L'exponentielle : une fonction à plusieurs facettes

Jacques Bair et Valérie Henry

Mots clés : Fonction exponentielle, méthode d'Euler, équation fonctionnelle, équation différentielle, logarithme, fonction réciproque, sous-tangente, développement en série

Résumé : Dans cette note, nous montrons que les fonctions exponentielles présentent différentes facettes et peuvent être introduites dans divers cadres.

1. Introduction

L'étude des fonctions exponentielles figure au programme de mathématiques de l'enseignement secondaire supérieur ; elle est également souvent approfondie dans l'enseignement supérieur. Son importance peut être expliquée d'un point de vue épistémologique, mais aussi par ses applications nombreuses et variées ; par exemple, elle intervient pour modéliser l'évolution temporelle de diverses grandeurs : ainsi en est-il ([1], pp. 255-256)

- en finance, d'un capital placé à intérêt composé (ou instantané) ;
- en démographie, de la taille d'une population ;
- en médecine, de la quantité d'un médicament dans le sang ;
- en physique, de la vitesse de décélération d'une particule lancée dans l'air, de la charge d'un condensateur électrique qui se décharge, du nombre d'atomes d'un élément radioactif ;
- ...

Cette matière présente la particularité de pouvoir être introduite de plusieurs manières assez différentes, tout en respectant les programmes officiels de l'enseignement secondaire.

Par analogie avec une étude du CREM [13] qui met en évidence de multiples facettes relatives aux fonctions linéaires, nous allons montrer que les fonctions exponentielles peuvent également être présentées selon plusieurs facettes, en travaillant dans différents cadres :

- algébrique à partir des propriétés de puissances de nombres,
- graphique en se référant notamment aux concepts de tangente et de sous-tangente,
- analytique au départ d'une équation différentielle ou fonctionnelle, du concept de fonction réciproque ou encore par un développement en série.

À ces diverses introductions, nous ajouterons quelques commentaires sur leur portée, leur usage ou leur enseignement. Ces présentations ont des visées didactiques différentes et ne sont pas forcément équivalentes : certaines définissent les fonctions exponentielles à partir de savoirs mathématiques supposés connus ou de modélisations de situations concrètes, tandis que d'autres s'appuient sur certaines propriétés caractéristiques et ne décrivent pas ce qu'est mais bien ce que “fait” une fonction exponentielle. Au lecteur de choisir la (ou les) proposition(s) la (ou les) plus appropriée(s) à ses besoins !

2. Extension des puissances

D'après l'historien Itard [7], *c'est Jean Bernoulli qui, le premier, a introduit les fonctions exponentielles d'une façon systématique* en 1694, dans une correspondance avec Leibniz ; il y discourait à propos de courbes *intermédiaires et parcourantes, celles dont l'équation est de degré indéterminé, c'est-à-dire, où les lettres indéterminées et constantes s'élèvent à des dimensions indéterminées.* (...) *C'est dans la réponse de Leibniz qu'apparaît le mot actuel de « courbes exponentielles ».*

Ainsi, très tôt, le qualificatif “exponentielle” se réfère à des puissances d’une constante dont l’exposant est une variable réelle, ce qui peut être défini, de façon progressive et intuitive, comme suit au profit d’élèves relativement novices en analyse [8].

Pour un réel fixé a, une puissance a^p d’exposant entier positif p est connue : il s’agit du produit de p facteurs égaux à a. Elle conduit aisément aux puissances d’exposant rationnel positif $m = \frac{b}{c}$, avec b et c entiers ; rappelons que $a^{b/c}$, qui s’écrit aussi $\sqrt[c]{a^b}$, est défini quel que soit le signe de a lorsque c est impair, et pour $a \geqslant 0$ seulement lorsque c est pair dans la forme irréductible du rapport $\frac{b}{c}$. Rappelons encore les règles de calcul :

$$(a_1a_2)^m = a_1^m \cdot a_2^m \ , \quad \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^m = \frac{a_1^m}{a_2^m}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \ , \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$\text{si } a \neq 0, \frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{si} \quad m > n \\ 1 & \text{si} \quad m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{si} \quad m < n \end{cases}$$

Pour simplifier la dernière règle, on introduit les puissances à exposants négatifs ou nuls, de manière à pouvoir écrire $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ dans tous les cas. On propose simplement les définitions suivantes :

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p} \ , \quad a^0 = 1 \ (a \neq 0, \ p \text{ rationnel quelconque})$$

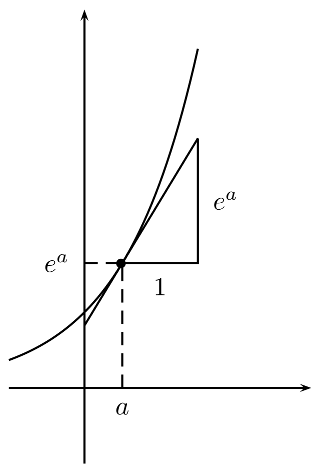
Il est alors aisé de vérifier que les règles de calcul ci-dessus restent valables quand certains exposants cessent d’être positifs.

Enfin, on peut définir une puissance d’exposant réel quelconque m en approchant m par des nombres décimaux p ayant un nombre de plus en plus grand de décimales et en montrant que a^p tend alors vers un nombre noté a^m ; mais cela n’est possible, par ce qui a été dit à propos des exposants rationnels, que si $a \geqslant 0$ pour $m > 0$ ou si $a > 0$ pour $m \leqslant 0$.

On peut ensuite envisager des puissances de a, supposé positif, à exposants non plus constants mais variables et pouvant même prendre n’importe quelle valeur réelle : on définit de la sorte la fonction $x \mapsto a^x$. Il est possible de montrer, par un argument de continuité, que les règles algébriques ci-dessus se maintiennent, mais souvent la démonstration rigoureuse est omise et l’on se contente de vérifier leur véracité sur quelques exemples numériques (faciles à réaliser avec les outils modernes de calcul). Dans une telle approche, les fonctions exponentielles peuvent être présentées de façon précoce dans l’apprentissage de l’analyse mathématique, à l’occasion d’une étude des fonctions élémentaires illustrant concrètement le concept général de fonction ; cela peut ainsi précéder l’introduction des concepts de base du calcul différentiel.

3. Solution d’une équation différentielle et une méthode d’Euler

Dans la pratique, on rencontre souvent des fonctions dépendant du temps dont les valeurs sont en tout instant proportionnelles à la vitesse de variation, c’est-à-dire mathématiquement à la dérivée correspondante ; c’est notamment le cas des grandeurs mentionnées dans l’introduction. Par exemple, un capital croît d’autant plus vite qu’il est imposant (parce que les intérêts rapportent eux-mêmes des intérêts), ou encore une quantité radioactive diminue d’autant plus rapidement que sa masse est importante. En pratique, on modélise ces situations en deux étapes : on construit tout d’abord un modèle local exprimant qu’en tout instant t, le taux de variation $\frac{\Delta f}{\Delta t}$ est proportionnel à la grandeur $f(t)$, puis on passe à la limite pour Δt tendant vers zéro. Formellement, une telle fonction f est solution de l’équation différentielle suivante : $f = kf'$, où k désigne une constante de proportionnalité. En revenant à la notation x pour désigner la variable considérée, la solution de cette équation vérifiant la condition initiale $f(0) = y_0$ est donnée par $f(x) = y_0 e^{kx}$ où e est le nombre irrationnel valant approximativement $2,71828$ et qui semble avoir été introduit par Euler dès 1728. En particulier pour $k = 1$ et $y_0 = 1$, la fonction f, définie par $f(x) = e^x$ pour tout x, est caractérisée par le fait que sa valeur coïncide partout avec celle de sa dérivée comme l’illustre la Figure 3. Cette présentation de la fonction exponentielle nécessite évidemment la connaissance du concept de dérivée.



L'exponentielle népérienne et sa dérivée

Partant de l'équation différentielle ci-dessus, il est en plus possible d'approcher la solution en suivant la méthode d'Euler ([1]). En effet, cette dernière permet de construire analytiquement ou graphiquement une fonction en ne connaissant que très peu d'informations sur elle : la valeur de la fonction ainsi que de sa dérivée en un seul point sont en effet suffisantes. En fait, elle est basée sur l'approximation affine d'une fonction. Partant d'une fonction f dérivable en un point x_0, avec $f(x_0)$ et $f'(x_0)$ connus, on a que, pour h proche de 0, $f(x_0+h)$ est proche de $f(x_0)+hf'(x_0)$ par définition du nombre dérivé. Dans notre cas particulier, on a

$$f(x_1) = f(x_0+h) \text{ proche de } (1+h)\,f(x_0) \;\;;$$

de la sorte, on peut ensuite approcher

$$f(x_2) = f(x_1+h) \text{ par } (1+h)\,f(x_1)$$

et plus généralement

$$f(x_n) = f(x_{n-1}+h) \text{ par } (1+h)\,f(x_{n-1})$$

pour tout entier n. Il est alors facile, avec les outils modernes et en partant des conditions initiales $x_0 = 0$ et $f(x_0) = 1$, de calculer différentes valeurs de la fonction exponentielle népérienne et d'en tracer (une approximation de) son graphe.

Notons que cette méthode fait apparaître une suite géométrique, ce qui peut donner l'idée qu'une exponentielle est une sorte d'"analogue continu" de la notion de suite géométrique, cela étant d'ailleurs confirmé par les propriétés des puissances énoncées dans la section précédente.

([1]) Voir, par exemple [14].

D'autre part, à partir de l'équation différentielle ci-dessus, on démontre assez aisément la propriété spécifique des fonctions exponentielles à savoir que $f(x+y) = f(x)f(y)$. Pour ce faire, posons $\phi(x) = \frac{f(x+y)}{f(x)}$; on a successivement

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= \left(\frac{f(x+y)}{f(x)}\right)' \\
&= \frac{f(x)f'(x+y) - f'(x)f(x+y)}{[f(x)]^2} \\
&= \frac{f(x)kf(x+y) - kf(x)f(x+y)}{[f(x)]^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

et on en déduit que ϕ est constante sur $\mathbb{R}$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = \phi(0) = f(y)$, ce qui démontre la propriété.

4. Solution d'une équation fonctionnelle

Une fonction exponentielle peut être introduite comme une fonction f partout dérivable, telle que $f(0) = 1$ et $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ pour tous réels x et y. Cette relation peut apparaître en effet de façon assez naturelle soit à partir des propriétés des puissances déjà connues, soit lorsqu'on est amené à modéliser une grandeur q variant au cours du temps t en respectant ces deux hypothèses :

H1 : en tout instant t, la grandeur $q(t)$ est proportionnelle à la valeur initiale q_0 au temps $t = 0$,

H2 : la variation de q ne dépend que du temps écoulé et pas du moment où est considérée cette variation.

Le deuxième cas se rencontre par exemple lorsqu'on modélise la formation d'un capital placé à intérêts composés. Montrons, comme dans [11], que ces deux hypothèses conduisent bien à la relation fonctionnelle considérée plus haut. La valeur de q après un temps t dépend à la fois de q_0 et de t : on peut donc écrire

$$q(t) = F(q_0, t)$$

et, en vertu de l'hypothèse H1,

$$q(t) = q_0 F(1, t) \;\;;$$

notons simplement

$$F(1, t) = f(t),$$

d'où
$$q(t) = q_0 f(t).$$
En décomposant le temps t sous la forme $t = x+y$, on peut d'abord écrire
$$q(x) = q_0 f(x)\ ;$$
considérons une durée y à partir de l'instant x : on a alors
$$q(t) = q(x+y)$$
et, conformément à l'hypothèse H2,
$$q(t) = q(x)\cdot f(y)\ ;$$
au total, on a dès lors
$$q(t) = q_0 f(x)\cdot f(y) = q_0 f(x+y),$$
d'où $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$.

Montrons maintenant que toute fonction f satisfaisant $f(0) = 1$ et $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ est égale à un multiple de sa dérivée. Comme $f(x+h) = f(x)\cdot f(h)$, on a
$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{f(x)\big(f(h)-1\big)}{h}\\ f'(x) &= f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}\\ &= f(x)f'(0)\end{aligned}$$

5. Fonction réciproque du logarithme

Une fonction exponentielle peut encore être définie en tant que réciproque d'une fonction logarithmique. Cette présentation présuppose évidemment une bonne connaissance du concept, pouvant s'avérer délicat [10], de fonction réciproque, ainsi que de celui de logarithme. Celui-ci peut être introduit de plusieurs manières, dont les deux principales sont les suivantes :

– par le calcul intégral : la fonction « logarithme népérien de x », notée ℓn est la primitive définie sur $]0,+\infty[$, qui s'annule en 1, de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$; elle peut encore être définie par
$$\ell\text{n}\, x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \quad \text{pour } x > 0.$$
Pour tout $x > 1$, $\ell\text{n}\, x$ vaut donc l'aire entre la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, l'axe des abscisses et les verticales d'abscisses 1 et x.

– comme solution de l'équation fonctionnelle $f(x\cdot y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x et y positifs.

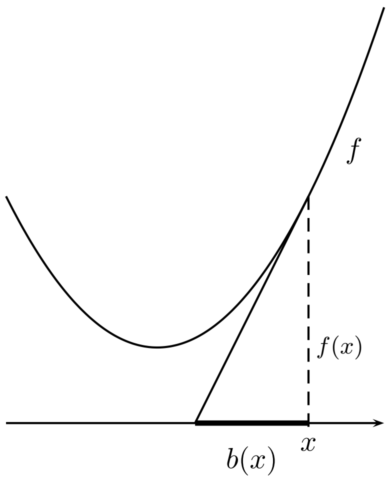
Dans le premier cas, l'existence d'une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est souvent supposée, l'unicité étant alors garantie en admettant la valeur initiale 0 pour $x = 1$. Le deuxième cas se ramène au premier en supposant la fonction f cherchée dérivable pour les x positifs, avec ici aussi $f(1) = 0$; de fait, on peut écrire, pour x positif fixé et h quelconque, $f(x+h) = f\left(x\cdot\left(1+\frac{h}{x}\right)\right) = f(x) + f\left(1+\frac{h}{x}\right)$, d'où
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{x}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(1)}{\frac{h}{x}}$$
Un passage à la limite pour h tendant vers zéro conduit à $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$, ce qui caractérise une fonction logarithmique. La fonction "ℓn" est obtenue en imposant, en plus, $f'(1) = 1$.

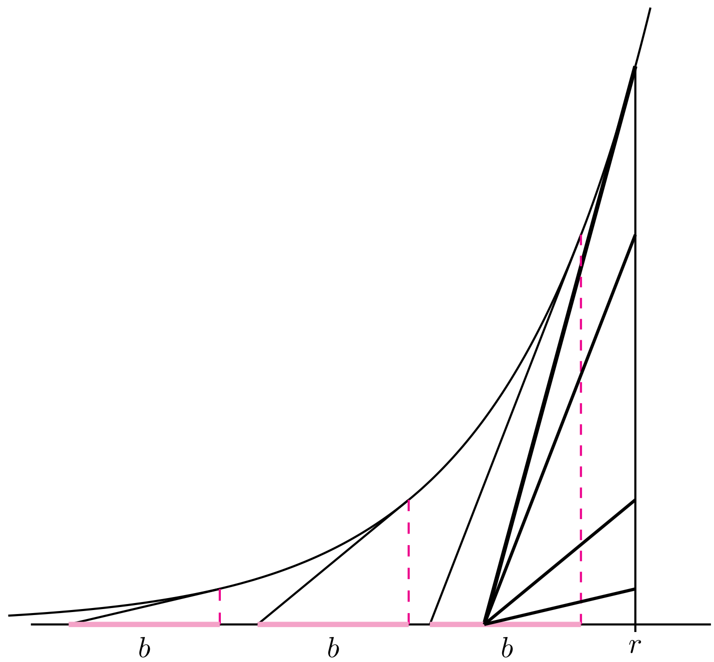
Observons que l'équation fonctionnelle en question possède l'avantage, qui s'avère intéressant en pratique, de pouvoir remplacer une multiplication par une addition([2]) ; ce résultat était déjà connu de John Neper (1550 - 1617) à une époque où étaient pourtant encore inconnues les fonctions, les limites et les dérivées.

6. Fonction à sous-tangente constante

Une autre façon d'introduire une fonction exponentielle consiste à faire appel au concept de *sous-tangente* : il s'agit de (la mesure de) la projection orthogonale de la tangente limitée entre le point de contact et son intersection avec l'axe horizontal, sur l'axe des abscisses (voir la figure suivante où $b(x)$ est la sous-tangente du graphe de f en l'abscisse x).

([2]) Une telle "stratégie" avait déjà été utilisée par l'astronome arabe Ibn-Jouries (980-1083) qui avait découvert une méthode, appelée la prostaphérèse, permettant de remplacer la multiplication de deux fonctions trigonométriques par une somme de deux telles fonctions comme, par exemple, dans la formule : $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$





De fait, la fonction exponentielle définie par $f(x) = e^{\frac{x}{b}}$, où b désigne un paramètre positif, est caractérisée par le fait que la sous-tangente en tout point x vaut exactement b. Cette seule propriété peut être prise comme définition et est même suffisante pour calculer l'aire de la région plane située sous la courbe exponentielle et au-dessus de l'axe des abscisses lorsque celles-ci sont inférieures à une valeur réelle fixée r et ceci sans faire appel au calcul intégral. En effet, si nous traçons les tangentes en tous les points d'abscisse inférieure ou égale à r et limitons tous les segments tangents d'un côté par le point de tangence et de l'autre par l'axe horizontal, nous décrivons une partie de la région dont on calcule l'aire, à savoir celle qui est située à gauche de la tangente à la courbe exponentielle en r. Comme chaque sous-tangente est constante, égale à b, on peut translater ces segments tangents de manière que les points d'intersection de la tangente avec l'axe horizontal viennent coïncider avec le point d'abscisse $r-b$ et d'ordonnée nulle (il s'agit donc de l'intersection de la tangente à l'exponentielle au point d'abscisse r avec l'axe horizontal) : on obtient ainsi exactement un triangle rectangle de base b et de hauteur $e^{\frac{r}{b}}$; l'aire de ce triangle est égale à $\frac{1}{2}be^{\frac{r}{b}}$.

L'aire cherchée est égale à la somme de celles de ces deux régions, soit à deux fois l'aire du triangle considéré ci-dessus [4] : elle vaut donc $be^{\frac{r}{b}}$.

7. Développement en série

Voici en substance comment L. Euler a, en 1748, introduit la fonction exponentielle ([5], § 114).

> *On considère tout d'abord un réel a supérieur à l'unité ; on a $a^0 = 1$. Si l'exposant de a augmente, la puissance correspondante croît également. Il en résulte que si l'exposant de a est « infiniment petit » positif, alors la puissance en question dépasse 1 d'une quantité « infiniment petite » aussi : en désignant en abrégé un « infiniment petit » par ip, on a donc que si ε est un ip, alors il existe un ip ϕ tel que $a^\varepsilon = 1 + \phi$.*
>
> *Cette dernière égalité est encore valable pour a positif quelconque, mais avec cette fois soit $\phi = \varepsilon$, soit $\phi > \varepsilon$, soit $\phi < \varepsilon$ selon la valeur de a. On peut donc écrire, dans tous les cas, ϕ sous la forme d'un produit du type $\lambda\varepsilon$; dès lors, $a^\varepsilon = 1 + \lambda\varepsilon$.*
>
> *On considère à présent un réel (fixé) x et on pose $K = \frac{x}{\varepsilon}$. En exploitant le « théorème binomial » (c'est-à-dire essentiellement la for-*

mule du binôme de Newton étendue à un exposant non nécessairement entier), on trouve

$$\begin{aligned} a^x &= a^{K\varepsilon} = (a^\varepsilon)^K = (1+\lambda\varepsilon)^K \\ &= \left(1+\tfrac{\lambda x}{K}\right)^K \\ &= 1+\tfrac{1}{1}\lambda x+\tfrac{1(K-1)}{1\cdot 2K}\lambda^2x^2 \\ &\qquad +\tfrac{1(K-1)(K-2)}{1\cdot 2K\cdot 3K}\lambda^3x^3+\cdots \\ &= 1+\lambda x+\tfrac{K-1}{K}\tfrac{1}{1\cdot 2}\lambda^2x^2 \\ &\qquad +\tfrac{K-1}{K}\tfrac{K-2}{K}\tfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\lambda^3x^3+\cdots \end{aligned}$$

Ensuite, toujours en suivant le raisonnement d'Euler, on constate que K est « infiniment grand » puisque x est « limité » et ε est ip ; on « peut » dès lors remplacer $\frac{K-1}{K}$, $\frac{K-2}{K}$, $\frac{K-3}{K}$, …par 1, ce qui permet d'écrire

$$a^x = 1+\lambda x+\frac{1}{2!}\lambda^2x^2+\frac{1}{3!}\lambda^3x^3+\cdots$$

Finalement, Euler s'est intéressé au cas où la base a est telle que λ coïncide avec 1. En langage moderne, cela se produit lorsque la base de l'exponentielle est le nombre $e = 2,71828\dots$: on peut alors écrire

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots$$

Bien entendu, le raisonnement d'Euler peut nous paraître aujourd'hui peu rigoureux et soulever diverses questions, notamment celles-ci ([9], p. 342) :

- que sont au juste des nombres infiniment petits ou infiniment grands ?
- peut-on remplacer les nombres $\frac{K-1}{K}$, $\frac{K-2}{K}$, … par 1 ?
- en admettant même que les différences entre $\frac{K-1}{K}$, $\frac{K-2}{K}$, … et 1 peuvent être omises en tant que nombres infiniment petits, l'erreur globale d'approximation, qui est donc la somme d'un nombre infiniment grand d'infiniment petits, est-elle encore négligeable ?
- la formule du binôme de Newton peut-elle être étendue à des exposants non nécessairement entiers, éventuellement infiniment grands ?

Des réponses à ces différentes questions peuvent être données en travaillant avec des nombres hyperréels qui ont été rigoureusement introduits par l'américain Robinson à la fin du siècle dernier [12]. L'on peut effectivement montrer (voir, par exemple, [6], [3], [9]) que, dans ce contexte (de l'analyse qualifiée alors de non-standard), le raisonnement d'Euler était parfaitement valide … et fort en avance sur son époque : une preuve supplémentaire qu'Euler était un génial mathématicien !

8. Conclusion

Comme le suggère notre petite étude, l'enseignement des fonctions exponentielles peut se faire de plusieurs façons. Une enquête [10] a d'ailleurs été récemment réalisée en France auprès de professeurs de mathématiques enseignant cette théorie soit en fin de secondaire (en Lycée), soit dans le supérieur (en IUT). Sur 89 enseignants, 41 signalent qu'ils introduisent les exponentielles puis les logarithmes, 45 adoptent l'ordre contraire et enfin 3 professeurs voient ces deux fonctions simultanément ; quant au choix pour introduire la fonction exponentielle, les résultats enregistrés sont rassemblés dans le tableau ci-dessous :

Effectifs	Lycée	IUT	Total
Exemple de radioactivité	7	2	9
f dérivable telle que $f(x+y)=f(x).f(y)$	13	3	16
Propriétés des logarithmes	24	3	27
Méthode d'Euler	17	1	18
Plusieurs réponses	16	3	19

Comme semblent le confirmer ces données, il n'existe pas de règle universelle en la matière. Toutefois, nous pensons que faire pénétrer les étudiants en profondeur dans plusieurs contextes différents, en les tenant au courant d'aspects historiques sur le sujet, ne saurait que leur être profitable.

Pour en savoir plus

[1] Adam A. - Lousberg F., *Espace-Math 66*, De Boeck Wesmael, Bruxelles, 2000.

[2] Bair J., Équation fonctionnelle et mathématique financière, *Mathématique et Pédagogie*, n° 117, 1998, pp. 49-58.

[3] Bair J. - Henry V., *Analyse infinitésimale : le calculus redécouvert*, Academia-Bruylant, Louvain-la-Neuve, 2008.

[4] Bair J. - Henry V., Translatez, c'est quarré, *Tangente HS 135*, en voie de publication.

[5] Euler L., *Introductio in Analysis Infinitorum*, tomus Primus, Lausane, 1748 ; repris dans *Introduction to Analysis of the Infinite*, Book I, Springer-Verlag, New York, 1988.

[6] Henry V., *Questions de didactique soulevées par un enseignement de l'analyse non standard à de futurs économistes*, thèse doctorale, Université Paul Sabatier de Toulouse III, 2004.

[7] Itard J., *Essais d'histoire des mathématiques*, Librairie Scientifique et Technique, Paris, 1984.

[8] Jongmans F., *Cours de mathématiques générales I*, Université de Liège, syllabus de cours, candidature en sciences commerciales, 1975.

[9] McKinzie M. - Tuckey C., Higher Trigonometry, Hyperreal Numbers and Euler's Analysis of Infinities, *Mathematics Magazine*, Vol. 74, n° 5, 2001, pp. 339-368.

[10] Murillo Lopez S., *Etude d'une pratique face à un obstacle didactique : la correction en classe de mathématiques dans le cas de la fonction réciproque*, thèse doctorale, Université Paul Sabatier de Toulouse III, 2008.

[11] Noirfalise R., Fonction exponentielle et modélisation en TS : une perspective didactique, IREM de Clermont-Ferrand, site (consulté le 23 septembre 2008) : `www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/_II/Comunicaciones/_TAD/_II/20/%20-/%20Noirfalise/%20TAD/%202.pdf`.

[12] Robinson A., *Non-standard analysis*, Revised edition, Princeton University Press, 1996.

[13] Rouche N., *Des grandeurs aux espaces vectoriels : la linéarité comme fil conducteur*, CREM, Nivelles, 2002.

[14] Stuber C., Différentes méthodes d'introduction de la fonction exponentielle en terminale S, IUFM de la Réunion, site (consulté le 17 juillet 2008) : `http://www.reunion.iufm.fr/Recherche/IREM/Fiches/Stuber.htm`.

Jacques BAIR : Université de Liège, Boulevard du Rectorat 7, 4000 Liège, Belgique ; e-mail : `J.Bair@ulg.ac.be` ; Valérie HENRY : chargée de cours FUNDP, Rempart de la Vierge 8, 5000 Namur, Belgique ; assistante à l'ULg, Boulevard du Rectorat 7, 4000 Liège, Belgique ; e-mail : `V.Henry@ulg.ac.be`

René nous a ramené un petit souvenir des journées de l'APMEP 2008 à La Rochelle. Il a certainement pensé à la revue en prenant cette photo.