introduisent le *moment de flexion de contour*

$$\bar{M}_n = n_\alpha\bar{M}_{n\alpha} \quad (12.25)$$

pour lequel l'équilibre s'écrit

$$M_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta = \bar{M}_n \quad (12.26)$$

et le *moment de torsion de contour*

$$\bar{M}_{nt} = t_\alpha\bar{M}_{n\alpha} \quad (12.27)$$

pour lequel la condition d'équilibre est

$$M_{\alpha\beta}n_\alpha t_\beta = \bar{M}_{nt} \quad (12.28)$$

Ils permettent d'écrire le travail virtuel des tractions de surface sous la forme

$$\int_{\partial S_2} (\bar{M}_n\delta\varphi_n + \bar{M}_{nt}\delta\varphi_t + \bar{Q}_n\delta w)ds \quad (12.29)$$

Ces effort et moments sont représentés en figure 12.6.

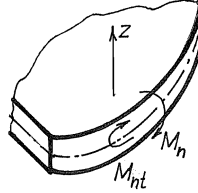


FIGURE 12.6 – Moment normal et moment de torsion sur le bord

## 12.5 Équations générales des plaques

En rassemblant les résultats acquis jusqu'ici, on peut donner au principe de Hellinger-Reissner la forme bidimensionnelle

$$\delta \left\{ \int_S \left[ M_{\alpha\beta} \frac{1}{2} (D_\alpha \varphi_\beta + D_\beta \varphi_\alpha) + Q_\alpha (\varphi_\alpha + D_\alpha w) - \frac{12}{t^3} ((1 + \nu) M_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} - \nu M_{\alpha\alpha} M_{\beta\beta}) - \frac{1}{2nGt} Q_\alpha Q_\alpha - pw \right] dS - \int_{\partial S_2} (\bar{M}_n \varphi_n + \bar{M}_{nt} \varphi_t + \bar{Q}_n w) ds \right\} = 0 \quad (12.30)$$

où nous avons écrit  $n$  à la place de  $5/6$  pour des raisons qui apparaîtront dans la suite.

La variation des  $\varphi_\alpha$  dans ce principe conduit aux équations d'équilibre des moments

$$D_\beta M_{\beta\alpha} = Q_\alpha \text{ dans } S \quad (12.31)$$

$$M_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = \bar{M}_n \text{ et } M_{\alpha\beta} n_\alpha t_\beta = \bar{M}_{nt} \text{ sur } \partial S_2 \quad (12.32)$$

La variation de  $w$  fournit

$$D_\alpha Q_\alpha + \bar{p} = 0 \text{ dans } S \quad (12.33)$$

$$n_\alpha Q_\alpha = \bar{Q}_n \text{ sur } \partial S_2 \quad (12.34)$$

Variant les moments, on obtient les relations moments-courbures :

$$\frac{1}{2} (D_\alpha \varphi_\beta + D_\beta \varphi_\alpha) = \frac{12}{Et^3} [(1 + \nu) M_{\alpha\beta} - \nu M_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}]$$

Il est d'usage de noter  $\chi_{\alpha\beta}$  les courbures

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(D_\alpha\varphi_\beta + D_\beta\varphi_\alpha) \quad (12.35)$$

En particulier, on appelle *torsion* la grandeur  $(2\chi_{12})$ . La résolution de ces équations, de manière à expliciter les moments, fournit

$$M_{\alpha\beta} = D[(1-\nu)\chi_{\alpha\beta} + \nu\chi_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}] \quad (12.36)$$

où l'on a introduit la *raideur de plaque*

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (12.37)$$

Enfin, la variation des efforts tranchants mène à l'équation

$$Q_\alpha = nGt(\varphi_\alpha + D_\alpha w) = nGt\gamma_\alpha \quad (12.38)$$

en notant

$$\gamma_\alpha = \varphi_\alpha + D_\alpha w \quad (12.39)$$

L'énergie complémentaire de déformation s'écrit

$$\Psi = \int_S \left\{ \frac{12}{Et^3} [(1+\nu)M_{\alpha\beta}M_{\alpha\beta} - \nu M_{\alpha\alpha}M_{\beta\beta}] + \frac{1}{2nGt} Q_\alpha Q_\alpha \right\} dS \quad (12.40)$$

L'énergie de déformation s'en déduit en y remplaçant les valeurs de  $M_{\alpha\beta}$  et de  $Q_\alpha$  obtenues en (12.36) et (12.38). Il vient

$$\mathcal{U} = \int_S \left\{ \frac{D}{2} [(1-\nu)\chi_{\alpha\beta}\chi_{\alpha\beta} + \nu\chi_{\alpha\alpha}\chi_{\beta\beta}] + \frac{nGt}{2}\gamma_\alpha\gamma_\alpha \right\} dS$$

soit explicitement,

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \int_S \left\{ \frac{D}{2} [(1-\nu)(\chi_{11}^2 + \chi_{22}^2 + 2\chi_{12}^2) + \nu(\chi_{11}^2 + \chi_{22}^2 + 2\chi_{11}\chi_{22})] \right. \\ &\quad \left. + \frac{nGt}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \right\} dS \\ &= \int_S \left\{ \frac{D}{2} [\chi_{11}^2 + \chi_{22}^2 + 2\chi_{11}\chi_{22} + 2(1-\nu)(\chi_{12}^2 - \chi_{11}\chi_{22})] + \frac{nGt}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \right\} dS \end{aligned} \quad (12.41)$$

## 12.6 Autres types d'hypothèses

La théorie ci-dessus est due à Reissner [72, 73]. Une autre approche, développée par Hencky [43], consiste à poser  $\sigma_{33} = 0$  comme ci-dessus, puis à profiter du relâchement de la compatibilité en  $z$  que cette hypothèse entraîne dans un cadre variationnel, pour poser  $u_3 = w(x, y)$ ; on y ajoute une structure linéaire des déplacements  $u_\alpha$  :

$$u_\alpha = z\varphi_\alpha \quad (12.42)$$

Le développement de cette théorie mène à des expressions semblables aux précédentes, sauf à donner à  $n$  la valeur 1 au lieu de  $5/6$ , ce qui manifeste le supplément de raideur d'une théorie cinématiquement admissible (dans le cadre  $\sigma_{33} = 0$ ) par rapport à la théorie de Reissner, qui est statiquement admissible. Par ailleurs, il n'y a pas, dans cette théorie, de restrictions sur la forme de la mise en charge.

## 12.7 L'hypothèse de Kirchhoff

Une simplification supplémentaire, introduite pour la première fois par Kirchhoff [48, 52], consiste à négliger la déformation due à l'effort tranchant. On notera en effet que l'équation d'équilibre

$$Q_\alpha = D_\beta M_{\beta\alpha}$$

entraîne la relation

$$Q = \frac{M}{\lambda} \quad (12.43)$$

entre l'ordre de grandeur  $Q$  des efforts tranchants et l'ordre de grandeur  $M$  des moments. Les courbures sont de l'ordre de  $\varphi/\lambda$ , en appelant  $\varphi$  l'ordre de grandeur des rotations, si bien que, par les équations moments-courbures,

$$M = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\varphi}{\lambda} \quad (12.44)$$

Par ailleurs, l'ordre de grandeur  $Q$  des efforts tranchants est lié à l'ordre de grandeur  $\gamma$  des glissements  $\gamma_{\alpha 3}$  par la relation

$$Q = nGt\gamma \quad (12.45)$$

On obtient donc

$$\frac{Q}{M} = \frac{1}{\lambda} = \frac{nGt\lambda}{Et^3} 12(1-\nu^2) \frac{\gamma}{\varphi}$$

ce qui entraîne

$$\frac{\gamma}{\varphi} = \frac{E}{12(1-\nu^2)nG} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^2$$

c'est-à-dire

$$\varphi_\alpha = -D_\alpha w + \mathcal{O} \left[ \frac{E}{12(1-\nu^2)nG} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^2 \varphi \right] \quad (12.46)$$

Pour une plaque homogène en  $z$ , de coefficient de Poisson égal à 0,3, on a

$$\frac{E}{12(1-\nu^2)nG} = \frac{1}{6n(1-\nu)} = 0,29 \quad (12.47)$$

en supposant  $n = 5/6$ . Dès lors, en posant à priori

$$\varphi_\alpha = -D_\alpha w \quad (12.48)$$

on ne commet qu'une erreur du même ordre de grandeur que celles que nous avons déjà consenties jusqu'ici. Ce n'est que dans le cas de matériaux équivalents, destinés à représenter, par exemple, des *sandwiches* (fig. 12.7) (souvent anisotropes d'ailleurs), que l'on peut observer des valeurs relativement grandes du rapport (12.47). La simplification (12.48) est connue sous le nom d'*hypothèse de Kirchhoff*. On peut également donner à cette hypothèse une présentation

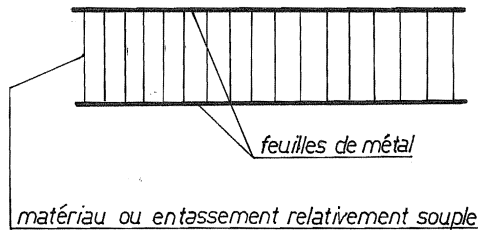


FIGURE 12.7 – Sandwich

énergétique. En effet, les relations (12.43) impliquent que l'énergie de flexion a pour ordre de grandeur

$$E.F. = \frac{1}{2} \frac{12}{Et^3} \{(1+\nu)M_{\alpha\beta}M_{\alpha\beta} - \nu M_{\alpha\alpha}\} = \mathcal{O} \left( \frac{1}{2} \frac{12}{Et^3} M^2 \right)$$

tandis que l'ordre de grandeur de l'énergie de cisaillement est

$$E.C. = \frac{1}{2nGt} Q_\alpha Q_\alpha = \mathcal{O} \left( \frac{1}{2} \frac{1}{nGt} \frac{M^2}{\lambda^2} \right)$$

si bien que leur rapport est de l'ordre de

$$\frac{E.C.}{E.F.} = \frac{E}{12nG} \frac{t^2}{\lambda^2} \quad (12.49)$$

En admettant une erreur en  $\frac{E}{12nG} \frac{t^2}{\lambda^2}$  sur le calcul de l'énergie, on peut donc écrire le principe de Hellinger-Reissner simplifié

$$\begin{aligned} \delta \left\{ \int_S \left[ \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} (D_\alpha \varphi_\beta + D_\beta \varphi_\alpha) + Q_\alpha (\varphi_\alpha + D_\alpha w) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{12}{t^3} ((1 + \nu) M_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} - \nu M_{\alpha\alpha} M_{\beta\beta}) \right] \right. \\ \left. - \int_S \bar{p} w dS - \int_{\partial S_2} (\bar{M}_n \varphi_n + \bar{M}_{nt} \varphi_t + \bar{Q}_n w) ds \right\} = 0 \quad (12.50) \end{aligned}$$

où les efforts tranchants  $Q_\alpha$  jouent le rôle de *multiplicateurs de Lagrange* associés à la condition de Kirchhoff. Pour le reste, ils perdent toute signification énergétique (ils ne travaillent pas) et si l'on exprime les conditions de Kirchhoff à priori, ils disparaissent du principe. C'est du reste de cette manière que l'on procède le plus souvent : à partir des conditions (12.48), on calcule les courbures

$$\chi_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} (D_{\alpha\beta} w + D_{\beta\alpha} w) = -D_{\alpha\beta} w \quad (12.51)$$

Sur le contour, on a

$$\varphi_n = -D_n w, \quad \varphi_t = -D_t w \quad (12.52)$$

ce qui mène à la forme suivante du principe de Hellinger-Reissner :

$$\begin{aligned} \delta \left\{ \int_S \left[ -M_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta} w - \frac{12}{t^3} ((1 + \nu) M_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} - \nu M_{\alpha\alpha} M_{\beta\beta}) - p w \right] dS \right. \\ \left. - \int_{\partial S_2} (\bar{Q}_n w - \bar{M}_n D_n w - \bar{M}_{nt} D_t w) ds \right\} = 0 \quad (12.53) \end{aligned}$$

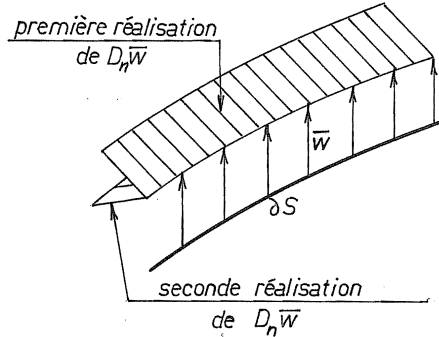


FIGURE 12.8 – Indépendance de la pente normale sur le bord

## 12.8 Le paradoxe de Kirchhoff

Il se trouve que les conditions de Kirchhoff modifient profondément la structure des conditions aux limites. Tout d'abord, sur  $\partial S_1$ , on remarquera que s'il est possible, étant donné une fonction  $\bar{w}$ , de se donner  $\overline{D_n w}$  arbitrairement (fig. 12.8), il n'en est pas de même de  $\overline{D_t w}$ , puisque

$$\bar{w}(s) = \bar{w}(s_1) + \int_{s_1}^s \overline{D_t w} ds^*$$

Au lieu des trois conditions  $w = \bar{w}$ ,  $\varphi_n = \bar{\varphi}_n$  et  $\varphi_t = \bar{\varphi}_t$ , on se trouve donc réduit à  $w = \bar{w}$  et  $D_n w = \overline{D_n w}$ . De la même manière, sur  $\partial S_2$ , on sera ramené à deux conditions seulement. Pour le montrer, nous supposons  $\partial S_2$  formé d'un nombre fini d'arcs réguliers  $C_i$  joignant un point  $P_{i-1}$  à un point  $P_i$ , comme représenté en figure 12.9. En ces points, le contour peut posséder des angles. Notant que  $D_t w$  dépend de  $w$ , on peut faire apparaître ce dernier par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} - \int_{\partial S_2} (-\bar{M}_{nt} D_t w) ds &= - \sum_i \int_{C_i} (-\bar{M}_{nt} D_t w) ds \\ &= \sum_i [\bar{M}_{nt} w]_{(P_{i-1})_+}^{(P_i)_-} - \sum_i \int_{C_i} (D_t \bar{M}_{nt}) w ds \end{aligned}$$



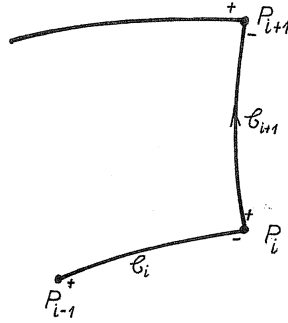


FIGURE 12.9 – Contour typique

et, en réarrangeant les termes, on obtient

$$-\sum_i [\bar{M}_{nt}(P_{i+}) - \bar{M}_{nt}(P_{i-})] w_i - \sum_i \int_{C_i} (D_t \bar{M}_{nt}) w ds$$

ce qui permet de donner au travail des forces imposées sur  $\partial S_2$  la forme finale

$$-\int_{\partial S_2} (\bar{K}_n w - \bar{M}_n D_n w) ds - \sum_i \bar{Z}_i w_i \tag{12.54}$$

en définissant les *forces de coin*

$$\bar{Z}_i = \bar{M}_{nt}(P_{i+}) - \bar{M}_{nt}(P_{i-}) \tag{12.55}$$

et l'*effort tranchant de Kirchhoff*

$$\bar{K}_n = \bar{Q}_n + D_t \bar{M}_{nt} \tag{12.56}$$

Il n'est donc plus possible de spécifier séparément  $\bar{Q}_n$ ,  $\bar{M}_n$  et  $\bar{M}_{nt}$ , le premier et le troisième se combinant pour donner l'effort  $\bar{K}_n$  et les forces de coin. Ce fait paradoxal, démontré par Kirchhoff par la présente méthode, a suscité au XIX<sup>e</sup> siècle de nombreuses controverses, jusqu'à ce que Thomson (Lord Kelvin) et Tait [83] en donnent une interprétation physique très claire. Du fait de l'hypothèse de Kirchhoff, un moment de torsion élémentaire  $\bar{M}_{nt} ds$  est indiscernable par son travail d'un couple de forces  $\bar{M}_{nt}$  situées à une distance  $ds$ . Les différents couples équivalents de forces  $\bar{M}_{nt}$  relatifs à des éléments voisins s'équilibrent à  $D_t \bar{M}_{nt}$

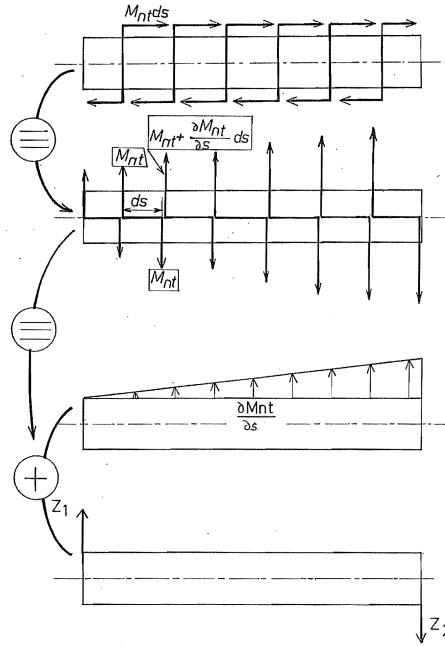


FIGURE 12.10 – Paradoxe de Kirchhoff

près, si bien que sur l'arc régulier considéré, on applique en fait une densité d'efforts tranchants  $D_t \bar{M}_{nt}$  (fig. 12.10). Ainsi, les couples  $\bar{M}_{nt} ds$  s'équilibrent à  $D_t \bar{M}_{nt} ds$  près, sauf aux extrémités de l'arc où, ne trouvant pas d'équivalent, les efforts  $\bar{M}_{nt}$  forment une charge de coin.

## 12.9 Équation de Sophie Germain

L'élimination des moments au profit des déplacements dans le principe (12.53) mène au principe variationnel

$$\int_S \frac{D}{2} \{ (\nabla^2 w)^2 + 2(1 - \nu) [(D_{12} w)^2 - D_{11} w D_{22} w] \} dS - \int_S p w dS - \int_{\partial S_2} (\bar{K}_n w - \bar{M}_n D_n w) ds - \sum_i Z_i w_i \text{ minimum} \quad (12.57)$$

Lors d'une variation de  $w$ , le terme multiplié par  $(1 - \nu)$  ne produit que des termes aux limites. Il peut donc être omis dans le cas d'une plaque encadrée sur tout son contour. L'équation d'équilibre intérieur s'écrit

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad (12.58)$$

et a été obtenue pour la première fois par Sophie Germain en 1816. La théorie de Sophie Germain péchait cependant par ses conditions aux limites.

## 12.10 Expression des résultantes de bord en termes des déplacements

Partant de l'expression générale des moments

$$M_{\alpha\beta} = -D[(1 - \nu)D_{\alpha\beta}w + \nu D_{\gamma\gamma}w\delta_{\alpha\beta}]$$

on obtient directement

$$M_n = -D[(1 - \nu)n_\alpha n_\beta D_{\alpha\beta}w + \nu \nabla^2 w] \quad (12.59)$$

On notera que  $\nabla^2 w$  est la trace de la matrice hessienne de composantes  $D_{\alpha\beta}w$ . Comme cette matrice a, dans le système de base  $(\mathbf{n}, \mathbf{t})$ , les composantes

$$\begin{bmatrix} n_\alpha n_\beta D_{\alpha\beta}w & n_\alpha t_\beta D_{\alpha\beta}w \\ n_\alpha t_\beta D_{\alpha\beta}w & t_\alpha t_\beta D_{\alpha\beta}w \end{bmatrix}$$

on a donc également

$$\nabla^2 w = n_\alpha n_\beta D_{\alpha\beta}w + t_\alpha t_\beta D_{\alpha\beta}w$$

si bien que

$$M_n = -D\nabla^2 w + D(1 - \nu)t_\alpha t_\beta D_{\alpha\beta}w$$

Or, on peut écrire

$$\begin{aligned} t_\alpha t_\beta D_{\alpha\beta}w &= t_\beta D_t(D_\beta w) \\ &= D_t(t_\beta D_\beta w) - D_\beta w D_t t_\beta \\ &= D_{tt}w - D_\beta w D_t t_\beta \end{aligned}$$

Notant que

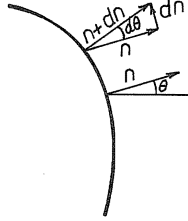


FIGURE 12.11 – Dérivée du vecteur normal

$$t_\beta D_t t_\beta = D_t \left( \frac{t_\beta t_\beta}{2} \right) = D_t \left( \frac{1}{2} \right) = 0$$

et que

$$n_\beta D_t t_\beta = D_t(n_\beta t_\beta) - t_\beta D_t n_\beta = -t_\beta D_t n_\beta = -D_t \theta$$

$\theta$  étant l'angle que fait la normale avec une direction fixe (fig. 12.11), on obtient

$$D_t t_\beta = -n_\beta (D_t \theta)$$

ce qui entraîne finalement

$$M_n = -D \nabla^2 w + D(1 - \nu)[D_{tt} w + D_n w (D_t \theta)] \quad (12.60)$$

On peut procéder de même pour le calcul de  $K_n$ . Tout d'abord,

$$Q_\alpha = D_\beta M_{\beta\alpha} = -D[(1 - \nu)D_{\alpha\beta\beta} w + \nu D_{\gamma\gamma\alpha} w] = -D D_\alpha \nabla^2 w$$

d'où

$$Q_n = n_\alpha Q_\alpha = -D D_n \nabla^2 w$$

On a par ailleurs

$$\begin{aligned} M_{nt} &= -D(1 - \nu)n_\alpha t_\beta D_{\alpha\beta} w \\ &= -D(1 - \nu)[D_t(D_n w) - D_\alpha w D_t n_\alpha] \\ &= -D(1 - \nu)[D_{tn} w - (D_t \theta) D_t w] \end{aligned}$$

Rassemblant ces deux résultats, on obtient

$$K_n = Q_n + D_t M_{nt} = -D D_n \nabla^2 w - D(1 - \nu) D_t [D_{tn} w - (D_t \theta) D_t w] \quad (12.61)$$

## 12.11 Comparaison des théories avec et sans effet des efforts tranchants

La caractéristique essentielle de la théorie de Kirchhoff est que le champ de rotations  $\varphi_\alpha$  est intégrable, ce qui revient à dire que

$$\Omega = D_1\varphi_2 - D_2\varphi_1 = 0$$

Au contraire, dans les théories de Hencky et de Reissner, on a

$$\begin{aligned} \Omega &= e_{3\alpha\beta}D_\alpha\varphi_\beta \\ &= -e_{3\alpha\beta}D_{\alpha\beta}w + \frac{1}{nGt}e_{3\alpha\beta}D_\alpha Q_\beta \\ &= \frac{1}{nGt}e_{3\alpha\beta}D_{\alpha\gamma}M_{\gamma\beta} \\ &= \frac{D}{nGt}e_{3\alpha\beta}D_{\alpha\gamma}[(1-\nu)\chi_{\gamma\beta} - \nu\chi_{\lambda\lambda}\delta_{\gamma\beta}] \\ &= \frac{D(1-\nu)}{nGt}e_{3\alpha\beta}D_{\alpha\gamma}\chi_{\gamma\beta} - D\nu e_{3\alpha\beta}D_{\alpha\beta}\chi_{\lambda\lambda} \\ &= \frac{D(1-\nu)}{2nGt}e_{3\alpha\beta}D_{\alpha\gamma}(D_\gamma\varphi_\beta + D_\beta\varphi_\gamma) \\ &= \frac{D(1-\nu)}{2nGt}e_{3\alpha\beta}D_{\alpha\gamma\gamma}\varphi_\beta \\ &= \frac{D(1-\nu)}{2nGt}\nabla^2\Omega \end{aligned}$$

soit

$$\nabla^2\Omega = \frac{2nGt}{D(1-\nu)}\Omega = \frac{12n}{t^2}\Omega \quad (12.62)$$

dans le cas d'une plaque homogène sur son épaisseur. Avant d'examiner les propriétés de cette équation, notons que cette grandeur  $\Omega$  admet, dans la théorie de Reissner, la représentation

$$\Omega = \frac{12}{t^3} \int_{-t/2}^{t/2} z(D_1u_2 - D_2u_1)dz = \frac{12}{t^3} \int_{-t/2}^{t/2} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) D_3(D_1u_2 - D_2u_1)dz$$

qui la donne comme une moyenne pondérée de la *torsion normale* de la plaque [29], ainsi que l'illustre la figure 12.12. L'équation (12.62), écrite sous la forme

$$\Omega = \frac{t^2}{12n}\nabla^2\Omega$$

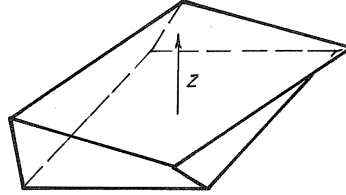


FIGURE 12.12 – Torsion normale

se présente comme une perturbation singulière de l'équation de Kirchhoff. Elle admet des solutions à *variation très rapide* : ainsi, en cherchant une solution de la forme

$$\Omega = A \exp(-\alpha x_1 - \beta x_2)$$

on obtient

$$\frac{t^2}{12n}(\alpha^2 + \beta^2) = 1$$

soit, lorsque  $n = 5/6$ ,

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \approx \frac{3}{t}$$

c'est-à-dire que la profondeur de pénétration (distance à laquelle la solution est divisée par  $e$ ) est de l'ordre de  $t/3$ . Par conséquent, les zones de violation de la condition de Kirchhoff sont très localisées, près des bords ou des points d'application de la charge.

La recherche du champ de déplacements  $w$  se fait, en théorie de Kirchhoff, à partir de l'équation de Sophie Germain. Dans le cadre des théories prenant en compte l'effet de l'effort tranchant, il faut partir de la relation

$$M_{\alpha\beta} = \frac{D}{2}(1 - \nu)(D_\alpha\varphi_\beta + D_\beta\varphi_\alpha) + \nu DD_\gamma\varphi_\gamma\delta_{\alpha\beta}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} p &= -D_{\alpha\beta}M_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{D}{2}(1 - \nu)(D_{\alpha\beta\alpha}\varphi_\beta + D_{\alpha\beta\beta}\varphi_\alpha) - \nu DD_{\alpha\alpha\gamma}\varphi_\gamma \\ &= -D\nabla^2 D_\alpha\varphi_\alpha = -D\nabla^2 \left( -D_{\alpha\alpha}w + D_\alpha \frac{Q_\alpha}{nGt} \right) \\ &= D\nabla^4 w + D \frac{\nabla^2 p}{nGt} \end{aligned}$$

soit, finalement,

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} - \frac{\nabla^2 p}{nGt} \quad (12.63)$$

La solution de cette équation peut être mise sous la forme

$$w = w_K + w_S$$

où  $w_K$  est la solution de Kirchhoff et  $w_S$ , une solution de l'équation

$$\nabla^4 w_S = -\frac{\nabla^2 p}{nGt}$$

Cette dernière, qui vérifie

$$\nabla^2 \left( \nabla^2 w_S + \frac{p}{nGt} \right)$$

a la forme générale

$$w_S = w^* + w^{**}$$

avec

$$\nabla^2 w^* = -\frac{p}{nGt}, \quad \nabla^4 w^{**} = 0$$

La solution partielle  $w^{**}$  est toujours régulière; en revanche, la régularité de  $w^*$  dépend de celle de  $p$ . Si la charge de pression  $p$  est relativement régulière, il en sera de même de  $w^*$  et, du fait du coefficient  $1/(nGt)$  qui est petit devant  $1/D$ ,  $w^*$  sera négligeable devant  $w_K$ . Par contre, pour les charges très irrégulières, la situation change radicalement. Ainsi, dans le cas d'une charge concentrée en un point  $a$ , la solution  $w^*$  est

$$w^* = -\frac{P}{nGt} \frac{1}{2\pi} \ln(|x - a|)$$

et admet donc une singularité logarithmique. Au contraire, la solution de Kirchhoff conduit à un déplacement fini (mais à une singularité logarithmique des moments).

## 12.12 Torsion d'une plaque rectangulaire encastree sur un bord

La comparaison des deux types de théories de plaques se fait aisément dans le cas de la torsion d'une plaque rectangulaire (*fig.* 12.13). En théorie de Kirchhoff,

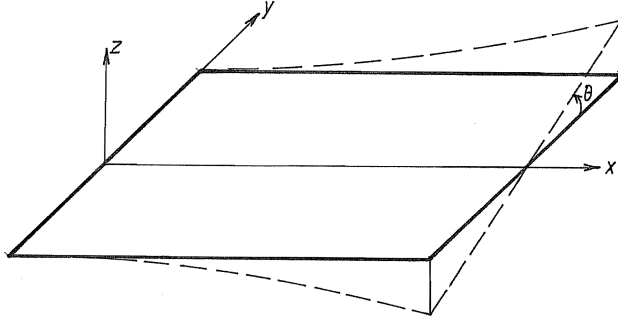


FIGURE 12.13 – Torsion d'une plaque

on cherche une solution de la forme

$$w(x, y) = yA(x) \quad (12.64)$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \chi_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -yA''(x) \\ \chi_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -A'(x) \end{cases}$$

On aura donc

$$\begin{cases} M_x = D(\chi_{xx} + \nu\chi_{yy}) = -DyA'' \\ M_y = D(\chi_{yy} + \nu\chi_{xx}) = -\nu DyA'' \\ M_{xy} = D(1-\nu)\chi_{xy} = -D(1-\nu)A' \end{cases}$$

La *torsion pure* est caractérisée par  $M_x = M_y = 0$ , ce qui implique  $A'' = 0$ , soit  $A' = \theta = \text{cte}$ , d'où

$$w(x, y) = \theta xy$$

On a alors

$$M_{xy} = -D(1-\nu)\theta, \quad Q_x = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0, \quad Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0$$



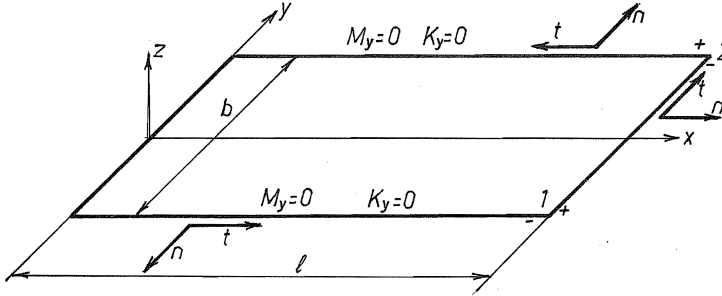


FIGURE 12.14 – Conditions aux limites

Examinons à présent les conditions aux limites, à l'aide de la figure 12.14.

1. En  $y = b/2$ , on doit avoir  $M_y = 0$ , ce qui est identiquement vérifié; on a d'autre part  $M_{nt} = -M_{xy}$ ,  $ds = -dx$ , d'où la condition

$$K_n = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0$$

également vérifiée. Mais il convient de noter que l'on n'a pas  $M_{xy} = 0$ . D'ailleurs, au coin 2, il existe une force de coin

$$Z_2 = (M_{nt})_{2+} - (M_{nt})_{2-} = -(M_{xy})_{2+} - (M_{xy})_{2-} = 2D(1 - \nu)\theta$$

2. En  $y = -b/2$ , on a également  $M_y = 0$  et  $M_{nt} = -M_{xy}$ ,  $ds = dx$ , d'où la condition

$$K_n = -Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0$$

également vérifiée sans mener à  $M_{xy} = 0$ . Au coin 1, il existe une force de coin

$$Z_2 = (M_{nt})_{1+} - (M_{nt})_{1-} = (M_{xy})_{1+} + (M_{xy})_{1-} = -2D(1 - \nu)\theta$$

3. Sur le bord  $x = l$ , le moment  $M_n = M_x$  est nul; on a par ailleurs  $M_{nt} = M_{xy}$  et  $ds = dy$ , d'où la valeur suivante de l'effort tranchant de Kirchhoff :

$$K_n = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0$$

Le moment de torsion appliqué à l'extrémité de la plaque vaut

$$M_t = \frac{b}{2}Z_2 + \left(-\frac{b}{2}\right)Z_1 = 2D(1-\nu)b\theta = 2\frac{Et^3b}{12(1+\nu)}\theta = \frac{1}{3}Gt^3b\theta \quad (12.65)$$

On retrouve donc la formule classique des poutres à section mince. Il est intéressant de noter la chose suivante : si l'on calcule en  $x = a$

$$\int_{-b/2}^{b/2} M_{xy} dy = D(1-\nu)\theta b$$

on n'obtient que la *moitié* du moment, l'autre provenant des moments de torsion résiduels aux coins (voir l'interprétation de Thomson-Tait), assimilables aux contraintes de cisaillement nécessaires pour refermer les lignes de cisaillement que l'on obtiendrait en théorie des poutres (*fig. 12.15*). Du reste, en ne comptant que les  $M_{xy}$ , on ne retient dans le calcul du moment que les contraintes  $\tau_{xy}$ , et la théorie des poutres enseigne effectivement que les contraintes  $\tau_{xy}$  et  $\tau_{xz}$  contribuent chacune pour moitié au moment.

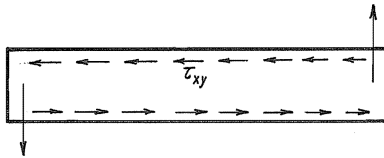


FIGURE 12.15 – Les contraintes tangentielles dans les deux directions ont une contribution identique au moment

Voyons à présent comment étudier le même problème en prenant en compte l'effet des efforts tranchants. Tout d'abord, il faudra modifier la structure du moment  $M_{xy}$  pour lui permettre de s'annuler sur les bords libres. D'autre part, pour sauvegarder la nullité des moments  $M_x$  et  $M_y$ , il faudra que les rotations  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  vérifient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} &= \frac{12}{Et^3}(M_x - \nu M_y) = 0 \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} &= \frac{12}{Et^3}(M_y - \nu M_x) = 0 \end{aligned} \quad (12.66)$$

La nullité de  $Q_y$  nécessitera la relation

$$\varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (12.67)$$

tandis que

$$\varphi_x = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{Q_x}{nGT}$$

implique, par dérivation,

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = nGt \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

Si l'on admet un déplacement  $w$  de la même forme qu'en théorie de Kirchhoff, à savoir,

$$x = \theta xy \tag{12.68}$$

on obtient donc par (12.66)  $\partial Q_x / \partial x = 0$ , soit

$$Q_x = nGt f(y)$$

ce qui implique

$$\varphi_x = -\frac{\partial w}{\partial x} + f(y) \tag{12.69}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} M_{xy} &= D \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\ &= D \frac{1-\nu}{2} \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + f'(y) - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\ &= D \frac{1-\nu}{2} (-2\theta + f'(y)) \end{aligned}$$

et

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = D \frac{1-\nu}{2} f''(y) = nGt f(y)$$

ce qui donne l'équation

$$f''(y) + \omega^2 f(y) = 0 \tag{12.70}$$

avec

$$\omega^2 = \frac{2nGt}{D(1-\nu)} = \frac{12n}{t^2} \tag{12.71}$$

La solution générale de cette équation s'écrit

$$f(y) = A \operatorname{ch} \omega y + B \operatorname{sh} \omega y$$

les constantes  $A$  et  $B$  étant à choisir de manière que  $M_{xy}$  s'annule en  $y = \pm b/2$ , ce qui fournit les conditions

$$-2\theta \pm \omega A \operatorname{sh} \omega \frac{b}{2} + \omega B \operatorname{ch} \omega \frac{b}{2} = 0$$

dont on déduit

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= \frac{2\theta}{\omega \operatorname{ch} \omega \frac{b}{2}} \end{aligned}$$

Il vient donc

$$f(y) = \frac{2\theta \operatorname{sh} \omega y}{\omega \operatorname{ch} \omega \frac{b}{2}}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_x &= -\theta y + \frac{2\theta \operatorname{sh} \omega y}{\omega \operatorname{ch} \omega \frac{b}{2}} \\ M_{xy} &= -D(1-\nu)\theta \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \omega y}{\operatorname{ch} \omega \frac{b}{2}} \right) \\ Q_x &= 2nGt\theta \frac{\operatorname{sh} \omega y}{\omega \operatorname{ch} \omega \frac{b}{2}} \end{aligned}$$

On remarquera que l'effort tranchant  $Q_x$  est strictement confiné aux bords, décroissant à partir de ceux-ci en étant approximativement divisé par  $e$  sur une distance égale à  $t/(n\sqrt{12})$ . Quant aux contraintes, elles valent

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{12}{t^3} \left( \frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) Q_x = 2\sqrt{12n}G\theta \left( \frac{1}{8} - \frac{z^2}{2t^2} \right) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{12n} \frac{y}{t}}{\operatorname{ch} \sqrt{12n} \frac{b}{2t}} \\ \tau_{yz} &= \frac{12z}{t^3} M_{xy} = 2G\theta z \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \sqrt{12n} \frac{y}{t}}{\operatorname{ch} \sqrt{12n} \frac{b}{2t}} \right) \end{aligned} \quad (12.72)$$

Le moment de torsion à l'extrémité est donné par

$$M_t = - \int_{-b/2}^{b/2} (M_{xy} - yQ_x) dy = \frac{1}{3} Gbt^3 \left( 1 - \frac{\operatorname{th} \omega \frac{b}{2}}{\omega \frac{b}{2}} \right) \theta \quad (12.73)$$

Il est plus petit que celui que fournit la théorie de Kirchhoff, ce qui est normal, puisque celle-ci surestime les raideurs. La présente solution coïncide avec la solution approchée développée en section 6.13.4, où elle est comparée à la solution exacte.

### 12.13 Flexion des plaques rectangulaires simplement appuyées (théorie de Kirchhoff) : méthode des séries doubles de Navier

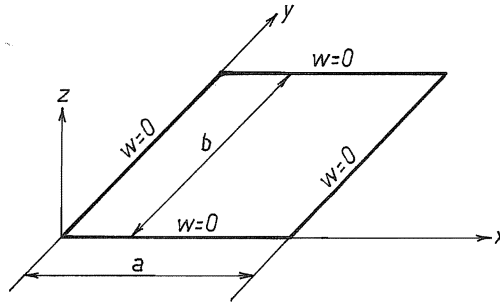


FIGURE 12.16 – Plaque simplement appuyée

Les plaques rectangulaires simplement appuyées s'étudient aisément à l'aide des séries doubles de Navier :

$$w(x, y) = \sum_{k, \ell=1}^{\infty} w_{k\ell} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{\ell\pi y}{b} \quad (12.74)$$

où les  $w_{k\ell}$  sont des inconnues, en double infinité. On déduit immédiatement de cette expression

$$\begin{aligned} \chi_{xx} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sum_{k\ell} \frac{k^2 \pi^2}{a^2} w_{k\ell} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{\ell\pi y}{b} \\ \chi_{yy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sum_{k\ell} \frac{\ell^2 \pi^2}{b^2} w_{k\ell} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{\ell\pi y}{b} \\ \chi_{xy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\sum_{k\ell} \frac{k\pi}{a} \frac{\ell\pi}{b} w_{k\ell} \cos \frac{k\pi x}{a} \cos \frac{\ell\pi y}{b} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} M_{xx} &= D(\chi_{xx} + \nu\chi_{yy}) = \pi^2 \sum_{k\ell} \left( \frac{k^2}{a^2} + \nu \frac{\ell^2}{b^2} \right) w_{k\ell} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{\ell\pi y}{b} \\ M_{yy} &= D(\chi_{yy} + \nu\chi_{xx}) = \pi^2 \sum_{k\ell} \left( \frac{\ell^2}{b^2} + \nu \frac{k^2}{a^2} \right) w_{k\ell} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{\ell\pi y}{b} \\ M_{xy} &= D(1 - \nu)\chi_{xy} = -\pi^2(1 - \nu) \sum_{k\ell} \frac{k\ell}{ab} w_{k\ell} \cos \frac{k\pi x}{a} \cos \frac{\ell\pi y}{b} \end{aligned}$$

Pour calculer l'énergie de déformation

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^a dx \int_0^b dy [M_{xx}\chi_{xx} + M_{yy}\chi_{yy} + 2M_{xy}\chi_{xy}]$$

on notera les relations

$$\int_0^A \sin \frac{m\pi X}{A} \sin \frac{n\pi X}{A} dX = \int_0^A \cos \frac{m\pi X}{A} \cos \frac{n\pi X}{A} dX = \frac{A}{2} \delta_{mn}$$

dont on déduit

$$\begin{aligned} 2\mathcal{U} &= D \frac{\pi^4 ab}{4} \sum_{k\ell} \left[ \frac{k^4}{a^4} + \frac{\ell^4}{b^4} + 2\nu \frac{k^2}{a^2} \frac{\ell^2}{b^2} + 2(1 - \nu) \frac{k^2 \ell^2}{a^2 b^2} \right] w_{k\ell}^2 \\ &= D \frac{\pi^4 ab}{4} \sum_{k\ell} \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{\ell^2}{b^2} \right)^2 w_{k\ell}^2 \end{aligned} \quad (12.75)$$

Étant donné une charge  $p$  répartie, on peut calculer son énergie potentielle

$$\mathcal{P} = - \int_0^a dx \int_0^b p w dy$$

Cette énergie potentielle est une fonctionnelle linéaire du déplacement  $w$ , associant donc un nombre à chaque champ de déplacements particulier. Dans le cas de charges concentrées sur une courbe ou sur un point, l'énergie potentielle reste définie, mais son expression est différente : pour une charge  $q$  répartie sur une courbe  $\mathcal{C}$ , on aura

$$\mathcal{P} = - \int_{\mathcal{C}} q w ds$$

et pour une charge  $P$  concentrée en un point  $B$ , il faudra écrire

$$\mathcal{P} = -Pw(B)$$

Quoi qu'il en soit, la linéarité (et la continuité) de la fonctionnelle permet d'écrire

$$\mathcal{P}(w) = \mathcal{P} \left( \sum_{k\ell} w_{k\ell} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{\ell\pi y}{b} \right) = - \sum_{k\ell} P_{k\ell} w_{k\ell}$$

ce qui fait apparaître la composante  $(k, \ell)$  de la charge, définie par

$$P_{k\ell} = -\mathcal{P} \left( \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{\ell\pi y}{b} \right) \quad (12.76)$$

Ce point de vue, bien qu'un peu abstrait, permet de traiter avec la même aisance tous les problèmes menant à une *énergie finie*, ce qui constitue le cadre naturel du problème. En particulier, les charges concentrées se traitent aussi simplement que les autres. La solution résulte en effet de la minimisation de l'énergie totale

$$\mathcal{U} + \mathcal{P} = \frac{1}{2} D \frac{\pi^4 ab}{4} \sum_{k\ell} \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{\ell^2}{b^2} \right)^2 w_{k\ell}^2 - \sum_{k\ell} P_{k\ell} w_{k\ell}$$

par rapport aux inconnues  $w_{k\ell}$ , ce qui fournit, par simple dérivation, la solution

$$w_{k\ell} = \frac{4}{\pi^4 ab} \frac{P_{k\ell}}{\left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{\ell^2}{b^2} \right)^2} \quad (12.77)$$

Il suffit alors de recombinaison ces valeurs pour obtenir les déplacements et les moments.

Traisons à titre d'exemple le cas d'une charge  $P$  concentrée au centre de la plaque. On a, dans ce cas,

$$\mathcal{P}(w) = -Pw \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$$

Or,

$$w \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) = \sum_{k,\ell} k\ell \sin \frac{k\pi}{2} \sin \frac{\ell\pi}{2}$$

et on sait qu'en général,  $\sin \frac{m\pi}{2} = 0$  si  $m$  est pair, si bien que seules interviendront les valeurs impaires de  $k$  et  $\ell$ . Nous tiendrons compte de ce fait en écrivant

$$k = 2m + 1, \quad \ell = 2n + 1, \quad W_{mn} = w_{(2m+1, 2n+1)}$$

Notant encore que

$$\sin \left( (2m + 1) \frac{\pi}{2} \right) = (-1)^m$$

on obtient

$$w \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) = \sum_{mn} W_{mn} (-1)^{m+n} \quad (12.78)$$

Par conséquent,

$$P_{mn} = (-1)^{m+n} P$$

et

$$W_{mn} = \frac{4P}{\pi^4 Dab} \frac{(-1)^{m+n}}{\left[ \left( \frac{2m+1}{a} \right)^2 + \left( \frac{2n+1}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (12.79)$$

Le déplacement au droit de la charge se calcule alors par (12.78).

La sommation des séries obtenues se fait d'ordinaire par voie numérique. Pour effectuer une somme double de ce genre, il convient de progresser simultanément en  $m$  et  $n$ , ce qui se fait de la manière suivante : on progresse en fait en incrémentant d'une unité le nombre  $r = (m + n)$ . A  $r = 2$  correspond  $m = 1, n = 1$ . Pour  $r = 3$ , il existe deux termes,  $(m = 2, n = 1)$  et  $(m = 1, n = 2)$ . Pour  $r = 4$ , les termes sont  $(m = 3, n = 1)$ ;  $(m = 2, n = 2)$ ;  $(m = 1, n = 3)$  et ainsi de suite, c'est-à-dire que l'on calcule en fait

$$\sum_{m,n} \Phi_{mn} = \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{r-1} \Phi_{r-n,n}$$

Il convient de noter que la vitesse de convergence de la série est tributaire de la régularité de la mise en charge. Pour une précision donnée, il faut sommer plus de termes dans le cas d'une charge concentrée que dans le cas d'une charge répartie.



### 12.14 Flexion d'une plaque rectangulaire appuyée sur deux bords opposés (théorie de Kirchhoff) : méthode des séries simples de Lévy

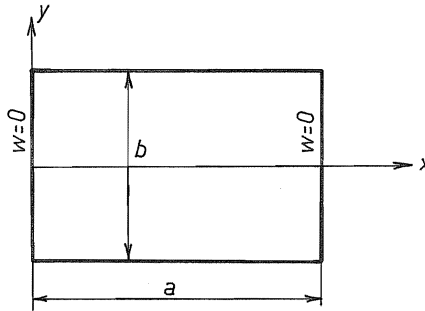


FIGURE 12.17 – Plaque appuyée à ses deux extrémités

Dans le cas d'une plaque rectangulaire appuyée sur deux bords opposés (*fig.* 12.17), il est plus simple d'utiliser les séries simples de Lévy, de la forme

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (12.80)$$

où apparaissent des fonctions inconnues  $A_n(y)$ , en simple infinité. On obtient aisément

$$\begin{aligned} \chi_{xx} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sum_n \frac{n^2 \pi^2}{a^2} A_n \sin \frac{n\pi x}{a} \\ \chi_{yy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\sum_n A_n'' \sin \frac{n\pi x}{a} \\ \chi_{xy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\sum_n \frac{n\pi}{a} A_n' \cos \frac{n\pi x}{a} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} M_{xx} &= D(\chi_{xx} + \nu\chi_{yy}) = D \sum_n \left( \frac{n^2\pi^2}{a^2} A_n - \nu A_n'' \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \\ M_{yy} &= D(\chi_{yy} + \nu\chi_{xx}) = -D \sum_n \left( A_n'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2} A_n \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \\ M_{xy} &= D(1 - \nu)\chi_{xy} = -D(1 - \nu) \sum_n A_n' \cos \frac{n\pi x}{a} \end{aligned}$$

L'énergie de déformation se calcule alors par

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} (M_{xx}\chi_{xx} + M_{yy}\chi_{yy} + 2M_{xy}\chi_{xy}) dy$$

ce qui donne

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \frac{Da}{2} \sum_n \int_{-b/2}^{b/2} \left[ \frac{n^4\pi^4}{a^4} A_n^2 - 2\nu \frac{n^2\pi^2}{a^2} A_n A_n'' + A_n''^2 + 2(1 - \nu) \frac{n^2\pi^2}{a^2} A_n'^2 \right] dy$$

et, après réarrangement des termes,

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \frac{Da}{2} \sum_n \int_{-b/2}^{b/2} \left[ \left( A_n'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2} A_n \right)^2 + 2(1 - \nu) \frac{n^2\pi^2}{a^2} (A_n'^2 + A_n A_n'') \right] dy \quad (12.81)$$

L'énergie potentielle des charges s'écrit, quant à elle,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P} \left( \sum_n A_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a} \right) = \sum_n \mathcal{P}_n(A_n(y)) \quad (12.82)$$

$\mathcal{P}_n$  étant l'harmonique d'ordre  $n$  de l'énergie potentielle. La minimisation de l'énergie potentielle totale ( $\mathcal{U} + \mathcal{P}$ ) mène à une simple infinité de problèmes variationnels à une dimension.

Illustrons cette méthode par un exemple. Il s'agit d'une plaque supportant une charge uniformément répartie sur sa ligne médiane (fig. 12.18).

L'énergie potentielle vaut

$$\mathcal{P} = -q \int_{-b/2}^{b/2} \sum_n A_n \sin \frac{n\pi}{2} dy \quad (12.83)$$

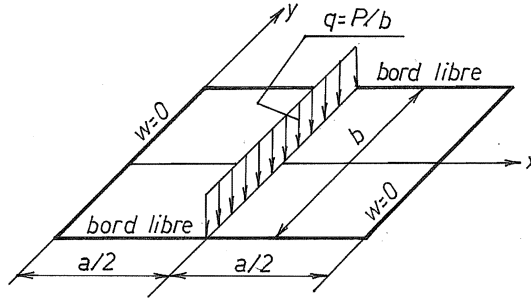


FIGURE 12.18 – Plaque sous une charge uniformément répartie sur sa ligne médiane

si bien que la variation des  $A_n$  mène aux conditions suivantes, où les harmoniques sont découplés :

$$\begin{aligned} \frac{Da}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \left[ \left( A_n'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2} A_n \right) \left( \delta A_n'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2} \delta A_n \right) \right. \\ \left. + 2(1-\nu) \frac{n^2\pi^2}{a^2} \left( A_n' \delta A_n' + \frac{1}{2} A_n \delta A_n'' + \frac{1}{2} A_n'' \delta A_n \right) \right] dy \\ - q \sin \frac{n\pi}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \delta A_n dy = 0 \end{aligned}$$

Intégrant deux fois par parties de manière à faire disparaître les dérivées des  $\delta A_n$  dans les intégrales, on obtient (après multiplication par  $2/(Da)$ )

$$\begin{aligned} \left[ \left( A_n'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2} A_n \right) \delta A_n' + 2(1-\nu) \frac{n^2\pi^2}{a^2} \left( A_n' \delta A_n + \frac{1}{2} A_n \delta A_n' \right) \right]_{-b/2}^{b/2} \\ - \left[ \left( A_n''' - \frac{n^2\pi^2}{a^2} A_n' \right) \delta A_n + (1-\nu) \frac{n^2\pi^2}{a^2} A_n' \delta A_n \right]_{-b/2}^{b/2} \\ + \int_{-b/2}^{b/2} \left( A_n^{IV} - 2 \frac{n^2\pi^2}{a^2} A_n'' + \frac{n^4\pi^4}{a^4} A_n \right) \delta A_n dy - \frac{2q}{Da} \sin \frac{n\pi}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \delta A_n dy = 0 \end{aligned}$$

ce qui permet de déduire l'équation d'Euler

$$A_n^{IV} - 2 \frac{n^2\pi^2}{a^2} A_n'' + \frac{n^4\pi^4}{a^4} A_n = \frac{2q}{Da} \sin \frac{n\pi}{2} \quad \text{dans } ] -b/2, b/2[ \quad (12.84)$$

et les conditions aux limites suivantes ( $\delta A_n$  et  $\delta A'_n$  sont libres aux extrémités  $y = \pm b/2$ ) :

$$A_n''' - (2 - \nu) \frac{n^2 \pi^2}{a^2} A_n' = 0 \quad \text{en } y = \pm b/2$$

(nullité de l'effort tranchant de Kirchhoff) (12.85)

et

$$A_n'' - \nu \frac{n^2 \pi^2}{a^2} A_n = 0 \quad \text{en } y = \pm b/2 \quad (\text{nullité du moment normal}) \quad (12.86)$$

La solution générale de l'équation différentielle (12.84) est

$$A_n = (B_n + C_n y) \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + (E_n + F_n y) \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + \frac{2qa^3 \sin \frac{n\pi}{2}}{Dn^4 \pi^4}$$

La symétrie du problème par rapport à  $y$  exige  $C_n = E_n = 0$ . On a alors successivement

$$\begin{aligned} A_n &= B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + F_n y \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + \frac{2qa^3 \sin \frac{n\pi}{2}}{Dn^4 \pi^4} \\ A_n' &= \left( \frac{n\pi}{a} B_n + F_n \right) \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + \frac{n\pi}{a} F_n y \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} \\ A_n'' &= \left( \frac{n^2 \pi^2}{a^2} B_n + 2 \frac{n\pi}{a} F_n \right) \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} F_n y \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \\ A_n''' &= \left( \frac{n^3 \pi^3}{a^3} B_n + 3 \frac{n^2 \pi^2}{a^2} F_n \right) \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + \frac{n^3 \pi^3}{a^3} F_n y \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} \end{aligned}$$

Ces résultats permettent d'écrire les conditions aux limites. La condition (12.85) donne

$$-\frac{n^3 \pi^3}{a^3} (1 - \nu) B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} F_n \left[ (1 + \nu) \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} - (1 - \nu) \frac{n\pi b}{2a} \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} \right] = 0$$

ce qui équivaut à

$$B_n = \frac{a}{n\pi} F_n \left[ \frac{1 + \nu}{1 - \nu} - \frac{n\pi b}{2a} \operatorname{coth} \frac{n\pi b}{2a} \right] \quad (12.87)$$

Quant à la condition relative au moment normal, elle s'écrit

$$\begin{aligned} (1 - \nu) \frac{n^2 \pi^2}{a^2} B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} + F_n \left[ 2 \frac{n\pi}{a} \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \frac{b}{2} (1 - \nu) \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} \right] \\ = \frac{2\nu qa \sin \frac{n\pi}{2}}{Dn^2 \pi^2} \end{aligned}$$

soit, en éliminant  $B_n$  à l'aide de (12.87),

$$\left[ (3 + \nu) \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} - (1 - \nu) \frac{\frac{n\pi b}{2a}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a}} \right] \frac{n\pi}{a} F_n = \frac{2\nu q a \sin \frac{n\pi}{2}}{D n^2 \pi^2}$$

ce qui donne

$$F_n = \frac{n\pi}{a} \frac{2\nu q a^3 \sin \frac{n\pi}{2}}{D n^4 \pi^4} \frac{1}{(3 + \nu) \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} - (1 - \nu) \frac{\frac{n\pi b}{2a}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a}}}$$

et

$$A_n = \frac{2\nu q a^3 \sin \frac{n\pi}{2}}{D n^4 \pi^4} \left\{ 1 + \frac{\nu}{N_n} \left[ \left( \frac{1 + \nu}{1 - \nu} - \frac{n\pi b}{2a} \coth \frac{n\pi b}{2a} \right) \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + \frac{n\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right] \right\}$$

avec

$$N_n = (3 + \nu) \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{a} - (1 - \nu) \frac{\frac{n\pi b}{2a}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a}}$$

Il s'agit d'une série à convergence assez rapide (terme général  $\mathcal{O}(1/n^4)$ ). En première approximation, on peut ne conserver que le premier terme, car le second est nul, et pour le troisième, la valeur de  $n^4$  est 81. On obtient ainsi

$$w \approx \frac{2qa^3}{D\pi^4} \left\{ 1 + \frac{\nu}{N_1} \left[ \left( \frac{1 + \nu}{1 - \nu} - \frac{\pi b}{2a} \coth \frac{\pi b}{2a} \right) \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} + \frac{\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{a} \right] \right\} \sin \frac{\pi x}{a} \quad (12.88)$$

Le premier terme de l'accolade représente la flexion cylindrique. Le second, dû à l'effet de Poisson, s'appelle *déformation anticlastique*. Lorsque la plaque est large ( $a$  petit devant  $b$ ), cette déformation reste confinée aux bords de la plaque, avec une profondeur de pénétration de l'ordre de  $a/\pi$ . Lorsque, au contraire, la plaque est étroite, on s'attend à retrouver des résultats comparables à ceux d'une poutre. Pour  $b \ll a$ , on a en effet

$$\begin{aligned} N_1 &\approx 3 + \nu - (1 - \nu) = 2(1 + \nu) \\ \frac{\pi b}{2a} \coth \frac{\pi b}{2a} &\approx 1 \\ \operatorname{ch} \frac{\pi b}{2a} &\approx 1 + \frac{\pi^2 y^2}{2a^2} \\ \frac{\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{a} &\approx \frac{\pi^2 y^2}{a^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 w &\approx \frac{2qa^3}{D\pi^4} \left\{ 1 + \frac{\nu}{2(1+\nu)} \left[ \frac{2\nu}{1-\nu} \left( 1 + \frac{\pi^2 y^2}{2a^2} \right) + \frac{\pi^2 y^2}{a^2} \right] \right\} \sin \frac{\pi x}{a} \\
 &\approx \frac{2qa^3}{D\pi^4} \left\{ \frac{1}{1-\nu^2} \left[ 1 + \nu \frac{\pi^2 y^2}{2a^2} \right] \right\} \sin \frac{\pi x}{a} \\
 &\approx \frac{2Pa^3}{\pi^4 Eb \frac{t^3}{12}} \left[ 1 + \nu \frac{\pi^2 y^2}{2a^2} \right] \sin \frac{\pi x}{a}
 \end{aligned}$$

où  $P$  est la charge totale  $qb$ . Notant que  $\chi_{xx} = \frac{\pi^2}{a^2} A_1 \sin \frac{\pi x}{a}$ , on obtient

$$w \approx \frac{2Pa^3}{\pi^4 Eb \frac{t^3}{12}} \sin \frac{\pi x}{a} + \nu \chi_{xx} \frac{y^2}{2}$$

ce qui correspond bien à la structure en  $y$  du déplacement que donne la théorie des poutres<sup>1</sup>. La solution des poutres aurait donné une flèche au centre égale à  $Pa^4/(48Eb \frac{t^3}{12})$ . Nous obtenons ici  $\pi^4/2 = 48,70$  au lieu de 48, mais ceci est dû à la troncature du développement.

## 12.15 Flexion des plaques circulaires

Les plaques circulaires s'étudient naturellement en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Les courbures s'obtiennent aisément en remarquant qu'elles sont aux rotations comme les déformations sont aux déplacements : partant des rotations  $\varphi_r$  et  $\varphi_\theta$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 \chi_{rr} &= \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \\
 \chi_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\varphi_r}{r} \\
 \chi_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial r} - \frac{\varphi_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\varphi_\theta}{r} \right) \right] \quad (12.89)
 \end{aligned}$$

---

1. Dans le cas d'une poutre,  $\sigma_{yy} = 0$ , donc  $\varepsilon_{yy} = -\nu\varepsilon_{xx}$ , soit  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\chi_{yy} = \nu\chi_{xx}$ .

Les glissements sont les sommes des rotations et des composantes du gradient du déplacement :

$$\begin{aligned} \gamma_{rz} &= \varphi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \\ \gamma_{\theta z} &= \varphi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (12.90)$$

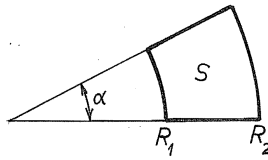


FIGURE 12.19 – Secteur de plaque

Pour obtenir les équations d'équilibre à l'intérieur et sur le contour, le plus simple est de considérer l'équilibre d'un secteur de plaque d'angle  $\alpha$  et de rayon allant de  $R_1$  à  $R_2$  (fig. 12.19), à l'aide du principe des travaux virtuels

$$\int_0^\alpha \int_{R_1}^{R_2} \left\{ M_r \delta \left( \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \right) + M_\theta \delta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\varphi_r}{r} \right) + M_{r\theta} \delta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\varphi_\theta}{r} \right) \right] + Q_r \delta \left( \varphi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) + Q_\theta \delta \left( \varphi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - p \delta w \right\} r dr d\theta = 0$$

A la variation de  $\varphi_r$  correspondent l'équation

$$-\frac{\partial}{\partial r}(rM_r) + M_\theta - \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + rQ_r = 0 \quad \text{dans } S \quad (12.91)$$

et les conditions aux limites

$$\begin{cases} rM_r \delta \varphi_r = 0 & \text{en } r = R_1 \text{ et } r = R_2 \\ M_{r\theta} \delta \varphi_r = 0 & \text{en } \theta = 0 \text{ et } \theta = \alpha \end{cases}$$

La variation de  $\varphi_\theta$  donne l'équation

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 M_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} M_\theta = rQ_\theta \quad \text{dans } S \quad (12.92)$$

et les conditions aux limites

$$\begin{cases} rM_{r\theta}\delta\varphi_\theta = 0 & \text{en } R = R_1 \text{ et } r = R_2 \\ M_\theta\delta\varphi_\theta = 0 & \text{en } \theta = 0 \text{ et } \theta = \alpha \end{cases}$$

Enfin, en variant  $w$ , on obtient

$$\frac{\partial}{\partial r}(rQ_r) + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + pr = 0 \quad \text{dans } S \quad (12.93)$$

et, aux limites,

$$\begin{cases} rQ_r\delta w = 0 & \text{en } r = R_1 \text{ et } r = R_2 \\ Q_\theta\delta w = 0 & \text{en } \theta = 0 \text{ et } \theta = \alpha \end{cases}$$

Dans le cadre de l'hypothèse de Kirchhoff, il convient d'introduire aux frontières les efforts tranchants de Kirchhoff et les charges de coin. Pour les obtenir, notons que sur les bords  $r = \text{cte}$ , le travail virtuel de bord

$$\int_0^\alpha (rM_r\delta\varphi_r + rM_{r\theta}\delta\varphi_\theta + rQ_r\delta w)d\theta$$

se transforme, en tenant compte des conditions de Kirchhoff

$$\varphi_r = -\frac{\partial w}{\partial r}, \quad \varphi_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad (12.94)$$

en

$$\begin{aligned} & - \int_0^\alpha \left( rM_r\delta\frac{\partial w}{\partial r} - M_{r\theta}\delta\frac{\partial w}{\partial \theta} + rQ_r\delta w \right) d\theta \\ & = [M_{r\theta}\delta w]_0^\alpha - \int_0^\alpha rM_r\delta\frac{\partial w}{\partial r}d\theta + \int_0^\alpha r \left( Q_r + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \right) \delta w d\theta \end{aligned}$$

ce qui donne l'effort tranchant de Kirchhoff

$$K_r = Q_r + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \quad (12.95)$$

Sur les bords  $\theta = \text{cte}$ , on obtient de même

$$K_\theta = Q_\theta + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} \quad (12.96)$$

Quant aux charges de coin, elles gardent leur signification classique  $\Delta M_{nt}$ .



## 12.16 Déformations axisymétriques

Un problème est dit *axisymétrique* si sa géométrie, ses charges et ses fixations sont indépendantes de  $\theta$ . La symétrie impose alors que les lignes verticales avant déformation restent dans le même plan méridien, c'est-à-dire que  $\varphi_\theta$  soit nul. De plus, toute dérivée par rapport à  $\theta$  doit s'annuler. On obtient ainsi les conditions

$$M_{r\theta} = 0, \quad \chi_{r\theta} = 0, \quad \gamma_{\theta z} = 0, \quad Q_\theta = 0 \quad (12.97)$$

Les problèmes axisymétriques peuvent se traiter soit par la méthode énergétique, soit par résolution directe des équations d'équilibre. Examinons à titre d'exemple le cas d'une charge concentrée au centre de la plaque. Comme le montre la figure

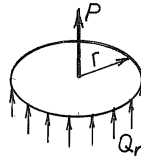


FIGURE 12.20 – Équilibre sous une charge concentrée

12.20, l'équilibre des efforts tranchants implique, en un rayon  $r$  quelconque,

$$P = -2\pi r Q_r$$

soit

$$Q_r = -\frac{P}{2\pi r} \quad (12.98)$$

L'effort tranchant admet donc au centre une singularité en  $1/r$ . L'équilibre des moments s'écrit alors

$$\frac{d}{dr}(rM_r) - M_\theta = rQ_r = -\frac{P}{2\pi} \quad (12.99)$$

Dans le cadre des hypothèses de Kirchhoff, les courbures valent

$$\chi_{rr} = \frac{d\varphi_r}{dr} = -\frac{d^2w}{dr^2}, \quad \chi_{\theta\theta} = \frac{\varphi_r}{r} = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr}, \quad \chi_{r\theta} = 0$$

d'où

$$M_r = -D \left( \frac{d^2w}{dr^2} + \nu \frac{dw}{dr} \right), \quad M_\theta = -D \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2w}{dr^2} \right) \quad (12.100)$$

ce qui mène à l'équation

$$-\frac{d}{dr} \left( r \frac{d^2 w}{dr^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = -\frac{P}{2\pi D} \quad (12.101)$$

Il est commode de poser  $q = \frac{dw}{dr}$ , ce qui ramène l'équation ci-dessus à

$$-\frac{d}{dr} \left( r \frac{dq}{dr} \right) + \frac{q}{r} = -\frac{P}{2\pi D}$$

Cherchons d'abord des solutions de l'équation homogène sous la forme

$$q = r^\ell$$

Il vient

$$(1 - \ell^2) r^{\ell-1} = 0$$

soit  $\ell = \pm 1$ , ce qui permet d'écrire la solution générale sous la forme

$$q_h = Ar + \frac{B}{r}$$

Une solution particulière de l'équation complète peut être cherchée sous la forme

$$q_p = rf(r)$$

ce qui donne

$$f + 3rf' + r^2 f'' - f = \frac{P}{2\pi D}$$

Essayant une solution de la forme  $f' = C/r$ , on obtient la condition

$$2C = \frac{P}{2\pi D}$$

soit

$$C = \frac{P}{4\pi D}$$

Il vient ainsi

$$f(r) = \frac{P}{4\pi D} \ln r$$

et

$$q_p = \frac{P}{4\pi D} r \ln r$$

Finalement, la solution générale de l'équation complète est

$$q = q_p + q_h = \frac{P}{4\pi D} r \ln r + Ar + \frac{B}{r}$$

On en déduit par intégration

$$w = \frac{P}{4\pi D} \left( \frac{r^2}{2} \ln r - \frac{r^2}{4} \right) + A \frac{r^2}{2} + B \ln r + C^* \quad (12.102)$$

Au centre de la plaque, on doit avoir  $dw/dr = q = 0$ , ce qui implique  $B = 0$ . Supposant la plaque appuyée sur son contour, on aura  $w(R) = 0$ , ce qui donne

$$C^* = -\frac{P}{4\pi D} \left( \frac{R^2}{2} \ln R - \frac{R^2}{4} \right) - A \frac{R^2}{2}$$

et

$$\begin{aligned} w &= \frac{P}{4\pi D} \left( \frac{r^2}{2} \ln r - \frac{R^2}{2} \ln R - \frac{r^2 - R^2}{4} \right) + A \frac{r^2 - R^2}{2} \\ &= \frac{P}{4\pi D} \left( \frac{r^2}{2} \ln \frac{r}{R} + \frac{r^2 - R^2}{2} \ln R - \frac{r^2 - R^2}{4} \right) + A \frac{r^2 - R^2}{2} \\ &= \frac{P}{4\pi D} \left( \frac{r^2}{2} \ln \frac{r}{R} + \frac{R^2 - r^2}{4} \right) + F \frac{r^2 - R^2}{2} \end{aligned}$$

en modifiant la constante d'intégration. Il vient alors

$$\varphi_r = -\frac{dw}{dr} = -\frac{P}{4\pi D} r \ln \frac{r}{R} - Fr$$

et

$$M_r = D \left( \frac{d\varphi_r}{dr} + \nu \frac{\varphi_r}{r} \right) = -\frac{P}{4\pi} \left[ (1 + \nu) \ln \frac{r}{R} + 1 \right] - DF(1 + \nu)$$

La nullité de ce moment à l'appui donne donc

$$F = -\frac{P}{4\pi D(1 + \nu)}$$

d'où l'expression finale du déplacement :

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[ r^2 \ln \frac{r}{R} + \frac{3 + \nu}{2(1 + \nu)} (R^2 - r^2) \right] \quad (12.103)$$

On notera que la flèche au centre est *finie* et vaut

$$w(0) = \frac{3 + \nu}{1 + \nu} \frac{PR^2}{16\pi D} \quad (12.104)$$

On peut en déduire la rotation

$$\varphi_r = -\frac{dw}{dr} = \frac{P}{8\pi D} \left[ 2r \ln \frac{r}{R} - \frac{1 - \nu}{2(1 + \nu)} r \right]$$

ainsi que les courbures

$$\begin{aligned} \chi_{rr} &= \frac{P}{8\pi D} \left[ \frac{3 + 5\nu}{2(1 + \nu)} + 2 \ln \frac{r}{R} \right] \\ \chi_{\theta\theta} &= \frac{P}{8\pi D} \left[ -\frac{1 - \nu}{2(1 + \nu)} + 2 \ln \frac{r}{R} \right] \end{aligned}$$

et les moments

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{P}{8\pi} \left[ \frac{3 + \nu}{2} + 2(1 + \nu) \ln \frac{r}{R} \right] \\ M_\theta &= \frac{P}{8\pi} \left[ \frac{5\nu - 1}{2} + 2(1 + \nu) \ln \frac{r}{R} \right] \end{aligned} \quad (12.105)$$

On constate donc que les moments présentent une singularité logarithmique, mais que le déplacement est fini. La raison en est que

$$Pw(0) = 2(U) = \int_S \frac{12}{Et^2} (M_r^2 + M_\theta^2 - 2\nu M_r M_\theta) dS$$

et que la singularité logarithmique est de carré intégrable :

$$2\pi \int_0^R r \left( \ln \frac{r}{R} \right)^2 dr < \infty$$

donc  $w(0) < \infty$ . Ceci est propre à la théorie de Kirchhoff. Au contraire, si l'on tient compte de la déformation due à l'effort tranchant, il apparaît dans l'énergie le terme supplémentaire

$$\int_S \frac{Q_r^2}{2nGt} dS = \frac{2\pi}{2nGt} \int_0^R \left( \frac{P}{2\pi r} \right)^2 r dr = \infty$$

ce qui signifie que la flèche est infinie. Calculons la différence  $w_S$  entre ces deux solutions. Elle est, comme on a vu, de la forme

$$w_S = w^* + w^{**}$$

où  $w^*$  vérifie

$$\nabla^2 w^* = -\frac{p}{nGt}$$

tandis que  $w^{**}$ , biharmonique, est une correction éventuelle permettant de tenir compte des conditions aux limites. La solution complète  $w = w_K + w_S$  devra, sur le contour de rayon  $R$ , vérifier les conditions aux limites suivantes :

1.  $w(R) = 0$ . Comme c'est déjà le cas de  $w_K$ , il faudra que

$$w_S(R) = 0$$

2.  $M_r(R) = 0$ . Pour vérifier cette condition, il faut d'abord établir l'expression du moment. On a

$$\varphi_r = -\frac{dw}{dr} + \frac{Q_r}{nGt} = -\frac{dw}{dr} - \frac{P}{2\pi r nGt}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \chi_r &= \frac{d\varphi_r}{dr} = -\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{P}{2\pi nGtr^2} \\ \chi_\theta &= \frac{\varphi_r}{r} = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{P}{2\pi nGtr^2} \end{aligned}$$

et

$$M_r = D(\chi_r + \nu\chi_\theta) = -D \left[ \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right] + (1-\nu) \frac{DP}{2\pi nGtr^2}$$

En  $r = R$ , la grandeur entre crochets s'annule pour  $w_K$ , si bien qu'il reste la condition

$$D \left[ \frac{d^2w_s}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw_s}{dr} \right] = \frac{(1-\nu)DP}{2\pi R^2 nGt} \quad (12.106)$$

Commençons par calculer  $w^*$ . On notera que si  $p$  était une charge répartie, on aurait, sur tout disque de rayon  $r$ ,

$$-\int_{S_r} \frac{p}{nGt} dS = \int_{S_r} \nabla^2 w^* dS = 2\pi r \frac{dw^*}{dr}$$

Il suffit, dans notre cas, de remplacer  $p$  par la mesure de Dirac  $P\delta$ , ce qui entraîne la relation

$$-\frac{P}{nGt} = 2\pi r \frac{dw^*}{dr}$$

soit

$$\frac{dw^*}{dr} = -\frac{P}{2\pi nGt} \frac{1}{r}$$

Cette équation admet la solution

$$w^* = -\frac{P}{2\pi nGt} \ln \frac{r}{R} \quad (12.107)$$

en tenant compte de la condition de nullité de  $w^*$  sur le bord. Calculons la contribution de ce  $w^*$  au premier membre de (12.106). On a

$$\frac{d^2w^*}{dr^2} = \frac{P}{2\pi r^2 nGt}, \quad \frac{1}{r} \frac{dw^*}{dr} = -\frac{P}{2\pi r^2 nGt}$$

d'où

$$D \left[ \frac{d^2w^*}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw^*}{dr} \right] = \frac{(1-\nu)DP}{2\pi r^2 nGt}$$

On constate donc que la condition (12.106) est vérifiée sans qu'il soit nécessaire de faire appel à une fonction correctrice  $w^{**}$ .

Le déplacement total est donc donné par

$$\begin{aligned} w &= w_K + w_S = w_K + w^* \\ &= \frac{P}{8\pi D} \left[ r^2 \ln \frac{r}{R} + \frac{3+\nu}{2(1+\nu)} (R^2 - r^2) \right] - \frac{P}{2\pi nGt} \ln \frac{r}{R} \\ &= \frac{PR^2}{8\pi D} \left[ \left( \frac{r^2}{R^2} - \frac{\lambda^2}{R^2} \right) \ln \frac{r}{R} + \frac{3+\nu}{2(1+\nu)} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right] \end{aligned}$$

avec

$$\lambda = \sqrt{\frac{2}{3n} \frac{t^2}{1-\nu}} \approx t$$

Au voisinage de l'origine, on peut écrire

$$\frac{8\pi D}{\pi R^2} w \approx \frac{3+\nu}{2(1+\nu)} - \frac{\lambda^2}{R^2} \ln \frac{r}{R}$$

et le second terme égale le premier pour

$$\ln \frac{r}{R} = -\frac{3+\nu}{2(1+\nu)} \frac{R^2}{\lambda^2}$$

soit

$$\frac{r}{R} = \exp\left(-\frac{3+\nu}{2(1+\nu)} \frac{R^2}{\lambda^2}\right)$$

ou encore

$$\frac{r}{\lambda} = \frac{R}{\lambda} \exp\left(-\frac{3+\nu}{2(1+\nu)} \frac{R^2}{\lambda^2}\right)$$

Posant

$$x = \sqrt{\frac{3+\nu}{2(1+\nu)} \frac{r}{\lambda}}, \quad X = \sqrt{\frac{3+\nu}{2(1+\nu)} \frac{R}{\lambda}}$$

on obtient

$$x = Xe^{-X^2}$$

Le maximum du second membre a lieu pour

$$0 = \frac{d}{dX} (Xe^{-X^2}) = (1 - 2X^2)e^{-X^2}$$

soit pour  $X = 1/\sqrt{2}$ . Il vaut 0,4289. Ainsi, le rayon  $r_0$  où la correction due à l'effort tranchant égale la solution de Kirchhoff vérifie

$$\frac{r_0}{\lambda} \leq 0,4289 \sqrt{\frac{2(1+\nu)}{3+\nu}} \approx 0,4$$

c'est-à-dire que les différences par rapport à la solution de Kirchhoff ne sont significatives qu'à une distance de la charge de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la plaque.

## 12.17 Exercices

**Exercice 46** Étudier une plaque circulaire soumise à une charge uniformément répartie, et simplement appuyée sur son contour (théorie de Kirchhoff).

**Exercice 47** Même problème dans le cas d'un contour encastré.

**Exercice 48** Étudier, dans le cadre de la théorie de Kirchhoff, le cas d'une plaque circulaire encastrée à son contour et soumise à une charge concentrée.





## Chapitre 13

# Théorèmes énergétiques extérieurs

### 13.1 Préambule

Les théorèmes énergétiques extérieurs sont ici considérés comme des applications particulières des principes variationnels. Les énoncés ainsi obtenus sont très généraux et très précis, excluant en particulier les nombreuses équivoques qui peuvent naître d'une approche par trop simplifiée.

### 13.2 Théorème de Castigliano

Nous considérerons dans ce qui suit des variations de contraintes gouvernées par un ensemble discret de paramètres  $g_r$ , que nous appellerons *charges généralisées*. Ces variations auront donc la forme

$$\delta\sigma_{ij} = \sum_r \sigma_{ij}^r \delta g_r \quad (13.1)$$

Nous ne ferons aucune hypothèse a priori sur l'admissibilité statique des *modes de contrainte*  $\sigma_{ij}^r$ . Nous utiliserons la fonctionnelle de Hellinger-Reissner

$$\int_V \left[ \sigma_{ij} \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) - \Phi(\sigma) - \bar{f}_i u_i \right] dV - \int_{S_2} \bar{t}_i u_i dS - \int_{S_1} t_i (u_i - \bar{u}_i) dS$$

Les variations de contraintes considérées conduisent à une variation du premier terme que l'on peut mettre sous la forme

$$\sum_r \delta g_r \int_V \sigma_{ij}^r \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) dV = \sum_r \delta g_r q_r \quad (13.2)$$

où apparaissent les *déplacements généralisés*  $q_r$  conjugués aux charges  $g_r$ , donnés par

$$q_r = \int_V \sigma_{ij}^r \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) dV \quad (13.3)$$

Cette définition, qui peut paraître quelque peu artificielle, se simplifie par une intégration par parties : on a en effet

$$q_r = \int_S n_j \sigma_{ij}^r u_i dS - \int_V u_i D_j \sigma_{ij}^r dV$$

et, en faisant apparaître les charges liées au champ de contrainte  $\sigma_{ij}^r$ ,

$$\begin{cases} t_i^r = n_j \sigma_{ij}^r & \text{sur } S \\ f_i^r = -D_j \sigma_{ij}^r & \text{dans } V \end{cases} \quad (13.4)$$

on obtient

$$q_r = \int_S t_i^r u_i dS + \int_V f_i^r u_i dV \quad (13.5)$$

c'est-à-dire que  $q_r$  s'identifie au *travail d'une variation*  $\delta g_r = 1$ .

Appliquant à présent une variation de contrainte de la forme (13.1) dans le principe de Hellinger-Reissner, on obtient les équations de compatibilité globales

$$q_r = \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}^r} \sigma_{ij}^r dV \quad (13.6)$$

qui constituent le *théorème de Castigliano*. On écrit souvent [59, 12, 26, 68, 67] les relations (13.6) sous la forme condensée mais beaucoup moins précise

$$q_r = \frac{\partial \Psi}{\partial g_r} \quad (13.7)$$

où  $\Psi$  est l'énergie complémentaire. Le théorème de Castigliano est largement appliqué pour le calcul des déplacements généralisés, comme nous allons l'illustrer sur un certain nombre d'exemples simples relatifs aux poutres.

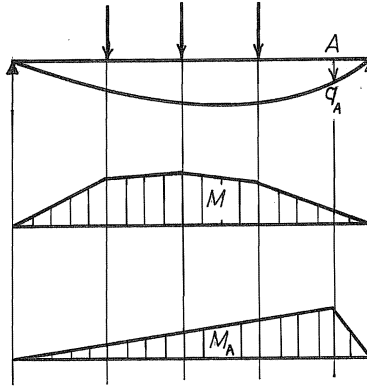


FIGURE 13.1 – Calcul du déplacement du point A.

### 13.2.1 Déplacement d'un point d'une poutre

Soit (*fig.* 13.1) une poutre arbitrairement chargée, dont on désire connaître le déplacement  $q_A$  en un point. Connaissant le diagramme des moments  $M$  que subit la poutre, il suffit de déterminer en outre le diagramme des moments  $M_A$  correspondant à une charge  $g_A = 1$  au point A. Alors, comme

$$\Psi = \int_0^\ell \frac{M^2}{2EI} dx$$

on aura

$$q_A = \int_0^\ell \frac{M}{EI} M_A dx$$

### 13.2.2 Même problème pour une poutre hyperstatique

Lorsque la poutre est hyperstatique, il existe *plusieurs* variations du moment  $M_A$  capables d'équilibrer la charge unitaire en A et dont les déplacements généralisés se limitent à  $q_A$  du fait des fixations. Dans la figure 13.2,  $M_{A_1}$  est obtenu en posant que le moment est nul sur l'appui central. Le déplacement généralisé correspondant à cet état est

$$q_A - q_C \frac{c}{b+c} - q_D \frac{b}{b+c} = q_A$$

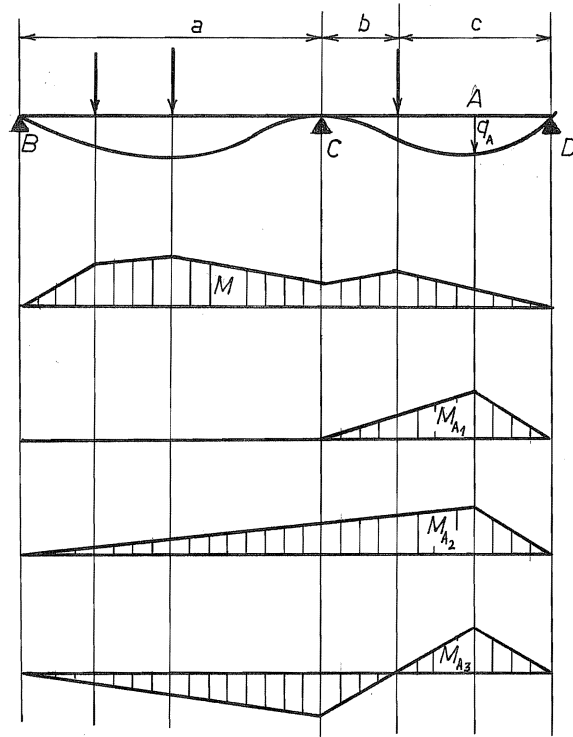


FIGURE 13.2 – Dans le cas d'une poutre hyperstatiques, plusieurs diagrammes de moments  $M_A$  sont possibles.

De même, le déplacement généralisé correspondant à  $M_{A_2}$  est

$$q_A - q_B \frac{c}{a+b+c} - q_D \frac{a+b}{a+b+c} = q_A$$

Enfin, le déplacement généralisé correspondant à  $M_{A_3}$  est de la forme

$$q_A - \alpha q_B - \beta q_c - \gamma q_D = q_A$$

On a donc

$$q_A = \int_0^\ell \ell \frac{M}{EI} M_{A_1} dx = \int_0^\ell \ell \frac{M}{EI} M_{A_2} dx \int_0^\ell \ell \frac{M}{EI} M_{A_3} dx$$

Cette observation permet, dans bien des cas, d'obtenir de notables simplifications. Dans le cas présent, les deux premiers champs de moments sont nettement plus simples que le troisième.

### 13.2.3 Déplacements pondérés

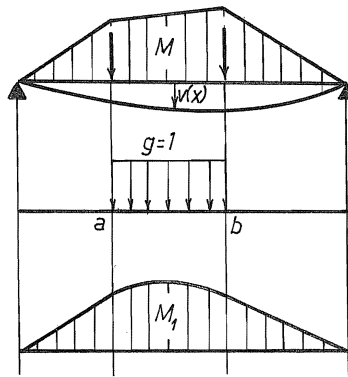


FIGURE 13.3 – Déplacement pondéré.

Soit (*fig. 13.3*) une poutre soumise à une sollicitation quelconque. En considérant une charge répartie entre deux points  $a$  et  $b$  de la poutre, on obtiendra le déplacement généralisé

$$q = \int_a^b v(x) dx$$

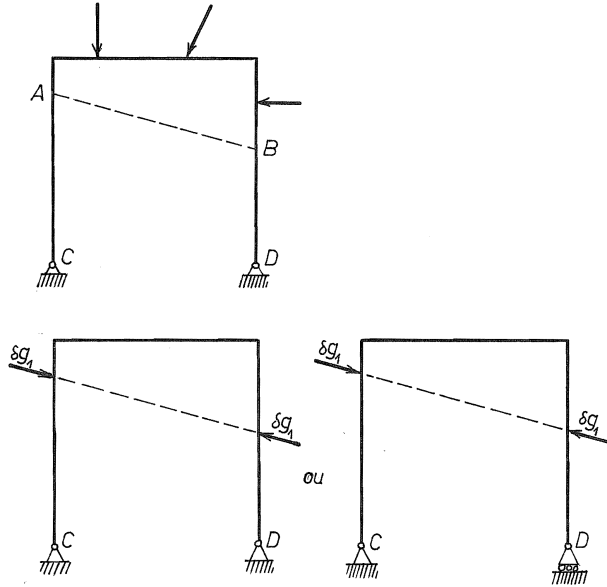
dont la valeur sera

$$q = \int_0^l \frac{M}{EI} M_1 dx$$

où  $M_1$  est un champ de moments équilibrant la charge répartie considérée. On peut obtenir de la sorte de nombreuses espèces de déplacements pondérés.

### 13.2.4 Rapprochement de deux points $A$ et $B$ .

Supposons que l'on veuille connaître le rapprochement de deux points  $A$  et  $B$  du portique représenté en figure 13.4. Ce déplacement  $q_{AB}$  est conjugué au

FIGURE 13.4 – Rapprochement de deux points  $A$  et  $B$  de la structure

couple de charges  $\delta g_1$  représentées dans la même figure et

$$q_{AB} = \frac{\partial \Psi}{\partial g_1}$$

Ici encore, on peut, pour le calcul des  $\sigma_{ij}^1$ , rendre au préalable le système isostatique, par exemple en remplaçant l'articulation en  $D$  par un appui simple.

### 13.2.5 Formules de Navier-Bresse [12, 60, 67]

Considérons une poutre à faible courbure, soumise à une sollicitation plane. L'énergie complémentaire de déformation s'écrit

$$\Psi = \int_0^\ell \left( \frac{N^2}{2E\Omega} + \frac{T^2}{2G\Omega^*} + \frac{M^2}{2EI} \right) ds$$

où  $ds$  est l'élément d'abscisse curviligne le long de la fibre moyenne,  $\Omega$ , la section,  $\Omega^*$ , la section réduite de cisaillement et  $I$ , l'inertie. Dans tout ceci, nous ferons

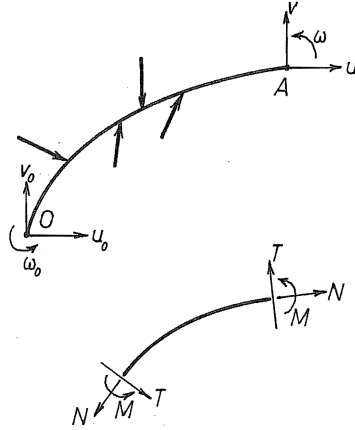


FIGURE 13.5 – Conventions relatives aux signes des efforts et moments.

les conventions de signe indiquées en figure 13.5. Les déplacements  $u_0, v_0, \omega_0$  sont imposés à l'origine et on désire connaître les déplacements en  $A$ . Pour les déterminer, on considère les états de contrainte correspondants à  $\delta F_{x_A}$ ,  $\delta F_{y_A}$  et  $\delta M_A$ .

**État dû à  $\delta g_1 = \delta F_{x_A}$**

La figure 13.6 montre que

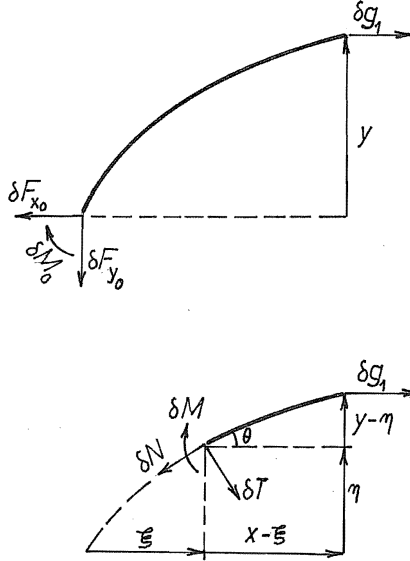
$$\begin{cases} \delta F_{x_0} = \delta g_1 \\ \delta F_{y_0} = 0 \\ \delta M_0 = -y\delta g_1 \end{cases}$$

Le déplacement conjugué est donc donné par

$$\delta \mathcal{T} = -\delta F_{x_0} u_0 - \delta F_{y_0} v_0 - \delta M_0 \omega_0 + \delta F_{x_A} u_A = \delta g_1 (u_A - u_0 + y\omega_0)$$

c'est-à-dire

$$q_1 = u_A - u_0 + y\omega_0$$

FIGURE 13.6 – État dû à  $\delta g_1 = \delta F_{xA}$ .

Par ailleurs, le champ de contrainte est facile à calculer :

$$\begin{aligned}\delta N &= \delta g_1 \cos \theta \\ \delta T &= -\delta g_1 \sin \theta \\ \delta M &= -\delta g_1 (y - \eta)\end{aligned}$$

ce qui donne la première formule de Navier-Bresse

$$u_A = u_0 - \omega_0 y + \int_0^\ell \frac{N \cos \theta}{E\Omega} ds - \int_0^\ell \frac{T \sin \theta}{G\Omega^*} ds - \int_0^\ell \frac{M(y - \eta)}{EI} ds \quad (13.8)$$

**État dû à  $\delta g_2 = \delta F_{yA}$**

On voit sur la figure 13.7 que

$$\delta F_{x_0} = 0, \quad \delta F_{y_0} = \delta g_2, \quad \delta M_0 = x \delta g_2$$

d'où

$$\delta \mathcal{T} = -\delta F_{x_0} u_0 - \delta F_{y_0} v_0 - \delta M_0 \omega_0 + \delta F_{y_A} v_A = \delta g_2 (v_A - v_0 - x \omega_0)$$



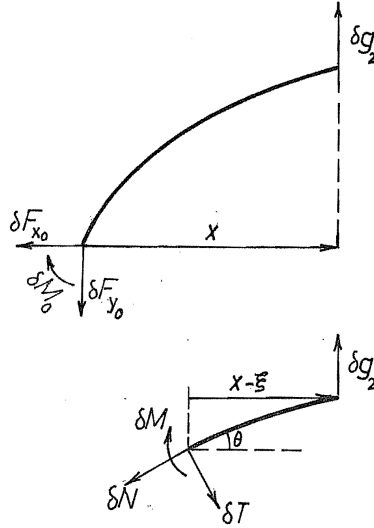


FIGURE 13.7 – État dû à  $\delta g_2 = \delta F_{y_A}$ .

soit

$$q_2 = v_A - v_0 - x\omega_0$$

Le champ de contrainte correspondant sera

$$\begin{aligned} \delta N &= \delta g_2 \sin \theta \\ \delta T &= \delta g_2 \cos \theta \\ \delta M &= (x - \xi) \delta g_2 \end{aligned}$$

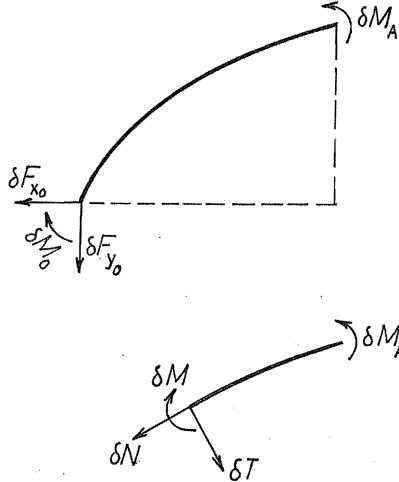
ce qui donne la deuxième formule de Navier-Bresse

$$v_A = v_0 + \omega_0 x + \int_0^\ell \frac{N \sin \theta}{E\Omega} ds + \int_0^\ell \frac{T \cos \theta}{G\Omega^*} ds - \int_0^\ell \frac{M(x - \xi)}{EI} ds \quad (13.9)$$

**État dû à  $\delta g_3 = \delta M_A$**

On voit sur la figure 13.8 que

$$\delta F_{x_0} = 0, \quad \delta F_{y_0} = 0, \quad \delta M_0 = \delta M_A$$

FIGURE 13.8 – État dû à  $\delta M_A$ 

d'où

$$q_3 = \omega_A - \omega_0$$

D'autre part, le champ de contrainte correspondant est

$$\delta M = \delta M_A, \quad \delta N = 0, \quad \delta T = 0$$

ce qui mène à la troisième formule de Navier-Bresse

$$\omega_A = \omega_0 + \int_0^\ell \frac{M}{EI} ds \quad (13.10)$$

Ces formules sont souvent utilisées pour le calcul des déformations des poutres. Lorsque celles-ci sont suffisamment élancées, si  $F$  est l'ordre de grandeur des efforts  $N$  et  $T$ ,  $M$  est de l'ordre de  $F\ell$ ; on a par ailleurs, si  $\rho$  est le rayon de giration de la section de la poutre,

$$\begin{aligned} \Omega &= \mathcal{O}(\rho^2), & \Omega^* &= \mathcal{O}(\rho^2), & I &= \mathcal{O}(\rho^4) \\ \frac{N}{\Omega} &= \mathcal{O}\left(\frac{F}{\rho^2}\right), & \frac{T}{\Omega^*} &= \mathcal{O}\left(\frac{F}{\rho^2}\right), & \frac{M \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}}{I} &= \mathcal{O}\left(\frac{F\ell^2}{\rho^4}\right) \end{aligned}$$

ce qui montre que les déformations dues au moment sont prépondérantes. On obtient alors, en faisant formellement tendre  $\Omega$  et  $\Omega^*$  vers l'infini dans les formules précédentes, les expressions simplifiées dites de Navier :

$$\begin{aligned}
 u &\approx u_0 - \omega_0 y + \int_0^\ell \frac{M(y - \eta)}{EI} ds \\
 v &\approx v_0 + \omega_0 x + \int_0^\ell \frac{M(x - \ell)}{EI} ds \\
 \omega &\approx \omega_0 + \int_0^\ell \frac{M}{EI} ds
 \end{aligned}
 \tag{13.11}$$

### 13.3 Systèmes hyperstatiques - Théorème de Menabrea

On appelle *état d'autocontrainte* un état de contrainte auquel correspond un déplacement généralisé confiné à la partie  $S_1$  de la surface où sont établies les fixations. Dans le cas fréquent où les déplacements imposés sont nuls (absence de tassement d'appuis), le déplacement généralisé est d'ailleurs nul pour la solution cherchée. Ainsi, pour une poutre sur trois appuis, le champ de moment

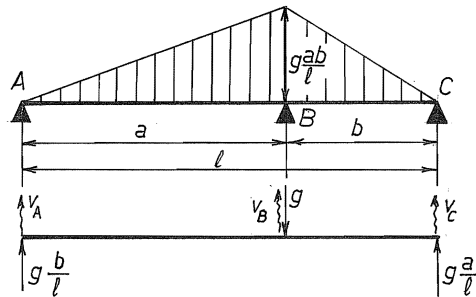


FIGURE 13.9 – État d'autocontrainte de la poutre sur trois appuis.

représenté en figure 13.9 est un état d'autocontrainte, puisqu'il correspond au système de charges composé d'une charge  $g$  vers le bas en  $B$ , d'une charge  $gb/\ell$  en  $A$  et d'une charge  $ga/\ell$  en  $C$ , ces dernières vers le haut. Le déplacement

généralisé correspondant, donné par

$$q = \frac{b}{\ell}v_A - v_B + \frac{a}{\ell}v_C$$

est en effet un pur déplacement d'appuis.

L'existence d'états d'autocontrainte est caractéristique de l'hyperstaticité du système. Il est intéressant de noter qu'il est possible de les interpréter en termes de *coupures*. Ainsi, l'état considéré ci-dessus est le diagramme des moments de la poutre dont on aurait coupé l'appui central, celui-ci étant remplacé par sa réaction. Par cette coupure, on a défini **un système isostatique de référence**  $S_0$  – ici, la poutre sur deux appuis d'extrémité. C'est ainsi que l'on aurait pu, *par exemple*, mettre une rotule en un point  $D$  de la travée  $BC$ , comme l'illustre la figure 13.10. L'état d'autocontrainte correspondant eût alors correspondu à

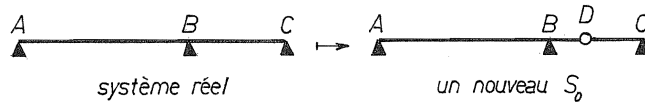


FIGURE 13.10 – Un autre système isostatique de référence.

un couple de moments appliqué à la rotule, voir figure 13.11. C'est exactement

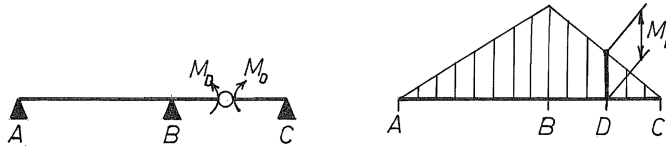


FIGURE 13.11 – Le nouveau système isostatique de référence conduit au *même* état d'autocontrainte.

le même état d'autocontrainte que ci-dessus, à un facteur éventuel près. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'on retrouverait un état de contrainte identique en coupant l'appui  $A$  ou l'appui  $C$  ou encore, en faisant une quelconque coupure des moments : le système considéré n'admet qu'*un seul* état d'autocontrainte indépendant.

Considérons à présent une poutre continue sur quatre appuis  $A, B, C, D$  (fig. 13.12). Une manière de le rendre isostatique consiste à supprimer les deux appuis  $C$  et  $D$ . En appliquant une charge unitaire en  $C$  et en  $D$ , on obtient *deux*

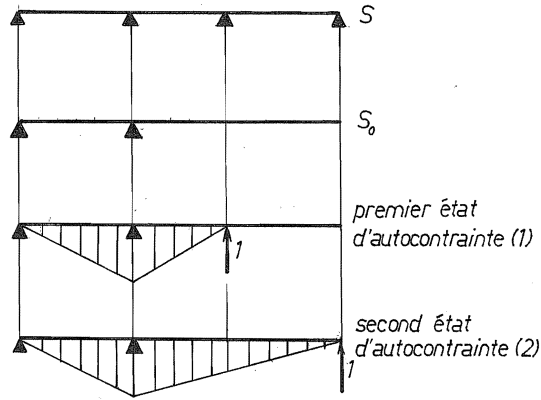


FIGURE 13.12 – Poutre sur quatre appuis. Une première façon de la rendre isostatique.

états d'autocontrainte indépendants. Un autre système isostatique s'obtient en plaçant des rotules au droit des appuis  $B$  et  $C$ , comme l'illustre la figure 13.13.

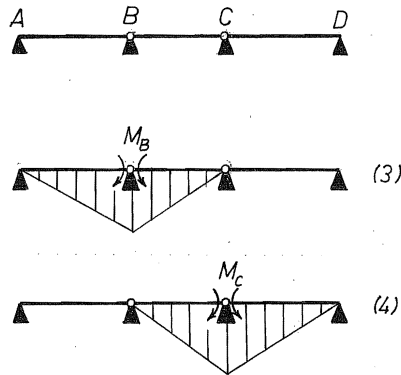


FIGURE 13.13 – Poutre sur quatre appuis. Un autre système isostatique de référence.

En appliquant de couples de moments à ces deux rotules, on obtient apparemment deux autres états d'autocontrainte. Mais ces deux nouveaux états sont

des combinaisons des précédents, comme le montre clairement la figure 13.14. Il

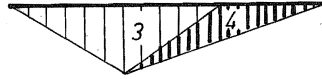


FIGURE 13.14 – L'état d'autocontrainte 2 est une combinaison des états 3 et 4.

n'y a, en fait, que *deux* états d'autocontrainte indépendants pour ce système.

Ces exemples montrent le bien-fondé de la définition suivante : on appelle *degré d'hyperstaticité*  $h$  d'un système élastique le *nombre d'états d'autocontrainte linéairement indépendants de ce système*. Cette définition, tout-à-fait générale, inclut aussi bien l'hyperstaticité intérieure que l'hyperstaticité extérieure. Ainsi, le cadre de la figure 13.15 est trois fois intérieurement hyperstatique (il s'agit d'hyperstaticité cinématique : le corps est doublement connexe).

Un système isostatique de référence s'obtient en plaçant des rotules en  $B$ ,  $C$  et  $D$  et on en déduit aisément les trois modes d'autocontrainte représentés. La caractéristique de modes d'autocontrainte purement intérieurs comme ceux-ci est que les déplacements généralisés correspondants sont toujours nuls.

La notion de mode d'autocontrainte sert de fondement à une méthode de résolution des systèmes hyperstatiques que l'on appelle *méthode des forces*. Son principe est le suivant. Les équations d'équilibre, sous les charges de volume et les tractions de surface sur  $S_2$ , admettent la solution générale

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sum_{k=1}^h \hat{\sigma}_{ij}^k \hat{g}_k \quad (13.12)$$

où  $\sigma_{ij}^0$  représente une *solution particulière* des équations d'équilibre sous les charges données, tandis que les  $\hat{\sigma}_{ij}^k$  sont les états d'autocontrainte, gouvernés par les charges généralisées  $\hat{g}_k$ <sup>1</sup> que l'on appelle, en la circonstance, *inconnues hyperstatiques*. La solution particulière s'obtient dans un système isostatique de référence *quelconque*, éventuellement même différent du système ayant présidé à la détermination des états d'autocontrainte. Il est clair que les coupures ayant mené à la solution particulière ont rompu la compatibilité, mais celle-ci pourra être rétablie en faisant usage du principe de Hellinger-Reissner, où la variation des contraintes a précisément pour objet de l'obtenir. Le champ  $\sigma_{ij}^0$  étant choisi

1. Les accents circonflexes sont destinés à marquer qu'il s'agit d'états d'autocontrainte.

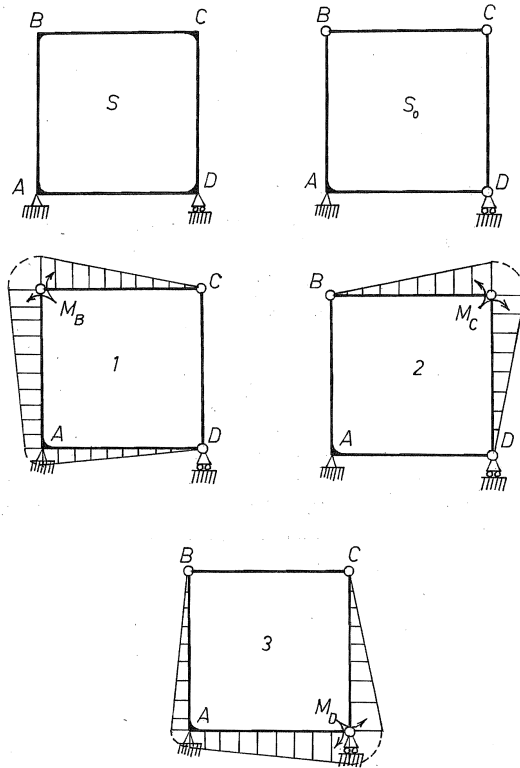


FIGURE 13.15 – Cadre.

une fois pour toutes, on aura

$$\delta\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^h \hat{\sigma}_{ij}^k \delta\hat{g}_k \quad (13.13)$$

Par définition, les déplacements généralisés conjugués aux états d'autocontrainte sont toujours imposés – le plus souvent nuls, d'ailleurs. Nous les noterons donc  $\bar{q}_k$ , conformément à nos conventions générales. L'application particulière du

principe de Hellinger-Reissner à ce problème mène à la condition

$$\sum_{k=1}^h \delta \hat{g}_k \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \hat{\sigma}_{ij}^k dV = \sum_{k=1}^h \bar{q}_k \delta \hat{g}_k$$

qui entraîne, vu l'arbitraire des  $\delta \hat{g}_k$ , les équations

$$\int_V \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \hat{\sigma}_{ij}^k dV = \bar{q}_k \quad (13.14)$$

constituant le *théorème de Menabrea* sous sa forme la plus générale. Le même résultat aurait d'ailleurs pu être déduit du principe du minimum de l'énergie complémentaire totale, car les variations de contrainte considérées sont statiquement admissibles.

## 13.4 Exemples d'application des deux théorèmes précédents

### 13.4.1 Arc à deux articulations

A titre d'illustration, proposons-nous de calculer le déplacement de la clef d'un arc à deux articulations soumis à une charge verticale appliquée sur ladite clef (*fig.* 13.16). On commence par chercher une solution particulière, qui s'obtient le plus simplement en plaçant une rotule sous la charge. Il est aisé de se rendre compte que cette solution sera

$$M_0 = \frac{P}{2 \cos \alpha} y$$

$y$  étant représenté sur la figure. Quant à l'état d'autocontrainte, on l'obtient aisément en remplaçant l'appui  $C$  par un appui à rouleaux. Nous noterons  $\hat{M}$  le champ de moment correspondant. Le déplacement conjugué est

$$\hat{q} = u_C - u_A$$

nul dans la solution. Cette dernière est de la forme

$$M = M_0 + \hat{g} \hat{M}$$

$\hat{g}$  étant déterminé par la condition

$$\int_0^\ell \frac{M \hat{M}}{EI} ds = \int_0^\ell \frac{M_0 \hat{M}}{EI} ds + \hat{g} \int_0^\ell \frac{\hat{M}^2}{EI} ds = 0$$



13.4. EXEMPLES D'APPLICATION DES DEUX THÉORÈMES PRÉCÉDENTS 457

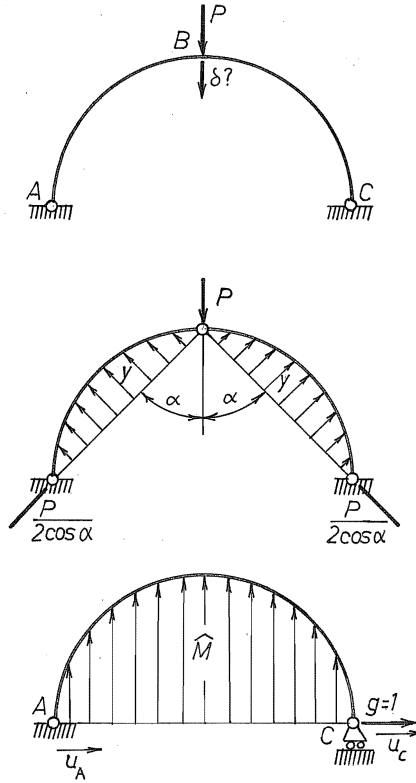


FIGURE 13.16 – Arc à deux articulations.

soit

$$\hat{g} = - \frac{\int_0^\ell \frac{M_0 \hat{M}}{EI} ds}{\int_0^\ell \frac{\hat{M}^2}{EI} ds}$$

L'état de contrainte étant déterminé, on calcule le déplacement par le théorème de Castigliano. A cet effet, il suffit de connaître une distribution de moment équilibrant une charge unitaire à la clef. Une telle distribution est donnée par

$$\mu(s) = \frac{M_0}{P}$$

Par le théorème de Castigliano, on a donc

$$u = \int_0^\ell \frac{M\mu}{EI} ds = \frac{1}{P} \int_0^\ell \frac{MM_0}{EI} ds$$

### 13.4.2 Coupures généralisées

Pour illustrer le fait que la notion de coupure peut être parfois inattendue, considérons le système à trois barres de la figure 13.17, soumis à une charge  $P$ . Les équations d'équilibre des trois barres s'écrivent

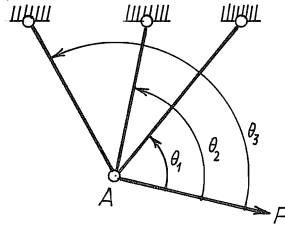


FIGURE 13.17 – Système à trois barres.

$$\begin{cases} N_1 \cos \theta_1 + N_2 \cos \theta_2 + N_3 \cos \theta_3 + P = 0 \\ N_1 \sin \theta_1 + N_2 \sin \theta_2 + N_3 \sin \theta_3 = 0 \end{cases}$$

Pour obtenir des solutions particulières à ces équations, on peut poser  $N_1 = 0$ ,  $N_2 = 0$  ou encore  $N_3 = 0$ , ce qui revient à couper la barre correspondante. Mais on peut aussi bien écrire par exemple  $N_1 = kN_2$ , avec  $k$  quelconque. C'est ce que l'on appelle une coupure généralisée, pour la simple raison que sa réalisation technique ne saute pas aux yeux. Elle est cependant possible à l'aide d'un système hydraulique composé de deux vérins dont les pistons ont des surfaces  $kS$  pour la barre 1 et  $S$  pour la barre 2 (fig. 13.18). Une connexion hydraulique garantit l'égalité des pressions, d'où

$$N_1 = kSp, \quad N_2 = Sp$$

ce qui implique  $N_1 = kN_2$ . Dans ces conditions, la solution particulière vérifie

$$\begin{cases} N_{2_0}(k \cos \theta_1 + \cos \theta_2) + N_{3_0} \cos \theta_3 = -P \\ N_{2_0}(k \sin \theta_1 + \sin \theta_2) + N_{3_0} \sin \theta_3 = 0 \end{cases}$$

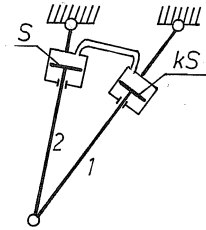


FIGURE 13.18 – Coupure généralisée obtenue à l'aide de vérins.

ce qui donne successivement

$$N_{3_0} = -\frac{N_{2_0}(k \sin \theta_1 + \sin \theta_2)}{\sin \theta_3}$$

et

$$N_{2_0}[k \cos \theta_1 + \cos \theta_2 - (k \sin \theta_1 + \sin \theta_2) \cotg \theta_3] = -P$$

ce qui permet de calculer  $N_{2_0}$ ,  $N_{3_0}$  et enfin  $N_{1_0}$ . Bien entendu, cette solution particulière n'est pas la plus simple. Aussi allons-nous en chercher une qui, elle, l'est particulièrement. Elle consiste à imposer la condition

$$N_{1_0} = -N_{2_0} \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1}$$

ce qui donne directement

$$N_{3_0} = -\frac{P}{\cos \theta_3}$$

et

$$N_{2_0}(\sin \theta_2 - \tg \theta_1 \cos \theta_2) = -N_{3_0} \sin \theta_3 = P \tg \theta_3$$

Quant à l'état d'autocontrainte, il doit vérifier la double condition

$$\begin{cases} \hat{N}_1 \cos \theta_1 + \hat{N}_2 \cos \theta_2 + \hat{N}_3 \cos \theta_3 = 0 \\ \hat{N}_1 \sin \theta_1 + \hat{N}_2 \sin \theta_2 + \hat{N}_3 \sin \theta_3 = 0 \end{cases}$$

On peut poser, par exemple,  $\hat{N}_3 = 1$ , ce qui donne

$$\begin{cases} \hat{N}_1 \cos \theta_1 + \hat{N}_2 \cos \theta_2 = -\cos \theta_3 \\ \hat{N}_1 \sin \theta_1 + \hat{N}_2 \sin \theta_2 = -\sin \theta_3 \end{cases}$$

Il est aisé de voir que la solution est unique : le système est une fois hyperstatique. La solution a donc la forme

$$N_1 = N_{1_0} + \hat{g}\hat{N}_1, \quad N_2 = N_{2_0} + \hat{g}\hat{N}_2, \quad N_3 = N_{3_0} + \hat{g}\hat{N}_3$$

avec la condition

$$\int_0^{\ell_1} \frac{(N_{1_0} + \hat{g}\hat{N}_1)\hat{N}_1}{E_1\Omega_1} dx + \int_0^{\ell_2} \frac{(N_{2_0} + \hat{g}\hat{N}_2)\hat{N}_2}{E_2\Omega_2} dx + \int_0^{\ell_3} \frac{(N_{3_0} + \hat{g}\hat{N}_3)\hat{N}_3}{E_3\Omega_3} dx = 0$$

soit

$$\hat{g} = - \frac{\int_0^{\ell_1} \frac{N_{1_0}\hat{N}_1}{E_1\Omega_1} dx + \int_0^{\ell_2} \frac{N_{2_0}\hat{N}_2}{E_2\Omega_2} dx + \int_0^{\ell_3} \frac{N_{3_0}\hat{N}_3}{E_3\Omega_3} dx}{\int_0^{\ell_1} \frac{\hat{N}_1^2}{E_1\Omega_1} dx + \int_0^{\ell_2} \frac{\hat{N}_2^2}{E_2\Omega_2} dx + \int_0^{\ell_3} \frac{\hat{N}_3^2}{E_3\Omega_3} dx}$$

### 13.5 Théorème de Clapeyron extérieur

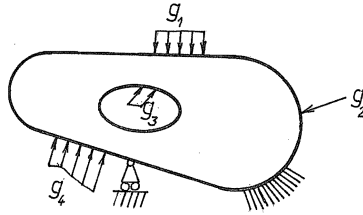


FIGURE 13.19 – Théorème de Clapeyron extérieur.

Proposons-nous de calculer l'énergie complémentaire en termes des charges et déplacements généralisés (fig. 13.19). Les forces appliquées, gouvernées par des charges généralisées d'intensité  $g_1, \dots, g_n$ , peuvent être équilibrées par des champs de contraintes particuliers  $\sigma_{ij}^1, \dots, \sigma_{ij}^n$  (non nécessairement compatibles), auxquels il convient d'ajouter une combinaison des  $h$  états d'autocontrainte  $\hat{\sigma}_{ij}^1, \dots, \hat{\sigma}_{ij}^h$ . On a donc en général

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^n \sigma_{ij}^k g_k + \sum_{\ell=1}^h \hat{\sigma}_{ij}^\ell \hat{g}_\ell \quad (13.15)$$

Lorsque le matériau a des propriétés homogènes de degré 1, on a

$$\Phi(\sigma) = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij}$$

d'où, par intégration,

$$\begin{aligned} \Psi(\sigma) &= \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij} dV \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n g_k \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij}^k dV + \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^h \hat{g}_\ell \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \hat{\sigma}_{ij}^\ell dV \end{aligned}$$

soit, en faisant appel aux théorèmes de Castigliano et de Menabrea,

$$\Psi(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n g_k q_k + \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^h \hat{g}_\ell \bar{q}_\ell \quad (13.16)$$

C'est le théorème de Clapeyron extérieur.

### 13.6 Théorème de réciprocité de Betti

Considérons (*fig. 13.20*) un corps élastique soumis à deux systèmes de charges différents, caractérisés par les charges généralisées  $g_r^{(1)}$  pour le premier et  $g_r^{(2)}$  pour le second. Chacun peut en outre avoir des déplacements imposés,  $\bar{q}_\ell^{(1)}$  pour le premier et  $\bar{q}_\ell^{(2)}$  pour le second. Calculons la valeur du travail croisé

$$\mathcal{T}_{12} = \sum_{k=1}^n g_k^{(1)} q_k^{(2)} + \sum_{\ell=1}^h \hat{g}_\ell^{(1)} \bar{q}_\ell^{(2)}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{12} &= \sum_{k=1}^n g_k^{(1)} \int_V \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{(2)} \sigma_{ij}^{k(1)} dV + \sum_{\ell=1}^h \hat{g}_\ell^{(1)} \int_V \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{(2)} \hat{\sigma}_{ij}^{\ell(1)} dV \\ &= \int_V \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{(2)} \sigma_{ij}^{(1)} dV \\ &= \int_V C_{ijpq}^{-1} \sigma_{ij}^{(1)} \sigma_{pq}^{(2)} dV \end{aligned}$$

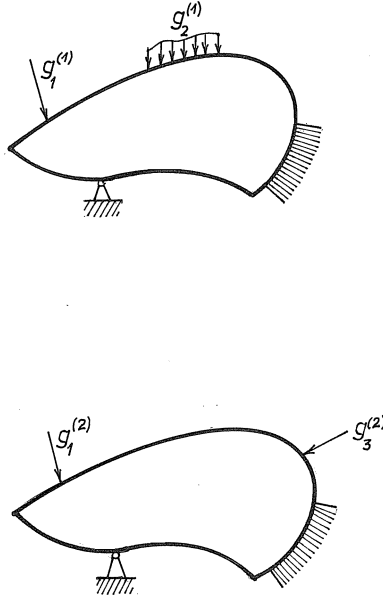


FIGURE 13.20 – Théorème de réciprocité de Betti.

en supposant le corps linéairement élastique. On obtiendrait de la même façon

$$\mathcal{T}_{21} = \sum_{k=1}^n g_k^{(2)} q_k^{(1)} + \sum_{\ell=1}^h \hat{g}_\ell^{(2)} \bar{q}_\ell^{(1)} = \int_V C_{ijpq}^{-1} \sigma_{ij}^{(2)} \sigma_{pq}^{(1)} dV$$

Vu la symétrie des relations de Hooke, on en déduit  $\mathcal{T}_{12} = \mathcal{T}_{21}$ , soit explicitement

$$\sum_{k=1}^n g_k^{(1)} q_k^{(2)} + \sum_{\ell=1}^h \hat{g}_\ell^{(1)} \bar{q}_\ell^{(2)} = \sum_{k=1}^n g_k^{(2)} q_k^{(1)} + \sum_{\ell=1}^h \hat{g}_\ell^{(2)} \bar{q}_\ell^{(1)} \quad (13.17)$$

C'est le *théorème de réciprocité de Betti*. On l'énonce souvent en supposant les déplacements imposés nuls, ce qui donne

$$\sum_{k=1}^n g_k^{(1)} q_k^{(2)} = \sum_{k=1}^n g_k^{(2)} q_k^{(1)} \quad (13.18)$$

## 13.7 Théorème de réciprocité de Maxwell

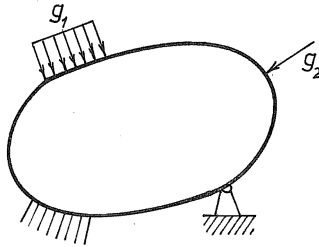


FIGURE 13.21 – Théorème de réciprocité de Maxwell.

Considérons (*fig.* 13.21) le cas de deux charges généralisées  $g_1$  et  $g_2$ , sans tassement d'appui, et supposons que

$$\begin{cases} g_1^{(1)} = 1, & g_2^{(1)} = 0 \\ g_1^{(2)} = 0, & g_2^{(2)} = 1 \end{cases}$$

On a alors, par le théorème de Betti,

$$q_2^{(1)} = q_1^{(2)}$$

C'est le *théorème de réciprocité de Maxwell* : le déplacement généralisé  $q_2$  sous la charge  $g_1 = 1$  est égal au déplacement généralisé  $q_1$  sous la charge  $g_2 = 1$ .





# Chapitre 14

## Diagrammes d'influence

### 14.1 Notion de diagramme d'influence

Dans un certain nombre d'applications pratiques, on s'intéresse à un *effet* particulier : déplacement généralisé, force généralisée, pour un grand nombre de cas de charge. L'exemple le plus typique est celui du pont où en défilant, un train prend toutes les positions possibles sur le tablier, chacune correspondant à une sollicitation particulière. Le diagramme d'influence est précisément la représentation de la grandeur de l'effet considéré pour une charge unitaire placée en un point quelconque. Dans le cas d'une charge composée, il suffit alors de sommer les effets.

### 14.2 Diagramme d'influence d'un déplacement généralisé

Soit à chercher le diagramme d'influence d'un déplacement généralisé  $q_0$  (fig. 14.1). Traçons la déformée de la structure sous une charge conjuguée  $g_0 = 1$ . On notera que, par le théorème de Betti, le travail d'une charge quelconque  $g_1$  sur cette déformée, soit  $g_1 q_1^{(0)}$ , est égal au travail de  $g_0$  pour la déformée due à la charge  $g_1$ , ce qui s'écrit

$$\mathcal{T}_{10} = g_1 q_1^{(0)} = \mathcal{T}_{01} = g_0 q_0^{(1)} = q_0^{(1)}$$

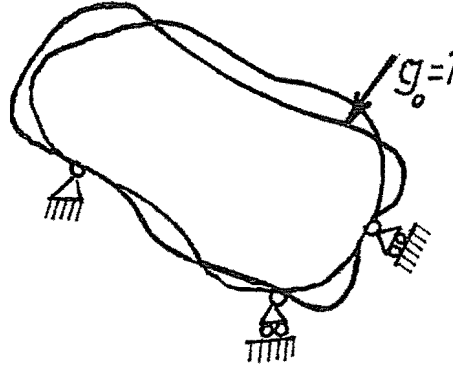


FIGURE 14.1 – Ligne d'influence d'un déplacement généralisé.

Ainsi, le déplacement considéré  $q_0^{(1)}$  dû à une charge quelconque  $g_1$  est égal au travail de cette charge pour la déformée due à la charge unitaire  $g_0 = 1$ . Cette déformée constitue donc le diagramme d'influence du déplacement  $q_0$ .

### 14.3 Diagramme d'influence d'un effet de type effort

Pour ce problème, les exposés classiques [12, 67] distinguent le cas des structures isostatiques, où il est d'usage d'invoquer le principe des travaux virtuels, du cas des structures hyperstatiques, pour lesquelles on fait appel au principe de réciprocité. Voici un exposé unifié fondé sur le principe de variation des déplacements.

Soit  $F$  l'effort généralisé (contrainte, réaction, etc.) dont on cherche le diagramme d'influence et soit  $d(u)$  le déplacement conjugué à  $F$  pour un champ de déplacement  $u$ .  $F$  sera par exemple (fig. 14.2) la réaction au point  $A$  d'une poutre, le moment en un point  $D$  de cette poutre, etc. Une règle essentielle est que le déplacement  $d(u)$  doit être nul pour toute variation de déplacement cinématiquement admissible. C'est le cas pour les deux exemples considérés ci-dessus, car à la réaction est conjuguée la violation de la condition d'appui et au moment en  $D$ , un saut de rotation en ce point.

Pour faire apparaître  $d(u)$  dans le principe de variation des déplacements, on relâche la condition  $d(u) = 0$  en faisant la coupure voulue : on coupera l'appui

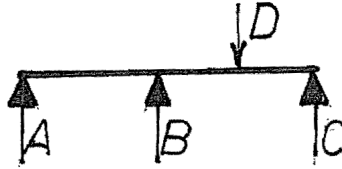


FIGURE 14.2 – Poutre sur trois appuis.

en  $A$ , ou l'on installera une rotule en  $D$ . On utilise alors la *fonctionnelle énergie totale augmentée*

$$\mathcal{U}^* + \mathcal{P} - Fd(u) \tag{14.1}$$

où  $F$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la condition  $d(u) = 0$ . La notation  $\mathcal{U}^*$  rappelle que le système a subi une coupure, ce dont il faut tenir compte dans le calcul de l'énergie, en faisant une coupure dans les intégrations. Pour la commodité, nous utiliserons la notation

$$\mathcal{U}^*(u) = \frac{1}{2}a^*(u, u), \quad \delta\mathcal{U}^* = a^*(u, \delta u) = \int_V^* C_{ijkl}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{kl}(\delta u)dV \tag{14.2}$$

qui fait bien apparaître le caractère de forme bilinéaire de l'énergie. Soit alors  $v$  le champ de déplacement tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} d(v) = -1 \\ a^*(v, \delta u) = 0 \quad \forall \delta u \text{ tel que } d(\delta u) = 0 \end{array} \right\} \tag{14.3}$$

Ces conditions signifient que l'on cherche le champ de déplacement  $v$  tel que  $d(v) = -1$  et qu'en outre, l'équilibre soit satisfait en l'absence de charges extérieures. Pour la poutre de la figure 14.12, ce sera le champ de déplacement représenté en figure 14.3. Pour une poutre sur deux appuis  $A$  et  $B$ , dont on

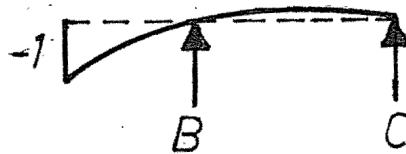


FIGURE 14.3 – Déplacement  $v$  lié à la réaction en  $A$ .

recherche la réaction  $R_A$ , il s'agira du déplacement de corps rigide indiqué en

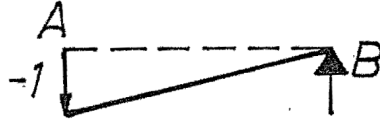


FIGURE 14.4 – Cas d'une poutre sur deux appuis.

figure 14.4. Le champ de déplacement réel de la structure sous les charges rend la fonctionnelle (14.1) stationnaire, ce qui s'écrit

$$a^*(u, \delta u) + \mathcal{P}(\delta u) - Fd(\delta u) = 0$$

pour tout  $\delta u$ . Le choix particulier  $\delta u = v$  donne

$$a^*(u, v) + \mathcal{P}(v) - Fd(v) = 0$$

Mais on a d'une part  $d(v) = -1$  et d'autre part, comme  $d(u) = 0$ , on a également  $a^*(u, v) = 0$ , ce qui implique

$$F = -\mathcal{P}(v) = \mathcal{T}(v) \quad (14.4)$$

On obtient ainsi le théorème de Land :

**Théorème 11** *Pour obtenir le diagramme d'influence d'un effort  $F$ , on fait une coupure relative à cet effort. On cherche alors le déplacement du système coupé tel que, d'une part, la valeur du déplacement conjugué à l'effort considéré soit égal à  $(-1)$  et que, d'autre part, l'équilibre soit vérifié en l'absence de charges. La valeur de  $F$  pour une mise en charge quelconque est alors égale au travail de cette mise en charge pour le déplacement en question.*

### 14.3.1 Remarque

Dans le cas d'une structure isostatique, le déplacement en question est le seul déplacement sans déformation de la structure coupée.

## 14.4 Exemples

### 14.4.1 Réaction d'une poutre sur deux appuis

Soit à déterminer la réaction en  $B$  de la poutre de la figure 14.5 posée sur deux appuis  $A$  et  $B$  et soumise à trois charges  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ . On coupe l'appui

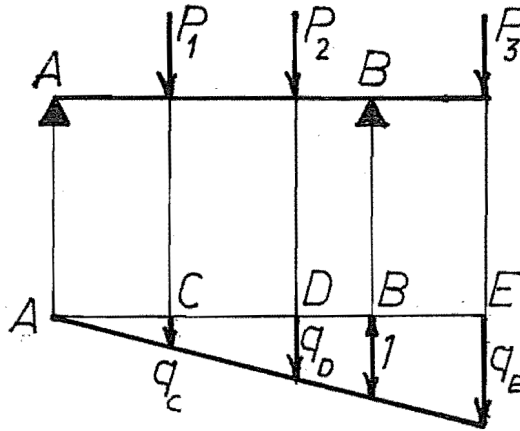


FIGURE 14.5 – Réaction d'une poutre sur deux appuis.

en  $B$  et on donne à la poutre un déplacement unitaire en ce point, dans le sens inverse à  $R_B$ . On a alors

$$q_C = \frac{AC}{AB}, \quad q_D = \frac{AD}{AB}, \quad q_E = \frac{AE}{AB}$$

d'où

$$R_B = P_1 \frac{AC}{AB} + P_2 \frac{AD}{AB} + P_3 \frac{AE}{AB}$$

#### 14.4.2 Effort tranchant d'une poutre sur deux appuis

On considère la poutre sur deux appuis avec encorbellements de la figure 14.6, soumise à un système de charges  $P_1, P_2, P_3, P_4$ . On désire connaître l'effort tranchant au point  $C$ . Pour obtenir la ligne d'influence, on effectue une coupure simple relative à l'effort tranchant (coupure de cet effort uniquement). Cette coupure peut être conçue comme réalisée à l'aide de deux plateaux permettant de passer le moment mais non l'effort tranchant. Ces plateaux, étant infiniment rigides, ne permettent que les déformations où les lèvres de la coupure restent parallèles entre elles. la ligne d'influence est représentée sur la figure. On en

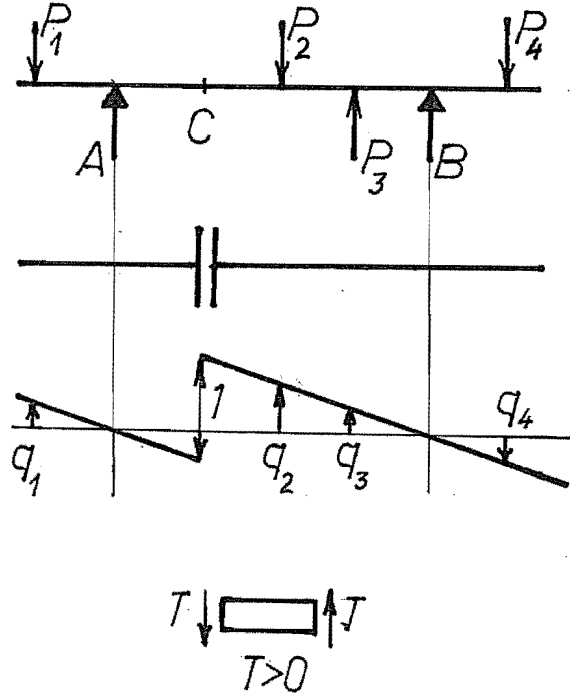


FIGURE 14.6 – Effort tranchant d'une poutre sur deux appuis.

déduit, pour la mise en charge donnée,

$$\begin{aligned}
 T_C &= P_1 \cdot q_1 + P_2 \cdot q_2 + P_3 \cdot q_3 + P_4 \cdot q_4 \\
 &= -P_1 \frac{AD}{AC} - P_2 \frac{BE}{BC} + P_3 \frac{BF}{BC} + P_4 \frac{BG}{BC}
 \end{aligned}$$

### 14.4.3 Moment d'une poutre cantilever

Une poutre cantilever est une poutre sur appuis multiples rendue isostatique à l'aide de rotules. Soit par exemple à déterminer la ligne d'influence du moment en  $E$  de la poutre cantilever de la figure 14.7. On pratique la coupure simple relative aux moments en  $E$ , qui consiste en une rotule en ce point, comme le montre la figure 14.8. La seule difficulté réside dans la détermination de

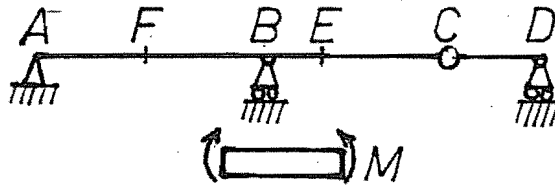


FIGURE 14.7 – Moment d'une poutre cantilever.

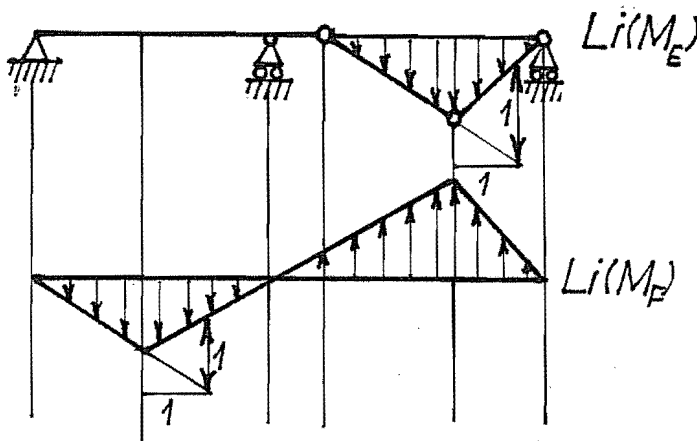


FIGURE 14.8 – Ligens d'influence des moments en  $E$  et  $F$ .

l'unité : l'angle est en principe unitaire, mais comme il s'agit d'un déplacement infinitésimal, c'est un segment rectiligne situé à une distance horizontale unitaire de  $C$  qui doit avoir une longueur égale à 1. On a également représenté sur la figure la ligne d'influence du moment en  $F$ .

#### 14.4.4 Moment dans un arc à trois articulations avec mise en charge indirecte

Pour tracer la déformée de l'arc de la figure 14.9 où l'on aura préalablement inséré une rotule en  $B$ , on peut chercher le centre instantané de rotation  $R$  de la section  $BC$  comme indiqué en figure 14.10. La déformation de l'arc est

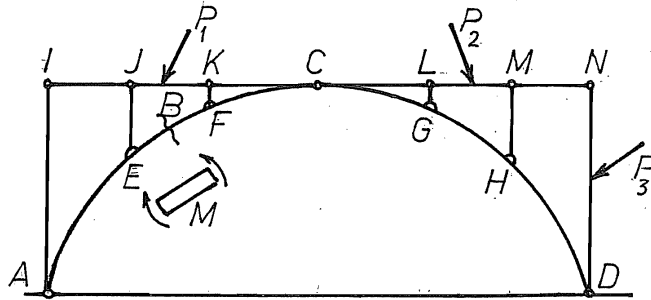


FIGURE 14.9 – Arc à trois articulations à mise en charge indirecte.

alors simple à obtenir, et les poteaux et passerelles suivent en gardant leur longueur, ce qui permet de faire la construction au compas. La seule difficulté est de définir l'unité. Avant déformation, les points  $A, B, R$  sont en ligne droite et le déplacement  $BB'$  du point  $B$  mesure la rotation des deux parties. C'est dans cette direction que doit être mesurée la rotation : à une distance égale à 1 (dans la direction  $RA$ ), l'unité  $u$  est parallèle à  $BB'$ . Pour une mise en charge  $(P_1, P_2, P_3)$ , on aura donc

$$M_B = \frac{1}{u} (P_1 \cdot q_1 + P_2 \cdot q_2 + P_3 \cdot q_3)$$

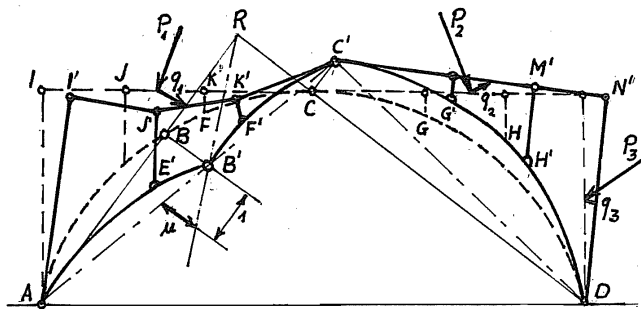


FIGURE 14.10 – Diagramme d'influence du moment en B.



### 14.4.5 Réaction de l'appui intermédiaire d'une poutre sur trois appuis

La figure 14.11 est suffisamment explicite pour se passer de commentaires.

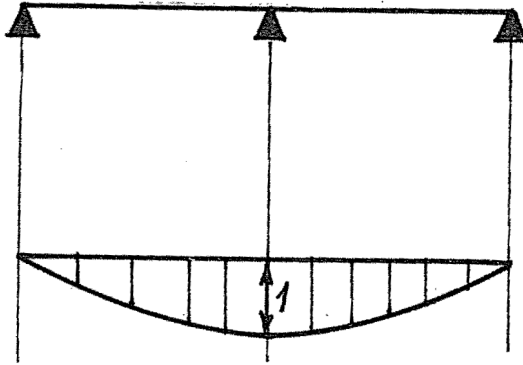


FIGURE 14.11 – Ligne d'influence de la réaction de l'appui intermédiaire d'une poutre sur trois appuis.

### 14.4.6 Effort dans une barre quelconque d'un treillis isostatique

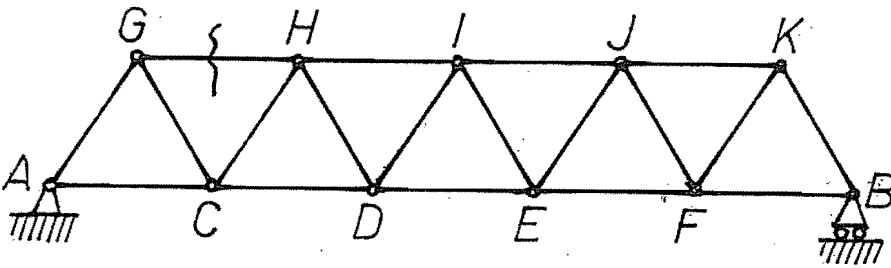


FIGURE 14.12 – Treillis.

Sur le treillis de la figure 14.12, soit à déterminer l'influence d'une charge sur l'effort de traction dans la barre  $GH$ . Le déplacement conjugué à cet effort (la

barre  $GH$  étant coupée) est le rapprochement des deux points  $G$  et  $H$  dans la direction  $GH$ . On donne à ce déplacement la valeur  $(-1)$ . On détermine alors la déformée du treillis, par les méthodes classiques de la cinématique des travaux virtuels (fig. 14.13). La valeur de l'effort de la barre  $GH$  pour une charge  $P_1$  est

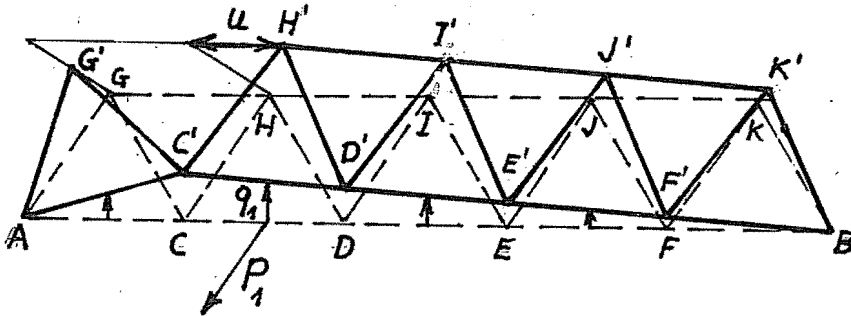


FIGURE 14.13 – Diagramme d'influence de l'effort dans la barre  $GH$ .

donc

$$N_{GH} = \frac{1}{u} P_1 \cdot q_1$$

## Chapitre 15

# Stabilité des systèmes élastiques

### 15.1 Introduction

Le problème de la stabilité d'un équilibre élastique se pose notamment dans le cas d'une colonne comprimée par une charge  $P$  (*fig.* 15.1). Si la colonne est

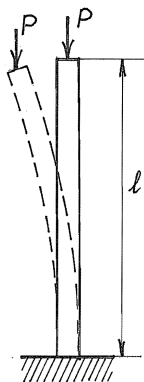


FIGURE 15.1 – Flambage.

suffisamment longue, on observe qu'à partir d'une charge donnée, elle fléchit,

prenant ainsi une nouvelle position d'équilibre assez éloignée de la précédente.<sup>1</sup> Il s'agit évidemment d'une instabilité. Dans le cas considéré, elle porte le nom de *flambage* et mène le plus souvent à la ruine de l'édifice que soutient la colonne. C'est dire l'importance pratique du phénomène.

Nous avons vu, lors de l'étude de l'élasticité géométriquement linéarisée, que tout état d'équilibre était stable dans le cadre de cette théorie. En conséquence, la théorie de la stabilité relève à priori de l'élasticité non linéaire (grands déplacements).

## 15.2 Principe du minimum de l'énergie

Soit une structure en équilibre sous un système de charges, et soit  $\mathcal{E}$  l'énergie totale correspondant à cet état d'équilibre. De nombreuses causes fortuites, au nombre desquelles il faut compter les vibrations de la fondation, l'effet du vent, etc., peuvent donner à la structure une certaine énergie cinétique  $T$ . Il s'agit en l'occurrence de vitesses tendant à déplacer la structure de son état d'équilibre. Pour que ce déplacement ne croisse pas indéfiniment, il faudra que la variation d'énergie totale  $\mathcal{E}$  tende à diminuer l'énergie cinétique. Or, la conservation de l'énergie implique

$$\Delta\mathcal{E} + \Delta T = 0 \quad (15.1)$$

si bien que pour obtenir  $\Delta T < 0$  en s'écartant de l'équilibre, il faudra que  $\Delta\mathcal{E} > 0$ . Dans ce cas, la structure se mettra à osciller, jusqu'à ce que l'amortissement inévitable, bien que souvent faible, anihile la vibration. Ainsi, *la condition de stabilité de l'équilibre est que, lors d'un déplacement à partir de la position d'équilibre, l'énergie totale augmente*. C'est la *condition de Lejeune-Dirichlet* Dirichlet1847. Il est équivalent de dire qu'un équilibre stable correspond à un *minimum* d'énergie totale.

Il convient de noter que ce principe ne permet que de garantir la *stabilité infinitésimale*, c'est-à-dire que la stabilité n'est garantie que pour des perturbations suffisamment petites. Il est très possible qu'une perturbation assez grande entraîne le passage par un autre point où l'énergie est maximale, entraînant ainsi la structure vers un autre minimum qui constituera une nouvelle position d'équilibre stable. Une comparaison utile et classique consiste à raisonner sur le problème d'une bille dans une chaîne de montagnes. Dans le cas représenté en figure 15.2, les points  $A$  et  $B$  sont deux positions d'équilibre stable. Mais en

1. Pour pouvoir observer ce phénomène à l'état pur, il convient d'utiliser une colonne faite d'un matériau à haute limite élastique, car dans le cas contraire, la flexion risque de produire une déformation plastique menant à la ruine.

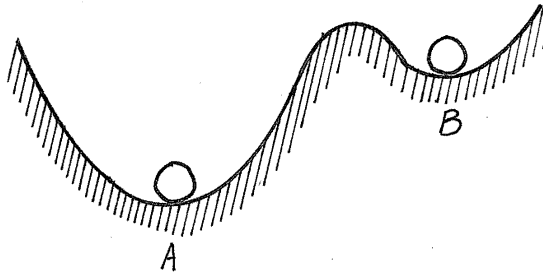


FIGURE 15.2 – Analogie de la bille.

donnant une énergie suffisant à la bille, il est possible de passer d'une position à l'autre. Observons que ce problème est moins académique qu'il ne pourrait sembler. Ainsi [26], si l'on place un crayon sur sa face extrême plane, comme l'illustre la figure 15.3, il est stable au sens infinitésimal, car tout petit mouvement autour de sa position d'équilibre relève son centre de gravité. Néanmoins,

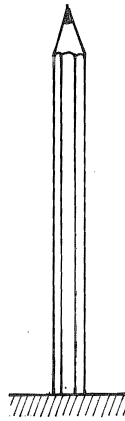


FIGURE 15.3 – Ce crayon est stable au sens infinitésimal, mais il s'agit d'une stabilité est précaire.

il s'agit d'un équilibre précaire, car il existe un seuil, fort proche de la verticale, où le centre de gravité passe par une hauteur maximale, suite à quoi il redes-

pend. Un exemple similaire est celui de la bille maintenue en un sommet par une fraisure (fig. 15.4). On peut donc dire que, dans un certain sens, l'étude

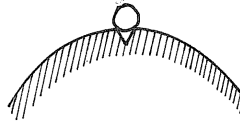


FIGURE 15.4 – Bille maintenue en équilibre par une fraisure.

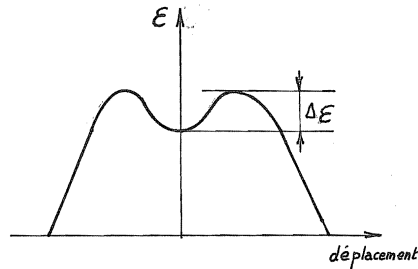


FIGURE 15.5 – La stabilité devrait être mesurée par l'énergie à apporter pour la détruire.

de la stabilité infinitésimale est incomplète et que la stabilité d'un équilibre donné devrait en fait être mesurée par la plus petite différence d'énergie entre l'état considéré et une instabilité voisine, comme l'illustre la figure 15.5. Ainsi, dans le cas du crayon, on observerait que le saut d'énergie correspondant est très faible. Malheureusement, dans nombre de cas pratiques, une telle démarche nécessiterait un nombre d'analyses que l'on ne peut raisonnablement prescrire.

### 15.3 Variations successives de l'énergie totale

Étant donné un état d'équilibre caractérisé par un champ de déplacement  $u^0$ , considérons une petite perturbation  $\theta w$  du champ de déplacement, où  $w$  représente une variation cinématiquement admissible de déplacement, de norme unitaire, et  $\theta$ , un paramètre réel. Supposant  $w$  fixé, l'énergie se présente comme une fonction de  $\theta$ . Nous admettrons qu'il est possible de la développer en série

de Taylor jusqu'au second ordre, c'est-à-dire que

$$\mathcal{E}(u^0 + \theta w) = \mathcal{E}(u^0) + \theta \delta \mathcal{E}(u^0; w) + \frac{\theta^2}{2} \delta^2 \mathcal{E}(u^0; w) + o(\theta^2) \quad (15.2)$$

où apparaissent la *variation première*  $\delta \mathcal{E}$  et la *variation seconde*  $\delta^2 \mathcal{E}$ . Le champ de déplacement  $u^0$ , comme tout état d'équilibre, vérifie la condition de *stationnarité* de l'énergie totale

$$\delta \mathcal{E}(u^0; w) = 0 \quad (15.3)$$

si bien que l'on peut écrire

$$\Delta \mathcal{E}(u^0 \rightarrow u^0 + \theta w) = \mathcal{E}(u^0 + \theta w) - \mathcal{E}(u^0) = \frac{\theta^2}{2} \delta^2 \mathcal{E}(u^0; w) + o(\theta^2) \quad (15.4)$$

Pour  $\theta$  suffisamment petit, le signe de la variation d'énergie sera celui de la variation seconde, ce qui permet de dire que si la variation seconde est négative pour une variation de déplacement donnée de norme unitaire, la structure est instable. A l'inverse, *la structure sera stable si, pour toute variation de déplacement  $w$  de norme unitaire, la variation seconde est positive.*

Il peut se faire que la variation seconde soit nulle. Dans ce cas, il faut pousser le développement en série plus loin

$$\mathcal{E}(u^0 + \theta w) = \mathcal{E}(u^0) + \theta \delta \mathcal{E} + \frac{\theta^2}{2} \delta^2 \mathcal{E} + \frac{\theta^3}{3!} \delta^3 \mathcal{E} + \frac{\theta^4}{4!} \delta^4 \mathcal{E} + \dots \quad (15.5)$$

ce qui définit la variation troisième, la variation quatrième, etc. Si la variation troisième est différente de zéro pour un certain  $w$ , positive pour fixer les idées, il suffit de changer le signe de  $\theta$  (ce qui équivaut à remplacer  $w$  par  $-w$ ) pour changer le signe de l'accroissement d'énergie : la structure est donc instable. Si la variation troisième est nulle, on reproduit sur la variation quatrième le raisonnement relatif à la variation seconde : elle doit être positive pour qu'il y ait stabilité. Plus généralement, si la première variation non nulle est d'ordre impair, l'équilibre est instable. Si cette variation est d'ordre pair, l'équilibre est stable si elle est toujours positive. Ces résultats s'interprètent aisément à l'aide de l'analogie de la bille. Le fait que la première variation non nulle soit d'ordre impair signifie que l'on se trouve sur un *palier*, comme l'illustre la figure 15.6.

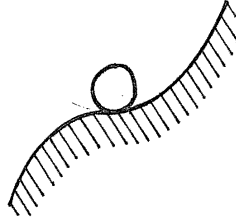


FIGURE 15.6 – Cas où la première variation non nulle est d'ordre impair.

## 15.4 Analyse générale de la stabilité des corps élastiques

Nous nous limiterons au cas habituel d'un matériau linéaire. Notant toujours  $u^0$  le déplacement à l'équilibre et  $\theta w$  la perturbation, on peut écrire les déformations de Green sous la forme

$$\begin{aligned}\gamma_{ij} &= \frac{1}{2}[D_i(u_j^0 + \theta w_j) + D_j(u_i^0 + \theta w_i) + D_i(u_m^0 + \theta w_m)D_j(u_m^0 + \theta w_m)] \\ &= \gamma_{ij}^0 + \theta\gamma_{ij}^1 + \frac{\theta^2}{2}\gamma_{ij}^2\end{aligned}\quad (15.6)$$

avec

$$\left. \begin{aligned}\gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2}(D_i u_j^0 + D_j u_i^0 + D_i u_m^0 D_j u_m^0) \\ \gamma_{ij}^1 &= \frac{1}{2}(D_i w_j + D_j w_i + D_i u_m^0 D_j w_m + D_j u_m^0 D_i w_m) \\ \gamma_{ij}^2 &= D_i w_m D_j w_m\end{aligned}\right\} \quad (15.7)$$

L'énergie de déformation s'écrit donc (en supposant l'existence de contraintes initiales  $s_{ij}^*$  à l'état de référence)

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \int_V s_{ij}^* \left( \gamma_{ij}^0 + \theta\gamma_{ij}^1 + \frac{\theta^2}{2}\gamma_{ij}^2 \right) dV \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} \left( \gamma_{ij}^0 + \theta\gamma_{ij}^1 + \frac{\theta^2}{2}\gamma_{ij}^2 \right) \left( \gamma_{kl}^0 + \theta\gamma_{kl}^1 + \frac{\theta^2}{2}\gamma_{kl}^2 \right) dV \\ &= \mathcal{U}_0 + \theta\delta\mathcal{U} + \frac{\theta^2}{2}\delta^2\mathcal{U} + \frac{\theta^3}{3!}\delta^3\mathcal{U} + \frac{\theta^4}{4!}\delta^4\mathcal{U}\end{aligned}\quad (15.8)$$



avec

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{U}_0 &= \int_V (s_{ij}^* \gamma_{ij}^0 + \frac{1}{2} C_{ijkl} \gamma_{ij}^0 \gamma_{kl}^0) dV \\ \delta \mathcal{U} &= \int_V (s_{ij}^* \gamma_{ij}^1 + C_{ijkl} \gamma_{ij}^0 \gamma_{kl}^1) dV \\ \delta^2 \mathcal{U} &= \int_V (s_{ij}^* \gamma_{ij}^2 + C_{ijkl} \gamma_{ij}^0 \gamma_{kl}^2 + C_{ijkl} \gamma_{ij}^1 \gamma_{kl}^1) dV \\ \delta^3 \mathcal{U} &= 3 \int_V C_{ijkl} \gamma_{ij}^1 \gamma_{kl}^2 dV \\ \delta^4 \mathcal{U} &= 3 \int_V C_{ijkl} \gamma_{ij}^2 \gamma_{kl}^2 dV \end{aligned} \right\} \quad (15.9)$$

Dans le cas usuel de charges mortes, l'énergie potentielle s'écrit

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(u^0) + \delta \mathcal{P} \quad (15.10)$$

On a d'abord  $\delta \mathcal{U} + \delta \mathcal{P} = 0$ , ce qui signifie que le champ de déplacement  $u^0$  correspond à un état d'équilibre. Examinons à présent la variation seconde. En notant  $s_{ij}^0$  les *contraintes totales à l'équilibre*,

$$s_{ij}^0 = s_{ij}^* + C_{ijkl} \gamma_{kl}^0 \quad (15.11)$$

on peut la mettre sous la forme

$$\delta^2 \mathcal{U} = \int_V (s_{ij}^0 \gamma_{ij}^2 + C_{ijkl} \gamma_{ij}^1 \gamma_{kl}^1) dV \quad (15.12)$$

Quel est son signe? Examinons d'abord le second terme. Le tenseur  $C_{ijkl}$  étant défini positif, ce terme sera toujours positif ou nul, et ne s'annulera que si  $\gamma_{ij}^1 = 0$ .

On a

$$\begin{aligned} \gamma_{ij}^1 &= \frac{1}{2} (D_i w_j + D_j w_i + D_i u_m^0 D_j w_m + D_j u_m^0 D_i w_m) \\ &= \frac{1}{2} [(\delta_{jm} + D_j u_m^0) D_i w_m + (\delta_{im} + D_i u_m^0) D_j w_m] \end{aligned}$$

et, en introduisant les coordonnées spatiales à l'équilibre  $\xi_i = (x_i + u_i^0)$ ,

$$\gamma_{ij}^1 = \frac{1}{2} (D_j \xi_m D_i w_m + D_i \xi_m D_j w_m)$$

Nous noterons  $\partial_i$  les dérivées par rapport aux  $\xi_i$ . On a, si  $\gamma_{ij}^1 = 0$ ,

$$\begin{aligned} 0 = \partial_p x_i \partial_q x_j \gamma_{ij}^1 &= \frac{1}{2} (\partial_q x_j D_j \xi_m \partial_p x_i D_i w_m + \partial_p x_i D_i \xi_m \partial_q x_j D_j w_m) \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{qm} \partial_p w_m + \delta_{pm} \partial_q w_m) \end{aligned}$$

soit

$$\frac{1}{2}(\partial_p w_q + \partial_q w_p) = 0 \quad (15.13)$$

La solution de cette équation est

$$w_p = a_p + e_{pqr} \omega_q \xi_r \quad (15.14)$$

c'est-à-dire un déplacement de corps rigide à partir de la configuration déformée. *En supposant les déplacements rigides bloqués*, on aura donc  $\gamma_{ij}^1 \neq 0$ , et le second terme de la variation seconde est toujours positif.

Venons-en au premier terme de cette variation, qui s'écrit

$$\int_V s_{ij}^0 D_i w_m D_j w_m dV$$

Il ne peut jamais être négatif si le tenseur  $s_{ij}^0$  est défini positif, c'est-à-dire si, pour tout vecteur  $q_i$ , on a

$$s_{ij}^0 q_i q_j > 0$$

Par conséquent, *il ne peut y avoir d'instabilité si le tenseur des contraintes totales à l'équilibre est défini positif en tout point du corps.*

Mis à part cette conclusion qualitative importante, le test de la variation seconde semble à priori assez délicat à mener, puisqu'il suppose en principe l'exploration de la totalité de la sphère unité, pour une norme qu'il nous reste à préciser. Le choix de celle-ci est relativement arbitraire, à ceci près qu'il convient au moins qu'il assure la bornation de la variation seconde. La plus simple des normes assurant cette condition est

$$\|w\|^2 = \int_V C_{ijkl} \gamma_{ij}^1 \gamma_{kl}^1 dV \quad (15.15)$$

Ce choix fait, on évite l'exploration de la sphère unité par la méthode suivante, proposée par Jacobi : appelons  $\mu$  la grandeur

$$\mu = \sup_C \frac{-\int_V s_{ij}^0 \gamma_{ij}^2 dV}{\int_V C_{ijkl} \gamma_{ij}^1 \gamma_{kl}^1 dV} \quad (15.16)$$

$\mathcal{C}$  étant l'ensemble des perturbations admissibles de déplacements. Selon la valeur de  $\mu$ , trois cas peuvent se présenter :

1.  $\mu > 1$  - Dans ce cas, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un déplacement  $w \in \mathcal{C}$  tel que

$$-\int_V s_{ij}^0 \gamma_{ij}^2 dV \geq (\mu - \varepsilon) \int_V C_{ijkl} \gamma_{ij}^1 \gamma_{kl}^1 dV$$

Il en découle

$$\delta^2\mathcal{U} = \int_V s_{ij}^0 \gamma_{ij}^2 + \int_V C_{ijkl} \gamma_{ij}^1 \gamma_{kl}^1 dV \leq (1 - \mu + \varepsilon) \int_V C_{ijkl} \gamma_{ij}^1 \gamma_{kl}^1 dV < 0$$

pour  $\varepsilon < \mu - 1$ , ce qui implique que l'équilibre est *instable*.

2.  $\mu < 1$  - Alors, tout déplacement  $w \in \mathcal{C}$  vérifie

$$- \int_V s_{ij}^0 \gamma_{ij}^2 dV \leq \mu \int_V C_{ijkl} \gamma_{ij}^1 \gamma_{kl}^1 dV < \int_V C_{ijkl} \gamma_{ij}^1 \gamma_{kl}^1 dV$$

ce qui signifie que l'on a toujours  $\delta^2\mathcal{U} > 0$ . L'équilibre est donc *stable*.

3.  $\mu = 1$  - Dans ce cas, on ne peut pas conclure.

La plupart des auteurs admettent implicitement que la meilleure borne supérieure (15.16) est *réalisée* par un champ de déplacement donné. Or, cette propriété n'a rien d'évident, et la question reste ouverte dans le cas général<sup>2</sup>. Signalons cependant qu'elle est garantie lorsque les dérivées intervenant dans le numérateur sont au moins d'un ordre inférieur à celles qui apparaissent dans le dénominateur, auquel cas il y a complète continuité (voir par exemple Necas [63], Riesz et Nagy [76]). Cette condition est vérifiée pour les poutres sans déformation à l'effort tranchant, les plaques de Kirchhoff et quelques autres cas.

Supposant cette réalisation effective, la recherche de  $\mu$  peut être considérée comme le problème de maximisation du numérateur, moyennant la condition  $\|w\|^2 = 1$ , qui peut être reprise à l'aide d'un multiplicateur lagrangien  $\lambda$ . L'équation variationnelle de ce problème est alors

$$\delta \left\{ - \int_V s_{ij}^0 \gamma_{ij}^2 - \lambda \int_V C_{ijkl} \gamma_{ij}^1 \gamma_{kl}^1 dV \right\} = 0 \quad (15.17)$$

et se présente comme un problème aux valeurs propres  $\lambda$ . La plus grande de celles-ci est précisément  $\mu$ . Le déplacement correspondant est appelé la *forme critique*.

## 15.5 Bifurcation de l'équilibre

On dit qu'il y a instabilité par bifurcation de l'équilibre lorsque l'état d'équilibre initial vérifie

$$\delta_{im} + D_i u_m^0 \approx \delta_{im} \quad (15.18)$$

---

2. Dans le cas d'une structure discrétisée, cette propriété est évidente, car la sphère unité dans  $R^n$  est compacte, et toute fonction continue y atteint ses bornes.

c'est-à-dire qu'il est caractérisé par des rotations infinitésimales. Dans ce cas, on a

$$\gamma_{ij}^1 \approx \frac{1}{2}(D_i w_j + D_j w_i) = \varepsilon_{ij}(w)$$

et le critère de la variation second se ramène à tester que

$$\delta^2 \mathcal{E} = \int_V s_{ij}^0 D_i w_m D_j w_m dV + \int_V C_{ijkl} \varepsilon_{ij}(w) \varepsilon_{kl}(w) dV > 0$$

Seul, le premier terme subit l'influence de l'équilibre initial, et il varie linéairement avec les contraintes. C'est pourquoi on parle, dans ce cas, de *stabilité linéaire*. On profite de cette propriété pour choisir au départ la forme du champ de contrainte, et définir son amplitude à part : on choisit donc un champ unitaire

$$s_{ij}^0 = -S_{ij} \quad (15.19)$$

et le champ menant à l'instabilité sera  $-\sigma S_{ij}$ , où  $\sigma$  est le facteur multiplicatif. Tout revient à chercher la *facteur critique* (encore appelé, par abus de langage, *charge critique*), défini comme la plus petite valeur de  $\sigma$  pour laquelle

$$\delta^2 \mathcal{E} = -\sigma \int_V S_{ij} D_i w_m D_j w_m dV + \int_V C_{ijkl} \varepsilon_{ij}(w) \varepsilon_{kl}(w) dV = 0$$

et qui vérifie

$$\sigma = \inf_{w \in \mathcal{C}} \frac{\int_V C_{ijkl} \varepsilon_{ij}(w) \varepsilon_{kl}(w) dV}{\int_V S_{ij} D_i w_m D_j w_m dV} \quad (15.20)$$

Si cette valeur est réalisée, il est équivalent de chercher les solutions du problème aux valeurs propres

$$\delta \left\{ \int_V C_{ijkl} \varepsilon_{ij}(w) \varepsilon_{kl}(w) dV - \sigma \int_V S_{ij} D_i w_k D_j w_k dV \right\} = 0 \quad (15.21)$$

les formes critique vérifient alors l'équation

$$D_\ell (C_{klij} \varepsilon_{ij}(w) - \sigma D_j (S_{ji} D_i w_k)) = 0 \quad \text{dans } V \quad (15.22)$$

et les conditions aux limites

$$n_\ell (C_{klij} \varepsilon_{ij}(w)) - \sigma n_j (S_{ij} D_i w_k) = 0 \quad \text{sur } S_2 \quad (15.23)$$

$S_2$  étant la portion de la surface où les efforts sont imposés nuls.

## 15.6 La colonne d'Euler

le plus classique des problèmes de bifurcation est celui d'une colonne encastree en son pied et soumise à une charge  $P$  en son sommet (fig. 15.7). Sous une

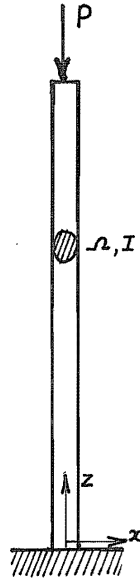


FIGURE 15.7 – Colonne d'Euler.

faible charge, la colonne reste droite; mais à partir d'une charge donnée, elle fléchit. C'est ce que l'on appelle le *flambage*. Appelant  $z$  la coordonnée prise le long de la colonne et  $x$  l'axe tel que  $I_x$  soit le plus petit des deux moments d'inertie, on écrira

$$\begin{aligned} u_3 &= w(z) + x\alpha(z) \\ u_1 &= u(z) \end{aligned} \tag{15.24}$$

En admettant l'approximation des gradients de déplacements modérés, on écrira, en notant d'un prime la dérivation par rapport à  $z$ ,

$$\begin{aligned} \gamma_{33} &= D_3 u_3 + \frac{1}{2}(D_3 u_1)^2 = w' + x\alpha' + \frac{1}{2}u'^2 \\ \gamma_{13} &= D_1 u_3 + D_3 u_1 = \alpha + u' \end{aligned} \tag{15.25}$$

Le déplacement à l'équilibre est  $w_0$ . La perturbation est caractérisée par  $w$ ,  $u$  et  $\alpha$ . Nous ferons l'hypothèse d'absence de déformation due à l'effort tranchant, ce qui s'écrit

$$\alpha = -u' \quad (15.26)$$

et donne

$$\gamma_{33} = w' - xu'' + \frac{1}{2}u'^2$$

soit

$$\begin{aligned} \epsilon_{33} &= w' - xu'' \\ \gamma_{33}^2 &= u'^2 \end{aligned}$$

L'état de contrainte initial normalisé est  $S_{33} = -1/\Omega$ , ce qui donne directement la charge critique  $P$  comme facteur d'amplitude. Le principe variationnel s'écrit alors

$$\int_0^\ell (E\Omega w'^2 + EI u''^2 - Pu'^2) dz \quad \text{stationnaire} \quad (15.27)$$

Les formes critiques vérifient donc les équations suivantes

$$\begin{cases} -E\Omega w'' = 0 & \text{dans } ]0, \ell[ \\ E\Omega w'(\ell) = 0 \\ w(0) = 0 \end{cases} \quad (15.28)$$

et

$$\begin{cases} EI u^{IV} + Pu'' = 0 & \text{dans } ]0, \ell[ \\ -EI u'''(\ell) - Pu'(\ell) = 0 \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases} \quad (15.29)$$

Des équations (15.28), on déduit  $w = 0$ . A partir des deux premières équations du système (15.29), on déduit

$$u'''(z) + \frac{P}{EI} u'(z) = 0$$

ce qui donne la solution générale

$$u(z) = A \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} z + B \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} z + C$$

Des conditions aux limites en  $z = 0$ , on déduit  $B = 0$  et  $C = -A$ . La condition d'extrémité donne alors

$$\cos \sqrt{\frac{P}{EI}} \ell = 0$$

soit

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} \ell = \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi, \quad n \text{ entier } > 0$$

ou encore

$$P = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

Ce sont les *charges d'Euler*. La plus petite d'entre elles, qui marque la limite de stabilité, est

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2} \quad (15.30)$$

## 15.7 Autres cas d'appuis

Lorsque les appuis sont différents du cas envisagé ci-dessus, les équations d'équilibre intérieur restent inchangées, mais les conditions aux limites varient. Voici quelques cas courants.

### 15.7.1 Poutre bi-appuyée

Ce cas est illustré par la figure 15.8. Les conditions d'extrémité sont ici

$$u(0) = 0, \quad u(\ell) = 0, \quad u''(0) = 0, \quad u''(\ell) = 0$$

L'équation d'équilibre

$$u^{IV} + \frac{P}{EI} u'' = 0$$

admet la solution générale

$$u(z) = A \cos \omega z + B \sin \omega z + Cz + D \quad (15.31)$$

avec

$$\omega^2 = \frac{P}{EI}$$

Les conditions en  $z = 0$  donnent

$$A + D = 0$$

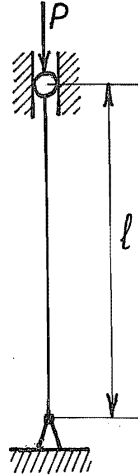


FIGURE 15.8 – Flambage d'une poutre sur deux appuis.

et

$$-A\omega^2 = 0$$

ce qui implique  $A = D = 0$ , en excluant le cas  $\omega = 0$  pour lequel la solution est identiquement nulle. Ensuite, on déduit des conditions en  $z = \ell$

$$B \sin \omega \ell + C \ell = 0$$

et

$$-B^2 \omega^2 \sin \omega \ell = 0$$

d'où  $C = 0$  et, pour que la solution ne soit pas identiquement nulle,

$$\sin \omega \ell = 0$$

ce qui donne

$$\omega \ell = n\pi, \quad n \text{ entier } > 0$$

On obtient donc

$$P = n^2 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}, \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (15.32)$$



## 15.7.2 Poutre encastrée-appuyée



FIGURE 15.9 – Flambage d'une poutre encastrée-appuyée.

C'est le cas illustré en figure 15.9. Portant dans la solution générale (15.31) les conditions aux limites

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u(\ell) = 0, \quad u''(\ell) = 0$$

on obtient d'abord

$$A + D = 0, \quad \omega B + C = 0$$

puis

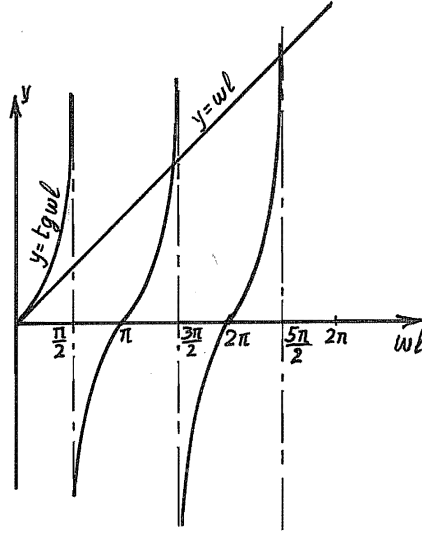
$$\begin{cases} A(\cos \omega \ell - 1) + B(\sin \omega \ell - \omega \ell) = 0 \\ -A\omega^2 \cos \omega \ell - B\omega^2 \sin \omega \ell = 0 \end{cases}$$

Ce système homogène de deux équations aux inconnues  $A$  et  $B$  n'admet de solution non nulle que si son déterminant est nul,

$$-\omega^2 \sin \omega \ell (\cos \omega \ell - 1) + \omega^2 (\sin \omega \ell - \omega \ell) = 0$$

soit, en excluant la solution triviale  $\omega = 0$ ,

$$\operatorname{tg} \omega \ell = \omega \ell \tag{15.33}$$

FIGURE 15.10 – Représentation des solutions de  $\text{tg } \omega l = \omega l$ .

Pour résoudre cette équation, il est utile de tracer les graphes  $y = \text{tg } \omega l$  et  $y = \omega l$ , voir figure 15.10. Les solutions cherchées sont leurs intersections. Pour  $\omega l$  grand, on peut résoudre approximativement l'équation  $\text{tg } \omega l = \infty$ , ce qui mène aux solutions asymptotiques

$$(\omega l)_n \approx \frac{\pi}{2} + n\pi$$

Pour obtenir avec précision la première solution, on peut utiliser l'itération

$$(\omega l)_{k+1} = \text{arctg}(\omega l)_k + \pi$$

en partant de  $\pi$ . Après quatre itérations, 4 chiffres sont stabilisés :

$$\omega l = 4,493 = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

ce qui donne

$$P_{cr} = \frac{(4,493)^2 EI}{\ell^2} = 20,19 \frac{EI}{\ell^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0,6992\ell)^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0,7\ell)^2} \quad (15.34)$$

La solution asymptotique  $\omega\ell = \frac{3\pi}{2}$  eût donné la valeur par excès

$$P_{cr} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0,6667\ell)^2} = 22,21 \frac{EI}{\ell^2}$$

### 15.7.3 Poutre bi-encastée



FIGURE 15.11 – Flambage d'une poutre bi-encastée.

Les conditions aux appuis de ce cas représenté en figure 15.11 sont

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u(\ell) = 0, \quad u'(\ell) = 0$$

En les portant dans la solution générale (15.31), on obtient d'abord

$$A + D = 0, \quad \omega B + C = 0$$

puis

$$\begin{cases} A(\cos \omega\ell - 1) + B(\sin \omega\ell - \omega\ell) = 0 \\ -A\omega \sin \omega\ell + B(\cos \omega\ell - 1) = 0 \end{cases}$$

Ce système homogène en  $A$  et  $B$  n'admet de solution non nulle que si

$$\omega(\cos \omega \ell - 1)^2 + \omega(\sin \omega \ell - \omega \ell) \sin \omega \ell = 0$$

ce qui implique, pour  $\omega \neq 0$

$$\cos^2 \omega \ell - 2 \cos \omega \ell + 1 + \sin^2 \omega \ell - \omega \ell \sin \omega \ell = 0$$

soit

$$2(1 - \cos \omega \ell) = \omega \ell \sin \omega \ell$$

Ceci peut encore s'écrire

$$4 \sin^2 \frac{\omega \ell}{2} = \omega \ell \cdot 2 \sin \frac{\omega \ell}{2} \cos \frac{\omega \ell}{2}$$

soit

$$4 \sin \frac{\omega \ell}{2} \left( \sin \frac{\omega \ell}{2} - \frac{\omega \ell}{2} \cos \frac{\omega \ell}{2} \right) = 0 \quad (15.35)$$

Cette équation est résolue chaque fois que

$$\sin \frac{\omega \ell}{2} = 0 \quad (15.36)$$

ou

$$\operatorname{tg} \frac{\omega \ell}{2} = \frac{\omega \ell}{2} \quad (15.37)$$

Les solutions de (15.36) sont

$$\frac{\omega \ell}{2} = n\pi, \quad n \text{ entier } > 0$$

soit

$$P = \frac{4n^2\pi^2 EI}{\ell^2}, \quad P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (15.38)$$

Quant à l'équation (15.37), elle se résout comme dans le cas de la poutre encastrée-appuyée. La plus petite valeur de  $\frac{\omega \ell}{2}$  est alors 4,493, ce qui donne

$$P'_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{(0,6992\ell)^2} \quad (15.39)$$

valeur plus grande que la précédente. L'existence de ces deux familles de modes critiques s'explique aisément : le premier mode critique présente deux points

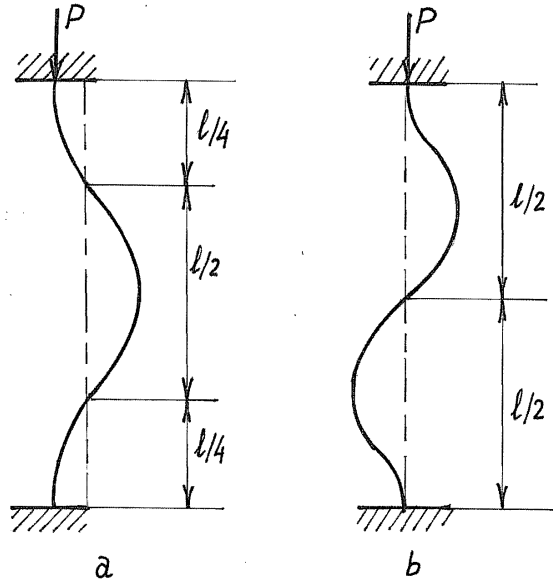


FIGURE 15.12 – Les deux familles de modes critiques d'une poutre bi-encastree.

d'inflexion où  $M = 0$ , voir figure 15.12a. La partie centrale, de longueur  $l/2$ , peut donc être identifiée à une poutre sur deux appuis, d'où la solution

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(l/2)^2}$$

Le deuxième présente un point d'inflexion au centre et la poutre peut donc être assimilée à l'assemblage bout à bout de deux poutres encastrees-appuyees de longueur  $l/2$ , voir figure 15.12b. Il vient donc

$$P'_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0,6992 \frac{l}{2})^2}$$

## 15.8 Colonne flambant sous son propre poids ou sous une charge longitudinale uniformément répartie

### 15.8.1 Colonne encastree à sa base et flambant sous son propre poids

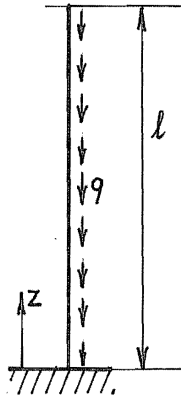


FIGURE 15.13 – Colonne sous une charge uniformément répartie.

Dans ce cas illustré en figure 15.13, soit  $q$  la densité linéique de charge. La solution statique est donc

$$N^0 = -q(\ell - z) \quad (15.40)$$

ce qui mène au problème de stationnarisation de la fonctionnelle

$$\int_0^\ell EIu''^2 dz - q \int_0^\ell (\ell - z)u'^2 dz \quad (15.41)$$

L'équation de la forme critique est donc

$$EIu^{IV} + q \frac{d}{dz} [(\ell - z)u'] = 0 \quad (15.42)$$

avec les conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} -EIu'''(\ell) - q(\ell - \ell)u'(\ell) = 0 \\ EIu''(\ell) = 0 \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{array} \right. \quad (15.43)$$

La solution exacte de ce problème a été développée par Greenhill [42, 86]. Elle fait appel aux fonctions de Bessel d'ordre  $1/3$  et son exposé est assez lourd. Nous nous contenterons ici de développer une solution approchée par la méthode de Rayleigh-Ritz. Posant

$$u = az^2 + Bz^3 \quad (15.44)$$

on satisfait aux conditions aux limites en  $z = 0$ . On calcule sans difficulté

$$\int_0^\ell (\ell - z)u'^2 dz = \ell^4 \left( \frac{1}{3}A^2 + \frac{3}{10}B^2\ell^2 + \frac{6}{10}AB\ell \right)$$

et

$$\int_0^\ell u''^2 dz = \ell (4A^2 + 12AB\ell + 12B\ell^2)$$

Il suffit donc de trouver les points stationnaires de la forme quadratique

$$A^2 \left( 4 - \frac{\beta}{3} \right) + 2AB\ell \left( 6 - \frac{3\beta}{10} \right) + B^2\ell^2 \left( 12 - \frac{3\beta}{10} \right)$$

en posant

$$\beta = \frac{q\ell^3}{EI}$$

Il en découle les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( 4 - \frac{\beta}{3} \right) A + \left( 6 - \frac{3\beta}{10} \right) B = 0 \\ \left( 6 - \frac{3\beta}{10} \right) A + \left( 12 - \frac{3\beta}{10} \right) B = 0 \end{array} \right.$$

compatibles en dehors de la solution nulle moyennant la condition

$$\left( 4 - \frac{\beta}{3} \right) \left( 12 - \frac{3\beta}{10} \right) - \left( 6 - \frac{3\beta}{10} \right)^2 = 0$$

soit

$$\beta^2 - 160\beta + 1200 = 0$$

La plus petite racine de cette équation est

$$\beta_{cr} = 7,889 \quad (15.45)$$

ce qui donne

$$(q\ell)_{cr} = 7,889 \frac{EI}{\ell^2} \quad (15.46)$$

La solution exacte est  $\beta_{cr} = 7,837$ , inférieure à la valeur approchée de  $7^\circ/\infty$  seulement.

### 15.8.2 Colonne bi-appuyée, soumise à la fois à une charge en bout et à une charge répartie

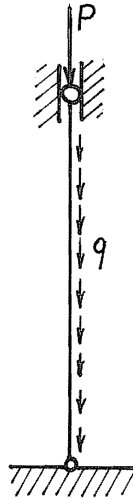


FIGURE 15.14 – Colonne bi-appuyée, soumise à la fois à une charge en bout et à une charge répartie.

En comptant, comme l'indique la figure 15.14, la coordonnée  $z$  à partir du point le plus haut de la poutre, on a ici

$$N^0(z) = -P - qz \quad (15.47)$$



ce qui mène à rendre stationnaire l'expression

$$\int_0^\ell EI u''^2 dz - P \int_0^\ell u'^2 dz - q \int_0^\ell z u'^2 dz$$

On résout ce problème de manière approchée en posant [86]

$$u(z) = A \sin \frac{\pi z}{\ell} \tag{15.48}$$

ce qui ramène la variation seconde à

$$EI \frac{\pi^4}{\ell^4} A^2 \frac{\ell}{2} - P \frac{\pi^2 A^2 \ell}{\ell^2} \frac{\ell}{2} - q \frac{\pi^2 A^2 \ell^2}{\ell^2} \frac{\ell^2}{4}$$

Le point stationnaire correspond donc à la condition

$$P + \frac{q\ell}{2} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} = P_E \tag{15.49}$$

On constate que cette solution équivaut à admettre que la moitié de la charge répartie est appliquée à chacune des extrémités de la poutre.

## 15.9 Effet de la déformation due à l'effort tranchant

Pour évaluer l'effet de la déformation due à l'effort tranchant, nous repartirons des expressions (15.24) et (15.25), mais nous abandonnerons l'hypothèse (15.26). La variation seconde s'écrit alors

$$\delta^2 \mathcal{U} = \int_0^\ell \{ E\Omega w'^2 + EI\alpha'^2 + G\Omega^*(\alpha + u'^2) \} dz + \int_0^\ell N_0 u'^2 dz \tag{15.50}$$

Traisons par exemple le cas d'une poutre bi-appuyée chargée en bout. Nous noterons encore  $N_0 = -P$ . Les équations relatives à  $w$  sont les mêmes qu'en l'absence de déformation à l'effort tranchant et mènent encore à  $w = 0$ . Les équations relatives à  $\alpha$  et  $u$  sont

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(EI\alpha')' + G\Omega^*(\alpha + u') & = 0 \quad \text{dans } ]0, \ell[ \\ -(G\Omega^*(\alpha + u'))' + (Pu')' & = 0 \quad \text{dans } ]0, \ell[ \\ EI\alpha'(0) & = 0 \\ EI\alpha'(\ell) & = 0 \\ u(0) & = 0 \\ u(\ell) & = 0 \end{array} \right. \tag{15.51}$$

De la deuxième, on tire

$$\alpha' = - \left( 1 - \frac{P}{G\Omega^*} \right) u'' \quad (15.52)$$

soit

$$\alpha = - \left( 1 - \frac{P}{G\Omega^*} \right) u' + A$$

avec  $A = \text{cte}$  et

$$(\alpha + u') = \frac{P}{G\Omega^*} u' + G\Omega^* A$$

Introduisant ces résultats dans la première équation de (15.51), on obtient

$$EI \left( 1 - \frac{P}{G\Omega^*} \right) u'''' + Pu' + G\Omega^* A = 0$$

ce qui équivaut à

$$u^{IV} + \omega^2 u'' = 0 \quad (15.53)$$

avec

$$\omega^2 = \frac{P}{EI \left( 1 - \frac{P}{G\Omega^*} \right)} \quad (15.54)$$

Les conditions aux limites sont, compte tenu de (15.52)

$$u(0) = u(\ell) = u''(0) = u''(\ell)$$

On retrouve donc le même problème que sans effort tranchant, mais avec une autre définition de  $\omega$ . La solution est donc encore

$$\omega = \frac{n\pi}{\ell}$$

soit

$$\frac{P}{1 - \frac{P}{G\Omega^*}} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{\ell^2} = n^2 P_E$$

en notant  $P_E$  la charge d'Euler. On en déduit, pour  $m = 1$ ,

$$P_{cr} = P_E \left( 1 - \frac{P_{cr}}{G\Omega^*} \right)$$

soit

$$P_{cr} = \frac{P_E}{1 + \frac{P_E}{G\Omega^*}} \quad (15.55)$$

Ce résultat a été obtenu par Engesser [23]. La correction relative par rapport à la charge d'Euler est

$$\frac{\pi^2 EI}{G\Omega^* \ell^2} \quad (15.56)$$

Pour les poutres courantes, ce rapport est petit, et la correction est négligeable. En revanche, pour les poutres composées de plusieurs matériaux et pour les structures en treillis étudiées comme des poutres à titre d'approximation, la section de cisaillement  $\Omega^*$  peut être relativement petite, de sorte que le rapport (15.56) ne soit plus négligeable devant l'unité. La formule d'Engesser a d'ailleurs été mise à l'honneur suite à la ruine, au début du  $XX^e$  siècle, du Pont du Québec qui était formé de poutres en treillis [24, 25].

## 15.10 Stabilité des plaques

Nous considérerons, dans cette section, des plaques de Kirchhoff soumises à des efforts membranaires

$$N_{\alpha\beta}^0 = t\sigma_{\alpha\beta}^0$$

Dans certaines circonstances, ces efforts peuvent mener au *voilement*, qui consiste en une flexion de la plaque. Le champ de déplacements correspondant est de la forme

$$\begin{cases} u_1 &= -zD_1w(x, y) \\ u_2 &= -zD_2w(x, y) \\ u_3 &= w(x, y) \end{cases} \quad (15.57)$$

Les déformations de Green correspondant à la sollicitation initiale s'écrivent alors, dans le cadre des gradients de déplacements modérés,

$$\begin{aligned}
 \gamma_{11} &= D_1 u_1 + \frac{1}{2}(D_1 u_2)^2 + \frac{1}{2}(D_1 u_3)^2 \\
 &= D_1 u_1 + \frac{1}{2}z^2(D_{12}w)^2 + \frac{1}{2}(D_1 w)^2 \\
 \gamma_{22} &= D_2 u_2 + \frac{1}{2}(D_2 u_1)^2 + \frac{1}{2}(D_2 u_3)^2 \\
 &= D_2 u_2 + \frac{1}{2}z^2(D_{21}w)^2 + \frac{1}{2}(D_2 w)^2 \\
 \gamma_{12} &= \frac{1}{2}(D_1 u_2 + D_2 u_1 + D_1 u_3 D_2 u_3) \\
 &= \frac{1}{2}(D_1 u_2 + D_2 u_1 + D_1 w D_2 w)
 \end{aligned} \tag{15.58}$$

si bien que

$$\begin{aligned}
 \gamma_{11}^2 &= z^2(D_{12}w)^2 + (D_1 w)^2 \\
 \gamma_{22}^2 &= z^2(D_{12}w)^2 + (D_2 w)^2 \\
 \gamma_{12}^2 &= D_1 w D_2 w
 \end{aligned} \tag{15.59}$$

La variation seconde de l'énergie s'écrit donc

$$\begin{aligned}
 \delta^2 \mathcal{U} &= \int_S D \{ (\nabla^2 w)^2 + 2(1-\nu) [(D_{12}w)^2 - D_{11}w D_{22}w] \} ds \\
 &\quad + \int_S (\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0) \frac{t^3}{12} (D_{12}w)^2 dS + \int_S N_{\alpha\beta}^0 D_\alpha w D_\beta w dS
 \end{aligned}$$

On notera que comme les contraintes initiales sont nécessairement beaucoup plus petites que les modules élastiques, la deuxième intégrale de cette expression est négligeable devant la première. Dès lors, en posant

$$N_{\alpha\beta}^0 = -P \bar{N}_{\alpha\beta} \tag{15.60}$$

on obtient l'expression simplifiée suivante

$$\begin{aligned}
 \delta^2 \mathcal{U} &= \int_S D \{ (\nabla^2 w)^2 + 2(1-\nu) [(D_{12}w)^2 - D_{11}w D_{22}w] \} ds \\
 &\quad - P \int_S \bar{N}_{\alpha\beta} D_\alpha w D_\beta w dS
 \end{aligned} \tag{15.61}$$

qui est due à Bryan [8].

### 15.11 Voilement d'une plaque rectangulaire simplement appuyée et comprimée dans une direction

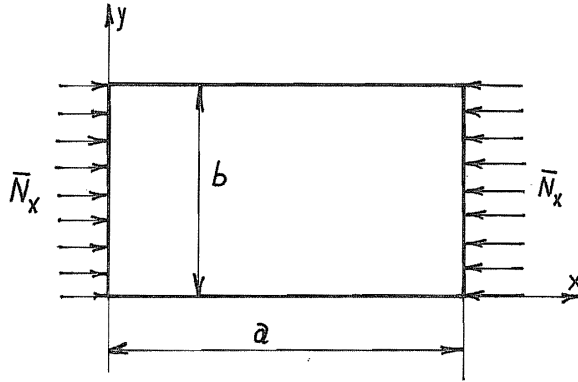


FIGURE 15.15 – Plaque comprimée dans une direction.

La figure 15.15 représente le problème. Développant le déplacement  $w$  en série double de Navier

$$w = \sum_{m,n} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (15.62)$$

on obtient aisément à partir de (15.61), en posant  $\bar{N}_x = 1$ ,

$$\delta^2 \mathcal{U} = D \frac{\pi^4 ab}{4} \sum_{m,n} w_{mn}^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - P \sum_{m,n} \frac{m^2}{a^2} w_{mn}^2 \frac{\pi^2 ab}{4}$$

La variation de  $w_{mn}$  fournit la charge

$$P_{mn} = \frac{D\pi^2 a^2}{m^2} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 = \frac{D\pi^2}{a^2} \left( m + \frac{n^2 a^2}{m b^2} \right)^2 \quad (15.63)$$

Pour  $m$  fixé, c'est toujours  $P_{m1}$  qui a la plus petite valeur,

$$P_{m1} = \frac{D\pi^2}{a^2} \left( m + \frac{1}{m} \frac{a^2}{b^2} \right)^2 \quad (15.64)$$

La valeur critique de  $m$  dépend du rapport  $a/b$ . On a

$$\frac{\partial P_{m1}}{\partial m} = \frac{D\pi^2}{a^2} 2 \left( m + \frac{1}{m} \frac{a^2}{b^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{m^2} \frac{a^2}{b^2} \right)$$

et cette dérivée s'annule pour

$$m = \frac{a}{b} \quad (15.65)$$

C'est donc la valeur entière de  $m$  la plus proche de  $a/b$  qui donne le minimum. La valeur de celui-ci est toujours supérieure à

$$\frac{D\pi^2}{a^2} \left( \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \right)^2 = 4 \frac{D\pi^2}{b^2}$$

On a donc toujours en pratique

$$P_{cr} = 4k \frac{D\pi^2}{b^2}, \quad k \geq 1, \quad k \approx 1 \quad (15.66)$$

Pour trouver la valeur de  $k$ , voyons comment évoluent les charges  $P_{m1}$  en fonction du rapport  $a/b$ . On a

$$\begin{aligned} P_{m1} &= \frac{D\pi^2}{a^2} \left( m + \frac{1}{m} \frac{a^2}{b^2} \right)^2 \\ P_{m+1,1} &= \frac{D\pi^2}{a^2} \left( (m+1) + \frac{1}{(m+1)} \frac{a^2}{b^2} \right)^2 \end{aligned}$$

donc  $P_{m1} = P_{(m+1),1}$  lorsque

$$m + \frac{1}{m} \frac{a^2}{b^2} = (m+1) + \frac{1}{m+1} \frac{a^2}{b^2}$$

soit pour

$$\frac{1}{m(m+1)} \frac{a^2}{b^2} = 1$$

c'est-à-dire

$$\frac{a}{b} = \sqrt{m(m+1)}$$

En ce point, la valeur commune est

$$P_{m1} = \frac{D\pi^2}{a^2} [m + (m+1)]^2 = \frac{D\pi^2}{a^2} (2m+1)^2 = \frac{D\pi^2}{b^2} \left( \frac{4m^2 + 4m + 1}{m^2 + m} \right)$$

soit

$$k = 1 + \frac{1}{4m(m+1)}$$

Ainsi, à partir de  $a/b = 1$ , on a toujours

$$1 < k < 1 + \frac{1}{4m(m+1)} \approx 1 + \frac{1}{4\frac{a^2}{b^2}} = 1 + \frac{b^2}{4a^2}$$

c'est-à-dire que  $k$  ne s'écarte guère de l'unité. En particulier, la transition entre  $P_{11}$  et  $P_{21}$  a lieu pour

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

valeur pour laquelle

$$k = 1 + \frac{1}{8} = 1,125$$

C'est la plus grande valeur pour  $a/b > 1$ . Pour  $a/b < 1$ , on a

$$P_{11} = \frac{D\pi^2}{a^2} \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 = \frac{D\pi^2}{b^2} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)^2$$

soit

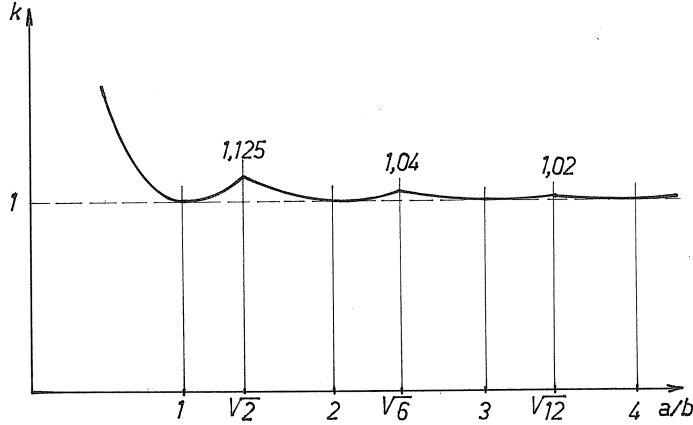
$$k = \frac{1}{4} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)^2$$

Pour les besoins de la pratique, on se place du côté de la sécurité en admettant la valeur unique

$$P_{cr} \approx \frac{4D\pi^2}{b^2}$$

toujours approchée par défaut, et d'autant plus correcte que le rapport  $a/b$  est plus grand. Tout ce qui précède est bien illustré par la figure 15.16 qui représente les valeurs de  $k$  en fonction du rapport  $a/b$ .

Il est intéressant, quant à la physique du problème, de noter que la condition (15.65) signifie que la plaque tend à voiler selon des cellules de voilement sensiblement carrées. C'est l'impossibilité de ce mode de déformation pour  $a/b$  non entier qui relève la charge critique.

FIGURE 15.16 – Diagramme du coefficient  $k$  en fonction du rapport  $a/b$ .

## 15.12 Flambage par flexion et torsion

Dans l'étude du flambage, nous n'avons jusqu'ici considéré que l'instabilité en flexion. Mais il peut se faire, lorsque la poutre a une faible raideur de torsion, que des formes critiques plus complexes mènent à une charge critique plus faible. Ce genre d'instabilité est fréquent dans le cas des poutres à parois minces. Nous considérerons donc des déplacements transversaux incluant de la torsion, soit

$$\begin{aligned} u_1 &= u(z) - y\theta(z) \\ u_2 &= v(z) + x\theta(z) \end{aligned} \quad (15.67)$$

Il vient alors, dans le cadre des gradients de déplacements modérés,

$$\begin{aligned} \gamma_{33} &= D_3 u_3 + \frac{1}{2}(D_3 u_1)^2 + \frac{1}{2}(D_3 u_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}u'^2 + \frac{1}{2}v'^2 - u'\theta'y + v'\theta'x + \frac{1}{2}\theta'(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

soit

$$\gamma_{33}^2 = u'^2 + v'^2 - 2u'\theta'y + 2v'\theta'x + \theta'(x^2 + y^2) \quad (15.68)$$

Dans le cas d'un champ de contrainte initial de compression pure

$$\sigma_{33}^0 = -\frac{P}{\Omega} \quad (15.69)$$



on a donc

$$\int_V \sigma_{33}^0 \gamma_{33}^2 dV = -P \int_0^\ell \left( u'^2 + v'^2 + \frac{I_p}{\Omega} \theta'^2 \right) dz \quad (15.70)$$

Reprenant alors le terme linéaire de l'énergie d'une poutre en flexion et torsion, on obtient

$$\begin{aligned} \delta^2 \mathcal{U} = & \int_0^\ell \left( EI_x u''^2 + EI_y v''^2 + EK \theta''^2 + 2EL_y v'' \theta'' + 2EL_x u'' \theta'' \right) dz \\ & + \int_0^\ell GJ \theta'^2 dz - P \int_0^\ell \left( u'^2 + v'^2 + \frac{I_p}{\Omega} \theta'^2 \right) dz \quad (15.71) \end{aligned}$$

où, rappelons-le, les intégrales  $L_x$  et  $L_y$  sont liées au coordonnées du centre de torsion par les relations

$$L_x = -I_x y_T, \quad L_y = I_y x_T \quad (15.72)$$

Les équations régissant les formes critiques se déduisent aisément de l'expression (15.71). Dans le cas d'une colonne encastrée à sa base et libre à son extrémité, elles s'écrivent

– **Pour**  $u$

$$\left\{ \begin{array}{l} EI_x u^{IV} + EL_x \theta^{IV} + Pu'' = 0 \quad \text{dans } ]0, \ell[ \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \\ EI_x u''(\ell) + EL_x \theta''(\ell) = 0 \\ EI_x u'''(\ell) + EL_x \theta'''(\ell) + Pu'(\ell) = 0 \end{array} \right.$$

– **Pour**  $v$

$$\left\{ \begin{array}{l} EI_y v^{IV} + EL_y \theta^{IV} + Pv'' = 0 \quad \text{dans } ]0, \ell[ \\ v(0) = 0 \\ v'(0) = 0 \\ EI_y v''(\ell) + EL_y \theta''(\ell) = 0 \\ EI_y v'''(\ell) + EL_y \theta'''(\ell) + Pv'(\ell) = 0 \end{array} \right.$$

– Pour  $\theta$

$$\left\{ \begin{array}{l} EK\theta^{IV} + EL_x u^{IV} + EL_y v^{IV} - GJ\theta'' + P\frac{I_p}{\Omega}\theta'' = 0 \quad \text{dans } ]0, \ell[ \\ \theta(0) = 0 \\ \text{nullité du gauchissement : } \theta'(0) = 0 \\ EK\theta''(\ell) + EL_x u''(\ell) + EL_y v''(\ell) = 0 \\ EK\theta'''(\ell) + EL_x'''(\ell) + EL_y v'''(\ell) - GJ\theta'(\ell) + \frac{PI_p}{\Omega}\theta'(\ell) = 0 \end{array} \right.$$

En posant

$$u = U \left(1 - \cos \frac{\pi z}{\ell}\right), \quad v = \left(1 - \cos \frac{\pi z}{\ell}\right), \quad \theta = \Theta \left(1 - \cos \frac{\pi z}{\ell}\right) \quad (15.73)$$

on satisfait aux trois premières conditions aux limites pour chaque champ. Il reste alors à vérifier les conditions

$$\begin{aligned} \left( EI_x \frac{\pi^3}{8\ell^3} - \frac{P\pi}{2\ell} \right) U + EL_x \frac{\pi^3}{8\ell^3} \Theta &= 0 \\ \left( EI_y \frac{\pi^3}{8\ell^3} - \frac{P\pi}{2\ell} \right) V + EL_y \frac{\pi^3}{8\ell^3} \Theta &= 0 \\ EL_x \frac{\pi^3}{8\ell^3} U + EL_y \frac{\pi^3}{8\ell^3} V + \left( EK \frac{\pi^3}{8\ell^3} + GJ \frac{\pi}{2\ell} - P \frac{I_p}{\Omega} \frac{\pi}{2\ell} \right) \Theta &= 0 \end{aligned} \quad (15.74)$$

En introduisant les notations

$$P_x = \frac{\pi^2 EI_x}{4\ell^2}, \quad P_y = \frac{\pi^2 EI_y}{4\ell^2}, \quad P_\theta = \frac{\Omega}{I_p} \left( \frac{\pi^2 EK}{4\ell^2} + GJ \right) \quad (15.75)$$

on obtient la condition suivante :

$$\begin{vmatrix} P_x - P & 0 & -y_T P_x \\ 0 & P_y - P & x_T P_y \\ -y_T P_x & x_T P_y & \frac{I_p}{\Omega} (P_\theta - P) \end{vmatrix} = 0 \quad (15.76)$$

dont les trois solutions sont les charges critiques relatives aux trois formes fondamentales de flambage. Les formes critiques s'obtiennent alors en combinant (15.73) et (15.74). Il est intéressant de considérer deux cas particuliers.

### 15.12.1 Le centre de torsion coïncide avec le centre de gravité

Dans ce cas,  $L_x = L_y = 0$  et le système (15.74) est découplé. Les trois charges critiques sont  $P_x, P_y, P_\theta$ . Si  $y$  est la plus petite des deux inerties de flexion, le flambage par torsion sera déterminant si

$$\frac{\Omega}{I_p} \left( GJ + \frac{\pi^2 EK}{4\ell^2} \right) \leq \frac{\pi^2 EI_y}{4\ell^2}$$

soit si

$$\frac{J}{I_p} + \frac{E \pi^2 EK}{G 4I_p \ell^2} \leq \frac{\pi^2 EI_y}{4\Omega \ell^2}$$

Or, le gauchissement de torsion  $\psi$  a les coordonnées pour gradient, ce qui implique  $\psi = \mathcal{O}(\rho^2)$  où  $\rho$  est le rayon de giration de la section. Il en découle que

$$K = \int_V \psi^2 dV = \mathcal{O}(\rho^4 \Omega)$$

Comme

$$I_p = \rho^2 \Omega$$

ce qui signifie que l'on doit avoir

$$\frac{J}{I_p} \leq \frac{\pi^2 EI_y}{4\ell^2} - \frac{E \pi^2 EK}{G 4I_p \ell^2} = \mathcal{O}\left(\frac{\rho^2}{\ell^2}\right)$$

Cette condition d'extrême petitesse du rapport  $J/I_p$  n'est vérifiée en pratique que pour les sections minces, pour lesquelles

$$\begin{aligned} J &= \mathcal{O}(\rho t^3), \quad t = \text{épaisseur du profil} \\ I_p &= \mathcal{O}(\rho^4) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{J}{I_p} = \mathcal{O}\left(\frac{t^3}{\rho^3}\right)$$

si bien que le flambement par torsion ne pourra être déterminant que si

$$\frac{t}{\rho} \leq \mathcal{O}\left(\frac{\rho}{\ell}\right)^{2/3} \quad (15.77)$$

### 15.12.2 La section possède un axe de symétrie

Dans ce cas, une des coordonnées du centre de torsion, soit  $y_T$ , est nulle et une des charges critiques est  $P_x$ . Les deux autres vérifient l'équation

$$(P_y - P) \frac{I_p}{\Omega} (P_\theta - P) - x_T^2 P_y = 0$$

soit

$$P^2 - (P_y + P_\theta)P + \left( P_y P_\theta - \frac{\Omega x_T^2}{I_p} P_y \right) = 0$$

Les solutions de cette équation sont données par

$$P = \frac{1}{2} \left[ (P_y + P_\theta) \pm \sqrt{(P_y - P_\theta)^2 + 4 \frac{\Omega x_T^2}{I_p} P_y} \right] \quad (15.78)$$

La *plus petite* de ces valeurs est inférieure à  $P_x$  et à  $P_y$  et la plus grande leur est supérieure. Cependant, pour que cet écart se fasse sentir, il faut que

$$4 \frac{\Omega x_T^2}{I_p} P_y$$

soit du même ordre de grandeur que  $|P_y - P_\theta|$ .

### 15.13 Déversement des poutres fléchies

Le *déversement* est une instabilité particulière des poutres possédant un moment d'inertie  $I_x$  beaucoup plus grand que l'autre et chargées en flexion dans le plan de forte inertie (c'est notamment le cas des poutres en I ayant une âme très haute et des semelles de faible largeur). On observe qu'à partir d'une certaine valeur du moment, le plan de forte inertie de la poutre se voile, dans un mouvement comprenant à la fois de la translation et de la torsion. Nous nous limiterons au cas des poutres ayant deux axes de symétrie. On a donc

$$I_x \gg I_y, \quad I_x \gg J, \quad x_T = y_T = 0 \quad (15.79)$$

La sollicitation initiale est un moment  $x^0$ , pouvant dépendre de  $z$ . Il y est associé une contrainte d'extension

$$\sigma_z^0 = \frac{M_x^0}{I_x} x \quad (15.80)$$

et des contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}^0$  et  $\tau_{yz}^0$  vérifiant les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 \tau_{xz}^0 + D_2 \tau_{yz}^0 + \frac{M_x^0}{I_x} x = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ n_1 \tau_{xz} + n_2 \tau_{yz} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} \tau_{xz} d\Omega = T_x^0 = M_x^0 \\ \int_{\Omega} \tau_{yz} d\Omega = 0 \end{array} \right. \quad (15.81)$$

La perturbation de déplacement sera de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = u(z) - y\theta(z) \\ u_2 = v(z) + x\theta(z) \end{array} \right. \quad (15.82)$$

ce qui donne, dans le cadre des gradients de déplacements modérés,

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{33}^2 = (D_1 u_1)^2 + (D_1 u_2)^2 = u'^2 + v'^2 - 2y\theta'u' + 2x\theta'v' + \theta'^2(x^2 + y^2) \\ \gamma_{13}^2 = D_1 u_2 D_3 u_2 = \theta(v' + \theta'x) \\ \gamma_{23}^2 = D_2 u_1 D_3 u_1 = -\theta(u' - \theta'y) \end{array} \right. \quad (15.83)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\sigma_z^0 \gamma_{33}^2 + 2\tau_{xz}^0 \gamma_{13}^2 + 2\tau_{yz}^0 \gamma_{23}^2) d\Omega \\ = 2M_x^0 \theta' v' + 2\theta v' T_x^0 + 2\theta\theta' \int_{\Omega} (x\tau_{xz} + y\tau_{yz}) d\Omega \end{aligned} \quad (15.84)$$

Examinons la dernière intégrale du second membre. On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (x\tau_{xz} + y\tau_{yz}) d\Omega &= \int_{\Omega} \left[ \tau_{xz} D_1 \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right) + \tau_{yz} D_2 \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right) \right] d\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega} \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right) (n_1 \tau_{xz} + n_2 \tau_{yz}) d\Omega - \int_{\omega} \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right) (D_1 \tau_{xz} + D_2 \tau_{yz}) d\Omega \\ &= \frac{T_x^0}{I_x} \int_{\Omega} \left( \frac{x^3 + xy^2}{2} \right) d\Omega = 0 \end{aligned}$$

en vertu des symétries de la section. En conséquence,

$$\int_{\Omega} (\sigma_z^0 \gamma_{33}^2 + 2\tau_{xz}^0 \gamma_{13}^2 + 2\tau_{yz}^0 \gamma_{23}^2) d\Omega = 2M_x^0 \theta' v' + 2\theta v' T_x^0 = 2v'(M_x^0 \theta') \quad (15.85)$$

compte tenu du fait que  $T_x^0 = M_x^0$ .

La variation seconde de l'énergie de déformation s'écrit donc, en posant  $M_x^0 = \lambda\mu(z)$ ,

$$\delta^2\mathcal{U} = \int_0^\ell (EI_y v''^2 + EK\theta'^2 + GJ\theta'^2) dz + 2\lambda \int_0^\ell v'(\mu\theta)' dz \quad (15.86)$$

### 15.13.1 Déversement d'une poutre soumise à un moment quelconque et appuyée à ses extrémités de telle façon que $v = 0$ et $\theta = 0$

Ce genre d'appui correspond rigoureusement à une fourche articulée à ses extrémités, voir figure 15.17. La variation de  $v$  dans (15.86) fournit les conditions

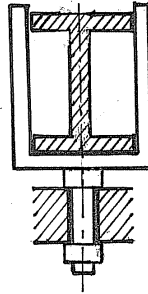


FIGURE 15.17 – Appui sur fourche.

$$\begin{aligned} EI_y v^{IV} - \lambda(\mu\theta)'' &= 0 \quad \text{dans } ]0, \ell[ \\ v(0) = v(\ell) &= 0 \\ EI_y v''(0) = EI_y v''(\ell) &= 0 \end{aligned} \quad (15.87)$$

De l'équation (15.87), on déduit

$$v'' = \lambda \frac{\mu\theta}{EI_y} + C_1 z + C_2$$

et, comme  $v''$  et  $\theta$  s'annulent aux extrémités, cela se ramène à

$$v'' = \lambda \frac{\mu\theta}{EI_y} \quad (15.88)$$

Réintroduisons ce résultat dans (15.86). On a d'une part

$$\int_0^\ell EI_y v''^2 dz = \lambda^2 \int_0^\ell \frac{\mu^2 \theta^2}{EI_y} dz$$

et d'autre part, comme  $\theta = 0$  aux extrémités,

$$2\lambda \int_0^\ell v'(\mu\theta)' dz = 2[v'\mu\theta]_0^\ell - 2 \int_0^\ell v'' \frac{\mu\theta}{EI_y} dz = -2\lambda^2 \int_0^\ell \frac{\mu^2 \theta^2}{EI_y} dz$$

Ceci ramène la variation seconde à l'expression suivante qui ne contient que le champ  $\theta$  :

$$\delta^2 \mathcal{U} = \int_0^\ell (EK\theta''^2 + GJ\theta'^2) dz - \lambda^2 \int_0^\ell \frac{\mu^2 \theta^2}{EI_y} dz \quad (15.89)$$

Il en découle la formule générale

$$\lambda_{cr} = \sqrt{EI_y \cdot GJ} \left( \inf_{\theta} \frac{\int_0^\ell (\theta'^2 + \frac{EK}{GJ} \theta''^2) dz}{\int_0^\ell \mu^2 \theta^2 dz} \right)^{1/2} \quad (15.90)$$

Traitons le cas particulier d'un moment constant ( $\mu = 1$ ). La variation de  $\theta$  dans (15.89) conduit alors à l'équation

$$EK\theta^{IV} - GJ\theta'' - \lambda^2 \frac{\theta}{EI_y} = 0$$

La solution générale de cette équation est

$$\theta = C_1 \cos \alpha z + C_2 \sin \alpha z + C_3 \operatorname{ch} \beta z + C_4 \operatorname{sh} \beta z$$

avec

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{G^2 J^2 + 4\lambda^2 \frac{K}{I_y}} - GJ}{2EK}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{G^2 J^2 + 4\lambda^2 \frac{K}{I_y}} + GJ}{2EK}}$$

Les conditions en  $z = 0$  sont

$$\begin{aligned} \theta &= 0 & \text{d'où} & C_1 + C_3 = 0 \\ \theta'' &= 0 & \text{d'où} & \alpha C_1 + \beta C_3 = 0 \end{aligned}$$

ce qui implique  $C_1 = C_3 = 0$ . En  $z = \ell$ ,

$$\begin{aligned}\theta &= 0 \quad \text{d'où} \quad C_2 \sin \alpha \ell + C_4 \operatorname{sh} \beta \ell = 0 \\ \theta'' &= 0 \quad \text{d'où} \quad -\alpha^2 C_2 \sin \alpha \ell + \beta^2 C_4 \operatorname{sh} \beta \ell = 0\end{aligned}$$

La compatibilité de ce système en  $C_2$  et  $C_4$  exige

$$\sin \alpha \ell \operatorname{sh} \beta \ell (\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

et, comme  $\alpha$  et  $\beta$  sont positifs, cela implique

$$\sin \alpha \ell = 0$$

et, donc,  $C_4 = 0$ . On obtient finalement

$$\theta = C_2 \sin \alpha z$$

avec  $\alpha \ell = n\pi$ , soit

$$\sqrt{G^2 J^2 + 4\lambda^2 \frac{K}{I_y}} - GJ = 2EK \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2}$$

c'est-à-dire

$$G^2 J^2 + 4\lambda^2 \frac{K}{I_y} = \left(2EK \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2}\right)^2 + G^2 J^2 + 4EK \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} GJ$$

ou encore,

$$\lambda^2 = \frac{EI_y GJ}{\ell^2} n^2 \pi^2 \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 EK}{\ell^2 GJ}\right)$$

La charge critique est donc

$$\lambda_{cr} = \frac{\sqrt{EI_y GJ}}{\ell} \pi \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EK}{\ell^2 GJ}} \quad (15.91)$$

### 15.13.2 Remarque sur la répartition des charges [58]

Dans le problème du déversement, si les charges ne sont pas appliquées sur l'axe neutre, mais à une hauteur  $a$  par rapport à celui-ci, leur énergie potentielle s'écrit (voir fig. 15.18)

$$\mathcal{P} = -P[u + a(1 - \cos \theta)]$$

si bien que

$$\delta^2 \mathcal{P} = -Pa\theta^2$$

et ce terme doit être ajouté à la variation seconde :

$$\delta^2 \mathcal{E} = \delta^2 \mathcal{U} - Pa\theta^2 \quad (15.92)$$



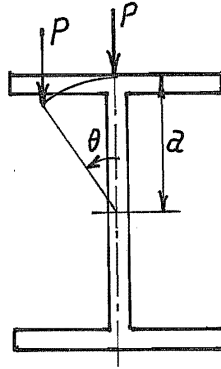


FIGURE 15.18 – Effet déstabilisant de la hauteur du point d’application de la charge.

### 15.13.3 Déversement d’une poutre appuyée sur des fourches en ses deux extrémités, sous l’effet d’une charge centrale appliquée à une hauteur $a$ par rapport à l’axe neutre

On peut chercher une solution approchée de ce problème par une technique de Rayleigh-Ritz, en posant

$$\theta(z) = \Theta \sin \frac{\pi z}{\ell} \quad (15.93)$$

Le moment d’équilibre vaut

$$M_x^0 = \begin{cases} P \frac{z}{2} & \text{dans } ]0, \ell/2[ \\ P \frac{\ell - z}{2} & \text{dans } ]\ell/2, \ell[ \end{cases}$$

Il vient alors, en tenant compte de la symétrie du problème par rapport au point d'application de la charge,

$$\begin{aligned}\delta^2 \mathcal{E} &= \int_0^\ell (EK\theta'^2 + GK\theta'^2) dz - \frac{2P^2}{4EI_x} \int_0^{\ell/2} z^2 \theta^2 dz - Pa \left[ \theta \left( \frac{\ell}{2} \right) \right]^2 \\ &= EK \frac{\pi^4}{2\ell^3} \Theta^2 + GJ \frac{\pi^2}{2\ell} \Theta^2 - 2 \frac{P^2 \Theta^2}{4EI_x} \int_0^{\ell/2} z^2 \sin^2 \frac{\pi z}{\ell} dz - Pa \Theta^2\end{aligned}$$

Pour le calcul de l'intégrale qui reste encore, on note que

$$\begin{aligned}\int_0^{\ell/2} z^2 \sin^2 \frac{\pi z}{\ell} dz &= \frac{1}{2} \int_0^{\ell/2} z^2 \left( 1 - \cos \frac{2\pi z}{\ell} \right) dz \\ &= \frac{\ell^3}{48} - \frac{1}{2} \int_0^{\ell/2} z^2 \cos \frac{2\pi z}{\ell} dz \\ &= \frac{\ell^3}{48} - \frac{\ell^3}{16\pi^3} \int_0^\pi \xi^2 \cos \xi d\xi \\ &= \ell^3 \left\{ \frac{1}{48} - \frac{1}{16\pi^3} [2\xi \cos \xi + (\xi^2 - 2) \sin \xi]_0^\pi \right\} \\ &= \ell^3 \left( \frac{1}{48} + \frac{1}{8\pi^2} \right) = \ell^3 \frac{\pi^2 + 6}{48\pi^2}\end{aligned}$$

L'annulation de la variation seconde donne alors une équation du second degré en  $P$ ,

$$\frac{(\pi^2 + 6)\ell^3}{96\pi^2 EI_x} P^2 + Pa - \frac{\pi^2}{2\ell} \left( 1 + \frac{\pi^2 EK}{\ell^2 GJ} \right) GJ = 0$$

soit

$$P^2 + \frac{96\pi^2 EI_x a}{(\pi^2 + 6)\ell^3} P - \frac{48\pi^4}{\pi^2 + 6} \frac{EI_x GJ}{\ell^4} \left( 1 + \frac{\pi^2 EK}{\ell^2 GJ} \right) = 0$$

La racine positive de cette équation de la forme

$$P^2 + bP - c = 0$$

est

$$P = \sqrt{\left( \frac{b}{2} \right)^2 + c} - \frac{b}{2} = \frac{c}{\sqrt{\left( \frac{b}{2} \right)^2 + c} + \frac{b}{2}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{4c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}}}$$

soit, explicitement,

$$P_{cr} = 17,16 \frac{\sqrt{EI_x GJ \left(1 + \frac{\pi^2 EK}{\ell^2 GJ}\right)}}{\ell^2} \cdot \mathcal{K} \quad (15.94)$$

avec

$$\mathcal{K} = \frac{1}{\sqrt{1 + 12,10 \frac{a^2}{\ell^2} \frac{EI_x}{GJ \left(1 + \frac{\pi^2 EK}{\ell^2 GJ}\right)} + 3,478 \frac{a}{\ell} \sqrt{\frac{EI_x}{GJ \left(1 + \frac{\pi^2 EK}{\ell^2 GJ}\right)}}}} \quad (15.95)$$

Pour les faibles valeurs du rapport  $a/\ell$ , on peut écrire sans grande erreur

$$P_{cr} = 17,16 \frac{\sqrt{EI_x GJ \left(1 + \frac{\pi^2 EK}{\ell^2 GJ}\right)}}{\ell^2} \left(1 - 3,478 \frac{a}{\ell} \sqrt{\frac{EI_x}{GJ \left(1 + \frac{\pi^2 EK}{\ell^2 GJ}\right)}}\right) \quad (15.96)$$

La formule (15.94) estime la charge critique avec un excès d'environ 3%. Les valeurs exactes ont été calculées par Timoshenko [85] à partir d'un développement en série.



## Annexe A

# Équations de l'élasticité en coordonnées curvilignes orthogonales

### A.1 Introduction

Il n'est pas rare de devoir écrire les équations de l'élasticité en coordonnées curvilignes. Le plus souvent, il est vrai, il s'agit de coordonnées curvilignes orthogonales. Mais après un certain nombre de travaux dans ce cadre restreint [14], nous sommes finalement arrivé à la conclusion que le chemin le plus simple est encore d'examiner au départ le cas de coordonnées curvilignes quelconques, puis de particulariser les résultats aux coordonnées curvilignes orthogonales. On peut ainsi obtenir sans grand effort la forme générale des opérateurs courants – gradient, divergence, rotationnel, laplacien – ainsi que l'expression générale des déformations et des équations d'équilibre pour tout système orthogonal.

### A.2 Coordonnées curvilignes

#### A.2.1 Base covariante

Soit  $\mathbf{P}$  un point de l'espace euclidien à trois dimensions, dépendant de trois coordonnées  $x^1, x^2, x^3$ , de telle façon que  $\mathbf{P}(x^1, x^2, x^3) \in C^2$ . On appelle *base*

*covariante* l'ensemble des trois vecteurs

$$\mathbf{g}_i = D_i \mathbf{P} \quad (\text{A.1})$$

pour autant qu'ils soient linéairement indépendants. Tout vecteur  $\mathbf{a}$  peut alors être mis sous la forme

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{g}_i \quad (\text{A.2})$$

Les nombres  $a^i$  sont appelés *composantes contravariantes du vecteur a*.

### A.2.2 Tenseur métrique

Pour une variation infinitésimale  $dx^i$  des coordonnées, le point  $\mathbf{P}$  se déplace d'un vecteur  $d\mathbf{P} = \mathbf{g}_i dx^i$ . L'élément de longueur correspondant est donné par

$$ds^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = \mathbf{g}_i dx^i \cdot \mathbf{g}_j dx^j = g_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{A.3})$$

ce qui fait apparaître le *tenseur métrique*

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad (\text{A.4})$$

qui, par définition, est symétrique et défini positif. Son inverse est noté  $g^{ij}$ , c'est-à-dire que

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i \quad (\text{A.5})$$

### A.2.3 Base contravariante

Appliquant le tenseur métrique inverse  $g^{ij}$  à la base covariante, on obtient les vecteurs

$$\mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j \quad (\text{A.6})$$

qui jouissent de la propriété suivante :

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = g^{ik} \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_j = g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i \quad (\text{A.7})$$

Ces vecteurs  $\mathbf{g}^i$  forment la *base contravariante*. La propriété (A.7) exprime que les deux bases sont *biorthogonales*. Tout vecteur  $\mathbf{a}$  peut être mis sous la forme

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{g}^i \quad (\text{A.8})$$

Les nombres  $a_i$  sont appelés *composantes covariantes du vecteur a*. On notera que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{g}_i = a_j \mathbf{g}^j \cdot \mathbf{g}_i = a_j \delta_i^j = a_i \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{g}^i = a^k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^i = a^k \delta_i^k = a^i \quad (\text{A.10})$$

### A.2.4 Produit scalaire de deux vecteurs

Étant donné deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ , on a les quatre expressions suivantes de leur produit scalaire :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{cases} a_i \mathbf{g}^i \cdot b^k \mathbf{g}_k & = a_i b^k \delta_k^i & = a_i b^i \\ a^i \mathbf{g}_i \cdot b_k \mathbf{g}^k & = a^i b_k \delta_i^k & = a^i b_i \\ a^i \mathbf{g}_i \cdot b^j \mathbf{g}_j & = g_{ij} a^i b^j \\ a_i \mathbf{g}^i \cdot b_j \mathbf{g}^j & = g^{ij} a_i b_j \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

### A.2.5 Produit mixte et produit vectoriel

#### Produit mixte de trois vecteurs

Le *produit mixte*  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  de trois vecteurs  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$  est un nombre défini comme suit :

- Sa *grandeur* est égale au volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs en question.
- Son *signe* est positif si le trièdre  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  a la même orientation (dextrorsum ou sinistrorsum) que le trièdre  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ , négatif dans le cas contraire.

Il va de soi que cette définition n'est pas totalement indépendante de la base choisie, puisque le produit mixte change de signe si l'on change l'orientation d'un des vecteurs de base ou si l'on permute deux éléments de la base. C'est pourquoi on dit que le produit mixte est un *pseudo-scalaire*.

Le produit mixte jouit de la propriété suivante :

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{f} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{f} \\ \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{f} \end{vmatrix} \quad (\text{A.12})$$

qu'il est facile de vérifier dans un système d'axes cartésiens rectangulaires, où

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Introduisant alors le pseudo-tenseur de Lévy-Civita

$$\varepsilon_{ijk} = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k) \quad (\text{A.13})$$

on remarquera qu'il est totalement antisymétrique et ne possède de ce fait qu'une seule composante indépendante, à savoir

$$\varepsilon_{123} = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) > 0$$

La propriété (A.12) entraîne alors

$$(\varepsilon_{123})^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_3 \\ \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_3 \\ \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_3 \end{vmatrix} = g$$

en notant  $g$  le déterminant du tenseur métrique. Il vient donc

$$\varepsilon_{123} = \sqrt{g} \tag{A.14}$$

### Produit vectoriel

On définit alors le *produit vectoriel*  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  de deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  par

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g}_k) \mathbf{g}^k$$

Développant  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  dans la base covariante, on obtient alors

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a^i b^j (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k) \mathbf{g}^k = \varepsilon_{kij} a^i b^j \mathbf{g}^k$$

soit, pour  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ,

$$c_k = \varepsilon_{kij} a^i b^j \tag{A.15}$$

De la même façon, en posant

$$\varepsilon^{ijk} = (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}^k) = g^{il} g^{jm} g^{kn} \varepsilon_{lmn} \tag{A.16}$$

on trouve

$$\varepsilon^{123} = \frac{1}{\sqrt{g}} \tag{A.17}$$

et, pour  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , il vient

$$c^i = \varepsilon^{ijk} a_j b_k \tag{A.18}$$



### Produits de pseudo-tenseurs de Lévy-Civita

La propriété (A.12) implique

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{lmn} &= (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}^k)(\mathbf{g}_\ell, \mathbf{g}_m, \mathbf{g}_n) = \begin{vmatrix} \delta_\ell^i & \delta_m^i & \delta_n^i \\ \delta_\ell^j & \delta_m^j & \delta_n^j \\ \delta_\ell^k & \delta_m^k & \delta_n^k \end{vmatrix} \\ &= \delta_\ell^i \delta_m^j \delta_n^k + \delta_\ell^j \delta_m^k \delta_n^i + \delta_m^i \delta_n^j \delta_\ell^k - \delta_n^i \delta_m^j \delta_\ell^k - \delta_\ell^i \delta_n^j \delta_m^k - \delta_m^i \delta_\ell^j \delta_n^k \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

En particulier,

$$\varepsilon^{ijk} \varepsilon_{imn} = 3\delta_m^j \delta_n^k + \delta_n^j \delta_m^k + \delta_m^k \delta_n^j - \delta_n^k \delta_m^j - 3\delta_n^j \delta_m^k - \delta_m^j \delta_n^k = \delta_m^j \delta_n^k - \delta_m^k \delta_n^j \quad (\text{A.20})$$

$$\varepsilon^{ijk} \varepsilon_{ijn} = 3\delta_n^k - \delta_n^k = 2\delta_n^k \quad (\text{A.21})$$

et

$$\varepsilon^{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6 \quad (\text{A.22})$$

## A.3 Dérivation des vecteurs de base

### A.3.1 Dérivées de la base covariante

Dans maintes applications, il est nécessaire de dériver les vecteurs de base. A cette fin, on pose

$$D_k \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_\ell = \Gamma_{k\ell i} \quad (\text{A.23})$$

On donne aux  $\Gamma_{k\ell i}$  le nom de *symboles de Christoffel de première espèce*. Ils sont symétriques par rapport à leurs indices extrêmes, puisque

$$\Gamma_{k\ell i} = D_{ki} \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}_\ell$$

En projetant les dérivées de la base covariante sur la base contravariante, on obtient

$$D_k \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^\ell = g^{\ell m} D_k \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_m = g^{\ell m} \Gamma_{kmi} = \Gamma_k{}^\ell{}_i \quad (\text{A.24})$$

Les  $\Gamma_k{}^\ell{}_i$  sont appelés *symboles de Christoffel de seconde espèce*.

### A.3.2 Dérivées de la base contravariante

Pour obtenir les dérivées de la base contravariante, notons que

$$D_k \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^\ell = D_k(\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_\ell) - \mathbf{g}^i \cdot D_k \mathbf{g}_\ell = -\Gamma_k{}^i{}_\ell \quad (\text{A.25})$$

### A.3.3 Relations entre les symboles de Christoffel et le tenseur métrique

On a immédiatement

$$D_i g_{jk} = D_i(\mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}_k) = D_i \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}_k + \mathbf{g}_j \cdot D_i \mathbf{g}_k = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{ijk} \quad (\text{A.26})$$

Écrivons trois fois cette relation, en permutant les indices de manière cyclique :

$$\begin{aligned} D_i g_{jk} &= \Gamma_{ijk} + \Gamma_{ikj} \\ D_j g_{ki} &= \Gamma_{jki} + \Gamma_{jik} \\ D_k g_{ij} &= \Gamma_{kij} + \Gamma_{kji} \end{aligned}$$

et soustrayons la deuxième relation de la somme des deux autres, puis divisons par deux. On obtient, en tenant compte de la symétrie des symboles de Christoffel par rapport à leurs indices extrêmes, la relation fondamentale suivante :

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(D_i g_{jk} + D_k g_{ij} - D_j g_{ki}) \quad (\text{A.27})$$

Cette relation est très utile, car elle permet de calculer les symboles de Christoffel à partir du tenseur métrique.

## A.4 Dérivation covariante d'un vecteur

La dérivation d'un vecteur nécessite à la fois la dérivation de ses composantes et celle de la base. Pour  $\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i$ , on a

$$D_k \mathbf{u} = D_k u^i \mathbf{g}_i + u^i D_k \mathbf{g}_i = D_k u^i \mathbf{g}_i + u^i \Gamma_{i k}^{\ell} \mathbf{g}_{\ell} = (D_k u^i + u^{\ell} \Gamma_{k}^i{}_{\ell}) \mathbf{g}_i$$

La quantité entre parenthèses est appelée *dérivée covariante* et notée  $u^i|_k$ . Ainsi,

$$D_k \mathbf{u} = u^i|_k \mathbf{g}_i \quad \text{avec} \quad u^i|_k = D_k u^i + \Gamma_{k}^i{}_{\ell} u^{\ell} \quad (\text{A.28})$$

Passons au cas  $\mathbf{u} = u_i \mathbf{g}^i$ . On a

$$D_k \mathbf{u} = D_k u_i \mathbf{g}^i + u_i D_k \mathbf{g}^i = D_k u_i \mathbf{g}^i - u_i \Gamma_{k}^i{}_{\ell} \mathbf{g}^{\ell} = (D_k u_i - \Gamma_{k}^{\ell}{}_{i} u_{\ell}) \mathbf{g}^i$$

ce qui mène à écrire

$$D_k \mathbf{u} = u_i|_k \mathbf{g}^i \quad \text{avec} \quad u_i|_k = D_k u_i - \Gamma_{k}^{\ell}{}_{i} u_{\ell} \quad (\text{A.29})$$

## A.5 Tenseurs du second ordre et leurs dérivées covariantes

Un tenseur du second ordre est une grandeur à deux indices qui, appliquée à un vecteur, donne un nouveau vecteur. Plusieurs cas sont possibles :

1.  $a_{ij}b^j = c_i$  (tenseur deux fois covariant)
2.  $a^{ij}b_j = c^i$  (tenseur deux fois contravariant)
3.  $a_j^i b^j = c^i$  (tenseur mixte)
4.  $a_i^j b_j = c_i$  (tenseur mixte)

La dérivation covariante des tenseurs est définie par les relations

$$\begin{aligned} (a_{ij}b^j)|_k &= a_{ij}|_k b^j + a_{ij}b^j|_k \\ (a^{ij}b_j)|_k &= a^{ij}|_k b_j + a^{ij}b_j|_k \\ (a_j^i b^j)|_k &= a_j^i|_k b^j + a_j^i b^j|_k \\ (a_i^j b_j)|_k &= a_i^j|_k b_j + a_i^j b_j|_k \end{aligned}$$

Examinons le cas d'un tenseur deux fois contravariant. Posant  $c^i = a^{ij}b_j$ , on doit donc avoir

$$c^i|_k = D_k c^i + \Gamma_k^i{}_\ell c^\ell = a^{ij}|_k b_j + a^{ij} D_k b_j - a^{ij} \Gamma_k^\ell{}_j b_\ell$$

soit

$$D_k a^{ij} b_j + a^{ij} D_k b_j + \Gamma_k^i{}_\ell a^{\ell j} b_j = a^{ij}|_k b_j + a^{ij} D_k b_j - a^{ij} \Gamma_k^\ell{}_j b_\ell$$

ce qui équivaut à

$$a^{ij}|_k b_j = (D_k a_{ij} + \Gamma_k^i{}_\ell a^{\ell j} + \Gamma_k^j{}_\ell a^{i\ell}) b_\ell$$

Ceci devant être vrai pour tout vecteur  $b_i$ , on obtient

$$a^{ij}|_k = D_k a_{ij} + \Gamma_k^i{}_\ell a^{\ell j} + \Gamma_k^j{}_\ell a^{i\ell} \quad (\text{A.30})$$

On montrerait de même que

$$a_{ij}|_k = D_k a_{ij} - \Gamma_k^\ell{}_i a_{\ell j} - \Gamma_k^\ell{}_j a_{i\ell} \quad (\text{A.31})$$

$$a_j^i|_k = D_k a_j^i + \Gamma_k^i{}_\ell a_j^\ell - \Gamma_k^\ell{}_j a_\ell^i \quad (\text{A.32})$$

## A.6 Lemme de Ricci

Calculons les dérivées covariantes du tenseur métrique. On a

$$g_{ij}|_k = D_k g_{ij} - \Gamma_k^\ell{}_i g_{\ell j} - \Gamma_k^\ell{}_j g_{i\ell} = D_k g_{ij} - \Gamma_{kji} - \Gamma_{kij} = 0$$

en vertu de (A.26). C'est le *lemme de Ricci* : les dérivées covariantes du tenseur métrique sont nulles.

Le tenseur métrique inverse possède la même propriété. En effet, en dérivant l'identité

$$g_{ij}g^{jm} = \delta_i^m$$

on obtient

$$D_k g_{ij}g^{jm} + g_{ij}D_k g^{jm} = 0$$

Contractons avec  $g^{pi}$ . On obtient

$$g^{pi}g^{jm}D_k g^{ij} + \delta_j^p D_k g^{jm} = 0$$

soit

$$\begin{aligned} D_k g^{pm} &= -g^{pi}g^{jm}D_k g_{ij} \\ &= -g^{pi}g^{jm}(\Gamma_{kij} + \Gamma_{kji}) \\ &= -g^{jm}\Gamma_k^p{}_j - g^{pi}\Gamma_k^m{}_i \end{aligned}$$

Dès lors,

$$g^{pm}|_k = D_k g^{pm} + \Gamma_k^p{}_j g^{jm} + \Gamma_k^m{}_i g^{pi} = 0$$

Enfin, on a encore

$$\delta_i^j|_k = D_k \delta_i^j + \Gamma_k^j{}_m \delta_i^m - \Gamma_k^m{}_i \delta_m^j = 0 + \Gamma_k^j{}_i - \Gamma_k^j{}_i = 0$$

Une conséquence importante de ce lemme est

$$\begin{aligned} a_i|_k &= (g_{ij}a^j)|_k = g_{ij}a^j|_k \\ a^i|_k &= (g^{ij}a_j)|_k = g^{ij}a_j|_k \end{aligned} \tag{A.33}$$

## A.7 Propriétés de $\sqrt{g}$

Remarquons d'abord que l'élément de volume élémentaire se construit sur le parallépipède formé par les trois vecteurs  $\mathbf{g}_1 dx^1$ ,  $\mathbf{g}_2 dx^2$  et  $\mathbf{g}_3 dx^3$ , ce qui donne

$$dV = (\mathbf{g}_1 dx^1, \mathbf{g}_2 dx^2, \mathbf{g}_3 dx^3) = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 \tag{A.34}$$

Les dérivées de  $\sqrt{g}$  sont tout-à-fait remarquables. En effet,

$$\begin{aligned} D_i(\sqrt{g}) &= D_i\varepsilon_{123} = (D_i\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) + (\mathbf{g}_1, D_i\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) + (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, D_i\mathbf{g}_3) \\ &= \Gamma_{i1}^k(\mathbf{g}_k, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) + \Gamma_{i2}^k(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_k, \mathbf{g}_3) + \Gamma_{i3}^k(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_k) \end{aligned}$$

En vertu des propriétés du produit mixte, cela donne

$$D_i(\sqrt{g}) = \Gamma_{i1}^1\varepsilon_{123} + \Gamma_{i2}^2\varepsilon_{123} + \Gamma_{i3}^3\varepsilon_{123} = \sqrt{g}\Gamma_{ik}^k \quad (\text{A.35})$$

Enfin, il y a lieu de signaler une identité utile :

$$D_i(\sqrt{g}\mathbf{g}^i) = (D_i\sqrt{g})\mathbf{g}^i + \sqrt{g}D_i\mathbf{g}^i = \sqrt{g}(\Gamma_{ik}^k\mathbf{g}^i - \Gamma_{i\ell}^i\mathbf{g}^\ell) = 0 \quad (\text{A.36})$$

que nous appellerons dans la suite *identité de Jacobi*<sup>1</sup>.

## A.8 Opérateurs différentiels courants

### A.8.1 Gradient

Étant donné une fonction scalaire  $\varphi$ , on définit son gradient par la relation

$$d\varphi = \mathbf{grad}\varphi \cdot d\mathbf{P}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$d\varphi = \mathbf{grad}\varphi \cdot \mathbf{g}_i dx^i$$

Or, on sait que

$$d\varphi = D_i\varphi dx^i$$

Par comparaison, on déduit que

$$\mathbf{grad}\varphi \cdot \mathbf{g}_i = D_i\varphi \quad (\text{A.37})$$

ce qui revient à dire que les dérivées courantes sont les composantes covariantes du gradient.

---

1. Dans le cadre d'une présentation des coordonnées curvilignes par transformation des coordonnées cartésiennes [14], le même résultat se retrouve comme une propriété du déterminant jacobien et est connu sous le nom d'*identité de Jacobi* [39]. Il est donc légitime de conserver cette appellation pour l'identité (A.36) ci-dessus qui est son strict équivalent géométrique.

### A.8.2 Élément de surface orienté

Considérons une fonction arbitraire  $\varphi$ . On connaît la relation d'Ostrogradski

$$\int_V \mathbf{grad}\varphi dV = \int_S \varphi \mathbf{n} dS \quad (\text{A.38})$$

Le groupement  $\mathbf{n}dS$  qui apparaît dans l'élément de surface est ce que nous appellerons l'élément de surface orienté. Transposons la première intégrale de la relation ci-dessus dans l'espace des coordonnées  $x^i$ . Au volume  $V$  de l'espace physique correspond le volume  $V'$  de l'espace des coordonnées. L'élément de volume physique étant  $dV = \sqrt{g} dV'$ , on a

$$\int_V \mathbf{grad}\varphi dV = \int_{V'} \sqrt{g} D_i \varphi \mathbf{g}^i dV'$$

Notons  $S'$  la frontière de  $V'$  et soit  $\nu_i$  le vecteur normal à cette surface. L'application du théorème d'Ostrogradski donne ici

$$\int_{V'} \sqrt{g} D_i \varphi \mathbf{g}^i dV' = \int_{S'} \sqrt{g} \nu_i \varphi \mathbf{g}^i dS' - \int_{V'} \varphi D_i (\sqrt{g} \mathbf{g}^i) dV' \quad (\text{A.39})$$

et le dernier terme du second membre est nul en vertu de l'identité de Jacobi. L'identification des termes de surface de (A.38) et (A.39) pour toute fonction  $\varphi$  conduit alors à la relation

$$\mathbf{n}dS = \sqrt{g} \nu_i \mathbf{g}^i dS'$$

soit encore

$$n_j dS = \mathbf{n} \cdot \mathbf{g}_j dS = \sqrt{g} \nu_j dS' \quad (\text{A.40})$$

### A.8.3 Divergence

La formule classique

$$\int_V \text{div} \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{A.41})$$

se transforme en

$$\int_{V'} \sqrt{g} \text{div} \mathbf{u} dV' = \int_{S'} \sqrt{g} \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^i \nu_i dS' = \int_{S'} \sqrt{g} u^i \nu_i dS' = \int_{V'} D_i (\sqrt{g} u^i) dV'$$

ce qui donne

$$\text{div} \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} D_i (\sqrt{g} u^i) \quad (\text{A.42})$$

Tenant compte de l'expression (A.35) des dérivées de  $\sqrt{g}$ , on peut encore écrire

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g} D_i u^i + u^i \sqrt{g} \Gamma_{i k}^k) = D_i u^i + \Gamma_{i k}^i u^k = u^i |_{,i} \quad (\text{A.43})$$

On déduit alors de (A.41) la relation fondamentale

$$\int_V u^i |_{,i} dV = \int_S u^i n_i dS \quad (\text{A.44})$$

#### A.8.4 Laplacien

Le laplacien est défini par la relation

$$\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$$

ce qui, en vertu de (A.42) et de (A.37) traduit sous la forme

$$(\operatorname{grad} \varphi)^i = g^{ij} D_j \varphi$$

entraîne

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} D_i (\sqrt{g} g^{ij} D_j \varphi) \quad (\text{A.45})$$

#### A.8.5 Rotationnel

Nous introduirons le rotationnel par la relation

$$\int_V \operatorname{rot} \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{u} dS$$

qui se transforme dans l'espace des coordonnées comme suit

$$\int_{V'} \sqrt{g} \operatorname{rot} \mathbf{u} dV' = \int_{S'} \sqrt{g} \nu_i \mathbf{g}^i \times \mathbf{u} dS' = \int_{V'} D_i (\sqrt{g} \mathbf{g}^i \times \mathbf{u}) dV'$$

En vertu de l'identité de Jacobi, la dernière intégrale se réduit à

$$\int_{V'} \sqrt{g} \mathbf{g}^i \times D_i \mathbf{u} dV'$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
 \mathbf{rot} \mathbf{u} &= \mathbf{g}^i \times D_i \mathbf{u} \\
 &= \mathbf{g}_p \varepsilon^{pqr} (\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_q) u_r |_i \\
 &= \mathbf{g}_p \varepsilon^{pqr} \delta_q^i u_r |_i \\
 &= \mathbf{g}_p \varepsilon^{pqr} u_r |_q
 \end{aligned} \tag{A.46}$$

On notera que

$$\varepsilon^{pqr} u_r |_q = \varepsilon^{pqr} D_q u_r + \varepsilon^{pqr} \Gamma_q^m r u_m = \varepsilon^{pqr} D_q u_r$$

en vertu de la symétrie des symboles de Christoffel par rapport à leurs indices extrêmes. On obtient ainsi l'expression plus simple

$$\mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^p = \varepsilon^{pqr} D_q u_r \tag{A.47}$$

## A.9 Tenseur des déformations de Green

Au cours de la déformation, un point  $\mathbf{P}$  se transporte en  $\mathbf{P} + \mathbf{u}$ . On a alors

$$d(\mathbf{P} + \mathbf{u}) = (D_k \mathbf{P} + D_k \mathbf{u}) dx^k = (\mathbf{g}_k + D_k \mathbf{u}) dx^k$$

et l'élément de longueur après déformation est donc donné par

$$\begin{aligned}
 |d(\mathbf{P} + \mathbf{u})|^2 &= (\mathbf{g}_k + D_k \mathbf{u}) dx^k \cdot (\mathbf{g}_\ell + D_\ell \mathbf{u}) dx^\ell \\
 &= (g_{k\ell} + \mathbf{g}_k \cdot D_\ell \mathbf{u} + \mathbf{g}_\ell \cdot D_k \mathbf{u} + D_k \mathbf{u} \cdot D_\ell \mathbf{u}) dx^k dx^\ell \\
 &= (g_{k\ell} + 2\gamma_{kl}^1 + \gamma_{kl}^2) dx^k dx^\ell
 \end{aligned}$$

avec

$$\gamma_{kl}^1 = \frac{1}{2} (u_k |_\ell + u_\ell |_k) \tag{A.48}$$

$$\gamma_{kl}^2 = u^i |_k \mathbf{g}_i \cdot u_j |_\ell \mathbf{g}^j = u^i |_k u_i |_\ell \tag{A.49}$$

## A.10 Equations d'équilibre

Nous nous limitons ici au cas géométriquement linéaire. On écrit alors  $\varepsilon_{kl} = \gamma_{kl}^1$ . Pour un déplacement virtuel  $\delta \mathbf{u}$ , le théorème des déplacements virtuels s'écrit

$$\int_V (\sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} - f^i \delta u_i) dV = \int_S t^i \delta u_i dS = 0 \tag{A.50}$$



Or,

$$\int_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma^{ij} (\delta u_i|_j + \delta u_j|_i) dV = \int_V \sigma^{ij} \delta u_i|_j dV$$

Notons que le théorème de la divergence entraîne

$$\int_V (\sigma^{ij} \delta u_i)|_j dV = \int_S \sigma_{ij} \delta u_i n_j dS$$

ce qui se développe en

$$\int_V \sigma_{ij}|_j \delta u_i dV + \int_V \sigma_{ij} \delta u_i|_j dV = \int_S \sigma_{ij} \delta u_i n_j dS$$

soit

$$\int_V \sigma^{ij} \delta u_i|_j dV = \int_S \sigma^{ij} \delta u_i n_j dS - \int_V \sigma_{ij}|_j \delta u_i dV$$

Dès lors, (A.50) se ramène à

$$- \int_V (\sigma^{ij}|_j + f^i) \delta u_i dV + \int_S (n_j \sigma^{ij} - t^i) dS = 0$$

ce qui donne les équations d'équilibre

$$\begin{aligned} \sigma^{ij}|_j + f^i &= 0 \quad \text{dans } V \\ n_j \sigma^{ij} &= t^i \quad \text{sur } S \end{aligned} \tag{A.51}$$

## A.11 Coordonnées curvilignes orthogonales

Des coordonnées curvilignes sont dites *orthogonales* si leur tenseur métrique est diagonal. Dans tout ce qui concerne ce type de coordonnées, *nous ne suivrons pas la convention de sommation d'Einstein et les sommes à effectuer seront notées explicitement*. Par définition, on a ici

$$g_{ij} = h_i^2 \delta_{ij} \tag{A.52}$$

avec  $h_i = |\mathbf{g}_i|$ . On a immédiatement

$$\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3 \tag{A.53}$$

Les symboles de Christoffel se calculent alors par la formule classique (A.29), ce qui donne

$$\Gamma_{k i \ell} = \frac{1}{2} [D_k (h_i^2 \delta_{i \ell}) + D_\ell (h_i^2 \delta_{k i}) - D_i (h_k^2 \delta_{k \ell})]$$

L'examen de ce résultat mène à la conclusion que deux indices au moins doivent être confondus pour trouver une valeur non nulle et que

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{kk\ell} &= \frac{1}{2}D_\ell(h_k^2) = h_k D_\ell h_k \\
 \Gamma_{kik} &= -\frac{1}{2}D_i(h_k^2) = -h_k D_i h_k \\
 \Gamma_{kkk} &= \frac{1}{2}[D_k(h_k^2) + D_k(h_k^2) - D_k(h_k^2)] = h_k D_k h_k
 \end{aligned}
 \tag{A.54}$$

On en déduit aisément

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{k\ell}^k &= \frac{D_\ell h_k}{h_k} \\
 \Gamma_{kk}^i &= -\frac{k_k D_i h_k}{h_i^2} \\
 \Gamma_{kk}^k &= \frac{D_k h_k}{h_k}
 \end{aligned}
 \tag{A.55}$$

et les dérivées covariantes se calculent comme suit

1. Pour  $i \neq k$ ,

$$\begin{aligned}
 u_i|_k &= D_k u_i - \sum_m \Gamma_{ik}^m u_m \\
 &= D_k u_i - \frac{D_k h_i}{h_i} u_i - \frac{D_i h_k}{h_k} u_k \\
 &= h_i D_k \left( \frac{u_i}{h_i} \right) - \frac{u_k}{h_k} D_i h_k
 \end{aligned}
 \tag{A.56}$$

- 2.

$$\begin{aligned}
 u_i|i &= D_i u_i - \sum_m \Gamma_{ii}^m u_m \\
 &= D_i u_i - \sum_{m \neq i} \Gamma_{ii}^m u_m - \Gamma_{ii}^i u_i \\
 &= D_i u_i + \sum_{m \neq i} \frac{h_i D_m h_i}{h_m^2} u_m - \frac{D_i h_i}{h_i} u_i \\
 &= h_i D_i \left( \frac{u_i}{h_i} \right) + \sum_{m \neq i} \frac{u_m}{h_m} \frac{h_i D_m h_i}{h_m}
 \end{aligned}
 \tag{A.57}$$

3. Pour  $i \neq k$ ,

$$\begin{aligned}
 u^i|_k &= D_k u^i + \sum_m \Gamma_k^i{}^m u^m \\
 &= D_k u^i + \Gamma_k^i{}^k u^k + \Gamma_k^i{}^i u^i \\
 &= D_k u^i - \frac{h_k D_i h_k}{h_i^2} u^k + \frac{D_k h_i}{h_i} u^i \\
 &= \frac{1}{h_i} D_k (h_i u^i) - (h_k u^k) \frac{D_i h_k}{h_i^2}
 \end{aligned} \tag{A.58}$$

4.

$$\begin{aligned}
 u^i|_i &= D_i u^i + \sum_m \Gamma_i^i{}^m u^m \\
 &= D_i u^i + \sum_{m \neq i} \Gamma_i^i{}^m u^m + \Gamma_i^i{}^i u^i \\
 &= D_i u^i + \sum_{m \neq i} u^m \frac{D_m h_i}{h_i} + u^i \frac{D_i h_i}{h_i} \\
 &= \frac{1}{h_i} D_i (h_i u) + \sum_{m \neq i} (h_m u^m) \frac{D_m h_i}{h_i h_m}
 \end{aligned} \tag{A.59}$$

## A.12 Utilisation des composantes physiques

Il est d'usage, dans le cas des coordonnées curvilignes orthogonales, d'utiliser la base dite physique,

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{g}_i}{h_i} = h_i \mathbf{g}^i \tag{A.60}$$

qui est orthonormée. Un vecteur s'écrit alors

$$\mathbf{a} = \sum_i \hat{a}_i \mathbf{e}_i$$

les  $\hat{a}_i$  étant ses composantes physiques. Comme

$$\mathbf{a} \sum_i \hat{a}_i \mathbf{e}_i = \sum_i \hat{a}_i \frac{\mathbf{g}_i}{h_i} = \sum_i \hat{a}_i h_i \mathbf{g}^i$$

il est clair que

$$a^i = \frac{\hat{a}_i}{h_i}, \quad a_i = h_i \hat{a}_i \tag{A.61}$$

Pour les tenseurs, on utilisera la condition d'invariance du scalaire

$$\varphi = a_{ij}b^i c^j = a_{ij} \frac{\hat{b}_i \hat{c}_j}{h_i h_j} = \hat{a}_{ij} \hat{b}_i \hat{c}_j$$

ce qui donne

$$a_{ij} = h_i h_j \hat{a}_{ij} \tag{A.62}$$

et de même,

$$a^{ij} = \frac{1}{h_i h_j} \hat{a}_{ij}, \quad a_j^i = \frac{h_j}{h_i} \hat{a}_{ij} \tag{A.63}$$

Reprenons dans ce cadre les opérateurs usuels

### A.12.1 Gradient

$$\mathbf{grad}\varphi = \sum_i D_i \varphi \mathbf{g}_i = \sum_i \frac{1}{h_i} D_i \varphi \mathbf{e}_i \tag{A.64}$$

### A.12.2 Divergence

$$\mathbf{divu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i D_i (\sqrt{g} u^i) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i D_i \left( \frac{\sqrt{g}}{h_i} \hat{u}_i \right) \tag{A.65}$$

### A.12.3 Rotationnel

$$\mathbf{rotu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\ell, i, k} \mathbf{g}_\ell e_{\ell ik} D_i u_k = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\ell, i, k} e_{\ell ik} h_\ell \mathbf{e}_\ell D_i (h_k \hat{u}_k)$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\mathbf{rotu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ h_1 \hat{u}_1 & h_2 \hat{u}_2 & h_3 \hat{u}_3 \end{vmatrix} \tag{A.66}$$

### A.12.4 Laplacien

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i, j} D_i (\sqrt{g} g^{ij} D_j \varphi) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \left( \frac{\sqrt{g}}{h_i^2} D_i \varphi \right) \tag{A.67}$$

### A.12.5 Dérivées covariantes

Pour  $i \neq k$ , on tire de (A.56)

$$u_i|_k = h_i D_k \hat{u}_i - \hat{u}_k D_i h_k \quad (\text{A.68})$$

et, par (A.57),

$$u_i|_i = h_i D_i \hat{u}_i + \sum_{m \neq i} \hat{u}_m \frac{h_i D_m h_i}{h_m} \quad (\text{A.69})$$

### A.12.6 Déformations

Des formules précédentes, on déduit, pour  $i \neq k$

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{ik} &= h_i D_k \hat{u}_i - \hat{u}_k D_i h_k + h_k D_i \hat{u}_k - \hat{u}_i D_k h_i \\ &= h_i^2 D_k \left( \frac{\hat{u}_i}{h_i} \right) + h_k^2 D_i \left( \frac{\hat{u}_k}{h_k} \right) \end{aligned}$$

En conséquence,

$$2\hat{\varepsilon}_{ik} = \frac{2\varepsilon_{ik}}{h_i h_k} = \frac{h_i}{h_k} D_k \left( \frac{\hat{u}_i}{h_i} \right) + \frac{h_k}{h_i} D_i \left( \frac{\hat{u}_k}{h_k} \right) \quad (\text{A.70})$$

De même,

$$\hat{\varepsilon}_{ii} = \frac{1}{h_i^2} u_i|_i = \frac{1}{h_i} D_i \hat{u}_i + \sum_{m \neq i} \hat{u}_m \frac{D_m h_i}{h_i h_m} \quad (\text{A.71})$$

### A.12.7 Équations d'équilibre

La démarche la plus simple pour obtenir les équations d'équilibre consiste à utiliser le principe des travaux virtuels. Pour une variation de déplacement  $\delta \hat{u}_k$ , on a, en vertu de (A.70) et (A.71)

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \hat{\varepsilon}_{kk} = \frac{1}{h_k} D_k \delta \hat{u}_k \\ \text{Pour } i \neq k \quad \delta \hat{\varepsilon}_{ii} = \frac{D_k h_i}{h_i h_k} \delta \hat{u}_k \\ \text{Pour } \ell \neq k \quad 2\delta \hat{\varepsilon}_{k\ell} = \frac{h_k}{h_\ell} D_\ell \left( \frac{\delta \hat{u}_k}{h_k} \right) \end{array} \right.$$

Le principe des travaux virtuels s'écrit donc, pour  $\delta\hat{u}_k$ ,

$$\int_{V'} \sqrt{g} \left\{ \hat{\sigma}_{kk} \frac{1}{h_k} D_k \delta\hat{u}_k + \sum_{i \neq k} \hat{\sigma}_{ii} \frac{D_k h_i}{h_i h_k} \delta\hat{u}_k + \sum_{\ell \neq k} \hat{\sigma}_{k\ell} \frac{h_k}{h_\ell} D_\ell \left( \frac{\delta\hat{u}_k}{h_k} \right) - \hat{f}_k \delta\hat{u}_k \right\} dV' = 0$$

ce qui conduit à la condition d'équilibre intérieur

$$-D_k \left( \frac{\sqrt{g}}{h_k} \hat{\sigma}_{kk} \right) - \frac{1}{h_k} \sum_{\ell \neq k} D_\ell \left( \frac{\sqrt{g} h_k}{h_\ell} \hat{\sigma}_{k\ell} \right) + \sum_{i \neq k} \sqrt{g} \hat{\sigma}_{ii} \frac{D_k h_i}{h_i h_k} - \sqrt{g} \hat{f}_k = 0$$

soit encore

$$\frac{1}{\sqrt{g}} D_k \left( \frac{\sqrt{g}}{h_k} \hat{\sigma}_{kk} \right) + \frac{1}{\sqrt{g} h_k} \sum_{\ell \neq k} D_\ell \left( \frac{\sqrt{g} h_k}{h_\ell} \hat{\sigma}_{k\ell} \right) - \sum_{i \neq k} \hat{\sigma}_{ii} \frac{D_k h_i}{h_i h_k} + \hat{f}_k = 0 \quad (\text{A.72})$$

### A.13 Exercices

**Exercice 49** *Écrire l'expression du gradient, de la divergence, du rotationnel, du laplacien, des déformations et des équations d'équilibre en coordonnées cylindriques.*

*Indication*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_\theta = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément leur orthogonalité.

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_z = 1$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

$$\sqrt{g} = r$$

**Exercice 50** *Idem pour les coordonnées sphériques caractérisées par*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

*Indication*

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta$$

**Exercice 51** *Idem pour les coordonnées elliptiques cylindriques, données par les relations*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a \operatorname{ch} \xi \cos \eta \\ a \operatorname{sh} \xi \sin \eta \\ z \end{pmatrix}$$

*Indication*

$$h_\xi = h_\eta = a \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta}, \quad h_z = 1$$





# Bibliographie

- [1] M. ABRAMOWITZ et I. STEGUN – *Handbook of mathematical functions*, Dover, New York, 1965.
- [2] P. APPELL – *Mécanique rationnelle*, 3e éd., vol. 3, Gauthier-Villars, Paris, 1952.
- [3] A. J. C. BARRÉ DE SAINT-VENANT – « Mémoire sur la flexion des prismes élastiques », *Journal de mathématiques pures et appliquées (Liouville)*.
- [4] —, « Mémoire sur la torsion des prismes », *Mémoires de divers savants de l'Académie des Sciences* (1855), p. 233.
- [5] N. BOURBAKI – *Théorie des ensembles*, Hermann, Paris, 1970.
- [6] J. BOUSSINESQ – *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques, principalement au calcul des déformations et des pressions que produisent, dans ces solides, des effets quelconques exercés sur une petite partie de leur surface ou de leur intérieur ; mémoire suivi de notes étendues sur divers points de physique mathématique et d'analyse*, vol. 13, Recueil de la Société des Sciences de Lille, Lille, 1885.
- [7] R. BREDT – « Kritische Bemerkungen zur Drehungselasticität », *Z.V.D.I.* **40** (1896), no. 29, p. 819–917.
- [8] H. BRYAN – « On the stability of a plane plate under thruts in its own plane, with application to the buckling of the sides of a ship », *Proc. London Math. Soc.* **22** (1890), p. 54–67.
- [9] A. CLEBSCH – *Theorie der Elasticität der fester Körper von Dr. A. Clebsch, Professor an der polytechnische Schule zu Carlsruhe*, Leipzig, 1862.
- [10] E. COSSERAT et F. COSSERAT – *Théorie des corps déformables*, Hermann, Paris, 1909.
- [11] R. COURANT et D. HILBERT – *Methoden der mathematischen Physik*, 3d éd., vol. 1, Springer, Berlin, 1968.

- [12] J. COURBON – *Résistance des matériaux*, 3e éd., vol. 1, Dunod, Paris, 1971.
- [13] J. F. DEBONGNIE – « A new look at Hermann's formulation of incompressibility », *Proc. Symp. Computer Meth. in Engng, University of Southern California* (Los Angeles), 1977.
- [14] — , « Modélisation de problèmes hydroélastiques par éléments finis. Application aux lanceurs aérospatiaux », thèse de doctorat, Université de Liège, Liège, 1978.
- [15] — , « Sur la formulation de Herrmann pour l'étude des solides incompressibles », *Journal de Mécanique* **17** (1978), no. 4, p. 531–558.
- [16] — , « On the approximation of incompressible materials in the displacement method », *Int. Jl. Num. Meth. Engng.* **14** (1979), p. 1095–1099.
- [17] — , « A general theory of dual error bounds by finite elements », Rapprt LMF 5, Université de Liège, Liège, 1983.
- [18] — , *Fundamentals of finite elements*, Éditions de l'Université de Liège, Liège, 2003.
- [19] — , *Conception mécanique*, vol. 2, Debongnie (Jean-François), Liège, 2007.
- [20] J. F. DEBONGNIE et P. BECKERS – « Recent advances in the dual analysis theory », *IV Congreso Métodos Numericos in Ingenieria*.
- [21] J. F. DEBONGNIE, H. G. ZHONG et P. BECKERS – « Dual analysis with general boundary conditions », *Computer methods in applied mechanics and engineering* **22**, no. 1–2, p. 183–192.
- [22] D. S. DUGDALE et C. RUIZ – *Élasticité à l'usage des ingénieurs et des physiciens*, Ediscience, Paris, 1972.
- [23] F. ENGESSER – « Die Knickfestigkeit gerader Stäbe », *Zentr. Bauverwaltung* **11** (1891), p. 483–486.
- [24] — , « Zum einsturzder Brücke über den St. Lorenzstrom bie Quebec », *Zentr. Bauverwaltung* **27** (1907), p. 609.
- [25] — , *Z.V.D.I* (1908), p. 309.
- [26] V. FEODOSSIEV – *Résistance des matériaux*, 3e éd., Mir, Moscou, 1976.
- [27] B. M. FRAEIJIS DE VEUBEKE – « Diffusion des inconnues hyperstatiques dans les voilures à longerons couplés », *Bulletin du Service Technique de l'Aéronautique* (1951), no. 24.
- [28] — , « Aspects cinématiques et énergétiques de la flexion sans torsion », *Académie des Sciences de Belgique, classe des sciences, collection in-8* **29** (1955).

- [29] — , « Flexion et extension des plaques d'épaisseur modérée », *Académie des Sciences de Belgique, classe des sciences, mémoires* **31** (1959).
- [30] — , « Sur certaines inégalités fondamentales et leur généralisation dans la théorie des bornes supérieures et inférieures en élasticité », *Revue universelle des mines* **17** (1961), no. 5.
- [31] — , « Théorie des coques prismatiques minces renforcées par lisses et diaphragmes », *Académie Royale de Belgique Mémoire* **8** (1961), no. 1729.
- [32] — , « Upper and lower bounds in matrix structural analysis », *AGARDograph* **72** (1964), p. 65.
- [33] — , « Displacement and equilibrium models in the finite element method », ch. 9, Wiley, 1965.
- [34] — , « A new variational principle for finite elastic displacements », *Intl. Jl. Eng. Sci.* **10** (1972), p. 745–763.
- [35] — , « Duality in structural analysis by finite elements », *NATO advanced studies institute. Lecture series on finite element methods in continuum mechanics, Lisbon, 1971* (Oden et Oliveira, éd.), U.A.H. Press, 1973.
- [36] — , *A course in elasticity*, Applied Mechanical Sciences, no. 29, Springer Verlag, New York, 1979.
- [37] I. FRIED – « Finite element analysis of incompressible materials by residual energy balancing », *Int. Jl. Solids Struct.* **10** (1974), p. 993–1002.
- [38] K. O. FRIEDRICHS – « Ein Verfahren der Variationsrechnung », *Nachrichten der Ges. d. Wiss. zu Göttingen*, 1929, p. 13–20.
- [39] H. G. GARNIR – *Fonctions de variables réelles*, vol. 1, Librairie universitaire, Louvain, 1963.
- [40] H. GOLOVIN – « Un problème statique du corps élastique », *Bulletin de l'Institut Technologique de Saint Petersburg* (1881).
- [41] E. GOURSAT – *Cours d'analyse mathématique*, 5e éd., vol. 3, Gauthier-Villars, Paris, 1942.
- [42] A. G. GREENHILL – « Determination of the greatest height consistent with stability that a vertical pole or mast can be made and of the greatest height to which a tree of given proportion can grow », *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **4** (1881), p. 65–73.
- [43] H. HENCKY – « Ueber die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten », *Ing. Archiv* **16** (1947).
- [44] H. HERTZ – *Gesammelte Werke*, vol. 1., Berlin, 1895.

- [45] R. KAPPUS – « Drillknicken zentisch gedrückter Stäbe mit offener Profil in elastische Bereich », *Luftfahrtforschung* **14** (1937), no. 9, p. 444–457.
- [46] LORD KELVIN – « On the thermo-elastic, thermo-magnetic and pyroelectric properties of matter », *Quarterly Journal of Mathematics* **1** (1857), p. 57–77.
- [47] — , « Elasticity », p. 796–825, *Encyclopedia Britannica*, London and Edinburgh, 1878.
- [48] G. R. KIRCHHOFF – « Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines elastischen Scheibe », *Crelles Journal* **40** (1850), p. 51–58.
- [49] — , « Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünner Stabes », *Crelles Journal* **56** (1858), p. 285–313.
- [50] — , « Ueber das Verhältniss der Quercontraction sur Längendilatation bei Stäben von federhärten Stahl », *Poggendorf Annalen* **108** (1859), p. 369–392.
- [51] — , « Ueber die Gleichungen des Gleichgewichtes eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verschiebungen seiner Teile », *Sitzungsberichte der mathem.-naturwiss. Classe der k. Akademie der Wissenschaften, Wien* **9** (1872), p. 762–773.
- [52] — , *Vorlesungen über mathematische Physik von Dr. Gustav Kirchhoff (Professor der Physik an der Universität der Berlin)*, vol. 1, Mechanik, 1874.
- [53] W. T. KOITER – « A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells », Report of the lab. voor toegepaste mechanica, Technische Hogeschool, Delft, 1959.
- [54] G. KOLOSOFF – « Sur une application des formules de M. Schwarz, de M. Villat et de M. Dini au problème plan de l'élasticité », *Compte rendus* **193** (1931), p. 89.
- [55] G. LAMÉ et E. CLAPEYRON – « Mémoires sur l'équilibre intérieur des solides homogènes », *Mémoires présentés par divers savants* **4** (1833).
- [56] L. LANDAU et E. LIFSCHITZ – *Théorie de l'élasticité*, Mir, Moscou, 1967.
- [57] G. LEJEUNE-DIRICHLET – « Sur un moyen général de vérifier l'expression du potentiel relatif à une masse quelconque, homogène ou hétérogène », *Journal de Crelle* **32** (1846), p. 80–94.
- [58] C. MASSONNET – *Résistance des matériaux*, vol. 2, Dunod, Paris, 1965.
- [59] — , *Résistance des matériaux*, 2e éd., vol. 1, Sciences et Lettres, Liège, 1967.

- [60] — , *Éléments de statique des constructions*, vol. 1, Société coopérative de l'A.E.E.S, Liège, 1970.
- [61] J. H. MICHELL — « On the direct determination of stress in an elastic solid, with application to the theory of plates », *Proceedings of the London Mathematical Society* **31** (1899), p. 100–124.
- [62] N. I. MUSKELISHVILI — *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, 2e éd., Noordhof, Groningen, 1953.
- [63] J. NECAS — *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.
- [64] H. NEUBER — « Elastisch-Strenge Lösungen zur Kerbwirkung bei Scheiben und Umdrehungskörpern », *Zeitschrift für angewandete Mathematik und Mechanik* **13** (1933), p. 439–443.
- [65] — , *Kerbspannungslehre*, 2e éd., Springer, Berlin, 1958.
- [66] F. NEUMANN — *Vorlesungen über die theorie der elasticität der fester körper und lichtäthers*, 1885.
- [67] A. PIRARD — *Traité d'hyperstatique analytique et graphique*, Vaillant-Carmanne, Liège, 1960.
- [68] G. PISSARENKO, A. YAKOVLEV et V. MATVEEV — *Aide-mémoire de résistance des matériaux*, Mir, Moscou, 1979.
- [69] W. PRAGER et J. L. SYNGE — « Approximations in elasticity based on the concept of function spaces », *Quart. Appl. Math.* **5** (1947).
- [70] L. PRANDTL — « Zur Torsion von prismatische Stäben », *Physicalische Zeitschrift* **4** (1903), p. 758–770.
- [71] J. W. S. RAYLEIGH — *Theory of sound*, Macmillan, 1894.
- [72] E. REISSNER — « On the theory of bending of elastic plates », *Jl. of Math. and Physics* **23** (1944), p. 184–191.
- [73] — , « The effect of the transverse shear deformation on the bending of elastic plates », *Jl. of Applied Mechanics* (1945).
- [74] — , « On a variational theorem in elasticity », *Journal of mathematics and physics* **29** (1950).
- [75] V. REKATCH — *Théorie de l'élasticité - Manuel de résolution des problèmes*, Mir, Moscou, 1980.
- [76] F. RIESZ et B. S. NAGY — *Leçons d'analyse fonctionnelle*, 6e éd., Gauthier-Villars, Paris, 1975.

- [77] W. RITZ – « Ueber eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme des mathematische Physik », *J. Die reine und angew. Math.*
- [78] G. SANDER – « Bornes supérieures et inférieures dans l'analyse des plaques en flexion-torsion », *Bull. Soc. Royale ses Sciences* **33e année** (1964), no. 7–8, p. 465–494.
- [79] — , « Application of the dual analysis principle », *Proc. IUTAM, Liège*, 1970.
- [80] G. SANDER et B. M. FRAEIJIS DE VEUBEKE – « Upper and lower bounds to structural deformation by dual analysis in finite elements », *AFFDL-TR-66-199* (1967).
- [81] L. SEDOV – *Mécanique des milieux continus*, vol. 1, Mir, Moscou, 1975.
- [82] R. STRIBECK – « Kugellager für beliebige Belastungen », **45** (1901), p. 73–118.
- [83] W. THOMSON et P. G. TAIT – *Treatise on natural philosophy*, vol. 1, Oxford, 1867.
- [84] S. TIMOSHENKO – « Lateral buckling of beams », *Bulletin de l'Institut Polytechnique* **4** (1905), no. 5.
- [85] — , « Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie », *Z. Angew. Math. und Physik* **28** (1910), p. 357–385.
- [86] S. TIMOSHENKO et J. M. GERE – *Theory of elastic stability*, 2 éd., Mc Graw Hill, New York, 1961.
- [87] I. TODHUNTER – *A history of the theory of elasticity and of the strength of materials*, Dover, 1960.
- [88] E. TREFFTZ – « Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren », *Verhandlungen d. 2. Int. Kongr. für technische Mechanik* (Zürich), 1927, p. 191.
- [89] — , *Math. Mech.* **13** (1939), p. 160 sqq.
- [90] V. Z. VLASSOV – *Thin walled elastic beams*, Israel program for scientific translation, Jerusalem, 1961.
- [91] V. VOLTERRA – « Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes », *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure (Paris)* **24** (1907), no. 3, p. 401–517.
- [92] H. WAGNER – « Verdrehung und Knickung von offenen Profilen », (1929).
- [93] K. WASHIZU – *Variational methods in elasticity and plasticity*, Pergamon, 1968.

- [94] C. WEBER – « Uebertragung des Drehmomentes in Balken mit doppelflanshigem Querschnitt », *Zeitschrift für angewandete Mathematik und Mechanik* **6** (1926), p. 85–97.
- [95] — , « Eingrenzung von Verschiebungen und Zerrungen mit Hilfe der Minimalsatze », *Z.A.M.M.* **22** (1952), p. 130.
- [96] G. WEINTGARTEN – « Sulle superficie de discontinuà nelle teoria della elasticità dei corpi solidi », *Atti nella Reale Accademia dei Lincei (Roma)* **5** (1901), no. 10, p. 57–60.
- [97] E. WINKLER – « Formänderung und Festigkeit gekrümmter Körper, insbesondere der Ringe », *Der Civilingenieur* **4** (1858), p. 232–246.
- [98] — , *Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit*, Prague, 1867.