Décalage interdisciplinaire en physique : un modèle

Valérie Henry

Mots clés : Physique, interdisciplinarité, infiniment petit, transposition didactique, décalage.

1. Introduction

Le schéma de transmission d'un savoir est assez bien connu en didactique des mathématiques et des sciences en général.

Au départ d'un « savoir savant » découvert par les chercheurs et présenté dans des publications scientifiques ou lors de congrès, la « noosphère », c'est-à-dire l'ensemble des acteurs intervenant dans l'élaboration des programmes, effectue une première *transposition*, qualifiée d'*externe*, et livre le « savoir à enseigner », matière qui figure dans les programmes officiels d'enseignement.

Placé dans une situation d'enseignement, ce savoir à enseigner subit une deuxième transposition, qualifiée d'*interne*, qui fournit le « savoir enseigné » ; cette dernière transformation représente une mission essentielle de l'enseignant.

Dans cette note, nous nous intéressons particulièrement à l'enseignement de la physique, qui est une grande consommatrice de « savoirs à mathématiques », c'est-à-dire, selon Chevallard [9], de savoirs dont la manipulation suppose, peu ou prou, la manipulation de mathématiques vivantes. Les mathématiques peuvent être considérées, pour cette raison, comme un « savoir fondamental » ([5], Artaud) pour la physique.

Nous proposons un modèle théorique élémentaire qui met en évidence l'existence possible d'un « décalage interdisciplinaire » résultant de la transmission d'un même savoir par les deux communautés d'enseignants.

En guise d'illustration, nous envisagerons le cas d'une notion immanquablement rencontrée dans la formation des physiciens : les infiniment petits.

2. Modélisation

2.1. Notion de décalage interdisciplinaire

Lors d'études scientifiques, les savoirs à mathématiques transmis aux étudiants sont généralement issus de deux sources différentes qui sont, d'une part, la sphère savante mathématique (Artaud [4], p. 299), et, d'autre part, la sphère savante de la discipline concernée.

Il advient dès lors quelquefois qu'une même notion soit présentée différemment par deux intervenants : cela peut entraîner, chez l'étudiant concerné, ce que nous nommerons un *décalage*. Bien entendu, il s'agit là d'un cas particulier d'un phénomène qui peut se rencontrer chaque fois que les mathématiques jouent le rôle de savoir fondamental dans l'élaboration d'un savoir à mathématiques au sein d'une discipline quelconque, c'est-à-dire sont utilisées pour produire et/ou pour mettre en oeuvre le savoir disciplinaire en question (Artaud [4], p. 299) ; dans ce contexte général, nous parlerons alors de *décalage interdisciplinaire* (Henry [14]).

2.2. Un modèle élémentaire

Le cadre théorique dans lequel nous allons développer notre modèle est celui de l'apprentissage d'un savoir à mathématiques, qui sera noté S ultérieurement, spécifique pour physicien. Ce savoir est transposé d'un savoir savant qui s'est développé au cours du temps, mais dont nous supposerons qu'il a évolué uniquement dans la sphère des mathématiciens ou uniquement dans la sphère des physiciens. Il s'agit là d'une hypothèse qui n'est évidemment pas toujours vérifiée dans la pratique, notamment à cause des interactions possibles entre les recherches réalisées dans les deux sphères considérées.

Repérons par un indice 1 la discipline dans laquelle se construit le savoir savant considéré, l'autre discipline, indicée par un numéro 2, se limitant, conformément à notre hypothèse, à exploiter ce savoir savant.

Pour tenir compte de l'aspect dynamique du modèle, nous désignerons par $S(T)$ l'état du savoir savant au temps T. De plus, nous désignerons par $S^*(T)$ le savoir à enseigner et par $S^\circ(T)$ le savoir enseigné qui correspondent à $S(T)$.

Lorsque nous prenons en compte les deux disciplines, il peut s'avérer qu'un professeur de la discipline 1 se réfère à un certain état $S(T_1)$ du savoir S, alors que son collègue de la discipline 2 considère l'état $S(T_2)$ de ce même savoir. Or, ces deux états du savoir $S(T_1)$ et $S(T_2)$ ne coïncident pas toujours. En effet, les deux enseignants n'ont pas forcément la même formation, ni les mêmes objectifs pédagogiques. La discipline 1 ayant, par hypothèse, été celle dans laquelle s'est développée la matière considérée, ses enseignants ont vraisemblablement une formation plus poussée que leurs collègues sur le sujet, et ont aussi souvent le souci de présenter à leurs étudiants des développements parmi les plus récents de leur branche. Par contre, les professeurs de la discipline 2 ont fréquemment des ambitions moins didactiques, mais plus praxéologiques (Artaud [5]) puisqu'ils se contentent d'utiliser une théorie, construite dans une autre sphère que la leur, généralement pour résoudre un problème concret qu'ils rencontrent dans leur propre sphère. Il en résulte que T_1 ne coïncide d'habitude pas avec T_2, et donc que $S(T_1)$ peut différer de $S(T_2)$. Il peut bien sûr en aller de même avec les savoirs à enseigner $S^*(T_1)$ et $S^*(T_2)$, ainsi qu'avec les savoirs enseignés $S^\circ(T_1)$ et $S^\circ(T_2)$.

Au total, le savoir appris (Antibi - Brousseau [2]), noté dans la suite SA, par un même apprenant au sujet du savoir S peut provenir de deux enseignements distincts, à savoir $S^\circ(T_1)$ et $S^\circ(T_2)$, ce qui provoque alors un décalage interdisciplinaire.

La figure ci-dessous représente schématiquement ce modèle, avec, en ligne préliminaire, les différents types et états des savoirs relatifs au thème S, ainsi que, près des flèches et dans un encadré, les différents acteurs qui seront notés respectivement S_i pour les membres de la sphère savante, N_i pour la noosphère, P_i pour les enseignants de la discipline i (pour $i = 1, 2$), et ET pour les étudiants.

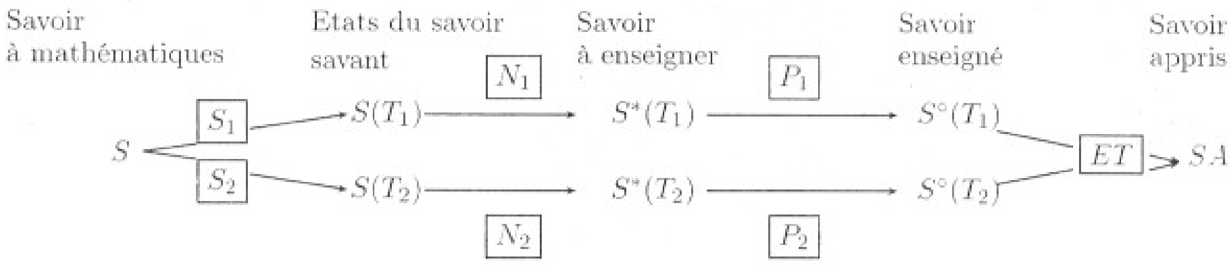

Figure 1. Schéma relatif au modèle

3. Un exemple : la notion d'infiniment petit

3.1. Evolution historique du savoir savant

L'existence des infiniment petits, latente depuis l'Antiquité et pressentie notamment par Fermat, Pascal et Barrow, fut admise par Newton et surtout Leibniz. Ce dernier concevait un infiniment petit, encore appelé infinitésimal, comme une entité métaphysique « évanouissante » qui est plus *petite que toute quantité donnée, puisqu'il est en notre pouvoir de diminuer l'incomparablement petit, que l'on peut toujours supposer aussi petit que l'on veut* (Leibniz 1702, cité par Mawhin ([16] 1997, p. 37)). Les infinitésimaux ont alors essentiellement une vocation heuristique : ils peuvent servir à bâtir les fondements de l'analyse classique.

Les bases de l'analyse mathématique furent effectivement développées par des successeurs de Newton et de Leibniz qui exploitèrent les infinitésimaux au sujet desquels ils adoptèrent une position « a-ontologique », c'est-à-dire dans laquelle l'existence des objets mathématiques ne se pose pas (Bouleau [8] 1999, p. 112) ; ainsi en atteste cette prise de position, caractéristique de l'époque, exprimée au début du 19$^{\text{ème}}$ siècle par Bossut dans son *Essai sur l'histoire générale des mathématiques* (Paris, t. III, 1802, pp. 141 - 142) : *Admettez les infiniment petits comme une hypothèse, étudiez la pratique du calcul, et la foi vous viendra* (cité dans Cournot [10] 1984, p. 530).

Dans la suite, au 19$^{\text{ème}}$ siècle, il y eut, surtout en France et en Allemagne, des débats passionnés sur l'usage en analyse mathématique des infinitésimaux. On vit alors naître deux sortes de critiques :

- Des critiques émanant du courant philosophique de l'empirisme et relatives à l'existence même des infiniment petits. Par exemple, D'Alembert dans son *Essai sur les éléments de la philosophie ou sur les principes des connaissances*, rejetait l'idée que des quantités peuvent « s'évanouir », car il estimait qu'*une quantité est quelque chose ou rien. Si elle est quelque chose, elle n'est pas encore évanouie ; si elle n'est rien, elle est évanouie tout à fait. C'est une chimère que la supposition d'un état moyen entre ces deux-là* (D'Alembert 1759, cité par Gaud *et al.* [12] 1998, p. 127).
- Des critiques de logique. Ainsi G. Berkeley, dans L'*Analyste*, s'opposa violemment aux théories de Leibniz ; il formula notamment cet avis : *Je ne discute en rien vos conclusions, mais seulement votre logique et votre méthode* (Berkeley 1734, cité par Gaud *et al.* [12], 1998,p. 17).

De plus, la théorie leibnizienne des infinitésimaux viole ce qui est aujourd'hui appelé le principe archimédien selon lequel, pour deux nombres positifs a et b, on peut trouver un entier n tel que $na > b$.

Petit à petit, les mathématiciens, à partir du 19$^{\text{ème}}$ siècle, s'efforcèrent d'abandonner l'idée qu'un infiniment petit est une grandeur assignable. Par exemple, Lagrange essaya d'éviter le recours aux infinitésimaux dans ses cours d'analyse, ainsi qu'en atteste le titre d'un de ses ouvrages : *Théorie analytique des fonctions - contenant les principes du calcul différentiel dégagé de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissants* (Lagrange 1797, cité par Gaud *et al.* [12] 1998, p. 77). En d'autres termes, l'idée d'un infiniment petit actuel fut progressivement abandonnée, et remplacée par celle d'un infiniment petit potentiel. A cet effet, les mathématiciens promurent l'idée qu'un infiniment petit n'est plus une « quantité assignable », mais une variable : d'après Cauchy, lorsque *les valeurs successives d'une même variable décroissent indéfiniment, de manière à s'abaisser en dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce que l'on nomme un infiniment petit ou une quantité infiniment petite. Une variable de cette espèce a zéro pour limite* (cité par Artigue *et al.* [6] 1985, p.3). Ainsi, petit à petit, la théorie des infinitésimaux se développa essentiellement dans un cadre fonctionnel, au départ du concept de limite dont une définition rigoureuse se dégagea progressivement des travaux de savants tels que Bernhard Bolzano (1781 - 1848), Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857) et Karl Theodor Wilhem Weiersrtrass (1815 - 1897).

Parallèlement, les consommateurs de mathématiques tels que les physiciens ou les économistes, plus enclins à s'intéresser aux résultats obtenus qu'aux justifications réclamées par les mathématiciens, continuèrent à utiliser ces notions d'infinitésimaux qui s'appliquaient si bien à leurs raisonnements.

Le texte suivant, tiré du site du Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue illustre ce fait historique.

C'est alors que Pierre Varignon, jeune professeur de mathématiques au collège Mazarin, à Paris, et membre de l'Académie royale des sciences depuis 1688, a une idée qui va sortir la mécanique de cette impasse : il décide de lui appliquer le calcul différentiel, ce nouveau formalisme mathématique mis au point par le mathématicien et philosophe allemand Gottfried Leibniz en 1684. Depuis quelques années déjà, Pierre Varignon, comme d'autres mathématiciens tels que les frères Jean et Jacques Bernoulli ou encore le marquis de l'Hospital, défend ardemment le calcul différentiel à l'Académie des sciences, où il se heurte à l'hostilité de la majorité des scientifiques. En effet, ce calcul est basé sur la notion des infiniment petits, infinis que n'aiment guère les mathématiciens. Néanmoins, il est particulièrement efficace pour étudier les courbes, c'est-à-dire calculer leurs minima, leurs maxima et leurs tangentes en n'importe quel point. Le principe du calcul différentiel est de couper une courbe en morceaux infi-

niment petits et de voir comment se comportent ces morceaux infimes, pour ensuite en déduire l'allure globale de la courbe.

Ce n'est que dans les années 1960 qu'Abraham Robinson, profitant des progrès récents de la logique mathématique, notamment de la théorie des modèles, reprit les théories leibniziennes dans un cadre nouveau et tout à fait indiscutable. Dans son ouvrage intitulé *Non-standard Analysis* (Robinson [18] 1961), il formalisa avec rigueur l'intuition et les techniques efficaces du calcul infinitésimal des siècles précédents. A cet effet, il convint d'étendre l'ensemble des réels et de définir de nouveaux nombres, qualifiés de non standards, qui sont infiniment petits, infiniment grands ou infiniment proches d'un réel. Une présentation succincte de la construction robinsonienne peut être trouvée, par exemple, dans Deledicq - Diener ([11] 1989, pp. 182-185). Les auteurs font d'ailleurs référence, dans la préface, aux liens entre la notion d'infiniment petit et l'utilisation qui en est faite en physique :

Espérons qu'en rendant accessible une théorie moderne des infinitésimaux, nous contribuerons à ce que soient renoués les liens avec une partie substantielle de la genèse de l'Analyse, et par là même avec ceux, physiciens ou autres qui n'avaient jamais véritablement renoncé à raisonner avec des quantités infinitésimales ou infiniment grandes.

De même, Gérard Villemin définit l'analyse non standard comme :

une technique mathématique qui permet :
- *de pratiquer le calcul infinitésimal des anciens et des physiciens*
- *où une quantité petite est une quantité fixe et non un paramètre qui tend vers zéro*
- *respectant toutes les prescriptions de la rigueur mathématique moderne.*

Il affirme également que

Cette nouvelle analyse (par opposition à l'Analyse Classique) permet de calculer rigoureusement avec des nombres infiniment grands et infiniment petits, comme l'ont toujours fait les physiciens.

L'ensemble de tous les nombres hyperréels, c'est-à-dire des réels standards et des nombres non standards, constitue un cadre numérique au sein duquel peut se développer l'analyse mathématique ; en effet, il jouit des mêmes « propriétés » que l'ensemble des réels. Par la suite, une approche axiomatique de l'analyse non standard fut proposée par Nelson ([17] 1977). Ces dernières années, ces savoirs savants ont été transposés de diverses manières pour pouvoir être enseignés à des apprenants novices en analyse (voir, notamment, Keisler [15] 1976, Artigue *et al.* [6] 1985, Bair-Henry [7] 2004, Henry [13] 2003 et [14] 2004.

3.2. Application du modèle

La théorie S des infiniment petits a été initialement développée par des mathématiciens ; de sorte que l'indice 1 de notre modèle se rapporte aux mathématiques. Les physiciens font fréquemment appel au raisonnement infinitésimal ; l'indice 2 se réfère donc à la physique.

De nombreux mathématiciens conçoivent intuitivement les infiniment petits à la manière de Cauchy dans son cours d'Analyse à l'Ecole Polytechnique ; en conséquence, T_1 vaut approximativement 1821 : pour $S(T_1)$, un infiniment petit est une variable tendant vers zéro. Toutefois, le savoir $S^\circ(T_1)$ enseigné par certains mathématiciens présente un infiniment petit comme une fonction tendant vers zéro.

Les physiciens ont une conception plus positiviste de cette théorie et se réfèrent ainsi à la présentation leibnizienne des infinitésimaux ; partant, T_2 peut être pris égal à 1675 qui est l'année de l'invention du calcul infinitésimal par Leibniz. Selon $S(T_2)$, un infiniment petit désigne une quantité assignable évanouissante. Mais, par pragmatisme, les physiciens abandonnent souvent l'idée abstraite d'évanouissance d'une quantité, de sorte qu'ils évoquent alors un savoir $S^*(T_2)$ selon lequel un infiniment petit représente une quantité très petite ou aussi petite que l'on veut ; cette dernière acception d'un infiniment petit constitue le savoir $S^\circ(T_2)$. Le raisonnement suivant, proposé par B. André, G. Eguether et J.P. Ferrier, est un exemple de l'utilisation des infiniment petits en physique.

Alors $\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N$ *pour des* Δt *assez petits. Pour écrire une formulation ne laissant plus la place à la discussion sur le fait que* Δt *est assez petit ou non, on dispose de la dérivée* $\frac{dN}{dt}$. *On écrit* $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$ *tout simplement, ce qui revient en fait à choisir un* Δt *infiniment petit.*

Ainsi un étudiant peut-il s'entendre dire qu'un infiniment petit est une fonction tendant vers zéro

($S^\circ(T_1)$) ou encore désigne une très petite quantité ($S^\circ(T_2)$). La distance épistémologique entre ces deux présentations peut donner, lorsque l'étudiant n'est pas à même de combler cette distance, naissance à un décalage interdisciplinaire.

A la polysémie du qualificatif « infinitésimal » s'ajoute un obstacle provenant de la présence concomitante de deux cadres de travail. En effet, les physiciens raisonnent volontiers en termes d'ordre de grandeur de quantités physiques, certaines grandeurs étant pour eux négligeables vis-à-vis d'autres ; ils travaillent alors essentiellement dans le cadre numérique. Or, pour traduire une telle démarche conformément au savoir savant enseigné $S^\circ(T_1)$, ils devraient passer dans le cadre fonctionnel.

4. Epilogue

En théorie, il semble aisé de combler un décalage interdisciplinaire : il « suffit » que les deux communautés d'enseignants travaillent dans la même direction et au même rythme. Pourquoi ne pas rêver d'un enseignement interdisciplinaire dans lequel un mathématicien et un physicien présenteraient, simultanément et de façon concertée, une même matière ?

Dans la pratique, les nombreuses tentatives d'enseignement interdisciplinaire ont mis en lumière les multiples difficultés techniques liées à ce type d'enseignement.

Néanmoins, en ce qui concerne de tels décalages interdisciplinaires, les didacticiens nous semblent pouvoir agir sur plusieurs fronts :

- repérer les sujets de décalage possible ;
- prévoir une séquence de dé-transposition (Antibi - Brousseau [1] 2000 et [2] 2002) quand un tel décalage a été décelé ;
- anticiper de tels décalages ;
- chercher des présentations adéquates qui pourraient d'emblée convenir aux deux communautés enseignantes et être adaptées aux étudiants.

Un tel travail demande évidemment une bonne formation de l'enseignant tant en mathématiques qu'en physique. En plus de compétences disciplinaires adéquates, le professeur devra également faire preuve de compétences transversales afin d'adapter son enseignement et de relier entre eux les différents points de vue.

Pour en savoir plus

[1] Antibi A., Brousseau G., La dé-transposition de connaissances scolaires, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 20(1), 2000, pp. 7-40.

[2] Antibi A., Brousseau G., Vers l'ingénierie de la dé-transposition, *Les Dossiers des sciences de l'éducation*, Université du Mirail (Toulouse), n° 8, 2002, pp. 45-57.

[3] Artaud M., *Les mathématiques en économie comme problème didactique. Une étude exploratoire*, Thèse pour obtenir le grade de Docteur de l'Université d'Aix-Marseille II, Marseille, 1993.

[4] Artaud M., Un nouveau terrain pour la didactique des mathématiques : les mathématiques en économie. In Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavignot P. (ed) *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*(pp. 298-304), La Pensée Sauvage, Grenoble, 1994.

[5] Artaud M., Diffuser des praxéologies mathématiques mixtes, *Actes du Colloques EMF 2003*, Tozeur, 2004.

[6] Artigue M., Gautheron V., Isambert E., *Analyse non standard et enseignement*, Cahier de didactique des mathématiques, n° 15, I.R.E.M. - Université Paris VII, 1985.

[7] Bair J., Henry V., *Analyse infinitésimale, le calculus redécouvert*, Academia Bruylant, Louvain-la-Neuve, 2008.

[8] Bouleau N., *Philosophies des mathématiques et de la modélisation, du chercheur à l'ingénieur*, L'Harmattan, Paris, 1999.

[9] Chevallard Y., *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1991.

[10] Cournot A., *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal*, Librairie J. Vrin, Paris, 1984.

[11] Deledicq A., Diener M., Leçons *de calcul infinitésimal*, Armand Colin, Paris, 1989.

[12] Gaud D., Guichard J., Sicre J.P., Chrétien C., *Des tangentes aux infiniment petits*, Irem de Poitiers, Poitiers, 1998.

[13] Henry V., Les hyperréels en analyse, *Mathématique et Pédagogie*, n° 141, 2003, pp. 47-58.

[14] Henry V., *Questions de didactique soulevées par un enseignement de l'analyse non standard*

à de futures économistes., Thèse pour obtenir le grade de Docteur en didactique des mathématiques de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, 2004.

[15] Keisler H.J., *Elementary Calculus*, Weber and Schmidt Inc, Boston, 1976.

[16] Mawhin J., *Analyse : fondements - techniques - évolution* deuxième édition, De Boeck Université, Bruxelles, 1997.

[17] Nelson E., Internal Set Theory, *Bulletin American Mathematical Society*, n° 83, 1977, pp. 1165-1198.

[18] Robinson A. (1961), Non-standard Analysis. *Koninkl. Ned. Wetensch. Proc.*, A64, 1962, pp. 432-440.

Sites internet consultés

- `http://membres.lycos.fr/villemingerard/Type/NonStand.htm`
- `http://www.cegepat.qc.ca/tphysique/sebas/page%20accueil/vitesse.html`
- `http://www.irem.uhp-nancy.fr/Semin/DesExp.pdf`

Valérie Henry travaille à l'Université de Liège et aux Facultés Universitaires Notre Dame de la Paix à Namur.

Mots masqués

Pourrez-vous retrouver au moins 43 noms de mathématiciens célèbres ? Bonne cogitation !

R	R	B	O	L	Y	A	I	P	S	A	S	Y	E	R	E	R	U	D	V
E	P	E	T	N	H	O	O	D	M	O	B	I	U	S	P	S	V	R	F
L	W	A	N	Y	A	I	J	U	G	U	N	T	C	K	V	S	T	I	T
U	K	E	S	R	N	P	L	I	K	S	V	E	H	C	T	A	B	O	L
E	L	M	Y	C	O	F	I	D	T	B	V	W	N	N	A	M	E	I	R
D	U	O	A	L	A	H	S	E	G	N	O	M	C	B	N	T	S	R	E
T	A	R	T	A	G	L	I	A	R	N	C	Z	A	S	S	D	C	E	K
I	E	N	X	S	C	N	E	W	H	P	M	F	V	E	C	V	V	N	V
I	E	A	D	J	S	U	I	C	Q	O	A	I	A	R	P	U	S	I	E
F	O	A	M	E	C	U	A	E	P	S	C	B	L	O	O	O	T	E	T
T	D	P	R	L	L	B	A	U	N	S	L	O	I	G	Y	G	E	T	O
H	B	N	I	C	R	I	I	G	A	E	A	N	E	A	H	N	V	S	S
A	E	D	O	E	H	L	N	S	T	U	U	A	R	H	C	A	I	A	N
L	E	S	U	T	H	I	K	E	R	G	R	C	I	T	U	D	N	O	I
E	C	E	T	O	A	Z	M	B	A	R	I	C	B	Y	A	R	Z	R	O
S	F	H	Y	K	Z	L	P	E	C	A	N	I	M	P	C	A	K	O	P
P	R	B	X	W	N	M	P	L	D	S	A	W	M	H	B	C	L	L	G
M	W	L	K	K	T	Q	U	E	T	E	L	E	T	E	Z	Z	E	Y	J
V	Z	H	G	A	L	I	L	E	E	D	M	Q	Y	R	V	E	I	A	F
T	Y	K	N	O	T	L	I	M	A	H	E	L	W	C	O	C	N	T	P

N'hésitez pas à nous envoyer les résultats de vos trouvailles !