SUR LES POTENTIELS CONTENANT LES COMPOSANTES DES VITESSES

INTRODUCTION.

1. L'étude des potentiels Φ contenant les composantes des vitesses a retenu depuis longtemps déjà l'attention de maints mathématiciens; mais elle revêt un intérêt plus spécial depuis le grand développement des idées relativistes. Car la théorie de la relativité généralisée n'est pas seule à rendre compte de l'avance séculaire anomale au périhélie de Mercure; la considération des lois de l'électrodynamique — lois introduisant généralement un potentiel Φ — a donné lieu à des travaux intéressants sur la question, de la part de Tisserand, Lévy, ...

Tout récemment, l'un de nous (*) a montré qu'il existait une infinité de lois du genre de celles employées par Tisserand, permettant d'expliquer l'anomalie du mouvement de Mercure, et même (**) a indiqué une loi présentant une frappante analogie de résultats avec les formules tirées du ds^2 d'Einstein-Schwarzschild. En réalité (***), il est possible de faire correspondre à

(*) M. Dehalu, *Bulletins de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences), 1926, pp. 381-393.

(**) Idem, *ibid.*, pp. 639-641.

(***) P. Swings, *Bulletins de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences), 1926, pp. 742-753.

tout ds^2 d'un champ gravifique stationnaire à symétrie sphérique un potentiel Φ donnant exactement les mêmes résultats. Pratiquement, l'application au problème des deux corps (dans le cas où l'une des masses est très petite par rapport à l'autre) des équations de la relativité généralisée revient donc à considérer un potentiel Φ.

Le présent travail constitue une étude systématique des potentiels Φ et leur application à divers problèmes qui se rencontrent en astronomie mathématique.

* * *

2. La physique moderne (*) n'admet point de forces se transmettant instantanément; une vitesse infinie de propagation de l'attraction répugne à l'esprit. Cette répugnance provient de ce que tous les phénomènes physiques mettent toujours un certain temps pour se manifester. Il s'ensuit que l'astronome moderne ne peut plus croire aveuglément à la loi de Newton. D'ailleurs, il existe quelques différences entre les observations et les résultats calculés à partir de la loi de Newton; la plus importante de ces différences est l'avance séculaire anomale au périhélie de Mercure.

Newton avait pris soin de dire que « tout se passe comme si les corps s'attiraient... ». De fait, ni lui, ni ses contemporains ne jugèrent que la question était close, car une action instantanée à distance n'a jamais été acceptée que comme un moyen pratique — d'ailleurs généralement suffisant — pour les calculs.

On peut se proposer la tâche — plus modeste, mais, peut-être, aussi utile et aussi féconde que celle de certaines théories actuelles de la gravitation — d'assimiler la gravitation à des actions électrodynamiques; on admettra que la vitesse de propagation de la gravitation est de l'ordre de celle de la lumière et l'on sera amené à compléter la loi de Newton par de nouveaux termes dépendant des vitesses et des accélérations.

(*) WALTHER RITZ, *La Gravitation*. (RIVISTA DI SCIENZA « SCIENTIA », 1909, pp. 152-165 [supplément].)

On peut trouver une base physique de ce fait dans la façon dont Mossotti, puis Zöllner et enfin Lorentz essaient d'expliquer l'attraction universelle; ces physiciens supposaient que l'attraction des charges de signes contraires est un peu supérieure à la répulsion des charges de même signe. Considérons, par exemple, deux atomes d'hydrogène en présence; d'après les théories modernes, un atome d'hydrogène serait constitué par la réunion des deux charges élémentaires égales, l'une négative, l'autre positive; deux atomes d'hydrogène placés à une distance suffisamment grande par rapport à leurs dimensions n'exerceraient, d'après l'électrostatique ordinaire, aucune action l'un sur l'autre; il y aurait compensation des attractions et des répulsions; d'après les hypothèses nouvelles, cette compensation ne se produirait plus complètement. Comme on connaît la masse et la charge d'un ion d'hydrogène, on peut calculer de combien l'attraction des charges de signes contraires doit différer en module de la répulsion des charges de même signe pour que l'on puisse ainsi expliquer l'attraction newtonienne. La différence trouvée est très petite, de l'ordre de 10^{-34} pour cent. On conçoit que si les atomes sont en mouvement, on ne devra plus employer les simples formules de Coulomb, mais bien des formules d'électrodynamique. Bref, ce que cette théorie de Mossotti énonce de positif, c'est qu'il y a intérêt à envisager l'application à la gravitation des lois analogues à celles de l'électrodynamique.

Walther Ritz écrivait en 1909 : « Une explication de l'anomalie de Mercure et une détermination de la constante de gravitation par des mesures électromagnétiques pourront sans doute être déduites des lois de l'électrodynamique ».

Nous nous permettrons de citer aussi l'avis de Tisserand (*) : « Les théories les plus récentes de la Physique donnent lieu de croire que les attractions des corps célestes ne peuvent se transmettre à distance que par l'intermédiaire d'un milieu, sans doute

(*) TISSERAND, *Mécanique céleste*, t. IV, p. 541.

l'éther. Mais on ne connaît rien encore sur ce mode de transmission. Il paraît probable que le même milieu sert de véhicule à des actions électriques ou électromagnétiques. Pour les comètes, l'influence d'une action électrique du Soleil a été admise par plusieurs astronomes, notamment Olbers et Bessel. La relation entre les phénomènes magnétiques à la surface de la Terre et les taches solaires tend à nous confirmer dans cette voie. C'est ainsi qu'on se trouve amené à considérer, au lieu de la loi de Newton, des lois d'électrodynamique, telles que celle de Weber ... ». Zöllner (*), Tisserand (**), Lévy (***), ... ont déjà envisagé et effectué l'application à l'astronomie des lois anciennes de l'électrodynamique (lois de Gauss, Weber, Riemann ...).

Comme nous l'avons indiqué au n° 1, des travaux récents nous ont conduits également à envisager l'application de potentiels absolument semblables à ceux de l'ancienne électrodynamique.

Au point de vue du problème des deux corps, la méthode des géodésiques de ds^2 de l'Espace-Temps se ramène à la considération de certains potentiels Φ contenant les dérivées premières par rapport au temps des coordonnées du centre de la planète dans un système d'axes ayant leur origine au centre du Soleil et restant toujours parallèles à eux-mêmes. L'astronome moderne a donc tout intérêt à envisager ces fonctions Φ. D'ailleurs le calcul des perturbations d'après la mécanique relativiste offre des difficultés vraisemblablement insurmontables. Il n'en est pas du tout de même dans le cas des fonctions Φ; en partant de celles-ci, les calculs seront évidemment plus longs que dans la mécanique de Newton, mais ils ne présenteront probablement pas de difficulté très spéciale. Et il est logique d'admettre que

(*) ZÖLLNER, *Principien einer elektrodynamischen Theorie der Materie.* Leipzig, 1876.

(**) TISSERAND, *Comptes rendus.* Paris, 30 septembre 1872 et 1890 (t. CX).

(***) LÉVY, *Comptes rendus.* Paris, 1890 (t. CX).

les résultats obtenus par ces calculs seront identiques — ou au moins suffisamment équivalents en pratique — à ceux que l'on obtiendrait suivant les méthodes relativistes.

D'autre part, si l'on se place au même point de vue que M. E. Picard (*), on est tout naturellement amené à remplacer la relativité — au moins pour le problème des deux corps — par un potentiel Φ convenable. Ce point de vue — savoir que « ce qui constitue une théorie de la relativité, c'est le ds^2 qui lui correspond; celui-ci obtenu, on peut faire abstraction de la manière dont on y a été conduit » — est très défendable maintenant, à la suite des travaux de MM. Painlevé (**), Burali-Forti et Boggio (***).

* * *

3. Avant de passer à l'étude mathématique qui constitue le principal objet de ce travail, nous donnerons un rapide aperçu historique de cette notion de potentiel contenant les dérivées premières des coordonnées par rapport au temps. Cette notion semble s'être introduite surtout à l'occasion des recherches en électrodynamique.

En 1823, Ampère (IV) publia sa célèbre loi sur la force élémentaire exercée entre deux éléments de courants; cette loi fut le point de départ de nombreuses recherches. En 1845, F. Neumann (V), adoptant la loi de force élémentaire d'Ampère, trouva une « loi intégrale » (*ein Integralgesetz*) régissant deux courants fermés A et B de même forme. Il donna à sa loi

(*) E. PICARD, *La Théorie de la Relativité et ses applications à l'Astronomie*, p. 27.

(**) PAINLEVÉ, *Comptes rendus*, Paris, t. CLXXIII et CLXXIV.

(***) BURALI-FORTI et BOGGIO, *Espaces courbes et Critique de la Relativité.*

(IV) AMPÈRE, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, Paris, t. VI.

(V) F. NEUMANN, *Berichte der Berliner Akad. der Wiss.*, 27 octobre 1845, p. 24, et 9 août 1847, p. 6. — Voir aussi CARL NEUMANN, *Ueber das Elementargesetz...* (BERICHTE DER SÄCHSISCHEN GES. Leipzig, 1872, t. XXIV, p. 152); *Die elektrischen Kräfte*, erster Theil, § 13, pp. 78-79.

une forme intéressante par l'introduction d'une certaine fonction potentielle $\Phi(x, y, z, x', y', z')$ telle que le travail des forces pondéromotrices effectuées de B sur A en l'élément de temps dt est la différentielle partielle de Φ, en supposant B fixe.

Gauss (*) découvrit la « loi ponctuelle » qui porte son nom en juin 1835; selon lui, la force s'exerçant entre deux corpuscules électriques se produit suivant la droite joignant les deux corpuscules; ceux-ci s'attirent ou se repoussent l'un l'autre différemment, suivant qu'ils sont dans un état de repos relatif ou dans un état de mouvement relatif. Cette loi ne fut pas publiée du vivant de Gauss; de sorte que la loi de Weber, quoique postérieure à celle de Gauss, fut la première « loi ponctuelle » connue du monde savant. Mais la loi de Gauss n'a pas de potentiel; pour cette raison, on a fait quelques objections à son introduction en physique mathématique (**).

Wilhelm Weber (***), adoptant, tout comme F. Neumann, la loi élémentaire d'Ampère, arrive à une loi ponctuelle; d'après lui, la force est dirigée suivant la droite joignant les deux corpuscules électriques et vaut

$$\frac{ee_1}{r^2}\left\{1 + \frac{2}{C_W^2}\cdot r\cdot\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{1}{C_W^2}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}$$

($C_W = 439450\ {}^{Km}/_{sec.}$). Il existe d'ailleurs (IV) une fonction Φ_W semblable à celle de F. Neumann, satisfaisant au théorème des forces vives :

$$T - \Phi_W = \text{constante}$$

(*) GAUSS, *Werke*, édit. de Gött., 1867, vol. V, p. 686. — J. BERTRAND, *Leçons sur la Théorie mathématique de l'Électricité*, chap. IX, pp. 183 et suiv. — CLERK MAXWELL, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. II, 4e partie, chap. XXIII.

(**) J. BERTRAND, *ouvrage cité*, pp. 186-187.

(***) W. WEBER, *Elektrodynamische Maasbestimmungen*. (LEIPZIGER BERICHTE, 1846.)

(IV) C. NEUMANN, *Die Principien der Elektrodynamik*, Tübingen, 1868, *Gratulationsschrift* (pp. 2 et 24-28).

et dont on tire facilement la force de Weber; cette fonction est

$$\Phi_W = \frac{ee_1}{r}\left[1 - \frac{1}{C_W^2}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

Clausius (*), Helmholtz (**), Thomson et Tait (***) ... ont discuté la loi ponctuelle de Weber.

Riemann (IV) indiqua une autre fonction Φ_R qui, selon lui, régit l'électrodynamique; cette fonction est

$$\Phi_R = \frac{ee_1}{r}\left\{1 - \frac{1}{c_R^2}\left[\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right)^2\right]\right\}.$$

D'après cette loi, les actions réciproques de deux corpuscules électriques mobiles seraient égales, parallèles et de sens contraires; mais elles ne seraient pas dirigées suivant la droite qui joint les mobiles.

En 1868, Carl Neumann (V) introduisit la notion de « potentiel effectif » sur laquelle nous reviendrons plus loin. D'ailleurs Carl Neumann envisage déjà une autre signification du mot « potentiel » : le « potentiel » W de Carl Neumann donne la force sans ambiguïté et permet l'application du principe d'Hamilton sous sa forme ordinaire (ce qui n'était pas le cas, comme nous le verrons, pour la convention généralement adoptée jusqu'alors); en revanche, le potentiel de Carl Neumann ne satisfaisait pas au théorème ordinaire des forces vives; il donnait toutefois lieu à une intégrale première très ressemblante au théorème des forces vives. Carl Neumann étudia aussi

(*) CLAUSIUS, *Ann. der Physik*, 150 (1875), p. 657, et 135 (1868), p. 606.

(**) HELMHOLTZ, *Leipziger Ber.*, 1873, pp. 419 et suiv. — *Monatsberichte der Kgl. Ak., Berlin*, 6 février 1873. — *Journal de Crelle*, 72, pp. 57-129. — *Journal de Borchardt*, 78, pp. 273-324.

(***) THOMSON et TAIT, *Natural Philosophy*. — CARL NEUMANN, *Ann. der Physik*, 155 (1875), p. 211.

(IV) RIEMANN, *Ein Beitrag zur Elektrodynamik* (GES. ABH., 1867, p. 270); *Schwere, Elektricität und Magnetismus*, pp. 325 et suiv.

(V) C. NEUMANN, *Die Principien der Elektrodynamik*.

la notion intéressante de « potentiel retardé ». Il distingue le « potentiel d'émission » (*emissive Potential*) et le « potentiel de réception » (*receptive Potential*) en prenant en considération le temps employé pour la propagation et en admettant que la vitesse de cette propagation est égale à la vitesse c de la lumière. Il arrive à la conclusion qu'il faut remplacer le potentiel newtonien par

$$P = \frac{fm}{r\left(1 - \frac{1}{c}\cdot\frac{dr}{dt}\right)},$$

soit par le potentiel effectif

$$P = \frac{fm}{r}\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

Il retrouve ainsi la même forme que Weber, sauf changement de C_W en c et différence de convention.

Mayer (*) a développé la notion de potentiel effectif de Carl Neumann. E. Mathieu (**) a exposé quelques principes mathématiques relatifs à ces fonctions dépendant des composantes des vitesses. Lévy (***) a étendu les principes des aires et du mouvement du centre de gravité.

Vers 1898, Gerber (IV) fut aussi conduit à introduire une fonction $W(xyzx'y'z')$ qui expliquait l'anomalie de Mercure; il est à remarquer que Gerber obtint la formule appelée maintenant « formule d'Einstein » pour le déplacement du périhélie d'une planète.

Nous citerons, pour terminer, les magnifiques travaux de Koenigsberger (V); celui-ci discute les fonctions plus générales

$$U\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^2x}{dt^2}\ldots, \ldots \frac{d^\nu x}{dt^\nu}, \frac{d^\nu y}{dt^\nu}, \frac{d^\nu z}{dt^\nu}\right)$$

(*) Mayer, *Mathematische Annalen*, 1878, t. XIII, pp. 20-34.

(**) E. Mathieu, *Annales de l'École normale*, Paris, 1880, pp. 187 et suiv.

(***) Lévy, *Comptes rendus*, Paris, 1882, t. CXV.

(IV) Gerber, *Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit*... (Zeitschrift Math. Phys., 1898, pp. 93-104.)

(V) Koenigsberger, *Die Principien der Mechanik*. Leipzig (Teubner), 1901.

et arrive aux extensions des principaux théorèmes de la Mécanique. L'étude de Koenigsberger — basée sur des considérations mathématiques assez élevées — n'est pas du tout dirigée dans le même sens que la nôtre; elle s'occupe seulement de la convention de Carl Neumann-Mayer.

* * *

4. D'habitude (*), on considère en Mécanique comme potentiel U d'un système de points matériels, une fonction dépendant seulement des coordonnées et dont la différence des valeurs entre une position initiale A et une position finale B des points matériels donne le travail fourni dans le passage de A en B. Les forces se tirent immédiatement de l'expression de ce potentiel par les formules

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \qquad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}$$

et l'on a le théorème ordinaire des forces vives

$$T - U = \text{const.} = T_0 - U_0.$$

Dans ce qui suit, la notion de potentiel est étendue; la fonction potentielle y dépendra non seulement des coordonnées des points matériels, mais encore des dérivées premières de ces coordonnées par rapport au temps; elle ne contiendra pas explicitement le temps.

Nous verrons que les nouvelles fonctions diffèrent assez fortement des potentiels ordinaires. Ceux-ci donnent, en effet, lieu (**) à la fois au théorème ordinaire des forces vives et au principe classique d'Hamilton. Nous montrerons qu'au contraire, un potentiel étendu ne peut donner lieu qu'à l'un de ces deux principes; suivant qu'il satisfait à l'un ou à l'autre, nous aurons deux conventions à examiner.

(*) On considère parfois aussi des fonctions $U(xyzt)$ contenant t explicitement.

(**) Du moins lorsqu'ils ne contiennent pas t explicitement.

Nous sommes limités dans le choix des conventions possibles par trois conditions. Nous voulons arriver :

1° A un principe du genre de celui d'Hamilton;

2° A une équation analogue à celle des forces vives.

De plus, nous désirons qu'on puisse tirer aisément du potentiel donné les expressions des composantes X_i, Y_i, Z_i des forces.

La première de ces conditions s'explique par le désir d'arriver facilement aux équations du mouvement, quel que soit le système de coordonnées employé. La seconde est nécessitée par le fait que nous voulons obtenir aisément une intégrale première du problème.

En vertu de cette seconde condition, le travail fourni dans le passage d'une position initiale à une position finale dépendra seulement des positions et des vitesses initiales et finales et sera indépendant des chemins et des vitesses intermédiaires.

Dans cette étude, nous supposerons toujours que les points matériels sont libres (on généraliserait aisément dans le cas des systèmes holonomes à liaisons purement géométriques, en introduisant les coordonnées généralisées $q_1, q_2, \ldots$); notre supposition se comprend, puisque nous avons en vue le problème des deux corps.

PREMIÈRE PARTIE.

Convention de F. Neumann — Riemann — Tisserand (*).

§ 1. — *Potentiels ordinaires de l'Électrodynamique.*

5. Nous entendons par là les potentiels de la forme

$$\Phi = \mathrm{U}(x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots) + \mathrm{V}(xyzx_1y_1z_1\ldots x'y'z'x_1'y_1'z_1'\ldots), \quad (1)$$

V étant homogène et du second degré en les x', y', z'; U et V ne contiennent pas explicitement le temps. Nous étudierons une généralisation dans le second paragraphe.

(*) Nous l'appellerons ordinairement : « Convention de Riemann ».

F. Neumann, Riemann, Tisserand, ... supposent le théorème des forces vives applicable sous sa forme ordinaire $\left(\mathrm{T}\text{ étant } \Sigma \frac{1}{2} mv^2\right)$:

$$\mathrm{T} = \Phi + \text{const.} = \mathrm{U} + \mathrm{V} + \text{const.} \quad (2)$$

Nous commencerons par montrer que cette hypothèse est insuffisante (*) pour déterminer les composantes X, Y, Z de la force en fonction de U et V, donc pour servir de base à une convention : ceci se conçoit, puisque le théorème des forces vives n'est qu'une intégrale première du mouvement. Nous compléterons l'hypothèse (2) de façon à obtenir la même extension du principe d'Hamilton que Riemann et nous en tirerons des équations de Lagrange généralisées pour ce cas.

6. Pour que (2) ait lieu, il faut et il suffit qu'il y ait égalité entre

$$d(\mathrm{U} + \mathrm{V})$$

et (**)

$$\left.\begin{aligned} d\mathrm{T} = d\left(\sum \frac{1}{2} mv^2\right) &= \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\cdot dx + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot dy + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot dz\right) \\ &= \sum (\mathrm{X}x' + \mathrm{Y}y' + \mathrm{Z}z')\,dt. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Or, on a

$$\left.\begin{aligned} d(\mathrm{U}+\mathrm{V}) = &\sum\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}x' + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}y' + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}z'\right)dt \\ &+ \sum\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x'}x'' + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'}y'' + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z'}z''\right)dt \\ &+ \sum\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}x' + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}y' + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}z'\right)dt. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

(*) Ce fait est remarqué par Riemann, qui ne pousse pas l'étude plus loin. Il tire, par un moyen plutôt intuitif, l'extension du principe d'Hamilton; en fait, son résultat n'est valable que pour autant qu'on prenne pour X, Y, Z les expressions que nous conviendrons de prendre ici.

(**) Les sommations Σ porteront toujours, sauf spécification contraire, sur les divers points du système.

V étant homogène et du second degré en x', y', z', les termes en $x'dt$, $y'dt$ et $z'dt$ pourront être déterminés sans aucune ambiguïté dans les deux premières parenthèses; il n'en est pas de même pour la troisième parenthèse. L'identification de (3) et (4) — en égalant les coefficients de dx, dy, dz dans (3) et (4) — est donc possible de plusieurs manières.

Pour arriver aux expressions de X, Y, Z que donne Tisserand (*) nous procéderons comme suit : On a, en vertu du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes,

$$\left.\begin{aligned} d(\mathrm{U}+\mathrm{V}) &= d(\mathrm{U}-\mathrm{V}+2\mathrm{V}) = d(\mathrm{U}-\mathrm{V}) \\ &\quad + d\sum\left(x'\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x'} + y'\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'} + z'\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z'}\right). \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Donc, en égalant (3) et (5),

$$\begin{aligned} \sum(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz) &= \sum\left[\frac{\partial(\mathrm{U}-\mathrm{V})}{\partial x}dx + \frac{\partial(\mathrm{U}-\mathrm{V})}{\partial y}dy + \frac{\partial(\mathrm{U}-\mathrm{V})}{\partial z}dz\right] \\ &\quad - \sum\left[\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x'}dx' + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'}dy' + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z'}dz'\right] \\ &\quad + d\sum\left(x'\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x'} + y'\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'} + z'\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z'}\right) \\ &= \sum\left[\frac{\partial(\mathrm{U}-\mathrm{V})}{\partial x}dx + \frac{\partial(\mathrm{U}-\mathrm{V})}{\partial y}dy + \frac{\partial(\mathrm{U}-\mathrm{V})}{\partial z}dz\right] \\ &\quad + \sum\left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x'}\right)dx + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'}\right)dy + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z'}\right)dz\right]. \end{aligned}$$

Nous écrirons

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{X} &= \frac{\partial(\mathrm{U}-\mathrm{V})}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x'} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} - \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x'}\right) \\ \mathrm{Y} &= \frac{\partial(\mathrm{U}-\mathrm{V})}{\partial y} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} - \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'}\right) \\ \mathrm{Z} &= \frac{\partial(\mathrm{U}-\mathrm{V})}{\partial z} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z'} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} - \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z'}\right) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

(*) TISSERAND, *Mécanique céleste*, t. IV, p. 504. (Ce sont d'ailleurs ces valeurs de X, Y, Z qui conduisent à l'extension donnée par Riemann du principe d'Hamilton.)

Nous complétons donc l'hypothèse (2) par les formules (6) qui concordent avec (2). Ces expressions (6) indiquent qu'on applique l'opérateur de Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial q'_i}$$

à U — V (donc en changeant dans Φ le signe de V).

7. Nous allons montrer qu'en employant ces hypothèses, le principe d'Hamilton n'est plus applicable sous sa forme habituelle, savoir $\int\delta(\mathrm{T}+\Phi)\,dt = 0$ (δ étant le symbole des variations virtuelles), et qu'il doit être remplacé par

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta(\mathrm{T}+\mathrm{U}-\mathrm{V})\,dt = 0. \quad (7)$$

On a toujours

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta\mathrm{T}+\mathrm{W}')\,dt = 0, \quad (8)$$

en posant

$$\mathrm{W}' = \sum(\mathrm{X}\delta x + \mathrm{Y}\delta y + \mathrm{Z}\delta z). \quad (9)$$

Les formules (6) donnent

$$\begin{aligned} \mathrm{W}' &= \sum\left[\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\delta z - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\delta x - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\delta y - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\delta z\right) \\ &\quad + \sum\left\{\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x'}\right)\right]\delta x + \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'}\right)\right]\delta y + \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z'}\right)\right]\delta z\right\}. \end{aligned}$$

D'où

$$\left.\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1}\mathrm{W}'dt &= \int_{t_0}^{t_1}\delta\mathrm{U}\,.\,dt - \sum\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\delta z\right]dt \\ &\quad + \sum\int_{t_0}^{t_1}\left\{\begin{aligned}&\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x'}\right)\right]\delta x + \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'}\right)\right]\delta y \\ &\quad + \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z'}\right)\right]\delta z\end{aligned}\right\}dt. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Une intégration par parties nous donne

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial x'}\right)\delta x \,.\, dt = \left[\frac{\partial V}{\partial x'}\delta x\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial V}{\partial x'}\cdot d\delta x. \tag{11}$$

Les δx, δy, δz étant des déplacements virtuels, le premier terme du second membre de (11) est nul : les variations virtuelles δ sont supposées telles que les $(\delta x)_0$, $(\delta x)_1$, $(\delta y)_0$, ... soient nulles ; les positions initiales et finales des points du système sont bien déterminées.

Bref, (10) s'écrit

$$\left.\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} W' \,.\, dt = \int_{t_0}^{t_1}\delta U \,.\, dt - \sum\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right)dt \\ - \sum\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial V}{\partial z'}\delta z'\right)dt \\ = \int_{t_0}^{t_1}\delta(U - V) \,.\, dt.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Portant (12) dans (8), on tire

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta(T + U - V)\,dt = 0,$$

ce qui est bien le principe (7) annoncé.

8. Les équations de Lagrange s'étendent immédiatement au cas considéré ici.

Nous désignerons pour cela par q_1, q_2, ... q_k les coordonnées généralisées (*) ; on pourra exprimer les x, y, z en fonction des q_1, q_2, ... q_k ; $T + U - V$ deviendra ainsi une fonction des q_i et q_i'. Posons

$$T + U - V = H. \tag{13}$$

(*) D'après nos hypothèses, les points du système sont libres ; par suite, k est égal au triple du nombre de points matériels du système. Dans le cas de liaisons holonomes indépendantes du temps, des considérations identiques à celles qui vont suivre auraient lieu, mais k vaudrait :

3 fois le nombre de points matériels — le nombre d'équations de liaison indépendantes.

Moyennant cette notation, (7) s'écrit

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta H \,.\, dt = 0. \tag{14}$$

On a

$$\delta H = \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial H}{\partial q_i}\cdot\delta q_i + \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial H}{\partial q_i'}\cdot\delta q_i'$$

(14) peut donc s'écrire

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i \,.\, dt + \sum_{i=1}^{k}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H}{\partial q_i'}\cdot\delta q_i' \,.\, dt = 0.$$

Remplaçons $\delta q_i' dt$ par $\delta dq_i = d\delta q_i$; on aura

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H}{\partial q_i}\cdot\delta q_i \,.\, dt + \sum_{i=1}^{k}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H}{\partial q_i'}\cdot d\delta q_i = 0. \tag{15}$$

Le second terme du premier membre de cette équation s'intègre par parties ; on a en effet

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H}{\partial q_i'}\cdot d\delta q_i = \left[\frac{\partial H}{\partial q_i'}\cdot\delta q_i\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial q_i'}\right)\cdot\delta q_i \,.\, dt.$$

Le terme entre crochets s'annule, car les δq_i sont supposés nuls aux instants t_0 et t_1. L'équation (15) conduit donc à

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i'}\right)\right]\delta q_i \,.\, dt = 0.$$

D'ailleurs comme les δq_i sont indépendants, cette relation conduit aux k équations

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial q_i'} - \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \qquad (i = 1, ..., k)$$

c'est-à-dire par (13)

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial(T - V)}{\partial q_i'} - \frac{\partial(T + U - V)}{\partial q_i} = 0. \tag{16}$$

$$(i = 1, 2, ..., k)$$

Ce sont les équations de Lagrange étendues pour ce cas.

§ 2. — *Essai d'extension.*

9. Considérons une fonction Φ pouvant se mettre sous la forme

$$\Phi = U + V_\alpha + V_\beta + \cdots V_\rho, \tag{17}$$

V_i étant la partie de Φ, homogène et de degré i en x', y', z' ($i = \alpha, \beta, \ldots \rho$).

La convention de Riemann implique

$$T = U + V_\alpha + V_\beta + \cdots + V_\rho + \text{const.} \tag{18}$$

Nous allons montrer que l'hypothèse (18) ne permet pas de déterminer X, Y, Z par un procédé analogue à celui du § 1 (*), s'il existe dans Φ des termes du premier degré en x', y', z'; autrement dit, dans le cas où l'un des nombres $\alpha, \beta, \ldots \rho$ est égal à 1.

L'hypothèse (18) équivaut à

$$dT = d(U + V_\alpha + V_\beta + \cdots V_\rho).$$

Pour suivre la méthode du § 1, nous devons écrire

$$\left.\begin{aligned} d(U + V_\alpha + V_\beta + \cdots V_\rho) &= d\left(U - \frac{1}{\alpha - 1} V_\alpha - \frac{1}{\beta - 1} V_\beta - \cdots - \frac{1}{\rho - 1} V_\rho\right) \\ &\quad + d\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} V_\alpha + \frac{\beta}{\beta - 1} V_\beta + \cdots + \frac{\rho}{\rho - 1} V_\rho\right). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

(*) Nous avons vu que cette méthode du § 1 conduit à un principe étendu d'Hamilton. Les autres conventions théoriquement possibles et gardant le théorème des forces vives ne semblent pas conduire à un principe hamiltonien; on peut, par exemple, étudier le cas suivant :

$$\left\{\begin{aligned} X &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x'} \cdot \frac{x''}{x'} + \frac{\partial V}{\partial x} \\ Y &= \cdots \\ Z &= \cdots \end{aligned}\right.$$

On remarque aisément qu'il n'est pas possible d'en déduire un principe hamiltonien.

Ceci implique évidemment que tous les nombres $\alpha, \beta, \ldots \rho$ doivent être différents de 1. Supposons cette condition réalisée et posons

$$K = \frac{1}{\alpha - 1} \cdot V_\alpha + \frac{1}{\beta - 1} \cdot V_\beta + \cdots + \frac{1}{\rho - 1} \cdot V_\rho. \tag{20}$$

L'équation (19) devient

$$\begin{aligned} d(U + V_\alpha + V_\beta + \cdots + V_\rho) &= d(U - K) + d\sum\left(x' \cdot \frac{\partial K}{\partial x'} + y' \cdot \frac{\partial K}{\partial y'} + z' \cdot \frac{\partial K}{\partial z'}\right) \\ &= \sum \frac{\partial(U-K)}{\partial x} dx + \sum \frac{\partial(U-K)}{\partial y} dy + \sum \frac{\partial(U-K)}{\partial z} dz \\ &\quad - \sum \frac{\partial K}{\partial x'} dx' - \sum \frac{\partial K}{\partial y'} dy' - \sum \frac{\partial K}{\partial z'} dz' \\ &\quad + d\sum\left(x' \cdot \frac{\partial K}{\partial x'} + y' \cdot \frac{\partial K}{\partial y'} + z' \cdot \frac{\partial K}{\partial z'}\right) \\ &= \sum \frac{\partial(U-K)}{\partial x} dx + \sum \frac{\partial(U-K)}{\partial y} dy + \sum \frac{\partial(U-K)}{\partial z} dz \\ &\quad + \sum\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial x'}\right) dx + \sum\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial y'}\right) dy + \sum\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial z'}\right) dz. \end{aligned}$$

On convient de choisir, comme aux formules (6),

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\partial(U-K)}{\partial x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial x'} \\ Y &= \frac{\partial(U-K)}{\partial y} + \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial y'} \\ Z &= \frac{\partial(U-K)}{\partial z} + \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial z'} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

En reprenant un calcul analogue à celui du n° 7, où l'on remplace V par K, on obtient l'extension suivante du principe d'Hamilton :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta\left(T + U - \frac{1}{\alpha - 1} \cdot V_\alpha - \frac{1}{\beta - 1} \cdot V_\beta - \cdots - \frac{1}{\rho - 1} \cdot V_\rho\right) dt = 0. \tag{22}$$

Du principe (22), on tire d'ailleurs immédiatement des équations de Lagrange étendues.

10. Cas particulier. $\alpha = 2$, $\beta = \gamma = \ldots = \rho = 0$.
La formule (20) donne

$$K = V_2.$$

Les formules (21) et (22) deviennent identiques respectivement à (6) et (7).

DEUXIÈME PARTIE.

Convention de Carl Neumann — Mayer (*).

§ 1. — *Formules principales.*

11. On suppose applicable le principe d'Hamilton sous sa forme classique

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta(T + W)\,dt = 0 \qquad (23)$$

avec

$$W = U(xyzx_1y_1z_1\ldots) + V(xyzx_1y_1z_1\ldots x'y'z'x_1'y_1'z_1'\ldots), \qquad (24)$$

V étant une fonction continue quelconque. On en tirera les expressions des composantes X, Y, Z en fonction de U et V; on recherchera ensuite la proposition qui remplace l'équation classique des forces vives.

On comprend d'ailleurs immédiatement — en se reportant aux calculs du n° 8 et en posant ici $H_1 = T + U + V$ — que l'on a dans ce cas les équations de Lagrange généralisées

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T+V)}{\partial q_i'} - \frac{\partial(T+U+V)}{\partial q_i} = 0. \qquad (25)$$

Remarquons d'abord qu'il y a, si l'on se borne à l'hypothèse (23), une infinité de potentiels de Mayer donnant les

(*) Nous l'appellerons habituellement « convention de Mayer ».

mêmes résultats. Soit, en effet, $f(xyzt)$ une fonction quelconque de x, y, z, t. Posons

$$g = \frac{df}{dt}.$$

Nous allons montrer que deux potentiels de Mayer W et $W + g$ donnent les mêmes résultats. En effet,

1° On a (*)

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Donc

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial x'} = 0. \qquad (26)$$

Nous montrerons au n° 12 que, par suite de cette relation, les valeurs de X, Y, Z sont les mêmes pour W et $W + g$.

2° On a

$$\int_{t_0}^{t_1}(T + W + g)\,dt = \int_{t_0}^{t_1}(T + W)\,dt + f_1 - f_0.$$

D'où

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta(T + W + g)\,.\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\delta(T + W)\,dt. \qquad (27)$$

(*) Car

$$g = \frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z' + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Donc

$$\frac{\partial g}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

D'ailleurs

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\right)x' + \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right)y' + \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}\right)z' + \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

et

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dz}{dt} + \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

D'où

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Cette relation montre que le principe d'Hamilton appliqué à $W + g$ donne exactement les mêmes résultats qu'appliqué à W.

Nous conviendrons avec Carl Neumann d'extraire de W la partie éventuelle qui serait dérivée première par rapport à t d'une fonction (*) de x, y, z. L'expression restante est ce qu'on appelle le « potentiel effectif ».

12. Dans le principe (23), on a

$$T = \frac{1}{2} \cdot \sum m (x'^2 + y'^2 + z'^2). \tag{28}$$

Donc

$$\delta T = \sum m (x' \cdot \delta x' + y' \cdot \delta y' + z' \cdot \delta z'). \tag{29}$$

D'ailleurs

$$\left.\begin{aligned} \delta W = \sum \frac{\partial (U+V)}{\partial x} \delta x + \sum \frac{\partial (U+V)}{\partial y} \delta y + \sum \frac{\partial (U+V)}{\partial z} \delta z \\ + \sum \frac{\partial V}{\partial x'} \delta x' + \sum \frac{\partial V}{\partial y'} \delta y' + \sum \frac{\partial V}{\partial z'} \delta z'. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

On a

$$\left.\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} m x' \delta x' \cdot dt &= \int_{t_0}^{t_1} m x' \cdot \delta dx = \int_{t_0}^{t_1} m x' \cdot d\delta x \\ &= \Big[m x' \cdot \delta x \Big]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} m \frac{dx'}{dt} \cdot \delta x \cdot dt \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

et, de même,

$$\left.\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial V}{\partial x'} \delta x' \cdot dt &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial V}{\partial x'} \cdot \delta dx = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial V}{\partial x'} \cdot d\delta x \\ &= \left[\frac{\partial V}{\partial x'} \delta x \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial x'} \right) \cdot \delta x \cdot dt. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

(*) Comme nous supposons que W ne dépend pas explicitement de t, nous pouvons dire simplement : « ... d'une fonction de x, y, z ».

Dans le dernier membre de chacune des équations (31) et (32), le premier terme s'annule. L'équation (23) donne donc, moyennant (29), (30), (31) et (32),

$$\left.\begin{aligned} &- \sum \int_{t_0}^{t_1} m \left(\frac{dx'}{dt} \delta x + \frac{dy'}{dt} \delta y + \frac{dz'}{dt} \delta z \right) dt \\ &+ \sum \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial (U+V)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial (U+V)}{\partial y} \delta y + \frac{\partial (U+V)}{\partial z} \delta z \right] dt \\ &- \sum \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial x'} \right) \delta x + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial y'} \right) \delta y + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial z'} \right) \delta z \right] dt = 0. \end{aligned}\right\}$$

On satisfait à cette équation en annulant les coefficients des variations virtuelles indépendantes δx, δy, δz; donc

$$\left.\begin{aligned} m \frac{dx'}{dt} &= X = \frac{\partial (U+V)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial x'}, \\ m \frac{dy'}{dt} &= Y = \frac{\partial (U+V)}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial y'}, \\ m \frac{dz'}{dt} &= Z = \frac{\partial (U+V)}{\partial z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial z'}. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Les expressions (33) montrent qu'il faut appliquer à $W = U + V$ l'opérateur de Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial q'_i}.$$

Remarquons que dans ces calculs nous n'avons pas supposé si le potentiel était « effectif » ou non. La formule (26) montre que les expressions (33) de X, Y, Z sont les mêmes pour W et $W + g$.

13. Il est facile de déduire des équations (33) une intégrale première analogue à l'équation des forces vives. Pour cela, multiplions les termes de ces équations par $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ et sommons; il vient

$$\begin{aligned}
&\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{dz}{dt}\right)\\
&=\sum\frac{\partial(\mathrm{U}+\mathrm{V})}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\sum\frac{\partial(\mathrm{U}+\mathrm{V})}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\sum\frac{\partial(\mathrm{U}+\mathrm{V})}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}\\
&-\sum\left\{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial x'}\right)\frac{dx}{dt}+\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial y'}\right)\frac{dy}{dt}+\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial z'}\right)\frac{dz}{dt}\right\}\\
&=\sum\left\{\frac{\partial(\mathrm{U}+\mathrm{V})}{\partial x}\cdot x'+\frac{\partial(\mathrm{U}+\mathrm{V})}{\partial y}\cdot y'+\frac{\partial(\mathrm{U}+\mathrm{V})}{\partial z}\,z'\right\}\\
&+\sum\left(\frac{dx'}{dt}\cdot\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial x'}+\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial y'}+\frac{dz'}{dt}\cdot\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial z'}\right)\\
&-\frac{d}{dt}\left[\sum\left(x'\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial x'}+y'\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial y'}+z'\frac{\partial z'}{\partial\mathrm{V}}\right)\right].
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{d}{dt}\cdot\sum\frac{1}{2}mv^2=\frac{d(\mathrm{U}+\mathrm{V})}{dt}-\frac{d}{dt}\left[\sum\left(x'\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial x'}+y'\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial y'}+z'\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial z'}\right)\right].\quad(34)$$

Intégrons les deux membres de (34); il vient

$$\mathrm{T}=\mathrm{U}+\mathrm{V}-\sum\left(x'\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial x'}+y'\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial y'}+z'\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial z'}\right)+\text{const.}\quad(35)$$

ou

$$\mathrm{T}=\mathrm{W}-\sum\left(x'\frac{\partial\mathrm{W}}{\partial x'}+y'\frac{\partial\mathrm{W}}{\partial y'}+z'\frac{\partial\mathrm{W}}{\partial z'}\right)+\text{const.}\quad(35')$$

L'équation (35) est une intégrale première; nous allons la mettre sous une autre forme en posant

$$\mathrm{T}+\mathrm{W}=\mathrm{R}.\quad(36)$$

(35) peut s'écrire

$$\begin{aligned}\mathrm{T}=\mathrm{W}-\sum\left(x'\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial x'}+y'\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial y'}+z'\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial z'}\right)&\\
+\sum\left(x'\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial x'}+y'\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial y'}+z'\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial z'}\right)&+\text{const.};\end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{T}=\mathrm{W}-\sum\left(x'\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial x'}+y'\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial y'}+z'\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial z'}\right)+2\mathrm{T}+\text{const.}$$

D'où, finalement,

$$\mathrm{R}=\sum\left(x'\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial x'}+y'\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial y'}+z'\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial z'}\right)+\text{const.}\quad(37)$$

Nous donnerons maintenant deux exemples de fonctions particulières V où l'intégrale (35) conduit à une équation très ressemblante à l'équation classique des forces vives. Il est bien évident que si l'on se place au seul point de vue de la solution du problème, la fonction V quelconque donnera toujours lieu à l'intégrale première (35).

14. Cas particuliers.

I. — Soit (v. n° 9)

$$\mathrm{W}=\mathrm{U}+\mathrm{V}_\alpha+\mathrm{V}_\beta+\cdots+\mathrm{V}_\rho,$$

V_i étant la partie de W homogène et de degré i en x', y', z' ($i=\alpha,\ \beta,\ \ldots\ \rho$).

L'intégrale (35) donne, en vertu du théorème d'Euler,

$$\mathrm{T}=\mathrm{U}+\mathrm{V}_\alpha+\mathrm{V}_\beta+\cdots+\mathrm{V}_\rho-\alpha\mathrm{V}_\alpha-\beta\mathrm{V}_\beta-\cdots-\rho\mathrm{V}_\rho+\text{const.},$$

ou bien

$$\mathrm{T}=\mathrm{U}-(\alpha-1)\,\mathrm{V}_\alpha-(\beta-1)\,\mathrm{V}_\beta-\cdots-(\rho-1)\,\mathrm{V}_\rho.\quad(38)$$

On remarque que V_1 ne peut apparaître dans l'équation des forces vives.

II. — Soit (*)

$$\mathrm{W}=\mathrm{U}+\mathrm{V}_2.$$

(38) donne

$$\mathrm{T}=\mathrm{U}-\mathrm{V}_2+\text{const.}\quad(39)$$

(*) Cf. M. Dehalu, première note citée à la page 3.

15. REMARQUES.

A. — Lévy a donné (*) une extension des principes des aires et du mouvement du centre de gravité. Pour le problème des deux corps, nous verrons que le principe étendu des aires se tire immédiatement d'une des équations généralisées de Lagrange.

B. — Mayer (**) a montré l'intérêt spécial qu'offrent les potentiels

$$W\left(r_{ik}, \frac{dr_{ik}}{dt}\right), \tag{40}$$

r_{ik} étant la distance des deux points de masses m_i et m_k. Si les forces du système sont toutes intérieures et si elles dérivent d'un potentiel $W(xyzx'y'z')$, la condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait les relations

$$\Sigma X_i = 0, \qquad \Sigma Y_i = 0, \qquad \Sigma Z_i = 0$$

$$\Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i) = 0, \quad \Sigma(z_i X_i - x_i Z_i) = 0, \quad \Sigma(x_i Y_i - y_i X_i) = 0$$

est que W soit de la forme (40).

On voit par là l'intérêt spécial qu'offrent pour le problème des deux corps les potentiels $W\left(r, \frac{dr}{dt}\right)$ analogues à celui de Weber; nous ne voulons pas cependant prétendre par là que le principe de l'action égale et directement opposée à la réaction doive avoir lieu nécessairement dans les actions réciproques de la gravitation.

C. — Koenigsberger (***) a démontré la propriété suivante : Pour qu'une force $R(r, r', r'')$ dirigée suivant r admette un potentiel W, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial R}{\partial r'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial r''} = 0.$$

(*) LÉVY, *Comptes rendus*. Paris, 1882, t. XCV.

(**) MAYER, *Mémoire cité* à la page 10.

(***) KOENIGSBERGER, *ouvrage cité* à la page 10, pp. 43-44.

Le potentiel est alors une fonction W de r et r' telle que l'on ait

$$R = \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial r'}.$$

C'est le cas, par exemple, pour la loi de Weber.

§ 2. — *Comparaison avec la première convention.*

16. Remarquons d'abord que, quelle que soit la convention employée, lorsque Φ (ou W) a la forme (17)

$$\Phi = U + V_\alpha + V_\beta + \cdots + V_\rho,$$

il n'existe pas de terme en V dans l'équation des forces vives.

Nous considérons maintenant les fonctions où V est homogène du second degré en x', y', z' :

$$V = V_2,$$

ce qui est le cas le plus intéressant en électrodynamique.

On constate immédiatement dans ce cas le rôle corrélatif que jouent le théorème des forces vives (complété par les expressions de X, Y, Z) et le principe d'Hamilton. Si l'on admet l'équation des forces vives, il faut changer le signe de V_2 avant d'appliquer le principe d'Hamilton, qui ne revêt donc plus la forme classique. De même, si l'on part du principe d'Hamilton ordinaire, il faut changer le signe de V_2 avant d'écrire l'équation des forces vives.

Si l'on se donne un potentiel de Mayer

$$W = U + V_2,$$

le potentiel de Riemann correspondant est

$$\Phi = U - V_2.$$

L'établissement de ces conventions est d'une importance capitale; car à une fonction w donnée correspondent évidemment des forces différentes suivant les conventions. Les potentiels que nous avons étudiés dans des notes précédentes (*) correspondent tous à la convention de Riemann.

17. Exemple. — Les deux potentiels

$$\Phi = \frac{k^2}{r}\left\{1 + \frac{Mk^2}{c^2 r} - \frac{1}{c^2}\left[N\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + Pr^2\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\right\}$$

(convention de Riemann),

$$W = \frac{k^2}{r}\left\{1 + \frac{Mk^2}{c^2 r} + \frac{1}{c^2}\left[N\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + Pr^2\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\right\}$$

(convention de Mayer)

(r, θ désignant les coordonnées polaires du plan et M, N, P des constantes) donnent les mêmes résultats. Dans la troisième partie, nous emploierons toujours la convention de Riemann.

TROISIÈME PARTIE.

Applications.

§ 1. — *Application au problème des deux corps du potentiel riemannien*

$$\Phi = \frac{k^2}{r}\left\{1 + \frac{Mk^2}{c^2 r} - \frac{1}{c^2}\left[N\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + Pr^2\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\right\}. \tag{41}$$

18. Le mouvement est supposé plan; (r, θ) sont les coordonnées polaires dans le plan de l'orbite; on se propose d'étudier le mouvement d'un point de masse égale à l'unité soumis à l'action d'une force dérivant du potentiel Φ; k^2 est la constante de gravitation f multipliée par la masse attirante m, c la vitesse de la lumière, M, N et P des constantes [dans le cas du mouvement relatif, la signification de k^2 serait un peu modifiée : $k^2 = f(m+1)$].

Si l'on pose

$$\Phi = U + V,$$

(*) Voir page 3.

on a

$$U = \frac{k^2}{r}\left(1 + \frac{Mk^2}{c^2 r}\right) \quad \text{et} \quad V = -\frac{k^2}{c^2 r}\left[N\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + Pr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right].$$

V est une fonction homogène du second degré en x' et y', puisqu'on a

$$V = -\frac{k^2}{c^2 r}\left[Pv^2 + (N-P)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$$
$$= -\frac{k^2}{c^2 r}\left[P(x'^2 + y'^2) + (N-P)\frac{(xx'+yy')^2}{r^2}\right].$$

Posons

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta; \quad \text{d'où} \quad q_1' = \frac{dr}{dt}, \quad q_2' = \frac{d\theta}{dt}.$$

Les équations (16) de Lagrange donneront pour $i = 1, 2$

$$\left.\begin{aligned} &\left(1 + \frac{2Nk^2}{c^2 r}\right)\cdot\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{Nk^2}{c^2 r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\left(1 + \frac{Pk^2}{c^2 r}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ &\qquad\qquad + \frac{k^2}{r^2} + 2M\frac{k^4}{c^2 r^3} = 0, \\ &\frac{d}{dt}\left[r^2\frac{d\theta}{dt}\left(1 + \frac{2Pk^2}{c^2 r}\right)\right] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Le théorème des forces vives est

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\left(1 + \frac{2Nk^2}{c^2 r}\right) + r^2\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\left(1 + \frac{2Pk^2}{c^2 r}\right) \\ &\qquad = 2k^2\left(\frac{1}{r} + \frac{Mk^2}{c^2 r^2}\right) + A. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

(A = const.)

D'ailleurs, de l'équation (42) on tire

$$r^2\cdot\frac{d\theta}{dt}\left(1 + \frac{2Pk^2}{c^2 r}\right) = h; \tag{44}$$

h est une constante peu différente de celle que fournit le théorème classique des aires.

Pour obtenir la trajectoire spatiale, on élimine dt entre les équations (43) et (44); on pose alors

$$\rho r = 1; \quad \text{d'où} \quad -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta}.$$

L'équation de la trajectoire est ainsi

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\left(1+\frac{2Nk^2}{c^2}\rho\right)\left(1+\frac{2Pk^2}{c^2}\rho\right)^{-1}+\rho^2 = \frac{2k^2}{h^2}\left(1+\frac{2Pk^2}{c^2}\rho\right)\left(\rho+\frac{Mk^2}{c^2}\rho^2+A\right)$$

ou, d'une manière suffisamment approchée,

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2+\rho^2 = \frac{2k^2}{h^2}\left(1+\frac{4Pk^2}{c^2}\rho\right)\left(\rho+\frac{Mk^2}{c^2}\rho^2+A\right)-2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\cdot\frac{Nk^2}{c^2}\rho$$
$$-\frac{2Pk^2}{c^2}\rho^3 = \frac{2k^2}{h^2}\left[\rho+\frac{Mk^2}{c^2}\rho^2+A+\frac{4Pk^2}{c^2}\rho^2+\frac{4APk^2}{c^2}\rho\right]$$
$$-\frac{2Nk^2}{c^2}\cdot\rho\cdot\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2-\frac{2Nk^2}{c^2}\rho^3.$$

Par différentiation, on obtient alors

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\rho}{d\theta^2}+\rho-\frac{k^2}{h^2} &= \frac{2k^4}{c^2h^2}\cdot\rho\cdot(M+4P)-\frac{2Nk^2}{c^2}\cdot\rho\cdot\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\\ &-\frac{Nk^2}{c^2}\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2-\frac{3Pk^2}{c^2}\rho^2+\frac{2APk^4}{c^2h^2}.\end{aligned}\right\} \quad (45)$$

Le second membre de cette équation est toujours très petit (*); le premier membre égalé à zéro est l'équation différentielle de l'ellipse képlérienne

$$\rho_1 = \frac{k^2}{h^2}[1+e\cos(\theta-\omega)], \qquad (\omega = c^{te}) \qquad (46)$$

qui peut être considérée comme une première approximation de l'intégrale de l'équation (45).

(*) Pour l'intégration approchée de l'équation (45), nous avons suivi la marche indiquée par EDDINGTON (*The Mathematical Theory of Relativity*. Cambridge, 1923, p. 88).

De (46), on tire

$$\left(\frac{d\rho_1}{d\theta}\right)^2 = \frac{k^4}{h^4}e^2\cdot\sin^2(\theta-\omega), \qquad (47)$$

$$\frac{d^2\rho_1}{d\theta^2} = -\frac{k^2}{h^2}\cdot e\cdot\cos(\theta-\omega). \qquad (48)$$

On obtient une seconde approximation de ρ en portant dans le second membre de (45) les valeurs (46), (47) et (48). D'ailleurs, parmi les termes additionnels très petits ainsi obtenus, le seul qui puisse avoir un effet appréciable est le terme en $\cos(\theta-\omega)$ (effet de résonance); c'est lui qui donne lieu, comme on sait, à un mouvement du périhélie des planètes.

Nous pourrons donc nous borner à écrire l'équation suivante :

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2}+\rho-\frac{k^2}{h^2} = \frac{2k^6}{h^4c^2}\cdot e\cos(\theta-\omega)\cdot(M+4P)$$
$$+\frac{2Nk^2}{c^2}\cdot\frac{k^4}{h^4}\cdot e\cos(\theta-\omega)-\frac{6Pk^6}{c^2h^4}\cdot e\cos(\theta-\omega),$$

ou

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2}+\rho-\frac{k^2}{h^2} = \frac{2k^6}{h^4c^2}(M+N+P)\cdot\cos(\theta-\omega). \qquad (49)$$

Une intégrale particulière de

$$\frac{d^2\rho_2}{d\theta^2}+\rho_2 = H\cos\theta \qquad (H = c^{te})$$

est

$$\rho_2 = \frac{1}{2}H\cdot\theta\cdot\sin\theta.$$

Pour le cas où

$$H = \frac{2k^6e}{h^4c^2}(M+N+P),$$

on a

$$\rho_2 = \frac{k^6}{h^4 . c^2}\cdot e\cdot\theta\cdot(M+N+P)\sin(\theta-\omega). \qquad (50)$$

On devra ajouter cette valeur de ρ_2 à celle de ρ_1 donnée par (46) ; donc

$$\rho = \frac{k^2}{h^2}\left[1 + e\cos(\theta - \omega) + \frac{k^4 e}{h^2 c^2}(\mathrm{M}+\mathrm{N}+\mathrm{P})\cdot\theta\cdot\sin(\theta-\omega)\right].$$

D'une manière très approchée, cette égalité peut s'écrire

$$\rho = \frac{k^2}{h^2}[1 + e\cos(\theta - \omega - \delta\omega)]$$

avec

$$\delta\omega = \frac{k^4}{h^2 c^2}(\mathrm{M}+\mathrm{N}+\mathrm{P})\,\theta. \tag{51}$$

Mais, en vertu des lois de Képler, on a sensiblement

$$\frac{k^2}{h_0^2} = \frac{1}{a(1-e^2)},$$

où h_0 représente la constante des aires. D'ailleurs, d'après la formule (44), on a

$$h = h_0\cdot\left(1 + \frac{2\mathrm{P}k^2}{c^2 r}\right);$$

par suite, il n'y a pas d'inconvénient ici à prendre, dans (51), $h = h_0$.

Dans ces conditions, l'équation (51) devient

$$\frac{\delta\omega}{\theta} = \frac{k^2}{ac^2(1-e^2)}(\mathrm{M}+\mathrm{N}+\mathrm{P}), \tag{52}$$

formule identique à celle d'Einstein si l'on pose

$$\mathrm{M}+\mathrm{N}+\mathrm{P} = 3. \tag{53}$$

19. Cas particuliers.

A. — Si $\mathrm{N} = \mathrm{P}$, on a

$$\Phi = \frac{k^2}{r}\left\{1 + \frac{\mathrm{M}k^2}{c^2 r} - \frac{\mathrm{N}}{c^2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\right\} \tag{54}$$

et la condition (53) est

$$\mathrm{M} + 2\mathrm{N} = 3. \tag{55}$$

En particulier, on pourra envisager les couples

$$\begin{array}{ll} \mathrm{M}=1, & \mathrm{N}=1, \\ \mathrm{M}=0, & \mathrm{N}=\frac{3}{2}, \\ \mathrm{M}=3, & \mathrm{N}=0. \end{array} \tag{55$_1$}$$

Tisserand (*) a étudié le potentiel de Riemann

$$\Phi_{\mathrm{R}} = \frac{k^2}{r}\left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\right\},$$

qui correspond à $\mathrm{M} = 0$, $\mathrm{N} = 1$. Il a montré que ce potentiel conduit à une avance du périhélie de Mercure égale à 28″44 par siècle, c'est-à-dire à $\frac{2}{3}$ du nombre donné par Newcomb. Ce résultat se déduit directement de la formule (52), en posant $\mathrm{M} = 0$, $\mathrm{N} = 1$.

B. — Si $\mathrm{P} = 0$, on a

$$\Phi = \frac{k^2}{r}\left\{1 + \frac{\mathrm{M}k^2}{c^2 r} - \frac{\mathrm{N}}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\} \tag{56}$$

et la condition (53) est

$$\mathrm{M} + \mathrm{N} = 3.$$

En particulier, on pourra envisager les couples

$$\begin{array}{lll} \mathrm{M}=2, & \mathrm{N}=1, & \\ \mathrm{M}=1, & \mathrm{N}=2, & \\ \mathrm{M}=0, & \mathrm{N}=3, & \\ \mathrm{M}=3, & \mathrm{N}=0. & [\text{identique à } (55_1)] \end{array}$$

Tisserand (**) a étudié le potentiel dérivant de la loi de Weber :

$$\Phi_{\mathrm{W}} = \frac{k^2}{r}\left[1 - \frac{1}{c_{\mathrm{W}}^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right],$$

(*) Tisserand, *Mécanique céleste*, t. IV, pp. 504-508.

(**) Idem, *ibid.*, t. IV, pp. 499-503.

et a montré qu'il conduisait — en prenant c au lieu de c_W — à un déplacement du périhélie de Mercure de 14″52 par siècle, c'est-à-dire au tiers du nombre de Newcomb. Le potentiel de Weber correspond à $M=0$, $N=1$; le résultat de Tisserand se tire immédiatement de (52).

C. — Le potentiel de Lévy, savoir

$$\Phi_L = \frac{k^2}{r}\left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(1-a\right)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + av^2\right]\right\}$$
$$= \frac{k^2}{r}\left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + ar^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\right\},$$

correspond à $M=0$, $N=1$, $P=a$. Il donnera le $\delta\omega$ d'Einstein pour $a=2$. (Lévy prenait $a=\frac{5}{3}$, parce qu'il partait du nombre de Le Verrier pour l'avance séculaire anomale au périhélie de Mercure).

20. Comme exemple, nous allons rechercher la force correspondant au potentiel

$$\Phi = \frac{k^2}{r}\left\{1 + \frac{Mk^2}{c^2 r} - \frac{N}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\} = U + V$$

en posant

$$U = \frac{k^2}{r}\left(1 + \frac{Mk^2}{c^2 r}\right), \qquad V = -\frac{Nk^2}{c^2 r}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2.$$

On a

$$\left\{\begin{aligned} X &= \frac{\partial U}{\partial x} - \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial x'}\right), \\ Y &= \frac{\partial U}{\partial y} - \left(\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial y'}\right). \end{aligned}\right.$$

On en tire, tous calculs faits,

$$X = -\frac{k^2}{r^2}\left[1 + \frac{2Mk^2}{c^2 r} - \frac{N}{c^2}\left(r'^2 - 2rr''\right)\right]\cdot\frac{x}{r},$$
$$Y = -\frac{k^2}{r^2}\left[1 + \frac{2Mk^2}{c^2 r} - \frac{N}{c^2}\left(r'^2 - 2rr''\right)\right]\cdot\frac{y}{r}.$$

La force est donc centrale et a pour valeur

$$F = -\frac{k^2}{r^2}\left[1 + \frac{2Mk^2}{c^2 r} - \frac{N}{c^2}\left(r'^2 - 2rr''\right)\right].$$

En particulier, pour

$$M = 0, \qquad N = 1, \qquad c = c_W$$

on retrouve la force de Weber.

§ 2. — *Sur un problème analogue à ceux de J. Bertrand* (*).

21. *Nous nous proposons de déterminer la forme générale de potentiel*

$$\Phi = \frac{k^2}{r+a}\left\{1 + \frac{Mk^2}{c^2(r+a)} - \frac{1}{c^2}\left[N\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + Pr^2\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\right\}, \quad (57)$$

a, M, N, P étant des fonctions de r seulement, sachant que le potentiel Φ doit donner une orbite elliptique fermée, ayant un foyer à l'origine.

L'équation différentielle des orbites elliptiques dont un foyer est à l'origine est la suivante (**) :

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = c^{te}. \qquad \left(\rho = \frac{1}{r}\right). \quad (58)$$

D'ailleurs, les intégrales premières du mouvement en partant de Φ sont :

Intégrale des forces vives :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] - \frac{k^2}{r+a}\left[1 + \frac{Mk^2}{c^2(r+a)}\right] \\ &\qquad + \frac{k^2}{c^2(r+a)}\left[N\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + P.r^2.\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = A; \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

(*) Pendant que le présent mémoire était en voie d'impression, l'un de nous a publié une généralisation du problème de ce § 2, pour les orbites quasi elliptiques. Voir Swings, *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences), février 1927, pp. 88-99.

(**) Remarquons que l'équation (58) est plus générale que

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = \frac{k^2}{h^2}.$$

Dans (58), la constante du second membre est quelconque; nous désirons seulement une orbite elliptique fermée.

Intégrale des aires :

$$r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \left[1 + \frac{2k^2 P}{c^2(r+a)}\right] = h. \tag{60}$$

L'équation (59) des forces vives peut encore s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{Nk^2}{c^2(r+a)}\right] + r^2 \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{Pk^2}{c^2(r+a)}\right] \\ &= \frac{k^2}{r+a}\left[1 + \frac{Mk^2}{c^2(r+a)}\right] + A. \end{aligned}\right. \tag{61}$$

Éliminons dt entre (60) et (61) :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{r^2}\left[1 + \frac{2Pk^2}{c^2(r+a)}\right]^{-2} \cdot \left[1 + \frac{2Nk^2}{c^2(r+a)}\right]\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \\ &+ \frac{1}{r^2}\left[1 + \frac{2Pk^2}{c^2(r+a)}\right]^{-2} \cdot \left[1 + \frac{2Pk^2}{c^2(r+a)}\right] \\ &= \frac{2k^2}{h^2(r+a)}\left[1 + \frac{Mk^2}{c^2(r+a)}\right] + \frac{2A}{h^2}. \end{aligned}\right. \tag{62}$$

Posons

$$r\rho = 1;$$

d'où

$$-\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta}.$$

L'équation (62) devient

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2 \cdot \left[1 + \frac{2Pk^2\rho}{c^2(a\rho+1)}\right]\left[1 + \frac{2Nk^2\rho}{c^2(a\rho+1)}\right]^{-1} \\ &= \frac{2k^2}{h^2} \cdot \frac{\rho}{a\rho+1} \cdot \left[1 + \frac{Mk^2\rho}{c^2(a\rho+1)}\right]\left[1 + \frac{2Pk^2\rho}{c^2(a\rho+1)}\right]^2\left[1 + \frac{2Nk^2\rho}{c^2(a\rho+1)}\right]^{-1} \\ &- \frac{2A}{h^2}\left[1 + \frac{2Pk^2\rho}{c^2(a\rho+1)}\right]^2\left[1 + \frac{2Nk^2\rho}{c^2(a\rho+1)}\right]^{-1}. \end{aligned}\right. \tag{63}$$

Posons

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{a\rho+1} \cdot \left[1 + \frac{Mk^2\rho}{c^2(a\rho+1)}\right] = D, \\ &1 + \frac{2Nk^2\rho}{c^2(a\rho+1)} = B, \\ &1 + \frac{2Pk^2\rho}{c^2(a\rho+1)} = C. \end{aligned}\right. \tag{64}$$

et supposons que, pour $\rho \to 0$ (c'est-à-dire $r \to \infty$), B, C et D ne grandissent pas indéfiniment; supposons, de plus, que ces quantités ne s'annulent jamais, quel que soit $\rho \geq 0$ [cette seconde hypothèse est d'ailleurs nécessaire pour qu'on puisse passer de (60) et (61) à (62)].

L'équation (63) devient

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + B^{-1} \cdot C \cdot \rho^2 = \frac{2k^2}{h^2} \cdot DB^{-1}C^2 \cdot \rho - \frac{2A}{h^2} B^{-1}C^2. \tag{65}$$

Dérivons les deux membres de cette équation par rapport à θ :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + B^{-1} \cdot C \cdot \rho + \frac{1}{2} \cdot \frac{d(B^{-1}C)}{d\rho} \cdot \rho^2 \\ &= \frac{k^2}{h^2} \cdot DB^{-1}C^2 + \frac{k^2}{h^2}\rho \cdot \frac{d(DB^{-1}C^2)}{d\rho} - \frac{A}{h^2} \cdot \frac{d(B^{-1}C^2)}{d\rho}. \end{aligned}\right. \tag{66}$$

D'ailleurs, par hypothèse, la trajectoire spatiale doit être (58); dans cette équation, la constante est une fonction de h, A; nous écrirons

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = f(h, A). \tag{67}$$

Les deux premiers membres des équations (66) et (67) ne peuvent différer que d'une quantité égale à celle dont diffèrent les seconds membres; nous sommes donc conduits à écrire

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi(\rho) = B^{-1} \cdot C \cdot \rho + \frac{1}{2} \cdot \frac{d(B^{-1}C)}{d\rho} \cdot \rho^2 - \rho, &(68)\\ &\varphi(\rho) = \frac{k^2}{h^2} \cdot DB^{-1}C^2 + \frac{k^2}{h^2} \cdot \rho \cdot \frac{d(DB^{-1}C^2)}{d\rho} - \frac{A}{h^2} \cdot \frac{d(B^{-1}C^2)}{d\rho} - f(h, A). &(69) \end{aligned}\right.$$

L'équation (68) montre que $\varphi(\rho)$ est indépendant de h et A. On a donc par l'équation (69)

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial f(h, A)}{\partial h} = -\frac{2k^2}{h^3} \cdot DB^{-1}C^2 - \frac{2k^2}{h^3} \cdot \rho \cdot \frac{d(DB^{-1}C^2)}{d\rho} + \frac{2A}{h^3} \cdot \frac{d(B^{-1}C^2)}{d\rho}, &(70)\\ &\frac{\partial f(h, A)}{\partial A} = -\frac{1}{h^2} \cdot \frac{d(B^{-1}C^2)}{d\rho}. &(71) \end{aligned}\right.$$

Les premiers membres de (70) et (71) sont indépendants de ρ. Il faut donc écrire

$$\frac{d(B^{-1}C^2)}{d\rho} = \alpha \qquad (\alpha = c^{te}) \tag{72}$$

et

$$DB^{-1}C^2 + \rho \cdot \frac{d(DB^{-1}C^2)}{d\rho} = \beta. \qquad (\beta = c^{te}). \tag{73}$$

De (72), on tire

$$B^{-1}C^2 = \alpha\rho + \varepsilon, \tag{74}$$

ε étant une constante d'intégration.

Quant à (73), c'est une équation différentielle dont on déduit après intégration

$$DB^{-1}C^2 = \beta + \frac{\varkappa}{\rho},$$

$\varkappa$ étant une nouvelle constante d'intégration ; on a évidemment

$$\varkappa = 0,$$

car pour $\rho \to 0$, $DB^{-1}C^2$ ne grandit pas indéfiniment. Par suite, on a

$$DB^{-1}C^2 = \beta. \tag{75}$$

L'équation (74) comparée à (75) donne

$$D = \frac{\beta}{\alpha\rho + \varepsilon}. \tag{76}$$

Cela étant, (70) et (71) peuvent s'écrire

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f(h, A)}{\partial h} &= -\frac{2k^2}{h^3}\beta + \frac{2A\alpha}{h^3}, \\ \frac{\partial f(h, A)}{\partial A} &= -\frac{1}{h^2}\alpha. \end{aligned} \right.$$

D'où

$$f(h, A) = \frac{k^2}{h^2}\beta - \frac{A\alpha}{h^2} + \gamma. \qquad (\gamma = c^{te}). \tag{77}$$

D'ailleurs, si l'on compare l'équation (69) aux équations (74), (75) et (77), on a

$$\varphi(\rho) = \frac{k^2}{h^2}\beta - \frac{A\alpha}{h^2} - \left(\frac{k^2}{h^2}\beta - \frac{A\alpha}{h^2} + \gamma\right),$$

ou

$$\varphi(\rho) + \gamma = 0. \tag{78}$$

D'où, par (68),

$$B^{-1}C\rho + \frac{1}{2} \cdot \frac{d(B^{-1}C)}{d\rho}\rho^2 - \rho + \gamma = 0. \tag{79}$$

En vertu de (68), on a $\gamma = 0$. On tire aisément de l'équation différentielle (79) simplifiée

$$B^{-1}C = \frac{\eta}{\rho^2} + 1. \qquad (\eta = c^{te})$$

Comme plus haut, on a

$$\eta = 0.$$

Donc

$$B^{-1}C = 1. \tag{80}$$

En résumé, on a

$$\left\{ \begin{aligned} B^{-1}C^2 &= \alpha\rho + \varepsilon, \\ B^{-1}C &= 1, \\ D &= \frac{\beta}{\alpha\rho + \varepsilon}. \end{aligned} \right.$$

Donc

$$B = C = \alpha\rho + \varepsilon.$$

On tire de là

$$\frac{N}{c^2} = \frac{P}{c^2} = (\alpha\rho + \varepsilon - 1)\frac{\alpha\rho + 1}{2k^2\rho}$$

et

$$\frac{Mk^2}{c^2(r+a)} = \frac{\beta(r+a)}{\alpha + \varepsilon r} - 1.$$

Bref, on a

$$\Phi = \frac{k^2}{r+a}\left\{1 + \frac{\beta(r+a)}{\alpha + \varepsilon r} - 1 - \left(\frac{\alpha}{r} + \varepsilon - 1\right)\frac{\frac{a}{r}+1}{\frac{2k^2}{r}} \cdot v^2\right\},$$

avec

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

ou bien

$$\Phi = \frac{\beta k^2}{\alpha + \varepsilon r} - \frac{1}{2r}[\alpha + (\varepsilon - 1) r] v^2. \tag{81}$$

On vérifie aisément que Φ conduit à l'équation suivante d'orbite :

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = \frac{\beta k^2}{h^2} + \frac{A\alpha}{h^2}, \tag{82}$$

ce qui est bien du type (58).

Le théorème étendu des aires pour (81) est

$$r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \left(\frac{\alpha}{r} + \varepsilon\right) = h. \tag{83}$$

22. Cas particuliers.

A. — On désire que l'orbite soit

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = \frac{k^2}{h^2}.$$

Il faut prendre

$$\beta = 1 \quad \text{et} \quad \alpha = 0.$$

Le théorème des aires est

$$r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{\varepsilon}$$

et le potentiel

$$\Phi_1 = \frac{k^2}{\varepsilon r} - \frac{\varepsilon - 1}{2} v^2.$$

B. — On désire simplement avoir une équation des aires

$$r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} = c^{te}.$$

Il faut prendre $\alpha = 0$.

L'orbite est

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = \frac{\beta k^2}{h^2};$$

le théorèmes des aires est

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{\varepsilon}$$

et le potentiel

$$\Phi_2 = \frac{\beta k^2}{\varepsilon r} - \frac{\varepsilon - 1}{2} v^2.$$

C. — On désire avoir à la fois

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = \frac{k^2}{h^2} \quad \text{et} \quad r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} = h.$$

Il faut prendre

$$\beta = 1, \qquad \alpha = 0, \qquad \varepsilon = 1.$$

Donc

$$\Phi_3 = \frac{k^2}{r}.$$

D. — On veut que l'orbite soit

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = \frac{k^2}{h^2} \tag{84}$$

et que le terme principal de Φ soit $\frac{k^2}{r}$.

Il faut alors

$$\beta = 1, \qquad \alpha = 0, \qquad \varepsilon = 1,$$

et Φ est nécessairement $\frac{k^2}{r}$.

23. On peut démontrer ce dernier fait directement par une méthode analogue à celle du cas général, mais beaucoup simplifiée.

Désirer une orbite telle que (84) revient à désirer l'orbite

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2 = \frac{2k^2}{h^2}\rho + c^{te}. \tag{85}$$

Nous allons montrer qu'il est impossible d'obtenir une telle trajectoire spatiale en partant d'un potentiel tel que

$$\frac{k^2}{r}\left\{1 + \frac{Mk^2}{c^2 r} - \frac{1}{c^2}\left[N\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + Pr^2 \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\right\}, \tag{86}$$

M étant une constante ou une fonction de r tendant vers un nombre déterminé quand $r \to \infty$ alors que N et P sont des fonctions quelconques de r; il faudra donc prendre $M = N = P = 0$.

On trouve immédiatement que la trajectoire spatiale correspondant à (86) est

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + B^{-1}.C.\rho^2 = \frac{2k^2}{h^2}\cdot DB^{-1}C^2\rho - \frac{2A}{h^2}\cdot B^{-1}C^2, \tag{87}$$

avec

$$B = 1 + \frac{2Nk^2\rho}{c^2}, \qquad C = 1 + \frac{2Pk^2\rho}{c^2}, \qquad D = 1 + \frac{Mk^2\rho}{c^2}. \tag{88}$$

La comparaison de (85) et (87) conduit à poser

$$\begin{cases} \varphi(\varphi) = B^{-1}C\rho^2 - \rho^2 \\ \varphi(\rho) = \dfrac{2k^2}{h^2} DB^{-1}C^2\rho - \dfrac{2k^2}{h^2}\rho - \dfrac{2A}{h^2} B^{-1}C^2 - f(h, A), \end{cases}$$

$f(h, A)$ étant la constante de l'équation (85).

Puis on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(h, A)}{\partial h} = -\dfrac{4k^2}{h^3} DB^{-1}C^2\rho + \dfrac{4A}{h^3} B^{-1}C^2 + \dfrac{4k^2}{h^3}\rho, \\ \dfrac{\partial f(h, A)}{\partial A} = -\dfrac{2}{h^2} B^{-1}C^2. \end{cases}$$

On est forcé d'écrire, comme dans le cas général,

$$B^{-1}C^2 = \alpha \qquad \text{et} \qquad \rho\,[DB^{-1}C^2 - 1] = \beta = 0.$$

Alors on a

$$f(h, A) = -\frac{2A\alpha}{h^2} + \gamma$$

et

$$\varphi(\rho) + \gamma = 0.$$

Ensuite,

$$B^{-1}C\rho^2 - \rho^2 + \gamma = 0;$$

d'où

$$B^{-1}C = 1 - \frac{\gamma}{\rho^2} = 1.$$

Bref,

$$B = C = \alpha \qquad \text{et} \qquad D = \frac{1}{\alpha}.$$

Par la troisième équation (88), on voit que l'on a nécessairement $\alpha = 1$. Donc

$$B = C = D = 1 \qquad \text{ou} \qquad M = N = P = 0.$$

§ 3. — *Les potentiels riemanniens et la méthode des géodésiques.*

24. Dans une note récente (*), l'un de nous a montré qu'à tout ds^2 tel que

$$ds^2 = -g_1 dr^2 - g_3 r^2 d\theta^2 + g_4 c^2 dt^2,$$

on peut faire correspondre un potentiel

$$\Phi = \frac{k^2}{r}(1 + \delta) - \alpha\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \beta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

(α, β et δ étant des fonctions de r seulement) donnant exactement le même mouvement. La réciproque a aussi été démontrée.

Ces considérations s'appliquent non seulement au mouvement plan, mais encore au mouvement dans l'espace; il suffit de remplacer $d\theta^2$ par $d\varphi^2 + \sin^2\varphi\, d\theta^2$, φ étant la troisième coordonnée polaire de l'espace.

Dans ce paragraphe, nous nous occuperons seulement du mouvement plan; on généralisera aisément pour l'espace.

25. Nous nous proposons maintenant de rechercher un ds^2 de la forme

$$ds^2 = g_1 . dr^2 + g_2 . r^2 d\theta^2, \tag{89}$$

(*) P. Swings, *Les Potentiels riemanniens et les Formes quadratiques einsteiniennes.* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique [Classe des Sciences], 1926, pp. 742-753.)

g_1 et g_2 étant des fonctions de r seulement, de façon que l'équation

$$\delta \int ds = 0 \tag{90}$$

donne la même trajectoire spatiale que le potentiel riemannien

$$\Phi = \frac{k^2}{r}(1+\delta) - \alpha\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \beta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \tag{91}$$

α, β et δ étant des fonctions de r seulement (*).

L'équation (90) peut s'écrire

$$\delta \int R\, ds = 0, \tag{92}$$

en posant

$$R = \sqrt{g_1 \cdot \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + g_2 \cdot r^2 \cdot \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2} \tag{93}$$

et en considérant s comme variable indépendante.

On a d'ailleurs $R = 1$. On tire de (92) les deux équations de Lagrange

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial R}{\partial q_i'} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \qquad \left(\begin{matrix} q_1 = r, & q_2 = \theta, \\ q_1' = \dfrac{dr}{ds}, & q_2' = \dfrac{d\theta}{ds}. \end{matrix}\right)$$

et

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial R}{\partial\left(\frac{d\theta}{ds}\right)} = 0,$$

ou

$$\frac{1}{R}\cdot g_2 \cdot r^2 \cdot \frac{d\theta}{ds} = H, \qquad (H = c^{te}),$$

ou, enfin,

$$g_2 r^2 \frac{d\theta}{ds} = H, \tag{94}$$

car $R = 1$.

(*) Pour le problème analogue dans le cas d'un potentiel classique U (xy), voir : Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des Surfaces*, deuxième partie, chap. VI, p. 450.

D'ailleurs, on a

$$R^2 = g_1\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + g_2 \cdot r^2 \cdot \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 1. \tag{95}$$

Éliminons ds entre les équations (94) et (95); nous obtenons la trajectoire spatiale

$$\frac{g_1}{g_2^2}\cdot\frac{1}{r^4}\cdot\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{g_2}\cdot\frac{1}{r^2} = \frac{1}{H^2}. \tag{96}$$

Posons $r\rho = 1$. L'équation (96) devient finalement

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \frac{g_2}{g_1}\cdot\rho^2 = \frac{g_2^2}{g_1}\cdot\frac{1}{H^2}. \tag{97}$$

D'autre part, la trajectoire obtenue en partant du potentiel (91) est

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + B^{-1}\cdot C\cdot\rho^2 = \frac{2k^2}{h^2}\cdot\rho\cdot B^{-1}C^2D + \frac{2A}{h^2}\cdot B^{-1}C^2, \tag{98}$$

A et h étant respectivement la constante des forces vives et celle des aires qui correspondent à (91), et B, C, D ayant les significations suivantes :

$$B = 1 + 2\alpha, \qquad C = 1 + 2\beta\rho^2, \qquad D = 1 + \delta.$$

Le ds^2 cherché devra s'appliquer quel que soit le potentiel Φ donné (*); nous devons donc écrire

$$\frac{g_2}{g_1} = B^{-1}C \quad \text{et} \quad \frac{g_2^2}{g_1}\cdot\frac{1}{H^2} = \frac{2k^2}{h^2}\cdot\rho\cdot B^{-1}C^2\cdot D + \frac{2A}{h^2}B^{-1}C^2. \tag{99}$$

On en déduit que g_1 et g_2 sont respectivement proportionnels à

$$B\,(k^2 D\rho + A),$$
$$C\,(k^2 D\rho + A).$$

(*) Il pourrait peut-être se faire que pour un potentiel particulier Φ donné, l'identification de (97) et (98) soit possible de différentes manières.

On peut donc écrire, de manière à mettre en évidence une expression analogue à l' « action » de la Mécanique classique,

$$ds^2 = 2\left[\frac{k^2}{r}(1+\delta) + \mathrm{A}\right]\left[(1+2\alpha)\,dr^2 + \left(1+\frac{2\beta}{r^2}\right)r^2\,d\theta^2\right]. \quad (100)$$

En particulier, pour une force centrale quelconque $f(r)$, on a, en posant

$$\mathrm{U} = \int f(r)\,dr,$$

l'expression suivante du ds^2 :

$$ds^2 = (2\mathrm{U}+2\mathrm{A})(dr^2 + r^2 d\theta^2) = (2\mathrm{U}+2\mathrm{A})(dx^2+dy^2+dz^2). \quad (101)$$

On retrouve bien la formule classique.

26. En résumé, pour les forces centrales fonctions seulement de r, on a les deux propriétés suivantes :

1° Le

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - 2\mathrm{U}\cdot\frac{\mathrm{E}^2}{c^4}\right)(c^2dt^2 - dr^2 - r^2\cdot d\theta^2) \\ &= \left(1 - 2\mathrm{U}\cdot\frac{\mathrm{E}^2}{c^4}\right)\left(c^2dt^2 - \sum dx^2\right) \end{aligned}\right\}$$

donne le même mouvement que la force centrale de potentiel $\mathrm{U}(r)$ (*).

2° Le

$$ds_1^2 = 2(\mathrm{U}+\mathrm{A})\cdot\sum dx^2$$

donne la même orbite.

Ces formules ont été obtenues par des procédés élémentaires; la deuxième est un cas particulier du principe de la moindre action.

(*) Pour la démonstration de cette formule et la signification de la lettre E, voir la note au bas de la page 43.

§ 4. — *Extension de l'équation de Laplace pour certains potentiels riemanniens* (*).

27. Il s'agira des potentiels

$$\Phi = \frac{k^2}{r}\left\{1 + \mathrm{A}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \mathrm{B}r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}, \quad (102)$$

A et B étant des constantes.

Riemann (**) a indiqué l'extension de l'équation de Laplace pour son potentiel ainsi que pour celui de Weber. On opère rapidement sur (102) en écrivant (***)

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \frac{k^2}{r}\left\{1 + \mathrm{A}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \mathrm{B}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] - \mathrm{B}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\} \\ &= \frac{k^2}{r}\left\{1 + (\mathrm{A}-\mathrm{B})\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \mathrm{B}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]\right\}. \end{aligned}\right\}$$

Désignons par Δ l'opérateur de Laplace

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

et écrivons

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

avec

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 = \frac{k^2}{r}, \qquad \Phi_2 &= (\mathrm{A}-\mathrm{B})\cdot\frac{k^2}{r}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2, \\ \Phi_3 &= \frac{\mathrm{B}k^2}{r}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]. \end{aligned}\right\}$$

On a (IV)

$$\Delta(\Phi_1 + \Phi_3) = 0.$$

(*) Pour une extension très générale, cf. KOENIGSBERGER, *Die Principien der Mechanik*, § 18, pp. 195-207.

(**) RIEMANN, *Schwere*..., pp. 330 et suiv.

(***) Nous n'envisageons qu'un mouvement relatif.

(IV) On a évidemment

$$\Delta\left\{\frac{k^2}{r}[1 + f(x'y'z')]\right\} = 0,$$

quelle que soit la fonction $f(x'y'z')$.

Nous allons montrer que

$$\Delta\Delta\left[\frac{1}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]=0.$$

On peut écrire

$$\frac{1}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\frac{1}{r^3}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right)^2$$

et poser, avec Riemann,

$$G=\frac{1}{r^3}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right),\qquad H=x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}.$$

Il vient alors

$$\left.\begin{aligned}\Delta\left[\frac{1}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]&=\Delta(GH)=G\,.\,\Delta H+H\,.\,\Delta G\\&\quad+2\left(\frac{\partial G}{\partial x}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial z}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}\right).\end{aligned}\right\}$$

On a immédiatement

$$\Delta H=0.$$

Calculons ΔG; on a

$$\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{1}{r^5}(y^2+z^2-2x^2)\frac{dx}{dt}-\frac{3x}{r^5}\left(y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right),$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}&=-\frac{4x}{r^5}\cdot\frac{dx}{dt}-\frac{5x}{r^7}\cdot(y^2+z^2-2x^2)\frac{dx}{dt}\\&\quad-\frac{3}{r^5}\left(y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right)+\frac{15x^2}{r^7}\left(y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right);\end{aligned}\right\}$$

on obtient les expressions analogues pour $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$; la sommation donne

$$\left.\begin{aligned}\Delta G&=\sum_{x,y,z}\frac{dx}{dt}\left\{-\frac{5x}{r^7}(y^2+z^2-2x^2)-\frac{4x}{r^5}-\frac{3x}{r^5}+\frac{15xy^2}{r^7}+\frac{15xz^2}{r^7}\right\}\\&=0.\end{aligned}\right\}$$

Par suite,

$$\Delta\left[\frac{1}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]=2\left(\frac{\partial G}{\partial x}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial z}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}\right).$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial H}{\partial x}$, $\frac{\partial H}{\partial y}$, $\frac{\partial H}{\partial z}$ sont indépendantes de x, y, z. Donc

$$\Delta\Delta\left[\frac{1}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]=2\left(\frac{\partial H}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Delta G}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Delta G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial\Delta G}{\partial z}\right),$$

et ceci est nul, car $\Delta G=0$.

En résumé, l'équation de Laplace est remplacée par

$$\Delta\Delta\Phi=0. \tag{103}$$

Septembre-Octobre 1926.

Institut d'Astronomie et de Géodésie
de l'Université de Liége.

TABLE DES MATIÈRES

Errata à deux notes publiées précédemment.

1. — *Le mouvement du périhélie de Mercure déduit de certaines lois de gravitation*, par M. DEHALU.

(BULL. AC. ROY. DE BELG., CL. DES SC., 1926, pp. 381-393.)

Page	*Ligne*	*Au lieu de*	*Lire*
381,	5,	d'une force qui dérive,	de forces qui dérivent.
»	16,	$\delta T = mv.dv$,	$\delta T = mv.\delta v$.
383,	7,	$x'.\frac{d(U+V)}{dx'} + \cdots$,	$x'.\frac{\partial(U+V)}{\partial x'} + \cdots$ (symboles ∂).
»	éq. (5),	$U - V$,	$U - V + C^{te}$.
384,	8,	$\delta q'_i$,	$\delta q'_i.dt$.
»	9,	$d\delta q.dt$,	$d\delta q_i$.
»	12,	$d\delta q_i.dt$,	$d\delta q_i$.
»	$\overline{5}$,	$\int_{t_0}$,	$\int_{t_0}^{t_1}$.
385,	$\overline{4}$,	l'équation (8) se ramène...,	les équations (8) et (9) se ramènent...
386,	14,	$\frac{\alpha k^2}{c^2}\rho$,	$\frac{\alpha k^2}{c^2}\rho^2$.
387,	5,	dans (15),	dans le second membre de (15).
388, éq. (18),		$a(1-e^2)$,	$a(1-e^2).c^2$.
» éq. (19),		$\frac{k^2}{r}\left\{1 + \frac{k^2}{c^2r^2}\cdots\right\}$,	$\frac{k^2}{r}\left\{1 + \frac{k^2}{c^2r}\cdots\right\}$.
389,	11,	d'après (10),	d'après (4).
»	14,	d'après (12),	d'après (6).

Page	Ligne	Au lieu de	Lire
390, éq. (26),		$-\frac{2\beta k^2}{c^2}\cdot\frac{d^2\rho}{d\theta^2}$,	$-\frac{2\beta k^2}{c^2}\rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2}$.
»	10,	$\frac{k^4}{h^4}e\sin^2(\theta-\omega)$,	$\frac{k^4}{h^4}e^2\sin^2(\theta-\omega)$.
»	éq. (28),	e^2h^4,	c^2h^4.
»	éq. (29),	$a(1-e^2)$,	$ac^2(1-e^2)$.
393	8,	$\frac{r^2}{2}\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\left(1+\frac{2\beta k^2}{r}\right)$,	$\frac{r^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\cdot\left(1+\frac{2\beta k^2}{c^2r}\right)$.

Pages 392, 393 : les lettres α et β doivent être partout remplacées par $\frac{\alpha k^2}{c^2}$ et $\frac{\beta}{c^2}$.

2\. — *Les potentiels riemanniens et les formes quadratiquss einsteiniennes*, par P. Swings.

(Bull. Ac. Roy. de Belg., Cl. des Sc., 1926, pp. 742-753.)

Page	Ligne	Au lieu de	Lire
744,	25,	K^2	k^2.
748,	9,	$-\frac{Mk^2}{c^2r}$,	$\frac{Mk^2}{c^2r}$.

Page 750, *lignes* 15 *et* 16, *changer le signe de* $\frac{2k^2N}{c^2r}$ *et de* $\frac{2k^2P}{c^2r}$.

» 751, » 3, 8 *et* 11, » $\frac{2k^2}{c^2r}$ » $\frac{2ak^2}{c^2r}$.

CONTRIBUTION

A

L'ANATOMIE COMPARÉE

DES

PIPÉRACÉES

PAR

D. ROUSSEAU
Docteur en Sciences naturelles

Impression décidée le 2 avril 1927.