Mathématique et Pédagogie n° 156, 49–61, 2006

Étude épistémologique sur la méthode de Fermat pour la recherche d'extrémums

JACQUES BAIR & VALÉRIE HENRY
Université de Liège

Introduction

De très nombreux problèmes, qu'ils soient internes aux mathématiques ou relatifs à des situations concrètes de la vie courante ou encore dans d'autres sciences, se traduisent formellement par la recherche d'extrémums d'une fonction (à une ou à plusieurs variables, soumises ou non à des contraintes). Il est dès lors naturel de retrouver la théorie des extrémums à toutes les étapes de l'histoire des mathématiques.

Ce travail sera centré sur la célèbre *Méthode du maximum et du minimum* présentée dans les *Œuvres de Fermat* publiées par les soins de Tannery et Henry [1891–1922]. Nous ne remonterons guère en amont de cette théorie, et ne nous attarderons pas non plus sur ses applications, par exemple à la recherche de la tangente à une courbe. Nous nous contenterons d'analyser les raisonnements originaux fournis par Fermat ; nous les présenterons à l'aide d'un exemple concret emprunté à Fermat lui-même, les situerons quelque peu dans leur contexte historique, puis en donnerons des interprétations plus contemporaines aussi bien en termes d'analyse classique que dans le contexte de l'analyse non standard qui se révélera assez fidèle à la démarche fermatienne.

En guise de conclusion, nous émettrons quelques réflexions relatives à l'évolution de ce chapitre important de l'analyse mathématique.

Dans cette note, nous utiliserons de préférence les notations originales des auteurs cités ; toutefois, nous adopterons généralement des notations plus modernes pour notre analyse et nos interprétations des méthodes anciennes.

Adresses des auteurs : Jacques Bair, Valérie Henry, Université de Liège, Bd du Rectorat 7, 4000 Liège ; courriel : J.Bair@ulg.ac.be, V.Henry@ulg.ac.be.

1. Du temps de Fermat

1.1. Énoncé du problème

Pour illustrer sa théorie, Fermat traite un exemple concret inspiré par l'œuvre de Pappus dans laquelle se trouve ce résultat (repris de *La Collection mathématique* traduite par P. Vereecke [18, p. 522]) :

« **Proposition 13**. - Si l'on a une droite AB, et si on la coupe en deux parties égales au point Γ, ce point Γ est celui qui, parmi tous les points qu'on prendra, découpe le plus grand rectangle compris sous les droites AΓ, ΓB. »

Fermat formula, avec d'autres notations mais en termes très clairs, la question étudiée, avant de juger lui-même sa méthode :

« Soit à partager la droite AC (fig. 91) en E, de sorte que $AE \times EC$ soit maximum. (...) Il est impossible de donner une méthode plus générale. (...) Cette méthode ne trompe jamais, et peut s'étendre à nombre de questions très belles ; grâce à elle, nous avons trouvé les centres de gravité de figures terminées par des lignes droites et courbes, aussi bien que ceux de solides et nombre d'autres choses dont nous pourrons traiter ailleurs. » [6, Tome III, pp. 121–123].

Nous allons porter notre attention sur les raisonnements fournis par Fermat lui-même pour résoudre ce problème, avant d'analyser ces arguments anciens à la lumière de connaissances actuelles en analyse mathématique.

Selon des historiens, dont Mahoney [14, pp. 144–145], Fermat a publié sa méthode en plusieurs épisodes, avec des justifications diverses, en l'illustrant par plusieurs exemples concrets et en l'appliquant notamment à la recherche des tangentes à une courbe. Nous nous bornerons ici à résoudre le problème énoncé ci-dessus à l'aide des deux méthodes différentes mises en évidence en 1929 par Wieleitner [21] et qui peuvent se révéler équivalentes d'un point de vue algorithmique [20, p. 47].

1.2. Première résolution par Fermat

L'historien Montucla [16, Tome II, p. 138] affirme que « la méthode de *maximis et minimis* de Fermat est fondée sur ce principe déjà apperçu par Kepler dans sa *Stereometria dolorium*, savoir que lorsqu'une grandeur,

par exemple l'ordonnée d'une courbe, est parvenue à son *maximum* ou son *minimum*, dans une situation infiniment voisine, son accroissement ou sa diminution est nulle ». Cette influence par Kepler est confirmée par C. Henry qui précise : « la méthode de Fermat, pour les recherches des maxima et des minima, repose sur un principe, non démontré, de Kepler : l'accroissement $F(x+e) - F(x)$ d'une fonction de la variable x est infiniment petit par rapport à e. Pour trouver les valeurs de x correspondant aux maxima et aux minima de $F(x)$, Fermat égale à zéro l'accroissement $F(x+e) - F(x)$. » [6, p. 143].

Voici la formulation de cette première méthode, qui sera notée par la suite $\mathcal{M}_1$, présentée Fermat :

« Posons $AC = b$; soit a un des segments, l'autre sera $b - a$, et le produit dont on doit trouver le maximum : $ba - a^2$. Soit maintenant $a + e$ le premier segment de b, le second sera $b - a - e$, et le produit des segments : $ba - a^2 +$ $+ be - 2ae - e^2$;

Il doit être *adégalé* au précédent :	$ba - a^2$;
Supprimant tous les termes communs :	$be \sim 2ae + e^2$;
Divisant tous les termes :	$b \sim 2a + e$;
Supprimez e :	$b = 2a$.

Pour résoudre le problème il faut donc prendre la moitié de b. » [6, Tome III, pp. 121–123].

1.3. Deuxième résolution par Fermat

Le premier exposé de $\mathcal{M}_1$, réalisé aux alentours de 1629, présentait « un algorithme, une procédure mécanique dénuée de toute justification ou fondement théorique. » [14, p. 144]. Il n'est dès lors pas étonnant de constater que cette méthode fut contestée par certains savants de l'époque comme en attestent de nombreuses lettres échangées à ce propos entre Descartes, Fermat, Mersenne et Roberval, qui se trouvent notamment rassemblées dans l'annexe 7 de la brochure intitulée *des problèmes d'extrémums chez Fermat à la notion de dérivée* et publiée par l'Irem de Toulouse [12, pp. 80–88].

Cela incita probablement Fermat à essayer de justifier sa méthode. Dans cette optique, il proposa une explication basée à la fois sur méthode de la *syncrise* de Viète ([1]) et sur le fait que « maxima et minima sont en effet uniques et singuliers, comme le dit Pappus et comme le savaient déjà les anciens » [6, Tome III, p. 131].

Voici le raisonnement de Fermat (1640-1642), auquel on se référera ultérieurement comme étant la méthode $\mathcal{M}_2$.

« Le point satisfaisant à cette question est évidemment le milieu de la droite donnée, et le produit maximum est égal à $b^2/4$; aucune autre division de cette droite ne donnera un produit égal à $b^2/4$.

Mais si l'on propose de partager la même droite b en sorte que le produit des segments soit égal à z'' (cette aire étant d'ailleurs à supposer plus petite que $b^2/4$), on aura deux points satisfaisant à la question, et ils se trouveront situés de part et d'autre du point correspondant au produit maximum.

Soit en effet a un des segments de la droite b, on aura $ba - a^2 = z''$, équation ambiguë, puisque pour la droite a on peut prendre chacune des deux racines. Soit donc l'équation corrélative $be - e^2 = z''$. Comparons ces deux équations d'après la méthode de Viète :

$$ba - be = a^2 - e^2.$$

Divisant de part et d'autre par $a - e$, il viendra

$$b = a + e\ ;$$

les longueurs a et e seront d'aillleurs inégales. Si, au lieu de l'aire z'', on en prend une autre plus grande, quoique toujours inférieure à $b^2/4$, les droites a et e différeront moins entre elles que les précédentes, les points de division se rapprochant davantage du point constitutif du produit maximum. Plus le produit des segments augmentera, plus au contraire diminuera la différence entre a et e, jusqu'à ce qu'elle s'évanouisse tout à fait pour la division correspondant au produit maximum ; dans ce cas, il n'y a qu'une solution unique et singulière, les deux quantités a et e devenant égales. » [6, Tome III, pp. 131–136].

Il est à noter que cette idée algébrique de considérer une racine double d'une équation était à la mode à l'aube du dix-septième siècle : elle fut notamment exploitée par Descartes pour déterminer une tangente à une courbe (voir, par exemple [9, Chapitre 11, pp. 171–205] ou [10]).

([1]) La *syncrise* de Viète était une méthode consistant à exprimer le coefficient B de l'équation $B^n A^p - A^{n+p} = Z''$ en fonction de racines de l'équation. Si A et E sont deux de ces racines, alors $B^n A^p - B^n E^p = A^{n+p} - E^{n+p}$, d'où l'on peut tirer l'inconnue B.

Par ailleurs, d'après certains historiens emmenés par Strømholm [20, p. 64], cette méthode $\mathcal{M}_2$ aurait pu être énoncée avant la méthode $\mathcal{M}_1$, notamment parce qu'elle se révèle moins novatrice que cette dernière et qu'elle repose sur des théories plus anciennes.

1.4. Point de vue de Huygens

Quelle que soit la chronologie des deux méthodes $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$, il semble que la théorie de Fermat sur les extrémums n'était pas encore bien comprise au milieu du dix-septième siècle. C'est ce qui poussa Huygens à présenter, à l'Académie des Sciences et près de trente ans après Fermat (soit précisément en 1667) une communication exposant sa démonstration de la règle des maxima et des minima. Il y décrivit différentes étapes à suivre pour trouver des extrémums, à savoir, d'après un résumé de Noël et Trompler [17, pp. 110–111] :

- Égaler deux expressions qui ne coïncident pas ;
- Supprimer les termes semblables figurant dans les deux membres ;
- Diviser par une quantité « infiniment petite » e ;
- Supprimer les termes qui contiennent encore e, puisqu'« ils représentent des quantités infiniment petites pas rapport à ceux qui ne renferment pas e ».

Cette présentation algorithmique de la théorie fermatienne, dans laquelle était employée pour la toute première fois les mots *infiniment petit* [17, pp. 110], ne réglait toutefois pas les deux principaux problèmes, de nature ontologique, soulevés par les deux résolutions pré-citées :

- Que représente e, qui n'est d'ailleurs pas le même dans $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$? Est-ce un nombre non nul par lequel on peut diviser les deux membres d'une équation, ou est-ce zéro comme il est admis en fin de raisonnement ?
- Que signifie précisément le signe $\sim$ d'adégalité ?

La section qui va suivre tente d'apporter des réponses, en langage moderne, à ces deux questions.

2. Analyse épistémologique

2.1. Interprétations en termes de limites

L'explication moderne généralement émise à propos de la méthode $\mathcal{M}_1$ consiste à y voir l'application du concept de dérivée que Lagrange définira comme étant « l'expression obtenue en faisant $e = 0$ dans l'expression du quotient différentiel $\frac{f(x+e)-f(x)}{e}$ » [1, p. 90]. Ainsi, cette méthode de Fermat se ramène à chercher un point qui annule la dérivée de l'objectif étudié ; ce résultat est connu de nos jours sous le nom de *Théorème de Fermat*. Dans cette optique, le symbole e utilisé dans $\mathcal{M}_1$ désigne donc une variable *tendant vers* 0, ce qui est d'ailleurs conforme à l'idée d'évanouissement exprimée dans $\mathcal{M}_2$. La transformation du dernier signe d'adégalité en une égalité se justifie alors par un passage à la limite.

Il convient toutefois d'être conscient que le raisonnement de Fermat n'est qu'un prélude à cette présentation contemporaine, puisque, notamment

- La notation fonctionnelle désormais classique $f(x)$ n'aurait été introduite qu'au dix-huitième siècle par Euler [1, p. 90] ;
- L'emploi explicite de la dérivée dans la recherche d'extrémums est dû à Leibniz en 1684 [15, p. 766] ;
- Une définition claire de la notion d'extrémant apparaît chez Cauchy en 1821 [15, p. 766].

Quant à la méthode $\mathcal{M}_2$, elle revient géométriquement à considérer l'intersection entre des droites horizontales et la parabole qui représente la fonction étudiée : une horizontale d'ordonnée inférieure à $b^2/4$ rencontre la courbe en deux points d'intersection d'abscisses notées a et e. Au fur et à mesure que l'ordonnée de la sécante horizontale grandit et s'approche de la valeur optimale $b^2/4$, la différence entre les deux nombres a et e diminue, « jusqu'à ce qu'elle s'évanouisse tout à fait » [6, Tome III, p. 149]. Ainsi, Fermat était-il déjà conscient du fait que la tangente au point donnant le maximum cherché est la limite de sécantes horizontales [2] et est dès lors aussi parallèle à l'axe des abscisses.

2.2. La notion d'infiniment petit

Comme nous l'avons déjà signalé, plusieurs interprétations des travaux de Fermat se basent sur la notion d'infiniment petit. Ces références implicites à la notion de nombre infinitésimal ([2]) montrent, une nouvelle fois, à quel point l'œuvre de Fermat était profonde et novatrice, puisque le concept d'infiniment petit ne fut véritablement introduit de façon pragmatique que dans les travaux de Leibniz et ses successeurs sur les fondements de l'analyse mathématique.

Toutefois, dès le début du dix-neuvième siècle, les mathématiciens abandonnèrent, progressivement et définitivement, l'exploitation des nombres infinitésimaux, car ceux-ci soulevaient des objections de nature ontologique et entraînaient des contradictions de type logique [3].

Récemment, le logicien A. Robinson [19] remit à l'honneur les nombres infiniment petits ; il en prouva l'existence dans le contexte des nombres hyperréels. Il est désormais acquis, de manière incontestable, que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels peut être étendu en un ensemble ${}^*\mathbb{R}$ de nombres hyperréels qui forme un corps algébrique totalement ordonné dont celui des réels est un sous-corps et au sein duquel existent des nombres hyperréels et non réels de trois ordres de grandeur :

- Des nombres infiniments petits, c'est-à-dire des nombres non nuls dont la valeur absolue est inférieure à tout nombre réel positif ;
- Des nombres infiniment grands (ou non limités), c'est-à-dire des nombres hyperréels dont la valeur absolue est supérieure à tout nombre réel positif ;
- Des nombres appréciables, c'est-à-dire des nombres hyperréels compris entre deux réels non nuls.

De plus, tout hyperréel limité x, c'est-à-dire infiniment petit ou appréciable, se voit associer un et un seul réel, appelé la partie standard de x et noté $\mathrm{st}(x)$; les règles régissant le passage à la partie standard sont classiques et naturelles. L'analyse infinitésimale peut être avantageusement et aisément développée dans ce contexte, ainsi qu'en attestent différents travaux récents [8], [9], dont l'ouvrage de Keisler [13] qui peut servir de référence.

Interprétons dès lors la méthode de Fermat dans le contexte des nombres hyperréels.

Recherchons, pour fixer les idées, le maximum d'une fonction f en la variable réelle a : pour l'exemple traité plus haut, $f(a) = ab - a^2$. Considérons

([2]) Dans la suite de cette note, les termes *infinitésimal* et *infiniment petit* sont synonymes.

un nombre hyperréel et non réel ε infiniment petit. Admettons que $f(a)$ est le maximum (supposé strict (3)) cherché. On doit dès lors avoir

$$f(a+\varepsilon) < f(a),$$

d'où l'on déduit respectivement, selon le signe de ε

$$\frac{f(a+\varepsilon)}{\varepsilon} < \frac{f(a)}{\varepsilon} \text{ si } \varepsilon > 0,$$

mais

$$\frac{f(a+\varepsilon)}{\varepsilon} > \frac{f(a)}{\varepsilon} \text{ si } \varepsilon < 0.$$

Un passage par la partie standard livre

$$\operatorname{st}\left(\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}\right) \leqslant 0 \text{ si } \varepsilon > 0,$$

$$\operatorname{st}\left(\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}\right) \geqslant 0 \text{ si } \varepsilon < 0,$$

d'où la conclusion résultant de la définition du nombre dérivé en analyse non standard [8], [13], ...

$$\operatorname{st}\left(\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}\right) = f'(a) = 0.$$

De manière certes anachronique, on peut penser que ce raisonnemment est fidèle à la pensée de Fermat. En effet, dans deux lettres adressées à Mersenne, le Toulousain signale que sa méthode « tire son principal fondement de ce que $A+E$ fait la même chose que $A-E$ » et que « si $A+E$ donne moins que A, $A-E$ doit aussi donner moins que A » [6, pp. 152 et 254] En d'autres termes et avec d'autres notations, Fermat considère deux abscisses situées l'une à gauche et l'autre à droite de la solution cherchée, ce qui correspond bien aux deux cas envisagés ci-dessus en fonction du signe de l'infiniment petit ε.

Dans une lettre datant de 1643 et adressée à Brûlart de Saint-Martin [6, pp. 120–125] (4) de ce qu'il appelle la « question » en $A+E$ et en $A-E$,

(3) Le cas des inégalités larges se traite semblablement.
(4) L'emploi systématique des séries débute avec Newton en 1669, tandis qu'une définition précise n'en est donnée qu'en 1821 par Cauchy [Mawhin 1997, p. 795]. Toutefois, cette théorie peut être appliquée ici puisque Fermat ne considérait que des fonctions de type polynomial.

et que nous pourrions écrire avec des notations modernes sous la forme

$$f(A \pm E) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\pm 1)^n \frac{f^{(n)}(A)}{n!} E^n.$$

Pour obtenir un maximum en A, il faut que $f(A \pm E)$ reste toujours inférieur à $f(A)$, ce qui impose la nullité de la dérivée première de f en A, le caractère maximal de l'objectif résultant alors de la négativité de la dérivée deuxième. Effectivement, du développement en série ci-dessus, on peut peut déduire que

$$f(A \pm E) - f(A) = (\pm 1) f'(A) + \frac{1}{2} f''(A) E^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(A)}{n!} (\pm E)^n,$$

et si E désigne un infiniment petit, les termes contenant E^2, E^3, ... sont négligeables vis-à-vis du terme en E, de même que les termes en E^3, E^4, ... sont négligeables par rapport à celui en E^2, ce qui permet de conclure.

2.3. La notion d'adégalité

La méthode de Fermat repose fondamentalement sur la notion d'*adégalité*, symbolisée par le signe $\sim$. Il s'agit, en reprenant les termes de l'auteur, de « cette sorte de comparaison *adaequalitatem* comme Diophante l'appelle, car le mot grec $\pi\alpha\rho\iota\sigma o\tau\eta\zeta$ dont il se sert, peut estre ainsy traduit *Touchant la mesme méthode* » [6, Supplément, p. 74] ou encore d'une « comparaison feinte » [6, Tome III, p. 127] dans la mesure où les deux nombres comparés sont « comme s'ils étaient égaux, quoi qu'en fait ils ne le soient point » [6, Tome III, p. 126]. La traduction anglaise de ce mot latin *adaequalitas* est souvent *approximate equality* [20, p. 51], termes auxquels certains préfèrent *pseudo-equality* (par exemple, [4, p. 156] ; [5, p. 123]).

La dernière ligne du raisonnement formulé par la méthode $\mathcal{M}_1$, à savoir

« Supprimez e : $b = 2a$ »,

s'explique très aisément en analyse non standard. En effet, les nombres hyperréels $2a+e$ et b sont infiniment proches l'un de l'autre si e désigne un infiniment petit ; leurs parties réellement observables, c'est-à-dire leurs parties standard, égales respectivement aux réels $2a$ et b, sont donc égales. La transformation du signe $\sim$ d'adégalité en celui $=$ d'égalité correspond donc à un « retour naturel » de l'ensemble ${}^*\mathbb{R}$ des hyperréels à celui $\mathbb{R}$ des réels grâce à un passage par la partie standard. Ce retour dans $\mathbb{R}$ se traduit par la disparition de l'infiniment petit e et, intuitivement, s'explique par l'évanouissement de e évoqué dans $\mathcal{M}_2$; cette idée a été souvent exploitée par les analystes des dix-septième et dix-huitième siècles.

Par contre, l'interprétation du signe $\sim$ n'est pas aussi simple qu'il n'y paraît à première vue. De fait, on pourrait a priori penser à traduire le signe $\sim$ par « est infiniment proche de ». Cela s'applique bien pour le premier usage du symbole, à savoir

$$be \sim 2ae + e^2.$$

Toutefois, cela ne permet pas de justifier la suite du raisonnement, soit

$$b \sim 2a + e\ ;$$

en effet, si deux nombres hyperréels sont infiniment proches l'un de l'autre, il n'en va pas nécessairement de même pour leur quotient par un même infiniment petit ; ainsi, si ε désigne un infiniment petit positif, ε est infiniment proche de ε^2, alors que 1 n'est évidemment pas infiniment proche de ε.

Si, dans l'exemple de la méthode $\mathcal{M}_1$, l'on regarde les deux lignes dans lesquelles intervient le signe $\sim$, on pourrait penser à traduire ce symbole « est de même ordre de grandeur que ». De fait, be et $2ae + e^2$ sont tous deux des infiniment petits, tandis que b et $2a + e$ sont tous les deux appréciables. Cette tentative ne permet toutefois guère d'expliquer l'égalité ultime $b = 2a$; effectivement, on peut exhiber des infiniment petits, tels que ε et $2\varepsilon + \varepsilon^2$ par exemple, qui ont donc même ordre de grandeur, dont les quotients par ε sont également de même ordre de grandeur, mais dont les parties standard sont deux réels distincts.

Une explication rigoureuse du raisonnement de Fermat peut être donnée en « juxtaposant » en quelque sorte les deux relations « être infiniment proche de » et « être de même ordre de grandeur que » au sein de l'ensemble des hyperréels. De façon plus précise, on peut utilement faire appel à la notion suivante : pour deux hyperréels x et y arbitraires et un hyperréel ε infiniment petit positif quelconque, on a $x \sim y$ si et seulement si la différence $x - y$ est telle que le quotient $\frac{x-y}{\varepsilon}$ est appréciable.

Avec cette définition, reprenons le raisonnement de Fermat pour résoudre l'exemple. On a bien, pour $e = \varepsilon$ infinitésimal, $be \sim 2ae + e^2$ puisque

$$\frac{be - 2ae - e^2}{e} = b - 2ae - e \text{ est appréciable.}$$

De plus, la relation $b \sim 2a + e$ signifie que

$$\frac{b - 2a - e}{e} = \frac{b - 2a}{e} - 1 \text{ est appréciable,}$$

ce qui ne peut se produire que lorsque les deux réels b et $2a$ coïncident, d'où la conclusion $b = 2a$.

Conclusion

L'analyse épistémologique qui précède montre que la théorie des extrémums de Fermat préfigure assurément les développements de l'analyse mathématique, de ses débuts au dix-septième siècle avec ses fondateurs Newton et Leibniz, jusqu'à ses développements récents avec l'avènement de l'analyse non standard.

En effet, la méthode de Fermat a été développée avant la naissance des notions fondamentales de l'analyse mathématique, c'est-à-dire avant l'apparition pragmatique des infiniment petits, et avant même l'introduction de la notion générale de fonction et, bien sûr, de celle de dérivée. Il est ainsi confirmé que les concepts mathématiques sont souvent utilisés concrètement avant d'être rigoureusement définis ; comme le signale [7, p. 195], ceci est le cas pour le concept de dérivée qui

- Est en premier lieu utilisé par exemple par Fermat ;
- Ensuite découvert essentiellement par Newton et Leibniz ;
- Puis exploré et développé en particulier par Lagrange ;
- Et enfin seulement défini grâce au concept de limite notamment par Cauchy.

Au surplus, les raisonnements récents de l'analyse non standard peuvent également se retrouver indirectement dans l'œuvre analysée.

Cet épisode de l'histoire des mathématiques montre également une certaine évolution dans la rigueur des raisonnements. La méthode $\mathcal{M}_1$ a d'abord été décrite de manière technique, avant d'être justifiée, parfois d'ailleurs de façon peu convaincante. De plus, les méthodes développées deviennent de plus en plus générales, mais aussi plus sophistiquées et abstraites. Ainsi, Fermat ne considérait que des fonctions de type polynomial, alors que sa méthode concerne aujourd'hui n'importe quelle fonction dérivable. Par ailleurs, la notion de limite développée depuis le dix-neuvième siècle s'écarte de l'intuition présente chez les savants des dix-septième et dix-huitième siècles. La naissance de l'analyse non standard a remis à l'honneur, et cette fois avec toute la rigueur souhaitée, l'importance des infiniment petits dans les problèmes locaux étudiés en analyse mathématique. Mais le prix à payer pour un retour aux idées intuitives de Fermat tout en se conformant aux exigences contemporaines de rigueur est une sophistication de l'outil mathématique : la démonstration rigoureuse de l'existence d'infinitésimaux reste assez abstraite puisqu'elle utilise des procédés techniques de logique mathématique, plus particulièrement de la théorie des modèles. Il est toutefois possible, dans une introduction à l'analyse mathématique, d'exploiter les infiniment petits sans recourir à des techniques évoluées de la logique.

Ainsi, il est désormais possible d'interpréter aisément le raisonnement de Fermat à l'aide de concepts très récents de l'analyse tout en conservant les intuitions initiales du savant français.

Bibliographie

[1] AHA, *Vers l'infini pas à pas : approche heuristique de l'analyse. Guide méthodologique*, Bruxelles : De Boeck - Wesmael, 1999.

[2] Antibi, A., Bair, J., Henry, V., Limites de courbes : théorie et applications en analyse, *Mathématique et Pédagogie*, **147**, 2004, pp. 65–87.

[3] Bair, J., Henry, V., De l'analyse classique à l'analyse non standard, *Les cahiers de la mathématique appliquée*, **1**, Bruxelles : F. Ferrer et Liège : Céfal, 2003, pp. 51–74.

[4] Boyer, C. B., *History of the Calculus*, New York, 1959.

[5] Edwards, C. H., *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag, 1979.

[6] Fermat, P. de, *Œuvres de Fermat*, publiées par les soins de P. Tannery et C. Henry, Paris : Gauthier-Villars, Tome I : 1891, Tome II : 1894, Tome III : 1896, Tome IV : 1912, Supplément : 1922.

[7] Grabiner, J., The changing concept of change : the derivation from Fermat to Weierstrass, *Mathematics Magazine*, 1983, pp. 195–206.

[8] Henry, V., Les hyperréels en analyse, *Mathématique et Pédagogie*, **141**, 2003, pp. 47-58.

[9] Henry, V., *Questions de didactique soulevées par un enseignement de l'analyse non standard à de futurs économistes*, thèse doctorale, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2004.

[10] Henry, V., Tangentes aux coniques : Méthodes passées, présentes et à venir, *Mathématique et Pédagogie*, **152**, 2005, pp. 41–75.

[11] Huygens, C., *Œuvres complètes*, La Haye : Martinus Nijhoff, Tome 20, 1940.

[12] Irem-Mafpen Toulouse, *Des problèmes d'extrema chez Fermat à la notion de dérivée*, 1989.

[13] Keisler, H.J., *Elementary Calculus*, Prindle, Weber & Schmidt, 1976.

[14] Mahoney, M. S., *The Mathematical Career of Pierre Fermat 1601–65*, Princeton University Press, 1973.

[15] Mawhin, J., *Analyse — Fondements, techniques, évolution*, Bruxelles : De Boeck Université, 1997.

[16] Montucla, J. E., *Histoire des mathématiques*, Paris : Agasse, Paris, 1799–1807. Rééd. Blanchard.

[17] Noël, G., Trompler, S., *Vers les infiniment petits*, brochure éditée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française, 2003.

[18] Pappus d'Alexandrie, *La Collection mathématique*, Traduite avec une introduction et des notes par P. Vereecke, deux tomes. Nouveau tirage. Paris : Blanchard, 1982.

[19] Robinson, A., *Non Standard Analysis*, Koninkl. Ned. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **64**, 1961, pp. 432–440.

[20] Strømholm, P., Fermat's Methods of Maxima and Minima and of Tangents. A Reconstruction, *Archive for History of Exact Sciences*, Springer-Verlag, **5-1**, 1968, pp. 47–69.

[21] Wieleitner H., Bermerkungen zu Fermats Methode der Aufsuchung von Extremwerten und der Bestimmung von Kurventangenten, *Jahresber. dtsch. Math. Vereinig*, **38**, 1929, pp. 24–35.