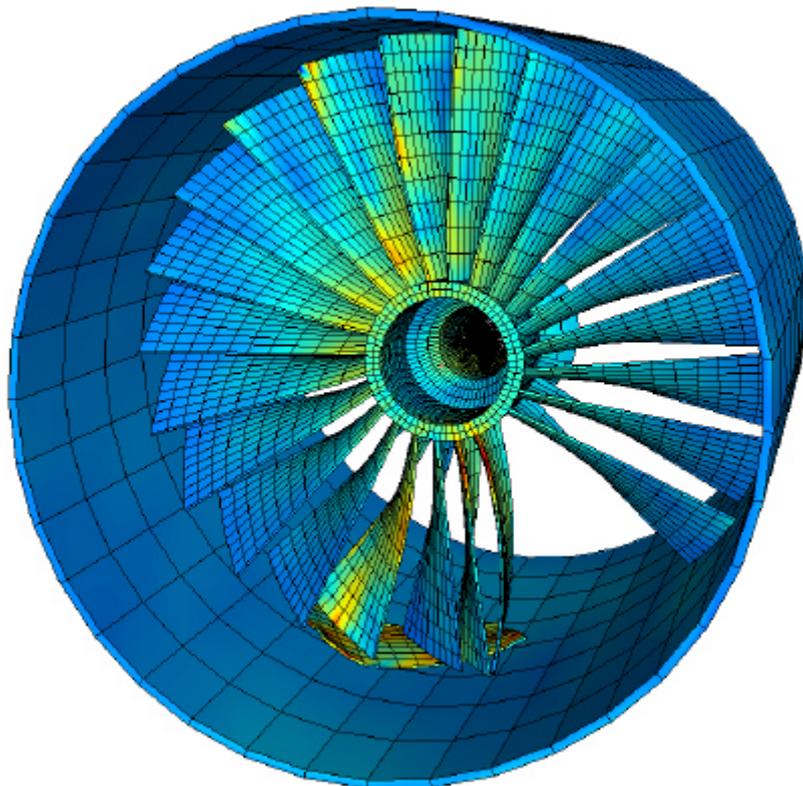




**Contributions aux algorithmes d'intégration  
temporelle conservant l'énergie  
en dynamique non-linéaire des structures**



Travail présenté par

**Ludovic Noels**

(Ingénieur Civil Electro-Mécanicien, Aspirant du F.N.R.S.)

pour l'obtention du titre de  
**Docteur en Sciences Appliquées**  
Septembre 2004



# Préface

*Je voudrais profiter de l'occasion qui m'est présentée pour remercier les personnes sans qui le présent travail n'aurait jamais vu le jour.*

*D'abord je remercie Messieurs les Professeurs qui ont accepté de participer au Jury de cette Thèse de Doctorat. Je remercie également Monsieur le Professeur Golinval d'avoir accepté de présider ce Jury.*

*Tout travail de recherche nécessitant des subsides, l'aide apportée par le Jury Pisart et par le F.N.R.S. s'est avérée précieuse.*

*J'exprime ma gratitude aux personnes de la Snecma, et plus particulièrement Frank Laurent, Isabelle Renard et Eric Seinturier qui ont exprimé un intérêt marqué quant au déroulement de mes recherches.*

*Le développement informatique du présent travail s'est fait dans le cadre de la mise en oeuvre d'un programme éléments-finis. Cette mise en oeuvre n'aurait jamais été possible sans la participation de Laurent Adam, Romain Boman et de Luc Papeleux. Qu'ils en soient ici remerciés.*

*Les sujets traités dans cet ouvrage m'ont été proposés par le Docteur Jérôme Bonini, par le Docteur Jean-Philippe Ponthot et par le Docteur Laurent Stainier. Je les remercie donc d'avoir initié et supervisé mes recherches.*

*Enfin que Monsieur le Professeur Hogge accepte l'expression de mes sentiments les meilleurs pour m'avoir accepté dans son service.*

*Je terminerai en remerciant mes Parents et Grands-Parents qui m'ont patiemment soutenu tout au long de mes études.*



# Table des matières

<b>Tables des définitions et des notations</b>	<b>11</b>
Définitions . . . . .	11
Abréviations . . . . .	13
Conventions utilisées . . . . .	14
Opérations mathématiques . . . . .	16
Variables utilisées . . . . .	18
<b>1 Introduction générale</b>	<b>27</b>
<b>2 Introduction à l'intégration temporelle</b>	<b>33</b>
2.1 Etablissement de l'équation d'équilibre . . . . .	34
2.1.1 Notations . . . . .	34
2.1.2 Le milieu continu . . . . .	35
2.1.3 Discrétisation éléments-finis . . . . .	40
2.2 Intégration temporelle par l'algorithme de Newmark . . . . .	42
2.2.1 Principe . . . . .	42
2.2.2 Précision et stabilité de l'oscillateur harmonique dans le cadre linéaire . . . . .	46
2.2.3 Précision et stabilité dans le cadre non-linéaire . . . . .	49
2.2.4 Exemple : Etude d'un système masse-ressort . . . . .	52
2.2.5 Nature symplectique de l'algorithme de Newmark . . . . .	57
2.2.6 Conclusion sur l'utilisation de Newmark . . . . .	59
2.3 Intégration temporelle par la famille $\alpha$ -généralisée . . . . .	60
2.3.1 Principe . . . . .	60
2.3.2 Précision et stabilité de l'oscillateur harmonique dans le cadre linéaire . . . . .	61
2.3.3 Précision et stabilité dans le cadre non-linéaire . . . . .	63
2.3.4 Exemple : Etude d'un système masse-ressort . . . . .	64
2.3.5 Conclusion sur l'utilisation de la méthode $\alpha$ -généralisée . . . . .	65
2.4 Conclusions sur l'intégration temporelle . . . . .	69

<b>3</b>	<b>Etat de l'art de l'intégration consistante dans le cadre non-linéaire</b>	<b>71</b>
3.1	Le schéma Energy-Momentum Conserving Algorithm (EMCA) . . . . .	74
3.1.1	Principe du schéma du point milieu . . . . .	74
3.1.2	Discrétisation temporelle des lois de conservation . . . . .	75
3.1.3	Construction des forces internes . . . . .	77
3.1.4	Consistance énergétique, stabilité et précision (cadre linéaire et non-linéaire) . . . . .	80
3.1.5	Exemple : Etude d'un système masse-ressort . . . . .	82
3.1.6	Conclusion sur l'utilisation de la méthode EMCA . . . . .	83
3.2	Le schéma Energy Dissipative Momentum Conserving (EDMC) . . . . .	86
3.2.1	Principe . . . . .	86
3.2.2	Propriétés fondamentales des forces et de vitesses de dissipation . . . . .	86
3.2.3	Construction des forces et des vitesses de dissipation . . . . .	89
3.2.4	Consistance énergétique, stabilité et précision (cadre linéaire et non-linéaire) . . . . .	93
3.2.5	Exemple : Etude d'un système masse-ressort . . . . .	96
3.2.6	Conclusion sur l'utilisation de la méthode EDMC . . . . .	97
3.3	Conclusions sur l'intégration consistante dans le cadre non-linéaire . . . . .	101
<b>4</b>	<b>Développement d'un modèle hypoélastique énergétiquement consistant</b>	<b>103</b>
4.1	Préliminaires sur le modèle hypoélastique . . . . .	105
4.1.1	Notations . . . . .	105
4.1.2	Evaluation du tenseur des contraintes . . . . .	106
4.1.3	Formulation classique des forces internes . . . . .	109
4.2	Expression consistante des forces internes . . . . .	110
4.2.1	Nouvelle formulation des forces internes . . . . .	110
4.2.2	Conservation du moment linéaire . . . . .	110
4.2.3	Conservation du moment angulaire . . . . .	111
4.2.4	Conservation de l'énergie . . . . .	111
4.2.5	Hypothèse des petites transformations . . . . .	117
4.2.6	Comparaison avec le modèle hyperélastique . . . . .	119
4.3	Exemples sans dissipation numérique . . . . .	121
4.3.1	Exemple 1 : Mono-élément 2D . . . . .	121
4.3.2	Exemple 2 : Barre de Taylor . . . . .	123
4.4	Expression énergétiquement consistante de la dissipation numérique . . . . .	130
4.4.1	Expression des vitesses de dissipation . . . . .	130
4.4.2	Expression des forces de dissipation . . . . .	132
4.4.3	Conservation du moment linéaire . . . . .	133
4.4.4	Conservation du moment angulaire . . . . .	133
4.4.5	Evaluation de l'énergie dissipée numériquement . . . . .	133
4.4.6	Consistance énergétique, stabilité et précision (cadre linéaire et non-linéaire) . . . . .	133

4.5	Exemples numériques avec dissipation numérique . . . . .	136
4.5.1	Exemple 1 : Barre de Taylor . . . . .	136
4.5.2	Exemple 2 : Chute d'un bloc de caoutchouc (tumbling L-shaped block) [101] . . . . .	144
4.6	Conclusions sur la formulation des forces internes . . . . .	151
<b>5</b>	<b>Modélisation énergétiquement consistante de l'interaction de contact</b>	<b>153</b>
5.1	Préliminaires . . . . .	158
5.1.1	Le milieu continu pour l'interaction entre corps . . . . .	159
5.1.2	Dérivation du gap normal . . . . .	162
5.1.3	Dérivation de la composante tangentielle . . . . .	163
5.1.4	Expression classique des forces de contact . . . . .	164
5.2	Les lois de conservation adaptées au contact . . . . .	169
5.2.1	Conservation du moment linéaire . . . . .	169
5.2.2	Conservation du moment angulaire . . . . .	169
5.2.3	Conservation de l'énergie . . . . .	170
5.3	Expression consistante des forces normales de contact . . . . .	171
5.3.1	Discrétisation temporelle de la composante normale . . . . .	171
5.3.2	Conservation du moment linéaire . . . . .	173
5.3.3	Conservation du moment angulaire . . . . .	174
5.3.4	Conservation de l'énergie . . . . .	174
5.4	Expression consistante des forces de frottement de contact . . . . .	177
5.4.1	Discrétisation temporelle de la composante tangente . . . . .	177
5.4.2	Conservation du moment linéaire . . . . .	180
5.4.3	Conservation du moment angulaire . . . . .	181
5.4.4	Conservation de l'énergie . . . . .	181
5.5	Implémentation pratique des forces de contact . . . . .	183
5.5.1	Force de contact normale . . . . .	184
5.5.2	Force de contact tangentielle . . . . .	185
5.6	Exemples numériques avec contact . . . . .	190
5.6.1	Exemple 1 : Impact sans frottement de deux cylindres élasto-plastiques parallèles . . . . .	190
5.6.2	Exemple 2 : Impact avec frottement de deux cylindres élastiques parallèles . . . . .	195
5.6.3	Exemple 3 : Impact avec frottement de deux cylindres creux . . . . .	199
5.7	Conclusions sur la formulation de l'interaction de contact . . . . .	204
<b>6</b>	<b>Utilisation combinée des algorithmes implicite et explicite</b>	<b>205</b>
6.1	Intégration explicite de l'équation d'équilibre . . . . .	208
6.1.1	L'algorithme explicite de la différence centrée . . . . .	208
6.1.2	L'algorithme explicite de la méthode $\alpha$ -généralisée . . . . .	211
6.2	Equilibrage de pas de temps explicites . . . . .	214
6.2.1	Principe de l'équilibrage . . . . .	214

6.2.2	Stabilité et consistance énergétique de l'équilibrage . . . . .	217
6.2.3	Construction des forces pour le cas du ressort . . . . .	218
6.2.4	Expression des forces dans le cas du matériau hypoélastique . . . . .	222
6.2.5	Expression des forces dans le cas de l'interaction de contact . . . . .	227
6.2.6	Variante de l'équilibrage de pas de temps explicites . . . . .	233
6.3	Conclusions sur l'utilisation combinée des algorithmes implicite et explicite	234
<b>7</b>	<b>Gestion automatique de l'intégration temporelle</b>	<b>235</b>
7.1	Gestion de la taille du pas de temps . . . . .	236
7.2	Gestion de la réactualisation de la matrice tangente . . . . .	238
7.3	Gestion de l'utilisation combinée des algorithmes . . . . .	239
7.3.1	Décision de passage d'un algorithme implicite vers un algorithme explicite . . . . .	239
7.3.2	Décision de passage d'un algorithme explicite vers un algorithme implicite . . . . .	240
7.3.3	Autres considérations sur le basculement . . . . .	240
7.4	Exemples numériques de la gestion automatique . . . . .	242
7.4.1	Exemple 1 : Etude d'un système masse-ressort . . . . .	242
7.4.2	Exemple 2 : Impact de deux cylindres . . . . .	245
7.4.3	Exemple 3 : Barre de Taylor . . . . .	247
7.4.4	Exemple 4 : Modélisation simplifiée de l'interaction aube-carter . . . . .	252
7.5	Conclusion sur la gestion automatique . . . . .	259
<b>8</b>	<b>Applications numériques</b>	<b>261</b>
8.1	Simulation du rebond d'une balle élastique . . . . .	262
8.1.1	Description du modèle . . . . .	262
8.1.2	Analyse des rebonds successifs de la balle . . . . .	263
8.1.3	Conclusions sur la simulation numérique des rebonds d'une balle.	269
8.2	Simulation du flambement d'un longeron à section carrée . . . . .	271
8.2.1	Description du modèle . . . . .	271
8.2.2	Longeron de Jones et Karagiozova [79] . . . . .	272
8.2.3	Longeron de Langseth <i>et al.</i> [88] . . . . .	280
8.2.4	Influence du maillage lors de l'étude du flambement d'un longeron	282
8.2.5	Conclusions sur la simulation du flambement d'un longeron à section carrée . . . . .	285
8.3	Simulation d'un processus d'emboutissage d'un rail en forme de "S" . . . . .	286
8.3.1	Description du modèle . . . . .	286
8.3.2	Simulation d'un processus de mise à forme . . . . .	288
8.3.3	Conclusion sur la simulation du processus de mise à forme . . . . .	295
8.4	Simulation d'une perte d'aube dans un moteur d'avion . . . . .	296
8.4.1	Description du modèle . . . . .	296
8.4.2	Conditions initiales . . . . .	301
8.4.3	Simulation du premier tour . . . . .	302

8.4.4	Conclusions sur la simulation de la perte d'aube . . . . .	314
<b>9</b>	<b>Conclusions générales et perspectives</b>	<b>315</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>319</b>
<b>A</b>	<b>Annexes relatives au chapitre 2</b>	<b>333</b>
A.1	Algorithme itératif de recherche linéaire (line search) . . . . .	333
A.1.1	Etablissement de l'équation de la recherche linéaire . . . . .	333
A.1.2	Résolution de la recherche linéaire . . . . .	334
A.1.3	Convergence de la recherche linéaire . . . . .	335
A.2	Etude de l'amplification numérique de l'algorithme $\alpha$ -généralisé . . . . .	336
A.2.1	Existence de l'overshoot au premier pas de temps . . . . .	336
A.2.2	Tendance asymptotique pour un grand nombre de pas temps et L-stabilité . . . . .	338
<b>B</b>	<b>Annexes relatives au chapitre 3</b>	<b>341</b>
B.1	Méthode de résolution des algorithmes EMCA et EDMC . . . . .	341
B.1.1	Prédictions . . . . .	341
B.1.2	Corrections . . . . .	341
B.1.3	La matrice tangente . . . . .	342
B.2	Etude de l'amplification numérique de l'algorithme EDMC-1 . . . . .	344
<b>C</b>	<b>Annexes relatives au chapitre 4</b>	<b>345</b>
C.1	Etude d'un mode rigide . . . . .	345
C.2	Démonstration des relations liant les tenseurs élastiques . . . . .	347
C.3	Implémentation des forces internes . . . . .	349
C.3.1	Partie volumique . . . . .	349
C.3.2	Partie déviatorique . . . . .	349
C.4	La matrice de raideur tangente relative au modèle hypoélastique . . . . .	351
C.4.1	Première partie des forces . . . . .	351
C.4.2	Deuxième partie des forces . . . . .	354
C.4.3	Obtention de $\mathbf{K}$ . . . . .	359
C.5	Dérivation des tenseurs matériels . . . . .	360
C.5.1	Dérivation des contraintes . . . . .	360
C.5.2	Dérivation de la dissipation interne . . . . .	360
C.6	Dérivation de la dissipation numérique . . . . .	362
C.6.1	Dérivation des vitesses de dissipation du premier ordre . . . . .	362
C.6.2	Dérivation du potentiel de dissipation du premier ordre . . . . .	362
<b>D</b>	<b>Annexes relatives au chapitre 5</b>	<b>365</b>
D.1	La matrice de raideur tangente relative au contact . . . . .	365
D.1.1	Matrice de raideur relative aux forces normales conservatives . . .	365
D.1.2	Matrice de raideur relative aux forces normales de dissipation . .	367

D.1.3	Matrice de raideur relative aux forces de frottement . . . . .	368
D.2	Comment rendre la normale d'une surface continue . . . . .	372
D.2.1	Cas où il n'y a pas de projection . . . . .	372
D.2.2	Cas où il y a une projection . . . . .	373
D.2.3	Cas où il y a plusieurs projections . . . . .	373
D.3	Vérification de la consistance des forces de contact implémentées . . . . .	377
D.3.1	Conservation du moment linéaire . . . . .	377
D.3.2	Conservation du moment angulaire . . . . .	378
D.3.3	Conservation de l'énergie . . . . .	378

# Table des définitions et des notations

Nous allons répertorier l'ensemble des définitions et notations utilisées dans ce travail.

## Définitions

A-stable	l'algorithme est dit A-stable s'il est inconditionnellement stable numériquement
bifurcation	l'algorithme d'intégration est sujet à la bifurcation si les fréquences propres de la matrice spectrale changent de nature (de complexes à réelles ou le contraire) pour une certaine pulsation (dite de bifurcation)
conditionnellement	restriction d'une propriété (comme la stabilité) pour certaines tailles du pas de temps
conservatif	l'algorithme d'intégration est conservatif si l'énergie totale est constante au cours du temps
consistant	énergétiquement consistant par abus de langage
dissipatif	l'algorithme d'intégration est dissipatif s'il dissipe de l'énergie d'une manière numérique au cours du temps
divergence	l'algorithme d'intégration diverge s'il donne une solution physiquement différente lorsque la taille du pas de temps augmente (par opposition à un algorithme énergétiquement consistant)
énergétiquement consistant	l'algorithme d'intégration est consistant s'il vérifie les lois de conservation des milieux continus (conservation des moments linéaires et angulaires et conservation de l'énergie)

G-stable	l'algorithme est dit G-stable si l'énergie du système diminue ou est constante au cours du temps
hyperélastique	un modèle matériau est dit hyperélastique si les contraintes sont calculées par dérivation d'un potentiel
hypoélastique	un modèle matériau est dit hypoélastique si les contraintes sont calculées en intégrant une vitesse de déformation
inconditionnellement	absence de restriction d'une propriété sur la taille du pas de temps
instable	l'algorithme d'intégration est instable au point de vue numérique si de l'énergie est introduite numériquement dans le système (par opposition à stable)
L-stable	l'algorithme est L-stable s'il est A-stable et s'il amortit l'énergie relative aux hautes fréquences en un pas de temps
overshoot	l'overshoot est l'amplification numérique, par l'algorithme d'intégration, d'une perturbation ou d'une condition initiale
stable	une grandeur relative à l'énergie du système diminue ou est constante au cours du temps (G-stable si cette grandeur est l'énergie)
symplectique	l'algorithme est symplectique si sa matrice d'amplification linéarisée $\mathbf{F}$ conduit à $\mathbf{F}^T \mathbf{J} \mathbf{F} = \mathbf{J}$ avec $\mathbf{J}$ la matrice antisymétrique unitaire ( <i>c.f.</i> section 2.2.5)

## Abréviations

CH	algorithme de Chung-Hulbert
EDMC	algorithme "Energy Dissipative, Momentum Conserving"
EDMC-1	algorithme au premier ordre "Energy Dissipative, Momentum Conserving"
EDMC-2	algorithme au deuxième ordre "Energy Dissipative, Momentum Conserving"
EMCA	algorithme "Energy Momentum Conserving Algorithm"
HHT	algorithme de Hilber-Hughes-Taylor
MEMM	algorithme "Modified Energy Momentum Method"
WBZ	Wood-Bossak-Zienkiewicz

## Conventions utilisées

Soit  $x$  représentant une grandeur quelconque.

$x$	la lettre est en italique : il s'agit d'un scalaire (tenseur d'ordre 0, c'est-à-dire à 1 composante)
$\vec{x}$	la lettre est en italique surmontée d'une flèche : il s'agit d'un tenseur d'ordre 1 (3 composantes) écrit sous forme de vecteur
$\underline{x}$	la lettre est en italique et est soulignée : il s'agit du vecteur ensemble des inconnues du système
$\mathbf{x}$	la lettre est en gras : il s'agit d'un tenseur d'ordre 2 (9 composantes) écrit sous forme de matricielle
$\underline{\mathbf{x}}$	la lettre est en gras et est soulignée : il s'agit d'une matrice relative à l'ensemble des inconnues du système
$\mathcal{X}$	la lettre est en italique calligraphiée : il s'agit d'un tenseur d'ordre 4 (81 composantes)
$\mathbb{X}$	la lettre est en double trait : il s'agit d'un ensemble
$x(y)$	le symbole est suivi d'un autre entre parenthèses : il s'agit de $x$ (scalaire, vecteur, matrice ou tenseur) fonction de $y$ (scalaire, vecteur, matrice ou tenseur). Par souci de clarté, les parenthèses ne servent qu'à signaler cette dépendance et pas à définir une priorité dans l'ordre des opérations mathématiques
$\dot{x}$	le symbole est surmonté d'un point : il s'agit de la dérivée totale première par rapport au temps de $x$ (scalaire, vecteur, matrice ou tenseur)
$\ddot{x}$	le symbole est surmonté de deux points : il s'agit de la dérivée deuxième totale par rapport au temps de $x$ (scalaire, vecteur, matrice ou tenseur)
$x^n$	l'exposant est une lettre romaine : $x$ (scalaire, vecteur, matrice ou tenseur) est évalué en la configuration $n$
$x^{n,i}$	les exposants sont deux lettres romaines : $x$ (scalaire, vecteur, matrice ou tenseur) est évalué en la configuration $n$ et en l'itération $i$ (si aucune confusion n'est possible, l'exposant $n$ peut être omis par souci de clarté)
$x^D$	l'exposant est $D$ : $x$ (scalaire, vecteur, matrice ou tenseur) est évalué à un point de Gauss déviatorique
$x^V$	l'exposant est $V$ : $x$ (scalaire, vecteur, matrice ou tenseur) est évalué à un point de Gauss volumique
$x_0$	$x$ (scalaire, vecteur, matrice ou tenseur) est évalué à la configuration initiale

---

$x_m^n$	l'indice et l'exposant sont des lettres romaines : $x$ (scalaire, vecteur, matrice ou tenseur) évalué pour le passage de la configuration $m$ à la configuration $n$
$x_\alpha$	l'indice est une lettre grecque : il s'agit de la composante $\alpha$ d'un vecteur de deux composantes $x$ (par exemple le vecteur de deux paramètres décrivant une surface)
$x_{\alpha\beta}$	les 2 indices sont des lettres grecques : il s'agit de la composante $\alpha\beta$ d'une matrice de quatre composantes $x$
$x^\xi$	l'exposant est une lettre grecque : $x$ (scalaire, vecteur, matrice, tenseur) est évalué au nœud $\xi$
$\vec{x}_i$	l'indice est une lettre romaine : il s'agit de la composante $i \in [1, 3]$ du vecteur $\vec{x}$
$\underline{x}_i$	l'indice est une lettre quelconque : il s'agit de la composante $i \in [1, 6N]$ du vecteur résultant $\underline{x}$
$\mathbf{x}_I$	l'indice est une lettre romaine majuscule : valeur principale $I \in [1, 3]$ de la matrice $\mathbf{x}$
$\mathbf{x}_{ij}$	les indices sont des lettres romaines : composante $i, j \in [1, 3][1, 3]$ de la matrice $\mathbf{x}$
$\underline{\mathbf{x}}_{ij}$	les indices sont des lettres quelconques : il s'agit de la composante $i \in [1, 6N], j \in [1, 6N]$ de la matrice résultante $\underline{\mathbf{x}}$
$\mathcal{X}_{ijkl}$	les indices sont des lettres romaines : composante $i, j, k, l \in [1, 3][1, 3][1, 3][1, 3]$ du tenseur $\mathcal{X}$

## Opérations mathématiques

Dans ce travail, sauf mention contraire explicite, les conventions d'Einstein sont appliquées. Soient  $x$  et  $y$  deux grandeurs quelconques.

$\frac{\partial}{\partial y}x$	il s'agit de la dérivée partielle de $x$ (scalaire, vecteur, matrice, tenseur) par rapport à $y$ (scalaire, vecteur, matrice, tenseur)
$\frac{d}{dy}x$	il s'agit de la dérivée totale de $x$ (scalaire, vecteur, matrice, tenseur) par rapport à $y$ (scalaire, vecteur, matrice, tenseur)
$\ \vec{x}\ $	il s'agit de la norme du vecteur $\vec{x}$ : $\ \vec{x}\  = \sqrt{\vec{x}_i \vec{x}_i}$
$\vec{x} \wedge \vec{y}$	il s'agit du produit vectoriel entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$ : $[\vec{x} \wedge \vec{y}]_i = \epsilon_{ijk} \vec{x}_j \vec{y}_k$ avec $\epsilon_{ijk}$ le tenseur d'ordre 3 des permutations
$\vec{x} \cdot \vec{y}$	il s'agit du produit scalaire entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$ : $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}_i \vec{y}_i$
$\vec{x} \otimes \vec{y}$	il s'agit du produit dyadique entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$ : $[\vec{x} \otimes \vec{y}]_{ij} = \vec{x}_i \vec{y}_j$
$\mathbf{x}^T$	il s'agit de la transposée d'une matrice $\mathbf{x}$ : $[\mathbf{x}^T]_{ij} = \mathbf{x}_{ji}$
$\mathbf{x}^{-1}$	il s'agit de l'inverse d'une matrice $\mathbf{x}$ : $[\mathbf{x}^{-1}]_{ik} \mathbf{x}_{kj} = \delta_{ij}$ avec $\delta_{ij}$ le symbole de Kronecker
$\mathbf{x}^c$	il s'agit du corotationnel d'une matrice $\mathbf{x}$ : $\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{x}^c\mathbf{R}^T$ avec $\mathbf{R}$ une matrice de rotation ( $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = I$ et $\det\mathbf{R} = 1$ )
$\mathbf{x}^{\text{dev}}$	il s'agit de la partie déviatorique d'une matrice $\mathbf{x}$ : $\mathbf{x}^{\text{dev}} = \mathbf{x} - \frac{1}{3}\mathbf{x}_{ii}\mathbf{I}$ avec $\mathbf{I}$ la matrice identité
$\det\mathbf{x}$	il s'agit du déterminant d'une matrice $\mathbf{x}$
$\text{tr}\mathbf{x}$	il s'agit de la trace d'une matrice $\mathbf{x}$
$\mathbf{x}\vec{y}$	il s'agit du produit entre une matrice $\mathbf{x}$ et un vecteur $\vec{y}$ : $[\mathbf{x}\vec{y}]_{ij} = \mathbf{x}_{ik}\vec{y}_k$
$\mathbf{x}\mathbf{y}$	il s'agit du produit entre une matrice $\mathbf{x}$ et une matrice $\mathbf{y}$ : $[\mathbf{x}\mathbf{y}]_{ij} = \mathbf{x}_{ik}\mathbf{y}_{kj}$
$\mathbf{x} : \mathbf{y}$	il s'agit du double produit contracté entre une matrice $\mathbf{x}$ et une matrice $\mathbf{y}$ avec $\mathbf{x} : \mathbf{y} = \mathbf{x}_{ij}\mathbf{y}_{ij}$
$\vec{x} \bullet \mathcal{Y}$	il s'agit du produit entre un vecteur $\vec{x}$ et un tenseur $\mathcal{Y}$ : $[\vec{x} \bullet \mathcal{Y}]_{ikl} = \vec{x}_j \mathcal{Y}_{ijkl}$
$\mathcal{X} \bullet \vec{y}$	il s'agit du produit entre un tenseur $\mathcal{X}$ et un vecteur $\vec{y}$ : $[\mathcal{X} \bullet \vec{y}]_{ijk} = \mathcal{X}_{ijkl}\vec{y}_l$
$\mathbf{x} : \mathcal{Y}$	il s'agit du produit entre une matrice $\mathbf{x}$ et un tenseur $\mathcal{Y}$ : $[\mathbf{x} : \mathcal{Y}]_{kl} = \mathbf{x}_{ij}\mathcal{Y}_{ijkl}$
$\mathcal{X} : \mathbf{y}$	il s'agit du produit entre un tenseur $\mathcal{X}$ et une matrice $\mathbf{y}$ : $[\mathcal{X} : \mathbf{y}]_{ij} = \mathcal{X}_{ijkl}\mathbf{y}_{kl}$
$\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$	définit une transformation qui s'applique à tout point de $\mathbb{A}$ et qui donne un point de $\mathbb{B}$

$A \times B \rightarrow C$  définit une transformation qui s'applique à toute valeur définie par un point de  $A$  et par un point de  $B$  et qui donne un point de  $C$

## Variables utilisées

### Liste des scalaires

$\bar{\alpha}$	écrouissage cinématique équivalent ( $\bar{\alpha} = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\alpha}}$ avec $\boldsymbol{\alpha}$ le tenseur d'hérédité)
$\alpha_c$	ouverture de l'angle pour le double contact
$\alpha'$	inconnue pour la détermination de la normale continue
$\alpha_F$	paramètre de pondération des forces d'inerties
$\alpha_{ls}$	abscisse réduite du "line search"
$\alpha_M$	paramètre de pondération des forces internes et externes
$\beta$	premier paramètre de Newmark
$\gamma$	second paramètre de Newmark
$\gamma_c$	norme de la vitesse de glissement du contact de Coulomb
$\gamma_{ie}$	sécurité du critère de passage d'un algorithme à un autre
$\gamma^p$	paramètre de correction plastique
$\gamma_s$	sécurité pour le calcul de la taille du pas de temps explicite
$\delta_{ij}$	symbole de Kronecker
$\delta K$	variation de l'énergie cinétique
$\delta W_{cont}$	variation du travail des forces de contact
$\delta W_{ext}$	variation du travail des forces externes
$\delta U_{int}$	variation de l'énergie interne
$\Delta_{int}$	dissipation interne de l'algorithme
$\Delta_{frot}$	dissipation par frottement
$\Delta_K$	dissipation numérique cinématique de l'algorithme
$\Delta_{num}$	dissipation numérique
$\Delta t$	taille du pas de temps
$\Delta t_a$	taille du pas de temps actuel
$\Delta t_{crit}$	taille du pas de temps critique lorsque le schéma d'intégration est conditionnellement stable
$\Delta t_{expl}$	taille du pas de temps explicite pour la combinaison des algorithmes implicites et explicites
$\Delta t_{impl,g}$	taille prédite du pas de temps gardée en mémoire
$\Delta t_{impl}$	taille du pas de temps implicite pour la combinaison des algorithmes implicites et explicites
$\Delta t_p$	taille prédite du pas de temps
$\Delta_W$	dissipation numérique interne de l'algorithme
$\epsilon_{ijk}$	composante $i, j, k \in [1, 3][1, 3][1, 3]$ du tenseur des permutations du troisième ordre
$\varepsilon^p$	déformation plastique équivalente
$\eta_d$	énergie adimensionnelle provenant du gap tangent
$\eta_{int}$	exposant pour la gestion du pas de temps

$\lambda$	valeur propre de la matrice spectrale
$\lambda_i^{\mathbf{A}}$	valeur propre numéro $i$ du tenseur $\mathbf{A}$
$\Lambda$	multiplicateur de Lagrange
$\mu_c$	coefficient de frottement de Coulomb
$\nu$	coefficient de Poisson
$\xi_d$	coefficient d'amortissement numérique
$\rho$	masse volumique
$\rho_b$	opposé de la valeur propre double de la matrice spectrale à la bifurcation
$\rho_d$	rayon spectral
$\rho_s$	opposé de la valeur propre simple de la matrice spectrale à la bifurcation
$\rho_\infty$	rayon spectral pour une pulsation adimensionnelle infinie
$\Sigma_0$	limite élastique initiale
$\Sigma_v$	limite élastique de von Mises
$\Sigma_\infty$	limite élastique de saturation
$\varphi$	fonction de forme
$\phi$	potentiel hyperélastique
$\Phi_c$	critère de Coulomb
$\chi$	paramètre de dissipation des algorithmes EDMC
$\omega$	pulsation d'un système à un degré de liberté
$\omega_{max}$	pulsation maximale d'un système
$\Omega$	pulsation adimensionnelle d'un système à un degré de liberté
$\Omega_b$	pulsation adimensionnelle de bifurcation
$\Omega_d$	pulsation adimensionnelle effective de l'algorithme d'intégration
$\Omega_{max}$	pulsation adimensionnelle correspondant à la pulsation maximale $\omega_{max}$
$\Omega_r$	vitesse de rotation
$\Omega_s$	pulsation adimensionnelle de stabilité
$A$	section d'une barre
$A_{\alpha\beta}$	projection corrigée sur la tangente $\vec{t}_\alpha$ , $\alpha \in [1, 2]$ , pour la coordonnée de surface $u_\beta$ , $\beta \in [1, 2]$ , de la vitesse de glissement
$B_\alpha$	projection corrigée sur la tangente $\vec{t}_\alpha$ , $\alpha \in [1, 2]$ , de la vitesse de glissement
$cont$	indicateur de contact (vrai ou faux)
$\dot{d}_{int}$	variation de la dissipation interne par unité de volume courant
$D_\alpha$	dérivée par rapport à $u_\alpha$ , $\alpha \in [1, 2]$ , de la fonction de forme $\varphi$

$D_K$	dissipation numérique cinétique spécifique (par unité de masse) de l'algorithme
$D_{int}$	dissipation interne par unité de volume initial
$D_W$	dissipation numérique interne par unité de volume initial de l'algorithme
$e_\xi$	erreur sur l'amplitude
$e_\Omega$	erreur sur la période
$e_a$	saut d'accélération adimensionnel
$e_{a,g}$	saut d'accélération adimensionnel gardé en mémoire
$e_{ad}$	erreur adimensionnelle de l'intégration temporelle
$e_{ad,ref}$	erreur adimensionnelle de l'intégration temporelle divisée par la référence
$e_{int}$	erreur d'intégration temporelle
$e_{ref}$	erreur de référence de l'intégration temporelle
$e_t$	erreur de troncature de l'intégration temporelle
$E$	énergie totale
$\tilde{E}$	pseudo énergie totale
$F$	fonctionnelle
$g$	gap du contact
$g_d$	gap dynamique du contact
$G$	module de cisaillement
$h$	coefficient d'écroutissage
$h_e$	coefficient d'écroutissage exponentiel
$J$	Jacobien
$k$	module de compressibilité
$k_N$	pénalité normale
$k_T$	pénalité tangente
$K$	énergie cinétique
$l$	longueur (d'un ressort, d'un élément, ...)
$\bar{m}_{\alpha\beta}$	composante $\alpha, \beta \in [1, 2][1, 2]$ de la métrique des tangentes à la surface, évaluée au point de collement et dans une configuration de référence
$M$	masse consistante au nœud (scalaire et non matrice)
$m$	masse diagonalisée au nœud (scalaire et non matrice)
$N$	nombre de nœuds du système
$no$	numéro d'un segment ou d'un patch d'une surface
$\bar{no}$	numéro du segment ou d'un patch d'une surface, relatif au point de collement
$no_d$	numéro dynamique d'un segment ou d'un patch d'une surface de contact
$p$	pression
$PRCU$	précision d'intégration

$r^*$	nombre de pas de temps explicites utilisés pour l'équilibrage
$r_{ratio}^*$	rapport entre le temps CPU nécessaire au calcul d'un pas implicite et le temps CPU nécessaire au calcul d'un pas explicite
$r_c$	rapport pour calculer la déformation de la surface de contact
$r_{ls}$	résidu de calcul du "line search"
$S$	aire de la surface
$S_{ratio}$	rapport entre le temps CPU nécessaire pour une itération avec réactualisation de la matrice tangente et le temps CPU nécessaire pour une itération sans réactualisation de la matrice tangente
$[\vec{t}_\alpha \cdot \vec{t}_\beta]$	par convention, composante $\alpha, \beta \in [1, 2][1, 2]$ de la métrique des tangentes à la surface
$[\vec{t}_\alpha \cdot \vec{t}_\beta]^{-1}$	par convention, composante $\alpha, \beta \in [1, 2][1, 2]$ de l'inverse de la métrique des tangentes à la surface
$t$	temps
$t_N$	pression de contact (par abus de notation cette grandeur peut représenter la force normale de contact)
$t_{T_\alpha}$	composante $\alpha \in [1, 2]$ de la force surfacique (par abus de notation cette grandeur peut représenter la force) de frottement exprimée dans le repère dual
$t_{T_\alpha}^{pred}$	composante $\alpha \in [1, 2]$ de la force surfacique (par abus de notation cette grandeur peut représenter la force) de frottement de prédiction collante exprimée dans le repère dual
$Tol$	tolérance de l'algorithme de Newton-Raphson
$Tol_{ls}$	tolérance de l'algorithme de "line search"
$u_\alpha$	composante $\alpha \in [1, 2]$ des coordonnées curvilignes $u$ définissant une surface
$u_d$	coordonnées curvilignes dynamiques d'une surface
$\bar{u}_d$	coordonnées curvilignes dynamiques relatives au point de collement
$\tilde{u}$	coordonnées curvilignes dynamiques relatives au gap dynamique tangentiel
$u_\alpha^c$	composante $\alpha \in [1, 2]$ de $u^c$ définissant la projection sur une surface rendue continue
$U$	potentiel (d'un ressort, du contact, ...)
$U_{int}$	énergie interne (égale, à une constante près, au potentiel si ce dernier existe)
$V$	volume
$w_g$	poids du point de Gauss

$W_{cont}$	travail des forces de contact
$W_{ext}$	travail des forces externes (y compris celles de contact)
$W_{int}$	travail des forces internes
$x$	position d'un système à un degré de liberté
$Y$	module de Young

### Liste des vecteurs

$\delta\vec{x}$	déplacement virtuel cinématiquement admissible
$\Delta\vec{F}$	résidu d'une équation d'équilibre
$\Delta\vec{g}_{td}$	incrément du gap dynamique tangentiel
$\Delta\vec{x}$	incrément de position lors d'un système de type Newton-Raphson
$\vec{b}$	forces volumiques
$\vec{D}$	Dérivées des fonctions de formes par rapport aux positions initiales
$\vec{F}_{cont}$	forces de contact
$\left[ \vec{F}_{cont} \right]_N$	forces de contact normales
$\left[ \vec{F}_{cont} \right]_T$	forces de contact tangentielles
$\vec{F}_{cont/diss}$	forces dissipatives de contact
$\vec{F}_{diss}$	forces de dissipation numérique
$\vec{F}_{ext}$	forces externes (y compris celles de contact)
$\vec{F}_{int}$	forces internes
$\vec{F}_{reac}$	forces de réaction
$\vec{g}_{td}$	gap dynamique tangentiel
$\vec{G}_{diss}$	vitesse de dissipation numérique
$\vec{J}$	moment angulaire
$\vec{L}$	moment linéaire (ou quantité de mouvement)
$\vec{n}$	normale à une surface
$\vec{n}^c$	normale à une surface rendue continue
$\vec{N}_i^{\mathbf{A}}$	vecteur propre du tenseur $\mathbf{A}$
$\vec{t}_\alpha$	tangente $\alpha \in [1, 2]$ d'une surface (dérivée par rapport à $u_\alpha$ de la surface)
$\vec{t}_\alpha$	tangente $\alpha \in [1, 2]$ d'une surface, évaluée au point de contact
$\vec{t}_\alpha^c$	tangente $\alpha \in [1, 2]$ d'une surface rendue continue
$\vec{t}_{\alpha,\beta}$	dérivée partielle selon $u_\beta$ , $\beta \in [1, 2]$ , de la tangente $\alpha \in [1, 2]$ d'une surface
$\vec{t}_{\alpha,t}$	dérivée partielle selon $t$ , de la tangente $\alpha \in [1, 2]$ d'une surface

$\vec{t}_{d\alpha}$	tangente duale $\alpha \in [1, 2]$ d'une surface
$\vec{t}_{d\alpha}$	tangente duale $\alpha \in [1, 2]$ d'une surface, évaluée au point de collement
$\vec{T}$	force surfacique de frottement (par abus de notation cette grandeur peut représenter la force de frottement)
$\vec{T}^{pred}$	force surfacique de frottement (par abus de notation cette grandeur peut représenter la force de frottement) du prédicteur collant
$\vec{T}_S$	forces surfaciques
$\vec{v}$	déplacement virtuel admissible
$\vec{v}_T$	vitesse de glissement
$\vec{x}$	positions
$\vec{x}$	positions imposées
$\vec{x}_{exact}$	positions exactes
$\vec{x}_{expl}$	positions pour l'équilibrage obtenues avec un algorithme explicite
$\vec{x}_{impl}$	positions obtenues lors de l'équilibrage implicite des pas explicites
$\vec{x}$	positions servant à la construction de grandeurs de contact
$\vec{y}$	expression d'une surface

## Liste des vecteurs résultants

$\underline{z}$	vecteurs des inconnues (positions et moments linéaires)
-----------------	---

## Liste des tenseurs d'ordre 2

$\alpha$	tenseur d'hérédité (ou back-stress)
$\Delta\Sigma$	incrément de contrainte de Cauchy
$\varepsilon$	déformations de Cauchy (petites déformations)
$\Sigma$	contrainte de Cauchy
$\mathbf{A}$	déformations d'Almansi
$\mathbf{A}^{el}$	déformations élastiques d'Almansi
$\mathbf{A}^{pl}$	déformations plastiques d'Almansi
$\mathbf{A}^s$	matrice spectrale
$\mathbf{C}^*$	tenseur correctif 1
$\mathbf{C}^{**}$	tenseur correctif 2
$\mathbf{D}^*$	tenseur de dissipation numérique 1
$\mathbf{D}^{**}$	tenseur de dissipation numérique 2
$\mathbf{D}_{int}$	dérivée par rapport aux positions de la dissipation interne
$\mathbf{D}_W$	dérivée par rapport aux positions de la dissipation numérique

$\mathbf{E}$	déformations naturelles ou logarithmiques
$\mathbf{f}$	inverse du gradient des déformations
$\mathbf{F}$	gradient des déformations
$\mathbf{G}_{\text{diss}}$	dérivée par rapport aux vitesses des vitesses dissipatives
$\mathbf{GL}$	déformations de Green Lagrange
$\mathbf{GL}^{\text{el}}$	déformations élastiques de Green Lagrange
$\mathbf{GL}^{\text{pl}}$	déformations plastiques de Green Lagrange
$\mathbf{I}$	tenseur identité (ordre 2)
$\mathbf{K}$	matrice de raideur
$\Delta\mathbf{K}_{\text{res}}$	matrice de raideur résiduelle venant de la non-linéarité
$\mathbf{N}$	tenseur normal à la surface de charge
$\mathbf{PK}$	contraintes de Piola Kirchhoff numéro 2
$\mathbf{Q}$	matrice de rotation arbitraire ( $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ et $\det\mathbf{Q} = 1$ )
$\mathbf{R}$	matrice de rotation de la décomposition polaire ( $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ )
$\mathbf{U}$	matrice de déformation de la décomposition polaire ( $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ )
$\mathbf{s}$	contraintes de correction plastique
$\mathbf{s}^e$	contraintes de prédiction élastique
$\mathbf{S}$	matrice tangente ou Jacobienne

### Liste des matrices résultantes

$\underline{\mathbf{F}}$	matrice d'amplification linéarisée
$\underline{\mathbf{J}}$	matrice résultante antisymétrique unitaire

### Liste des tenseurs d'ordre 4

$\mathcal{G}$	tenseur géométrique
$\mathcal{H}$	tenseur de Hooke
$\mathcal{J}$	tenseur de Jaumann
$\bar{\mathcal{M}}$	tenseur matériel

### Liste des ensembles

$\mathbb{D}$	ensemble des déplacements cinétiquement admissibles
$\mathbb{D}^v$	ensemble des déplacements virtuels cinématiquement admissibles, compatibles avec une discrétisation à l'aide de fonctions de forme
$\mathbb{P}$	ensemble de toutes les inconnues (positions et moments linéaires)
$\mathbb{R}$	ensemble des réels
$\mathbb{S}$	ensemble des positions définissant la surface

---

$S_{\vec{r}}$	ensemble des positions définissant la partie de la surface où les forces sont imposées
$S_{\vec{x}}$	ensemble des positions définissant la partie de la surface où les déplacements sont imposés
$T$	ensemble des temps d'intégrations
$V$	ensemble des positions définissant le volume
$X$	ensemble des positions admissibles



# Chapitre 1

## Introduction générale

La nécessité de pouvoir modéliser des phénomènes dynamiques fortement non-linéaires devient de plus en plus importante dans les problèmes industriels, *a fortiori* dans le secteur aéronautique, où, pour des raisons de sécurité évidentes, le constructeur doit garantir la résistance de ses composants en cas d'impact. Ainsi, par exemple, un motoriste doit pouvoir garantir qu'en cas de rupture d'une aube de soufflante, suite à l'ingestion d'un oiseau ou d'un bloc de glace, le carter retient toutes les composantes du moteur. De plus, il doit garantir une poussée résiduelle de la part du moteur pendant un certain temps. Actuellement, le dimensionnement de ces structures se fait encore à partir de plusieurs études expérimentales. Ces expériences, nécessitant la réalisation, et parfois la perte, du moteur, sont extrêmement onéreuses. Il devient dès lors indispensable de simuler tous les accidents possibles par des modèles adéquats (de type éléments-finis par exemple), et une fois la résistance de la structure étudiée, ne plus effectuer qu'un essai final de validation sur le moteur.

Actuellement, un défi numérique est donc de pouvoir simuler la réponse, en situation d'accident, d'une structure non-linéaire complète (comme un moteur d'avion) sous l'effet de forces extérieures (comme une perte d'aube). La modélisation et la simulation par ordinateur de ces phénomènes dynamiques transitoires exigent en général une approche incrémentale pour intégrer sur le temps les équations différentielles relatives au système discrétisé étudié. Cela est d'autant plus vrai dans un cadre non-linéaire, tel que celui de la mécanique des solides en grandes transformations (domaine qui nous concerne), où, de par la complexité des chemins de déformation rencontrés et des lois constitutives représentatives du comportement des matériaux étudiés, une approche incrémentale est toujours nécessaire.

La principale difficulté réside dans le choix d'une technique d'intégration temporelle incrémentale. Deux grandes familles d'algorithmes d'intégration temporelle existent: la famille des algorithmes explicites [15, 70, 63, 123, 74, 20], et la famille des algorithmes implicites [15, 70, 63, 123, 20, 32, 34, 62]. Les algorithmes implicites nécessitent une résolution itérative à chaque pas de temps, contrairement aux algorithmes explicites. Mais pour des raisons de stabilité, les méthodes explicites utilisent de très petits pas de temps. Les méthodes explicites sont dès lors plus adaptées pour résoudre des problèmes de

dynamique rapide gouvernés par de hautes fréquences, comme les problèmes de propagation d'ondes. Cet intérêt se renforce lorsque le nombre de degrés de libertés du modèle est important, le coût des algorithmes implicites devenant alors prohibitif, et les problèmes de convergences fréquents [151]. Par contre, quand le problème est gouverné par de basses fréquences, ces algorithmes implicites permettent de travailler avec des pas de temps plus grands, réduisant ainsi le coût tout en améliorant la précision et la stabilité [151, 50, 145, 133]. Enfin, pour certains problèmes de dynamique rapide impliquant des gammes de fréquences intermédiaires, il apparaît toutefois qu'une résolution implicite peut se révéler moins chère et plus précise qu'une résolution explicite [125, 66, 59]. Dès lors, le choix de l'algorithme d'intégration se révèle délicat pour chaque classe de problèmes. De plus, pour la plupart des situations industrielles, une méthode de résolution combinant les deux familles d'algorithmes s'avère souvent désirable. Dans ce travail, nous nous proposons de contribuer à réaliser cette combinaison.

Préliminairement, nous étudierons la stabilité numérique des algorithmes implicites dans le cadre non-linéaire. L'algorithme implicite le plus répandu est l'algorithme de Newmark [109] (pour les détails, voir entre autres [15, 70, 16]). Pour les systèmes non-linéaires, Belytschko et Schoeberle [19], ainsi que Hughes [68] ont prouvé que l'énergie du système isolé reste bornée dans le cas où elle reste positive. Néanmoins, Hughes *et al.* [67, 71], Simo *et al.* [142] ainsi que Kane *et al.* [81, 82] ont montré que le schéma de Newmark n'est stable, pour des systèmes non-linéaires, que si le pas de temps reste petit. Nous montrerons dans ce travail que cette contradiction apparente réside dans le fait que Belytschko et Schoeberle [19], ainsi que Hughes [68] ont utilisé le travail des forces internes dans leur démonstration. Or ce travail ne correspond pas à la variation d'énergie interne pour l'algorithme de Newmark. Cette différence a été formulée par Hughes [67]. De plus, toujours dans le cas de l'algorithme de Newmark, des oscillations qui proviennent de modes purement numériques rendent la solution peu précise et peuvent même conduire à la divergence pour des systèmes complexes (contact...). Il apparaît donc, que dans le cadre non-linéaire, l'algorithme de Newmark peut présenter un comportement énergétiquement non-consistant. Pour éviter cette divergence dans le domaine non-linéaire, un amortissement numérique peut être introduit. La méthode la plus simple d'introduire cet amortissement numérique dans l'algorithme de Newmark est de modifier les paramètres d'intégration. L'algorithme ne présente alors plus une précision au second ordre par rapport au pas de temps mais une précision au premier ordre seulement. Afin de conserver une précision au second ordre, Hilber, Hughes et Taylor [65] ont proposé de pondérer les forces internes alors que Wood, Bossak et Zienkiewicz [148] ont proposé de pondérer les forces d'inertie. Chung et Hulbert [34] ont généralisé ces méthodes, ce qui a conduit aux méthodes  $\alpha$ -généralisées. Cependant, ces techniques ont le désavantage d'introduire une perte de précision et de ne pas toujours pouvoir éviter la divergence. En effet, les études récentes de Erlicher [46] ont montré que de l'énergie parasite peut être introduite numériquement. Pour résoudre ces problèmes, d'autres algorithmes ont été développés de manière à garder les grandeurs totales constantes tout en restant stables dans le domaine non-linéaire. Le premier algorithme à

---

vérifier la conservation des moments linéaires et angulaires, ainsi que la conservation de l'énergie du système a été décrit par Simo et Tarnow [140, 138]. Cet algorithme (appelé Energy Momentum Conserving Algorithms ou EMCA) utilise un schéma du point milieu combiné avec une expression adéquate des forces internes. Cette expression adéquate des forces internes dépend de la non-linéarité étudiée. Lorsque le nombre de degrés de liberté du modèle augmente, des modes numériques de hautes fréquences apparaissent. Afin d'éviter l'excitation de ces modes, ce qui provoque des oscillations non-physiques et des problèmes de convergence lors des itérations, de la dissipation numérique a été introduite par Armero et Romero [5, 130, 6, 7]. Cet algorithme (appelé Energy Dissipative Momentum Conserving algorithm ou EDMC) préserve la conservation des moments linéaires et angulaires, et dissipe toujours de l'énergie, contrairement aux méthodes  $\alpha$ -généralisées qui ne conservent que le moment linéaire et ne dissipent pas toujours de l'énergie (possibilité d'apporter une dissipation "négative"). Dans le cadre de l'étude d'un moteur d'avion en rotation, cet algorithme présente l'avantage significatif de conserver le moment angulaire. Cependant, ces algorithmes énergétiquement consistants ont été établis dans le cas de matériaux hyperélastiques (pour lesquels les contraintes dérivent d'un potentiel) et principalement dans le domaine élastique. Le présent travail a pour but d'étendre pour les matériaux hypoélastiques, ainsi que dans le domaine plastique, les schémas EMCA et EDMC. Pour les modèles hypoélastiques, les contraintes sont obtenues de manière incrémentale, ce qui permet de simuler des lois de comportement complexes (endommagement,...) plus aisément. La difficulté pour ces modèles est d'exprimer la conservation de l'énergie. En effet, comme aucun potentiel interne ne peut être défini, l'énergie interne ne peut être directement reliée à une telle grandeur mathématique simple. Dès lors, pour remédier à cela, nous proposons de définir un cycle de chargement-déchargement sur lequel nous vérifions le postulat de Drucker pour la plasticité. Nous sommes alors en mesure de définir une nouvelle expression des forces internes pour un modèle hypoélastique. Ces développements feront l'objet d'un chapitre séparé.

L'ouvrage de thèse se présente dès lors comme suit. Dans le chapitre 2 nous allons exposer le cadre des études. Après avoir introduit les différentes notations et le problème sous forme variationnelle, nous pourrons, grâce à une discrétisation de type éléments-finis établir la forme discrétisée des équations de conservation. Nous motiverons alors nos développements relatifs à l'établissement d'un algorithme implicite stable dans le domaine non-linéaire. Pour ce faire, nous étudierons théoriquement, ainsi qu'à l'aide d'une application numérique, l'algorithme d'intégration temporel le plus répandu : l'algorithme de Newmark. Nous montrerons ensuite que les démonstrations de Belytschko et Schoeberle [19], ainsi que Hughes [68] qui garantissent que l'énergie du système est bornée dans le cadre non-linéaire font intervenir le travail des forces internes et non la variation d'énergie interne. Grâce au travail de Hughes [67], nous montrerons que cette différence peut introduire de l'énergie dans le système, ce qui rend l'algorithme de Newmark instable. Nous verrons alors que l'introduction de dissipation numérique, qui est la solution habituellement utilisée pour dissiper les instabilités

numériques, ne permet pas de résoudre tous les problèmes. Dès lors, la nécessité de nouveaux développements théoriques apparaîtra clairement afin de pouvoir intégrer des systèmes fortement non-linéaires. Notre apport personnel dans ce chapitre se limite à une synthèse des différents travaux de la littérature relatifs à l'étude des algorithmes traditionnels.

Le chapitre 3 constituera une étude des solutions possibles pour garantir la stabilité de l'intégration temporelle dans le domaine non-linéaire. Nous mentionnerons d'abord les travaux qui se sont intéressés à l'intégration énergétiquement consistante de systèmes non-linéaires. Nous détaillerons alors le premier algorithme apte à vérifier la conservation des moments linéaires et angulaires, ainsi que la conservation de l'énergie du système, dans le cadre non-linéaire. Cet algorithme a été décrit par Simo et Tarnow [140, 138]. La formulation des forces pour un tel algorithme dépendant de la non-linéarité, nous nous contenterons d'étudier les systèmes simples masse-ressort dans ce chapitre. Afin d'éviter la perte de convergence suite à la présence de hautes fréquences, de la dissipation numérique peut être introduite de manière énergétiquement consistante. Nous exposerons la méthode proposée par Armero et Romero [5, 130, 6, 7, 131]. Nous concluons alors sur l'utilisation des algorithmes implicites en dynamique non-linéaire. A nouveau, notre apport personnel dans ce chapitre consiste en une synthèse bibliographique et en une illustration par un exemple numérique des travaux de la littérature relatifs à l'étude des algorithmes dans le cadre non-linéaire.

Etant donné que la formulation des forces pour l'utilisation des algorithmes énergétiquement consistants dépend de la non-linéarité, nous présenterons dans le chapitre 4 nos développements originaux pour obtenir une formulation énergétiquement consistante d'un modèle élasto-plastique à base hypoélastique. Généralement, afin de s'assurer que le travail des forces internes correspond à la variation d'énergie interne, la formulation énergétiquement consistante des forces internes utilise le potentiel interne du modèle étudié. C'est pour cette raison que les premières modélisations de solides à avoir été étudiées sont les modèles hyperélastiques [140, 93, 52, 53, 101, 102]. En effet, pour ce type de modèle, les contraintes dérivent d'un potentiel qui permet d'évaluer les forces internes. Cependant, les matériaux hypoélastiques permettent de simuler des lois de comportement complexes (endommagement,...) plus aisément. Nous présenterons donc une nouvelle formulation des forces internes pour un tel modèle. Comme aucun potentiel interne ne peut être évalué, nous proposerons de vérifier la consistance énergétique de cette formulation sur un cycle de chargement élasto-plastique, déchargement élastique. Nous vérifierons que sur un tel cycle, l'énergie réversible du chargement correspond à celle du déchargement, et que l'énergie irréversible du chargement correspond à la dissipation interne du matériau. Nous illustrerons ensuite les bonnes performances de cette formulation par rapport à celles de Newmark sur des exemples numériques. Ensuite nous introduirons de la dissipation numérique de manière énergétiquement consistante. Nous comparerons sur des exemples numériques cette méthode énergétiquement consistante avec la méthode  $\alpha$ -généralisée. Dans ce chapitre, l'extension d'un algorithme énergétiquement consistant, sans dissipation numérique pour un modèle élasto-plastique

---

hypoélastique est entièrement original et constitue un apport personnel original à l'étude de la dynamique non-linéaire. De plus, la combinaison d'un algorithme d'intégration énergétiquement consistant pour un matériau élasto-plastique, avec de la dissipation numérique est tout à fait novatrice.

Une autre non-linéarité qui déstabilise l'algorithme de Newmark est la simulation d'interactions de contact. Dans le chapitre 5, nous détaillerons la méthode développée par Armero et Petöcz [3, 4] pour simuler cette interaction en vérifiant les lois de conservation. Nous exposerons ensuite comment nous avons adapté cette méthode à la gestion de contact avec discontinuité de normale. Enfin, des exemples numériques prouveront l'efficacité de la formulation énergétiquement consistante des forces internes et des forces de contact par rapport aux schémas d'intégration classiques. La principale originalité que nous apportons dans ce chapitre est l'adaptation d'un formalisme d'évaluation énergétiquement consistante des forces de contact à un formalisme de gestion des discontinuités de normale, et ce, dans le cadre tridimensionnel tout à fait général.

Dans le chapitre 6 nous proposerons une manière de combiner l'algorithme implicite développé avec un algorithme explicite. Pour ce faire, après avoir brièvement exposé les méthodes explicites, nous présenterons une méthode originale pour équilibrer plusieurs pas explicites ou, en d'autres termes, d'amortir les oscillations. Cette méthode va nous permettre de stabiliser les derniers pas explicites pour continuer un calcul avec une méthode implicite. Nous montrerons, par l'intermédiaires d'exemples numériques, que le passage d'un algorithme à un autre n'affecte pas la précision des simulations. Dans ce chapitre, nous proposons pour la première fois dans la littérature, une méthode pour passer d'une méthode explicite à une méthode implicite, dans le cadre de la dynamique non-linéaire, tout en continuant à vérifier les lois de conservation.

Avant de pouvoir simuler des problèmes plus complexes que ceux qui auront été présentés dans les chapitres précédents, il est impératif de pouvoir gérer de manière automatique les paramètres d'intégration. Cette gestion automatique est l'objet du chapitre 7. Ainsi, les gestions de la taille du pas de temps, de la réactualisation de la matrice Hessienne, ainsi que de la détermination des instants de passage d'un algorithme à un autre, seront basées sur la mesure de l'erreur d'intégration de l'algorithme et sur des rapports de temps d'exécution nécessaires aux simulations implicites et explicites. Ces développements seront alors mis en œuvre sur des exemples numériques. Nous montrerons ainsi que lors de l'étude de problèmes de dynamique rapide par une méthode explicite ou implicite, la gestion de la taille du pas de temps en fonction de l'erreur d'intégration permet d'éviter la divergence de la simulation dans le cadre non-linéaire. Nous montrerons également, qu'en combinant les algorithmes implicites et explicites, nous avons diminué le temps de calcul tout en conservant la précision de la solution. L'originalité de notre démarche dans cette section réside dans le développement de critères automatiques pour passer d'une méthode d'intégration à une autre.

Le chapitre 8 illustrera les performances des développements proposés à travers des exemples numériques. Dans un premier temps, nous montrerons que la simulation du rebond d'une boule par l'algorithme implicite énergétiquement consistant EDMC donne

une excellente correspondance avec les résultats analytiques et expérimentaux, tant qualitativement que quantitativement. L'étude du flambement d'un longeron à section carrée sera ensuite envisagée. Nous prouverons que l'algorithme implicite EDMC permet de simuler, avec une précision de 10% par rapport à l'expérimentation, les modes de flambement pour différentes vitesses d'impact. La combinaison avec un algorithme explicite permet de conserver cette précision, tout en réduisant le temps de calcul. Ensuite nous montrerons que l'emboutissage d'une tôle peut aussi être simulé avec les méthodes développées. Nous montrerons alors la limite de l'algorithme EDMC qui ne permet pas de présenter une dissipation numérique suffisante pour simuler des phénomènes de dynamique lente avec un grand pas de temps. Enfin nous montrerons que l'algorithme implicite développé permet de simuler un problème de dynamique complexe tel que la perte d'aube dans un moteur d'avion. Nous montrerons également que cette simulation implicite est plus rapide qu'une simulation explicite et, que si nous combinons les deux méthodes, nous réduisons encore le temps de calcul. Dans ce chapitre, nous apportons la preuve que l'algorithme énergétiquement consistant, grâce aux développements personnels apportés, permet de simuler des problèmes complexes, tant du point de vue de la dynamique que du nombre d'éléments, ce qui n'avait été présenté dans la littérature. Nous montrons également que sur de tels problème le temps de simulation peut être fortement réduit en combinant cet algorithme avec un algorithme explicite.

## Chapitre 2

# Introduction à l'intégration temporelle d'un modèle discrétisé par éléments-finis

Dans ce chapitre nous allons motiver nos développements relatifs à l'établissement d'un algorithme d'intégration temporelle thermodynamiquement consistant dans le cadre de la dynamique non-linéaire. A partir du principe des travaux virtuels, nous allons établir l'équation d'équilibre dans le cadre des milieux continus puis dans le cadre d'une discrétisation éléments-finis. Enfin, nous exposerons la méthode de Newmark dans le cadre d'une intégration temporelle de l'équation d'équilibre. Nous montrerons alors quelles sont les limitations de ce type de schéma dans le cadre non-linéaire. Ensuite, nous étudierons la solution qui consiste à introduire de la dissipation numérique afin d'amortir les instabilités numériques de hautes fréquences. Cette méthode ne résolvant pas tous les problèmes, nous conclurons sur la nécessité d'introduire de nouvelles théories relatives à l'intégration temporelle dans le cadre non-linéaire.

## 2.1 Etablissement de l'équation d'équilibre

Dans un premier temps les notations utilisées dans nos développements sont exposées. Grâce à l'utilisation d'un principe quasi-variationnel, nous établirons l'équation d'équilibre des milieux continus et montrerons que sa satisfaction entraîne la vérification des lois de conservation des milieux continus. Ensuite, en utilisant des fonctions de forme, nous en déduisons l'expression pour une discrétisation éléments-finis. Finalement, nous établirons l'expression des forces dans le cas particulier d'une barre, afin de pouvoir étudier les propriétés des algorithmes grâce à un exemple simple.

### 2.1.1 Notations

Soit  $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^3$  l'ensemble des points définissant le volume étudié. Le volume  $V$  est défini par

$$V \equiv \int_{\mathbb{V}} d\mathbb{V} \quad (2.1)$$

De la même manière, si  $\mathbb{S}$  est l'ensemble des points définissant la limite du volume, la surface  $S$  est donnée par

$$S \equiv \int_{\mathbb{S}} d\mathbb{S} \quad (2.2)$$

Nos développements conduisant à des déplacements de taille indéfinie, nous devons définir au moins deux configurations : la configuration initiale (qui nous sert de référence) et la configuration courante au temps  $t$ . Choisissons de distinguer les valeurs dans la configuration courante des valeurs dans la configuration initiale en associant à ces dernières un indice 0. La masse volumique initiale est notée  $\rho_0 : \mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ . A chaque point de  $\mathbb{V}$  sont associées les positions initiales  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ . La surface est décomposée en une partie  $\mathbb{S}_{\vec{x}}$  où les déplacements sont imposés et en une partie  $\mathbb{S}_{\vec{T}}$  où les forces sont imposées. Nous avons donc toujours  $\mathbb{S}_{\vec{x}} \cup \mathbb{S}_{\vec{T}} = \mathbb{S}$  et  $\mathbb{S}_{\vec{x}} \cap \mathbb{S}_{\vec{T}} = \emptyset$ . Remarquons que le cas où deux corps interagissent est traité de la même manière à la section 5.1.1. Soient  $\vec{x}$  les positions courantes. Le tenseur global des déformations est défini par

$$\mathbf{F} \equiv \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_0} \quad (2.3)$$

Son inverse est noté  $\mathbf{f}$  et son déterminant  $J = \det \mathbf{F}$ . L'ensemble  $\mathbb{X}$  des positions courantes admissibles est alors défini par

$$\mathbb{X} \equiv \{ \vec{x} : \mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid [J > 0 \text{ and } \vec{x}|_{\mathbb{S}_{\vec{x}}} = \vec{\bar{x}}] \forall \vec{x}_0 \in \mathbb{V}_0 \} \quad (2.4)$$

où  $\vec{\bar{x}}$  sont les positions imposées et  $\mathbb{V}_0$  le volume de référence. Remarquons que la conservation de la masse induit

$$\begin{aligned} \rho d\mathbb{V} &= \rho_0 d\mathbb{V}_0 \\ \rho J &= \rho_0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Soit  $t$  le temps et  $\mathbb{T} = [0, t_f]$  l'intervalle d'intégration. Dès lors le mouvement du corps est défini par  $t \in \mathbb{T} \rightarrow \vec{x}(t) \in \mathbb{X}$ . Pendant ce mouvement, le corps est soumis aux charges volumiques  $\vec{b}(t) : \mathbb{V}_0 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Si  $\Sigma$  est le tenseur des contraintes de Cauchy, les charges surfaciques  $\vec{T}_S(t) : \mathbb{S}_{\vec{T}_0} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^3$  doivent vérifier  $\vec{T}_S(t) = \Sigma(t) \vec{n}(t)$  avec  $\vec{n}$  la normale unitaire extérieure à  $\mathbb{S}$ .

La décomposition en éléments-finis isoparamétriques du corps est obtenue en utilisant des fonctions de forme  $\varphi^\xi : \mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $\xi \in [1, N]$  ( $N$  étant le nombre de nœuds total de la discrétisation en éléments-finis), avec  $\varphi^\xi(\vec{x}_0^\mu) = \delta_\xi^\mu$  (où  $\delta$  est le symbole de Kronecker). Il vient alors, pour  $\xi \in [1, N]$

$$\begin{aligned} \vec{x}(\vec{x}_0) &= \varphi^\xi(\vec{x}_0) \vec{x}^\xi \\ \dot{\vec{x}}(\vec{x}_0) &= \varphi^\xi(\vec{x}_0) \dot{\vec{x}}^\xi \\ \ddot{\vec{x}}(\vec{x}_0) &= \varphi^\xi(\vec{x}_0) \ddot{\vec{x}}^\xi \end{aligned} \quad (2.6)$$

où les notations d'Einstein ont été utilisées.

Soit  $\vec{v}$  un déplacement cinématiquement admissible appartenant à l'ensemble

$$\mathbb{D} \equiv \{ \vec{v} : \mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid [\vec{v}]_{\mathbb{S}_{\vec{x}}} = 0 \text{ et } \vec{v}(\vec{x}_0, 0) = 0, \vec{v}(\vec{x}_0, t_f) = 0 \forall \vec{x}_0 \in \mathbb{V}_0 \} \quad (2.7)$$

Néanmoins, afin d'obtenir une discrétisation éléments-finis, outre le fait que nous devons utiliser des déplacement virtuels cinématiquement admissibles, ils doivent en plus pouvoir s'écrire sous une forme similaire à la relation (2.6). Dès lors, nous restreignons les déplacements cinématiquement admissibles (ces déplacements restreints étant dénotés par  $\delta\vec{x}$ ) à l'ensemble

$$\mathbb{D}^v \equiv \{ \delta\vec{x} \in \mathbb{D} : \mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid [\delta\vec{x}(\vec{x}_0) = \varphi^\xi(\vec{x}_0) \delta\vec{x}^\xi, \delta\vec{x}^\xi \in \mathbb{R}^3] \} \quad (2.8)$$

### 2.1.2 Le milieu continu

En utilisant les relations de la section 2.1.1, le principe quasi-variationnel (principe du travail des forces virtuelles) s'écrit ([2], page 412)

$$\int_0^{t_f} \left\{ \int_{\mathbb{V}} \left[ \rho \dot{\vec{x}} \cdot \delta\dot{\vec{x}} - \Sigma^T : \frac{\partial \delta\vec{x}}{\partial \vec{x}} + \rho \vec{b} \cdot \delta\vec{x} \right] d\mathbb{V} + \int_{\mathbb{S}_{\vec{T}}} \left[ \vec{T}_S \cdot \delta\vec{x} \right] d\mathbb{S} \right\} dt = 0 \quad \forall \delta\vec{x} \in \mathbb{D}^v \quad (2.9)$$

Nous avons utilisé le principe quasi-variationnel afin de nous affranchir de l'obligation d'avoir des forces dérivant d'un potentiel, ce qui est le cas pour l'écriture du principe variationnel. En intégrant par partie, il vient

$$\int_0^{t_f} \left\{ \int_{\mathbb{V}} \left[ \rho \ddot{\vec{x}} \cdot \delta\vec{x} + \Sigma^T : \frac{\partial \delta\vec{x}}{\partial \vec{x}} - \rho \vec{b} \cdot \delta\vec{x} \right] d\mathbb{V} - \int_{\mathbb{S}_{\vec{T}}} \left[ \vec{T}_S \cdot \delta\vec{x} \right] d\mathbb{S} \right\} dt = 0 \quad \forall \delta\vec{x} \in \mathbb{D}^v \quad (2.10)$$

Puisque l'intervalle temporel de cette équation est arbitraire, nous déduisons que

$$\delta K + \delta W_{int} = \delta W_{ext} \quad \forall t \in \mathbb{T} \quad (2.11)$$

avec  $\delta W_{int}$ ,  $\delta W_{ext}$  et  $\delta K$  respectivement la variation virtuelle du travail des forces internes, la variation virtuelle du travail des forces externes et la variation virtuelle des forces d'inerties définis par

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_{\mathbb{V}} \left\{ \rho \ddot{\vec{x}} \cdot \delta \vec{x} \right\} d\mathbb{V} \\ \delta W_{ext} &= \int_{\mathbb{V}} \left\{ \rho \vec{b} \cdot \delta \vec{x} \right\} d\mathbb{V} + \int_{\mathbb{S}_{\vec{r}}} \left\{ \vec{T}_S \cdot \delta \vec{x} \right\} d\mathbb{S} \\ \delta W_{int} &= \int_{\mathbb{V}} \left\{ \Sigma^T : \frac{\partial \delta \vec{x}}{\partial \vec{x}} \right\} d\mathbb{V} \end{aligned} \quad (2.12)$$

En outre, en supposant des conditions limites de type Neumann (*i.e.*  $\mathbb{S}_{\vec{x}} = \emptyset$ ), l'équation (2.11) permet de retrouver les lois de conservation comme nous allons le montrer. Toutes ces lois de conservation peuvent également être obtenues dans le cas de l'interaction entre deux, ou plusieurs, corps (*c.f.* section 5.1.1).

### Conservation du moment linéaire

La conservation du moment linéaire, qui est aussi appelé la quantité de mouvement, s'établit en prenant

$$\delta \vec{x} \in \mathbb{D}^v = \text{constante} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{V} \quad (2.13)$$

La relation (2.11) devient alors en utilisant (2.12) et se rappelant que  $\delta \vec{x}$  est arbitraire

$$\int_{\mathbb{V}} \left\{ \rho \ddot{\vec{x}} \right\} d\mathbb{V} = \int_{\mathbb{V}} \left\{ \rho \vec{b} \right\} d\mathbb{V} + \int_{\mathbb{S}_{\vec{r}}} \left\{ \vec{T}_S \right\} d\mathbb{S} \quad \forall t \in \mathbb{T} \quad (2.14)$$

En utilisant la conservation de la masse (2.5), le moment linéaire  $\vec{L}$  se définit par

$$\vec{L} \equiv \int_{\mathbb{V}} \left\{ \rho \dot{\vec{x}} \right\} d\mathbb{V} = \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ \rho_0 \dot{\vec{x}} \right\} d\mathbb{V}_0 \quad (2.15)$$

et la conservation du moment linéaire s'écrit

$$\dot{\vec{L}} = \int_{\mathbb{V}} \left\{ \rho \vec{b} \right\} d\mathbb{V} + \int_{\mathbb{S}_{\vec{r}}} \left\{ \vec{T}_S \right\} d\mathbb{S} \quad \forall t \in \mathbb{T} \quad (2.16)$$

### Conservation du moment angulaire

La conservation du moment angulaire s'établit en prenant

$$\begin{aligned}\delta\vec{x} \in \mathbb{D}^v &= \vec{\eta} \wedge \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{V} \\ \vec{\eta} &= \text{constante} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{V}\end{aligned}\quad (2.17)$$

Soit  $\epsilon$  le tenseur des permutations du troisième ordre tel que pour deux vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ , il vient  $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \epsilon : [\vec{a} \otimes \vec{b}]$ , avec l'opération  $[\vec{a} \otimes \vec{b}]_{ij} = \vec{a}_i \vec{b}_j$  et l'opération  $[\epsilon : [\vec{a} \otimes \vec{b}]]_i = \epsilon_{ijk} : [\vec{a} \otimes \vec{b}]_{jk}$ . La relation (2.11) devient alors, en utilisant (2.12)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{V}} \left\{ \left[ \rho \vec{x} \wedge \ddot{\vec{x}} \right] \cdot \vec{\eta} - \vec{\eta} \cdot \epsilon : \Sigma^T \right\} d\mathbb{V} &= \int_{\mathbb{V}} \left\{ \rho \vec{x} \wedge \vec{b} \cdot \vec{\eta} \right\} d\mathbb{V} + \\ &\int_{\mathbb{S}_{\vec{r}}} \left\{ \vec{x} \wedge \vec{T}_S \cdot \vec{\eta} \right\} d\mathbb{S} \quad \forall t \in \mathbb{T}\end{aligned}\quad (2.18)$$

Etant donné que  $\epsilon$  est antisymétrique alors que  $\Sigma^T$  est symétrique (sous l'hypothèse que  $\Sigma$  l'est), et comme  $\vec{\eta}$  est arbitraire, il vient

$$\int_{\mathbb{V}} \left\{ \rho \vec{x} \wedge \ddot{\vec{x}} \right\} d\mathbb{V} = \int_{\mathbb{V}} \left\{ \rho \vec{x} \wedge \vec{b} \right\} d\mathbb{V} + \int_{\mathbb{S}_{\vec{r}}} \left\{ \vec{x} \wedge \vec{T}_S \right\} d\mathbb{S} \quad \forall t \in \mathbb{T}\quad (2.19)$$

En utilisant la conservation de la masse (2.5), le moment angulaire  $\vec{J}$  se définit par

$$\vec{J} \equiv \int_{\mathbb{V}} \left\{ \rho \vec{x} \wedge \dot{\vec{x}} \right\} d\mathbb{V} = \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ \rho_0 \vec{x} \wedge \dot{\vec{x}} \right\} d\mathbb{V}_0\quad (2.20)$$

et la conservation du moment angulaire s'écrit

$$\dot{\vec{J}} = \int_{\mathbb{V}} \left\{ \rho \vec{x} \wedge \vec{b} \right\} d\mathbb{V} + \int_{\mathbb{S}_{\vec{r}}} \left\{ \vec{x} \wedge \vec{T}_S \right\} d\mathbb{S} \quad \forall t \in \mathbb{T}\quad (2.21)$$

### Conservation de l'énergie

La conservation de l'énergie s'établit en prenant

$$\delta\vec{x} \in \mathbb{D}^v = \dot{\vec{x}} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{V}\quad (2.22)$$

En utilisant (2.12), la relation (2.11) devient, en notant que pour sortir la dérivation temporelle (qui est une dérivée totale et non partielle) du gradient, il faut remplacer le gradient des vitesses par rapport aux positions courantes (dépendantes du temps) par un gradient par rapport aux positions initiales (non dépendantes du temps)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{V}} \left\{ \rho \ddot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} + \Sigma^T : \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \vec{x}} \right\} d\mathbb{V} &= \int_{\mathbb{V}} \left\{ \rho \vec{b} \cdot \dot{\vec{x}} \right\} d\mathbb{V} + \int_{\mathbb{S}_{\vec{T}}} \left\{ \vec{T}_S \cdot \dot{\vec{x}} \right\} d\mathbb{S} \\
\int_{\mathbb{V}} \left\{ \frac{1}{2} \rho \frac{d}{dt} [\dot{\vec{x}}^2] + \underbrace{\Sigma^T : \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_0} \right]}_{\dot{\mathbf{F}}} \underbrace{\frac{\partial \vec{x}_0}{\partial \vec{x}}}_{\mathbf{f}} \right\} d\mathbb{V} &= \int_{\mathbb{V}} \left\{ \rho \vec{b} \cdot \dot{\vec{x}} \right\} d\mathbb{V} + \\
&\int_{\mathbb{S}_{\vec{T}}} \left\{ \vec{T}_S \cdot \dot{\vec{x}} \right\} d\mathbb{S} \quad \forall t \in \mathbb{T} \quad (2.23)
\end{aligned}$$

En utilisant la conservation de la masse (2.5), nous définissons  $K$  l'énergie cinétique,  $W_{int}$  le travail des forces internes et  $W_{ext}$  le travail des forces externes, tels que

$$\begin{aligned}
K &\equiv \int_{\mathbb{V}} \left\{ \frac{1}{2} \rho \dot{\vec{x}}^2 \right\} d\mathbb{V} = \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\vec{x}}^2 \right\} d\mathbb{V}_0 \\
\dot{W}_{int} &\equiv \int_{\mathbb{V}} \left\{ \Sigma^T : [\dot{\mathbf{F}}\mathbf{f}] \right\} d\mathbb{V} \\
\dot{W}_{ext} &\equiv \int_{\mathbb{V}} \left\{ \rho \vec{b} \cdot \dot{\vec{x}} \right\} d\mathbb{V} + \int_{\mathbb{S}_{\vec{T}}} \left\{ \vec{T}_S \cdot \dot{\vec{x}} \right\} d\mathbb{S}
\end{aligned} \quad (2.24)$$

Décomposons la puissance fournie par les forces internes en une partie réversible dérivant d'une énergie interne  $U_{int}$  et en une partie irréversible  $\dot{\Delta}_{int} \geq 0$  (dissipation plastique, ...)

$$\dot{W}_{int} \equiv \dot{U}_{int} + \dot{\Delta}_{int} \quad (2.25)$$

et définissons l'énergie du système  $E$  par

$$E \equiv K + U_{int} \quad (2.26)$$

Dès lors la relation (2.23) se réécrit

$$\dot{E} = \dot{W}_{ext} - \dot{\Delta}_{int} \quad \forall t \in \mathbb{T} \quad (2.27)$$

qui correspond au premier principe de la thermodynamique. Remarquons, que dans le cas particulier où les contraintes dérivent d'un potentiel scalaire  $\phi$ , l'expression de  $U_{int}$  correspond à l'intégration volumique de ce potentiel. En effet, définissons le second

tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{PK}$  par

$$\mathbf{PK} \equiv \frac{\rho_0}{\rho} \mathbf{f} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{f}^T \quad (2.28)$$

et supposons que ce tenseur dérive d'un potentiel  $\phi$  selon

$$\mathbf{PK} = \rho_0 \frac{\partial \phi(\frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{F})}{\partial (\frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{F})} = \rho_0 \frac{\partial \phi(\mathbf{GL})}{\partial \mathbf{GL}} \quad (2.29)$$

avec  $\mathbf{GL} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}]$  le tenseur des déformations de Green-Lagrange et  $\mathbf{I}$  le tenseur identité. Dès lors, la quantité  $\dot{W}_{int}$  de la relation (2.24) devient ( $\mathbf{PK}$  étant symétrique)

$$\frac{\partial W_{int}}{\partial t} = \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ \mathbf{PK} : [\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}] \right\} d\mathbb{V}_0 = \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} d\mathbb{V}_0 \quad (2.30)$$

Finalement, s'il n'y a pas de dissipation interne ( $\dot{\Delta}_{int} = 0$ ), nous obtenons

$$U_{int} = \int_{\mathbb{V}_0} \{ \rho_0 \phi \} d\mathbb{V}_0 \quad (2.31)$$

### Evaluation du tenseur des contraintes

Pour caractériser complètement le modèle, il reste à relier les contraintes aux déformations. C'est le rôle des modèles constitutifs. A ce niveau, nous pouvons différencier les modèles hypoélastiques et hyperélastiques. Par souci de simplicité, supposons que nous sommes dans le cadre des petites transformations et que nous modélisons une loi de comportement élastique. Le tenseur des déformation est alors le tenseur de Cauchy ( $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \vec{x}_j} + \frac{\partial \vec{u}_j}{\partial \vec{x}_i} \right)$ , où  $\vec{u}$  est le vecteur des petits déplacements). Dans ce cas, tous les tenseurs des déformations sont équivalents ( $\mathbf{GL} \simeq \boldsymbol{\varepsilon}$ ), et il en va de même pour les tenseurs des contraintes ( $\mathbf{PK} \simeq \boldsymbol{\Sigma}$ ). Un modèle hypoélastique va évaluer les contraintes  $\boldsymbol{\Sigma}$  en intégrant la vitesse des déformations. En considérant  $\mathcal{H}$  l'opérateur tangent (de Hooke), les contraintes sont obtenues par

$$\boldsymbol{\Sigma} = \int_0^t \{ \mathcal{H} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \} dt \quad (2.32)$$

Alternativement, un modèle hyperélastique postule l'existence d'un potentiel spécifique  $\phi(\boldsymbol{\varepsilon})$ . La relation (2.29) fournit alors directement les contraintes par

$$\boldsymbol{\Sigma} = \rho_0 \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.33)$$

Pour les petites transformations, si l'opérateur tangent est constant, ces deux formulations sont identiques en choisissant le potentiel spécifique

$$\phi = \frac{1}{2\rho_0} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathcal{H} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.34)$$

Par contre, dans le domaine non-linéaire (grandes déformations, grandes transformations, plasticité, ...) ces deux modélisations ne fournissent pas les mêmes contraintes. Si une modélisation hyperélastique permet de traiter les équations énergétiques de manière plus aisée de par l'existence du potentiel interne, une modélisation hypoélastique permet de modéliser plus facilement des lois d'érouissage de par sa nature incrémentale. Nous reviendrons sur ces comportements à la section 4.

Nous pouvons maintenant introduire une discrétisation de type éléments-finis.

### 2.1.3 Discrétisation éléments-finis

En utilisant la discrétisation (2.6) et la conservation de la masse (2.5), le travail virtuel des forces d'inertie au temps  $t$ , défini dans la relation (2.12), peut se réécrire comme étant

$$\delta K = \int_{\mathbb{V}_0} \{ \rho_0 \varphi^\xi \varphi^\mu \} d\mathbb{V}_0 \left[ \ddot{\vec{x}} \right]^\mu \cdot \delta \vec{x}^\xi = M^{\xi\mu} \left[ \ddot{\vec{x}} \right]^\mu \cdot \delta \vec{x}^\xi \quad (2.35)$$

où  $M^{\xi\mu}$  est la composante de la matrice des masses relative aux nœuds  $\xi$  et  $\mu$ . Le travail virtuel des forces externes, défini dans la relation (2.12), est exprimé par

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} &= \int_{\mathbb{V}_0} \{ \rho_0 \vec{b} \varphi^\xi \} d\mathbb{V}_0 \cdot \delta \vec{x}^\xi + \int_{\mathbb{S}_{\vec{T}}} \{ \vec{T}_S \varphi^\xi \} d\mathbb{S} \cdot \delta \vec{x}^\xi \\ &= \left[ \vec{F}_{ext} \right]^\xi \cdot \delta \vec{x}^\xi \end{aligned} \quad (2.36)$$

Finalement, grâce à (2.5), la variation des forces internes, définie dans la relation (2.12), se réécrit

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ \Sigma^T \left[ \frac{\partial \varphi^\xi}{\partial \vec{x}} \right]^T J \right\} d\mathbb{V}_0 \cdot \delta \vec{x}^\xi \\ &= \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ \Sigma^T \left[ \frac{\partial \varphi^\xi}{\partial \vec{x}_0} \frac{\partial \vec{x}_0}{\partial \vec{x}} \right]^T J \right\} d\mathbb{V}_0 \cdot \delta \vec{x}^\xi \\ &= \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ \Sigma^T \mathbf{f}^T \vec{D}^\xi J \right\} d\mathbb{V}_0 \cdot \delta \vec{x}^\xi \end{aligned} \quad (2.37)$$

où  $\vec{D}^\xi$  est la dérivée des fonctions de forme (dans la configuration de référence, *i.e.*  $\vec{D}^\xi = \frac{\partial \varphi^\xi}{\partial \vec{x}_0}$ ). En utilisant les relations (2.35) à (2.37) et le fait que  $\delta \vec{x} \in \mathbb{D}^v$  est arbitraire, l'équation de conservation de la quantité de mouvement semi-discrétisée (que nous appellerons aussi abusivement l'équation d'équilibre) s'écrit au nœud  $\xi$

$$M^{\xi\mu} \left[ \ddot{\vec{x}} \right]^\mu = \left[ \vec{F}_{ext} - \vec{F}_{int} \right]^\xi \quad \forall t \in \mathbb{T} \quad (2.38)$$

avec l'expression des forces internes obtenue par

$$\left[ \vec{F}_{int} \right]^\xi = \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ \Sigma^T \mathbf{f}^T \vec{D}^\xi J \right\} d\mathbb{V}_0 \quad \forall t \in \mathbb{T} \quad (2.39)$$

Pour obtenir une solution exacte au problème semi-discrétisé (à ne pas confondre avec la solution exacte du problème), la relation (2.38) doit être vérifiée pour chaque temps  $t$  de l'intervalle  $\mathbb{T}$ . Pour intégrer cette équation dans le temps, l'ensemble  $\mathbb{T}$  est décomposé en partitions  $[t^n, t^{n+1}]$  (telles que  $\mathbb{T} = \bigcup_{n=0}^{n=n^f} [t^n, t^{n+1}]$ ) avec  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  définissant le pas de temps. Dès lors, l'exposant  $n$  et l'exposant  $n + 1$  font référence respectivement aux configurations aux temps  $t^n$  et  $t^{n+1}$ . Idéalement, l'intégration temporelle devrait vérifier les lois de conservation des milieux continus (conservation du moment linéaire (2.16), du moment angulaire (2.21) et de l'énergie (2.27)). En pratique, comme nous allons le montrer à la section (2.2), les schémas classiques ne conservent pas ces grandeurs. Mais avant cela, nous allons établir les expressions des forces internes et de la masse pour le cas particulier d'une barre. Nous en déduirons alors les expressions pour un système masse-ressort afin de pouvoir illustrer les équations par un exemple numérique simple.

## 2.2 Intégration temporelle par l'algorithme de Newmark

Dans cette section, les grandes lignes de l'algorithme introduit par Newmark [109], sont exposées. Nous détaillons l'analyse de stabilité effectuée dans le cadre linéaire ainsi que dans le cadre non-linéaire afin d'illustrer la manière dont les algorithmes sont analysés mathématiquement. Nous pourrions ainsi mettre en évidence les problèmes liés à l'utilisation de l'algorithme de Newmark. Un exemple numérique illustrera ensuite ces problèmes. Enfin nous mentionnerons la nature symplectique de l'algorithme de Newmark.

### 2.2.1 Principe

Nous reprenons ici les grandes lignes du principe et procédons de la même manière que Géraudin ([63], page 365). Pour une intégration du temps  $t^n$  jusqu'au temps  $t^n + \Delta t = t^{n+1}$ , les relations entre les positions, les vitesses et les accélérations sont obtenues à partir de la formule de Taylor<sup>1</sup> tronquée aux accélérations. Il vient pour les déplacements

$$\vec{x}(t^n + \Delta t) = \vec{x}(t^n) + \Delta t \dot{\vec{x}}(t^n) + \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \left\{ \ddot{\vec{x}}(t') [t^n + \Delta t - t'] \right\} dt' \quad (2.40)$$

Les accélérations aux temps  $t^n$  et  $t^{n+1}$  peuvent être exprimées par développement en série à partir des accélérations au temps  $t' \in [t^n, t^{n+1}]$

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{x}}^{n+1} &= \ddot{\vec{x}}(t') + \frac{d}{dt'} \ddot{\vec{x}}(t') [t^{n+1} - t'] + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt'^2} \ddot{\vec{x}}(t') [t^{n+1} - t']^2 + \dots \\ \ddot{\vec{x}}^n &= \ddot{\vec{x}}(t') + \frac{d}{dt'} \ddot{\vec{x}}(t') [t^n - t'] + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt'^2} \ddot{\vec{x}}(t') [t^n - t']^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.41)$$

En définissant un paramètre  $\beta$ , en multipliant  $\ddot{\vec{x}}^{n+1}$  par  $2\beta$  et  $\ddot{\vec{x}}^n$  par  $(1 - 2\beta)$ , les équations (2.41) donnent

$$\ddot{\vec{x}}(t') = 2\beta \ddot{\vec{x}}^{n+1} + [1 - 2\beta] \ddot{\vec{x}}^n + \frac{d}{dt'} \ddot{\vec{x}}(t') [t' - 2\beta \Delta t - t^n] + \mathcal{O} \left( \Delta t^2 \frac{d^2}{dt'^2} \ddot{\vec{x}}(t') \right) \quad (2.42)$$

Le dernier terme de la relation (2.40) peut alors se récrire,

$$\int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \left\{ \ddot{\vec{x}}(t') [t^n + \Delta t - t'] \right\} dt' = \left[ \frac{1}{2} - \beta \right] \Delta t^2 \ddot{\vec{x}}^n + \beta \Delta t^2 \ddot{\vec{x}}^{n+1} + r \quad (2.43)$$

<sup>1</sup> $\forall f(x)$  continuellement dérivable  $n+1$  fois sur  $[a, b]$  :  $f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{[b-a]^i}{i!} \frac{d^i}{dx^i} f(a) + \frac{1}{i!} \int_a^b \left\{ \frac{d^{i+1}}{dx^{i+1}} f(x) [b-x]^i \right\} dx$  [31]

avec

$$r = \int_{t^n}^{t^n+\Delta t} \left\{ \frac{d}{dt'} \ddot{x}(t') [t^n + \Delta t - t'] [t' - 2\beta\Delta t - t^n] \right\} dt' + \int_{t^n}^{t^n+\Delta t} \left\{ [t^n + \Delta t - t'] \mathcal{O} \left( \Delta t^2 \frac{d^2}{dt'^2} \ddot{x}(t') \right) \right\} dt' \quad (2.44)$$

Le théorème de la moyenne<sup>2</sup> permet de calculer  $r$ , en supposant que  $\beta \geq \frac{1}{2}$  ou  $\beta \leq 0$  afin que le signe de l'intégrand soit constant

$$\exists t'' \in [t^n, t^{n+1}] : r = \left[ \frac{1}{6} - \beta \right] \Delta t^3 \frac{d}{dt} \ddot{x}(t'') + \mathcal{O} \left( \Delta t^4 \frac{d^2}{dt^2} \ddot{x} \right) \quad (2.45)$$

Finalement, en tronquant aux dérivées secondes, les déplacements (2.40) s'écrivent au nœud  $\xi$

$$[\bar{x}^{n+1}]^\xi = [\bar{x}^n]^\xi + \Delta t [\dot{\bar{x}}^n]^\xi + \left[ \frac{1}{2} - \beta \right] \Delta t^2 [\ddot{\bar{x}}^n]^\xi + \beta \Delta t^2 [\ddot{\bar{x}}^{n+1}]^\xi \quad (2.46)$$

Remarquons que pour obtenir une approximation au troisième ordre par rapport au pas de temps, en vertu de (2.45), il faut avoir  $\beta = \frac{1}{6}$ , mais alors l'expression (2.45) n'est plus valable car la fonction intégrée par le théorème de la moyenne change de signe. Dans tous les autres cas, l'approximation est au second ordre par rapport au pas de temps. De la même manière, il vient, en utilisant un paramètre  $\gamma$

$$\exists t'' \in [t^n, t^{n+1}] : \dot{\bar{x}}^{n+1} = \dot{\bar{x}}^n + [1 - \gamma] \Delta t \ddot{\bar{x}}^n + \gamma \Delta t \ddot{\bar{x}}^{n+1} + \left[ \gamma - \frac{1}{2} \right] \Delta t^2 \frac{d}{dt'} \ddot{\bar{x}}(t'') + \mathcal{O} \left( \Delta t^3 \frac{d}{dt} \ddot{\bar{x}}(t) \right) \quad (2.47)$$

En tronquant cette équation aux dérivées secondes, la relation entre les vitesses et les accélérations, s'écrit au nœud  $\xi$

$$[\dot{\bar{x}}^{n+1}]^\xi = [\dot{\bar{x}}^n]^\xi + [1 - \gamma] \Delta t [\ddot{\bar{x}}^n]^\xi + \gamma \Delta t [\ddot{\bar{x}}^{n+1}]^\xi \quad (2.48)$$

Cette relation est exacte au second ordre par rapport au pas de temps si  $\gamma = \frac{1}{2}$  et est exacte au premier ordre dans le cas contraire.  $\beta$  est appelé le premier paramètre

<sup>2</sup> $\forall f(x), g(x)$  continues sur  $[a, b]$ ,  $g(x)$  de signe constant :  $\exists c \in [a, b] : \int_a^b \{f(x)g(x)\} dx = f(c) \int_a^b \{g(x)\} dx$ , avec le cas particulier  $g(x) = (b-x)^n : \exists c \in [a, b] : \int_a^b \{f(x)[b-x]^n\} dx = f(c) \frac{[b-a]^{n+1}}{n+1}$  [55]

de Newmark et  $\gamma$  est appelé le second paramètre de Newmark. L'équation d'équilibre (2.38) se réécrit, au nœud  $\xi$  et à l'instant  $t^{n+1}$

$$M^{\xi\mu} \left[ \ddot{\vec{x}}^{n+1} \right]^\mu = \left[ \vec{F}_{ext}^{n+1} - \vec{F}_{int}^{n+1} \right]^\xi \quad (2.49)$$

Cette dernière relation est résolue par un schéma implicite de type prédicteur correcteur. Remarquons, qu'une analyse explicite peut également être effectuée à partir de ces équations en choisissant  $\beta = 0$ . Nous reviendrons sur le sujet à la section 6.1.

### Prédiction

Les valeurs prédites (itération 0 à la configuration  $n + 1$ ) sont obtenues à partir de (2.46) et (2.48) en prenant  $\ddot{\vec{x}}^{n+1,0} = 0$  comme Géraudin [62] le conseille. En effet, lors d'une intégration temporelle, les accélérations subissent des oscillations numériques, qui pourraient éloigner la prédiction de la valeur d'équilibre si nous choisissons  $\ddot{\vec{x}}^{n+1,0} = \ddot{\vec{x}}^n$ . Il vient donc

$$\begin{aligned} \vec{x}^{n+1,0} &= \vec{x}^n + \Delta t \dot{\vec{x}}^n + \left[ \frac{1}{2} - \beta \right] \Delta t^2 \ddot{\vec{x}}^n \\ \dot{\vec{x}}^{n+1,0} &= \dot{\vec{x}}^n + [1 - \gamma] \Delta t \ddot{\vec{x}}^n \\ \ddot{\vec{x}}^{n+1,0} &= 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

### Corrections

Le résidu de l'itération  $i$  du schéma de Newton-Raphson, à la configuration  $n + 1$ , est exprimé comme étant

$$\left[ \Delta \vec{F}^i \right]^\xi = M^{\xi\mu} \left[ \ddot{\vec{x}}^{n+1,i} \right]^\mu + \left[ \vec{F}_{int}^{n+1,i} - \vec{F}_{ext}^{n+1,i} \right]^\xi \quad (2.51)$$

Dès lors, grâce à (2.46) et (2.48), la correction de l'itération  $i + 1$  à la configuration  $n + 1$  devient

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{i\xi\mu} \left[ \Delta \vec{x}^{i+1} \right]^\mu &= - \left[ \Delta \vec{F}^i \right]^\xi \\ \left[ \vec{x}^{n+1,i+1} \right]^\mu &= \left[ \vec{x}^{n+1,i} + \alpha_{ls} \Delta \vec{x}^{i+1} \right]^\mu \\ \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1,i+1} \right]^\mu &= \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1,i} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \alpha_{ls} \Delta \vec{x}^{i+1} \right]^\mu \\ \left[ \ddot{\vec{x}}^{n+1,i+1} \right]^\mu &= \left[ \ddot{\vec{x}}^{n+1,i} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \alpha_{ls} \Delta \vec{x}^{i+1} \right]^\mu \end{aligned} \quad (2.52)$$

où  $\mathbf{S}$  est la matrice jacobienne tangente définie par

$$\mathbf{S}^{\xi\mu} = \frac{\partial \left\{ M^{\xi\nu} \left[ \ddot{\vec{x}}^{n+1} \right]^\nu + \left[ \vec{F}_{int}^{n+1} - \vec{F}_{ext}^{n+1} \right]^\xi \right\}}{\partial \left[ \vec{x}^{n+1} \right]^\mu} \quad (2.53)$$

et où  $\alpha_{ls}$  est le paramètre de "line search" obtenu par résolution d'un système itératif (appendice A.1). La convergence du "line search" est obtenue quand

$$\left| \Delta \vec{F}^\xi (\vec{x}^{n+1,i} + \alpha_{ls} \Delta \vec{x}^{i+1}) \cdot \Delta \vec{x}^{i+1\xi} \right| < Tol_{ls} \quad (2.54)$$

avec  $Tol_{ls}$  la tolérance prise en absolu (voir discussion en appendice A.1) et ayant une valeur typique de  $10^{-2}$ . Le système (2.52) est résolu itérativement jusqu'à convergence, *i.e.* jusqu'à obtenir

$$\frac{\Delta \vec{F}^{i+1\xi} \cdot \Delta \vec{F}^{i+1\xi}}{\left[ \vec{F}_{int}^{n+1} \right]^\xi \cdot \left[ \vec{F}_{int}^{n+1} \right]^\xi + \left[ \vec{F}_{ext}^{n+1} \right]^\xi \cdot \left[ \vec{F}_{ext}^{n+1} \right]^\xi} < Tol \quad (2.55)$$

où  $Tol$  est une tolérance utilisateur (valeur typique  $10^{-6}$ ). Pour la résolution d'un système non-linéaire, la stabilité de l'intégration n'est garantie que si l'équation d'équilibre est exactement vérifiée (*c.f.* détails à la section 2.2.3). Le défaut d'équilibre peut correspondre à une introduction artificielle d'énergie dans le système. Dès lors, il faut s'assurer que la tolérance soit faible, afin de limiter ce phénomène. Remarquons que l'expression (2.55) peut prendre une autre forme adimensionnelle en faisant intervenir les forces d'inertie par exemple. Nous allons maintenant détailler l'expression de la matrice tangente.

### La matrice tangente

Soit  $\mathbf{K}^{\xi\mu}$  la matrice de raideur obtenue par

$$\mathbf{K}^{\xi\mu} = \frac{\partial \left[ \vec{F}_{int}^{n+1} \right]^\xi}{\partial \left[ \vec{x}^{n+1} \right]^\mu} - \frac{\partial \left[ \vec{F}_{ext}^{n+1} \right]^\xi}{\partial \left[ \vec{x}^{n+1} \right]^\mu} \quad (2.56)$$

L'expression détaillée de  $\mathbf{K}$  dans le cas de matériau à comportement élasto-viscoplastique peut être trouvée dans [107, 124]. Nous reviendrons sur cette expression dans le chapitre 4. En comparant (2.49) et (2.53), nous pouvons déduire ( $\mathbf{I}$  étant le tenseur unité du second ordre)

$$\mathbf{S}^{\xi\mu} = \mathbf{K}^{\xi\mu} + M^{\xi\nu} \mathbf{I} \frac{\partial \ddot{\vec{x}}^\nu}{\partial \vec{x}^\mu} \quad (2.57)$$

En utilisant les équations (2.46) et (2.48), nous pouvons obtenir

$$\frac{\partial \ddot{\vec{x}}^\nu}{\partial \vec{x}^\mu} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{I} \delta_{\nu\mu} \quad (2.58)$$

Finalement la relation (2.57) s'écrit

$$\mathbf{S}^{\xi\mu} = \mathbf{K}^{\xi\mu} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} M^{\xi\mu} \mathbf{I} \quad (2.59)$$

Les propriétés numériques de l'algorithme de Newmark peuvent maintenant être étudiées.

## 2.2.2 Précision et stabilité de l'oscillateur harmonique dans le cadre linéaire

Afin de déterminer les paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  optimaux, les propriétés de l'algorithme doivent être étudiées théoriquement. Historiquement, une analyse linéaire est la première à avoir été effectuée, les conclusions en découlant ayant longtemps été étendues sans justification au domaine non-linéaire. Nous reprenons ici les grandes lignes de cette analyse, le lecteur intéressé pouvant se référer à [15, 70].

Dans le cas linéaire, la précision et la stabilité du schéma de Newmark sont étudiées pour un système oscillant libre de pulsation  $\omega$  et comprenant un degré de liberté. Dans ce cas, l'équation d'équilibre (2.49) se réécrit

$$\ddot{x}^{n+1} + \omega^2 x^{n+1} = 0 \quad (2.60)$$

La solution exacte est du type

$$x = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) \quad (2.61)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes dépendant des conditions initiales.

En définissant  $\mathbf{A}^s(\Omega)$  la matrice spectrale et  $\Omega = \omega \Delta t$  la pulsation adimensionnelle, le système d'équations (2.46), (2.48) et (2.60) se réécrit

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ \Delta t \dot{x}^{n+1} \\ \Delta t^2 \ddot{x}^{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{1+\Omega^2\beta} & \frac{1}{1+\Omega^2\beta} & \frac{1-2\beta}{2[1+\Omega^2\beta]} \\ \frac{-\gamma\Omega^2}{1+\Omega^2\beta} & \frac{1+\Omega^2\beta-\Omega^2\gamma}{1+\Omega^2\beta} & \frac{1+\Omega^2\beta-\gamma[1+\frac{\Omega^2}{2}]}{1+\Omega^2\beta} \\ \frac{-\Omega^2}{1+\Omega^2\beta} & \frac{-\Omega^2}{1+\Omega^2\beta} & \frac{[\beta-\frac{1}{2}]\Omega^2}{1+\Omega^2\beta} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^s(\Omega)} \begin{pmatrix} x^n \\ \Delta t \dot{x}^n \\ \Delta t^2 \ddot{x}^n \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

Pour étudier la stabilité de ce schéma, il faut étudier les valeurs propres de cette matrice. Les valeurs propres  $\lambda_i$  ( $i \in [1, 3]$ ) sont solutions de l'équation

$$\lambda^3 - 2A_1^s \lambda^2 + A_2^s \lambda - A_3^s = 0 \quad (2.63)$$

avec les trois invariants :  $A_1^s$  la moitié de la trace de  $\mathbf{A}^s$ ,  $A_2^s$  la somme des mineurs principaux de  $\mathbf{A}^s$  (*i.e.*  $A_2^s = \det \begin{pmatrix} \mathbf{A}^s_{22} & \mathbf{A}^s_{23} \\ \mathbf{A}^s_{32} & \mathbf{A}^s_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{A}^s_{11} & \mathbf{A}^s_{13} \\ \mathbf{A}^s_{31} & \mathbf{A}^s_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{A}^s_{11} & \mathbf{A}^s_{12} \\ \mathbf{A}^s_{21} & \mathbf{A}^s_{22} \end{pmatrix}$ ) et  $A_3^s$  le déterminant de  $\mathbf{A}^s$ . Grâce à la relation (2.62), nous pouvons calculer

$$\begin{aligned} A_1^s &= 1 - \frac{\Omega^2 [\gamma + \frac{1}{2}]}{2 + 2\beta\Omega^2} \\ A_2^s &= 1 - \frac{\Omega^2 [\gamma - \frac{1}{2}]}{1 + \beta\Omega^2} \\ A_3^s &= 0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

Comme  $A_3^s = 0$ , au moins une valeur propre est nulle. Cela vient du fait que la troisième ligne de  $\mathbf{A}^s$  équivaut à  $-\Omega^2$  multiplié par la première ligne. Arbitrairement, posons que la troisième valeur propre est nulle. Le système (2.62) peut donc se réduire à un système de dimension deux dont les deux valeurs propres valent

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= A_1^s + \sqrt{A_1^{s2} - A_2^s} \\ \lambda_2 &= A_1^s - \sqrt{A_1^{s2} - A_2^s}\end{aligned}\quad (2.65)$$

L'algorithme est A-stable, c'est-à-dire inconditionnellement stables, ou en d'autres termes, il n'y a pas d'amplification d'une perturbation quelconque par une introduction numérique d'énergie (stabilité) pour toutes les valeurs possibles de  $\Omega$  (inconditionnelle), si le module de chaque valeur propre est inférieur à l'unité. La seule méthode pour parvenir à cette condition est d'avoir deux valeurs propres complexes conjuguées avec

$$\begin{aligned}A_1^{s2} &\leq A_2^s \quad \forall \Omega^2 \\ A_2^s &\leq 1 \quad \forall \Omega^2\end{aligned}\quad (2.66)$$

Ces conditions nécessitent dès lors la vérification des relations suivantes

$$\begin{aligned}\gamma &\geq \frac{1}{2} \\ \beta &\geq \frac{(\gamma + \frac{1}{2})^2}{4}\end{aligned}\quad (2.67)$$

La solution de l'algorithme peut alors se mettre sous la forme

$$x^{n+1} = \exp\left(-\xi_d \frac{\Omega_d}{\Delta t} t^{n+1}\right) \left[ c_1 \cos \frac{\Omega_d t^{n+1}}{\Delta t} + c_2 \sin \frac{\Omega_d t^{n+1}}{\Delta t} \right] \quad (2.68)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes d'intégration, où

$$\Omega_d \equiv \arctan\left(\frac{\Im \lambda_1}{\Re \lambda_1}\right) \quad (2.69)$$

est la pulsation adimensionnelle effective et où

$$\xi_d \equiv \frac{-\ln\left([\Im \lambda_1]^2 + [\Re \lambda_1]^2\right)}{2\Omega_d} \quad (2.70)$$

est le taux d'amortissement effectif. En analysant l'équation (2.68), nous pouvons déduire que

- (i) si  $\xi_d > 0$ , l'algorithme est stable et dissipatif car l'amplitude du mouvement diminue, ce qui correspond à dissiper numériquement de l'énergie, il est donc A-stable (car il n'y a plus de restriction sur la taille du pas de temps);

Table 2.1: Propriétés de l'algorithme de Newmark

algorithme	$\beta$	$\gamma$	ordre
Newmark conservatif	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	2
Newmark dissipatif	$\frac{1}{[1+\rho_\infty]^2}$	$\frac{3-\rho_\infty}{2+2\rho_\infty}$	1

- (ii) si  $\xi_d = 0$ , l'algorithme est stable et conservatif car l'amplitude du mouvement est constante ce qui correspond à une énergie totale conservée, il est donc également A-stable;
- (iii) si  $\xi_d < 0$ , l'algorithme est instable car l'amplitude du mouvement augmente, ce qui correspond à une création numérique d'énergie.

Grâce à un développement en série de Taylor, que nous tronquons à l'ordre  $\Omega^3$  puisque la relation (2.46) est une approximation au second ordre (section 2.2.1), nous avons

$$\begin{aligned}\Omega_d &= \arctan\left(\frac{\Im\lambda_1}{\Re\lambda_1}\right) = \arctan\left(\sqrt{\frac{A_2^s - A_1^{s2}}{A_1^{s2}}}\right) \simeq \Omega + \mathcal{O}(\Omega^3) \\ \xi_d &= \frac{-\ln([\Im\lambda_1]^2 + [\Re\lambda_1]^2)}{2\Omega_d} \simeq \frac{1}{2}\left[\gamma - \frac{1}{2}\right] [\Omega + \mathcal{O}(\Omega^2)]\end{aligned}\quad (2.71)$$

En définissant l'erreur sur la pulsation  $e_\Omega$  et l'erreur sur l'amplitude  $e_\xi$  nous avons

$$\begin{aligned}e_\Omega &\equiv \frac{\Omega_d - \Omega}{\Omega} = \mathcal{O}(\Omega^2) \\ e_\xi &\equiv \xi_d = \frac{1}{2}\left[\gamma - \frac{1}{2}\right] [\Omega + \mathcal{O}(\Omega^2)]\end{aligned}\quad (2.72)$$

nous pouvons déduire que l'algorithme de Newmark est conservatif et A-stable ( $\xi_d = 0$ ) et d'une précision au second ordre pour

$$\gamma = \frac{1}{2}\quad (2.73)$$

Remarquons que nous avons déjà la nécessité d'avoir  $\gamma = \frac{1}{2}$  pour avoir un développement des vitesses au second ordre (2.47). Pour  $\gamma > \frac{1}{2}$ , l'algorithme est précis au premier ordre et dissipe de l'énergie ( $\xi_d > 0$ ), il est donc A-stable.

Maintenant, il faut établir une relation entre  $\beta$  et  $\gamma$  qui conduit à une optimisation de l'algorithme. Le choix généralement adopté consiste à vouloir amortir au maximum l'amplitude des hautes fréquences (qui proviennent de la discrétisation éléments-finis et sont donc numériques et non physiques) qui parasitent la réponse. Définissons le rayon spectral par

$$\rho_d(\Omega) \equiv \max_i \|\lambda_i\| \quad (2.74)$$

Ce rayon spectral est relié au taux d'amortissement. En effet, en combinant (2.70) et (2.68), il vient

$$x^{n+1} = \exp\left(\frac{\ln(\rho_d^2)}{\Delta t} t^{n+1}\right) \left[ c_1 \cos \frac{\Omega_d t^{n+1}}{\Delta t} + c_2 \sin \frac{\Omega_d t^{n+1}}{\Delta t} \right] \quad (2.75)$$

qui implique que le rayon spectral doit être égal à l'unité pour conserver l'amplitude du mouvement et inférieur à l'unité pour amortir le mouvement. Dans le cas qui nous occupe, le choix de la relation

$$\beta = \frac{1}{4} \left[ \gamma + \frac{1}{2} \right]^2 \quad (2.76)$$

conduit à un rayon spectral

$$\rho_d(\Omega) = \sqrt{|A_2^s|} = \sqrt{\left| \frac{1 + \frac{\Omega^2}{4} \left[ \gamma - \frac{3}{2} \right]^2}{1 + \frac{\Omega^2}{4} \left[ \gamma + \frac{1}{2} \right]^2} \right|} \quad (2.77)$$

qui est toujours inférieur ou égal à l'unité (algorithme stable) à la condition que  $1/2 \leq \gamma$ . Pour une fréquence infinie, nous avons alors

$$\rho_\infty = \frac{\left| \frac{3}{2} - \gamma \right|}{\gamma + \frac{1}{2}} \quad (2.78)$$

Il est possible de montrer que le choix de la relation (2.76) permet de minimiser ce rayon spectral, et donc de maximiser la dissipation des hautes fréquences [70] pour  $\gamma > \frac{1}{2}$ . Il est dès lors possible, à partir de la relation (2.78), d'exprimer les paramètres en fonction du rayon spectral infini. Les propriétés de l'algorithme sont reprises à la Table (2.1). Remarquons que pour  $\rho_\infty = 0$ , l'algorithme amortit les pulsations en un pas de temps (détails en appendice A.2), ce qui conduit à avoir un algorithme L-stable.

### 2.2.3 Précision et stabilité dans le cadre non-linéaire

L'étude ci-dessus n'est valable que pour un système linéaire. Pour les systèmes non-linéaires, Belytschko et Schoeberle [19], ainsi que Hughes [68] ont prouvé que l'énergie reste bornée dans le cas où elle reste positive. Pour ce faire ils ont défini une énergie interne incrémentale ( $W_{int}$ ) correspondant au travail des forces internes selon la relation

$$W_{int}^{n+1} = W_{int}^n + \frac{\left[ \vec{F}_{int}^{n+1} + \vec{F}_{int}^n \right]^\xi}{2} \cdot \left[ \vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n \right]^\xi \quad (2.79)$$

En utilisant une définition semblable pour l'énergie externe ( $W_{ext}$ )

$$W_{ext}^{n+1} = W_{ext}^n + \frac{[\vec{F}_{ext}^{n+1} + \vec{F}_{ext}^n]^\xi}{2} \cdot [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\xi \quad (2.80)$$

et en utilisant l'énergie cinétique discrète ( $K$ )

$$K^{n+1} = \frac{1}{2} [\dot{\vec{x}}^{n+1}]^\xi \cdot M^{\xi\mu} [\dot{\vec{x}}^{n+1}]^\mu \quad (2.81)$$

Belytschko et Schoeberle [19] ont établi, en utilisant la relation (2.48) avec  $\gamma = \frac{1}{2}$ , la relation suivante

$$\begin{aligned} K^{n+1} + W_{int}^{n+1} - W_{ext}^{n+1} &= K^n + \frac{\Delta t}{2} [\dot{\vec{x}}^{n+1}]^\xi \cdot M^{\xi\mu} [\ddot{\vec{x}}^{n+1} + \ddot{\vec{x}}^n]^\mu + \\ &\frac{\Delta t^2}{8} [\ddot{\vec{x}}^{n+1} + \ddot{\vec{x}}^n]^\xi \cdot M^{\xi\mu} [\ddot{\vec{x}}^{n+1} + \ddot{\vec{x}}^n]^\mu + W_{int}^n - W_{ext}^n + \\ &\frac{[\vec{F}_{int}^{n+1} + \vec{F}_{int}^n - \vec{F}_{ext}^{n+1} - \vec{F}_{ext}^n]^\xi}{2} \cdot [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\xi \end{aligned} \quad (2.82)$$

En utilisant la relation (2.46), et en définissant l'énergie totale comme étant

$$E^{n+1} = K^{n+1} + W_{int}^{n+1} \quad (2.83)$$

et non pas comme étant  $K^{n+1} + U_{int}^{n+1}$  (2.26), la relation (2.82) peut se réécrire

$$\begin{aligned} E^{n+1} - W_{ext}^{n+1} - E^n + W_{ext}^n &= \frac{[\Delta \vec{F}^{n+1} + \Delta \vec{F}^n]^\xi}{2} \cdot [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\xi + \\ &\frac{\Delta t^2}{2} \left[ \beta - \frac{1}{4} \right] [\ddot{\vec{x}}^n - \ddot{\vec{x}}^{n+1}]^\xi \cdot M^{\xi\mu} [\ddot{\vec{x}}^{n+1} + \ddot{\vec{x}}^n]^\mu \end{aligned} \quad (2.84)$$

où  $\Delta \vec{F}$  est défini par la relation (2.51). Etant donné que le résidu est borné (2.55) lors de la résolution du système (2.52), nous pouvons écrire

$$[\Delta \vec{F}^{n+1} + \Delta \vec{F}^n]^\xi \rightarrow \vec{0} \text{ si } Tol \rightarrow 0 \quad (2.85)$$

En supposant  $\beta = \frac{1}{4}$ , la relation (2.84) se réécrit alors

$$E^{n+1} - W_{ext}^{n+1} - E^n + W_{ext}^n \rightarrow 0 \text{ si } Tol \rightarrow 0 \quad (2.86)$$

Hughes [68] a généralisé cette démonstration au cas où  $\beta > \frac{1}{4}$  et a conclu que l'énergie du système ( $K + W_{int}$ ) restait bornée. Pour ce faire, il a défini la pseudo énergie  $\tilde{E}$  comme étant

$$\tilde{E}^{n+1} = E^{n+1} + \frac{\Delta t^2}{2} \left[ \beta - \frac{1}{4} \right] [\ddot{\vec{x}}^{n+1}]^\xi \cdot M^{\xi\mu} [\ddot{\vec{x}}^{n+1}]^\mu \quad (2.87)$$

La relation (2.86) devient alors, dans le cas où  $\beta \neq \frac{1}{4}$

$$\tilde{E}^{n+1} - W_{ext}^{n+1} - \tilde{E}^n + W_{ext}^n \rightarrow 0 \text{ si } Tol \rightarrow 0 \quad (2.88)$$

En considérant (2.86) ou (2.88), nous déduisons que  $K$  et  $W_{int}$  restent séparément bornés tant que  $W_{int}$  reste positif ( $K > 0$  par définition). Néanmoins, si dans le cas où  $\beta = \frac{1}{4}$ , cette technique permet de démontrer que l'énergie totale reste constante (à la tolérance  $Tol$  près), elle ne peut prouver que la solution obtenue est énergétiquement consistante. En effet, lors de l'établissement de la relation (2.83), nous avons pris le travail des forces internes et non l'énergie interne comme dans (2.26). Par exemple, dans le cas où la dissipation interne est absente, il faudrait pouvoir prouver que

$$U_{int}^{n+1} - U_{int}^n = \frac{[\vec{F}_{int}^{n+1} + \vec{F}_{int}^n]^\xi}{2} \cdot [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\xi \quad (2.89)$$

Si cette dernière condition est vérifiée, le travail des forces internes correspond à la variation d'énergie interne du système, et l'algorithme d'intégration conduit à une solution physiquement admissible. Remarquons cependant, dans le cas où  $\beta \neq \frac{1}{4}$ , c'est la pseudo énergie qui reste constante, ce qui induit une erreur de l'ordre de  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ .

Hughes [67] a alors évalué la différence entre le travail des forces internes et l'énergie interne du système. En effet, supposant que les forces internes dérivent d'une énergie interne  $U_{int}$ , il vient

$$\vec{F}_{int}^\xi = \frac{\partial U_{int}(\vec{x})}{\partial \vec{x}^\xi} \quad (2.90)$$

Le théorème de Taylor<sup>3</sup> permet d'obtenir, grâce à la relation (2.90) et en ne considérant que la partie venant des forces internes de la relation (2.56), la relation suivante

$$\begin{aligned} \exists \xi_1 \in ]0, 1[ : U_{int}^{n+1} &= U_{int}^n + [\vec{F}_{int}^n]^\xi \cdot [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\xi + \\ &\quad \frac{1}{2} [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\mu \cdot \mathbf{K}^{\mu\xi} ([1 - \xi_1] \vec{x}^{n+1} + \xi_1 \vec{x}^n) [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\xi \\ \exists \xi_2 \in ]0, 1[ : U_{int}^n &= U_{int}^{n+1} + [\vec{F}_{int}^{n+1}]^\xi \cdot [\vec{x}^n - \vec{x}^{n+1}]^\xi + \\ &\quad \frac{1}{2} [\vec{x}^n - \vec{x}^{n+1}]^\mu \cdot \mathbf{K}^{\mu\xi} ([1 - \xi_2] \vec{x}^{n+1} + \xi_2 \vec{x}^n) [\vec{x}^n - \vec{x}^{n+1}]^\xi \end{aligned} \quad (2.91)$$

En définissant la matrice de raideur résiduelle  $\Delta \mathbf{K}_{res}$ , venant de la non-linéarité par

$$\Delta \mathbf{K}_{res}^{\mu\xi} \equiv \frac{1}{4} [\mathbf{K} ([1 - \xi_1] \vec{x}^{n+1} + \xi_1 \vec{x}^n) - \mathbf{K} ([1 - \xi_2] \vec{x}^{n+1} + \xi_2 \vec{x}^n)]^{\mu\xi} \quad (2.92)$$

---

<sup>3</sup> $\forall f(x)$  continûment dérivable par rapport à  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\exists \xi \in ]0, 1[ : f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{p-1} \left\{ \frac{1}{i!} \sum_{k_1, \dots, k_i=1}^n \left[ h_{k_1} \dots h_{k_i} \frac{\partial^i f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_i}}(x) \right] \right\} + \frac{1}{p!} \sum_{k_1, \dots, k_p=1}^n \left[ h_{k_1} \dots h_{k_p} \frac{\partial^p f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_p}}(x + \xi h) \right]$

la relation (2.91) conduit à

$$\begin{aligned} U_{int}^{n+1} - U_{int}^n &= \left[ \frac{\vec{F}_{int}^{n+1} + \vec{F}_{int}^n}{2} \right]^\xi \cdot [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\xi + [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\mu \cdot \Delta \mathbf{K}_{res}^{\mu\xi} [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\xi \\ &= W_{int}^{n+1} - W_{int}^n + [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\mu \cdot \Delta \mathbf{K}_{res}^{\mu\xi} [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\xi \end{aligned} \quad (2.93)$$

L'équivalence entre la travail des forces internes et des forces externes ne peut donc exister que pour des pas de temps tendant vers zéro (ou si le système est linéaire, ce qui conduit à  $\Delta \mathbf{K}_{res} = 0$ ), car alors le reste du développement de Taylor tend aussi vers zéro. Hughes [67] a démontré que cela était vrai aussi si la taille du pas de temps tendait vers l'infini. Entre ces deux bornes, à cause du terme résiduel venant de la non-linéarité, de l'énergie peut être introduite dans le système (car  $\Delta \mathbf{K}_{res}$  est définie positive ou négative). L'algorithme de Newmark n'est donc plus stable. De nombreux exemples numériques [71, 142, 82] ont montré que l'algorithme de Newmark était instable (du fait du manque de consistance énergétique, la résolution du système conduit à des oscillations dans les déplacements qui peuvent conduire à la divergence du calcul). Finalement en redéfinissant l'énergie totale (2.83) à partir du potentiel interne

$$E^{n+1} = K^{n+1} + U_{int}^{n+1} \quad (2.94)$$

et, en utilisant (2.93), l'équation (2.88) peut se réécrire comme

$$\begin{aligned} \tilde{E}^{n+1} - W_{ext}^{n+1} - \tilde{E}^n + W_{ext}^n &\rightarrow [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\mu \cdot \Delta \mathbf{K}_{res}^{\mu\xi} [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\xi \\ &\text{si } Tol \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.95)$$

Remarquons que dans le cadre linéaire comme c'est la pseudo énergie qui est bornée si  $\beta \neq \frac{1}{4}$  et non l'énergie, nous dirons que l'algorithme n'est plus G-stable (*i.e.* l'énergie du système est constante ou décroissante) mais seulement stable (*i.e.* une grandeur liée à l'énergie du système est constante ou décroissante). Dans le cadre non-linéaire il est instable.

## 2.2.4 Exemple : Etude d'un système masse-ressort

A titre d'exemple, nous proposons d'analyser l'algorithme sur un problème simple : la dynamique d'un système masse-ressort.

L'expression générale tridimensionnelle (2.39) des forces internes peut se simplifier pour le cas d'une barre unidimensionnelle. Soient  $A$  et  $l$  respectivement la section droite, supposée constante, et la longueur de la barre. Dès lors, en définissant  $Y$  le module de Young, l'expression des forces internes (2.39) d'une barre, définie par deux nœuds d'extrémités  $\mu$  and  $\xi$  et discrétisée par des fonctions de forme du premier degré,

devient

$$\begin{aligned}\vec{F}_{int}^{\xi} &= \frac{YA_0}{l_0} \frac{[l - l_0]}{l} [\vec{x}^{\xi} - \vec{x}^{\mu}] \\ \vec{F}_{int}^{\mu} &= \frac{YA_0}{l_0} \frac{[l - l_0]}{l} [\vec{x}^{\mu} - \vec{x}^{\xi}]\end{aligned}\quad (2.96)$$

avec  $l = \|\vec{x}^{\mu} - \vec{x}^{\xi}\|$ . En définissant le potentiel  $U = \frac{YA_0}{2l_0} [l - l_0]^2$ , la barre peut être vue comme un ressort avec

$$\begin{aligned}\vec{F}_{int}^{\xi} &= \frac{\partial U(l)}{\partial \vec{x}^{\xi}} \\ \vec{F}_{int}^{\mu} &= \frac{\partial U(l)}{\partial \vec{x}^{\mu}}\end{aligned}\quad (2.97)$$

Les masses consistantes aux nœuds  $\xi$  and  $\mu$  sont obtenues de l'équation (2.35)

$$M^{\xi\mu} = M\delta_{\xi\mu}\quad (2.98)$$

avec  $M = \frac{\rho_0 A_0 l_0}{2}$ .

Prenons l'exemple d'un ressort de raideur constante et de longueur initiale  $l_0$  où la seule non-linéarité est géométrique. Les forces internes sont données par l'expression (2.97). Pour simplifier cette expression, supposons l'extrémité  $\mu$  fixée et placée à l'origine (Figure 2.1). Supposons que la dérivée seconde du potentiel  $U$  par rapport à  $l$  (*i.e.* la raideur du ressort) constante et notée  $U''$ . Les forces au nœud  $\xi$  valent donc pour les temps  $t^n$  et  $t^{n+1}$  (en omettant l'exposant  $\xi$  par soucis de clarté)

$$\begin{aligned}\vec{F}_{int}^n &= U'' \left[ 1 - \frac{l_0}{l^n} \right] \vec{x}^n \\ \vec{F}_{int}^{n+1} &= U'' \left[ 1 - \frac{l_0}{l^{n+1}} \right] \vec{x}^{n+1}\end{aligned}\quad (2.99)$$

La variation de potentiel incrémental (2.79) vaut alors

$$\begin{aligned}W_{int}^{n+1} - W_{int}^n &= \left[ \frac{\vec{F}_{int}^{n+1} + \vec{F}_{int}^n}{2} \right] \cdot [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n] \\ &= \frac{U''}{2} [l^{n+1} - l_0 l^{n+1} - l^{n+2} + l_0 l^n] + \frac{U''}{2} \vec{x}^{n+1} \cdot \vec{x}^n \left[ \frac{l_0}{l^{n+1}} - \frac{l_0}{l^n} \right] \\ &= U^{n+1} - U^n + \frac{U''}{2} \left\{ l_0 l^{n+1} - l_0 l^n + \vec{x}^{n+1} \cdot \vec{x}^n \left[ \frac{l_0}{l^{n+1}} - \frac{l_0}{l^n} \right] \right\} \\ &= U^{n+1} - U^n + \frac{U''}{2} l_0 [l^{n+1} - l^n] \left[ 1 - \frac{\vec{x}^{n+1} \cdot \vec{x}^n}{l^{n+1} l^n} \right]\end{aligned}\quad (2.100)$$

Il apparaît directement que la variation de travail des forces internes n'est égale à la variation de potentiel (et donc d'énergie interne) que si  $l^{n+1} = l^n$  ou si  $\vec{x}^{n+1}$  est aligné

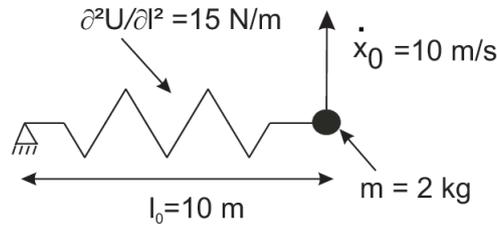
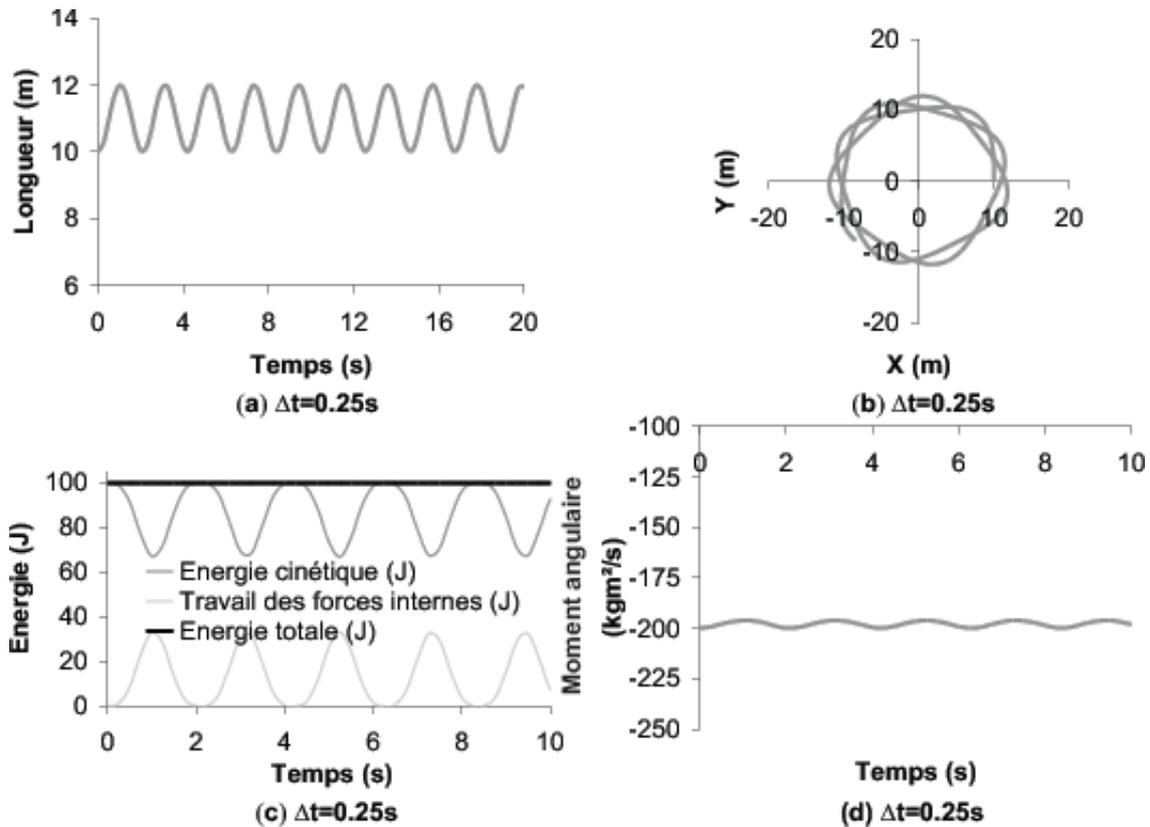


Figure 2.1: Schéma du système masse ressort.

Figure 2.2: Intégration temporelle du système masse-ressort par le schéma de Newmark avec un pas de temps  $\Delta t = 0.25s$  (1/10 de la période) - (a) longueur du ressort - (b) trajectoire de la masse - (c) variation d'énergie - (d) moment angulaire.

avec  $\vec{x}^n$ . Ces conditions ne sont vérifiées que pour des cas particuliers et sont bien approximées si le pas de temps reste faible.

Nous allons illustrer ce problème sur un exemple numérique proposé par Armero et Romero [6, 7] afin de mettre en évidence les lacunes de l'algorithme de Newmark. Il s'agit d'une masse attachée à un ressort dont l'autre extrémité est fixe. La masse a une vitesse initiale alors que le ressort est à sa longueur initiale (Figure 2.1). Suite aux grandes rotations, le système est géométriquement non-linéaire. La simulation de

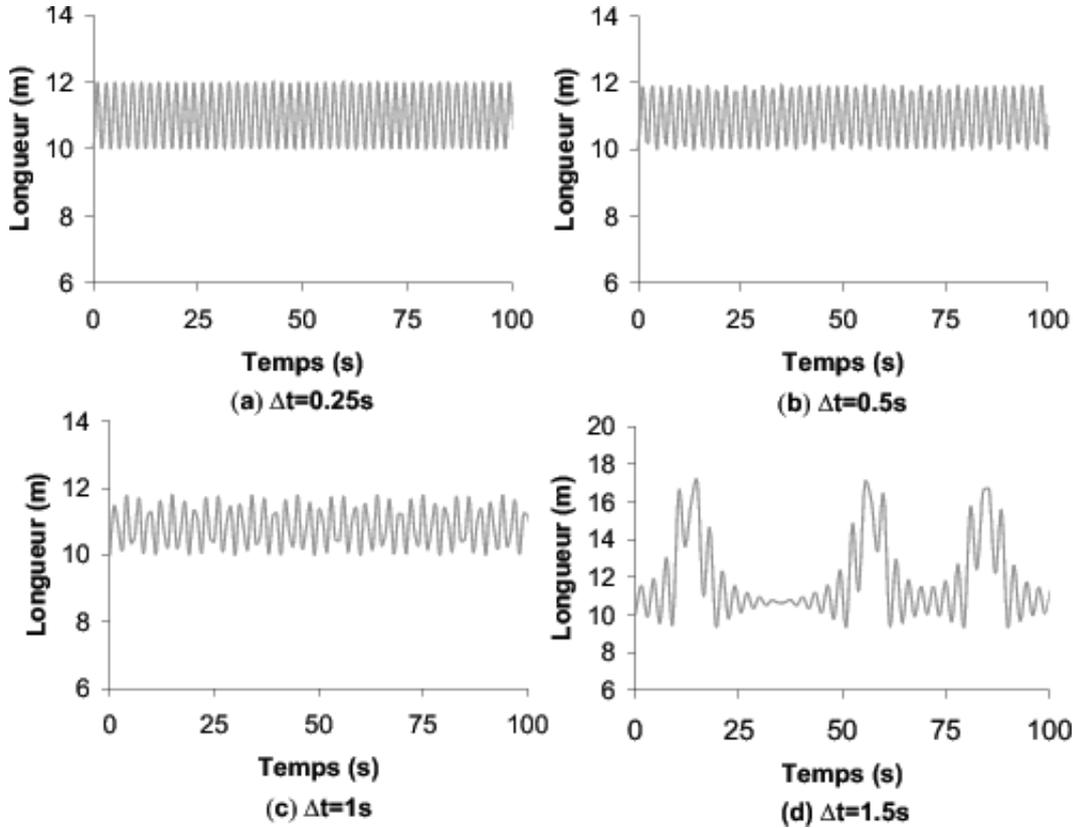


Figure 2.3: Evolution temporelle de la longueur du ressort, résolution par le schéma de Newmark - (a)  $\Delta t = 0.25(s)$  - (b)  $\Delta t = 0.5(s)$  - (c)  $\Delta t = 1s$  - (d)  $\Delta t = 1.5s$ .

ce problème est obtenue pour différents pas de temps constants ( $0.25s$ ,  $0.5s$ ,  $1s$  et  $1.5s$ ). Ces valeurs sont à comparer à la pulsation propre du ressort qui vaut  $2.74s^{-1}$ , ce qui correspond à une période de  $2.3s$ . Les paramètres de Newmark sont pris afin de conserver l'énergie totale ( $\beta = 0.25$ ,  $\gamma = 0.5$ ). Les résultats sont comparés sur le long terme afin de mettre en évidence la stabilité ou la divergence des schémas. Cependant, afin d'illustrer la solution attendue, les résultats des 10 premières secondes, obtenus avec un pas de  $0.25s$ , sont illustrés à la Figure 2.2. La longueur (Figure 2.2 (a)) oscille autour de sa position d'équilibre ( $l = 11.001377$ )<sup>4</sup>, ce qui explique pourquoi l'orbite n'est pas circulaire (Figure 2.2 (b)). La conséquence de ces oscillations est l'existence d'un transfert entre l'énergie interne et cinétique du système (Figure 2.2 (c)). Le moment angulaire (Figure 2.2 (d)) n'est pas exactement constant car l'algorithme de Newmark n'est pas apte à conserver cette grandeur (nous reviendrons sur ce point à la section 2.2.5). Nous pouvons maintenant comparer les solutions obtenues pour les différents pas de temps sur le long terme.

<sup>4</sup>La longueur d'équilibre est obtenue en considérant le moment angulaire qui est constant  $J = m\dot{x}_0 l_0$  et en résolvant l'équation qui équilibre les forces de raideur et centrifuge :  $U''[l - l_0] = \frac{m}{l} \left[ \frac{J}{ml} \right]^2$ .

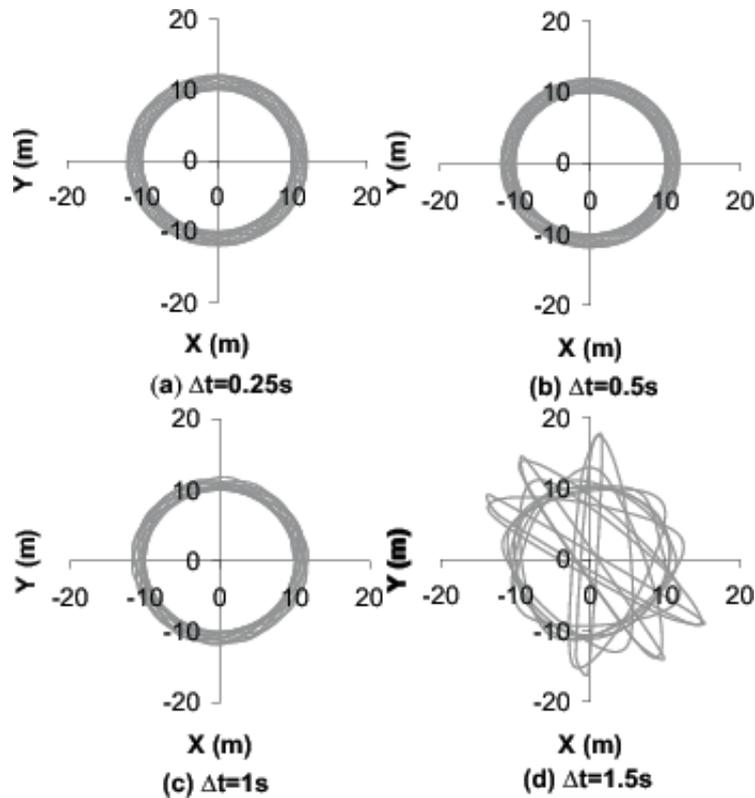


Figure 2.4: Trajectoire de la masse dans le plan, résolution par le schéma de Newmark - (a)  $\Delta t = 0.25(s)$  - (b)  $\Delta t = 0.5(s)$  - (c)  $\Delta t = 1s$  - (d)  $\Delta t = 1.5s$ .

La Figure 2.3 illustre l'évolution de la longueur du ressort. Physiquement, la longueur doit osciller autour de sa position d'équilibre. Cependant, sur la Figure 2.3, nous pouvons observer que pour un pas de temps de  $1.5s$ , les oscillations deviennent de plus en plus importantes. Ce phénomène se confirme en analysant la trajectoire de la masse (Figure 2.4). L'étude de l'évolution de l'énergie (Figure 2.5) montre que pour tous les pas de temps, l'énergie totale reste bien constante comme prédit par la relation (2.86). Le travail des forces internes est calculé par la relation (2.79) et l'énergie totale par la relation (2.83). Cependant, lorsque la taille du pas augmente, les transferts d'énergie entre le travail des forces internes et l'énergie cinétique deviennent plus importants, jusqu'à conduire à un travail des forces internes négatif, ce qui est physiquement inacceptable. Enfin, la Figure 2.6 montre que le moment angulaire (qui devrait être constant) montre lui aussi des oscillations importantes lorsque la taille du pas de temps augmente. Cet exemple permet de comprendre les sources de divergence dont est victime l'algorithme de Newmark dans le cadre non-linéaire. Néanmoins, l'algorithme de Newmark possède d'autres propriétés que nous allons résumer.

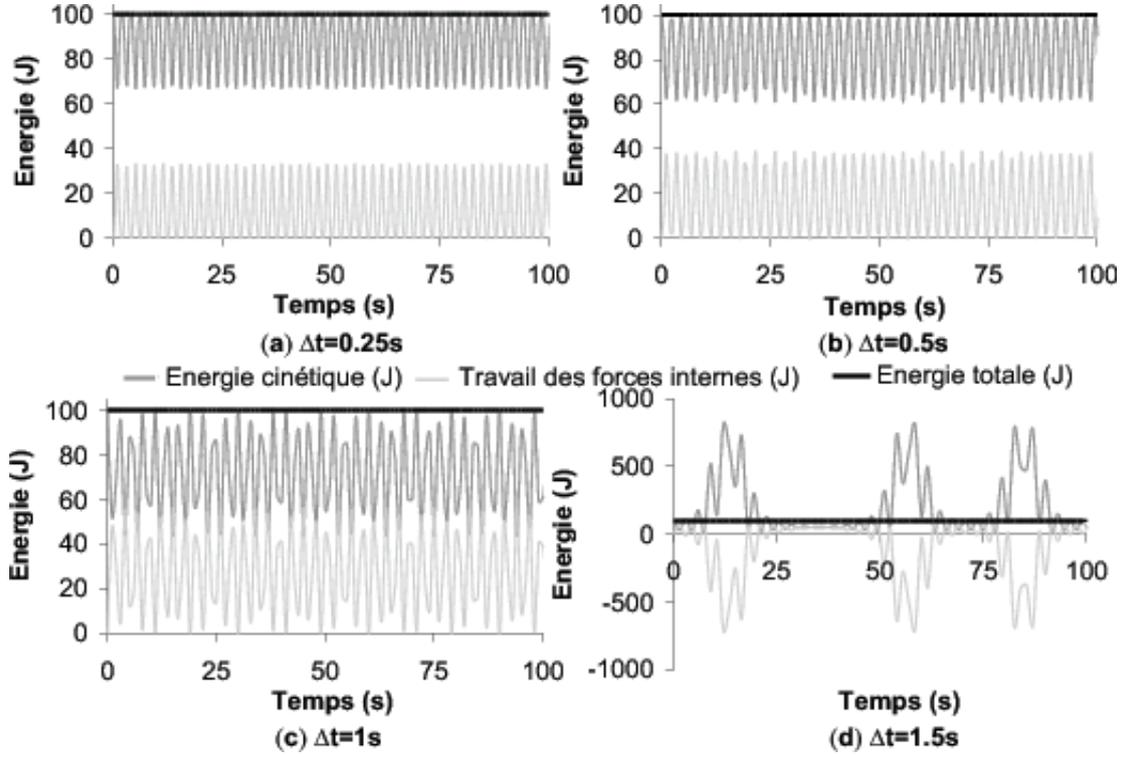


Figure 2.5: Evolution temporelle de l'énergie, résolution par le schéma de Newmark - (a)  $\Delta t = 0.25(s)$  - (b)  $\Delta t = 0.5(s)$  - (c)  $\Delta t = 1s$  - (d)  $\Delta t = 1.5s$ .

### 2.2.5 Nature symplectique de l'algorithme de Newmark

Soit  $\underline{z}$ , défini dans l'ensemble  $\mathbb{X}_0 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{P}$ , un vecteur de taille  $6N$  regroupant toutes les inconnues tel que

$$\begin{aligned} z_{3[\xi-1]+i} &\equiv \bar{x}_i^\xi \quad \forall \xi \in [1, N], \forall i \in [1, 3] \\ z_{3[N+\xi-1]+i} &\equiv M^{\xi\mu} \dot{\bar{x}}_i^\mu \quad \forall \xi \in [1, N], \forall i \in [1, 3] \end{aligned} \quad (2.101)$$

Dès lors la résolution de l'algorithme peut se mettre sous la forme d'une fonction  $f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ , telle que

$$f(\underline{z}^{n+1}, \underline{z}^n) = 0 \text{ avec } \underline{z}^{n+1}, \underline{z}^n \in \mathbb{P} \quad (2.102)$$

et qui peut se mettre sous la forme linéarisée

$$\delta \underline{z}^{n+1} = \underline{\mathbf{F}} \delta \underline{z}^n \quad (2.103)$$

avec la matrice d'amplification linéarisée

$$\underline{\mathbf{F}} \equiv - \left[ \frac{\partial f(\underline{z}^{n+1}, \underline{z}^n)}{\partial \underline{z}^{n+1}} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial f(\underline{z}^{n+1}, \underline{z}^n)}{\partial \underline{z}^n} \right] \quad (2.104)$$

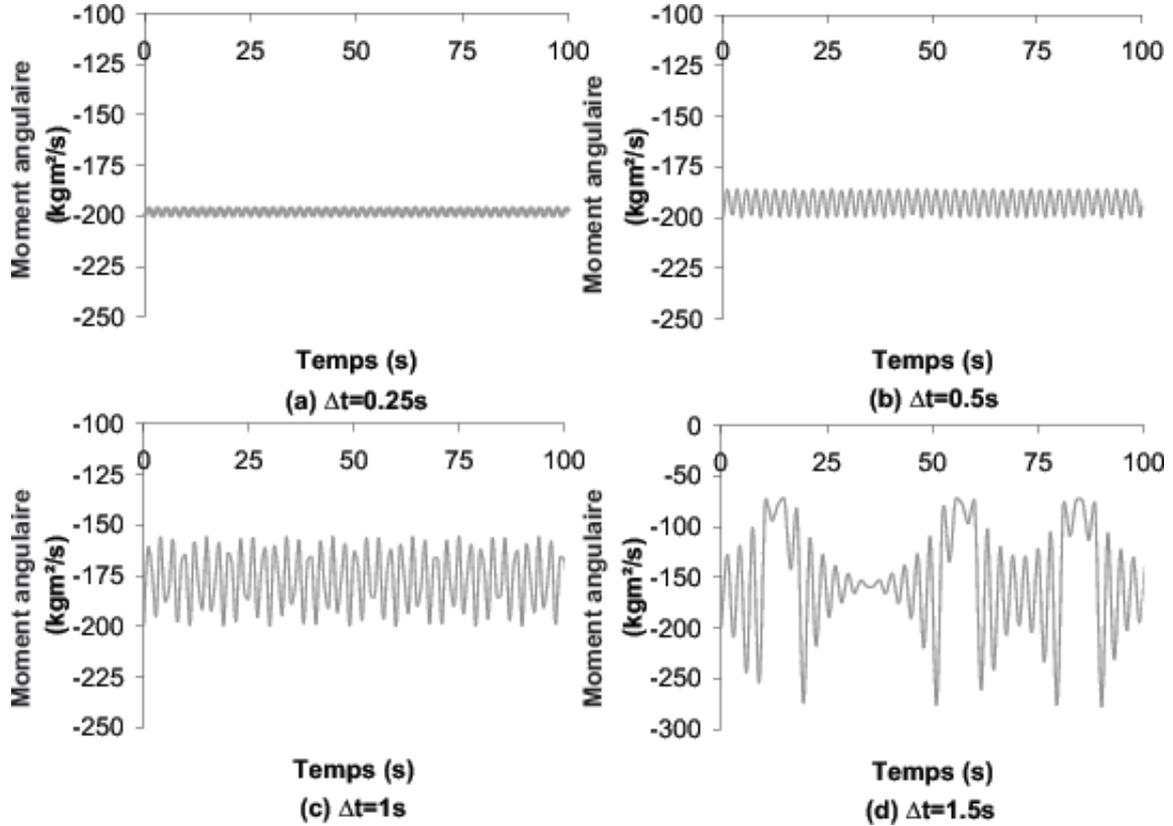


Figure 2.6: Evolution temporelle du moment angulaire, résolution par le schéma de Newmark - (a)  $\Delta t = 0.25(s)$  - (b)  $\Delta t = 0.5(s)$  - (c)  $\Delta t = 1s$  - (d)  $\Delta t = 1.5s$ .

Soit  $\underline{\mathbf{J}}$  la matrice résultante (de taille  $6N$  sur  $6N$ ) antisymétrique unitaire définie par

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{J}}_{3[\xi-1]+i \quad 3[\mu-1]+j} &\equiv 0 & \forall \xi, \mu \in [1, N], \forall i, j \in [1, 3] \\
 \underline{\mathbf{J}}_{3[\xi-1]+i \quad 3[N+\mu-1]+j} &\equiv \delta_{ij} \delta_{\xi\mu} & \forall \xi, \mu \in [1, N], \forall i, j \in [1, 3] \\
 \underline{\mathbf{J}}_{3[N+\xi-1]+i \quad 3[\mu-1]+j} &\equiv -\delta_{ij} \delta_{\xi\mu} & \forall \xi, \mu \in [1, N], \forall i, j \in [1, 3] \\
 \underline{\mathbf{J}}_{3[N+\xi-1]+i \quad 3[N+\mu-1]+j} &\equiv 0 & \forall \xi, \mu \in [1, N], \forall i, j \in [1, 3]
 \end{aligned} \quad (2.105)$$

Dès lors l'algorithme est dit symplectique si et seulement si

$$\underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{J}} \underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{J}} \quad (2.106)$$

Pour l'algorithme de Newmark, dans le cadre non-linéaire, il apparaît que les seuls paramètres conduisant à un algorithme symplectique sont  $\gamma = \frac{1}{2}$  et  $\beta = 0$  [142], c'est-à-dire les paramètres conduisant à l'algorithme explicite exposé à la section 6.1.1. L'intérêt d'obtenir un algorithme symplectique, est que la conservation de grandeurs comme le moment angulaire est toujours satisfaite [142]. Par contre l'énergie montre toujours des oscillations [82]. Pour l'algorithme de Newmark (avec  $\beta \neq 0$ ), dans le cadre non-linéaire, Kane *et al.* [81, 82] ont montré que l'algorithme conservait certaines structures

symplectiques comme le moment angulaire mais uniquement si le pas de temps reste faible.

### 2.2.6 Conclusion sur l'utilisation de Newmark

La stabilité de l'algorithme de Newmark a été analysée pour les problèmes linéaires, dans les cas conservatif et dissipatif. Dans le cadre linéaire conservatif ( $\gamma = \frac{1}{2}$ ), si  $\beta = \frac{1}{4}$  l'algorithme est G-stable pour toutes les tailles des pas de temps. Si  $\beta \neq \frac{1}{4}$ , c'est la pseudo-énergie qui est bornée. L'algorithme est donc seulement A-stable et plus G-stable. Pour les problèmes non-linéaires, l'utilisation de l'algorithme de Newmark conservatif permet de garantir que l'énergie totale du système reste bornée à condition de calculer l'énergie à partir du travail des forces internes et pas de l'énergie interne. Cependant, l'exemple numérique montre que si l'énergie totale reste bornée, les valeurs obtenues sont de toute évidence non physiques quand le pas de temps augmente (divergence). En effet, les transferts d'énergies interne et cinétique augmentent quand la taille du pas de temps augmente, jusqu'à conduire à des énergies internes négatives pour un pas de temps de 1.5s. Cela provient du fait que le travail des forces internes ne correspond pas à la variation de potentiel du ressort, ce qui rend l'algorithme instable dans le cadre non-linéaire.

## 2.3 Intégration temporelle par la famille $\alpha$ -généralisée

Afin de stabiliser (limiter les instabilités numériques venant des hautes fréquences) l'algorithme de Newmark, de la dissipation numérique est introduite. Elle peut être introduite en utilisant Newmark avec  $\gamma > 0.5$ , mais alors l'algorithme est d'une précision au premier ordre par rapport au pas de temps. Afin d'obtenir une précision au second ordre, Hilber, Hughes et Taylor [65] ont proposé de pondérer les forces internes entre les temps  $t^n$  et  $t^{n+1}$ , tandis que Wood, Bossak et Zienkiewicz [148] ont proposé de pondérer les forces d'inertie plutôt que les forces internes. Nous allons maintenant exposer la méthode proposée par Chung et Hulbert [34] qui consiste à combiner ces deux méthodes. Un autre avantage de ces méthodes par rapport à l'algorithme dissipatif de Newmark est la possibilité de minimiser la dissipation des basses fréquences (qui sont les fréquences physiques). Notons cependant, que contrairement à l'algorithme de Newmark, l'énergie ne sera ici bornée que dans le cadre linéaire. Pour des systèmes non-linéaires, seule une tendance asymptotique peut être dégagée et il se peut que l'algorithme soit instable (de l'énergie est introduite artificiellement) comme cela sera montré numériquement à la section 5.6.3.

### 2.3.1 Principe

Les relations de base (d'une précision au second ordre par rapport au pas de temps pour les déplacements et d'une précision au premier ordre pour les vitesses si  $\gamma \neq \frac{1}{2}$ ) entre les déplacements, les vitesses et les accélérations restent les mêmes que pour l'algorithme de Newmark (relations (2.46) et (2.48)). Par contre l'équation d'équilibre (2.38) se réécrit, au nœud  $\xi$ , en pondérant les forces d'inertie entre les temps d'intégration à l'aide du paramètre  $\alpha_M$  et en pondérant les forces internes et externes entre les temps d'intégration à l'aide du paramètre  $\alpha_F$

$$\boxed{[1 - \alpha_M] M^{\xi\mu} [\ddot{x}^{n+1}]^\mu + \alpha_M M^{\xi\mu} [\ddot{x}^n]^\mu = [1 - \alpha_F] [\vec{F}_{ext}^{n+1} - \vec{F}_{int}^{n+1}]^\xi + \alpha_F [\vec{F}_{ext}^n - \vec{F}_{int}^n]^\xi} \quad (2.107)$$

Des choix particuliers des paramètres conduisent aux schémas les plus connus:

- (i)  $\alpha_M = \alpha_F = 0$  pour le schéma de Newmark [109];
- (ii)  $\alpha_M = 0$  pour le schéma de Hilber-Hughes-Taylor [65];
- (iii)  $\alpha_F = 0$  pour le schéma de Wood-Bossak-Zienkiewicz [148].

Le système d'équations (2.46, 2.48, 2.107) est résolu dans le cas général par un algorithme prédicteur-correcteur comme pour Newmark (section 2.2.1). La formule de prédiction

(2.50) reste la même, le calcul du résidu (2.51) est modifié puisque l'équation d'équilibre est différente et devient

$$\begin{aligned} [\Delta \vec{F}^i]^\xi &= [1 - \alpha_M] M^{\xi\mu} [\ddot{x}^{n+1,i}]^\mu + \alpha_M M^{\xi\mu} [\ddot{x}^n]^\mu + [1 - \alpha_F] [\vec{F}_{int}^{n+1,i} - \vec{F}_{ext}^{n+1,i}]^\xi + \\ &\quad \alpha_F [\vec{F}_{int}^n - \vec{F}_{ext}^n]^\xi \end{aligned} \quad (2.108)$$

La formule de correction des inconnues nodales (2.52) reste valable mais la matrice tangente  $\mathbf{S}$  est maintenant définie par

$$\mathbf{S}^{\xi\mu} = \frac{\partial \left\{ M^{\xi\nu} [1 - \alpha_M] [\ddot{x}^{n+1}]^\nu + [1 - \alpha_F] [\vec{F}_{int}^{n+1} - \vec{F}_{ext}^{n+1}]^\xi \right\}}{\partial [\ddot{x}^{n+1}]^\mu} \quad (2.109)$$

En utilisant la définition de la matrice de raideur  $\mathbf{K}$  (2.56), et en la comparant à (2.109), nous pouvons déduire

$$\mathbf{S}^{\xi\mu} = [1 - \alpha_F] \mathbf{K}^{\xi\mu} + [1 - \alpha_M] M^{\xi\nu} \mathbf{I} \frac{\partial \ddot{x}^\nu}{\partial \ddot{x}^\mu} \quad (2.110)$$

Grâce aux équations (2.46) et (2.48), nous pouvons obtenir

$$\frac{\partial \ddot{x}^\nu}{\partial \ddot{x}^\mu} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{I} \delta_{\nu\mu} \quad (2.111)$$

Finalement la relation (2.110) s'écrit

$$\mathbf{S}^{\xi\mu} = [1 - \alpha_F] \mathbf{K}^{\xi\mu} + [1 - \alpha_M] \frac{1}{\beta \Delta t^2} M^{\xi\mu} \mathbf{I} \quad (2.112)$$

### 2.3.2 Précision et stabilité de l'oscillateur harmonique dans le cadre linéaire

Comme pour l'algorithme de Newmark, la stabilité de l'algorithme est étudiée à partir de la matrice spectrale définie par le système d'équations (2.46), (2.48) et (2.107)

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ \Delta t \dot{x}^{n+1} \\ \Delta t^2 \ddot{x}^{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{D(\Omega) - \Omega^2 \beta}{D(\Omega)} & \frac{1 - \alpha_M}{D(\Omega)} & \frac{1 - \alpha_M - 2\beta}{2D(\Omega)} \\ \frac{-\gamma \Omega^2}{D(\Omega)} & \frac{D(\Omega) - \Omega^2 \gamma [1 - \alpha_F]}{D(\Omega)} & \frac{D(\Omega) - \gamma \left[1 + \frac{\Omega^2}{2}\right] [1 - \alpha_F]}{D(\Omega)} \\ \frac{-\Omega^2}{D(\Omega)} & \frac{[\alpha_F - 1] \Omega^2}{D(\Omega)} & \frac{-\alpha_M + [1 - \alpha_F] \left[\beta - \frac{1}{2}\right] \Omega^2}{D(\Omega)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^s(\Omega)} \begin{pmatrix} x^n \\ \Delta t \dot{x}^n \\ \Delta t^2 \ddot{x}^n \end{pmatrix} \quad (2.113)$$

avec

$$D(\Omega) = 1 - \alpha_M + [1 - \alpha_F] \Omega^2 \beta \quad (2.114)$$

Les propriétés numériques de l'algorithme sont obtenues en procédant comme à la section (2.2.2). Nous reprenons ici les résultats principaux, le lecteur désirant plus de détails pouvant les obtenir en se référant à [65, 34, 85]. En étudiant les fréquences propres de cette matrice, la A-stabilité, c'est-à-dire la stabilité inconditionnelle, est obtenue en imposant d'avoir des valeurs propres imaginaires conjuguées [34], ce qui nécessite la vérification des relations suivantes

$$\begin{aligned}\gamma &\geq \frac{1}{2} - \alpha_M + \alpha_F \\ \alpha_M &\leq \alpha_F \leq \frac{1}{2} \\ \beta &\geq \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2} + \gamma \right]^2\end{aligned}\tag{2.115}$$

De plus, en étudiant l'erreur sur la pulsation  $e_\Omega$  et l'erreur sur l'amplitude  $e_\xi$ , il apparaît que pour avoir une précision au second ordre par rapport au pas de temps, il faut vérifier [34]

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_M + \alpha_F\tag{2.116}$$

En analysant  $\rho_d$  le rayon spectral (plus haut module des valeurs propres de  $\mathbf{A}^s$ ) pour  $\Omega$  tendant vers l'infini, les paramètres d'intégration peuvent être exprimés en fonction de  $\rho_\infty$  ( $\rho_d$  pour  $\Omega \rightarrow \infty$ ) afin de maximiser la dissipation des hautes fréquences. La condition qui doit être vérifiée, en supposant (2.116) déjà vérifiée, est alors

$$\beta = \frac{1}{4} [1 - \alpha_M + \alpha_F]^2\tag{2.117}$$

Pour la méthode de Hilber-Hughes-Taylor (HHT) avec  $\alpha_M = 0$  et pour la méthode de Wood-Bossak-Zienkiewicz (WBZ) avec  $\alpha_F = 0$ , les relations (2.116) et (2.117) permettent d'exprimer tous les paramètres en fonction de  $\rho_\infty$  (Table 2.2). Pour le schéma  $\alpha$ -généralisé de Chung-Hulbert (CH), il faut établir une nouvelle relation liant  $\alpha_M$  et  $\alpha_F$ . Cela est obtenu en minimisant la dissipation numérique des basses fréquences [34], ce qui réduit la perte de précision. La relation ainsi obtenue est

$$\alpha_F = \frac{\alpha_M + 1}{3}\tag{2.118}$$

Tous les paramètres sont alors exprimés en fonction de  $\rho_\infty$  (Table 2.2). Il apparaît que pour les méthodes de Chung-Hulbert et de Wood-Bossak-Zienkiewicz, il est possible d'avoir  $\rho_\infty = 0$ . Dès lors, des perturbations de hautes fréquences (comme celles venant des modes numériques) sont amorties en un pas de temps (*c.f.* appendice A.2), ce qui rend l'algorithme L-stable dans le cadre linéaire (*i.e.* les hautes fréquences sont amorties en un pas de temps).

Table 2.2: Propriétés de l'algorithme  $\alpha$ -généralisé

algorithme	$\alpha_M$	$\alpha_F$	$\beta$	$\gamma$	condition sur $\rho_\infty$	ordre
WBZ	$\frac{\rho_\infty-1}{\rho_\infty+1}$	0	$\frac{1}{[1+\rho_\infty]^2}$	$\frac{3-\rho_\infty}{2+2\rho_\infty}$	$\rho_\infty \in [0, 1]$	2
HHT	0	$\frac{1-\rho_\infty}{\rho_\infty+1}$	$\frac{1}{[1+\rho_\infty]^2}$	$\frac{3-\rho_\infty}{2+2\rho_\infty}$	$\rho_\infty \in [\frac{1}{2}, 1]$	2
CH	$\frac{2\rho_\infty-1}{\rho_\infty+1}$	$\frac{\rho_\infty}{\rho_\infty+1}$	$\frac{1}{[1+\rho_\infty]^2}$	$\frac{3-\rho_\infty}{2+2\rho_\infty}$	$\rho_\infty \in [0, 1]$	2

### 2.3.3 Précision et stabilité dans le cadre non-linéaire

Récemment, une étude dans le cadre non-linéaire a été effectuée par Erlicher *et al.* [46]. Nous reprenons ici les conclusions principales de l'étude. Remarquons dans un premier temps que dans le cadre non-linéaire, la pondération peut se faire de deux manières. La première consiste à pondérer les forces internes selon

$$\vec{F}_{int}^{n+1-\alpha_F} = [1 - \alpha_F] \vec{F}_{int}(\vec{x}^{n+1}) + \alpha_F \vec{F}_{int}(\vec{x}^n) \quad (2.119)$$

L'autre manière consiste à pondérer les déplacements pour obtenir les forces

$$\vec{F}_{int}^{n+1-\alpha_F} = \vec{F}_{int}([1 - \alpha_F] \vec{x}^{n+1} + \alpha_F \vec{x}^n) \quad (2.120)$$

comme l'ont proposé Kuhl et Crisfield [85]. Dans le cadre linéaire, ces deux approches sont identiques. Dans le cadre non-linéaire, l'analyse théorique proposée par Erlicher *et al.* [46] utilise la formulation classique (2.119).

En analysant l'erreur de troncature [46], il apparaît que, si la relation (2.116) est vérifiée, la précision des déplacements dans le cadre non-linéaire est au second ordre par rapport au pas de temps. Cependant la précision sur les accélérations est au premier ordre (ce qui est également vrai en linéaire [46]), sauf pour le cas particulier  $\alpha_M = \alpha_F = \frac{1}{2}$ .

L'analyse de la stabilité du schéma s'effectue de la même manière que pour l'algorithme de Newmark (section 2.2.3). Nous utilisons les mêmes définitions du travail des forces internes (2.79), du travail des forces externes (2.80), de l'énergie cinétique (2.81), de l'énergie totale définie par (2.94) à partir de l'énergie interne, et de la pseudo-énergie (2.87) que pour l'algorithme de Newmark. Les relations (2.46) et (2.48) sont toujours d'application, mais nous ne supposons plus  $\gamma = \frac{1}{2}$ . Dès lors en utilisant l'équation d'équilibre (2.107) et non plus (2.49), l'équation (2.95) devient [46]

$$\begin{aligned}
\tilde{E}^{n+1} - W_{ext}^{n+1} - \tilde{E}^n + W_{ext}^n \rightarrow & \\
[\gamma - 1 + \alpha_M] [\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n]^\mu \cdot M^{\mu\xi} [\ddot{\bar{x}}^{n+1} - \ddot{\bar{x}}^n]^\xi - & \\
\left[\frac{1}{2} - \alpha_F\right] [\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n]^\mu \cdot \left[\vec{F}_{int}^{n+1} - \vec{F}_{ext}^{n+1} - \vec{F}_{int}^n + \vec{F}_{ext}^n\right]^\mu - & \quad (2.121) \\
\Delta t^2 \left[\gamma - \frac{1}{2}\right] \left[\beta - \frac{\gamma}{2}\right] [\ddot{\bar{x}}^{n+1} - \ddot{\bar{x}}^n]^\mu \cdot M^{\mu\xi} [\ddot{\bar{x}}^{n+1} - \ddot{\bar{x}}^n]^\xi + & \\
[\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n]^\mu \cdot \Delta \mathbf{K}_{res}^{\mu\xi} [\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n]^\xi \text{ si } Tol \rightarrow 0 &
\end{aligned}$$

avec  $\Delta \mathbf{K}_{res}$  défini par (2.92) et  $Tol$  conditionnant le défaut d'équilibre (2.55). Le terme  $\Delta \mathbf{K}_{res}$ , venant des non-linéarités, peut introduire de l'énergie dans le système, ce qui conduit à l'instabilité de l'algorithme, qui n'est donc plus G-stable. Remarquons que même dans le cadre linéaire, il est impossible d'assurer que  $\tilde{E}^{n+1} - W_{ext}^{n+1} - \tilde{E}^n + W_{ext}^n$  est négatif. En effet, le terme  $[\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n]^\mu \cdot M^{\mu\xi} [\ddot{\bar{x}}^{n+1} - \ddot{\bar{x}}^n]^\xi$  peut être positif ou négatif. Néanmoins, il est possible de définir une nouvelle norme énergétique comme proposé par Hughes ([70], page 564), qui est strictement décroissante dans le cadre linéaire. A nouveau, l'algorithme n'est donc plus G-stable mais seulement A-stable dans le cadre linéaire.

Nous venons de voir que lors d'une analyse non-linéaire, l'énergie du système est susceptible d'augmenter. Par contre, pour les hautes fréquences, et pour un nombre de pas de temps tendant vers l'infini, Erlicher *et al.* [46] ont montré que l'énergie associée aux hautes fréquences diminue asymptotiquement vers  $\rho_\infty^2$ , ce qui rend la méthode de Chung-Hulbert A-stable pour les hautes fréquences uniquement (L-stable pour les méthodes de Chung-Hulbert et de Wood-Bossak-Zienkiewicz si  $\rho_\infty = 0$ ). Pour les basses fréquences, ou bien si seuls les premiers pas de temps sont analysés, l'algorithme n'est pas stable dans le sens où de l'énergie est introduite numériquement (overshoot). Ces développements sont repris en appendice A.2.

Nous allons montrer au travers d'un exemple numérique les limitations de l'utilisation de cet algorithme dans le cadre non-linéaire.

### 2.3.4 Exemple : Etude d'un système masse-ressort

Nous reprenons l'exemple du système masse ressort résolu dans la section (2.2.4) par l'algorithme de Newmark. L'algorithme de résolution utilisé est celui de Chung-Hulbert avec un rayon spectral infini  $\rho_\infty = 0.8$ . La simulation est obtenue pour différents pas de temps (0.25s, 0.5s, 1s et 1.5s). La Figure 2.7 illustre l'évolution de la longueur du ressort. Par rapport à la solution obtenue par Newmark (Figure 2.3), nous voyons, sauf pour le pas de temps égal à 1.5s, que les oscillations physiques sont dissipées et que la solution tend vers une longueur comprise en la longueur d'équilibre et la longueur initiale. Cette dissipation est d'autant plus importante que la taille du pas de temps augmente.

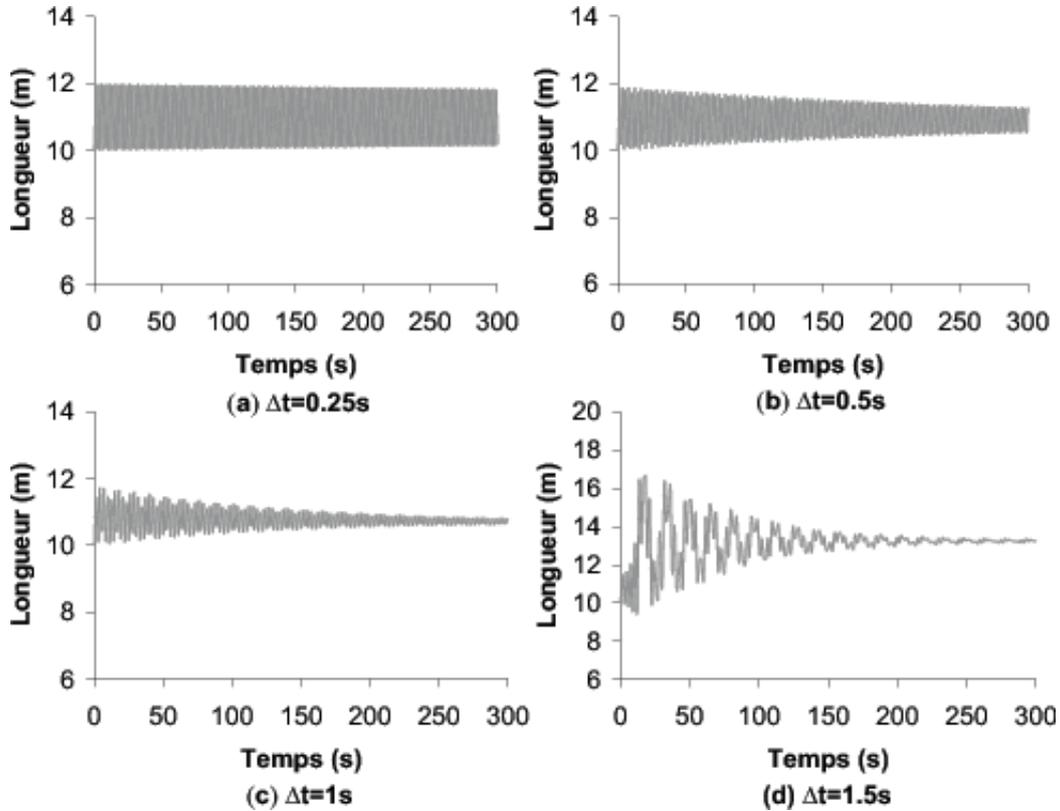


Figure 2.7: Evolution temporelle de la longueur du ressort, résolution par le schéma de Chung-Hulbert ( $\rho_\infty = 0.8$ ) - (a)  $\Delta t = 0.25(s)$  - (b)  $\Delta t = 0.5(s)$  - (c)  $\Delta t = 1s$  - (d)  $\Delta t = 1.5s$ .

Toutefois, pour un pas de temps de  $1.5s$ , la simulation diverge vers une solution non-physique (la longueur finale du ressort est différente de la longueur initiale et de la longueur d'équilibre). Cette constatation se confirme par l'analyse de la trajectoire de la masse (Figure 2.8). L'étude de l'évolution de l'énergie (Figure 2.9) et du moment angulaire (Figure 2.10) montre que si les oscillations autour de la position d'équilibre du ressort diminuent avec le temps, le mouvement d'entraînement de rotation diminue aussi (la quantité de mouvement angulaire diminue). Pour le pas de temps égal à  $1.5s$ , le mouvement de rotation s'amenuise, et il ne reste plus qu'un mouvement quasi rectiligne du ressort (Figure 2.11) qui ne passe plus que par deux positions extrêmes. Rappelons que, pour  $\Delta t = 1.5s$ , c'est le travail des forces internes qui devient négatif et pas l'énergie interne, ces valeurs étant distinctes dans le cadre non-linéaire.

### 2.3.5 Conclusion sur l'utilisation de la méthode $\alpha$ -généralisée

L'algorithme  $\alpha$ -généralisé n'est A-stable que dans le domaine linéaire où il n'est pas G-stable puisque même dans le domaine linéaire ce n'est pas l'énergie qui est bornée mais une autre norme. Dans le domaine non-linéaire, il est instable et seul l'amortissement des

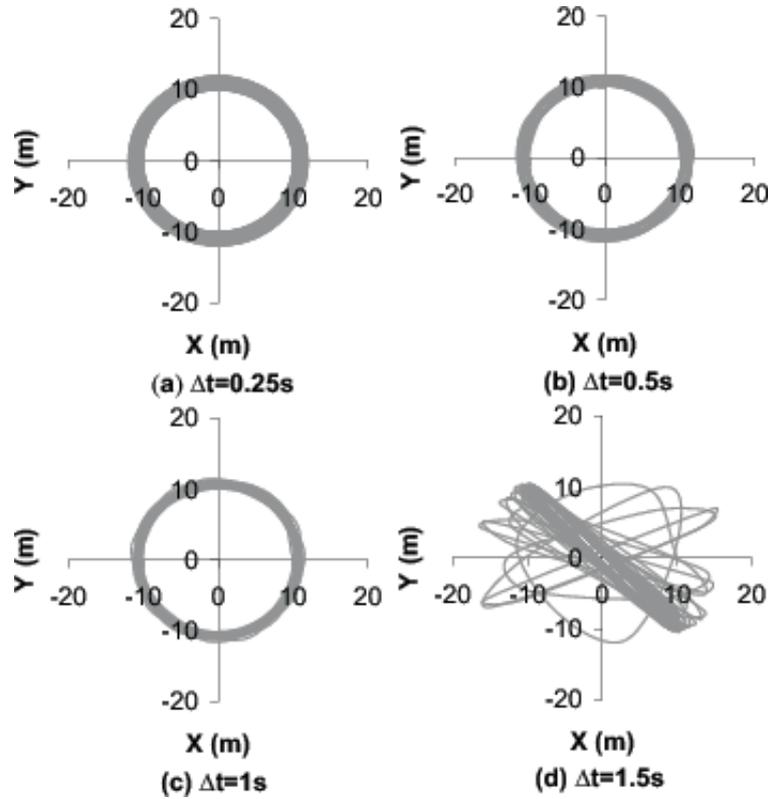


Figure 2.8: Trajectoire de la masse dans le plan, résolution par le schéma de Chung-Hulbert ( $\rho_\infty = 0.8$ ) - (a)  $\Delta t = 0.25(s)$  - (b)  $\Delta t = 0.5(s)$  - (c)  $\Delta t = 1s$  - (d)  $\Delta t = 1.5s$ .

hautes fréquences est garanti après un nombre théoriquement infini de pas de temps. De plus, la dissipation numérique introduite pour stabiliser le processus, provoque un ralentissement (pouvant aller jusqu'à l'arrêt) du mouvement d'entraînement. Néanmoins, l'amortissement des modes numériques de hautes fréquences permet à l'algorithme  $\alpha$ -généralisé d'intégrer des problèmes non-linéaires, tant que la taille du pas de temps reste faible. Pour ce faire, un contrôle de la taille du pas de temps comme nous l'avons proposé dans [110] (*c.f.* section 7.1) permet de garantir la précision des résultats. Cette méthode s'est avérée efficace dans de nombreux problèmes numériques comme cela est mentionné par Daniels [43, 42].

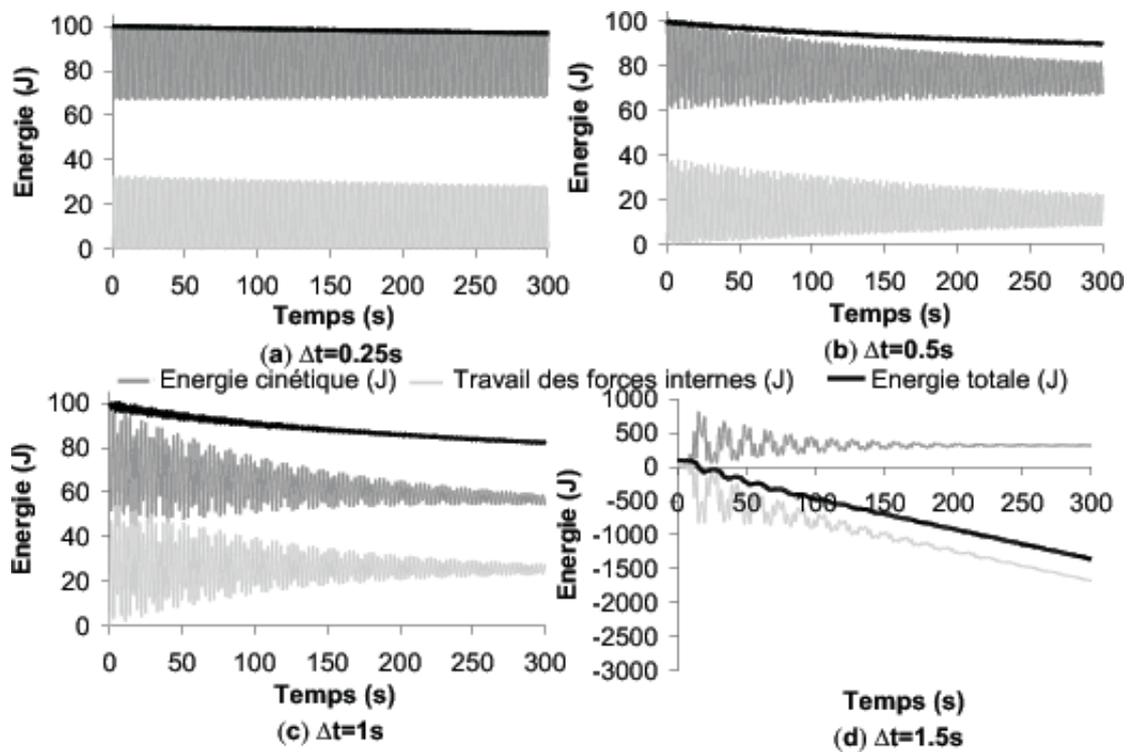


Figure 2.9: Evolution temporelle de l'énergie, résolution par le schéma de Chung-Hulbert ( $\rho_\infty = 0.8$ ) - (a)  $\Delta t = 0.25(s)$  - (b)  $\Delta t = 0.5(s)$  - (c)  $\Delta t = 1s$  - (d)  $\Delta t = 1.5s$ .

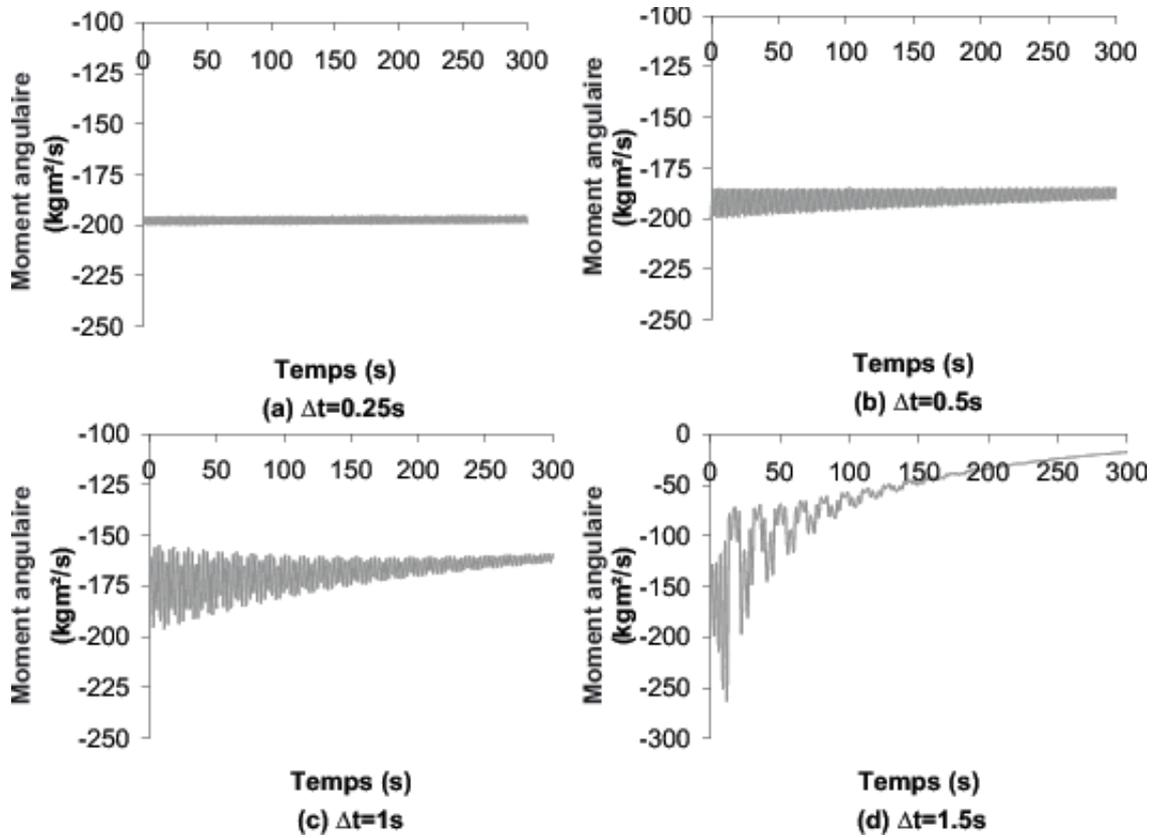


Figure 2.10: Evolution temporelle du moment angulaire, résolution par le schéma de Chung-Hulbert ( $\rho_\infty = 0.8$ ) - (a)  $\Delta t = 0.25\text{s}$  - (b)  $\Delta t = 0.5\text{s}$  - (c)  $\Delta t = 1\text{s}$  - (d)  $\Delta t = 1.5\text{s}$ .

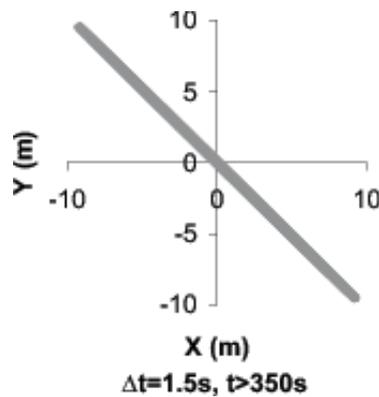


Figure 2.11: Trajectoire finale ( $t > 350\text{s}$ ) de la masse dans le plan, résolution par le schéma de Chung-Hulbert ( $\rho_\infty = 0.8$ ) avec  $\Delta t = 1.5\text{s}$ .

## 2.4 Conclusions sur l'intégration temporelle d'une discrétisation éléments-finis

Dans ce chapitre, nous avons exposé les méthodes classiques pour intégrer temporellement l'équation d'équilibre. Pour ce faire nous avons considéré le principe des travaux virtuels des milieux continus. Les lois de conservation en ont été déduites. En intégrant par partie ce principe et en effectuant une discrétisation éléments-finis, l'équation d'équilibre discrétisée a été établie.

Nous avons alors exposé la méthode la plus répandues pour intégrer temporellement cette équation : l'algorithme de Newmark. Dans le cadre non-linéaire, cet algorithme, s'est révélé être instable. En effet, l'énergie totale du système n'est conservée que lorsqu'est pris en compte le travail des forces internes et pas le potentiel interne. Or, l'algorithme de Newmark ne peut faire correspondre ces deux grandeurs que lorsque le pas de temps reste petit. L'algorithme dissipatif  $\alpha$ -généralisé est lui aussi instable dans le cadre non-linéaire. En effet, seulement les hautes fréquences sont amorties après un grand nombre de pas de temps. De plus, dans le cadre linéaire, seul l'algorithme de Newmark avec  $\gamma = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{1}{4}$  permet de conserver l'énergie constante (G-stabilité). Pour d'autres paramètres, ainsi que pour la méthode  $\alpha$ -généralisée, seule une grandeur se rapportant à l'énergie est décroissante au cours du temps dans le cadre linéaire. Il est donc A-stable (car inconditionnellement) mais plus G-stable dans le cadre linéaire.

Pratiquement, l'algorithme de Newmark n'est utilisé que lorsqu'aucune dissipation n'est nécessaire pour dissiper les hautes fréquences, c'est à dire si le nombre de degrés de liberté est faible. Lorsque l'utilisateur veut de la dissipation numérique, c'est le schéma de Chung-Hulbert qui permet d'amortir le mieux les hautes fréquences tout en amortissant le moins les basses fréquences. Un faible amortissement numérique est obtenu pour des valeurs de  $\rho_\infty > 0.7$  et un fort amortissement numérique est obtenu pour des valeurs de  $\rho_\infty < 0.3$ . Un fort amortissement est nécessaire pour des problèmes où les modes propres de hautes fréquences (purements numériques) ont des temps caractéristiques inférieurs au temps caractérisant la dynamique (emboutissage de tôle, ...). La précision n'est alors pas altérée si l'énergie dissipée plastiquement est nettement supérieure à l'énergie dissipée numériquement. Dans le cas contraire où la dynamique est suffisamment rapide par rapport aux modes propres (impact, ...), un faible amortissement peut suffire.

En conclusion, il apparaît que les algorithmes traditionnels d'intégration ne peuvent être employés dans le cadre non-linéaire que lorsque la taille du pas de temps est limitée. Pour pouvoir travailler avec de plus grands pas, il est donc indispensable de développer de nouveaux algorithmes dans le cadre non-linéaire, ce qui est l'objet du prochain chapitre.



## Chapitre 3

# Etat de l'art de l'intégration énergétiquement consistante dans le cadre non-linéaire

Nous avons vu au chapitre précédent, que pour intégrer l'équation d'équilibre (2.38), les méthodes traditionnelles de Newmark ou de la famille  $\alpha$ -généralisée, souffraient d'un manque de stabilité dans le cadre non-linéaire.

L'algorithme Energy Momentum Conserving Algorithms ou EMCA, proposé par Simo et Tarnow [140,138] a été le premier à vérifier la conservation des moments linéaires et angulaires, ainsi que la conservation de l'énergie dans le cadre non-linéaire. Cet algorithme combine un schéma du point milieu combiné avec une expression adéquate des forces internes. Cette expression adéquate est construite en fonction de la non-linéarité étudiée. En effet, l'expression obtenue par un calcul variationnel de la force au temps  $t$  est modifiée pour tenir compte du fait de l'existence d'une discrétisation temporelle. La nouvelle expression de la force doit être exacte au second ordre par rapport au pas de temps pour avoir un schéma précis au second ordre. De plus, son intégration sur le pas de temps doit vérifier les lois de conservation.

Lorsque le nombre de degrés de liberté du modèle augmente, des modes numériques de hautes fréquences apparaissent. Afin d'éviter l'excitation de ces modes, ce qui provoque des oscillations non-physiques et des problèmes de convergence lors des itérations, de la dissipation numérique a été introduite par Armero et Romero [5, 130, 6, 7]. Cet algorithme (appelé Energy Dissipative Momentum Conserving algorithm ou EDMC) préserve la conservation des moments linéaire et angulaire, et dissipe toujours de l'énergie, même dans le cadre non-linéaire.

Une autre solution pour vérifier les équations de conservation est d'utiliser soit un schéma  $\alpha$ -généralisé, soit un schéma EDMC, et d'augmenter les équations avec des contraintes de moments et d'énergie comme proposé par Hughes *et al.* [71] et par Kulh *et al.* [85, 86, 87]. Cette solution est appelée Constraint Energy Momentum Algorithm (CEMA) dans le premier cas et Modified Energy-Momentum Method (MEMM) dans le second cas. Dans ce principe de résolution, l'énergie des hautes fréquences est dissipée

et réintroduite dans le système au niveau des basses fréquences. Remarquons cependant que dans ces travaux [85, 86, 87], le terme de dissipation des vitesses introduit plus tard par Armero et Romero [5, 130, 6, 7, 131], nécessaire pour dissiper les hautes fréquences (en évitant la bifurcation des valeurs propres de la matrice spectrale), n'est pas pris en compte. Finalement, les propriétés de conservation peuvent être assurées en utilisant une méthode d'éléments-finis temporels du type Petrov-Galerkin, comme développée par Betsch et Steinmann [22, 21, 23]. Graham *et al.* ont montré [57] que la méthode de Betsch et Steinmann [22, 21, 23], est équivalente à celle de Simo et Gonzalez [138], sous certaines conditions. Bauchau et Theron [13] ainsi que Bottasso et Borri [26] ont obtenu, respectivement, une approche conservative (Energy Preserving) et une approche dissipative (Energy Decaying), du calcul des poutres non-linéaires, en utilisant, respectivement, une approximation de la méthode temporelle de Galerkin et une approximation de la méthode discontinue temporellement de Galerkin. Cette approximation consiste à transformer l'intégrale temporelle de Galerkin, avec des fonctions de formes du premier degré, en une différence finie. Cette transformation est le seul moyen d'évaluer exactement cette intégrale (et donc de garantir la stabilité), tout en évitant de devoir recourir à une intégration avec beaucoup de points de Gauss (ce qui est trop onéreux). Ces algorithmes (Preserving et Decaying) ont été étendus aux problèmes élasto-dynamiques hyperélastiques par Bauchau et Joo [12]. Remarquons que l'algorithme conservatif obtenu, d'une précision du second ordre, est similaire à celui de Simo et Tarnow [140], alors que l'algorithme dissipatif, d'une précision du troisième ordre, ne peut quant à lui gérer la dissipation numérique et double le nombre d'inconnues et d'équations. Une approche conservative (Energy Preserving) et une approche dissipative (Energy Decaying), ont été obtenues en utilisant une méthode de type Runge-Kutta par Bottasso et Borri [27], pour l'étude des poutres non-linéaires, et par Borri *et al.* [24] ainsi que par Bottasso *et al.* [28] pour l'étude de plusieurs corps non-linéaires. Les méthodes basées sur l'approximation de Galerkin et les méthodes basées sur l'algorithme de Runge-Kutta ont été comparées et unifiées pour l'étude de plusieurs corps non-linéaires par Bauchau et Bottasso [9]. Cette unification a conduit à utiliser l'approximation de Galerkin (Energy Preserving) ou l'approximation discontinue temporellement de Galerkin (Energy Decaying) pour développer des algorithmes de différences finies respectivement conservatif ou dissipatif, avec contrôle de la dissipation numérique, pour la simulation des coques, des poutres et des câbles non-linéaires [11, 25, 10]. Dans le cas de la dissipation numérique, la précision est du troisième ordre et le moment angulaire n'est plus préservé.

Comme il apparaît que la méthode de Galerkin, utilisée avec des fonctions d'interpolation du premier ordre, conduit au même formalisme que l'algorithme EMCA, nous porterons notre attention dans ce chapitre, sur ce dernier. En effet, l'utilisation de fonctions d'interpolation d'un ordre plus élevé, conduit à des temps de calcul beaucoup plus importants, et ne sont donc pas traditionnellement utilisées.

Graham et Jelenić [56] ont récemment proposé une méthode d'intégration à un pas pour résoudre un système soumis à une force centrale (tel que celui résolu numériquement aux sections précédentes). Cette méthode d'intégration consiste à évaluer les paramètres

d'intégration en fonction de l'ordre de précision souhaité. Une fois que les conditions de préservation de l'énergie, de l'équilibre relatif et de réversibilité sont remplies, deux paramètres restent à sélectionner qui conditionnent la précision. Il apparaît que pour des paramètres constants, la précision atteinte ne peut être que du second ordre et que le schéma correspond au schéma EMCA. Pour obtenir une précision plus importante, ces deux paramètres dépendent du pas de temps et de la configuration précédente, ce qui conduit à diminuer la robustesse de la simulation. De plus, il apparaît qu'augmenter l'ordre de précision ne permet de diminuer l'erreur globale que pour de petits pas de temps et qu'un algorithme basé sur les principes de conservation est plus efficace qu'un algorithme basé sur l'ordre de précision. Pour ces raisons, nous n'étudierons pas d'algorithme d'ordre supérieur.

Dans ce chapitre, nous allons présenter un schéma d'intégration proposé par Simo et Tarnow [140] qui conserve l'énergie dans le cadre non-linéaire. Nous exposerons aussi un schéma d'intégration, proposé par Armero et Romero [6, 7] basé sur le schéma de Simo et Tarnow [140], qui dissipe l'énergie, tout en restant énergétiquement consistant dans le cadre non-linéaire. L'expression des forces internes dépendant de la non-linéarité, nous détaillerons avec précision l'expression relative à un ressort non-linéaire. Nos développements relatifs à l'expression de ces forces pour un modèle hypoélastique et pour le contact feront l'objet des chapitres ultérieurs.

### 3.1 Le schéma Energy-Momentum Conserving Algorithm (EMCA)

La solution proposée par Simo et Tarnow [140] pour obtenir un algorithme d'intégration stable (physiquement consistant) dans le cadre non-linéaire consiste à adapter l'intégration pour chaque type de non-linéarité. Par opposition aux autres méthodes qui consistaient à avoir un algorithme d'intégration général, étudié dans le cadre linéaire et appliqué dans le cadre non-linéaire, Simo et Tarnow ont proposé de partir d'un schéma du point milieu et d'établir une formulation des forces qui conduit à vérifier les lois de conservation.

#### 3.1.1 Principe du schéma du point milieu

Pour une intégration du temps  $t^n$  jusqu'au temps  $t^n + \Delta t = t^{n+1}$ , les relations entre les positions et les vitesses sont obtenues de la même manière que pour Newmark (section 2.2.1) en prenant  $\beta = \frac{1}{4}$  dans la relation (2.46) et en prenant  $\gamma = \frac{1}{2}$  dans la relation (2.48). Les discrétisations sont donc au second ordre par rapport au pas de temps. Il vient pour les déplacements

$$[\vec{x}^{n+1}]^\xi = [\vec{x}^n]^\xi + \frac{\Delta t}{2} [\dot{\vec{x}}^{n+1}]^\xi + \frac{\Delta t}{2} [\dot{\vec{x}}^n]^\xi \quad (3.1)$$

et pour les vitesses

$$[\dot{\vec{x}}^{n+1}]^\xi = [\dot{\vec{x}}^n]^\xi + \frac{\Delta t}{2} [\ddot{\vec{x}}^{n+1}]^\xi + \frac{\Delta t}{2} [\ddot{\vec{x}}^n]^\xi \quad (3.2)$$

La loi d'équilibre (2.38) au nœud  $\xi$  se discrétise en

$$\frac{1}{2} M^{\xi\mu} [\ddot{\vec{x}}^{n+1} + \ddot{\vec{x}}^n]^\mu = [\vec{F}_{ext}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}}]^\xi \quad (3.3)$$

avec  $\vec{F}^{n+\frac{1}{2}}(\vec{x}^n, \vec{x}^{n+1})$ , l'expression des forces (internes ou externes) dans la configuration  $n + \frac{1}{2}$ . Dans le cadre non-linéaire, nous avons  $\vec{F}^{n+\frac{1}{2}}(\vec{x}^n, \vec{x}^{n+1}) \neq \vec{F}\left(\frac{\vec{x}^n + \vec{x}^{n+1}}{2}\right)$ . L'algorithme de résolution de ces équations est similaire à celui utilisé pour le schéma de Newmark (algorithme prédicteur-correcteur). Nous l'expliquons en appendice B.1. Afin d'obtenir un schéma stable dans le cadre non-linéaire, la manière d'évaluer les forces  $\vec{F}^{n+\frac{1}{2}}(\vec{x}^n, \vec{x}^{n+1})$  dépendra donc de la non-linéarité étudiée. Pour ce faire, il faudra que ces forces vérifient les lois de conservation.

### 3.1.2 Discrétisation temporelle des lois de conservation

Lors de l'intégration de l'équation (3.3), l'algorithme doit vérifier la conservation des moments linéaire (2.16) et angulaire (2.21), ainsi que la conservation de l'énergie (2.27). Les deux premières conditions résultent du principe physique interdisant aux forces internes de modifier le mouvement rigide d'un corps. La dernière condition assure que l'énergie totale du système est préservée pour une transformation réversible et que l'énergie du système diminue pour une transformation irréversible.

#### La conservation du moment linéaire

Soit  $\vec{L}$  le vecteur du moment linéaire défini par (2.15). Tenant compte d'une discrétisation éléments-finis (2.6), il vient

$$\vec{L} = \sum_{\xi} M^{\xi\mu} \dot{x}^{\mu} \quad (3.4)$$

La conservation de  $\vec{L}$  (2.16) est discrétisée sur un pas de temps en

$$\vec{L}^{n+1} - \vec{L}^n = \Delta t \sum_{\xi} \left[ \vec{F}_{ext}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi} \quad (3.5)$$

En effectuant une somme sur  $\xi$  dans l'équation (3.3), et en utilisant (3.2), il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \sum_{\xi} M^{\xi\mu} \left[ \dot{x}^{n+1} - \dot{x}^n \right]^{\mu} &= \sum_{\xi} \left[ \vec{F}_{ext}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi} \\ \frac{1}{\Delta t} \left[ \vec{L}^{n+1} - \vec{L}^n \right] &= \sum_{\xi} \left[ \vec{F}_{ext}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Si (3.5) est comparée à (3.6), les forces internes doivent vérifier la relation

$$\sum_{\xi} \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi} = 0 \quad (3.7)$$

qui correspond physiquement à dire que les forces internes ne peuvent modifier la trajectoire d'un corps.

#### La conservation du moment angulaire

Soit  $\vec{J}$  le vecteur du moment angulaire (2.20) discrétisé grâce à (2.6) par

$$\vec{J} = M^{\xi\mu} \left[ \vec{x}^{\xi} \wedge \dot{x}^{\mu} \right] \quad (3.8)$$

La conservation de  $\vec{J}$  (2.21) sur un pas de temps est discrétisée en

$$\vec{J}^{n+1} - \vec{J}^n = \Delta t \left[ \frac{\vec{x}^n + \vec{x}^{n+1}}{2} \right]^\xi \wedge \left[ \vec{F}_{ext}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \quad (3.9)$$

Le produit vectoriel de  $\vec{x}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\vec{x}^n + \vec{x}^{n+1}}{2}$  par la relation (3.3) donne

$$M^{\xi\mu} \left[ \vec{x}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \wedge \left[ \frac{\ddot{\vec{x}}^{n+1} + \ddot{\vec{x}}^n}{2} \right]^\mu = \left[ \vec{x}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \wedge \left[ \vec{F}_{ext}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \quad (3.10)$$

Ou encore en utilisant (3.1), (3.2) et le fait que  $M^{\xi\mu} = M^{\mu\xi}$ , le premier membre devient

$$\begin{aligned} M^{\xi\mu} \left[ \vec{x}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \wedge \left[ \frac{\ddot{\vec{x}}^{n+1} + \ddot{\vec{x}}^n}{2} \right]^\mu &= \frac{1}{2\Delta t} M^{\xi\mu} \left[ \vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n \right]^\xi \wedge \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} \right]^\mu - \\ &\quad \frac{1}{2\Delta t} M^{\xi\mu} \left[ \vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n \right]^\xi \wedge \left[ \dot{\vec{x}}^n \right]^\mu \\ &= \frac{1}{\Delta t} M^{\xi\mu} \left\{ \left[ \vec{x}^{n+1} \right]^\xi \wedge \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} \right]^\mu - \left[ \vec{x}^n \right]^\xi \wedge \left[ \dot{\vec{x}}^n \right]^\mu \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Et (3.10) se réécrit

$$\frac{1}{\Delta t} \left[ \vec{J}^{n+1} - \vec{J}^n \right] = \left[ \vec{x}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \wedge \left[ \vec{F}_{ext}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \quad (3.12)$$

Si nous comparons (3.9) et (3.12), les forces internes doivent vérifier

$$\left[ \frac{\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n}{2} \right]^\xi \wedge \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi = 0 \quad (3.13)$$

qui correspond également à dire que les forces internes ne peuvent modifier la trajectoire d'un corps.

### La conservation de l'énergie

Soient  $K$ ,  $W_{ext}$  et  $W_{int}$  respectivement l'énergie cinétique, le travail des forces externes, et le travail des forces internes définis par (2.24) et respectivement discrétisés grâce à (2.35), (2.36) et (2.37). Remarquons que si  $U_{int}$  représente l'énergie interne, nous avons  $U_{int} \neq W_{int}$  car  $W_{int}$  représente le travail des forces internes (2.79), ce qui ne correspond pas toujours à l'énergie interne comme nous l'avons vu pour l'algorithme de Newmark (section 2.2.3). Néanmoins, si l'algorithme est énergétiquement consistant, la relation liant ces deux grandeurs est la relation (2.25). Soit  $E$  l'énergie du système

définie par (2.26). La conservation de l'énergie (2.27) sur un pas de temps se discrétise en

$$E^{n+1} - E^n = -\Delta_{int} + W_{ext}^{n+1} - W_{ext}^n \quad (3.14)$$

avec  $\Delta_{int} \geq 0$  la dissipation physique (provenant de la plastification, du frottement, ...) durant le pas de temps entre la configuration  $n$  et  $n + 1$ . Le produit scalaire entre  $\dot{\bar{x}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\dot{\bar{x}}^n + \dot{\bar{x}}^{n+1}}{2}$  et la relation (3.3) donne

$$\frac{1}{2} M^{\xi\mu} \left[ \ddot{\bar{x}}^n + \ddot{\bar{x}}^{n+1} \right]^\mu \cdot \left[ \dot{\bar{x}}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi = \left[ \vec{F}_{ext}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \cdot \left[ \dot{\bar{x}}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \quad (3.15)$$

Grâce à la relation (3.2) et le fait que  $M^{\xi\mu} = M^{\mu\xi}$ , le premier membre de cette relation devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M^{\xi\mu} \left[ \ddot{\bar{x}}^n + \ddot{\bar{x}}^{n+1} \right]^\mu \cdot \left[ \dot{\bar{x}}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi &= \frac{M^{\xi\mu}}{2\Delta t} \left\{ \left[ \dot{\bar{x}}^{n+1} \right]^\xi \cdot \left[ \dot{\bar{x}}^{n+1} \right]^\mu - \left[ \dot{\bar{x}}^n \right]^\xi \cdot \left[ \dot{\bar{x}}^n \right]^\mu \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta t} [K^{n+1} - K^n] \end{aligned} \quad (3.16)$$

et grâce à la relation (3.1), le second membre devient

$$\begin{aligned} \left[ \vec{F}_{ext}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \cdot \left[ \dot{\bar{x}}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi &= \frac{1}{\Delta t} \left[ \vec{F}_{ext}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \cdot \left[ \bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n \right]^\xi \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left\{ W_{ext}^{n+1} - W_{ext}^n - \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \cdot \left[ \bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n \right]^\xi \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

L'équation (3.15) devient alors

$$K^{n+1} - K^n = W_{ext}^{n+1} - W_{ext}^n - \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \cdot \left[ \bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n \right]^\xi \quad (3.18)$$

Si (3.14) est comparée à (3.18), alors la relation que les forces internes doivent vérifier est

$$\left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \cdot \left[ \bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n \right]^\xi = U_{int}^{n+1} - U_{int}^n + \Delta_{int} \quad (3.19)$$

Il reste maintenant à établir la formulation de  $F_{int}^{n+\frac{1}{2}}$  qui vérifiera les relations (3.7), (3.13) et (3.19).

### 3.1.3 Construction des forces internes

L'expression adéquate des forces internes pour un ressort a été donnée par Simo, Gonzalez et Tarnow [142, 54, 52]. Simo et Tarnow [140, 138] ont également donné cette

expression pour un modèle hyperélastique (c'est-à-dire dont les contraintes dérivent d'un potentiel) de Saint Venant-Kirchhoff. Ensuite, ce modèle a été étendu aux coques [141, 153, 85, 134], aux éléments coques mixtes [103], aux poutres [132], aux matériaux composites [29] et aux systèmes dynamiques de plusieurs corps [62, 30]. Une généralisation à d'autres modèles hyperélastiques a été donnée par Laursen et Meng [93] en résolvant une nouvelle équation à chaque point matériel (c'est à dire aux points d'intégration dans le cadre de la méthode éléments-finis). Une autre solution, évitant cette procédure itérative, a été proposée par Gonzalez et Simo [54, 52, 53] en donnant une formulation générale des forces internes pour un modèle hyperélastique. L'algorithme EMCA a récemment été étendu par Meng et Laursen [101, 102] au cas où des déformations plastiques apparaissent. Dans un tel algorithme, l'énergie reste conservée tant qu'aucune déformation plastique n'apparaît, et dissipe l'énergie de manière consistante avec le modèle physique quand des déformations plastiques apparaissent. Dans ces travaux, les matériaux utilisés sont toujours de type hyperélastique.

Dans cette section, nous allons expliquer comment établir l'expression des forces internes pour un système masse ressort, afin de mettre en évidence les performances de l'algorithme. Dans le prochain chapitre, nous exposerons une méthode originale que nous avons développée pour établir l'expression de ces forces dans le cas des matériaux hypoélastiques. Pour ce modèle, les contraintes sont évaluées par une loi d'évolution et ne dérivent pas d'un potentiel, ce qui rend les considérations mathématiques plus complexes, mais plus générales, pour arriver à vérifier la relation (3.19). Nous détaillerons aussi les méthodes utilisées pour la gestion du contact dans un chapitre ultérieur.

L'expression des forces internes pour un système masse-ressort, rendant le schéma du point milieu conservatif, a été décrite en détails dans [142, 54, 52]. Soit un ressort joignant les nœuds  $\xi$  et  $\mu$  (ces indices s'interchangeant dans les expressions suivantes). Soit  $U(l)$  le potentiel des forces internes du ressort. Ce potentiel dépend de la longueur  $l = \|\vec{x}^\xi - \vec{x}^\mu\|$  du ressort. Soit l'expression des forces internes

$$\begin{aligned} \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi &= \frac{U(l^{n+1}) - U(l^n)}{l^{n+1} - l^n} \left\{ [\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n]^\xi - [\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n]^\mu \right\} \text{ si } l^{n+1} \neq l^n \\ &= \frac{\frac{\partial U}{\partial l} \left( \frac{l^{n+1} + l^n}{2} \right)}{l^{n+1} + l^n} \left\{ [\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n]^\xi - [\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n]^\mu \right\} \text{ si } l^{n+1} \rightarrow l^n \end{aligned} \quad (3.20)$$

qui constitue une approximation au second ordre de (2.97). En effet, nous avons avec un développement en série de Taylor

$$\begin{aligned} \vec{x} \left( t^{n+\frac{1}{2}} \right) &= \vec{x}^n + \frac{\Delta t}{2} \dot{\vec{x}}^n + \frac{\Delta t^2}{8} \ddot{\vec{x}}^n + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\ \vec{x} \left( t^{n+\frac{1}{2}} \right) &= \vec{x}^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \dot{\vec{x}}^{n+1} + \frac{\Delta t^2}{8} \ddot{\vec{x}}^{n+1} + \mathcal{O}(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (3.21)$$

En additionnant membre à membre ces deux équations et en utilisant (3.2), il vient

$$\vec{x}\left(t^{n+\frac{1}{2}}\right) = \frac{\vec{x}^n + \vec{x}^{n+1}}{2} + \left[\frac{\Delta t}{4} - \frac{\Delta t}{4}\right] \left[\dot{\vec{x}}^{n+1} - \dot{\vec{x}}^n\right] + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (3.22)$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} \left[\vec{x}^{n+\frac{1}{2}}\right]^\xi - \left[\vec{x}^{n+\frac{1}{2}}\right]^\mu &= \left[\frac{\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n}{2}\right]^\xi - \left[\frac{\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n}{2}\right]^\mu + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\ l^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{l^{n+1} + l^n}{2} + \mathcal{O}(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (3.23)$$

De plus, un développement en série de Taylor du potentiel donne

$$\begin{aligned} U(l^n) &= U\left(l^{n+\frac{1}{2}}\right) + \frac{\partial U}{\partial l}\left(l^{n+\frac{1}{2}}\right) \left[l^n - l^{n+\frac{1}{2}}\right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial l^2}\left(l^{n+\frac{1}{2}}\right) \left[l^n - l^{n+\frac{1}{2}}\right]^2 + \\ &\quad \mathcal{O}\left(\left[l^n - l^{n+\frac{1}{2}}\right]^3\right) \\ U(l^{n+1}) &= U\left(l^{n+\frac{1}{2}}\right) + \frac{\partial U}{\partial l}\left(l^{n+\frac{1}{2}}\right) \left[l^{n+1} - l^{n+\frac{1}{2}}\right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial l^2}\left(l^{n+\frac{1}{2}}\right) \left[l^{n+1} - l^{n+\frac{1}{2}}\right]^2 + \\ &\quad \mathcal{O}\left(\left[l^{n+1} - l^{n+\frac{1}{2}}\right]^3\right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

En utilisant (3.23), le fait que  $l^{n+1} - l^n = \mathcal{O}(\Delta t)$  et (3.24), nous déduisons

$$U(l^{n+1}) - U(l^n) = \frac{\partial U}{\partial l}\left(l^{n+\frac{1}{2}}\right) \left[l^{n+1} - l^n + \mathcal{O}(\Delta t^3)\right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial l^2}\left(l^{n+\frac{1}{2}}\right) \mathcal{O}(\Delta t^4) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (3.25)$$

qui devient, en se rappelant que  $l^{n+1} - l^n = \mathcal{O}(\Delta t)$

$$\begin{aligned} \frac{U(l^{n+1}) - U(l^n)}{l^{n+1} - l^n} &= \frac{\partial U}{\partial l}\left(l^{n+\frac{1}{2}}\right) + \frac{\partial U}{\partial l}\left(l^{n+\frac{1}{2}}\right) \mathcal{O}(\Delta t^2) + \\ &\quad \frac{\partial^2 U}{\partial l^2}\left(l^{n+\frac{1}{2}}\right) \mathcal{O}(\Delta t^3) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Grâce à (3.23) et (3.26), la relation (2.97) conduit à l'approximation

$$\begin{aligned} \vec{F}_{int}^\xi\left(t^{n+\frac{1}{2}}\right) &= \frac{\partial U}{\partial \vec{x}^\xi}\left(t^{n+\frac{1}{2}}\right) = \frac{\partial U}{\partial l}\left(l^{n+\frac{1}{2}}\right) \frac{\left[\vec{x}^{n+\frac{1}{2}}\right]^\xi - \left[\vec{x}^{n+\frac{1}{2}}\right]^\mu}{l^{n+\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{U(l^{n+1}) - U(l^n)}{l^{n+1} - l^n} \left\{ \left[\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n\right]^\xi - \left[\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n\right]^\mu \right\} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (3.27)$$

si  $l^{n+1} \neq l^n$ , le cas limite s'obtenant aisément. Cette dernière relation est bien équivalente à l'expression (3.20) au second ordre près. Il s'agit maintenant de vérifier les conditions de conservation.

### Conservation du moment linéaire

A partir de (3.20), il vient directement

$$\left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi + \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\mu = 0 \quad (3.28)$$

et la relation (3.7) est vérifiée.

### Conservation du moment angulaire

De la même manière, à partir de (3.20), il vient directement (il n'y pas de somme sur les indices relatifs aux nœuds)

$$\left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \wedge \left[ \frac{\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n}{2} \right]^\xi + \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\mu \wedge \left[ \frac{\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n}{2} \right]^\mu = 0 \quad (3.29)$$

et la relation (3.13) est vérifiée.

### Conservation de l'énergie

Enfin, à partir de (3.20), il vient (il n'y pas de somme sur les indices relatifs aux nœuds)

$$\begin{aligned} \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \cdot [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\xi + \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\mu \cdot [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\mu &= U(l^{n+1}) - U(l^n) \text{ si } l^{n+1} \neq l^n \\ &= 0 \text{ si } l^{n+1} \rightarrow l^n \end{aligned} \quad (3.30)$$

En assimilant le potentiel  $U$  à l'énergie interne  $U_{int}$ , la relation (3.19) est bien vérifiée, l'algorithme est donc G-stable (puisque c'est bien l'énergie du système qui est conservée) et est aussi A-stable (car pour toutes les tailles de pas de temps). Nous pouvons maintenant établir les propriétés numériques de l'algorithme.

#### 3.1.4 Consistance énergétique, stabilité et précision (cadre linéaire et non-linéaire)

Grâce à la vérification des relations (3.7), (3.13) et (3.19), il vient directement que l'algorithme est G-stable et A-stable (pas d'énergie créée artificiellement par l'algorithme, et ce pour toutes les tailles de pas de temps), non dissipatif et est énergétiquement consistant (respect des lois physiques) dans le cadre non-linéaire. De plus comme les relations (3.1) et (3.2) sont des approximations au second ordre par rapport au pas de temps, l'algorithme a aussi une précision au second ordre pour autant que les forces internes constituent également une approximation au second ordre (ce qui est le cas dans la relation (3.20)). Cela peut être confirmé par une analyse du rayon spectral de

l'oscillateur harmonique de pulsation  $\omega$  pour lequel l'expression des forces internes (3.20) se réduit à

$$F_{int} = M\omega^2 \frac{[x^{n+1} + x^n]}{2} \quad (3.31)$$

L'obtention de la matrice spectrale se fait grâce aux relations (3.1), (3.2), (3.3) et (3.31) qui conduisent à

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ \Delta t \dot{x}^{n+1} \\ \Delta t^2 \ddot{x}^{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{\Omega^2}{4}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\Omega^2}{4} & 1 & 0 \\ -\Omega^2 & 1 - \frac{\Omega^2}{4} & 0 \\ -2\Omega^2 & -\Omega^2 & -1 - \frac{\Omega^2}{4} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^s(\Omega)} \begin{pmatrix} x^n \\ \Delta t \dot{x}^n \\ \Delta t^2 \ddot{x}^n \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Les déplacements et les vitesses ne dépendant pas des accélérations au temps précédent, ce système peut se simplifier en un système de dimension 2 dont les valeurs propres de la matrice spectrale  $\mathbf{A}^s$  valent

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1 - \frac{\Omega^2}{4}}{1 + \frac{\Omega^2}{4}} + i \frac{\Omega}{1 + \frac{\Omega^2}{4}} \\ \lambda_2 &= \frac{1 - \frac{\Omega^2}{4}}{1 + \frac{\Omega^2}{4}} - i \frac{\Omega}{1 + \frac{\Omega^2}{4}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Le rayon spectral obtenu  $\rho_d = \|\lambda\|$  vaut donc l'unité pour chaque valeur propre et l'algorithme est bien inconditionnellement G-stable.  $\Omega_d$  et  $\xi_d$ , respectivement la pulsation effective et le taux d'amortissement effectif, valent, après un développement en série de Taylor

$$\begin{aligned} \Omega_d &= \arctan\left(\frac{\Im\lambda_1}{\Re\lambda_1}\right) \simeq \Omega + \mathcal{O}(\Omega^3) \\ \xi_d &= \frac{-\ln([\Im\lambda_1]^2 + [\Re\lambda_1]^2)}{2\Omega_d} = 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Enfin, l'erreur sur la pulsation  $e_\Omega$  et l'erreur sur l'amplitude  $e_\xi$  valent

$$\begin{aligned} e_\Omega &= \frac{\Omega_d - \Omega}{\Omega} = \mathcal{O}(\Omega^2) \\ e_\xi &= 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

L'algorithme conserve donc bien l'énergie et est précis au second ordre. Remarquons que contrairement à l'algorithme de Newmark (section 2.2.5), l'algorithme EMCA n'est pas symplectique [142] (ce qui, à notre sens ne pose pas de problème puisque les lois de conservation sont vérifiées lors de l'intégration et que nous ne devons donc pas utiliser la propriété suffisante de l'algorithme symplectique pour les déduire). Nous pouvons maintenant illustrer sa stabilité dans le domaine non-linéaire par un exemple numérique.

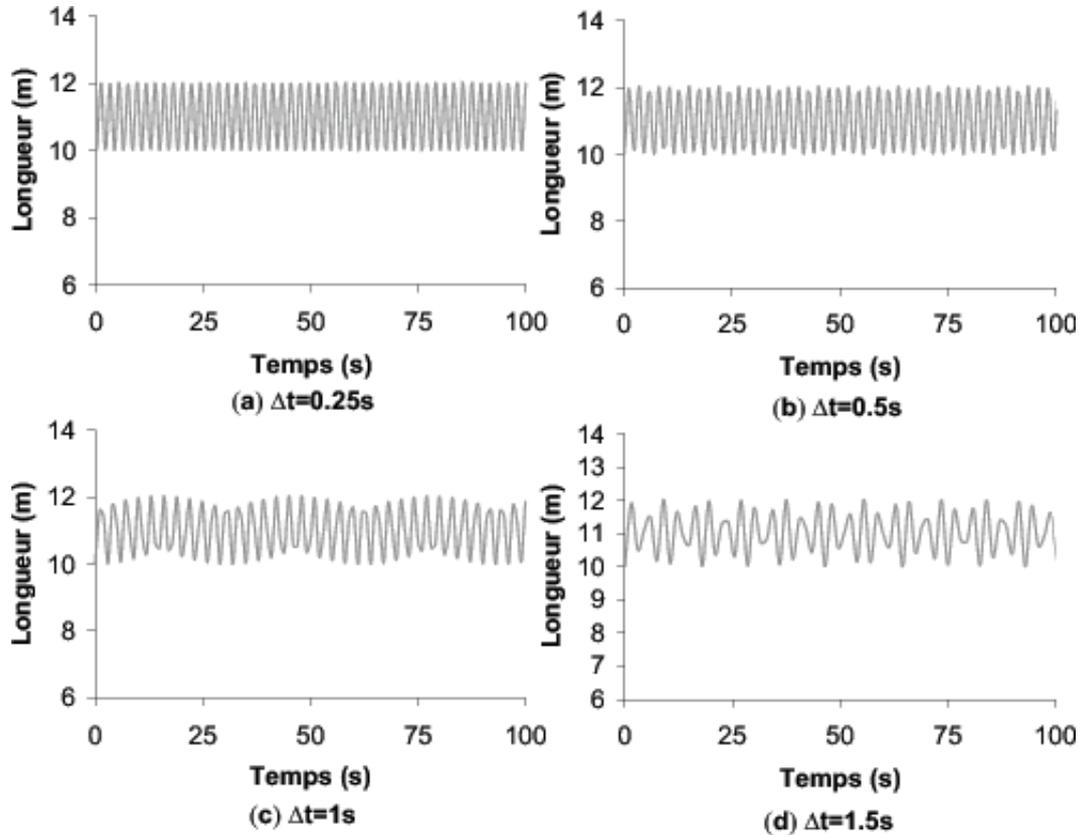


Figure 3.1: Evolution temporelle de la longueur du ressort, résolution par le schéma EMCA - (a)  $\Delta t = 0.25(s)$  - (b)  $\Delta t = 0.5(s)$  - (c)  $\Delta t = 1s$  - (d)  $\Delta t = 1.5s$ .

### 3.1.5 Exemple : Etude d'un système masse-ressort

Nous reprenons l'exemple du système masse ressort résolu dans la section (2.2.4). L'algorithme de résolution utilisé est l'algorithme conservatif EMCA. La simulation est obtenue pour différents pas de temps ( $0.25s$ ,  $0.5s$ ,  $1s$  et  $1.5s$ ). La Figure 3.1 illustre l'évolution de la longueur du ressort et la Figure 3.2 illustre la trajectoire de la masse. Par rapport à la solution obtenue par Newmark (Figure 2.3), nous voyons que lorsque le pas de temps augmente, la solution reste physique, la seule erreur obtenue étant relative au fait que l'oscillation à haute fréquence n'est plus parfaitement représentée. Cela provient du fait qu'il n'y a pas assez de points de calcul, ce qui fait apparaître une enveloppe sinusoidale basse fréquence aux oscillations pour le pas de temps de  $1s$ . Cette constatation se confirme par l'analyse de l'énergie (Figure 3.3). Pour toutes les tailles de pas de temps, l'énergie potentielle (qui correspond ici au travail des forces internes) oscille entre les mêmes valeurs, ce qui n'était pas le cas pour Newmark (Figure 2.5). L'étude de l'évolution du moment angulaire (Figure 3.4) confirme que sa valeur est gardée constante pour toutes les tailles du pas de temps sans subir les oscillations provoquées par l'algorithme de Newmark (Figure 2.6).

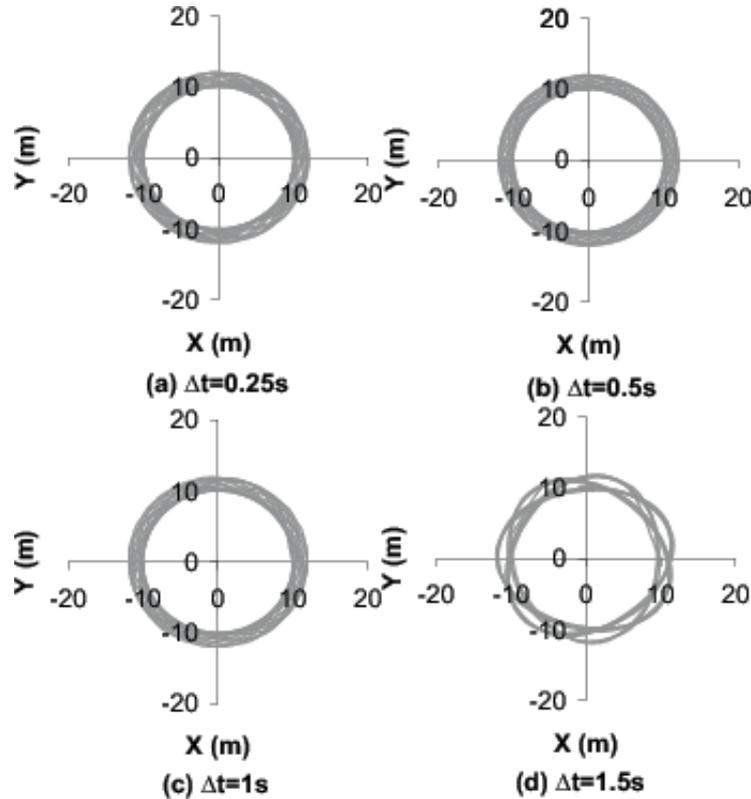


Figure 3.2: Trajectoire de la masse dans le plan, résolution par le schéma EMCA - (a)  $\Delta t = 0.25(s)$  - (b)  $\Delta t = 0.5(s)$  - (c)  $\Delta t = 1s$  - (d)  $\Delta t = 1.5s$ .

### 3.1.6 Conclusion sur l'utilisation de la méthode EMCA

Contrairement aux algorithmes de Newmark et  $\alpha$ -généralisé, la méthode EMCA consiste à déterminer une formulation qui est inconditionnellement G-stable et énergétiquement consistante dans le domaine non-linéaire. Dès lors, la solution ne diverge plus quand la taille du pas de temps augmente (la taille du pas temps restant limitée par la nécessité d'avoir un algorithme de Newton-Raphson qui converge). Néanmoins, lorsque la taille du problème augmente, le nombre de degrés de liberté augmentant, il apparaît des modes de haute fréquence provenant de la discrétisation spatiale. La réponse à ces modes peut entraîner des oscillations qui nuisent à la précision et à la convergence de l'algorithme de Newton-Raphson. C'est pourquoi l'introduction de dissipation numérique d'une manière énergétiquement consistante peut s'avérer utile.

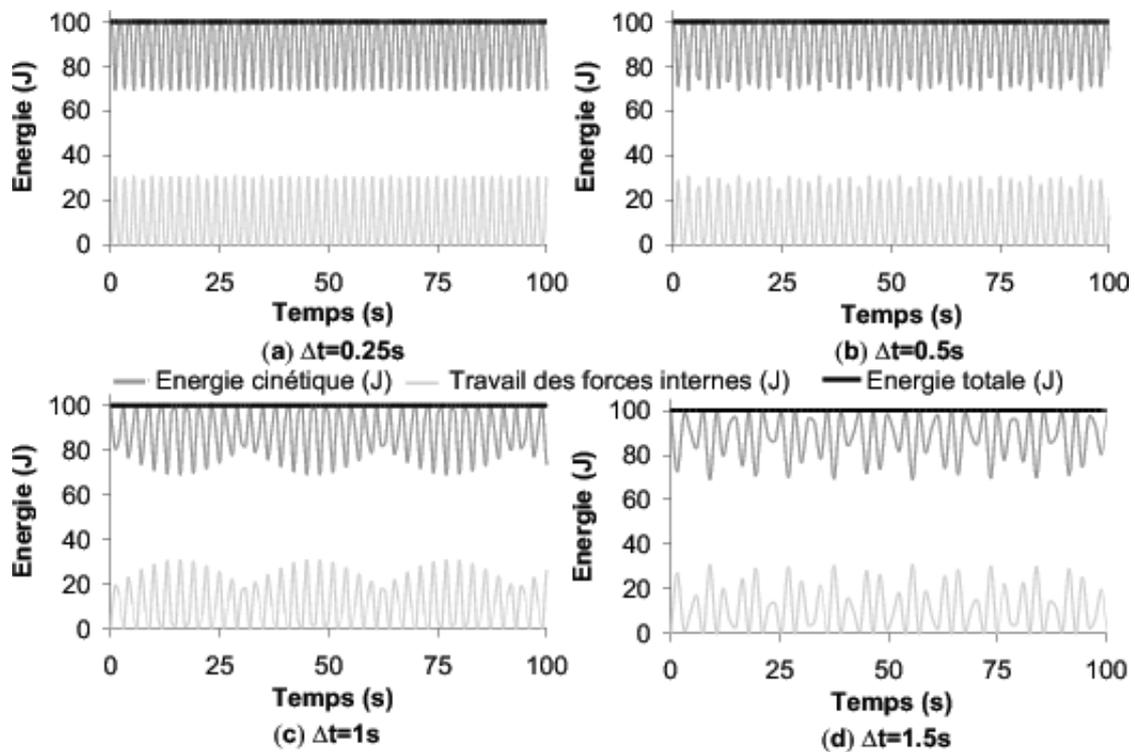


Figure 3.3: Evolution temporelle de l'énergie, résolution par le schéma EMCA - (a)  $\Delta t = 0.25(s)$  - (b)  $\Delta t = 0.5(s)$  - (c)  $\Delta t = 1s$  - (d)  $\Delta t = 1.5s$ .

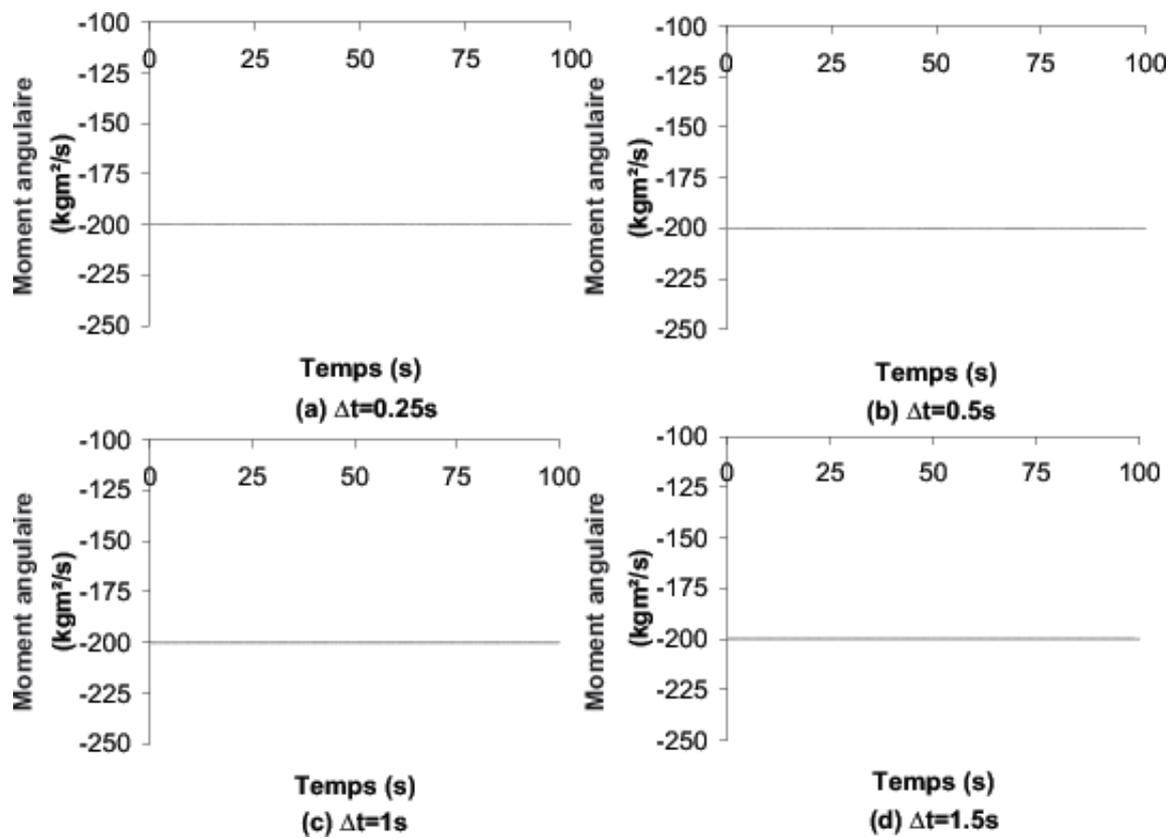


Figure 3.4: Evolution temporelle du moment angulaire, résolution par le schéma EMCA  
- (a)  $\Delta t = 0.25(s)$  - (b)  $\Delta t = 0.5(s)$  - (c)  $\Delta t = 1s$  - (d)  $\Delta t = 1.5s$ .

## 3.2 Le schéma Energy Dissipative Momentum Conserving (EDMC)

Ce schéma a été proposé par Armero et Romero [6, 7], en introduisant dans le schéma EMCA une vitesse de dissipation numérique  $\vec{G}_{diss}$  (dépendant des vitesses nodales) et une force de dissipation numérique  $\vec{F}_{diss}$ .

### 3.2.1 Principe

Dans ce contexte, la discrétisation temporelle des déplacements (3.1) au nœud  $\xi$  (au second ordre si  $\vec{G}_{diss} = \mathcal{O}(\Delta t^2)$ ) se réécrit

$$[\vec{x}^{n+1}]^\xi = [\vec{x}^n]^\xi + \frac{\Delta t}{2} [\dot{\vec{x}}^{n+1}]^\xi + \frac{\Delta t}{2} [\dot{\vec{x}}^n]^\xi + \Delta t [\vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}}]^\xi \quad (3.36)$$

La discrétisation temporelle (au second ordre) des vitesses au nœud  $\xi$  (3.2) reste inchangée

$$[\dot{\vec{x}}^{n+1}]^\xi = [\dot{\vec{x}}^n]^\xi + \frac{\Delta t}{2} [\ddot{\vec{x}}^{n+1}]^\xi + \frac{\Delta t}{2} [\ddot{\vec{x}}^n]^\xi \quad (3.37)$$

Par contre la loi d'équilibre (3.3) au nœud  $\xi$  se discrétise en

$$\frac{1}{2} M^{\xi\mu} [\ddot{\vec{x}}^{n+1} + \ddot{\vec{x}}^n]^\mu = [\vec{F}_{ext}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}}]^\xi \quad (3.38)$$

Cette dernière expression est une approximation au second ordre par rapport au pas de temps de (2.38), si  $\vec{F}_{diss} = \mathcal{O}(\Delta t^2)$ . Le système d'équations (3.36), (3.37) et (3.38) est résolu par un algorithme prédictor-correcteur (appendice B.1). Les vitesses de dissipation  $\vec{G}_{diss}$  et les forces de dissipation  $\vec{F}_{diss}$  doivent maintenant être définies. Pour ce faire, il faut d'abord évaluer leurs influences sur les lois de conservation.

### 3.2.2 Propriétés fondamentales des forces et de vitesses de dissipation

L'équation (3.38) doit vérifier la conservation des moments linéaire et angulaire, de manière à ne pas modifier le mouvement d'entraînement. Par contre il faut introduire un terme de dissipation numérique dans le bilan énergétique.

### La conservation du moment linéaire

Soit  $\vec{L}$  défini par (3.4) et sa conservation par la relation (3.5). En effectuant une somme sur  $\xi$  dans l'équation (3.38), et en utilisant (3.37), il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \sum_{\xi} M^{\xi\mu} [\dot{\vec{x}}^{n+1} - \dot{\vec{x}}^n]^{\mu} &= \sum_{\xi} [\vec{F}_{ext}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}}]^{\xi} \\ \frac{1}{\Delta t} [\vec{L}^{n+1} - \vec{L}^n] &= \sum_{\xi} [\vec{F}_{ext}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}}]^{\xi} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Si (3.39) est comparée à (3.5), et en considérant la relation (3.7), les forces de dissipation doivent vérifier la relation

$$\sum_{\xi} [\vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}}]^{\xi} = 0 \quad (3.40)$$

### La conservation du moment angulaire

Soit  $\vec{J}$  le vecteur discret du moment angulaire défini par (3.8). La conservation de  $\vec{J}$  sur un pas de temps est discrétisée par la relation (3.9). Le produit vectoriel de  $\vec{x}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\vec{x}^n + \vec{x}^{n+1}}{2}$  par la relation (3.38) donne

$$\underbrace{M^{\xi\mu} [\vec{x}^{n+\frac{1}{2}}]^{\xi} \wedge \left[ \frac{\ddot{\vec{x}}^{n+1} + \ddot{\vec{x}}^n}{2} \right]^{\mu}}_{\text{Membre 1}} = [\vec{x}^{n+\frac{1}{2}}]^{\xi} \wedge [\vec{F}_{ext}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}}]^{\xi} \quad (3.41)$$

Ou encore en utilisant (3.36), (3.37) et le fait que  $M^{\xi\mu} = M^{\mu\xi}$ , le premier membre devient

$$\begin{aligned} \text{Membre 1} &= \frac{1}{2\Delta t} M^{\xi\mu} [\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n]^{\xi} \wedge [\dot{\vec{x}}^{n+1}]^{\mu} - \frac{1}{2\Delta t} M^{\xi\mu} [\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n]^{\xi} \wedge [\dot{\vec{x}}^n]^{\mu} \\ &= \frac{1}{2} M^{\xi\mu} \left[ \frac{2}{\Delta t} \vec{x}^{n+1} - \frac{\dot{\vec{x}}^{n+1} + \dot{\vec{x}}^n}{2} - \vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi} \wedge [\dot{\vec{x}}^{n+1}]^{\mu} - \\ &\quad \frac{1}{2} M^{\xi\mu} \left[ \frac{2}{\Delta t} \vec{x}^n + \frac{\dot{\vec{x}}^{n+1} + \dot{\vec{x}}^n}{2} + \vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi} \wedge [\dot{\vec{x}}^n]^{\mu} \\ &= \frac{1}{\Delta t} M^{\xi\mu} \left\{ [\vec{x}^{n+1}]^{\xi} \wedge [\dot{\vec{x}}^{n+1}]^{\mu} - [\vec{x}^n]^{\xi} \wedge [\dot{\vec{x}}^n]^{\mu} \right\} - \\ &\quad M^{\xi\mu} [\vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}}]^{\xi} \wedge \left[ \frac{\dot{\vec{x}}^{n+1} + \dot{\vec{x}}^n}{2} \right]^{\mu} \end{aligned} \quad (3.42)$$

La relation (3.41) se réécrit alors

$$\frac{1}{\Delta t} \left[ \vec{J}^{n+1} - \vec{J}^n \right] - M^{\xi\mu} \left[ \vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \wedge \left[ \frac{\dot{x}^{n+1} + \dot{x}^n}{2} \right]^\mu = \left[ \vec{x}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \wedge \left[ \vec{F}_{ext}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi - \left[ \vec{x}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \wedge \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi - \left[ \vec{x}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \wedge \left[ \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \quad (3.43)$$

Si nous comparons (3.9) et (3.43), et en considérant la relation (3.13), les forces dissipatives doivent vérifier

$$\left[ \frac{\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n}{2} \right]^\xi \wedge \left[ \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi = 0 \quad (3.44)$$

Les vitesses de dissipation doivent quant à elles vérifier

$$M^{\xi\mu} \left[ \vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \wedge \left[ \frac{\dot{x}^{n+1} + \dot{x}^n}{2} \right]^\mu = 0 \quad (3.45)$$

Remarquons que nous forçons les forces et les vitesses de dissipation à vérifier séparément la conservation du moment angulaire de manière à obtenir des expressions générales.

### La conservation de l'énergie

Soit l'énergie définie par (2.26). La conservation de l'énergie sur un pas de temps (3.14) se réécrit en

$$E^{n+1} - E^n = W_{ext}^{n+1} - W_{ext}^n - \Delta_{int} - \Delta_{num} \quad (3.46)$$

avec  $\Delta_{int} \geq 0$  la dissipation physique durant le pas de temps entre la configuration  $n$  et  $n+1$  et avec  $\Delta_{num} \geq 0$  la dissipation numérique durant le pas de temps entre la configuration  $n$  et  $n+1$ .

Le produit scalaire entre  $\dot{\vec{x}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\dot{x}^n + \dot{x}^{n+1}}{2} + \vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}}$  et la relation (3.38) donne

$$\frac{1}{2} M^{\xi\mu} \left[ \ddot{\vec{x}}^n + \ddot{\vec{x}}^{n+1} \right]^\mu \cdot \left[ \dot{\vec{x}}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi = \left[ \vec{F}_{ext}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \cdot \left[ \dot{\vec{x}}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \quad (3.47)$$

Grâce à la relation (3.37) et le fait que  $M^{\xi\mu} = M^{\mu\xi}$ , le premier membre de cette relation

devient

$$\frac{M^{\xi\mu}}{\Delta t} \left\{ \frac{[\dot{\bar{x}}^{n+1}]^\xi \cdot [\dot{\bar{x}}^{n+1}]^\mu - [\dot{\bar{x}}^n]^\xi \cdot [\dot{\bar{x}}^n]^\mu}{2} + [\dot{\bar{x}}^{n+1} - \dot{\bar{x}}^n]^\mu \cdot [\vec{G}_{diss}^{n+1}]^\xi \right\} = \frac{1}{\Delta t} \left\{ K^{n+1} - K^n + M^{\xi\mu} [\dot{\bar{x}}^{n+1} - \dot{\bar{x}}^n]^\mu \cdot [\vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}}]^\xi \right\} \quad (3.48)$$

et grâce à la relation (3.36), le second membre devient

$$\frac{1}{\Delta t} \left[ \vec{F}_{ext}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \cdot [\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n]^\xi = \frac{1}{\Delta t} \left\{ W_{ext}^{n+1} - W_{ext}^n - \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} + \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \cdot [\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n]^\xi \right\} \quad (3.49)$$

L'équation (3.47) devient alors

$$K^{n+1} - K^n + M^{\xi\mu} [\dot{\bar{x}}^{n+1} - \dot{\bar{x}}^n]^\mu \cdot [\vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}}]^\xi = W_{ext}^{n+1} - W_{ext}^n - \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} + \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \cdot [\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n]^\xi \quad (3.50)$$

Si (3.50) est comparée à (3.46), alors en utilisant (3.19), la relation que les forces et les vitesses dissipatives doivent vérifier est

$$M^{\xi\mu} [\dot{\bar{x}}^{n+1} - \dot{\bar{x}}^n]^\mu \cdot [\vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}}]^\xi + \left[ \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \cdot [\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n]^\xi = \Delta_{num} \quad (3.51)$$

Remarquons que nous pourrions forcer les forces et les vitesses de dissipation à introduire séparément une dissipation positive. Cependant nous ne le faisons pas car cela restreindrait les choix des expressions.

La section suivante expose une formulation des forces dissipatives ( $\vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}}$  dépendant de  $\bar{x}^n$  et  $\bar{x}^{n+1}$ ) et des vitesses ( $\vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}}$  dépendant de  $\dot{\bar{x}}^n$  et  $\dot{\bar{x}}^{n+1}$ ) vérifiant les relations (3.40), (3.44), (3.45) et (3.51).

### 3.2.3 Construction des forces et des vitesses de dissipation

Dans cette section, nous donnons une expression des forces internes et des dissipations pour les systèmes masse-ressort. L'introduction de la dissipation numérique contrôlée s'est faite dans [5, 6, 7], pour un système masse-ressort ainsi que pour un matériau hyperélastique. Cette méthode EDMC a été étendue aux poutres par Ibrahimbegovic et Mamouri [77]. Dans le prochain chapitre, nous exposerons la technique que nous avons développée pour évaluer les forces de dissipation pour un matériau hypoélastique.

Soit un ressort joignant les nœuds  $\xi$  et  $\mu$  (ces indices s'interchangeant dans les expressions suivantes). Soit  $U(l)$  le potentiel des forces internes du ressort. Ce potentiel dépend de la longueur  $l = \|\vec{x}^\xi - \vec{x}^\mu\|$  du ressort. Définissons un potentiel de dissipation numérique de l'énergie cinétique  $\Delta_K$  et un potentiel de dissipation numérique de l'énergie interne  $\Delta_W$ . Dès lors la vitesse de dissipation au nœud  $\xi$  vaut (pas de somme sur les indices relatifs au nœud  $\xi$ ) [6]

$$\left[ \vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi = \frac{[\Delta_K]^\xi}{M^{\xi\xi}} \frac{\left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} + \dot{\vec{x}}^n \right]^\xi}{\left\| \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} \right]^\xi \right\|^2 - \left\| \left[ \dot{\vec{x}}^n \right]^\xi \right\|^2} \quad (3.52)$$

Afin de ne pas perturber un mouvement de corps rigide en rotation,  $\Delta_K$  doit vérifier

$$\frac{[\Delta_K]^\xi}{\left\| \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} \right]^\xi \right\|^2 - \left\| \left[ \dot{\vec{x}}^n \right]^\xi \right\|^2} \rightarrow 0 \text{ si } \left\| \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} \right]^\xi \right\| - \left\| \left[ \dot{\vec{x}}^n \right]^\xi \right\| \rightarrow 0 \quad (3.53)$$

Un choix de  $\Delta_K$  conduisant à un algorithme du premier ordre par rapport au pas de temps (EDMC-1 ou Energy Dissipative Momentum Conserving - 1<sup>st</sup> order) [6] est

$$[\Delta_K]^\xi = \chi_1 \frac{M^{\xi\xi}}{2} \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} - \dot{\vec{x}}^n \right]^\xi \cdot \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} - \dot{\vec{x}}^n \right]^\xi = \chi_1 \frac{M^{\xi\xi}}{2} \left\| \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} - \dot{\vec{x}}^n \right]^\xi \right\|^2 \quad (3.54)$$

où  $\chi_1$  est un paramètre utilisateur gérant la dissipation numérique. Ce choix conduit à un algorithme au premier ordre car en combinant (3.52) et (3.54), et en utilisant le fait que

$$\left\| \dot{\vec{x}}^{n+1} \right\|^2 - \left\| \dot{\vec{x}}^n \right\|^2 = \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} - \dot{\vec{x}}^n \right] \cdot \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} + \dot{\vec{x}}^n \right] \quad (3.55)$$

il vient

$$\left[ \vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi = \frac{\chi_1}{2} \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} - \dot{\vec{x}}^n \right]^\xi \simeq \mathcal{O}(\Delta t) \quad (3.56)$$

Cependant, dans le cas d'une rotation rigide, le choix de (3.54) génère des vitesses de dissipation non nulles, ce qui est incohérent. Il est donc remplacé par

$$[\Delta_K]^\xi = \chi_1 \frac{M^{\xi\xi}}{2} \left[ \left\| \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} \right]^\xi \right\| - \left\| \left[ \dot{\vec{x}}^n \right]^\xi \right\| \right]^2 \quad (3.57)$$

qui fournit toujours des vitesses de dissipation au premier ordre en  $\Delta t$  puisque la différence des normes est toujours inférieure à la norme de la différence.

La force de dissipation numérique est obtenue par le même principe

$$\left[ \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi = \frac{\Delta_W}{l^{n+1} - l^n} \left\{ [\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n]^\xi - [\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n]^\mu \right\} \quad (3.58)$$

avec  $\Delta_W$  devant vérifier

$$\frac{\Delta_W}{l^{n+1} - l^n} \rightarrow 0 \text{ si } l^{n+1} - l^n \rightarrow 0 \quad (3.59)$$

afin de ne pas perturber un mouvement de corps rigide en rotation. Un choix de  $\Delta_W$  conduisant à un algorithme du premier ordre par rapport au pas de temps [6, 7] est

$$\Delta_W = \chi_2 \frac{\partial^2}{\partial l^2} U \left( \frac{l^{n+1} + l^n}{2} \right) \frac{[l^{n+1} - l^n]^2}{2} \quad (3.60)$$

où  $\chi_2$  est un paramètre utilisateur gérant la dissipation numérique. Ce choix conduit à un algorithme au premier ordre car en combinant (3.58), (3.60) et le fait que

$$\begin{aligned} [l^{n+1} - l^n]^2 &= \left\{ [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\xi - [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\mu \right\} \cdot \left\{ [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\xi - [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\mu \right\} \\ l^{n+1} - l^n &= \left\{ [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\xi - [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\mu \right\} \cdot \left\{ [\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n]^\xi - [\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n]^\mu \right\} \end{aligned} \quad (3.61)$$

il vient

$$\begin{aligned} \left[ \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi &= \frac{\chi_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial l^2} U \left( \frac{l^{n+1} + l^n}{2} \right) \left\{ [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\xi - [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\mu \right\} \\ &\simeq \mathcal{O}(\Delta t) \end{aligned} \quad (3.62)$$

Remarquons que d'autres choix du potentiel, conduisant à un algorithme plus complexe, peuvent être définis pour obtenir un algorithme d'intégration du second ordre [6,7]. Pour cela, il faut que les potentiels soient d'un ordre plus élevé. Dans ce cas, il faut définir de nouvelles inconnues  $\vec{x}^*$  et  $\dot{\vec{x}}^*$ , qui vont permettre de définir des potentiels d'ordre plus élevé. Ces potentiels doivent toujours vérifier les conditions (3.53) et (3.59) afin de ne pas perturber les modes rigides. Armero et Romero [7] ont proposé de choisir

$$[\Delta_K]^\xi = \frac{M^{\xi\xi}}{2} [\dot{\vec{x}}^* - \dot{\vec{x}}^n]^\xi \cdot [\dot{\vec{x}}^{n+1} - \dot{\vec{x}}^n]^\xi \quad (3.63)$$

et

$$\begin{aligned} \Delta_W &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial l^2} U \left( \frac{l^{n+1} + l^n}{2} \right) \\ &\quad \left\{ [\vec{x}^* - \dot{\vec{x}}^n]^\xi - [\vec{x}^* - \dot{\vec{x}}^n]^\mu \right\} \cdot \left\{ [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\xi - [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\mu \right\} \end{aligned} \quad (3.64)$$

qui conduisent à un schéma du second ordre pour les choix de  $\dot{\bar{x}}^*$  et  $\bar{x}^*$  tel que

$$\begin{aligned} [\bar{x}^*]^\xi &= [\bar{x}^n]^\xi + \chi_1 \Delta t [\dot{\bar{x}}^* - \dot{\bar{x}}^n]^\xi \\ \frac{M^{\xi\xi}}{2} [\dot{\bar{x}}^* - \dot{\bar{x}}^n]^\xi &= -\chi_2 \Delta t \frac{\partial^2}{\partial l^2} U \left( \frac{l^{n+1} + l^n}{2} \right) \left\{ [\bar{x}^* - \bar{x}^n]^\xi - [\bar{x}^* - \bar{x}^n]^\mu \right\} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Le couplage entre ces deux dernières équations fait apparaître que pour obtenir un schéma au second ordre, de nouvelles inconnues sont introduites, ce qui augmente la taille du système à résoudre. Cependant, ce système d'équations peut être résolu par élément et non pas de manière globale. Dans ce travail nous nous contenterons d'utiliser un schéma au premier ordre. En effet, l'intérêt de la dissipation numérique est de pouvoir simuler des systèmes de grandes tailles, pour lesquels il faut éviter d'augmenter le nombre d'inconnues. Nous verrons lors des applications numériques, les limitations relatives au premier ordre. Il faut maintenant prouver que les lois de conservation sont bien vérifiées.

### Conservation du moment linéaire

A partir de (3.58), il vient directement (il n'y pas de somme sur les indices relatifs aux nœuds)

$$\left[ \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi + \left[ \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\mu = 0 \quad (3.66)$$

et la relation (3.40) est vérifiée.

### Conservation du moment angulaire

A partir de (3.58), il vient directement (il n'y pas de somme sur les indices relatifs aux nœuds)

$$\left[ \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \wedge \left[ \frac{\bar{x}^{n+1} + \bar{x}^n}{2} \right]^\xi + \left[ \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\mu \wedge \left[ \frac{\bar{x}^{n+1} + \bar{x}^n}{2} \right]^\mu = 0 \quad (3.67)$$

et la relation (3.44) est vérifiée. A partir de (3.52), il vient directement (il n'y pas de somme sur les indices relatifs aux nœuds)

$$M^{\xi\xi} \left[ \vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \wedge \left[ \frac{\dot{\bar{x}}^{n+1} + \dot{\bar{x}}^n}{2} \right]^\xi + M^{\mu\mu} \left[ \vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\mu \wedge \left[ \frac{\dot{\bar{x}}^{n+1} + \dot{\bar{x}}^n}{2} \right]^\mu = 0 \quad (3.68)$$

et la relation (3.45) est vérifiée.

### Evaluation de l'énergie dissipée

A partir de (3.52) et (3.58), il vient (il n'y pas de somme sur les indices relatifs aux nœuds, et nous supposons qu'il n'y a pas de terme hors diagonale)

$$\begin{aligned}
M^{\xi\xi} \left[ \dot{\bar{x}}^{n+1} - \dot{\bar{x}}^n \right]^{\xi} \cdot \left[ \vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi} + M^{\mu\mu} \left[ \dot{\bar{x}}^{n+1} - \dot{\bar{x}}^n \right]^{\mu} \cdot \left[ \vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\mu} + \\
\left[ \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi} \cdot \left[ \bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n \right]^{\xi} + \left[ \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\mu} \cdot \left[ \bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n \right]^{\mu} \\
= \Delta_K + \Delta_V
\end{aligned} \tag{3.69}$$

En comparant cette relation à la relation (3.51), nous obtenons la dissipation numérique  $\Delta_{num} = \Delta_K + \Delta_W$ . Sous la condition que  $\chi_1 > 0$  et  $\chi_2 > 0$ , nous avons bien un algorithme dissipatif car alors  $\Delta_{num} > 0$ . L'algorithme est donc bien A-stable dans le domaine non-linéaire, contrairement à l'algorithme  $\alpha$ -généralisé. Il reste maintenant à choisir  $\chi_1$  et  $\chi_2$ . Pour ce faire, nous étudierons les propriétés numériques du schéma.

#### 3.2.4 Consistance énergétique, stabilité et précision (cadre linéaire et non-linéaire)

Nous avons vérifié (3.40), (3.44), (3.45) et (3.51) dans le cadre non-linéaire. De plus sous la condition d'avoir  $\chi_1 > 0$  et  $\chi_2 > 0$ , nous avons bien un algorithme à dissipation positive (3.69). Dès lors, nous pouvons conclure que nous avons un algorithme énergétiquement consistant, inconditionnellement G-stable et dissipatif, dans le cadre non-linéaire. Le choix des potentiels (3.57) et (3.60) conduit à une précision du premier ordre par rapport au pas de temps. Afin de choisir de manière optimale  $\chi_1$  et  $\chi_2$ , nous allons maintenant étudier les propriétés de l'algorithme sur un oscillateur harmonique de masse  $M$ . Soit  $\omega^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial l^2} \frac{1}{M}$ , le système d'équations (3.36), (3.37), (3.38) se réduit, grâce aux relations (3.52), (3.58), et en considérant les potentiels (3.54), (3.60), en

$$\begin{aligned}
x^{n+1} &= x^n + \frac{\Delta t}{2} \left[ 1 + \chi_1 \frac{\dot{x}^{n+1} - \dot{x}^n}{\dot{x}^{n+1} + \dot{x}^n} \right] [\dot{x}^{n+1} + \dot{x}^n] \\
\dot{x}^{n+1} &= \dot{x}^n + \frac{\Delta t}{2} [\ddot{x}^{n+1} + \ddot{x}^n] \\
\ddot{x}^{n+1} &= -\ddot{x}^n - \omega^2 \left[ 1 + \chi_2 \frac{x^{n+1} - x^n}{x^{n+1} + x^n} \right] [x^{n+1} + x^n]
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Nous avons considéré la relation (3.54) et non (3.57), car elle permet une étude plus aisée, et est équivalente dans le cas de l'étude d'un système à un degré de liberté, pour autant que les vitesses gardent le même signe au cours du pas de temps. A l'aide d'une

matrice spectrale  $\mathbf{A}^s(\Omega)$  avec  $\Omega = \omega\Delta t$ , le système (3.70) peut se mettre sous la forme

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ \Delta t \dot{x}^{n+1} \\ \Delta t^2 \ddot{x}^{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1 - \frac{\Omega^2}{4}[1 - \chi_1][1 + \chi_2]}{D(\Omega)} & \frac{1}{D(\Omega)} & 0 \\ \frac{-\Omega^2}{D(\Omega)} & \frac{1 - \frac{\Omega^2}{4}[1 - \chi_2][1 + \chi_1]}{D(\Omega)} & 0 \\ \frac{-2\Omega^2}{D(\Omega)} & \frac{-\Omega^2[1 + \chi_1]}{D(\Omega)} & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^s(\Omega)} \begin{pmatrix} x^n \\ \Delta t \dot{x}^n \\ \Delta t^2 \ddot{x}^n \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

avec  $D(\Omega) = 1 + \frac{\Omega^2}{4}[1 + \chi_1][1 + \chi_2]$ . Ce système peut se réduire à un système de dimension 2, dont les deux valeurs propres de la matrice spectrale sont

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1 - \frac{\Omega^2}{8} \{ [1 + \chi_2][1 - \chi_1] + [1 + \chi_1][1 - \chi_2] \}}{D(\Omega)} + \\ &\quad \frac{\Omega \sqrt{\frac{\Omega^2}{16} \{ [1 + \chi_2][1 - \chi_1] - [1 + \chi_1][1 - \chi_2] \}^2 - 1}}{D(\Omega)} \\ \lambda_2 &= \frac{1 - \frac{\Omega^2}{8} \{ [1 + \chi_2][1 - \chi_1] + [1 + \chi_1][1 - \chi_2] \}}{D(\Omega)} - \\ &\quad \frac{\Omega \sqrt{\frac{\Omega^2}{16} \{ [1 + \chi_2][1 - \chi_1] - [1 + \chi_1][1 - \chi_2] \}^2 - 1}}{D(\Omega)} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Afin d'avoir toujours deux valeurs propres complexes conjuguées (et ne pas avoir de bifurcation, ce qui diminuerait l'amortissement des hautes fréquences), il faut donc vérifier

$$[1 + \chi_2][1 - \chi_1] - [1 + \chi_1][1 - \chi_2] = 0 \quad (3.73)$$

c'est-à-dire

$$\chi_1 = \chi_2 = \chi \quad (3.74)$$

où il ne reste plus qu'un seul paramètre  $\chi$  qui doit être supérieur à zéro pour avoir une dissipation d'énergie. Dans ce cas, les valeurs propres deviennent

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{1 + \frac{\Omega^2}{4}[1 + \chi]^2} \left\{ 1 - \frac{\Omega^2}{4}[1 - \chi^2] + i\Omega \right\} \\ \lambda_2 &= \frac{1}{1 + \frac{\Omega^2}{4}[1 + \chi]^2} \left\{ 1 - \frac{\Omega^2}{4}[1 - \chi^2] - i\Omega \right\} \end{aligned} \quad (3.75)$$

Des lors,  $\Omega_d$  et  $\xi_d$ , respectivement la pulsation effective et le taux d'amortissement effectif, valent

$$\begin{aligned} \Omega_d &= \arctan\left(\frac{\Im\lambda_1}{\Re\lambda_1}\right) = \arctan\left(\frac{\Omega}{1 - \frac{\Omega^2}{4}[1 - \chi^2]}\right) \\ \xi_d &= \frac{-\ln([\Im\lambda_1]^2 + [\Re\lambda_1]^2)}{2\Omega_d} \end{aligned} \quad (3.76)$$

Table 3.1: Propriétés de l'algorithme énergétiquement consistant

algorithme	$\chi$	ordre
EMCA	0	2
EDMC-1	$\frac{1-\rho_\infty}{1+\rho_\infty}$	1

Soit, après un développement en série de Taylor

$$\begin{aligned}\Omega_d &\simeq \Omega - \frac{1}{4} \left[ \chi^2 + \frac{1}{3} \right] \Omega^3 + \mathcal{O}(\Omega^4) \\ \xi_d &\simeq \frac{\chi}{2} \Omega + \mathcal{O}(\Omega^2)\end{aligned}\quad (3.77)$$

L'erreur sur la pulsation  $e_\Omega$  et l'erreur sur l'amplitude  $e_\xi$  valent alors

$$\begin{aligned}e_\Omega &= \frac{\Omega_d - \Omega}{\Omega} = \mathcal{O}(\Omega^2) \\ e_\xi &= \frac{\xi_d - \xi}{\xi} = \frac{\chi}{2} \Omega + \mathcal{O}(\Omega^2)\end{aligned}\quad (3.78)$$

et nous pouvons en déduire que l'algorithme est précis seulement au premier ordre. Le rayon spectral vaut

$$\begin{aligned}\rho_d(\Omega) &= \|\lambda_i\| = \frac{1}{1 + \frac{\Omega^2}{4} [1 + \chi]^2} \sqrt{\left[ 1 - \frac{\Omega^2}{4} [1 - \chi^2] \right]^2 + \Omega^2} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\Omega^2}{4} [1 + \chi]^2} \sqrt{\left[ 1 + \frac{\Omega^2}{4} [1 + \chi] \right]^2 - \chi \Omega^2 \left[ 1 + \frac{\Omega^2}{4} [1 + \chi^2]^2 \right]}\end{aligned}\quad (3.79)$$

et est toujours inférieur à l'unité quel que soit  $\Omega$  pour autant que  $\chi > 0$ . Pour une fréquence infinie, nous avons alors

$$\rho_\infty = \frac{\|1 - \chi\|}{1 + \chi}\quad (3.80)$$

Le paramètre utilisateur  $\chi$ , borné par 1 (valeur qui amène un rayon spectral nul, et donc un algorithme L-stable), peut alors être exprimé en fonction de  $\rho_\infty$ . Cette valeur est reprise à la Table 3.1, ainsi que l'ordre de précision de l'algorithme. Les Figures 3.5 (a) et 3.5 (b) comparent l'évolution du rayon spectral, en fonction de la pulsation adimensionnelle, de l'algorithme EDMC-1, respectivement pour un faible amortissement numérique ( $\rho_\infty = 0.8$ , ce qui correspond à  $\chi = 0.111$ ) et pour un fort amortissement numérique ( $\rho_\infty = 0.2$ , ce qui correspond à  $\chi = 0.6666$ ). Remarquons que pour la méthode HHT, le choix  $\rho_\infty = 0.2$  conduit à  $\alpha_F > 0.5$ , ce qui viole la relation (2.115). Dès lors, il apparaît une limite de stabilité ( $\Omega_s \simeq 10$ ), qui si elle est dépassée correspond à l'introduction

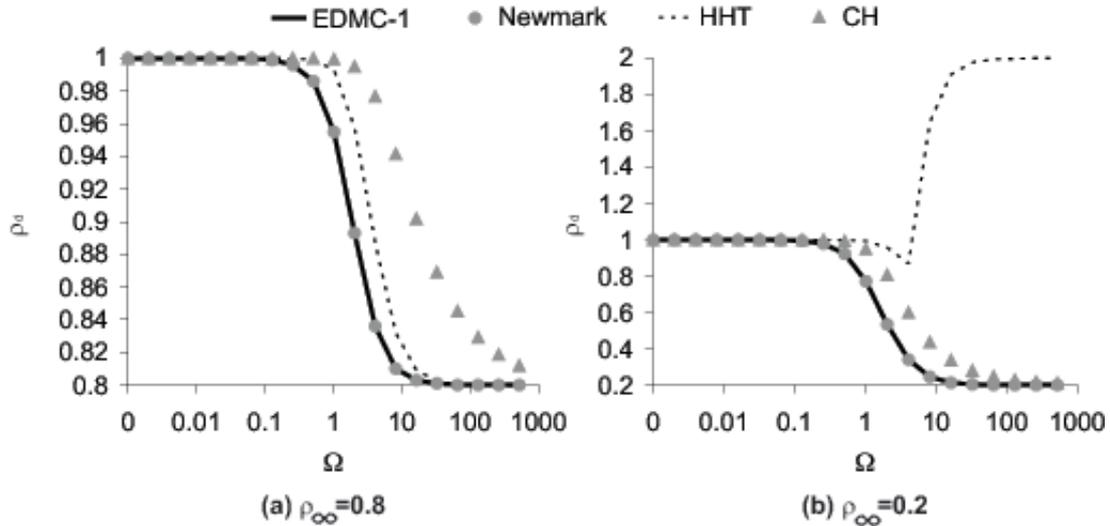


Figure 3.5: Evolution du rayon spectral en fonction de la pulsation adimensionnelle - (a) faible dissipation ( $\rho_{\infty} = 0.8$ ) - (b) forte dissipation ( $\rho_{\infty} = 0.2$ ).

d'énergie dans le système (Figure 3.5 (b)). Nous voyons que la dissipation des basses fréquences est plus importante pour les deux algorithmes précis au premier ordre (Newmark et EDMC-1) que pour les algorithmes  $\alpha$ -généralisés. Néanmoins, l'algorithme EDMC-1 reste stable dans le domaine non-linéaire. De plus, l'algorithme EDMC-1 évite la présence d'un overshoot lié aux hautes fréquences comme nous le montrons à l'appendice B.2. Lorsque nous comparons les courbes relatives à un faible amortissement aux courbes relatives à un fort amortissement, nous voyons que les modes de basse fréquence subissent toujours peu d'amortissement, et sont donc intégrés avec précision. Par contre, l'énergie associée aux modes de haute fréquence est fortement réduite pour un fort amortissement numérique. Tant que ces modes sont numériques (*i.e.* ils proviennent de la discrétisation en éléments-finis), il n'y a pas de perte de précision. Dans le cas contraire (*i.e.* ces modes existent physiquement), un fort amortissement peut correspondre à une perte de précision, sauf si l'énergie physiquement dissipée est nettement supérieure à l'énergie dissipée numériquement.

### 3.2.5 Exemple : Etude d'un système masse-ressort

Nous reprenons toujours l'exemple du système masse ressort résolu dans la section (2.2.4). L'algorithme de résolution utilisé est l'algorithme EDMC-1 qui est G-stable dans le domaine non-linéaire. La simulation est obtenue pour différents pas de temps (0.25s, 0.5s, 1s et 1.5s) et pour une rayon spectral infini  $\rho_{\infty} = 0.8$  (faible amortissement). La Figure 3.6 illustre l'évolution de la longueur du ressort et la Figure 3.7 illustre la trajectoire de la masse. Contrairement à la solution obtenue avec un algorithme dissipatif de la famille  $\alpha$ -généralisée (Figure 2.7), la solution tend toujours vers une longueur  $l = 11.001377$  qui correspond à la longueur du ressort dans la configuration d'équilibre

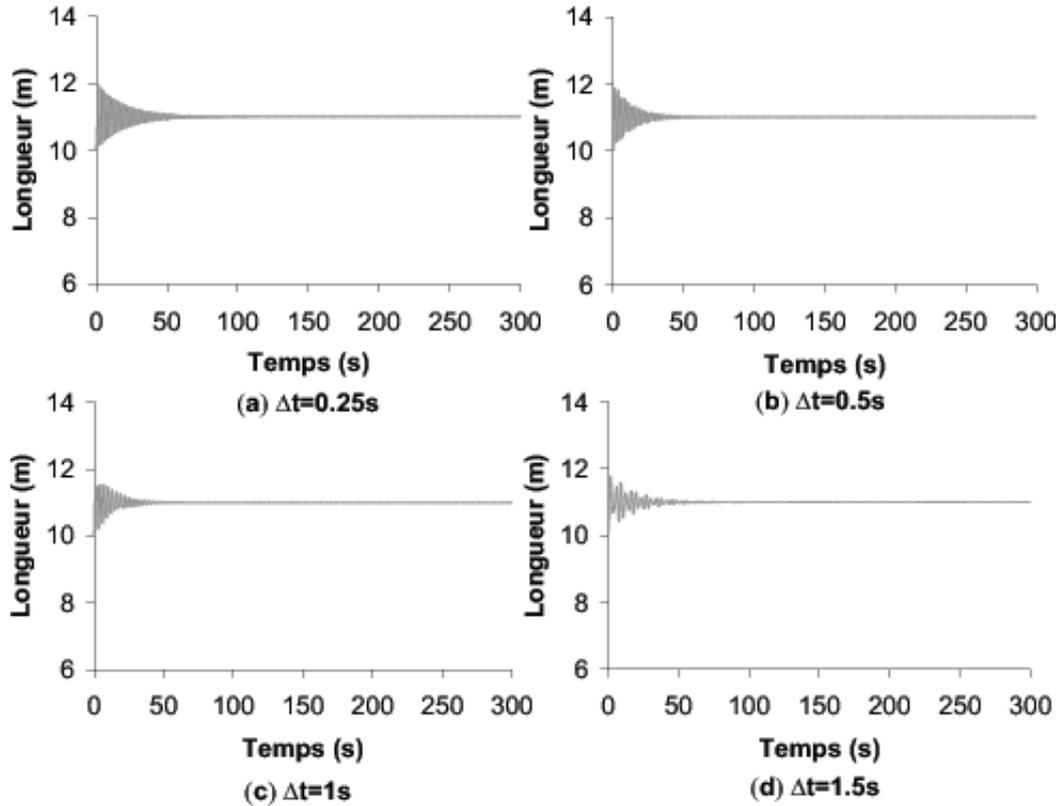


Figure 3.6: Evolution temporelle de la longueur du ressort, résolution par le schéma EDMC (rayon spectral infini  $\rho_\infty = 0.8$ ) - (a)  $\Delta t = 0.25(s)$  - (b)  $\Delta t = 0.5(s)$  - (c)  $\Delta t = 1s$  - (d)  $\Delta t = 1.5s$ .

relatif (c'est-à-dire l'équilibre obtenu dans le repère tournant à vitesse uniforme). De plus, même lorsque le pas de temps augmente, la solution obtenue reste la même (il n'y a pas de divergence). Ces constatations se confirment par l'analyse de l'énergie (Figure 3.8) qui tend vers une valeur non-nulle, et du moment angulaire (Figure 3.9) qui reste constant.

### 3.2.6 Conclusion sur l'utilisation de la méthode EDMC

Contrairement à l'algorithme  $\alpha$ -généralisé, la méthode EDMC consiste à déterminer une formulation qui sera G-stable et dissipative dans le domaine non-linéaire. Dès lors, la solution ne diverge plus quand la taille du pas de temps augmente. De plus, la dissipation numérique annule simplement les oscillations autour du mouvement d'entraînement tout en préservant ce dernier.

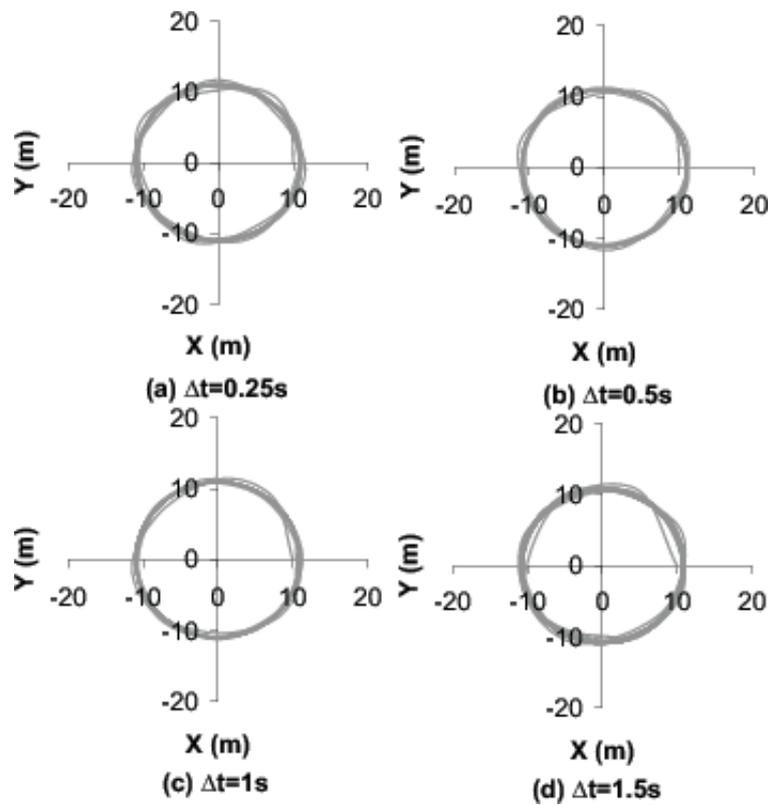


Figure 3.7: Trajectoire de la masse dans le plan, résolution par le schéma EDMC (rayon spectral infini  $\rho_\infty = 0.8$ ) - (a)  $\Delta t = 0.25(s)$  - (b)  $\Delta t = 0.5(s)$  - (c)  $\Delta t = 1s$  - (d)  $\Delta t = 1.5s$ .

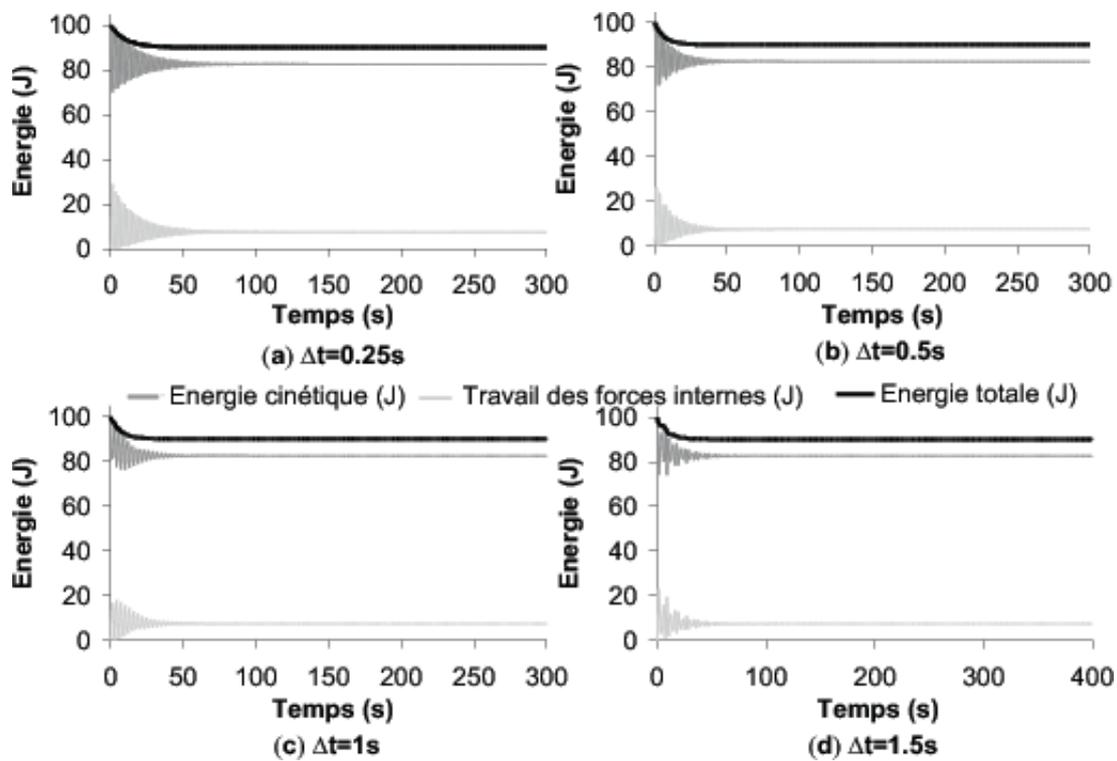


Figure 3.8: Evolution temporelle de l'énergie, résolution par le schéma EDMC (rayon spectral infini  $\rho_\infty = 0.8$ ) - (a)  $\Delta t = 0.25(s)$  - (b)  $\Delta t = 0.5(s)$  - (c)  $\Delta t = 1s$  - (d)  $\Delta t = 1.5s$ .

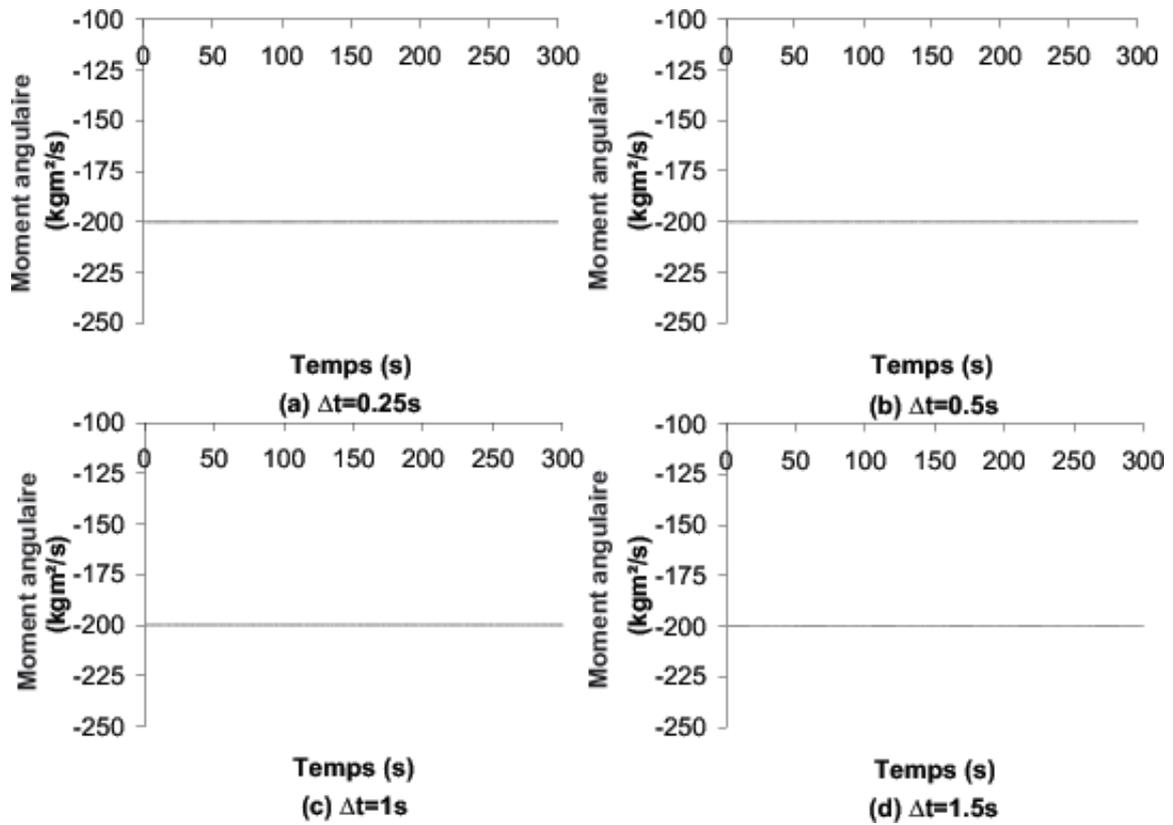


Figure 3.9: Evolution temporelle du moment angulaire, résolution par le schéma EDMC (rayon spectral infini  $\rho_\infty = 0.8$ ) - (a)  $\Delta t = 0.25\text{s}$  - (b)  $\Delta t = 0.5\text{s}$  - (c)  $\Delta t = 1\text{s}$  - (d)  $\Delta t = 1.5\text{s}$ .

### 3.3 Conclusions sur l'intégration énergétiquement consistante dans le cadre non-linéaire

Dans le chapitre 2 nous avons montré que, dans le cadre d'une analyse non-linéaire, l'algorithme de Newmark, n'était ni stable ni énergétiquement consistant. En effet, l'énergie totale du système ou une grandeur énergétique n'est conservée que lorsqu'est pris en compte le travail des forces internes et pas le potentiel interne. Or, l'algorithme de Newmark ne peut faire correspondre ces deux grandeurs que lorsque le pas de temps reste petit. L'algorithme dissipatif  $\alpha$ -généralisé peut lui aussi se révéler instable dans le cadre non-linéaire puisque de l'énergie peut être introduite dans le système. Dès lors, dans ce chapitre, un algorithme d'intégration, stable dans le cadre non-linéaire, proposé par Simo et Tarnow [140] a été exposé. Cet algorithme consiste à développer une formulation des forces internes qui amène la consistance énergétique, la G-stabilité et la A-stabilité. De la dissipation numérique peut aussi être introduite dans cette méthode. Les deux prochains chapitres se consacreront à l'établissement de cette formulation des forces pour un modèle élasto-plastique formulé suivant une loi hypoélastique et pour la simulation du contact avec frottement.



## Chapitre 4

# Contribution originale au calcul des forces internes énergétiquement consistantes pour un modèle hypoélastique

L'établissement d'une expression des forces internes en vue de vérifier la relation (3.19), s'est d'abord faite pour un système masse ressort, en utilisant le potentiel du ressort. Ensuite, cette formulation a été établie pour des matériaux hyperélastiques [140, 93, 52, 53, 101, 102], qui sont également définis à l'aide d'un potentiel. Ce potentiel peut donc directement être utilisé pour établir une formulation des forces internes énergétiquement consistante. Nous nous intéressons ici, aux matériaux hypoélastiques. Pour ce type de modèles, les contraintes sont déduites d'une loi d'évolution. Cette méthode présente l'avantage de pouvoir simuler aisément de nombreux comportements comme l'écroutissement isotrope, l'écroutissement cinématique, l'endommagement ... Par contre, aucun potentiel ne peut être défini, sauf pour les petites déformations. L'établissement d'une expression des forces internes qui vérifie la relation (3.19) ne peut donc directement être obtenue à l'aide d'un potentiel interne. Nous proposons donc une méthode originale pour pouvoir s'affranchir de ce problème. Nous allons vérifier le bilan énergétique lors d'un cycle composé d'un chargement élastique ou élastoplastique et d'un déchargement élastique. Nous nous assurerons ensuite que dans le cas où la formulation hypoélastique peut engendrer la définition d'un potentiel, comme le cas des petites déformations, notre formulation des forces internes se réduit à une expression dépendant de ce potentiel, qui vérifie directement la relation (3.19). Ces développements ont été publiés dans [113, 114].

Nous allons d'abord brièvement rappeler le principe de la formulation hypoélastique. Ensuite nous proposerons une formulation originale des forces internes d'un modèle hypoélastique qui conduit à un algorithme conservatif consistant de type EMCA. Des exemples numériques mettront en évidence les performances de cette formulation par rapport à la formulation de Newmark. Ensuite, les expressions des forces de dissipations

numériques seront déduites pour obtenir le schéma EDMC. Nous comparerons sur des exemples numériques cette formulation à la formulation  $\alpha$ -généralisée.

## 4.1 Préliminaires sur le modèle hypoélastique

D'abord les notations utilisées dans ce chapitre sont détaillées. Ensuite la méthode utilisée pour évaluer le tenseur des contraintes pour un matériau hypoélastique est expliquée. Les déformations plastiques sont prises en compte. Finalement l'intégration spatiale de ce tenseur des contraintes pour obtenir l'expression classique des forces internes est exposée.

### 4.1.1 Notations

Le gradient des déformations  $\mathbf{F}$  défini par la relation (2.3) peut être décomposé de manière incrémentale. Le gradient des déformations entre les configurations  $m$  et  $n$  est représenté par  $\mathbf{F}_m^n$ . Ce tenseur est défini par

$$\mathbf{F}_m^n \equiv \frac{\partial \vec{x}^n}{\partial \vec{x}^m} \quad (4.1)$$

Quand  $m$  se réfère à la configuration initiale, le gradient des déformations s'écrit

$$\mathbf{F}_0^n = \frac{\partial \vec{x}^n}{\partial \vec{x}_0} \quad (4.2)$$

avec

$$\mathbf{F}_0^n = \mathbf{F}_m^n \mathbf{F}_0^m \quad (4.3)$$

En conformité avec le théorème de la décomposition polaire, le gradient des déformations peut être décomposé en un tenseur rotation  $\mathbf{R}$  et en un tenseur des déformations  $\mathbf{U}$  qui est symétrique défini positif et tel que ( $\mathbf{I}$  est le tenseur identité)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_m^n &= \mathbf{R}_m^n \mathbf{U}_m^n \\ \mathbf{U}_m^n &= \mathbf{U}_m^{nT} \\ \mathbf{R}_m^{nT} \mathbf{R}_m^n &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Le déterminant de  $\mathbf{F}_m^n$  est noté  $J_m^n$ . La relation (2.5) entre la masse volumique  $\rho$  du corps et ce déterminant devient

$$\rho^n = \frac{\rho_0}{J_0^n} \quad (4.5)$$

Le tenseur incrémental des déformations de Green-Lagrange  $\mathbf{GL}_m^n$  est défini par

$$\mathbf{GL}_m^n \equiv \frac{1}{2} [\mathbf{F}_m^{nT} \mathbf{F}_m^n - \mathbf{I}] = \frac{1}{2} [\mathbf{U}_m^n \mathbf{U}_m^n - \mathbf{I}] \quad (4.6)$$

et le tenseur incrémental des déformations d'Almansi  $\mathbf{A}_m^n$  est défini par

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_m^n &\equiv \frac{1}{2} [\mathbf{I} - \mathbf{f}_m^{nT} \mathbf{f}_m^n] = \mathbf{f}_m^{nT} \mathbf{GL}_m^n \mathbf{f}_m^n \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{R}_m^n [\mathbf{I} - \mathbf{U}_m^{n-1} \mathbf{U}_m^{n-1}] \mathbf{R}_m^{nT}\end{aligned}\quad (4.7)$$

Le tenseur incrémental des déformations naturelles  $\mathbf{E}_m^n$  est aussi évalué à partir de  $\mathbf{F}$  ou peut être calculé à partir de  $\mathbf{GL}$  ou de  $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_m^n &\equiv \frac{1}{2} \ln [\mathbf{F}_m^{nT} \mathbf{F}_m^n] = \frac{1}{2} \ln [2\mathbf{GL}_m^n + \mathbf{I}] \\ &= -\frac{1}{2} \ln [\mathbf{I} - 2\mathbf{R}_m^{nT} \mathbf{A}_m^n \mathbf{R}_m^n]\end{aligned}\quad (4.8)$$

Une fois les déformations calculées, le tenseur des contraintes peut être déduit.

#### 4.1.2 Evaluation du tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes de Cauchy est évalué à la configuration  $n$  et est dénoté par  $\Sigma^n$ . Si les forces internes sont rapportées à la configuration initiale, un des tenseurs des contraintes qui peut être utilisé est le second tenseur de Piola-Kirchhoff (2.28), qui est évalué pour la configuration  $n$  par

$$\mathbf{PK}^n \equiv J_0^n \mathbf{f}_0^n \Sigma^n \mathbf{f}_0^{nT}\quad (4.9)$$

Par définition, pour un matériau hyperélastique, il existe un potentiel  $\phi(\mathbf{GL})$  à partir duquel le second tenseur de Piola-Kirchhoff est déduit. En l'absence de dissipation plastique, avec les notations utilisées, l'expression (2.29) se réécrit ici

$$\mathbf{PK}^n = \rho_0 \frac{\partial \phi(\mathbf{GL}_0^n)}{\partial \mathbf{GL}_0^n}\quad (4.10)$$

Dans le cas où il y a plasticité, une telle expression n'est valable que si le potentiel est incrémental [121]. Pour les matériaux hypoélastiques, le tenseur des contraintes de Cauchy est calculé à partir d'un incrément de contrainte  $\Delta \Sigma_n^{n+1}$  entre deux configurations successives. Le schéma de la rotation finale instantanée [123, 105, 106, 107, 124] est défini par la relation suivante

$$\Sigma^{n+1} = \mathbf{R}_n^{n+1} [\Sigma^n + \Delta \Sigma_n^{n+1}] \mathbf{R}_n^{n+1T}\quad (4.11)$$

A ce stade, définissons par un exposant  $c$ , la valeur corotationnelle c'est-à-dire la valeur avant la rotation finale instantanée. Ainsi, le tenseur corotationnel des contraintes est

défini par

$$\Sigma^{c^{n+1}} = \Sigma^n + \Delta \Sigma_n^{n+1} \quad (4.12)$$

Si le comportement du matériau est élastique, l'incrément de contrainte est déduit du tenseur des déformations naturelles

$$\Delta \Sigma_n^{n+1} = \mathcal{H} : \mathbf{E}_n^{n+1} \quad (4.13)$$

avec  $\mathcal{H}$  le tenseur de Hooke du quatrième ordre ( $k$  est le module de compressibilité et  $G$  le module de cisaillement)

$$\mathcal{H}_{ijkl} = k \delta_{ij} \delta_{kl} + G \left[ \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right] \quad (4.14)$$

L'opération  $\mathcal{H} : \mathbf{E}$  est définie en notation indicielle par  $\mathcal{H}_{ijkl} \mathbf{E}_{kl}$ . Le schéma de la rotation finale instantanée présente certaines propriétés importantes :

- (i) il est incrémentalement objectif (*i.e.* le tenseur des contraintes est actualisé exactement pour un mouvement de corps rigide);
- (ii) aucune variation parasite de volume n'est engendrée (*i.e.* le schéma ne conduit à aucune variation de volume pour un mouvement de corps rigide).

Pour un matériau élastoplastique ou élastoviscoplastique, la relation (4.12) et la relation (4.13) ne peuvent directement être utilisées que si le comportement reste élastique. Quand des déformations plastiques de type  $J2$  se produisent, la relation (4.12) devient

$$\Sigma^{c^{n+1}} = [\Sigma^n + \Delta \Sigma_n^{n+1} - \mathbf{s}^c] \quad (4.15)$$

où  $\mathbf{s}^c$  est un terme de correction purement déviatorique résultant du schéma du retour radial [124, 147, 100, 64, 84, 69, 139].

Nous allons brièvement exposer le schéma du retour radial. Plaçons-nous dans l'espace des contraintes principales ( $\Sigma_I$ ,  $\Sigma_{II}$  et  $\Sigma_{III}$ ), et supposons qu'au pas de temps  $n$ , le tenseur des contraintes de Cauchy soit compris dans la surface de charge. Cette dernière a pour centre le tenseur d'hérédité (back-stress)  $\boldsymbol{\alpha}^n$ , et a pour rayon la limite de von Mises  $\Sigma_v(\varepsilon^{pn})$  (Figure 4.1). Le prédicteur élastique  $\mathbf{s}^e$  est alors défini par la partie déviatorique de  $\Sigma^n + \Delta \Sigma_n^{n+1}$  où  $\Delta \Sigma_n^{n+1}$  est donné par (4.13). A ce stade, si ce prédicteur sort de la surface de charge ayant pour centre le tenseur d'hérédité  $\boldsymbol{\alpha}^n$  et pour rayon la limite de von Mises  $\Sigma_v(\varepsilon^{pn})$  (Figure 4.1), alors, il faut calculer la correction plastique. L'hypothèse principale du retour radial, est que le tenseur normal unitaire  $\mathbf{N}^c$ , donnant la direction de la correction plastique, dans l'espace des contraintes corotationnelles, est défini par

$$\mathbf{N}^c = \frac{\mathbf{s}^e - \boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{[\mathbf{s}^e - \boldsymbol{\alpha}] : [\mathbf{s}^e - \boldsymbol{\alpha}]}} \quad (4.16)$$

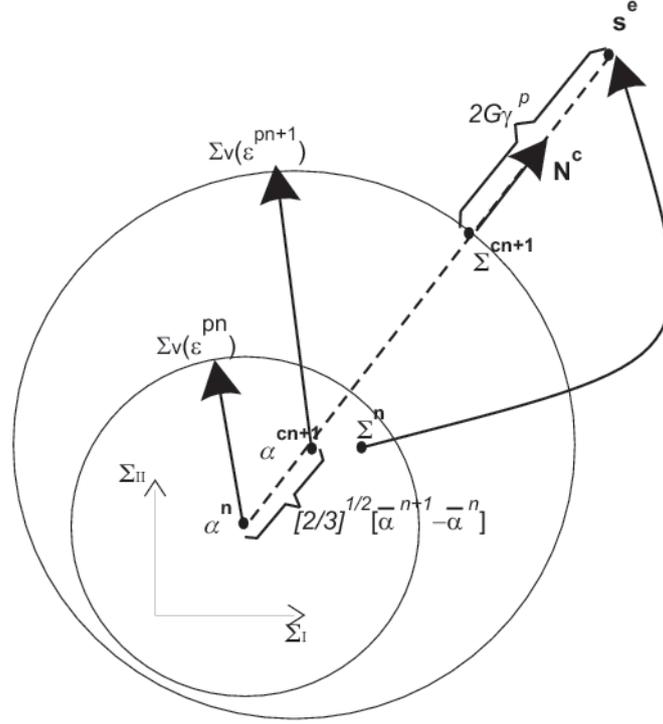


Figure 4.1: Schéma du retour radial dans l'espace des contraintes principales  $\Sigma_I, \Sigma_{II}$  (analogie 2D).

où l'opération  $\mathbf{a} : \mathbf{b}$  est définie comme étant  $\mathbf{a}_{ij}\mathbf{b}_{ij}$ . Le scalaire  $\gamma^p$  peut alors être défini de sorte que la correction plastique soit exprimée par

$$\mathbf{s}^c = 2G\gamma^p\mathbf{N}^c \quad (4.17)$$

La théorie de la plasticité (voir par exemple [76, 123, 124]) permet alors d'exprimer la déformation plastique équivalente  $\varepsilon^p$ , la nouvelle limite de von Mises  $\Sigma_v$  et le scalaire équivalent d'hérédité  $\bar{\alpha}$  en fonction de  $\gamma^p$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{pn+1} &= \varepsilon^{pn} + \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma^p \\ \Sigma_v^{n+1}(\varepsilon^{pn+1}) &\equiv \Sigma_v^{n+1}(\gamma^p) \\ \bar{\alpha}(\varepsilon^{pn+1}) &\equiv \bar{\alpha}^{n+1}(\gamma^p) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Si l'écroissage cinématique est supposé linéaire, le nouveau tenseur d'hérédité devient

$$\boldsymbol{\alpha}^{cn+1} = \boldsymbol{\alpha}^n + \sqrt{\frac{2}{3}}[\bar{\alpha}(\varepsilon^{pn+1}) - \bar{\alpha}(\varepsilon^{pn})]\mathbf{N}^c \quad (4.19)$$

A ce stade, il reste donc une seule inconnue  $\gamma^p$  qui est déterminée afin de vérifier le critère de von Mises [124] évalué au temps  $t^{n+1}$ , soit

$$\left[ \mathbf{s}^e - 2G\gamma^p \mathbf{N}^c - \boldsymbol{\alpha}^{cn+1}(\gamma^p) \right] : \left[ \mathbf{s}^e - 2G\gamma^p \mathbf{N}^c - \boldsymbol{\alpha}^{cn+1}(\gamma^p) \right] = \frac{2}{3} \left[ \Sigma_v^{n+1}(\gamma^p) \right]^2 \quad (4.20)$$

La nouvelle surface de charge a donc pour centre le tenseur d'hérédité  $\boldsymbol{\alpha}^{cn+1}$  et pour rayon la limite de von Mises  $\Sigma_v(\varepsilon^{pn+1})$  (Figure 4.1). Enfin, le schéma de la rotation finale instantanée permet de passer de l'espace des contraintes corotationnelles à l'espace de contraintes actuelles par

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}^{n+1} &= \mathbf{R}_n^{n+1} \boldsymbol{\Sigma}^{cn+1} \mathbf{R}_n^{n+1T} \\ \mathbf{N}^{n+1} &= \mathbf{R}_n^{n+1} \mathbf{N}^{cn+1} \mathbf{R}_n^{n+1T} \\ \boldsymbol{\alpha}^{n+1} &= \mathbf{R}_n^{n+1} \boldsymbol{\alpha}^{cn+1} \mathbf{R}_n^{n+1T} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Maintenant, il faut évaluer les forces internes à partir du tenseur des contraintes.

### 4.1.3 Formulation classique des forces internes

A partir de la relation (2.39), l'expression à la configuration  $n$  est directement obtenue

$$\left[ \vec{F}_{int}^n \right]^\xi = \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ \boldsymbol{\Sigma}^{nT} \mathbf{f}_0^{nT} \vec{D}^\xi J_0^n \right\} d\mathbb{V}_0 \quad (4.22)$$

avec  $\mathbf{f}_0^n$  l'inverse du gradient des déformation entre la configuration courante et la configuration initiale, avec  $J_0^n$  le rapport entre le volume courant et le volume initial, et avec  $\vec{D}^\xi = \frac{\partial \varphi^\xi}{\partial \vec{x}_0}$  la dérivée des fonction de forme dans la configuration initiale. L'expression (4.22) est valable pour tout temps  $t$ . Cependant, lorsque l'équation d'équilibre doit être intégrée sous la forme d'une différence finie, nous allons montrer que cette expression ne peut plus être utilisée telle quelle.

## 4.2 Expression énergétiquement consistante des forces internes

L'expression des forces internes dans la configuration  $n$  est donnée par la relation (4.22). Si cette expression est évaluée pour  $\bar{x}^{n+\frac{1}{2}}$ , elle devient (avec  $\Sigma$  symétrique)

$$\left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi = \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ \Sigma^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{f}_0^{n+\frac{1}{2}T} \vec{D}^\xi J_0^{n+\frac{1}{2}} \right\} d\mathbb{V}_0 \quad (4.23)$$

En règle générale, cette dernière relation ne vérifie pas la conservation de l'énergie (3.19). De plus, le volume va être évalué en une configuration intermédiaire, ce qui va introduire des perturbations parasites de changement de volume (par exemple, pour un mouvement de corps rigide  $\det[\mathbf{F}_0^{n+\frac{1}{2}}] \neq \frac{1}{2} \det[\mathbf{F}_0^{n+1} + \mathbf{F}_0^n]$ ).

### 4.2.1 Nouvelle formulation des forces internes

Dès lors, nous proposons l'expression suivante

$$\begin{aligned} \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi &= \frac{1}{2} \left[ \vec{F}_{int}^* + \vec{F}_{int}^{**} \right]^\xi \\ \left[ \vec{F}_{int}^* \right]^\xi &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ [\mathbf{I} + \mathbf{F}_n^{n+1}] [\Sigma^{nT} + \mathbf{C}^*] \mathbf{f}_0^{nT} \vec{D}^\xi J_0^n \right\} d\mathbb{V}_0 \\ \left[ \vec{F}_{int}^{**} \right]^\xi &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ [\mathbf{I} + \mathbf{f}_n^{n+1}] [\Sigma^{n+1T} + \mathbf{C}^{**}] \mathbf{f}_0^{n+1T} \vec{D}^\xi J_0^{n+1} \right\} d\mathbb{V}_0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

où  $\mathbf{C}^*$  et  $\mathbf{C}^{**}$  sont deux tenseurs symétriques, qui sont nuls s'il n'y a pas de déformations plastiques. Ces tenseurs seront déterminés plus tard. Le tenseur des contraintes est évalué par le schéma de la rotation finale instantanée, en combinaison avec le retour radial (section 4.1.2). Le tenseur des contraintes dans la configuration  $n+1$  est évalué à partir du tenseur dans la configuration  $n$ . Le schéma reste donc incrémentalement objectif. De plus, dans la relation (4.24), les contraintes sont toujours intégrées avec leur volume relatif (grâce à  $J$ ). Dès lors, il n'y a pas de perturbation de volume introduite lorsque le mouvement est un mode rigide, comme cela est montré en appendice C.1.

Dans cette section, nous allons démontrer que la relation (4.24) vérifie les lois de conservation, dans le cadre non-linéaire des grandes transformations (déplacements et déformations) mais aussi dans le cadre linéaire des petites transformations. Ensuite, nous la comparerons à l'expression donnée par Simo et Tarnow [140].

### 4.2.2 Conservation du moment linéaire

La relation (3.7), c'est-à-dire  $\sum_\xi \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi = 0$ , est directement vérifiée en effectuant une addition sur  $\xi$  dans l'équation (4.24) et en utilisant les propriétés des fonctions de

forme

$$\sum_{\xi} \vec{D}^{\xi} = \sum_{\xi} \frac{\partial \varphi^{\xi}}{\partial \vec{x}_0} = 0 \quad (4.25)$$

### 4.2.3 Conservation du moment angulaire

Nous allons maintenant vérifier que  $[\vec{F}_{int}^*]_i^{\xi}$  et  $[\vec{F}_{int}^{**}]_i^{\xi}$  de la relation (4.24) vérifient chacune la relation (3.13), c'est-à-dire  $[\frac{\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n}{2}]^{\xi} \wedge [\vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}}]^{\xi} = 0$ . Soit  $\epsilon$  le tenseur des permutations du troisième ordre tel que pour deux vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ , il vient  $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \epsilon : [\vec{a} \otimes \vec{b}]$ , avec l'opération  $[\vec{a} \otimes \vec{b}]_{ij} = \vec{a}_i \vec{b}_j$ . Dès lors, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} 2 [\vec{x}^{n+\frac{1}{2}}]^{\xi} \wedge [\vec{F}_{int}^*]^{\xi} &= \epsilon : \left\{ [\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n]^{\xi} \otimes [\vec{F}_{int}^*]^{\xi} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon : \left\{ [\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n]^{\xi} \otimes \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ [\mathbf{I} + \mathbf{F}_n^{n+1}] [\boldsymbol{\Sigma}^{nT} + \mathbf{C}^*] \mathbf{f}_0^{nT} \vec{D}^{\xi} J_0^n \right\} d\mathbb{V}_0 \right\} \end{aligned} \quad (4.26)$$

En utilisant (4.1) et (4.3), il vient

$$\begin{aligned} [\vec{x}^n]^{\xi} \otimes [\mathbf{f}_0^{nT} \vec{D}^{\xi}] &= \mathbf{I} \\ [\vec{x}^{n+1}]^{\xi} \otimes [\mathbf{f}_0^{nT} \vec{D}^{\xi}] &= \mathbf{F}_n^{n+1T} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Grâce à la relation (4.27) et au fait que  $\boldsymbol{\Sigma}$  est symétrique, la relation (4.26) devient

$$\begin{aligned} 4 [\vec{x}^{n+\frac{1}{2}}]^{\xi} \wedge [\vec{F}_{int}^*]^{\xi} &= \epsilon : \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ [\mathbf{I} + \mathbf{F}_n^{n+1}] [\boldsymbol{\Sigma}^n + \mathbf{C}^*] [\mathbf{I} + \mathbf{F}_n^{n+1}]^T J_0^n \right\} d\mathbb{V}_0 \\ &= \int_{\mathbb{V}_0} \{ \epsilon : \boldsymbol{\Theta} J_0^n \} d\mathbb{V}_0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Ce dernier terme est bien nul puisque  $\boldsymbol{\Theta} = [\mathbf{I} + \mathbf{F}_n^{n+1}] [\boldsymbol{\Sigma}^n + \mathbf{C}^*] [\mathbf{I} + \mathbf{F}_n^{n+1}]^T$  est un tenseur symétrique (en supposant que  $\boldsymbol{\Sigma}$  et  $\mathbf{C}^*$  sont symétriques, ce qui est bien le cas) et  $\epsilon$  un tenseur anti-symétrique. Dès lors,  $\epsilon : \boldsymbol{\Theta}$  est égal à zéro. La même procédure appliquée à  $\vec{F}_{int}^{**}$  conduit à

$$[\vec{x}^{n+\frac{1}{2}}]^{\xi} \wedge [\vec{F}_{int}^{**}]^{\xi} = 0 \quad (4.29)$$

et l'équation (3.13) est ainsi vérifiée.

### 4.2.4 Conservation de l'énergie

La relation de conservation de l'énergie à vérifier est représentée par la relation (3.19), soit  $[\vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}}]^{\xi} \cdot [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^{\xi} = U_{int}^{n+1} - U_{int}^n + \Delta_{int}$ . D'abord l'expression  $\vec{F}_{int}^*$  provenant

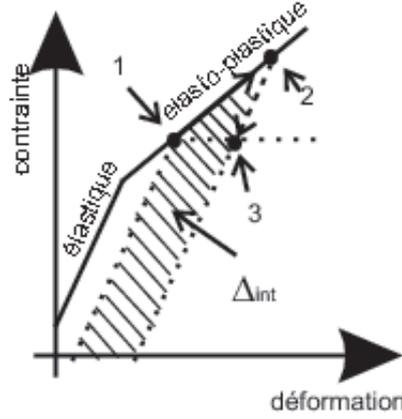


Figure 4.2: Définition du cycle de chargement-déchargement (analogie 1D).

de (4.24) est utilisée dans (3.19). En utilisant alors (4.1) et (4.3), il vient

$$\begin{aligned} [\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n]^\xi \cdot [\vec{F}_{int}^*]^\xi &= \frac{1}{2} [\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n]^\xi \cdot \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ [\mathbf{I} + \mathbf{F}_n^{n+1}] [\boldsymbol{\Sigma}^n + \mathbf{C}^*] \mathbf{f}_0^{nT} \vec{D}^\xi J_0^n \right\} d\mathbb{V}_0 \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ [\mathbf{F}_n^{n+1T} \mathbf{F}_n^{n+1} + \mathbf{F}_n^{n+1} - \mathbf{F}_n^{n+1T} - \mathbf{I}] : [\boldsymbol{\Sigma}^n + \mathbf{C}^*] J_0^n \right\} d\mathbb{V}_0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Comme  $\boldsymbol{\Sigma}$  et  $\mathbf{C}^*$  sont symétriques, il vient

$$\mathbf{F}_n^{n+1T} : [\boldsymbol{\Sigma}^n + \mathbf{C}^*] - \mathbf{F}_n^{n+1} : [\boldsymbol{\Sigma}^n + \mathbf{C}^*] = 0 \quad (4.31)$$

En utilisant (4.6) et (4.31), la relation (4.30) devient

$$[\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n]^\xi \cdot [\vec{F}_{int}^*]^\xi = \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ \mathbf{GL}_n^{n+1} : [\boldsymbol{\Sigma}^n + \mathbf{C}^*] J_0^n \right\} d\mathbb{V}_0 \quad (4.32)$$

Pour  $[\vec{F}_{int}^{**}]^\xi$  le même procédé conduit à

$$[\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n]^\xi \cdot [\vec{F}_{int}^{**}]^\xi = \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ \mathbf{A}_n^{n+1} : [\boldsymbol{\Sigma}^{n+1} + \mathbf{C}^{**}] J_0^{n+1} \right\} d\mathbb{V}_0 \quad (4.33)$$

et finalement nous déduisons

$$\begin{aligned} &[\vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}}]^\xi \cdot [\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n]^\xi = \\ &\frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ \mathbf{GL}_n^{n+1} : [\boldsymbol{\Sigma}^n + \mathbf{C}^*] J_0^n + \mathbf{A}_n^{n+1} : [\boldsymbol{\Sigma}^{n+1} + \mathbf{C}^{**}] J_0^{n+1} \right\} d\mathbb{V}_0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

qui doit être égal à  $U_{int}^{n+1} - U_{int}^n + \Delta_{int}$  pour vérifier la conservation de l'énergie (3.19).

A partir de ce point, pour un modèle hyperélastique, un potentiel  $\phi$  peut être écrit pour évaluer l'énergie interne [101, 102]. Cependant, pour un matériau hypoélastique, aucun potentiel ne peut être défini. Dès lors, nous procédons autrement pour démontrer que (4.34) est identique à  $U_{int}^{n+1} - U_{int}^n + \Delta_{int}$ . Imaginons un cycle de chargement-déchargement en deux pas de temps, entre les configurations correspondant aux points 1 et 3 de la Figure 4.2. Dans ce cycle, le tenseur des contraintes de Cauchy initial  $\Sigma^1$  correspond au tenseur des contraintes de Cauchy final  $\Sigma^3$  à une rotation arbitraire près  $\mathbf{Q}$  ( $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$  et  $\det \mathbf{Q} = 1$ )

$$\Sigma^3 = \mathbf{Q} \Sigma^1 \mathbf{Q}^T \quad (4.35)$$

Durant la phase de chargement de la configuration 1 vers la configuration 2, nous supposons l'existence de déformations (visco)plastiques alors que la transition de la configuration 2 vers la configuration 3 correspond à un déchargement élastique (il n'y a donc pas de tenseurs  $\mathbf{C}^*$  et  $\mathbf{C}^{**}$  associés au déchargement). Remarquons que la configuration 3 peut être cinématiquement inaccessible, ce qui n'empêche pas de raisonner au niveau du point matériel comme nous le faisons<sup>1</sup>. Dans ce cadre, l'expression des forces internes (4.24) est consistante avec le postulat de Drucker (*c.f.* par exemple [99]) si le travail réversible lors de la phase de chargement est récupéré pendant la phase de déchargement (*i.e.*  $U_{int}^3 - U_{int}^1 = 0$ ). Dès lors, l'équation de conservation de l'énergie entre les configurations 1 et 3 peut être exprimée par double application de (3.19), ce qui conduit à

$$\left[ \vec{F}_{int}^{\frac{3}{2}} \right]^\xi \cdot [\vec{x}^2 - \vec{x}^1]^\xi + \left[ \vec{F}_{int}^{\frac{5}{2}} \right]^\xi \cdot [\vec{x}^3 - \vec{x}^2]^\xi = \Delta_{int} \quad (4.36)$$

En utilisant les relation (4.34), (4.35) et (4.36), la dissipation d'énergie interne peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} \Delta_{int} = & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \{ \mathbf{GL}_1^2 : [\Sigma^1 + \mathbf{C}^*] J_0^1 + \mathbf{A}_1^2 : [\Sigma^2 + \mathbf{C}^{**}] J_0^2 \} d\mathbb{V}_0 + \\ & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \{ \mathbf{GL}_2^3 : \Sigma^2 J_0^2 + \mathbf{A}_2^3 : [\mathbf{Q} \Sigma^1 \mathbf{Q}^T] J_0^3 \} d\mathbb{V}_0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Maintenant, examinons les implications de la relation (4.35). Soit  $\mathbf{E}_1^{\text{el}^2}$  le tenseur des déformations naturelles élastiques défini par

$$\mathcal{H} : \mathbf{E}_1^{\text{el}^2} \equiv \mathcal{H} : \mathbf{E}_1^2 - \mathbf{s}_1^c \quad (4.38)$$

<sup>1</sup>C'est le même type de raisonnement, avec des hypothèses semblables sur l'admissibilité cinématique, qui conduit à la formulation multiplicative  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^{\text{el}} \mathbf{F}^{\text{pl}}$  liées aux représentations hyperélastiques des modèles élasto-plastiques (*c.f.* par exemple Lubliner [99]).

Il se déduit des équations (4.13), (4.15) et (4.21)

$$\Sigma^2 = \mathbf{R}_1^2 [\Sigma^1 + \mathcal{H} : \mathbf{E}_1^2 - \mathbf{s}^{c_1^2}] \mathbf{R}_1^{2T} = \mathbf{R}_1^2 [\Sigma^1 + \mathcal{H} : \mathbf{E}^{\text{el}^2}_1] \mathbf{R}_1^{2T} \quad (4.39)$$

Dès lors, nous définissons  $\mathbf{U}^{\text{el}^2}_1$  le tenseur symétrique tel que

$$\mathbf{E}^{\text{el}^2}_1 \equiv \frac{1}{2} \ln [\mathbf{U}^{\text{el}^2}_1 \mathbf{U}^{\text{el}^2}_1] \quad (4.40)$$

l'existence de  $\mathbf{U}^{\text{el}^2}_1$  résultant de la symétrie de  $\mathbf{E}^{\text{el}^2}_1$ . Le tenseur élastique de Green-Lagrange  $\mathbf{GL}^{\text{el}^2}_1$ , et le tenseur élastique d'Almansi  $\mathbf{A}^{\text{el}^2}_1$  sont définis à partir de  $\mathbf{U}^{\text{el}^2}_1$

$$\begin{aligned} \mathbf{GL}^{\text{el}^2}_1 &\equiv \frac{1}{2} [\mathbf{U}^{\text{el}^2}_1 \mathbf{U}^{\text{el}^2}_1 - \mathbf{I}] \\ \mathbf{A}^{\text{el}^2}_1 &\equiv \frac{1}{2} \mathbf{R}_1^2 [\mathbf{I} - \mathbf{U}^{\text{el}^2-1}_1 \mathbf{U}^{\text{el}^2-1}_1] \mathbf{R}_1^{2T} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Finalement, les tenseurs plastiques incrémentaux correspondants sont définis par

$$\begin{aligned} \mathbf{GL}^{\text{pl}^2}_1 &\equiv \mathbf{GL}^2_1 - \mathbf{GL}^{\text{el}^2}_1 \\ \mathbf{A}^{\text{pl}^2}_1 &\equiv \mathbf{A}^2_1 - \mathbf{A}^{\text{el}^2}_1 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Maintenant nous devons calculer les variables dans la configuration 3 à partir de ces définitions. En utilisant les relations (4.13), (4.15) et (4.21), la relation (4.35) devient

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \Sigma^1 \mathbf{Q}^T &= \Sigma^3 = \mathbf{R}_2^3 [\mathbf{R}_1^2 \Sigma^1 \mathbf{R}_1^{2T} + \mathbf{R}_1^2 \mathcal{H} : \mathbf{E}^{\text{el}^2}_1 \mathbf{R}_1^{2T} + \mathcal{H} : \mathbf{E}_2^3] \mathbf{R}_2^{3T} \\ &= \mathbf{R}_2^3 \mathbf{R}_1^2 \Sigma^1 \mathbf{R}_1^{2T} \mathbf{R}_2^{3T} + \mathbf{R}_2^3 \mathbf{R}_1^2 \mathcal{H} : \mathbf{E}^{\text{el}^2}_1 \mathbf{R}_1^{2T} \mathbf{R}_2^{3T} + \mathbf{R}_2^3 \mathcal{H} : \mathbf{E}_2^3 \mathbf{R}_2^{3T} \end{aligned} \quad (4.43)$$

De cette relation, sous l'hypothèse que  $\mathcal{H}$  est constant et isotrope, nous pouvons conclure que la transformation de la configuration 2 à la configuration 3 doit avoir les propriétés suivantes

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}_2^3 \mathbf{R}_1^2 \quad (4.44)$$

et

$$\mathcal{H} : \mathbf{E}_2^3 = -\mathbf{R}_1^2 \mathcal{H} : \mathbf{E}^{\text{el}^2}_1 \mathbf{R}_1^{2T} \quad (4.45)$$

pour être consistante avec notre définition de la configuration 3. En utilisant les relations (4.4), (4.8), (4.14), (4.41), (4.44) et (4.45), nous pouvons démontrer grâce aux propriétés des fonctions logarithmes (appendice C.2) que

$$\begin{aligned} \mathbf{GL}^3_2 &= -\mathbf{A}^{\text{el}^2}_1 \\ \mathbf{A}^3_2 &= -\mathbf{Q} \mathbf{GL}^{\text{el}^2}_1 \mathbf{Q}^T \end{aligned} \quad (4.46)$$

De plus, à partir de la relation (4.45), nous avons les relations suivantes entre les traces des matrices

$$\begin{aligned} \text{tr} [\mathcal{H} : \mathbf{E}_2^3] &= \text{tr} \left[ -\mathbf{R}_1^2 \mathcal{H} : \mathbf{E}_1^{\text{el}2} \mathbf{R}_1^{2T} \right] \\ \text{tr} [\mathcal{H} : \mathbf{E}_2^3] &= \text{tr} \left[ -\mathcal{H} : \mathbf{E}_1^{\text{el}2} \right] \\ 3k \text{tr} [\mathbf{E}_2^3]_{ii} &= 3k \text{tr} \left[ -\mathbf{E}_1^{\text{el}2} \right] \end{aligned} \quad (4.47)$$

et, puisque la trace d'un logarithme d'une matrice correspond au logarithme du déterminant de la matrice, le déterminant de  $\mathbf{U}_1^{\text{el}2}$  est égal à l'inverse du déterminant de  $\mathbf{U}_2^3$ . En utilisant le même procédé à partir de la relation (4.38), et puisque le tenseur  $\mathbf{s}^c$  a une trace nulle, le déterminant de  $\mathbf{U}_1^{\text{el}2}$  est égal au déterminant de  $\mathbf{U}_1^2$ , et il vient

$$J_0^3 = J_0^1 \quad (4.48)$$

Dès lors, grâce à (4.46) et (4.48), et en utilisant les définitions (4.40), (4.41) et (4.42), la relation (4.37) devient

$$\begin{aligned} \Delta_{int} &= \frac{1}{2} \int_{V_0} \left\{ \left[ \mathbf{GL}_1^{\text{pl}2} : \Sigma^1 + \mathbf{GL}_1^2 : \mathbf{C}^* \right] J_0^1 \right\} dV_0 + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_{V_0} \left\{ \left[ \mathbf{A}_1^{\text{pl}2} : \Sigma^2 + \mathbf{A}_1^2 : \mathbf{C}^{**} \right] J_0^2 \right\} dV_0 \end{aligned} \quad (4.49)$$

La relation (4.49) doit être considérée d'un point de vue physique. Elle signifie que la dissipation interne venant des déformations plastiques peut être exprimée à partir d'une dissipation volumique, par rapport au volume initial,  $D_{int} \geq 0$  comme étant

$$\Delta_{int} = \int_{V_0} \{D_{int}\} dV_0 > 0 \quad (4.50)$$

Dans cette expression,  $D_{int}$  correspond à la dissipation interne sur un pas de temps, par unité de volume initial, et sera exprimé plus loin. Soient les tenseurs  $\mathbf{C}^*$  et  $\mathbf{C}^{**}$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^* &= \frac{\frac{D_{int}}{J_0^n} - \Sigma^n : \mathbf{GL}_n^{\text{pl}n+1}}{\mathbf{GL}_n^{n+1} : \mathbf{GL}_n^{n+1}} \mathbf{GL}_n^{n+1} \\ \mathbf{C}^{**} &= \frac{\frac{D_{int}}{J_0^{n+1}} - \Sigma^{n+1} : \mathbf{A}_n^{\text{pl}n+1}}{\mathbf{A}_n^{n+1} : \mathbf{A}_n^{n+1}} \mathbf{A}_n^{n+1} \end{aligned} \quad (4.51)$$

exprimés en reconsidérant les configurations  $n$  et  $n+1$  au lieu de 1 et 2. En combinant les relations (4.49) et (4.51), la relation (4.50) est vérifiée. Nous concluons donc que les tenseurs  $\mathbf{C}^*$  et  $\mathbf{C}^{**}$  de l'expression (4.51) conduisent à un schéma énergétiquement

consistant. De plus, ces tenseurs sont symétriques et sont égaux à zéro quand aucune déformation plastique n'apparaît. Dans le cas où des déformations plastiques apparaissent, nous avons bien une dissipation  $\Delta_{int} > 0$  si  $D_{int} > 0$ .

Nous allons montrer que les tenseurs  $\mathbf{C}^*$  et  $\mathbf{C}^{**}$  sont du second ordre par rapport à l'incrément de déformation plastique. La relation (4.38) peut être transformée en utilisant un développement en série de la fonction logarithme népérien  $(\ln)^2$ , et en utilisant la relation (4.8) et la relation (4.17)

$$\begin{aligned}\mathcal{H} : \mathbf{E}_n^{el^{n+1}} &= \mathcal{H} : \mathbf{E}_n^{n+1} - \mathbf{s}_n^{cn+1} \\ \mathcal{H} : \mathbf{GL}_n^{el^{n+1}} &= \mathcal{H} : \mathbf{GL}_n^{n+1} + \mathcal{O}\left(\mathbf{GL}_n^{pl^{n+1^2}}\right) - 2G\gamma^p \mathbf{N}^c\end{aligned}\quad (4.52)$$

ou encore

$$\mathcal{H} : \mathbf{A}_n^{el^{n+1}} = \mathcal{H} : \mathbf{A}_n^{n+1} + \mathcal{O}\left(\mathbf{A}_n^{pl^{n+1^2}}\right) - 2G\gamma^p \mathbf{N}\quad (4.53)$$

Comme, pour la plasticité  $J2$ , les traces de  $\mathbf{N}^c$  et de  $\mathbf{N}$  sont égales à zéro, l'inversion de la loi de Hooke (relation 4.14) conduit à

$$\begin{aligned}\mathbf{GL}_n^{n+1} - \mathbf{GL}_n^{el^{n+1}} + \mathcal{O}\left(\mathbf{GL}_n^{pl^{n+1^2}}\right) &= \gamma^p \mathbf{N}^c \\ \mathbf{A}_n^{n+1} - \mathbf{A}_n^{el^{n+1}} + \mathcal{O}\left(\mathbf{A}_n^{pl^{n+1^2}}\right) &= \gamma^p \mathbf{N}\end{aligned}\quad (4.54)$$

Dès lors, à partir de (4.51) nous avons

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^* : \mathbf{GL}_n^{n+1} J_0^n &= D_{int} - \gamma^p \mathbf{N}^c : \Sigma^n J_0^n + \mathcal{O}\left(\Sigma^n : \mathbf{GL}_n^{pl^{n+1^2}}\right) \\ \mathbf{C}^{**} : \mathbf{A}_n^{n+1} J_0^{n+1} &= D_{int} - \gamma^p \mathbf{N} : \Sigma^{n+1} J_0^{n+1} + \mathcal{O}\left(\Sigma^{n+1} : \mathbf{A}_n^{pl^{n+1^2}}\right)\end{aligned}\quad (4.55)$$

La variation temporelle de l'énergie dissipée par unité de volume courant est exprimée comme étant [1] (nous utilisons  $\mathbf{N}^c$  puisqu'en instantané, il correspond à  $\mathbf{N}$ )

$$\dot{d}_{int} = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{\varepsilon}^p \Sigma : \mathbf{N}^c\quad (4.56)$$

En utilisant les relations (4.17), (4.18), (4.19) et (4.20) nous pouvons transformer cette relation en

$$\dot{d}_{int} = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{\varepsilon}^p \left\{ \underbrace{[\Sigma - \alpha] : \mathbf{N}^c}_{\sqrt{\frac{2}{3}} \Sigma_v} + \underbrace{\alpha : \mathbf{N}^c}_{\sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\alpha}} \right\} = \dot{\varepsilon}^p [\Sigma_v + \bar{\alpha}]\quad (4.57)$$

<sup>2</sup>Si  $\|\mathbf{B} - \mathbf{I}\| < 1$  :  $\ln(\mathbf{B}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[-1]^{k-1}}{k} [\mathbf{B} - \mathbf{I}]^k$  [120].

Dès lors, la dissipation interne se discrétise sur un pas de temps, en passant de la configuration initiale à la configuration courante par l'intermédiaire de  $J$  ( $D_{int} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} J \dot{d}_{int} dt$ ), en

$$D_{int} \simeq \frac{1}{2} \varepsilon_n^{p_{n+1}} \{ [\Sigma_v^{n+1} + \bar{\alpha}^{n+1}] J_0^{n+1} + [\Sigma_v^n + \bar{\alpha}^n] J_0^n \} \quad (4.58)$$

Remarquons que dans le cas où le tenseur d'hérédité  $\alpha$  n'est pas aligné sur le tenseur normal  $\mathbf{N}$  (écrouissage cinématique non-linéaire ou chemin de chargement non radial), la relation (4.57) n'est plus valide, et la relation (4.58) devient

$$D_{int} \simeq \frac{1}{2} \varepsilon_n^{p_{n+1}} \left[ \sqrt{\frac{3}{2} \Sigma^{n+1} : \Sigma^{n+1}} J_0^{n+1} + \sqrt{\frac{3}{2} \Sigma^n : \Sigma^n} J_0^n \right] \quad (4.59)$$

Revenons à la relation (4.58), avec la définition de  $\gamma^p$  (4.17), de  $\varepsilon^p$  (4.18), de  $\boldsymbol{\alpha}^c$  (4.19), de  $\mathbf{N}^c$  (4.16) et en définissant  $\Sigma^{\text{dev}^n}$  comme étant la partie déviatorique de  $\Sigma^n$ , la relation du critère de von Mises discrétisé (4.20) approximée au premier ordre conduit à

$$\begin{aligned} \gamma^p \mathbf{N}^c : \Sigma^n J_0^n &= \gamma^p \mathbf{N}^c : \Sigma^{\text{dev}^n} J_0^n \simeq \varepsilon_n^{p_{n+1}} [\Sigma_v^n + \bar{\alpha}^n] J_0^n \\ \gamma^p \mathbf{N} : \Sigma^{n+1} J_0^{n+1} &= \gamma^p \mathbf{N} : \Sigma^{\text{dev}^{n+1}} J_0^{n+1} \simeq \varepsilon_n^{p_{n+1}} [\Sigma_v^{n+1} + \bar{\alpha}^{n+1}] J_0^{n+1} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Finalement, grâce à (4.58) et (4.60) la somme des deux termes de l'expression (4.55) (somme qui intervient dans (4.49)) conduit à des termes du second ordre. Dès lors, pour de petits incréments de déformations plastiques, les tenseurs correctifs sont du second ordre.

En outre, nous avons défini par la relation (4.58) (ou (4.59)) l'expression de la dissipation interne  $D_{int}$  qui permet de déterminer les tenseurs  $\mathbf{C}^*$  et  $\mathbf{C}^{**}$  (4.51) qui conduisent à une formulation énergétiquement consistante des forces internes.

L'implémentation numérique des forces internes est exposée en détail en appendice C.3 et la matrice de raideur cohérente  $\mathbf{K}$  est développée en appendice C.4. L'ordre pratique d'évaluation des termes est représenté à la Table 4.1.

### Remarque:

Pour un modèle hypoélastique la contrainte peut montrer des oscillations pour un cycle de chargement-déchargement sur plusieurs pas [107, 123]. Néanmoins, ce phénomène ne provient pas de la méthode ici proposée pour laquelle le cycle de charge/décharge s'effectue en un pas de temps.

## 4.2.5 Hypothèse des petites transformations

Dans le cas des petites transformations, nous allons montrer que la formulation des forces internes proposée conduit bien à une conservation du potentiel interne. Si

Table 4.1: Ordre d'évaluation des termes.

Calcul des déformations	Valeurs	Relations
gradient des déformations	$\mathbf{F}_n^{n+1}$	(4.1)
décomposition RU	$\mathbf{R}_n^{n+1}$ et $\mathbf{U}_n^{n+1}$	(4.4)
incrément des déformations de Green-Lagrange	$\mathbf{GL}_n^{n+1}$	(4.6)
incrément des déformations d'Almansi	$\mathbf{A}_n^{n+1}$	(4.7)
incrément des déformations naturelles	$\mathbf{E}_n^{n+1}$	(4.8)
Calcul des contraintes	Valeurs	Relations
incrément élastique des contraintes	$\Delta \Sigma_n^{n+1}$	(4.13)
tenseur normal au critère de von Mises	$\mathbf{N}^c$	(4.16)
résolution du critère discrétisé de von Mises	$\gamma^p$	(4.20)
correcteur plastique	$\mathbf{s}^c$	(4.17)
valeurs équivalentes	$\varepsilon^{pn+1}$ , $\Sigma_v^{n+1}$ et $\bar{\alpha}^{n+1}$	(4.18)
tenseur d'héritité corotationnel	$\boldsymbol{\alpha}^{cn+1}$	(4.19)
contrainte corotationnelle	$\Sigma^{cn+1}$	(4.15)
rotation finale instantanée	$\Sigma^{n+1}$ , $\mathbf{N}^{n+1}$ et $\boldsymbol{\alpha}^{n+1}$	(4.21)
Calcul des corrections	Valeurs	Relations
dissipation interne volumique	$D_{int}$	(4.58) ou (4.59)
incrément élastique des déformations naturelles	$\mathbf{E}_n^{eln+1}$	(4.38)
tenseur élastique des déformation	$\mathbf{U}_n^{eln+1}$	(4.40)
incréments élastiques de Green-Lagrange et d'Almansi	$\mathbf{GL}_n^{eln+1}$ et $\mathbf{A}_n^{eln+1}$	(4.41)
incréments plastiques de Green-Lagrange et d'Almansi	$\mathbf{GL}_n^{pln+1}$ et $\mathbf{A}_n^{pln+1}$	(4.42)
tenseurs correctifs	$\mathbf{C}^*$ et $\mathbf{C}^*$	(4.51)
Calcul des forces	Valeurs	Relations
forces internes consistantes	$\vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}}$	(4.24)

la déformation totale et la rotation sont petites, nous pouvons définir un tenseur des petites déformations  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \vec{x}_j} + \frac{\partial \vec{u}_j}{\partial \vec{x}_i} \right)$ , où  $\vec{u}$  est le vecteur des petits déplacements. Dès lors, il vient:

$$\begin{aligned}
J_0^{n+1} &\simeq J_0^n \\
\mathbf{GL}_n^{eln+1} &\simeq \boldsymbol{\varepsilon}_n^{eln+1} \\
\mathbf{A}_n^{eln+1} &\simeq \boldsymbol{\varepsilon}_n^{eln+1} \\
\mathbf{E}_n^{eln+1} &\simeq \boldsymbol{\varepsilon}_n^{eln+1} \\
\mathbf{E}_0^{eln+1} &\simeq \mathbf{E}_0^{eln} + \mathbf{E}_n^{eln+1} \\
\mathbf{R}_0^n &\simeq \mathbf{I} \\
\Sigma^n &\simeq \mathcal{H} : \mathbf{E}_0^{eln}
\end{aligned} \tag{4.61}$$

pour la partie élastique, et

$$\begin{aligned}
\mathbf{GL}_n^{\text{pl}^{n+1}} &\simeq \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{pl}^{n+1}} \\
\mathbf{A}_n^{\text{pl}^{n+1}} &\simeq \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{pl}^{n+1}} \\
\mathbf{GL}_n^{n+1} &\simeq \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{el}^{n+1}} + \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{pl}^{n+1}} \\
\mathbf{A}_n^{n+1} &\simeq \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{el}^{n+1}} + \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{pl}^{n+1}} \\
\mathbf{C}^* &\simeq 0 \\
\mathbf{C}^{**} &\simeq 0
\end{aligned} \tag{4.62}$$

pour le traitement de la plasticité (nous avons tenu compte du fait que les tenseurs  $\mathbf{C}^*$  et  $\mathbf{C}^{**}$  sont au second ordre en  $\varepsilon^{pn+1}$ ). Le potentiel est défini par

$$U^n = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \{ \boldsymbol{\varepsilon}_0^{\text{el}^n} : \mathcal{H} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^{\text{el}^n} \} d\mathbb{V}_0 \tag{4.63}$$

Avec les hypothèses exprimées dans (4.61) et (4.62), l'expression (4.34) devient

$$\begin{aligned}
\left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \cdot [\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n]^\xi &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ \left[ \boldsymbol{\varepsilon}_0^{\text{el}^{n+1}} - \boldsymbol{\varepsilon}_0^{\text{el}^n} + \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{pl}^{n+1}} \right] : \mathcal{H} : \mathbf{E}_0^{\text{el}^n} \right\} d\mathbb{V}_0 + \\
&\quad \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ \left[ \boldsymbol{\varepsilon}_0^{\text{el}^{n+1}} - \boldsymbol{\varepsilon}_0^{\text{el}^n} + \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{pl}^{n+1}} \right] : \mathcal{H} : \mathbf{E}_0^{\text{el}^{n+1}} \right\} d\mathbb{V}_0 \\
&= U^{n+1} - U^n + \\
&\quad \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{pl}^{n+1}} : \boldsymbol{\Sigma}^n + \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{pl}^{n+1}} : \boldsymbol{\Sigma}^{n+1} \right\} d\mathbb{V}_0}_{\Delta_{int}}
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Cette dernière expression correspond à la définition usuelle des travaux réversibles et irréversibles pour un modèle défini par un potentiel. En assimilant le potentiel  $U$  à l'énergie interne  $U_{int}$ , la relation (3.19) est vérifiée.

### 4.2.6 Comparaison avec le modèle hyperélastique

Dans cette section, nous allons comparer notre modèle énergétiquement consistant aux modèles énergétiquement consistants hyperélastiques de la littérature, en supposant l'absence de déformations plastiques. En effet, si Meng et Laursen [101, 102] ont développé un modèle énergétiquement consistant hyperélastique avec déformations plastiques, la comparaison de la formulation plastique ne peut être facilement effectuée, puisqu'au contraire de notre schéma, ils n'utilisent pas de loi incrémentale d'évolution. Nous nous restreignons donc au domaine élastique.

Le tenseur des contraintes de Cauchy est transformé en tenseur de Piola-Kirchhoff

en utilisant la relation (4.9). L'expression (4.24) se réécrit alors

$$\begin{aligned}
\left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ [\mathbf{I} + \mathbf{F}_n^{n+1}] \mathbf{F}_0^n \mathbf{PK}^n \mathbf{F}_0^{nT} \mathbf{f}_0^{nT} \vec{D}^\xi \right\} d\mathbb{V}_0 + \\
&\quad \frac{1}{4} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ [\mathbf{I} + \mathbf{f}_n^{n+1}] \mathbf{F}_0^{n+1} \mathbf{PK}^{n+1} \mathbf{F}_0^{n+1T} \mathbf{f}_0^{n+1T} \vec{D}^\xi \right\} d\mathbb{V}_0 \\
&= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ [\mathbf{F}_0^n + \mathbf{F}_0^{n+1}] [\mathbf{PK}^n + \mathbf{PK}^{n+1}] \vec{D}^\xi \right\} d\mathbb{V}_0 \quad (4.65)
\end{aligned}$$

Cette dernière expression correspond à celle établie par Simo et Tarnow [140] pour un matériau de Saint Venant-Kirchhoff. Un matériau de Saint Venant-Kirchhoff utilise l'opérateur de Hooke pour relier les vitesses de déformation aux vitesses d'incrément de contrainte, c'est-à-dire le même opérateur que celui du modèle hypoélastique que nous utilisons.

L'analyse de la forme énergétique (4.34), conduit, en utilisant les relations (4.7) et (4.9), à l'expression

$$\begin{aligned}
\left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \cdot [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\xi &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ \mathbf{GL}_n^{n+1} : \Sigma^n J_0^n + \mathbf{A}_n^{n+1} : \Sigma^{n+1} J_0^{n+1} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ [\mathbf{F}_0^{nT} \mathbf{GL}_n^{n+1} \mathbf{F}_0^n] : \mathbf{PK}^n \right\} d\mathbb{V}_0 + \\
&\quad \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ [\mathbf{F}_0^{n+1T} \mathbf{A}_n^{n+1} \mathbf{F}_0^{n+1}] : \mathbf{PK}^{n+1} \right\} d\mathbb{V}_0 \\
&= \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ [\mathbf{GL}_0^{n+1} - \mathbf{GL}_0^n] : \frac{\mathbf{PK}^{n+1} + \mathbf{PK}^n}{2} \right\} d\mathbb{V}_0 \quad (4.66)
\end{aligned}$$

De manière rigoureuse, l'analogie entre le modèle hypoélastique et le modèle hyperélastique s'arrête à ce stade car l'intégration de la vitesse de l'incrément des contraintes de Cauchy ne fournit pas le même second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff que celui obtenu par dérivation d'un potentiel. Dans ce dernier cas, pour un modèle de Saint Venant-Kirchhoff, sans déformation plastique, le potentiel interne par unité de volume serait défini par

$$\phi^n(\mathbf{GL}_0^n) = \frac{1}{2\rho_0} \mathbf{GL}_0^n : \mathcal{H} : \mathbf{GL}_0^n \quad (4.67)$$

et les contraintes seraient définies par la relation (4.10)

$$\mathbf{PK}^n = \rho_0 \frac{\partial \phi(\mathbf{GL}_0^n)}{\partial \mathbf{GL}_0^n} = \mathcal{H} : \mathbf{GL}_0^n \quad (4.68)$$

Dès lors, en combinant la relation (4.67) et la relation (4.68), la relation (4.66) deviendrait

$$\left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \cdot [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\xi = \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ \rho_0 \phi^{n+1} - \rho_0 \phi^n \right\} d\mathbb{V}_0 \quad (4.69)$$

Comme  $\Delta_{int} = 0$ , en assimilant  $U_{int}$  à  $\int_{\mathbb{V}_0} \left\{ \rho_0 \phi \right\} d\mathbb{V}_0$  cette relation vérifierait bien la conservation de l'énergie (3.19).

### 4.3 Exemples sans dissipation numérique

Afin de vérifier le modèle théorique développé et sa bonne implémentation numérique, nous allons à présent comparer les résultats obtenus grâce :

- (i) à l'algorithme proposé (EMCA) en tenant compte des tenseurs de correction  $\mathbf{C}^*$  et  $\mathbf{C}^{**}$ ;
- (ii) à l'algorithme proposé (EMCA) en négligeant les tenseurs de correction;
- (iii) à l'algorithme de Newmark [109] avec le premier paramètre ( $\beta$ ) égal à 0.25 et le second paramètre ( $\gamma$ ) égal à 0.5 (schéma du trapèze).

Pour un matériau hypoélastique, l'énergie interne n'est pas directement accessible. Dès lors, elle est représentée par le travail des forces internes  $W_{int}$ . Dans le cas du schéma EMCA, cela correspond à l'énergie interne plus l'énergie dissipée plastiquement, comme nous venons de le démontrer à la section précédente. Elle est donc calculée par

$$W_{int}^{n+1} = W_{int}^n + \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right] \cdot [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n] \quad (4.70)$$

avec  $\vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}}$  calculé par la relation (4.24). Pour le schéma de Newmark, le travail des forces internes, erronément assimilé à l'énergie interne (*c.f.* section 2.2.3), est calculé par la relation (2.79) qui permet de garder l'énergie totale constante (section 2.2.3). Cette énergie interne inclut donc aussi la dissipation interne. D'abord, nous allons étudier l'influence de la taille du pas de temps pour un problème sans degré de liberté. Cette méthode nous permet de mettre en évidence l'influence des termes correctifs. Ensuite nous montrerons les avantages en terme de consistance énergétique de l'algorithme développé sur une simulation académique.

#### 4.3.1 Exemple 1 : Mono-élément 2D

Table 4.2: Propriétés matérielles de l'élément 2D

Propriété	Valeur
Masse volumique	$\rho = 8930 \text{ kg/m}^3$
Module de Young	$Y = 206.9 \text{ E}9 \text{ N/m}^2$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.29$
Limite élastique initiale	$\Sigma_0 = 450 \text{ N/mm}^2$
Coefficient d'écroutissage	$h = 129.4 \text{ N/mm}^2$

Le problème consiste en la déformation (traction et cisaillement) d'un élément 2D (4 points de Gauss déviatoriques et 1 point de Gauss volumique) en état plan de

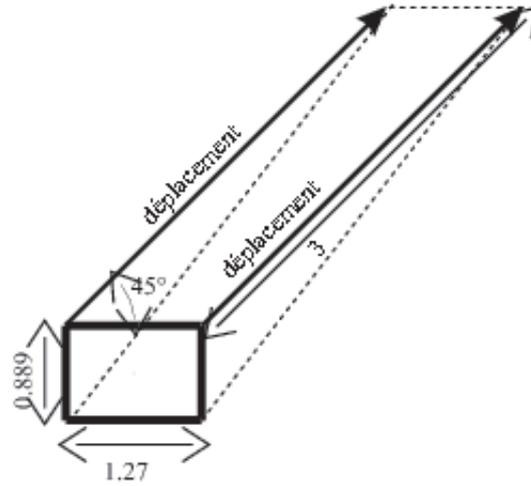


Figure 4.3: Déformation de l'élément 2D (m).

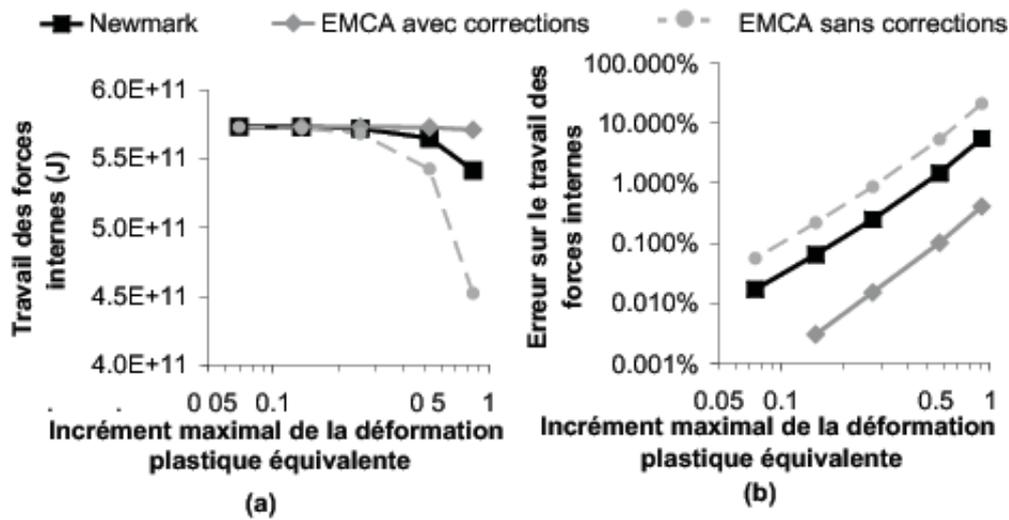


Figure 4.4: Travail des force internes - (a) travail final - (b) erreur sur le travail final par rapport à la solution EMCA avec le plus petit pas de temps.

déformation. Le chemin de la déformation est illustré à la Figure 4.3. Les propriétés du matériau sont répertoriées à la Table 4.2. La simulation se passe en 1s et est accomplie avec 5 tailles de pas de temps constants différentes (0.5s, 0.25s, 0.1s, 0.05s et 0.025s). La Figure 4.4 (a) illustre la valeur finale (après 1s) du travail des forces internes et la Figure 4.4 (b) illustre l'erreur sur la valeur finale (en se référant aux valeurs obtenues par l'algorithme EMCA avec les termes correctifs et avec un pas de temps égal à 0.025s). Pour être pertinent avec l'ordre des tenseurs correctifs, l'axe des abscisses (échelle logarithmique) représente l'incrément maximal de déformation plastique équivalente durant la simulation et non la taille du pas de temps. Puisque l'erreur est représentée avec une

Table 4.3: Propriétés de la barre de Taylor.

Propriété	Valeur
Diamètre externe	$d_e = 6.4mm$
Longueur	$l = 32.4mm$
Masse volumique	$\rho = 8930kg/m^3$
Module de Young	$Y = 117E9N/m^2$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.35$
Limite élastique initiale	$\Sigma_0 = 400N/mm^2$
Paramètre d'écrouissage	$h = 100N/mm^2$
Vitesse initiale	$\dot{x}_0 = 227m/s$



Figure 4.5: Discretisation de la barre de Taylor (12 éléments sur la hauteur et 48 éléments dans le plan).

échelle logarithmique, nous pouvons voir qu'elle est du second ordre (ce qui s'explique par le fait que l'algorithme d'intégration est du second ordre vis-à-vis du pas de temps) et que la solution la plus précise est celle obtenue par l'algorithme conservatif avec les tenseurs de corrections (erreur inférieure à 1% même pour une déformation plastique équivalente de 0.83). Pour avoir la même erreur, la taille du pas de temps (ou l'incrément de déformation plastique équivalent) doit être 5 fois plus petite si les termes correctifs sont négligés, et doit être 3 fois plus petite si l'algorithme d'intégration est celui de Newmark.

### 4.3.2 Exemple 2 : Barre de Taylor

Il s'agit d'une barre cylindrique dont les propriétés géométriques et matérielles sont décrites à la Table 4.3. Elle est discrétisée en 576 éléments (Figure 4.5) et possède une vitesse initiale  $\dot{x}_0 = 227m/s$ . La simulation se déroule sur  $80\mu s$  et les différentes

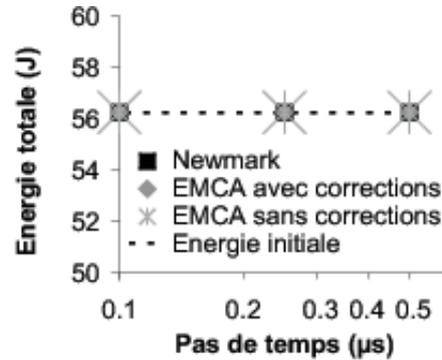


Figure 4.6: Energie totale (travail des forces internes, ce qui comprend la dissipation plastique, ajouté à l'énergie cinétique) de la barre de Taylor après  $80\mu s$ .

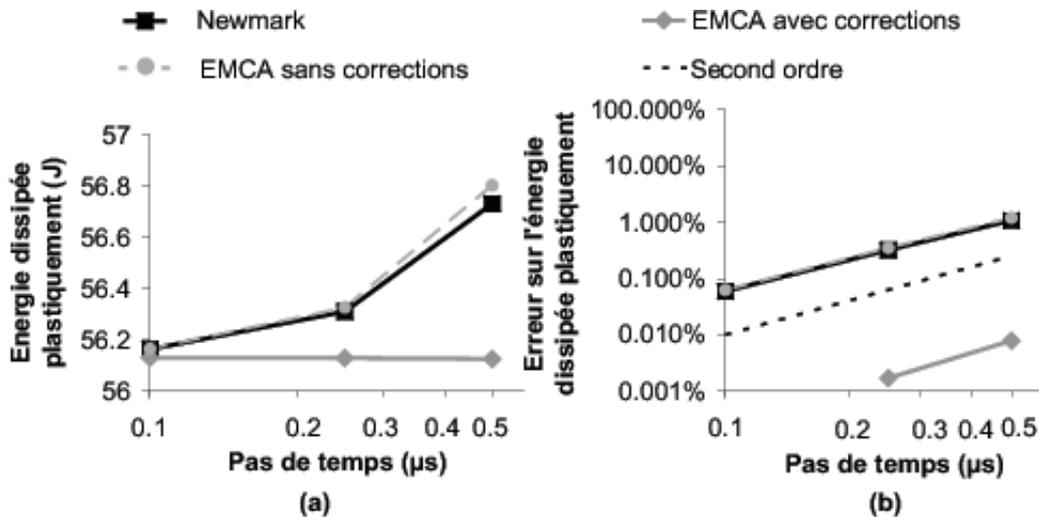


Figure 4.7: Energie finale (après  $80\mu s$ ) de la barre de Taylor - (a) énergie dissipée plastiquement - (b) erreur sur l'énergie dissipée plastiquement par rapport à la solution EMCA avec le plus petit pas de temps (la courbe du second ordre s'obtient en représentant à  $y = a\Delta t^2$  dans le repère logarithmique, avec  $a$  une grandeur quelconque).

tailles de pas de temps testées sont :  $0.5\mu s$ ;  $0.25\mu s$ ;  $0.1\mu s$ . La Figure 4.6 vérifie d'abord que l'énergie totale est bien conservée (la somme de l'énergie cinétique et du travail des forces internes, qui comprend l'énergie élastique et l'énergie dissipée plastiquement, à la fin de la simulation vaut l'énergie cinétique initiale). En fait, pour le schéma de Newmark, l'énergie totale est conservée parce qu'elle est calculée à partir du travail des forces internes (section 2.2.3) et non du potentiel interne (qui est inaccessible pour un matériau hypoélastique). Les Figures 4.7 (a) et (b) illustrent respectivement l'énergie plastiquement dissipée après  $80\mu s$  et l'erreur sur cette énergie<sup>3</sup>. Il apparaît que l'énergie

<sup>3</sup>L'erreur est calculée en prenant la solution du schéma conservatif avec corrections comme référence, ce qui explique pourquoi l'ordre de l'erreur de Newmark est légèrement inférieur à 2. En effet, le schéma

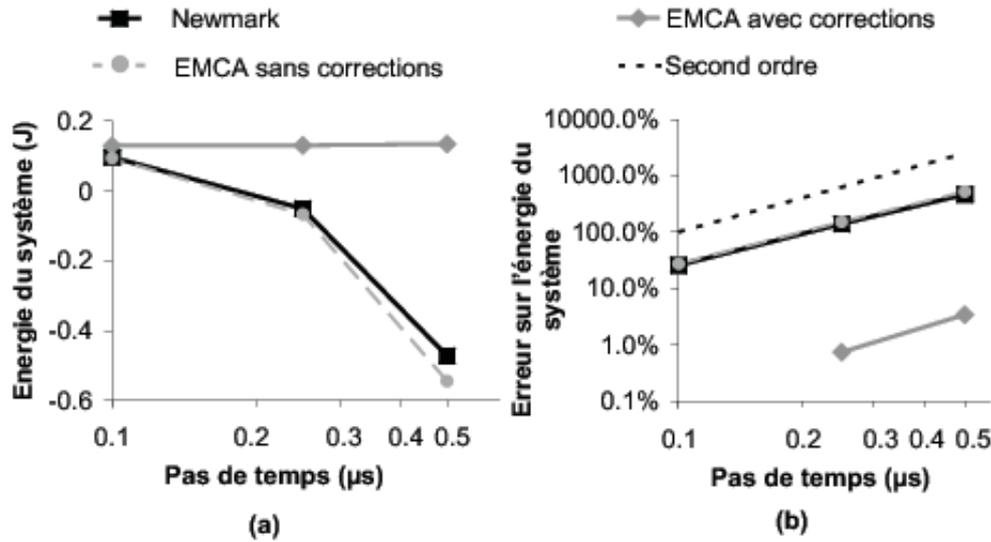


Figure 4.8: Energie finale du système (énergie cinétique ajoutée au travail des forces internes duquel est retirée l'énergie dissipée plastiquement) de la barre de Taylor après  $80\mu s$  - (a) énergie du système - (b) erreur sur l'énergie du système par rapport à la solution EMCA avec le plus petit pas de temps.

dissipée est surestimée si la taille du pas de temps augmente. L'utilisation du schéma conservatif avec corrections permet de réduire cette surestimation. Les Figures 4.8 (a) et (b) illustrent respectivement l'énergie résiduelle (obtenue à partir de l'énergie cinétique et du travail des forces internes duquel l'énergie dissipée est soustraite) après  $80\mu s$  et l'erreur sur cette énergie. Pour le schéma de Newmark et le schéma conservatif sans les termes correctifs, des valeurs négatives de l'énergie sont obtenues quand la taille du pas de temps augmente, ce qui les rend inconsistants car cela signifie que la plasticité dissipe plus d'énergie que l'énergie cinétique de départ. Si nous observons le profil des erreurs sur l'énergie (Figure 4.8 (b)), nous nous rendons compte que les erreurs sont bien au second ordre. Remarquons que pour pouvoir analyser l'ordre de l'erreur, nous avons pris l'énergie résiduelle (énergie cinétique et potentielle) et non uniquement l'énergie cinétique ou l'énergie potentielle. En effet, si les composantes sont séparées, l'erreur de phase intervient. Lorsqu'une pièce vibre, il y a un transfert entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique du système. Or, lors d'une intégration temporelle, il existe une erreur d'amplitude, mais aussi une erreur de phase (*c.f.* section 2.2.2). Dès lors, imaginons que deux schémas d'intégration fournissent la même amplitude, mais que les vibrations soient déphasées de  $180^\circ$ . Dans ce cas, l'énergie cinétique en fin de calcul serait différente pour les deux schémas, alors que l'amplitude de l'énergie cinétique est la même. En prenant la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique, c'est bien uniquement l'erreur sur l'amplitude qui est évaluée. L'erreur est calculée en prenant

---

d'intégration est au second ordre, uniquement en prenant comme référence une solution obtenue par le même schéma mais avec un pas de temps plus petit

Table 4.4: Résultats finaux de la barre de Taylor.

Schéma	$\Delta t$	Rayon	Longueur	$\varepsilon^p$ maximale
EMCA avec corrections	$0.5\mu s$	0.006553	0.02158	2.37
EMCA sans corrections	$0.5\mu s$	0.006564	0.02149	2.36
Newmark	$0.5\mu s$	0.006561	0.02149	2.36
EMCA avec corrections	$0.1\mu s$	0.006549	0.02157	2.38
EMCA sans corrections	$0.1\mu s$	0.006549	0.02156	2.38
Newmark	$0.1\mu s$	0.006549	0.02156	2.38
Meng et Laursen [101]	$1\mu s$	0.006775	0.02164	2.62
Simo [135]	$0.5\mu s$	0.00697	-	-

comme référence la valeur du schéma conservatif avec les termes correctifs et un pas de temps de  $0.1\mu s$ . La Figure 4.9 illustre la déformation plastique équivalente obtenue après  $80\mu s$ . Comme c'était le cas à la Figure 4.7, les différences entre les méthodes conduisent à des erreurs limitées (inférieures à 1%). La Table 4.4 reprend les résultats (rayon à la base, longueur du cylindre, déformation plastique équivalente maximum) finaux (après  $80\mu s$ ) obtenus par les différentes simulations, mais aussi obtenus avec un modèle hyperélastique par Meng et Laursen [101] (schéma EMCA) et par Simo [135] (schéma de Newmark). Il apparaît que le modèle hypoélastique sous-estime l'écrasement du cylindre par rapport au modèle hyperélastique de 10% (notre modèle hypoélastique utilise une limite élastique dépendant de la configuration courante, contrairement au modèle hyperélastique<sup>4</sup>). Lorsque le rayon atteint est analysé, nous voyons que pour le schéma EMCA avec les termes correctifs, les résultats sont identiques lorsque le pas de temps est multiplié par 5. Avec le schéma de Newmark ou avec le schéma EMCA sans corrections, le rayon varie de 2% pour la même variation de pas de temps.

Le nombre total d'itérations du système de Newton-Raphson, la précision atteinte étant  $10^{-8}$  (2.55) ou (B.6), et le nombre total d'itérations du système de "line search", la précision atteinte étant  $10^{-5}$  (2.54) ou (B.5), sont respectivement illustrés aux Figures 4.10 (a) et (b). Remarquons qu'une précision sévère sur l'erreur du système de Newton-Raphson est nécessaire pour que le bilan énergétique du schéma d'intégration, et donc la stabilité, soit vérifié. La précision sévère sur le résidu du schéma de line search est nécessaire pour avoir convergence pour les grands pas de temps. Quand la taille

<sup>4</sup>Dans le modèle hypoélastique, la limite élastique s'exprime en  $N$  par unité de surface de la configuration courante, alors que dans le modèle hyperélastique, la limite élastique s'exprime en  $N$  par unité de surface nominale (configuration initiale). En considérant une traction simple d'une barre de section initiale  $A_0$  et de longueur initiale  $l_0$ , avec un écrouissage plastique à volume constant, nous avons  $\left[\frac{A_0}{A} - 1\right] = \frac{\Delta l}{l_0}$ . La relation (2.28) avec  $\mathbf{f}_{11} = \frac{l_0}{dl}$  permet d'exprimer la limite élastique en hyperélastique  $S_v$  par rapport à la limite élastique en hypoélastique  $\Sigma_v$  :  $S_v = \left[\frac{A}{A_0 - A}\right]^2 \Sigma_v$ . Il apparaît donc que deux lois d'écrouissage identique se rapportant à des limites élastique différentes ne peuvent donner le même comportement.

---

du pas de temps augmente, l'utilisation de l'algorithme de Newmark et l'utilisation de l'algorithme conservatif sans les termes correctifs conduisent à une augmentation du nombre d'itérations. Mais grâce aux termes correctifs, l'algorithme conservatif permet de diminuer le nombre d'itérations quand la taille du pas de temps augmente. Pour une taille de pas de temps égale à  $0.5\mu s$ , les tenseurs du second ordre permettent de réduire le nombre d'itérations du line search de 50% et le nombre d'itérations du système de Newton-Raphson de 20% par rapport aux autres méthodes ayant le même pas de temps, tout en amenant une meilleure précision.

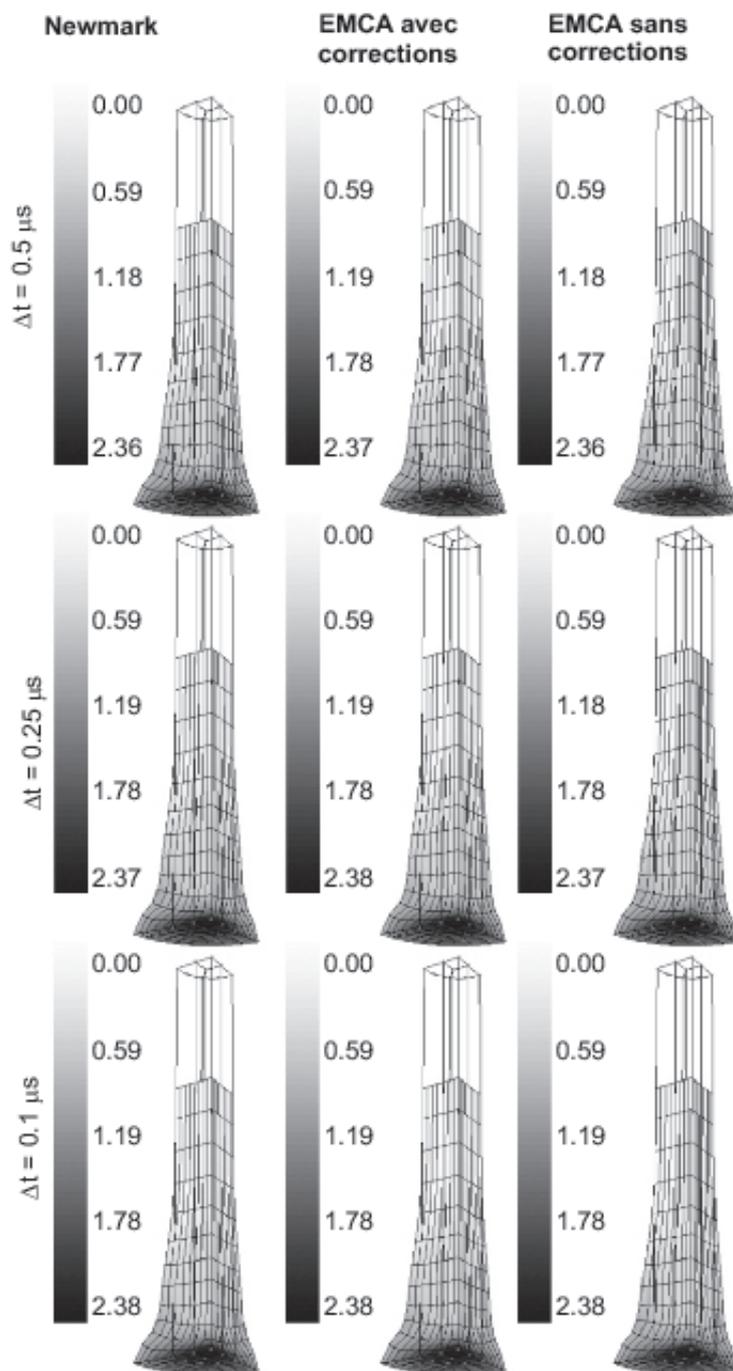


Figure 4.9: Déformation finale et déformation plastique équivalente (après  $80 \mu s$ ) de la barre de Taylor.

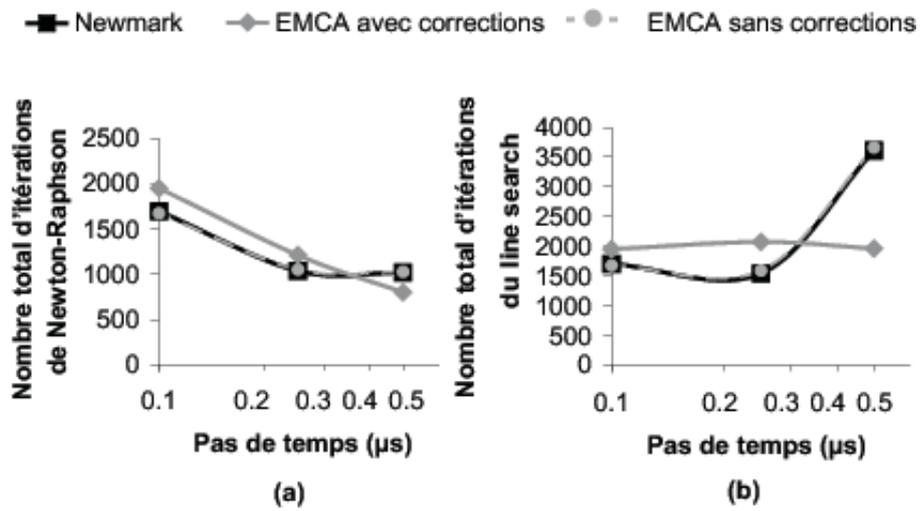


Figure 4.10: Nombre d'itérations de la barre de Taylor - (a) itérations de Newton-Raphson - (b) itérations du line search.

## 4.4 Expression énergétiquement consistante de la dissipation numérique

Nous allons à présent étendre le schéma établi par Armero et Romero [6, 7] pour un matériau hyperélastique, sans déformation plastique, aux matériaux hypoélastiques avec déformation plastique. Pour établir une forme énergétiquement consistante des vitesses de dissipation, nous pouvons reprendre le principe de la section (3.2.3). Mais pour le calcul des forces de dissipation, nous nous inspirerons du travail effectué dans l'établissement des forces internes. De cette manière, nous sommes à même de proposer un algorithme énergétiquement consistant qui dissipe numériquement l'énergie associée aux hautes fréquences. A notre connaissance, nous sommes les premiers à proposer un schéma d'intégration possédant ces propriétés. Comme nous l'avons montré à la section 3.2, afin d'éviter un phénomène de bifurcation des fréquences propres de la matrice spectrale, la présence simultanée de vitesses et de forces de dissipation est nécessaire. Dans un premier temps, nous allons développer des vitesses de dissipation en fonction d'un potentiel  $D_K$ . Ensuite nous proposerons une expression des forces de dissipation en fonction d'un potentiel  $D_W$ . Nous verrons alors que les expressions proposées pour les potentiels  $D_K$  et  $D_W$  permettent d'éviter la bifurcation, tout en garantissant une dissipation numérique positive.

### 4.4.1 Expression des vitesses de dissipation

Nous allons expliquer ici comment tenir compte des termes de masse couplés. Soit  $D_K$  le potentiel spécifique de dissipation cinétique (par opposition à  $\Delta_K = \int_{\mathbb{V}_0} \{\rho_0 D_K\} d\mathbb{V}_0$  la dissipation cinétique). Armero et Romero [5], ont transformé l'équation (3.52) pour tenir compte du caractère non-ponctuel de l'élément. L'expression des vitesses de dissipation doit conduire à une dissipation numérique exprimée par (3.51), c'est-à-dire

$$\left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} - \dot{\vec{x}}^n \right]^\xi \cdot M^{\xi\mu} \left[ \vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\mu = \int_{\mathbb{V}_0} \{\rho_0 D_K\} d\mathbb{V}_0 = \Delta_K \quad (4.71)$$

Elle doit aussi conduire à la vérification du moment angulaire (3.45), c'est-à-dire

$$\left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} + \dot{\vec{x}}^n \right]^\xi \wedge M^{\xi\mu} \left[ \vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\mu = 0 \quad (4.72)$$

Une relation qui vérifie ces condition est donnée par

$$M^{\xi\mu} \left[ \vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\mu = \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ \rho_0 \varphi^\xi D_K \frac{\dot{\vec{x}}^{n+1} + \dot{\vec{x}}^n}{\left\| \dot{\vec{x}}^{n+1} \right\|^2 - \left\| \dot{\vec{x}}^n \right\|^2} \right\} d\mathbb{V}_0 \quad (4.73)$$

Dans cette expression, nous avons

$$\dot{\vec{x}} = \varphi^\xi \dot{\vec{x}}^\xi \text{ et } \left\| \dot{\vec{x}} \right\| = \varphi^\xi \left\| \dot{\vec{x}}^\xi \right\| \quad (4.74)$$

Un choix de  $D_K$  similaire à (3.57), conduisant à un algorithme du premier ordre par rapport au pas de temps (EDMC-1 ou Energy Dissipative Momentum Conserving - 1<sup>st</sup> order) [6], est donné par

$$D_K = \chi \frac{1}{2} \left[ \left\| \dot{\vec{x}}^{n+1} \right\| - \left\| \dot{\vec{x}}^n \right\| \right]^2 \quad (4.75)$$

La diagonalisation des deux membres de la relation (4.73) conduit à l'approximation (sans somme sur l'exposant  $\xi$ , mais en évaluant les vitesses en au nœud  $\xi$ )

$$\left[ \vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi = \frac{D_K^\xi}{\left\| \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} \right]^\xi \right\|^2 - \left\| \left[ \dot{\vec{x}}^n \right]^\xi \right\|^2} \frac{\left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} + \dot{\vec{x}}^n \right]^\xi}{2} \quad (4.76)$$

En effet, nous avons alors, en considérant la matrice des masses diagonale  $m$  telle que  $M^{\xi\mu} = m^\xi \delta_{\xi\mu}$

$$\begin{aligned} \sum_\mu M^{\xi\mu} \left[ \vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\mu &= \sum_\mu \frac{D_K^\mu}{\left\| \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} \right]^\mu \right\|^2 - \left\| \left[ \dot{\vec{x}}^n \right]^\mu \right\|^2} M^{\xi\mu} \frac{\left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} + \dot{\vec{x}}^n \right]^\mu}{2} \\ &\simeq \delta_{\xi\mu} \sum_\mu \frac{m^\mu D_K^\mu}{\left\| \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} \right]^\mu \right\|^2 - \left\| \left[ \dot{\vec{x}}^n \right]^\mu \right\|^2} \frac{\left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} + \dot{\vec{x}}^n \right]^\mu}{2} \end{aligned} \quad (4.77)$$

Dès lors, l'expression (4.71), qui va permettre d'évaluer l'énergie dissipée numériquement, se réécrit

$$\sum_\mu \sum_\xi \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} - \dot{\vec{x}}^n \right]^\xi \cdot M^{\xi\mu} \left[ \vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\mu = \sum_\mu m^\mu D_K^\mu \simeq \int_{\mathbb{V}_0} \{ \rho_0 D_K \} d\mathbb{V}_0 \quad (4.78)$$

et l'expression (4.72), qui va conduire à la conservation du moment angulaire, devient

$$\begin{aligned} \sum_\mu \sum_\xi \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} + \dot{\vec{x}}^n \right]^\xi \wedge M^{\xi\mu} \left[ \vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\mu &= \\ \sum_\mu \frac{m^\mu D_K^\mu}{\left\| \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} \right]^\mu \right\|^2 - \left\| \left[ \dot{\vec{x}}^n \right]^\mu \right\|^2} \frac{\left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} + \dot{\vec{x}}^n \right]^\mu}{2} \wedge \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} + \dot{\vec{x}}^n \right]^\mu &= 0 \end{aligned} \quad (4.79)$$

La relation (4.76) combinée à (4.75) conduit alors à l'approximation (sans somme sur l'exposant  $\xi$ , mais en évaluant les vitesses en au nœud  $\xi$ )

$$\left[ \vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi = \chi \frac{\left\| \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} \right]^\xi \right\| - \left\| \left[ \dot{\vec{x}}^n \right]^\xi \right\|}{\left\| \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} \right]^\xi \right\| + \left\| \left[ \dot{\vec{x}}^n \right]^\xi \right\|} \frac{\left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} + \dot{\vec{x}}^n \right]^\xi}{2} \quad (4.80)$$

Cette expression reste valable pour le cas du système masse-ressort décrit en section (3.2.3). Le tenseur  $\mathbf{G}(\dot{\bar{x}}^\mu)$ , dérivée de  $\vec{G}_{diss}$  par rapport aux vitesses, utilisé pour l'établissement de la matrice tangente (appendice B.1) est détaillé à l'appendice C.6.

#### 4.4.2 Expression des forces de dissipation

Lors de l'établissement des forces internes (relation 4.24), nous avons remarqué que les tenseurs  $\mathbf{C}^*$  et  $\mathbf{C}^{**}$  (4.51) permettaient de contrôler la dissipation interne (4.49). Dès lors, il suffit de reprendre la même formulation, en introduisant un potentiel volumique de dissipation interne  $D_W$  (par opposition au potentiel de dissipation interne  $\Delta_W = \int_{\mathbb{V}_0} \{\rho_0 D_W\} d\mathbb{V}_0$ ). Nous proposons des forces de dissipations

$$\begin{aligned} \left[ \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi &= \frac{1}{2} \left[ \vec{F}_{diss}^* + \vec{F}_{diss}^{**} \right]^\xi \\ \left[ \vec{F}_{diss}^* \right]^\xi &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ [\mathbf{I} + \mathbf{F}_n^{n+1}] \mathbf{D}^* \mathbf{f}_0^{nT} \vec{D}^\xi J_0^n \right\} d\mathbb{V}_0 \\ \left[ \vec{F}_{diss}^{**} \right]^\xi &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ [\mathbf{I} + \mathbf{f}_n^{n+1}] \mathbf{D}^{**} \mathbf{f}_0^{n+1T} \vec{D}^\xi J_0^{n+1} \right\} d\mathbb{V}_0 \end{aligned} \quad (4.81)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^* &= \frac{D_W}{\mathbf{GL}_n^{n+1} : \mathbf{GL}_n^{n+1} J_0^n} \mathbf{GL}_n^{n+1} \\ \mathbf{D}^{**} &= \frac{D_W}{\mathbf{A}_n^{n+1} : \mathbf{A}_n^{n+1} J_0^{n+1}} \mathbf{A}_n^{n+1} \end{aligned} \quad (4.82)$$

et  $D_W$  défini tel que

$$\begin{aligned} \frac{D_W}{\sqrt{\mathbf{GL}_n^{n+1} : \mathbf{GL}_n^{n+1}}} &\rightarrow 0 \text{ si } \mathbf{U}_n^{n+1} \rightarrow \mathbf{I} \\ \frac{D_W}{\sqrt{\mathbf{A}_n^{n+1} : \mathbf{A}_n^{n+1}}} &\rightarrow 0 \text{ si } \mathbf{U}_n^{n+1} \rightarrow \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.83)$$

Un choix du potentiel  $D_W$ , vérifiant les relations (4.83), et conduisant à un schéma d'intégration temporel au premier ordre (ordre obtenu par un raisonnement similaire à celui de la section 3.2.3) par rapport au pas de temps est

$$D_W = \frac{\chi}{2} \mathbf{E}_n^{\text{el}n+1} : \mathcal{H} : \mathbf{E}_n^{\text{el}n+1} J_0^n \quad (4.84)$$

Remarquons que nous devons prendre la partie élastique de  $\mathbf{E}$ , sans quoi, nous dissipons de l'énergie qui ne résulte pas d'une augmentation de l'énergie interne, mais bien des déformations plastiques. Dans ce cas, l'énergie dissipée numériquement serait plus importante et ne serait plus en liaison avec l'énergie potentielle du matériau. Cela augmenterait la perte de précision venant de la dissipation numérique sans nécessairement améliorer la convergence. La dérivée de  $\vec{F}_{diss}$  utilisée pour l'établissement de la matrice tangente (appendice B.1) est calculée en appendice C.4. Nous pouvons maintenant vérifier les lois de conservation traduites par les expressions (3.40), (3.44), (3.45) et (3.51).

#### 4.4.3 Conservation du moment linéaire

Etant donné la propriété des dérivées des fonctions de formes (4.25), la relation (3.40) se vérifie directement à partir de (4.81).

#### 4.4.4 Conservation du moment angulaire

Etant donné la symétrie des tenseurs  $\mathbf{D}^*$  et  $\mathbf{D}^{**}$  de l'expression (4.81), la relation (3.44) se vérifie en utilisant la méthode utilisée pour les forces internes (section 4.2.3). De plus, l'expression (3.45) se vérifie directement à partir de (4.80) en utilisant (4.79).

#### 4.4.5 Evaluation de l'énergie dissipée numériquement

En utilisant les relations (4.78) et (4.81), et en raisonnant comme cela a été fait pour établir (4.34), la relation (3.51) devient

$$M^{\xi\mu} \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} - \dot{\vec{x}}^n \right]^\mu \cdot \left[ \vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi + \left[ \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \cdot [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\xi = \underbrace{\sum_\xi \int_{\mathbb{V}_0} \{\rho_0 D_K\} d\mathbb{V}_0}_{\Delta_K} + \underbrace{\int_{\mathbb{V}_0} \{D_W\} d\mathbb{V}_0}_{\Delta_W} = \Delta_{num} \quad (4.85)$$

où  $\Delta_K$  et  $\Delta_W$  correspondent respectivement à la dissipation numérique venant des vitesses de dissipation, et à la dissipation numérique venant des forces de dissipation. L'algorithme est bien dissipatif ( $\Delta_{num} \geq 0$ ) si  $\chi > 0$ .

#### 4.4.6 Consistance énergétique, stabilité et précision (cadre linéaire et non-linéaire)

Nous avons vérifié la conservation du moment linéaire (3.40), du moment angulaire (3.44), (3.45) et que l'énergie dissipée numériquement était positive (3.51) dans le cadre non-linéaire. Nous pouvons conclure que nous avons un algorithme énergétiquement consistant, stable et dissipatif, dans le cadre non-linéaire. Le choix des potentiels de

dissipation (4.75) et (4.84) conduit à une précision du premier ordre par rapport au pas de temps. A titre d'exemple, nous allons maintenant montrer, que dans le cas d'une traction simple, notre algorithme se linéarise de manière identique au système masse-ressort (section 3.2.4), et garde donc les mêmes propriétés numériques (pas de bifurcation, dissipation des hautes fréquences).

Utilisons les hypothèses (4.61) et (4.62) et supposons un problème de traction simple (déplacement d'une extrémité  $x$ ) sur un élément élastique. L'élément, utilisant des fonctions de forme du premier degré, a une longueur initiale  $l$  et une section initiale  $A$ . Dès lors le tenseur des déformations devient

$$\mathbf{F}_n^{n+1} - \mathbf{I} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{n+1} = \frac{x^{n+1} - x^n}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2G-3k}{6k+2G} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2G-3k}{6k+2G} \end{pmatrix} \quad (4.86)$$

et les tenseurs des contraintes aux configurations  $n+1$  et  $n$  deviennent

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}^n &= \frac{x^n}{l} \begin{pmatrix} \frac{9kG}{3k+G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\Sigma}^{n+1} &= \frac{x^{n+1}}{l} \begin{pmatrix} \frac{9kG}{3k+G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.87)$$

Les forces internes (4.24) et les forces de dissipation (4.81) se réduisent (au premier ordre en  $x$ ) en

$$\begin{aligned} \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{9kGA}{[3k+G]l} \frac{x^{n+1} + x^n}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{9kGA}{[3k+G]l} \chi \frac{x^{n+1} - x^n}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.88)$$

Comme procédé à la section 3.2.4, la relation (4.75) est approchée par

$$D_K = \chi \frac{1}{2} \left[ \dot{x}^{n+1} - \dot{x}^n \right]^2 \quad (4.89)$$

ce qui revient au même, pour un système à un degré de liberté, tant que les vitesses ne changent pas de signe. La masse diagonalisée  $m$  associée à chaque extrémité vaut  $\frac{\rho l A}{2}$ . Finalement, en définissant  $\omega^2 = \frac{18kG}{[3k+G]\rho l^2}$ , le système d'équations (3.36), (3.37) et (3.38)

se réduit, grâce aux relations (4.88) et (4.89) en

$$\begin{aligned}x^{n+1} &= x^n + \frac{\Delta t}{2} \left[ 1 + \chi \frac{\dot{x}^{n+1} - \dot{x}^n}{\dot{x}^{n+1} + \dot{x}^n} \right] [\dot{x}^{n+1} + \dot{x}^n] \\ \dot{x}^{n+1} &= \dot{x}^n + \frac{\Delta t}{2} [\ddot{x}^{n+1} + \ddot{x}^n] \\ \ddot{x}^{n+1} &= -\ddot{x}^n - \omega^2 \left[ 1 + \chi \frac{x^{n+1} - x^n}{x^{n+1} + x^n} \right] [x^{n+1} + x^n]\end{aligned}\tag{4.90}$$

Nous retrouvons bien le système d'équations (3.70) décrit à la section (3.2.4) pour un système masse ressort, avec  $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ . Nous en déduisons donc l'absence de bifurcation et la dissipation des hautes fréquences.

## 4.5 Exemples numériques avec dissipation numérique

Le système masse-ressort a déjà été étudié à la section 3.2.5. Dans cette section nous allons étudier les performances de l'algorithme énergétiquement consistant dissipatif pour des modèles élasto-plastiques. Nous prenons en compte les termes au second ordre par rapport aux déformations plastiques ( $\mathbf{C}^*$  et  $\mathbf{C}^{**}$ ). En effet, même si le schéma est seulement au premier ordre par rapport au pas de temps, nous avons vu à la section 4.3 que ces termes sont nécessaires pour garder un schéma énergétiquement consistant quand la taille du pas de temps, et donc l'incrément de déformation plastique équivalente, augmente.

### 4.5.1 Exemple 1 : Barre de Taylor

Il s'agit du problème déjà traité par un schéma sans dissipation numérique à la section 4.3.2 (maillage illustré à la Figure 4.5 et propriétés reportées à la Table 4.3). Nous allons comparer les résultats obtenus grâce :

- (i) à l'algorithme proposé (EDMC) en tenant compte des tenseurs de correction, les paramètres dépendant du rayon spectral à l'infini (Table 3.1);
- (ii) à l'algorithme de Newmark [109]; dissipatif, les paramètres dépendant du rayon spectral à l'infini (Table 2.1);
- (iii) à l'algorithme de Hilber-Hughes-Taylor (HHT), les paramètres dépendant du rayon spectral à l'infini (Table 2.2);
- (iv) à l'algorithme de Chung-Hulbert (CH), les paramètres dépendant du rayon spectral à l'infini (Table 2.2).

Dans un premier temps, nous allons fixer le pas de temps à  $0.5\mu s$  et regarder l'influence du rayon spectral sur les résultats. Nous allons faire varier le rayon spectral de zéro à l'unité. Remarquons tout de suite que pour le schéma HHT, le rayon spectral doit être supérieur à  $\frac{1}{3}$  sans quoi le schéma est instable (résultat obtenu par la limite de  $\alpha_F$  (2.115) et la Table 2.2). Pour le schéma EDMC-1, un rayon spectral inférieur à 0.4 a conduit à une divergence d'un pas de temps, nécessitant une réduction de la taille de ce dernier. Nous ne considérerons donc pas ces résultats. La Figure 4.11 (a) représente l'évolution, en fonction du rayon spectral, de l'énergie dissipée par plastification et la Figure 4.11 (b) représente l'évolution, en fonction du rayon spectral, de l'énergie dissipée numériquement. Pour un rayon spectral unitaire, le schéma CH (avec dans ce cas  $\alpha_M = 0.5$  et  $\alpha_F = 0.5$ ) devient un schéma du point milieu et donne la même dissipation plastique que le schéma EDMC-1 (qui n'a pas la même expression des forces internes), alors que le schéma HHT rend la solution de Newmark. Quand le

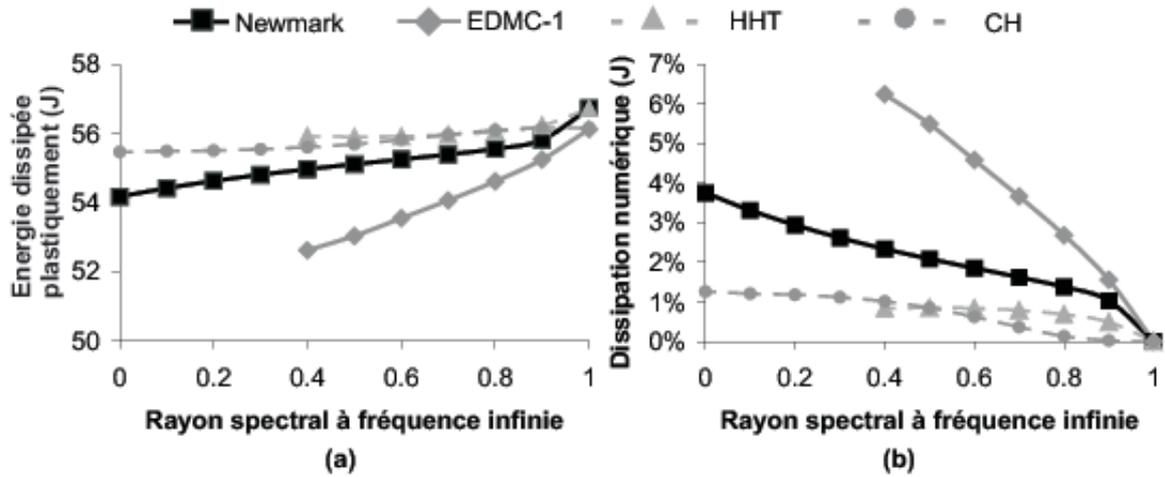


Figure 4.11: Energie dissipée après  $80\mu s$  de la barre de Taylor pour un pas de temps de  $0.5\mu s$  - (a) énergie dissipée par plastification - (b) énergie dissipée numériquement (en pourcentage de l'énergie cinétique initiale).

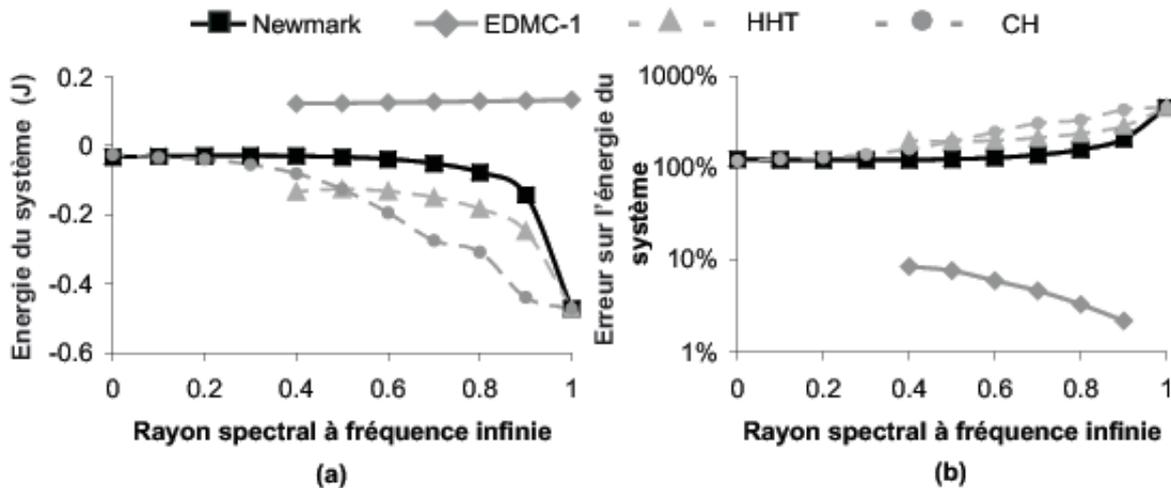
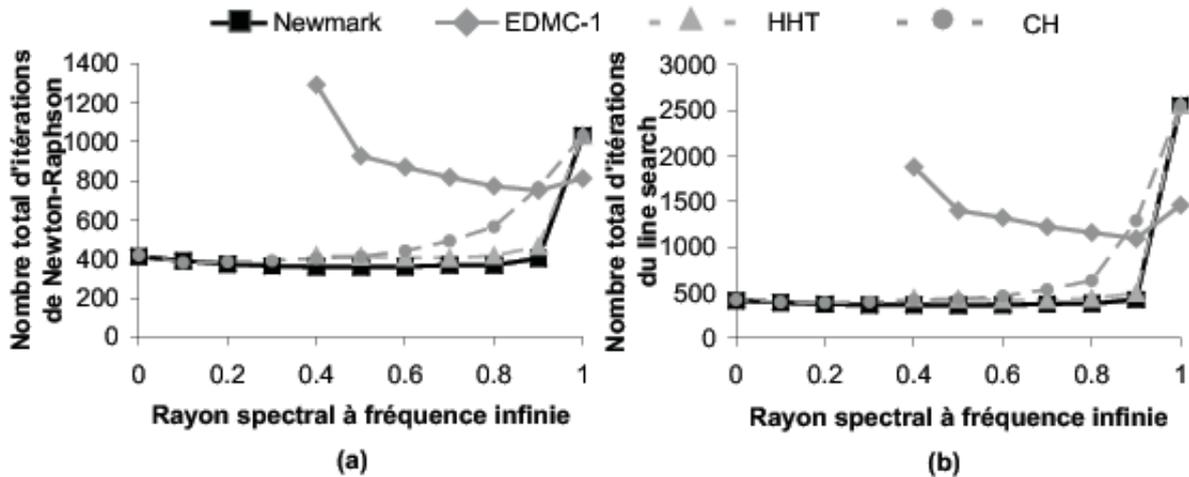


Figure 4.12: Energie finale du système (énergie cinétique ajoutée au travail des forces internes duquel est retirée l'énergie dissipée plastiquement) de la barre de Taylor après  $80\mu s$  et pour un pas de temps de  $0.5\mu s$  - (a) énergie du système - (b) erreur sur l'énergie du système par rapport à la solution EMCA avec le même pas de temps.

rayon spectral diminue, l'énergie dissipée numériquement augmente, ce qui tend à sous-estimer la dissipation interne. Le schéma EDMC-1 est le schéma dont l'énergie dissipée numériquement augmente le plus vite au fur et à mesure que le rayon spectral diminue. Ce phénomène provient du fait qu'aucun paramètre n'a pu être défini pour minimiser la dissipation des basses fréquences, par opposition à la famille  $\alpha$ -généralisée (section 2.3). Dès lors, les modes physiques de basse fréquence sont plus fortement dissipés (voir Figure 3.5), ce qui augmente la dissipation totale. De plus, c'est le seul schéma, qui dans

Table 4.5: Résultats finaux de la barre de Taylor pour un pas de temps de  $0.5\mu s$ .

Schéma	$\rho_\infty$	Rayon	Longueur	$\varepsilon^p$ maximale
EDMC-1	1	0.006553	0.02158	2.37
Newmark	1	0.006561	0.02149	2.36
HHT	1	0.006561	0.02149	2.36
CH	1	0.006561	0.02149	2.36
EDMC-1	0.7	0.006535	0.02189	2.43
Newmark	0.7	0.006628	0.02166	2.51
HHT	0.7	0.006601	0.02158	2.46
CH	0.7	0.006575	0.02154	2.44
EDMC-1	0.5	0.006523	0.02207	2.45
Newmark	0.5	0.006622	0.0217	2.51
HHT	0.5	0.006607	0.02159	2.47
CH	0.5	0.006606	0.02159	2.47

Figure 4.13: Nombre d'itérations de la barre de Taylor pour un pas de temps de  $0.5\mu s$  - (a) itérations de Newton-Raphson - (b) itérations du "line search".

le cadre non-linéaire dissipe de l'énergie à toute les fréquences. Pour les autres schémas, de l'énergie peut être introduite numériquement pour certaines plages de fréquences. La Figure 4.12 (a) illustre l'énergie du système (addition entre l'énergie cinétique et le travail des forces internes duquel est retirée l'énergie dissipée par plasticité) du barreau. Nous remarquons que seul le schéma EDMC-1 donne une énergie positive pour cette taille de pas de temps. Pour les autres schémas, quand le rayon spectral diminue, l'énergie se rapproche de zéro par le bas, ce qui explique pourquoi l'erreur diminue à la Figure 4.12 (b). L'erreur est comptabilisée en prenant comme référence la valeur du schéma EDMC-1 avec un rayon spectral de 1 (c'est-à-dire le schéma EMCA). L'utilité principale de la dissipation numérique étant la possibilité d'augmenter la taille du pas de temps,

Table 4.6: Résultats finaux de la barre de Taylor pour un rayon spectral à fréquence infinie de 0.7.

Schéma	$\Delta t$	Rayon	Longueur	$\varepsilon^p$ maximale
EDMC-1	$1\mu s$	0.006499	0.02211	2.43
Newmark	$1\mu s$	0.006628	0.02166	2.52
HHT	$1\mu s$	0.006636	0.02157	2.52
CH	$1\mu s$	0.006609	0.02152	2.47
EDMC-1	$0.5\mu s$	0.006535	0.02189	2.43
Newmark	$0.5\mu s$	0.006628	0.02166	2.51
HHT	$0.5\mu s$	0.006601	0.02158	2.46
CH	$0.5\mu s$	0.006575	0.02154	2.44
EDMC-1	$0.1\mu s$	0.006555	0.02166	2.40
Newmark	$0.1\mu s$	0.006593	0.02162	2.48
HHT	$0.1\mu s$	0.006555	0.02166	2.38
CH	$0.1\mu s$	0.006549	0.02156	2.38

nous avons choisi de comparer les schémas pour un pas de temps de  $0.5\mu s$ , même si les résultats obtenus par les méthodes classiques sont incohérents (énergie négative). Enfin, la Figure 4.14 montre que, quel que soit le cas, les déformations plastiques équivalentes obtenues sont similaires à 10% près. La différence est minime du fait que la dissipation numérique est beaucoup plus faible (10 fois moins) que la dissipation plastique. La Table 4.5, reprend les valeurs finales obtenues par les différents schémas. Il apparaît que les longueurs et les rayons finaux sont identiques à 1% près. La Figure 4.13 (a) reprend le nombre total d'itérations de Newton-Raphson et la Figure 4.13 (b) le nombre total d'itérations du line-search. Nous pouvons y voir que pour le schéma EDMC-1, c'est un rayon spectral de 0.9 qui minimise le nombre d'itérations. Le schéma HHT minimise le nombre d'itération pour un rayon spectral de 0.7, le schéma de Newmark pour un rayon spectral de 0.5 et le schéma CH pour un rayon spectral de 0.2. Il apparaît en outre que quand le rayon spectral devient inférieur à 0.9 le schéma EDMC-1 devient le plus onéreux. Cela est dû au fait, qu'en dépit de la dissipation numérique, le schéma EDMC-1 préserve la consistance des énergies (la dissipation plastique reste toujours inférieure à l'énergie initiale de la barre et il n'y a donc jamais d'énergie négative).

Nous étudions maintenant l'influence de la taille du pas de temps pour un rayon spectral donné. Le rayon spectral est choisi égal à 0.7, valeur qui permet à chaque algorithme de converger pour des pas de temps variant de  $0.1\mu s$  à  $1\mu s$ . Remarquons que pour un pas de temps de  $1.25\mu s$ , seuls les algorithmes de Newmark et EDMC-1 ont convergé. La Figure 4.15 (a) représente l'évolution, en fonction de la taille du pas de temps, de l'énergie dissipée par plastification et la Figure 4.15 (b) représente l'évolution, en fonction de la taille du pas de temps, de l'énergie dissipée numériquement. Conformément à la théorie, si la taille du pas de temps augmente, la fréquence adimensionnelle augmente et la dissipation numérique augmente. Par contre, le schéma CH tend alors à surestimer

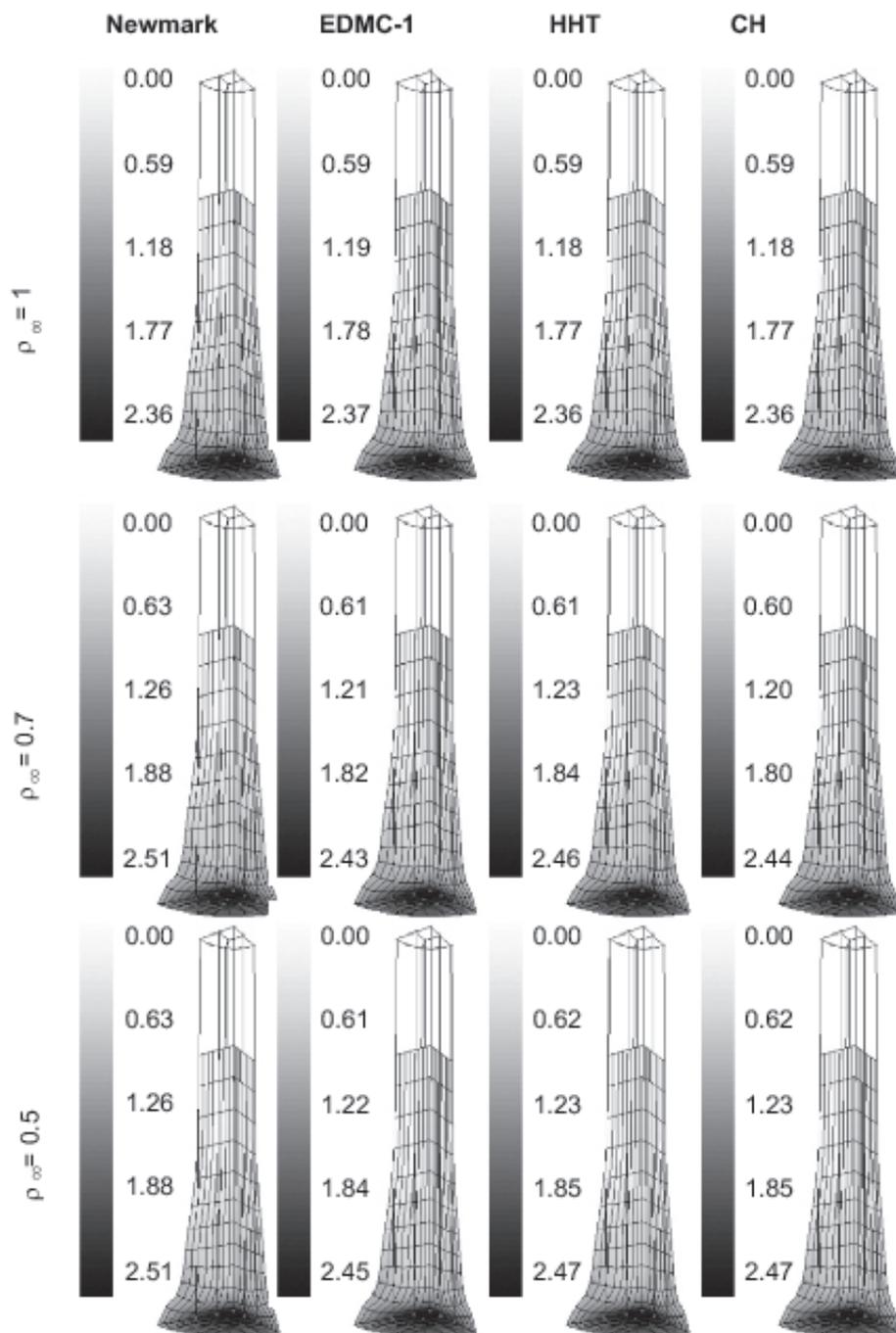


Figure 4.14: Déformation finale et déformation plastique équivalente (après  $80\mu s$ ) de la barre de Taylor pour un pas de temps de  $0.5\mu s$ .

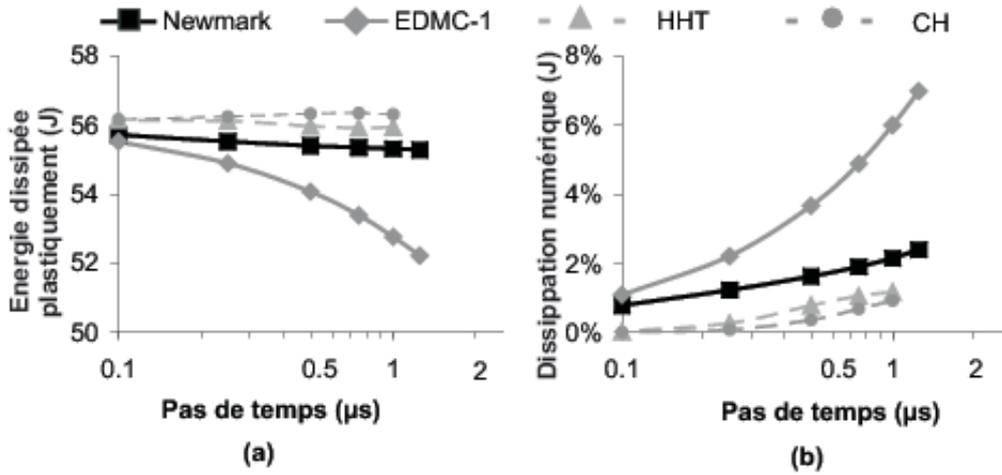


Figure 4.15: Energie dissipée après  $80\mu s$  de la barre de Taylor pour un rayon spectral à fréquence infinie de 0.7 - (a) énergie dissipée par plastification - (b) énergie dissipée numériquement (en pourcentage de l'énergie cinétique initiale).

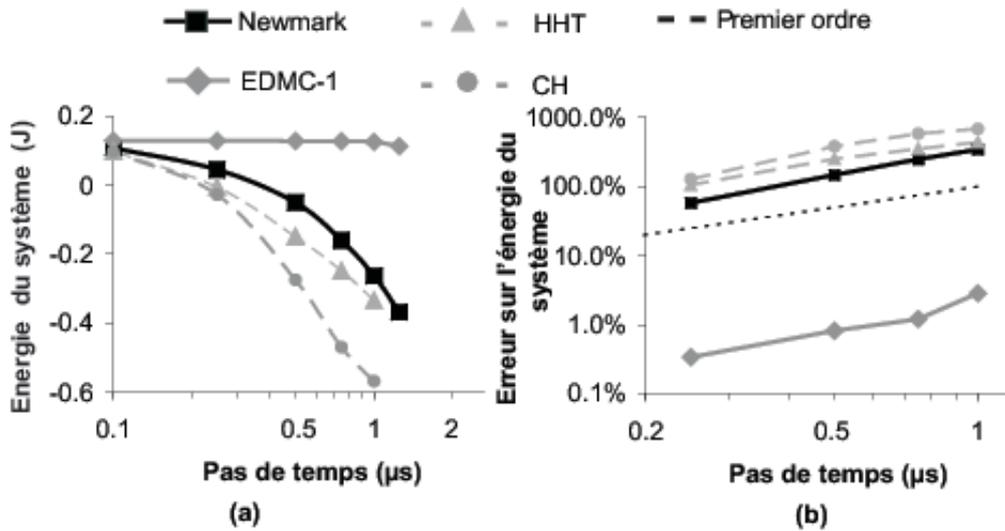


Figure 4.16: Energie finale du système (énergie cinétique ajoutée au travail des forces internes duquel est retirée l'énergie dissipée plastiquement) de la barre de Taylor après  $80\mu s$  et pour un rayon spectral à fréquence infinie de 0.7 - (a) énergie du système - (b) erreur sur l'énergie du système par rapport à la solution obtenue avec le même schéma et le plus petit pas de temps.

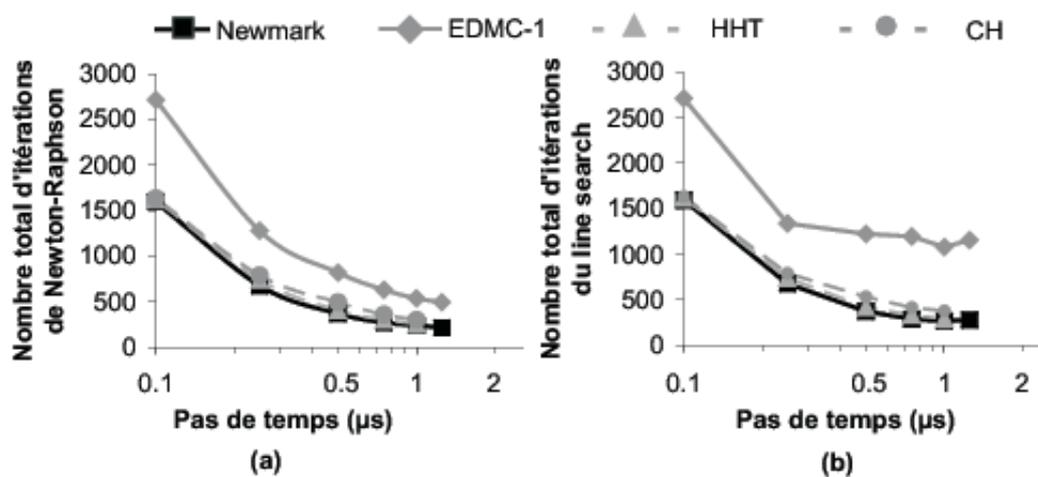


Figure 4.17: Nombre d'itérations de la barre de Taylor pour un rayon spectral à fréquence infinie de 0.7 - (a) itérations de Newton-Raphson - (b) itérations du "line search".

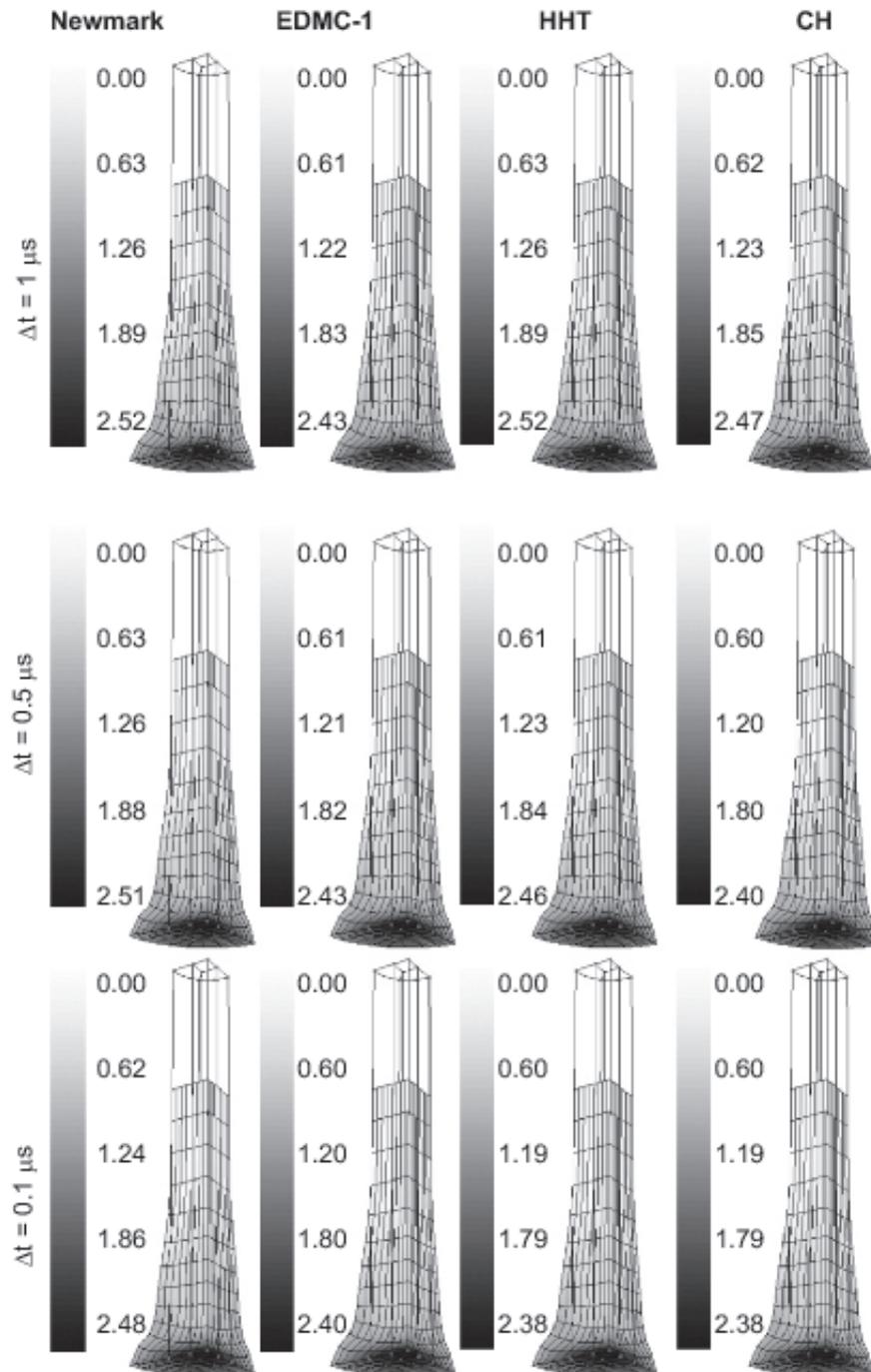


Figure 4.18: Déformation finale et déformation plastique équivalente (après  $80\mu s$ ) de la barre de Taylor pour un rayon spectral à fréquence infinie de 0.7.

la dissipation interne, contrairement aux autres schémas qui la sous-estiment (ce qui est plus rationnel puisqu'une partie de l'énergie cinétique est dissipée numériquement et ne peut pas être transformée en énergie plastique. La Figure 4.16 (a) illustre l'énergie du système (addition entre l'énergie cinétique et le travail des forces internes, duquel est retirée l'énergie dissipée par plasticité) du barreau. Nous remarquons que seul le schéma EDMC-1 donne une énergie positive pour toutes les tailles de pas de temps. Pour les autres schémas, quand le pas de temps augmente, l'énergie devient négative (c'est-à-dire que la dissipation plastique est alors supérieure à l'énergie initiale du barreau, ce qui est physiquement aberrant). La Figure 4.16 (b) représente l'erreur de cette énergie en prenant comme référence la valeur obtenue avec le même schéma et le plus petit pas de temps ( $0.1\mu s$ ). Nous remarquons que tous les schémas donnent une erreur au premier ordre, puisque les courbes sont parallèles, dans le plan logarithmique, à une courbe du premier ordre  $y = a\Delta t$  ( $a$  étant quelconques). Pour pouvoir analyser l'ordre de l'erreur, nous avons pris l'énergie résiduelle (énergie cinétique et potentielle) et non uniquement l'énergie cinétique ou l'énergie potentielle. En effet, si les composantes sont séparées, l'erreur de phase intervient, et l'énergie en un temps précis ne peut plus être utilisée. Les schémas HHT et CH ne donnent pas une erreur au second ordre par rapport au pas de temps (alors que la théorie linéaire de la section 2.3.2 prédisait une précision du second ordre), du fait des non-linéarités de plasticité qui introduisent une erreur par rapport aux déformations plastiques comme nous l'avons vu à la section 4.3.2. La Figure 4.18 montre que les déformations plastiques équivalentes obtenues sont similaires à 10% près à la solution sans dissipation numérique (Figure 4.9). La Table 4.6 reprend les résultats finaux obtenus par les différents schémas. Tant les rayons que les longueurs obtenus sont identiques à 2% près. Enfin, la Figure 4.17 (a) reprend le nombre total d'itérations de Newton-Raphson et la Figure 4.17 (b) le nombre total d'itérations du line-search. Nous pouvons y voir que pour tous les schémas, si la taille du pas de temps augmente, le nombre total d'itérations diminue (ce n'était pas le cas avec le schéma de Newmark sans dissipation numérique comme nous l'avons vu à la section 4.3.2). Enfin, signalons que l'introduction de dissipation numérique a permis d'augmenter la taille du pas de temps. En effet, sans dissipation numérique, les schémas conservatifs et de Newmark, ne pouvaient converger qu'avec un pas de temps de  $0.5\mu s$ .

### 4.5.2 Exemple 2 : Chute d'un bloc de caoutchouc (tumbling L-shaped block) [101]

La dynamique d'une pièce en forme de L est étudiée. La pièce est discrétisée en 99 éléments cubiques. Sa géométrie est reprise à la Figure 4.19. Les propriétés matérielles sont reprises à la Table 4.7. Sur la face A (Figure 4.19), une force, dépendant du temps  $t$ , est appliquée sur chaque nœud. Cette force est évaluée par

$$\begin{pmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \\ \vec{F}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 24 \end{pmatrix} N/s \times \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 2.5s \\ (5 - t), & 2.5 < t \leq 5s \end{cases} \quad (4.91)$$

Table 4.7: Propriétés matérielles du "tumbling L-shaped block".

Propriété	Valeur
Masse volumique	$\rho = 100kg/m^3$
Module de Young	$Y = 2812N/m^2$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.306$
Limite élastique initiale	$\Sigma_0 = 500N/mm^2$
Paramètre d'écouissage	$h = 400N/mm^2$

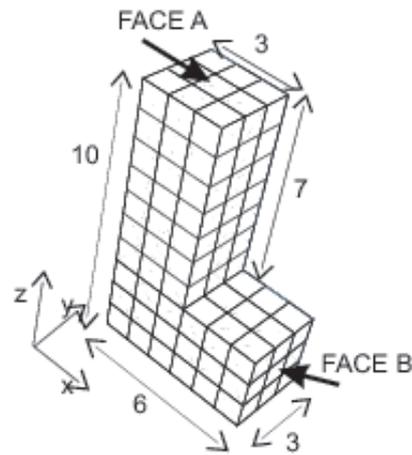


Figure 4.19: Géométrie (m) du "tumbling L-shaped block".

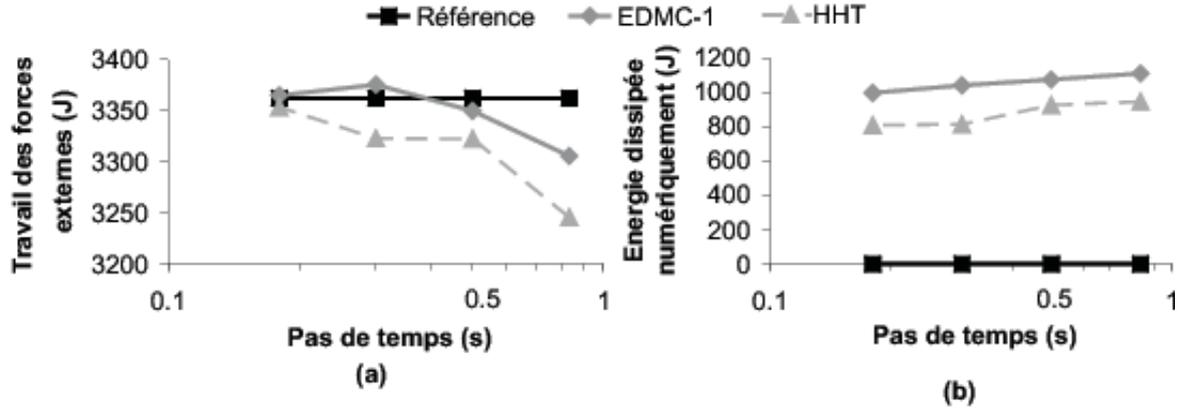


Figure 4.20: Energie finale (après 1500s) du "tumbling L-shaped block" - (a) travail des forces externes - (b) énergie dissipée numériquement.

Sur la face B, une autre force, équilibrant celle de la face A est appliquée. Cette force est donnée par

$$\begin{pmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \\ \vec{F}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} N/s \times \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 2.5s \\ (5-t), & 2.5 < t \leq 5s \end{cases} \quad (4.92)$$

Il apparaît qu'après 5s, les forces sont entièrement relaxées. Nous allons comparer les résultats obtenus grâce :

- (i) à l'algorithme proposé (EDMC) en tenant compte des tenseurs de correction, avec un rayon spectral infini de 0.8 (paramètres calculés par la Table 3.1);
- (ii) à l'algorithme de Hilber-Hughes-Taylor (HHT), avec un rayon spectral infini de 0.8 (paramètres calculés par la Table 2.2);
- (iii) à une solution de référence obtenue avec l'algorithme EMCA, les tenseurs de correction ( $\mathbf{C}^*$  et  $\mathbf{C}^{**}$ ) et un faible pas de temps.

Les pas de temps comparés sont 0.18s, 0.3s, 0.5s et 0.833s. Remarquons que ces pas de temps sont choisis pour arriver après un nombre entier de pas dans la configuration correspondant au temps 2.5s, pour laquelle le chargement est maximal. La solution de référence utilise toujours un pas de temps de 0.1s.

La Figure 4.20 (a) représente le travail effectué par les forces externes pour les différentes tailles de pas de temps. La variation de ce travail, par rapport à la solution de référence, est deux fois plus faible pour le schéma EDMC que pour le schéma HHT (1.7% au lieu de 3.5%). La Figure 4.20 (b) illustre l'énergie dissipée numériquement par les schémas d'intégration. Nous voyons que, surtout pour les faibles pas de temps, le schéma EDMC dissipe plus d'énergie que le schéma HHT, alors que le rayon spectral

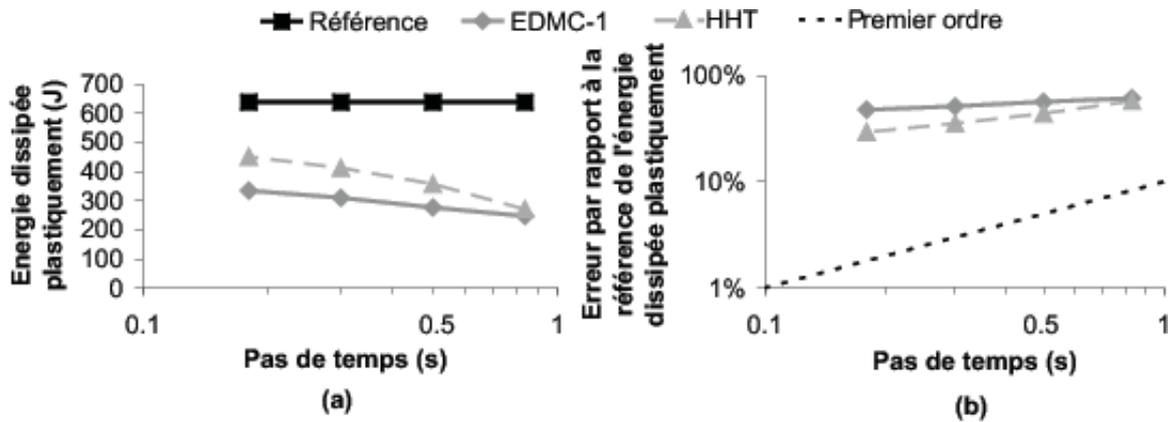


Figure 4.21: Energie dissipée plastiquement (après 1500s) pour le "tumbling L-shaped block" - (a) énergie dissipée - (b) erreur par rapport à la référence de l'énergie dissipée.

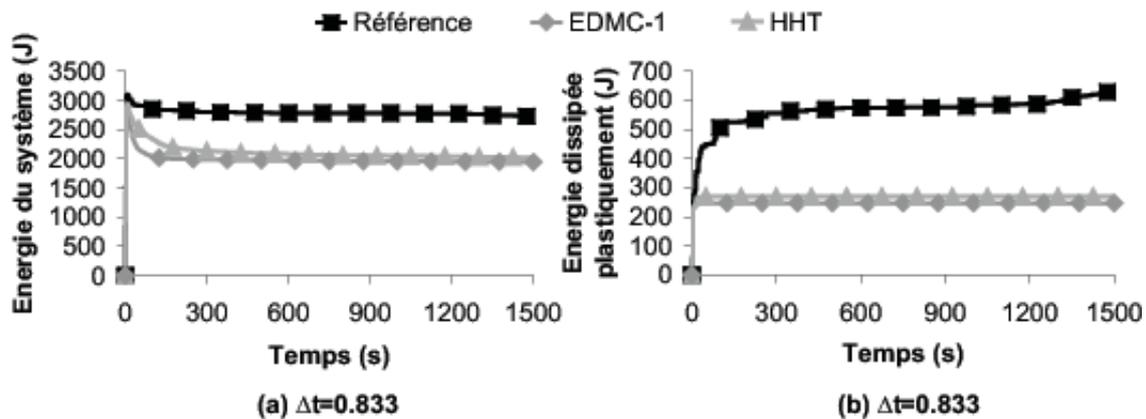


Figure 4.22: Evolution temporelle de l'énergie du "tumbling L-shaped block" pour un pas de temps de 0.833s - (a) énergie du système (somme de l'énergie cinétique et du travail des forces internes duquel est soustraite l'énergie dissipée plastiquement) - (b) énergie dissipée plastiquement.

infini est le même. Ce phénomène provient du fait qu'aucun paramètre n'a pu être défini pour minimiser la dissipation des basses fréquences, par opposition à la famille  $\alpha$ -généralisée (section 2.3). Cette analyse se confirme en observant l'énergie dissipée plastiquement (Figure 4.21 (a)). En effet, lorsque le pas de temps augmente (et donc la pulsation adimensionnelle, il apparaît que le schéma HHT dissipe plastiquement autant d'énergie que le schéma EDMC-1. La Figure 4.21 (b) représente l'erreur sur l'énergie dissipée plastiquement, en prenant comme référence le schéma EMCA avec un pas de temps de  $0.1s^5$ . Nous voyons que l'erreur est proche de 50%. Cela provient du fait que lorsque les forces externes sont relaxées, la dissipation numérique annihile les vibra-

<sup>5</sup>Remarquons que sur la Figure 4.21 (b), l'erreur n'est pas du premier ordre. Cela s'explique par le fait que l'erreur est calculée par rapport à une solution obtenue avec un autre schéma.

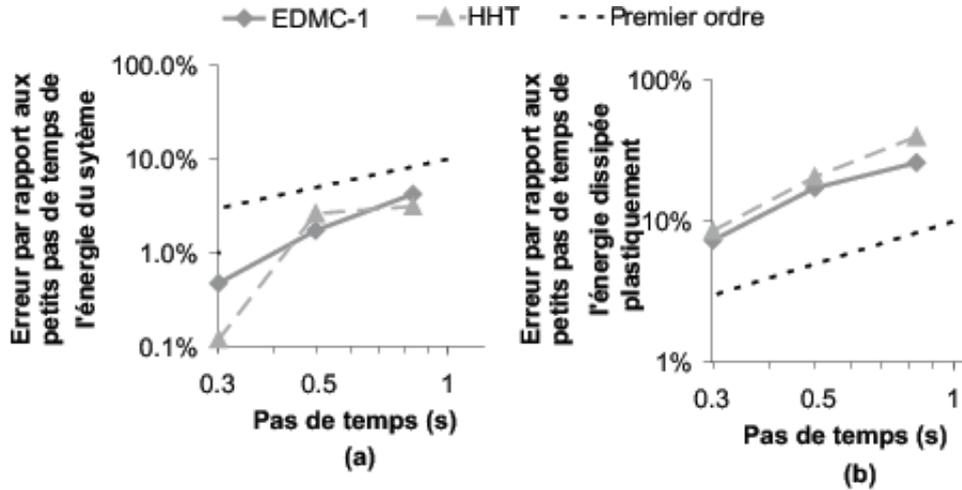


Figure 4.23: Erreur par rapport à la solution obtenue avec  $\Delta t = 0.18s$  pour chaque schéma pour le "tumbling L-shaped block" - (a) erreur sur l'énergie du système - (b) erreur sur l'énergie dissipée plastiquement.

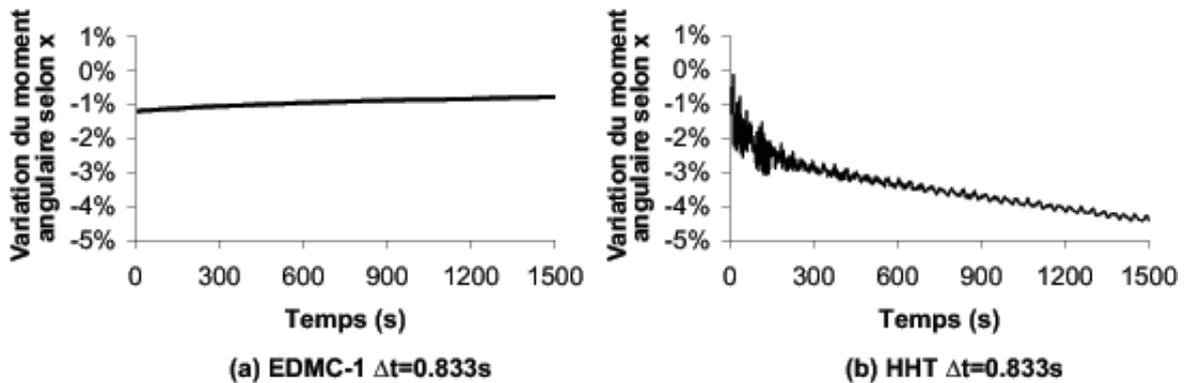


Figure 4.24: Variation temporelle, par rapport à la solution de référence, du moment angulaire selon  $x$  du "tumbling L-shaped block" pour un pas de temps de  $0.833s$  - (a) schéma EDMC-1 - (b) schéma HHT.

tions de la pièce qui devraient provoquer de la dissipation plastique au cours du temps. Cela est confirmé par l'évolution temporelle de l'énergie du système (somme de l'énergie cinétique et du travail des forces internes duquel est soustraite l'énergie dissipée plastiquement) sur la Figure 4.22 (a) et par l'évolution temporelle de la dissipation plastique sur la Figure 4.22 (b). En effet, il apparaît que pour le schéma conservatif, les vibrations internes continuent à provoquer de la dissipation plastique après la relaxation des forces externes. Les Figures 4.23 (a) et (b) illustrent les erreurs calculées par rapport à une solution obtenue avec le même schéma sur, respectivement l'énergie du système et l'énergie dissipée plastiquement. Nous observons que pour le schéma EDMC-1, les erreurs sont bien au premier ordre comme le prévoit la théorie, par contre les erreurs obtenues avec

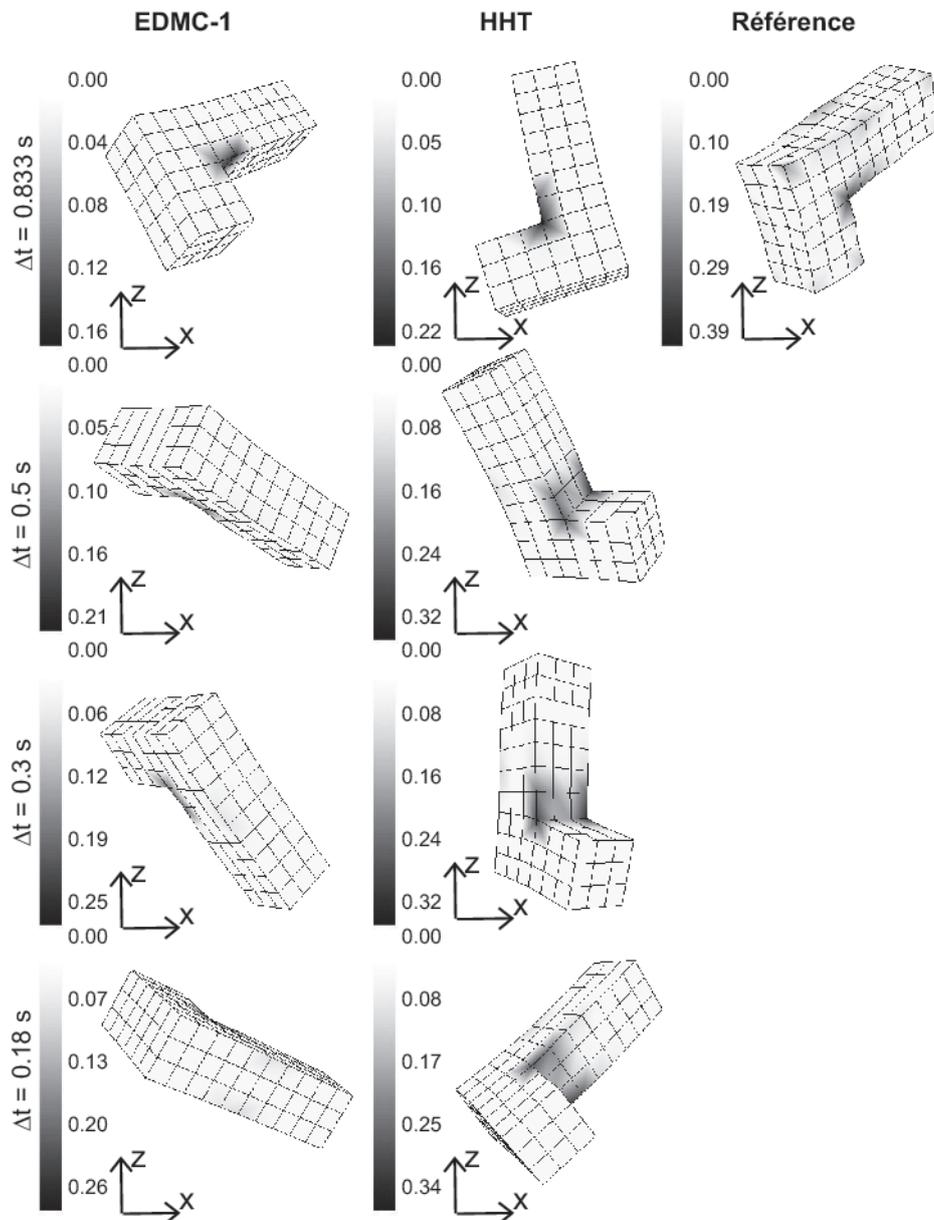


Figure 4.25: Déformation finale et déformation plastique équivalente (après 1500s) du "tumbling L-shaped block".

le schéma HHT ne sont pas au second ordre comme la théorie le prévoit. Cela provient des non-linéarités non prises en compte lors du calcul de l'ordre de l'erreur. La Figure 4.24 (a) illustre la variation du moment angulaire selon  $x$ , pour le schéma EDMC-1, après relaxation des forces, en se rapportant au moment angulaire de la solution de référence (la variation doit donc être nulle). Pour le schéma EDMC-1, nous voyons que, à cause de la précision numérique, le moment angulaire augmente légèrement et que du fait que le travail des forces externes est sous-estimé (Figure 4.20 (a)), le moment

angulaire est sous-estimé ( $\simeq 1\%$ ). La Figure 4.24 (b) illustre la variation du moment angulaire, toujours après relaxation des forces, pour le schéma HHT, en prenant comme référence le moment angulaire de référence. Nous observons qu'à partir du moment où les forces externes sont relaxées, le moment angulaire subit de fortes oscillations, et que de plus, le moment angulaire décroît constamment au cours du temps, ce qui tend à annuler le mouvement d'entraînement de la structure. Ces observations (qualitatives et quantitatives) restent valables pour l'analyse des moments angulaires selon  $y$  et selon  $z$  (non représentés ici). Finalement, du fait que les vibrations ne provoquent plus de dissipation interne, les contraintes équivalentes plastiques sont d'autant plus sous-estimées lorsque la taille du pas de temps augmente (Figure 4.25).

## 4.6 Conclusions sur la formulation des forces internes du modèle hypoélastique

Nous avons proposé une formulation pour intégrer le tenseur des contraintes de Cauchy d'un matériau hypoélastique. Associée au schéma du point milieu, cette formulation, sans dissipation numérique, conduit à un schéma d'intégration dynamique énergétiquement consistant et au second ordre par rapport au pas de temps. Les moments linéaires et angulaires sont conservés et la dissipation interne correspond bien à la dissipation provenant physiquement de la plasticité. Dans cette formulation, des tenseurs de corrections  $\mathbf{C}^*$  et  $\mathbf{C}^{**}$  introduits sont au second ordre par rapport aux incréments de déformations plastiques. Néanmoins, si ces termes sont négligés, quand la taille du pas de temps augmente (et ainsi l'incrément de déformation plastique équivalente), l'algorithme perd sa consistance énergétique, ce qui résulte en une augmentation du nombre d'itérations nécessaires pour résoudre le problème. Nous avons aussi comparé la solution de Newmark sans dissipation numérique avec l'algorithme conservatif. Il apparaît que pour de grandes tailles de pas de temps, la solution de Newmark diverge (énergie du système négative et augmentation du nombre d'itérations).

Ensuite nous avons introduit dans le schéma conservatif une dissipation numérique énergétiquement consistante qui vérifie les moments linéaires et angulaires et qui contrôle l'énergie dissipée numériquement (algorithme EDMC). Comparé aux schémas dissipatifs traditionnels (Newmark dissipatif, HHT, CH), le schéma énergétiquement consistant au premier ordre (EDMC-1) présente l'avantage de conduire à une solution physiquement acceptable (l'énergie résiduelle est positive dans le cas de la barre de Taylor) et de conserver les moments angulaires. Par contre, si l'utilisation de la dissipation numérique a permis de travailler avec des pas de temps plus importants (et ainsi de réduire le nombre d'itérations nécessaires), le schéma EDMC-1 s'est montré le plus efficace (en terme d'itérations) pour des dissipations numériques faibles (rayon spectral infini égal à 0.9). A l'opposé, le schéma CH s'est montré le plus intéressant en termes d'itérations pour des dissipations numériques importantes (rayon spectral infini égal à 0.2). Remarquons enfin que si pour un système linéaire, les algorithmes de CH et HHT sont au second ordre par rapport au pas de temps, pour les problèmes non-linéaires, leur manque de consistance énergétique dans le traitement des non-linéarités de plasticité, les a rendus précis seulement au premier ordre. Nous n'avons développé le schéma EDMC qu'au premier ordre. Néanmoins, une formulation au second ordre pourrait être implémentée en prenant d'autres potentiels de dissipation. Cette formulation conduirait cependant à augmenter le nombre d'inconnues du système, ce qui rendrait l'algorithme moins efficace pour résoudre des problèmes complexes de grande tailles.

Nous allons maintenant nous occuper du traitement du contact afin de pouvoir montrer quels sont les avantages des schémas énergétiquement consistants lorsque des interactions entre corps sont simulées.



# Chapitre 5

## Modélisation énergétiquement consistante de l'interaction de contact

Comme nous l'avons fait pour le système masse ressort (section 3.1.3) et pour le modèle hypoélastique (section 4), nous allons exposer le principe permettant d'établir un modèle énergétiquement consistant de l'interaction de contact.

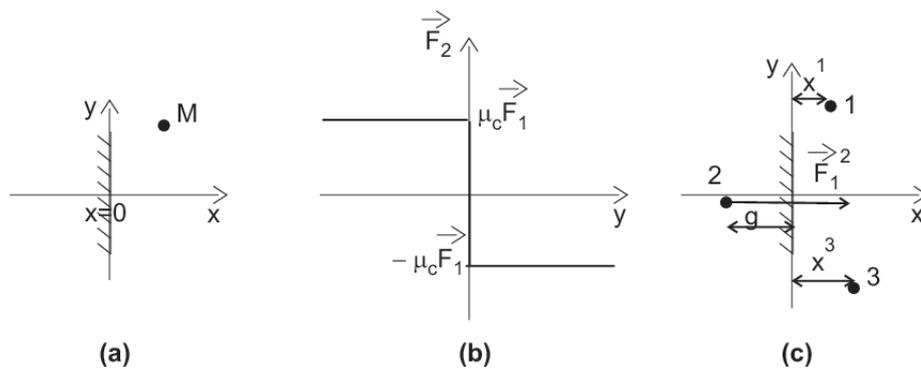


Figure 5.1: Problème simplifié du contact - (a) modèle étudié - (b) force de frottement - (c) cycle de prise et perte de contact.

L'interaction de contact est en fait l'interdiction qu'ont deux corps de s'interpénétrer. Prenons par exemple, le cas simple bidimensionnel d'une masse ponctuelle  $M$  contrainte de se mouvoir dans le plan  $Oxy$ , mais dont la partie  $x < 0$  lui est inaccessible (Figure 5.1 (a)). Il s'agit d'une analogie simple d'un corps rebondissant sur une paroi rigide. La méthode la plus simple, appelée méthode de la pénalité, pour imposer cette restriction est, lorsque  $x$  est négatif, d'appliquer une force externe sur la masse. Cette force est

dirigée selon l'axe  $x$  et est proportionnelle à la pénétration

$$\begin{aligned}\vec{F}_{ext} &= k_N |x| \vec{e}_1 \quad \text{si } x \leq 0 \\ \vec{F}_{ext} &= 0 \quad \text{si } x > 0\end{aligned}\quad (5.1)$$

où  $k_N$  est le facteur de proportionnalité appelé coefficient de pénalité et où  $\vec{e}_1$  est le vecteur unitaire selon l'axe des  $x$ . Cette méthode de la pénalité possède l'avantage de ne pas introduire de nouvelle inconnue dans le problème. Par contre, elle ne respecte pas exactement l'interdiction d'interpénétrabilité des corps.

Une solution alternative pour vérifier cette condition est d'utiliser un multiplicateur de Lagrange  $\Lambda$  pour imposer la contrainte  $x = 0$  lorsque les corps s'interpénètrent. Le système possède donc un nouveau potentiel  $\Lambda x$  qui se soustrait à l'énergie cinétique  $\frac{1}{2}M\dot{\vec{x}}\cdot\dot{\vec{x}}$ . Dans le cas de la masse ponctuelle, la fonctionnelle  $F(x, \Lambda)$  à minimiser devient dès lors

$$F(x, \Lambda) = \int_0^{t_f} \left\{ \frac{1}{2}M\dot{\vec{x}}\cdot\dot{\vec{x}} - \Lambda\vec{e}_1\cdot\vec{x} \right\} dt \quad (5.2)$$

où  $\vec{e}_1$  est le vecteur unitaire selon l'axe des  $x$ . L'équation (2.10) se réécrit alors

$$\begin{aligned}\int_0^{t_f} \left\{ M\ddot{\vec{x}}\cdot\delta\vec{x} - \Lambda\vec{e}_1\cdot\delta\vec{x} \right\} dt &= 0 \quad \forall \delta\vec{x} \in \mathbb{D}^v \\ \int_0^{t_f} \{ x\delta\Lambda \} dt &= 0 \quad \forall \delta\Lambda\end{aligned}\quad (5.3)$$

ce qui conduit, lorsqu'il y a contact, aux équations d'équilibre du système

$$\begin{aligned}M\ddot{\vec{x}} - \Lambda\vec{e}_1 &= 0 \quad \forall t \in \mathbb{T} \\ x &= 0 \quad \forall t \in \mathbb{T}\end{aligned}\quad (5.4)$$

Il apparaît alors que le multiplicateur de Lagrange  $\Lambda$  s'interprète physiquement comme étant la force externe appliquée sur la masse. Il constitue une nouvelle inconnue du système. Pour des problèmes faisant intervenir un grand nombre d'interactions de contact, la taille du système à résoudre augmente donc de manière considérable. Un autre désavantage du multiplicateur de Lagrange est que la matrice tangente du système ne possède pas de termes diagonaux relatifs aux multiplicateurs. La matrice est donc mal conditionnée car elle a un caractère creux (y compris sur la diagonale) très marqué et une ligne de ciel augmentée par rapport au système sans contact. De plus, le nombre d'inconnues dépend du nombre de contacts détectés. Enfin, Géradin et Cardona [62] ont montré que la méthode des multiplicateurs de Lagrange introduisait des modes propres de fréquence infinie dans le système. Ces modes peuvent donc perturber la solution lors de l'intégration temporelle.

Enfin, une méthode dite du Lagrangien augmenté, consiste à combiner ces deux précédentes méthodes (voir par exemple [89]). La force s'exerçant sur le corps s'écrit

alors

$$\begin{aligned}\vec{F}_{ext} &= [\Lambda + k_N |x|] \vec{e}_1 & \text{si } x \leq 0 \\ \vec{F}_{ext} &= 0 & \text{si } x > 0\end{aligned}\quad (5.5)$$

où  $\Lambda$  n'est plus une inconnue du système mais un paramètre, initialisé à zéro, qui est évalué par itération. Il faut donc calculer plusieurs fois chaque pas de temps, en incrémentant le multiplicateur  $\Lambda \leftarrow \vec{F}_{ext}$ , jusqu'à obtenir une pénétration  $x$  aussi faible que désirée. Cette méthode permet d'éviter les problèmes de conditionnement de la matrice tangente et n'introduit pas de nouvelles inconnues. Par contre la solution doit être estimée de manière itérative puisque chaque pas de temps est calculé plusieurs fois (nous utiliserons alors le terme augmentation et non pas itération). Enfin, la pénétration, si elle ne peut-être annulée, peut néanmoins être limitée.

Le frottement peut être traité de manière similaire. Supposons que la masse  $M$  entre en contact en  $y = 0$  et qu'il n'y a pas de glissement (le contact est alors dit collant). Dès lors la contrainte que le système doit vérifier est  $y = 0$ . Ce point est appelé point de collement. La méthode de la pénalité fournit alors des forces de frottement

$$\vec{F}_{ext} = k_N |x| \vec{e}_1 - k_T y \vec{e}_2 \quad (5.6)$$

où  $k_T$  est la pénalité tangentielle et où  $\vec{e}_2$  est le vecteur unitaire selon l'axe des  $y$ . La méthode des multiplicateurs de Lagrange conduit à

$$\begin{aligned}M\ddot{\vec{x}} - \Lambda_1 \vec{e}_1 - \Lambda_2 \vec{e}_2 &= 0 \quad \forall t \in \mathbb{T} \\ x &= 0 \quad \forall t \in \mathbb{T} \\ y &= 0 \quad \forall t \in \mathbb{T}\end{aligned}\quad (5.7)$$

où  $\Lambda_1$  est la force normale et où  $\Lambda_2$  est la force de frottement garantissant le collement. La méthode du Lagrangien augmenté, consistant à combiner ces deux précédentes méthodes, fournit alors les forces

$$\vec{F}_{ext} = [\Lambda_1 + k_N |x|] \vec{e}_1 + [\Lambda_2 + k_T y] \vec{e}_2 \quad (5.8)$$

Finalement, dans le cadre d'un modèle de Coulomb, la force de frottement est limitée à une certaine amplitude au-delà de laquelle apparaît un glissement. Cette limite est donnée par un coefficient de frottement  $\mu_c$ , multiplié par la force normale. Le point peut alors glisser le long de l'axe  $y$ , tout en étant soumis à une force de frottement opposée au glissement. L'évolution de la force de frottement (ici  $\vec{F}_2$ ) en fonction du glissement  $y$  et de la force normale (ici  $\vec{F}_1$ ) est représentée à la Figure 5.1 (b). Remarquons que dans ce cas, la méthode du Lagrangien augmenté peut être modifiée afin de symétriser la matrice de raideur [137], alors que la présence de frottement fournit généralement une matrice non-symétrique.

Nous allons maintenant montrer comment une formulation classique du contact, telle que décrite ci-dessus, peut rendre l'intégration dynamique instable, même pour une situation très simple. Soit le cycle représenté à la Figure 5.1 (c). Dans la configuration 1, la masse est à une distance  $x^1 > 0$  de la surface rigide (il n'y a pas de contact). Dans la configuration 2, il y a contact avec une pénétration ou gap  $g < 0$  (éventuellement nul dans le cas de la méthode des multiplicateurs de Lagrange), ce qui résulte en une force externe de composante selon  $x$  :  $\vec{F}_1^2$ . Enfin, dans la configuration 3 le contact est perdu et la masse ponctuelle est à une distance  $x^3 > 0$  de la surface rigide. Nous avons vu à la section 2.2.3, que le travail des forces externes (ou de contact) qui modifiait l'énergie du système intégré par l'algorithme de Newmark était calculé par

$$W_{ext}^{n+1} = W_{ext}^n + \frac{\vec{F}_{ext}^{n+1} + \vec{F}_{ext}^n}{2} \cdot [\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n] \quad (5.9)$$

Si nous appliquons cette formule pour la prise de contact (force de contact dans la configuration 1:  $\vec{F}_1^1 = 0$ , force de contact dans la configuration 2:  $\vec{F}_1^2 \neq 0$ ), il vient

$$W_{ext}^2 - W_{ext}^1 = \vec{F}_1^2 \frac{g - x^1}{2} \quad (5.10)$$

alors que pour la perte de contact (force de contact dans la configuration 2:  $\vec{F}_1^2 \neq 0$ , force de contact dans la configuration 3:  $\vec{F}_1^3 = 0$ ) nous avons

$$W_{ext}^3 - W_{ext}^2 = \vec{F}_1^2 \frac{x^3 - g}{2} \quad (5.11)$$

Le travail exercé sur le cycle par la force de contact s'écrit donc

$$W_{ext}^3 - W_{ext}^1 = \vec{F}_1^2 \frac{x^3 - x^1}{2} \quad (5.12)$$

Théoriquement, ce travail devrait être nul puisque la surface rigide est immobile, et que dans ce cas, les forces normales ne travaillent jamais (*c.f.* section 5.1.1). Or il apparaît que la solution numérique, en fonction de la taille des pas de temps et des vitesses, peut être négative, ce qui correspond à une perte d'énergie dans le système, mais peut également être positive, ce qui correspond à une création d'énergie dans le système et qui conduit à l'instabilité de l'intégration temporelle. Remarquons que tant que les pas de temps restent petits (algorithme explicite par exemple), ce travail est négligeable puisqu'alors il vient  $x^3 \simeq x^1$ .

Afin de conduire à un algorithme d'intégration énergétiquement consistant, une variante de la méthode de la pénalité a été développée par Armero et Petöcz [3, 4] pour simuler les interactions de contact avec ou sans frottement. Cette méthode autorise la pénétration des surfaces mais assure que l'énergie stockée par les forces normales de contact, est intégralement libérée lors de la perte du contact, ce qui n'est pas le cas dans une formulation classique de la pénalité. De plus il conduit à une dissipation

---

énergétiquement consistante de l'énergie en ce qui concerne les forces de frottement. Laursen et Chawla [91, 33, 90] ont développé une autre méthode énergétiquement consistante pour simuler les contacts avec et sans frottement. Cette méthode qui permet aussi la pénétration relative des corps, est inconditionnellement dissipative<sup>1</sup> pour la méthode de la pénalité et pour la méthode du Lagrangien augmenté. Plus récemment, Laursen et Love [92, 98] ont rendu ces méthodes géométriquement admissibles (*i.e.* pas de pénétration des corps), par l'utilisation d'une correction des vitesses. L'utilisation d'un potentiel de contact a aussi été proposée par Goicolea et Garcia Orden [51] pour simuler le contact sans frottement. Enfin, ces méthodes de contact ont été appliquées dans le contexte de corps quasi-rigides (mouvement rigide auquel une petite déformation élasto-plastique est superposée), comme les roues dentées par Demkowicz et Bajer [44, 8].

Dans ce chapitre, nous allons dans un premier temps exposer le problème du calcul d'interactions de type contact d'une manière générale, et non en particulierisant comme nous l'avons fait dans cette introduction. Ensuite nous opterons pour la méthode de la pénalité développée par Armero et Petöcz [3, 4], que nous exposerons. Nous choisissons la méthode de la pénalité, car à notre sens, c'est celle qui convient le mieux pour intégrer des systèmes de grandes dimensions et possédant de nombreuses interactions de type contact, comme une simulation de perte d'aube. Ensuite nous expliquerons comment adapter cette méthodologie, pour laquelle les forces sont calculées à partir d'une configuration initiale, à notre méthodologie qui consiste à utiliser la configuration courante. De plus nous prendrons en compte la gestion de surfaces à normales discontinues, ce qui permettra de simuler l'interaction entre des corps déformables maillés dans le cadre 3D. Des exemples numériques mettront en évidence la nécessité d'utiliser le schéma conservatif pour intégrer correctement les simulations faisant intervenir le contact, afin d'éviter les phénomènes d'instabilité que nous venons de décrire.

---

<sup>1</sup>Même en ce qui concerne le contact sans frottement, de l'énergie est dissipée du fait de la présence d'un gap non nul. Néanmoins, cette méthode reste stable par opposition à la méthode de la pénalité classique qui peut introduire de l'énergie dans le système.

## 5.1 Préliminaires

Dans cette section, considérons l'interaction entre deux corps (la généralisation aux interactions entre plusieurs corps étant directe). Nous allons brièvement exposer les définitions et les notations des différentes grandeurs permettant de simuler le contact de manière énergétiquement consistante. La plupart des grandeurs utilisées ont été définies par Laursen et Simo [94]. Cependant, contrairement à ces auteurs, nous allons travailler dans la configuration courante et ne pas ramener systématiquement les grandeurs dans la configuration initiale. Soit l'interaction au temps  $t$  entre un volume  $\mathbb{V}^1(t)$  de surface  $\mathbb{S}^1(t)$  (à laquelle correspond la frontière initiale  $\mathbb{S}_0^1$ ) et un autre volume  $\mathbb{V}^2(t)$  de surface  $\mathbb{S}^2(t)$  (à laquelle correspond la frontière initiale  $\mathbb{S}_0^2$ ) (Figure 5.2). Cette dernière surface peut être exprimée grâce à un vecteur  $u : \mathbb{S}_0^2 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$  (de composantes  $u_1$  et  $u_2$ ). Remarquons que  $u$  n'est pas surmonté d'une flèche puisqu'il n'est pas de dimension 3. La surface  $\mathbb{S}^2(t)$  s'exprime donc par  $\vec{y}(u, t) : \mathbb{S}_0^2 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{X}$  avec  $\mathbb{X}$ , l'ensemble des positions admissibles, défini par (2.4). Considérons un point de la surface  $\mathbb{S}^1(t)$ , de coordonnées actuelles  $\vec{x}(t) : \mathbb{S}_0^1 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{X}$  que nous allons projeter sur  $\mathbb{S}^2(t)$ . Il vient alors implicitement que la surface 1 est la surface esclave (c'est-à-dire celle dont les nœuds sont projetés), et que la surface 2 est la surface maître (celle où les nœuds esclaves sont projetés). Dans le cas où une surface est toujours désignée comme étant esclave, et où l'autre surface est toujours maître, l'algorithme est dit de simple passe. C'est le cas du contact entre un maillage et une surface rigide, pour lequel la surface rigide joue toujours le rôle de surface maître. Par contre dans le cas de l'interaction entre deux corps déformables maillés, afin de ne pas privilégier un corps par rapport à un autre, chaque surface joue une fois le rôle de la surface maître et une fois le rôle de la surface esclave. Il s'agit alors d'un algorithme double passe, qui se déduit directement en réappliquant tous les développements que nous allons effectuer en interchangeant les surfaces maîtres et esclaves. Remarquons que le cas d'un contact entre une surface rigide et un corps déformable est un cas particulier du contact tout-à-fait général tel que nous le traitons ici.

Pour projeter  $\vec{x}(t)$  sur la surface  $\mathbb{S}^2(t)$ , nous exprimerons le point  $\vec{x}$  en fonction de ses propres positions initiales (*i.e.*  $\vec{x}_0$ ), afin de pouvoir utiliser une dérivée matérielle. Supposons que ce point se projette de manière orthogonale sur  $\vec{y}(u, t)$  (*i.e.* la surface 2). Pour pouvoir effectuer une dérivée matérielle, nous devons également exprimer la projection de ce point sur la surface esclave en fonction des coordonnées initiales du point projeté (Figure 5.2). Soit  $\vec{y}(\vec{x}_0, t) : \mathbb{S}_0^1 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{S}^2$  cette projection définie comme étant la projection la plus proche, nous appelons le scalaire "gap"  $g(\vec{x}_0, t) : \mathbb{S}_0^1 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(\vec{x}_0, t) &= \theta \|\vec{y}(\vec{x}_0, t) - \vec{x}(\vec{x}_0, t)\| \\ &= \theta \min_{\vec{y} \in \mathbb{S}^2(t)} \|\vec{y}(t) - \vec{x}(\vec{x}_0, t)\| \end{aligned} \quad (5.13)$$

avec  $\theta = 1$  si les deux corps ne s'interpénètrent pas et  $\theta = -1$  si les corps s'interpéné-

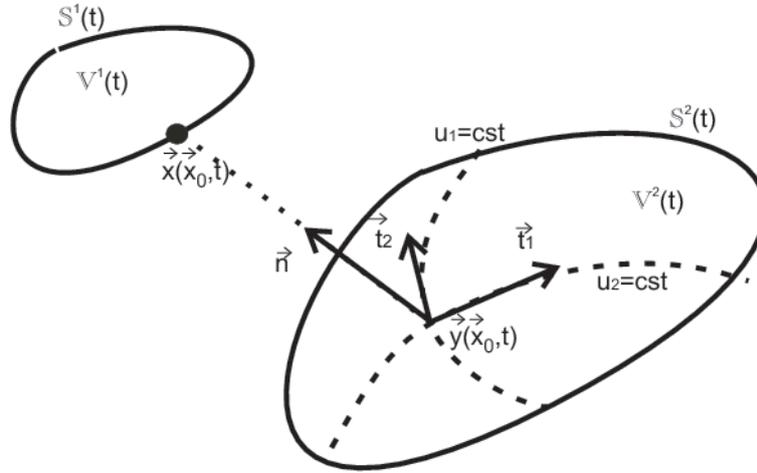


Figure 5.2: Définition des grandeurs de contact.

trent. Ce paramètre  $\theta$  permet de distinguer aisément si les corps s'interpénètrent, car dans ce cas le gap est négatif. Dans le cas contraire, le gap est positif, et les corps ne s'interpénètrent pas.

Nous pouvons alors définir  $\vec{n}(\vec{x}_0, t)$  la normale unitaire extérieure à  $S^2(t)$ . Les deux tangentes  $\vec{t}_1(\vec{y}(\vec{x}_0, t), t)$  et  $\vec{t}_2(\vec{y}(\vec{x}_0, t), t)$  sont, en toute généralité, non-unitaires et non perpendiculaires. Nous donnerons une expression mathématique à ces tangentes lorsque nous en aurons besoin. Nous avons donc au point de projection un repère non orthonormé dans lequel nous avons

$$\begin{aligned} \vec{y}(\vec{x}_0, t) - \vec{x}(\vec{x}_0, t) &= -g(\vec{x}_0, t)\vec{n}(\vec{x}_0, t) \\ \vec{n}(\vec{x}_0, t) &= \frac{\vec{t}_1(\vec{y}(\vec{x}_0, t), t) \wedge \vec{t}_2(\vec{y}(\vec{x}_0, t), t)}{\|\vec{t}_1(\vec{y}(\vec{x}_0, t), t) \wedge \vec{t}_2(\vec{y}(\vec{x}_0, t), t)\|} \end{aligned} \quad (5.14)$$

### 5.1.1 Le milieu continu pour l'interaction entre corps

Dans cette section nous étudions l'interaction de deux corps, l'extension à plusieurs corps étant triviale. Chaque surface  $S^i$  (Figure 5.2) est décomposée en deux parties : la première  $S_x^i$  est la partie où les déplacements sont imposés, et la seconde  $S_T^i$  est la partie où les forces sont appliquées. Comme nous avons défini l'ensemble des positions admissibles (2.4) pour l'étude d'un corps, nous définissons l'ensemble des positions admissibles  $\mathbb{X}^i$  pour chaque corps  $i$

$$\mathbb{X}^i \equiv \left\{ \vec{x} : \mathbb{V}_0^i \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid [J > 0 \text{ and } \vec{x}|_{S_x^i} = \vec{x}] \quad \forall \vec{x}_0 \in \mathbb{V}_0^i \right\} \quad (5.15)$$

avec  $\vec{x}$  les positions imposées. Le mouvement des corps est défini par :  $t \in \mathbb{T} \rightarrow \vec{x}(t) \in \mathbb{X}^i \quad \forall i = 1, 2$ . Supposons que les solides ne soient pas soumis à des forces

volumiques, afin de simplifier les équations. Pour chaque corps  $i$ , les pressions surfaciques  $\vec{T}_{S^i}(t) : \mathbb{S}_{\vec{T}_0}^i \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^3$  conduisent à la condition  $\vec{T}_{S^i}(t) = \Sigma(t) \vec{n}^i(t)$  avec  $\vec{n}^i$  la normale extérieure à  $S^i$ . Supposons que les pressions externes ne résultent que du contact. Dès lors, comme les surfaces de contact des deux corps coïncident et en utilisant le principe d'action réaction, il vient

$$\mathbb{S}_{\vec{T}}^1(t) = \mathbb{S}_{\vec{T}}^2(t) \quad \text{et} \quad \vec{T}_{S^1}(\vec{x}_0, t) = -\vec{T}_{S^2}(\vec{x}_0, t) \quad \forall \vec{x}_0 \in \mathbb{S}_{\vec{T}}^1 \quad (5.16)$$

La décomposition en éléments-finis se fait avec, pour chaque corps, les fonctions de formes  $\varphi^{\xi_i} : \mathbb{V}_0^i \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $\xi_i \in [1, N_i]$  ( $N_i$  étant le nombre total de nœuds du corps  $i = 1, 2$ ). Pour chaque nœud  $\xi_i \in [1, N_i]$  et pour chaque position initiale  $\vec{x}_0 \in \mathbb{V}_0^i$ , il vient

$$\vec{x}(\vec{x}_0) = \varphi^{\xi_i}(\vec{x}_0) \vec{x}^{\xi_i} \quad , \quad \dot{\vec{x}}(\vec{x}_0) = \varphi^{\xi_i}(\vec{x}_0) \dot{\vec{x}}^{\xi_i} \quad \text{et} \quad \ddot{\vec{x}}(\vec{x}_0) = \varphi^{\xi_i}(\vec{x}_0) \ddot{\vec{x}}^{\xi_i} \quad (5.17)$$

Finalement l'ensemble des déplacements virtuels admissibles pour chaque corps  $i$  s'écrit

$$\mathbb{D}^i \equiv \left\{ \vec{v} : \mathbb{V}_0^i \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \left[ \vec{v}|_{\mathbb{S}_{\vec{x}}^i} = 0 \text{ et } \vec{v}(\vec{x}_0, 0) = 0, \vec{v}(\vec{x}_0, t_f) = 0 \forall \vec{x}_0 \in \mathbb{V}_0^i \right] \right\} \quad (5.18)$$

Nous réduisons ces ensembles à  $\mathbb{D}^{v_i} \subset \mathbb{D}^i$  de sorte que  $\delta\vec{x}$  puisse s'écrire comme (5.17).

Le principe quasi-variationnel (2.10) se réécrit  $\forall \delta\vec{x} \in \mathbb{D}^{v_i}$

$$\int_0^{t_f} \sum_{i=1,2} \left\{ \int_{\mathbb{V}^i} \left[ \rho \ddot{\vec{x}} \cdot \delta\vec{x} + \Sigma^T : \frac{\partial \delta\vec{x}}{\partial \vec{x}} \right] d\mathbb{V}^i - \int_{\mathbb{S}_{\vec{T}}^i} \left[ \vec{T}_{S^i} \cdot \delta\vec{x} \right] d\mathbb{S}^i \right\} dt = 0 \quad (5.19)$$

En intégrant par partie, il vient

$$\underbrace{\sum_{i=1,2} \int_{\mathbb{V}^i} \left\{ \rho \ddot{\vec{x}} \cdot \delta\vec{x} \right\} d\mathbb{V}^i}_{\equiv \delta K} = \underbrace{\sum_{i=1,2} \int_{\mathbb{S}_{\vec{T}}^i} \left\{ \vec{T}_{S^i} \cdot \delta\vec{x} \right\} d\mathbb{S}^i}_{\equiv \delta W_{cont}} - \underbrace{\sum_{i=1,2} \int_{\mathbb{V}^i} \left\{ \Sigma^T : \frac{\partial \delta\vec{x}}{\partial \vec{x}} \right\} d\mathbb{V}^i}_{\equiv \delta W_{int}} \quad \forall t \in \mathbb{T} \quad (5.20)$$

avec  $\delta W_{cont}$  le travail virtuel des forces de contact.

### Conservation du moment linéaire des deux corps

Le moment linéaire (2.15) se réécrit pour les deux corps (sans utiliser la sommation d'Einstein)

$$\vec{L} \equiv \sum_{i=1,2} \int_{\mathbb{V}^i} \left\{ \rho \dot{\vec{x}} \right\} d\mathbb{V}^i = \sum_{i=1,2} \int_{\mathbb{V}_0^i} \left\{ \rho_0 \dot{\vec{x}} \right\} d\mathbb{V}_0^i \quad (5.21)$$

Grâce à (5.16), en supposant des conditions limites de type Neumann (*i.e.*  $\mathbb{S}_{\vec{x}} = \emptyset$ ), si  $\delta\vec{x} \in \mathbb{D}^{v_i}$  est pris constant, la relation (5.20) conduit à la conservation du moment angulaire

$$\dot{\vec{L}} = \int_{\mathbb{S}_{\vec{T}}^1} \left\{ \vec{T}_{S^1} + \vec{T}_{S^2} \right\} d\mathbb{S}^1 = 0 \quad \forall t \in \mathbb{T} \quad (5.22)$$

### Conservation du moment angulaire des deux corps

Le moment angulaire (2.20) se réécrit (sans utiliser la sommation d'Einstein)

$$\vec{J} \equiv \sum_{i=1,2} \int_{\mathbb{V}^i} \left\{ \rho \vec{x} \wedge \dot{\vec{x}} \right\} d\mathbb{V}^i = \sum_{i=1,2} \int_{\mathbb{V}_0^i} \left\{ \rho_0 \vec{x} \wedge \dot{\vec{x}} \right\} d\mathbb{V}_0^i \quad (5.23)$$

Grâce à (5.16), en supposant des conditions limites de type Neumann (*i.e.*  $\mathbb{S}_{\vec{x}} = \emptyset$ ), et en prenant  $\delta\vec{x} = \vec{\eta} \wedge \vec{x}$  avec  $\vec{\eta}$  constant, comme  $\Sigma$  est symétrique et que  $\vec{\eta}$  est une constante arbitraire, la relation (5.20) conduit à

$$\dot{\vec{J}} = \int_{\mathbb{S}_{\vec{T}}^1} \left\{ \vec{x} \wedge \left[ \vec{T}_{S^1} + \vec{T}_{S^2} \right] \right\} d\mathbb{S}^1 = 0 \quad \forall t \in \mathbb{T} \quad (5.24)$$

puisque les points des deux surfaces en contact coïncident.

### Conservation de l'énergie

L'énergies cinétique  $K$ , le travail des forces internes  $W_{int}$  et le travail des forces de contact  $W_{cont}$  sont définis à partir de

$$\begin{aligned} K &\equiv \sum_{i=1,2} \int_{\mathbb{V}^i} \left\{ \frac{1}{2} \rho \dot{\vec{x}}^2 \right\} d\mathbb{V}^i = \int_{\mathbb{V}_0^i} \left\{ \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\vec{x}}^2 \right\} d\mathbb{V}_0^i \\ \dot{W}_{int} &\equiv \sum_{i=1,2} \int_{\mathbb{V}^i} \left\{ \Sigma^T : [\dot{\mathbf{F}}\mathbf{f}] \right\} d\mathbb{V}^i \\ \dot{W}_{cont} &\equiv \sum_{i=1,2} \int_{\mathbb{S}_{\vec{T}}^i} \left\{ \vec{T}_{S^i} \cdot \dot{\vec{x}} \right\} d\mathbb{S}^i \end{aligned} \quad (5.25)$$

Remarquons que  $\dot{W}_{cont} \neq 0$  puisque les points des surfaces de contact ont des vitesses différentes. Si la force de contact  $\vec{T}_{S^i}$  est décomposée en une composante normale  $t_N^i \vec{n}^i$  et en une composante tangentielle  $\left[ \vec{F}_{cont} \right]_T^i$ , comme les composantes normales de la vitesse sont identiques pour les deux surfaces, il vient

$$\dot{W}_{cont} = \underbrace{\sum_{i=1,2} \int_{\mathbb{S}_{\vec{T}}^i} \left\{ t_N^i \vec{n}^i \cdot \dot{\vec{x}} \right\} d\mathbb{S}^i}_{=0} + \underbrace{\sum_{i=1,2} \int_{\mathbb{S}_{\vec{T}}^i} \left\{ \left[ \vec{F}_{cont} \right]_T^i \cdot \dot{\vec{x}} \right\} d\mathbb{S}^i}_{\equiv -\dot{\Delta}_{frot}} \quad (5.26)$$

où  $\dot{\Delta}_{frot} > 0$  est la dissipation venant du frottement. En utilisant les relations (2.25) et (2.26), en supposant des conditions limites de type Neumann (*i.e.*  $\mathbb{S}_{\vec{x}} = \emptyset$ ), et en prenant  $\delta\vec{x} = \dot{\vec{x}}$ , la relation (5.20) conduit au premier principe de la thermodynamique

$$\dot{E} = -\dot{\Delta}_{frot} - \dot{\Delta}_{int} \quad \forall t \in \mathbb{T} \quad (5.27)$$

Nous allons maintenant dériver les grandeurs relatives au contact. En effet, ces expressions sont nécessaires pour pouvoir établir l'expression des forces de contact.

### 5.1.2 Dérivation du gap normal

Afin de pouvoir étudier l'interaction de contact pour un système discrétisé en éléments finis, intégré au cours du temps, nous devons établir un certain nombre de relations. D'abord nous allons dériver la relation (5.13) pour un  $\vec{x}_0$  constant (dérivée matérielle) [3] en

$$\frac{\partial g}{\partial t}(\vec{x}_0, t) = \frac{\partial [\vec{x}(\vec{x}_0, t) - \vec{y}(\vec{x}_0, t)]}{\partial t} \cdot \vec{n}(\vec{x}_0, t) + g(\vec{x}_0, t) \vec{n}(\vec{x}_0, t) \cdot \frac{\partial \vec{n}(\vec{x}_0, t)}{\partial t} \quad (5.28)$$

Dans cette relation, puisque la normale est unitaire, et que le point  $\vec{x}_0$  est fixé, la dérivée temporelle de la normale ne peut qu'être perpendiculaire à la normale. Dès lors nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t} \|\vec{n}(\vec{x}_0, t)\| = 0 \Leftrightarrow \vec{n}(\vec{x}_0, t) \cdot \frac{\partial \vec{n}(\vec{x}_0, t)}{\partial t} = 0 \quad (5.29)$$

Il faut encore remarquer que si idéalement  $g$  est nul pendant un contact, ce ne sera pas le cas en pratique. Dès lors, nous ne pouvons pas supprimer directement le terme en  $g$  de l'équation (5.28) sous peine de rendre celle-ci incohérente. De plus, comme le point de coordonnées  $\vec{x}$  appartient au volume 1, nous pouvons considérer qu'il correspond à un nœud  $\xi_1$  du volume 1. Dès lors nous avons pour un temps  $t$

$$\begin{aligned} \vec{x}(\vec{x}_0, t) &= \vec{x}^{\xi_1} \\ \frac{\partial \vec{x}(\vec{x}_0, t)}{\partial t} &= \dot{\vec{x}}^{\xi_1} \end{aligned} \quad (5.30)$$

De la même manière, nous savons que  $\vec{y}(\vec{x}_0, t)$  appartient au corps 2. Pour un temps  $t$ , nous pouvons exprimer la projection sur la surface du corps 2 à partir de fonctions de forme surfaciques  $\varphi$  (elles-mêmes fonctions du vecteur de deux composantes  $u(\vec{x}_0, t)$  localisant le point  $\vec{y}(\vec{x}_0, t)$ ) et des nœuds  $\xi_2$  de la surface du corps 2<sup>2</sup> (il y a sommation

<sup>2</sup>Dans le cas où cette surface est rigide et non maillée, cette relation, ainsi que toutes celles qui vont suivre, reste valable en considérant  $\vec{x}^{\xi_2}$  non plus comme un des nœuds mais comme un des points qui définissent la surface rigide. Les fonctions de forme  $\varphi^{\xi_2}$  deviennent alors les fonctions qui définissent la surface à partir de ces points (via une représentation DAO par exemple). Remarquons que, *a priori*, la surface ne doit pas obligatoirement passer par ces points (pôle d'une nurbs par exemple).

sur les indices répétés deux fois)

$$\begin{aligned}\vec{y}(\vec{x}_0, t) &= \varphi^{\xi_2}(u(\vec{x}_0, t)) \vec{x}^{\xi_2} \\ \frac{\partial \vec{y}(\vec{x}_0, t)}{\partial t} &= \underbrace{\frac{\partial \varphi^{\xi_2}}{\partial u_\beta}}_{\equiv D_\beta^{\xi_2}(u(\vec{x}_0, t))} \frac{\partial u_\beta(\vec{x}_0, t)}{\partial t} \vec{x}^{\xi_2} + \varphi^{\xi_2}(u(\vec{x}_0, t)) \dot{\vec{x}}^{\xi_2}\end{aligned}\quad (5.31)$$

Définissons les tangentes grâce à la dérivée par rapport à  $u$  de  $\vec{y}(\vec{x})$

$$\vec{t}_\alpha(u(\vec{x}_0, t)) \equiv \frac{\partial \vec{y}(u(\vec{x}_0, t))}{\partial u_\alpha} = D_\alpha^{\xi_2}(u(\vec{x}_0, t)) \vec{x}^{\xi_2} \quad (5.32)$$

Le terme de dérivée de surface est donc perpendiculaire à la normale de la surface. Il vient

$$\vec{n}(\vec{x}_0, t) \cdot D_\beta^{\xi_2} \frac{\partial u_\beta}{\partial t} \vec{x}^{\xi_2} = \vec{n}(\vec{x}_0, t) \cdot \vec{t}_\beta(\vec{x}_0, t) \frac{\partial u_\beta}{\partial t} = 0 \quad (5.33)$$

Grâce aux équations (5.29), (5.30), (5.31) et (5.33), la relation (5.28) devient (en supposant la sommation sur les indices répétés 2 fois)

$$\frac{\partial g(\vec{x}_0, t)}{\partial t} = \left\{ \dot{\vec{x}}^{\xi_1} - \varphi^{\xi_2}(u(\vec{x}_0, t)) \dot{\vec{x}}^{\xi_2} \right\} \cdot \vec{n}(\vec{x}_0, t) \quad (5.34)$$

Remarquons que dans le cas idéal où le gap reste nul pendant le contact, cette dernière relation correspond bien à  $\frac{\partial g}{\partial t} = 0$ .

### 5.1.3 Dérivation de la composante tangentielle

Nous allons dériver la projection du gap sur la surface, par rapport au temps pour un point de la surface 1 ( $\vec{x}_0$ ) fixé (dérivée matérielle) [95]. Il vient avec l'équation (5.14)

$$[\vec{x}(\vec{x}_0, t) - \vec{y}(\vec{x}_0, t)] \cdot \vec{t}_\alpha(\vec{x}_0, t) = 0 \quad \text{pour } \alpha = 1, 2 \quad (5.35)$$

La dérivée matérielle s'écrit (en utilisant (5.30) et (5.31))

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial [\vec{x}(\vec{x}_0, t) - \vec{y}(\vec{x}_0, t)]}{\partial t} \cdot \vec{t}_\alpha(\vec{y}(\vec{x}_0, t), t) + [\vec{x}(\vec{x}_0, t) - \vec{y}(\vec{x}_0, t)] \cdot \frac{\partial \vec{t}_\alpha(\vec{y}(\vec{x}_0, t), t)}{\partial t} \\ &= \left[ \dot{\vec{x}}^{\xi_1} - \vec{t}_\beta(u(\vec{x}_0, t)) \frac{\partial u_\beta}{\partial t}(u(\vec{x}_0, t)) - \varphi^{\xi_2}(u(\vec{x}_0, t)) \dot{\vec{x}}^{\xi_2} \right] \cdot \vec{t}_\alpha(\vec{y}(\vec{x}_0, t), t) \\ &\quad + g(\vec{x}_0, t) \vec{n}(\vec{x}_0, t) \cdot \frac{\partial \vec{t}_\alpha}{\partial t}(\vec{y}(\vec{x}_0, t), t)\end{aligned}\quad (5.36)$$

Pour exprimer la dérivée de la tangente, utilisons la discrétisation de la surface maître (5.31) et la définition des tangentes (5.32). Dès lors, pour  $\alpha = 1, 2$  et en considérant  $\vec{x}_0$

fixé (dérivée matérielle), il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{t}_\alpha(\vec{y}(\vec{x}_0, t), t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \{ D_\alpha^{\xi_2}(u(\vec{x}_0, t)) \vec{x}^{\xi_2} \} \\ &= \underbrace{\frac{\partial [D_\alpha^{\xi_2}(u(\vec{x}_0, t))]}{\partial u_\beta}}_{\equiv \vec{t}_{\alpha, \beta}(u(\vec{x}_0, t))} \vec{x}^{\xi_2} \frac{\partial u_\beta}{\partial t} + \underbrace{D_\alpha^{\xi_2}(u(\vec{x}_0, t)) \dot{\vec{x}}^{\xi_2}}_{\equiv \vec{t}_{\alpha, t}(u(\vec{x}_0, t))} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Pour un  $\vec{x}_0$  donné, si nous définissons  $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$ , la relation (5.36) s'écrit pour  $\alpha = 1, 2$  (grâce à la relation (5.37), et en omettant les dépendances par souci de clarté)

$$\underbrace{\left[ \dot{\vec{x}}^{\xi_1} - \varphi^{\xi_2} \dot{\vec{x}}^{\xi_2} \right] \cdot \vec{t}_\alpha + g \vec{n} \cdot \vec{t}_{\alpha, t}}_{\equiv B_\alpha} = \underbrace{\left[ \vec{t}_\beta \cdot \vec{t}_\alpha - g \vec{n} \cdot \vec{t}_{\alpha, \beta} \right]}_{\equiv A_{\alpha \beta}} \dot{u}_\beta \quad (5.38)$$

Dans cette expression, le premier terme de  $B_\alpha$  représente la projection sur la tangente  $\vec{t}_\alpha$  de la vitesse de glissement exprimée en fonction des vitesses nodales. Le second terme de  $B_\alpha$  représente la projection du gap normal sur la vitesse de déplacement de la tangente. Le premier terme de  $A_{\alpha \beta}$  multiplié par  $\dot{u}_\beta$  représente la projection sur la tangente  $\vec{t}_\alpha$  de la vitesse glissement. Le second terme de  $A_{\alpha \beta}$  multiplié par  $\dot{u}_\beta$  représente une correction de cette vitesse de glissement, provenant du fait que le gap n'est pas nul et que la surface possède une certaine courbure (dans le cas contraire  $\vec{t}_{\alpha, \beta}$  serait nul). Nous sommes maintenant en mesure d'établir l'expression des forces de contact.

#### 5.1.4 Expression classique des forces de contact

Soit  $t_N(\vec{x}_0^{\xi_1}, t) : \mathbb{S}_0^1 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  le scalaire représentant la pression (et pas la force) de contact (l'indice  $N$  se réfère à la direction normale), pour le nœud esclave  $\xi_1$ . Afin de traiter la composante normale du contact, nous allons rappeler les conditions de Kuhn-Tucker que doivent vérifier  $g$  et  $t_N$

$$\begin{aligned} g(\vec{x}_0, t) &\geq 0 \\ t_N(\vec{x}_0, t) &\geq 0 \\ t_N(\vec{x}_0, t)g(\vec{x}_0, t) &= 0 \end{aligned} \quad (5.39)$$

Ces conditions expriment que les deux corps ne peuvent s'interpénétrer ( $g(\vec{x}, t) \geq 0$ ), et qu'il n'y a une pression de contact que si le gap est nul.

Pour traiter la composante tangentielle du contact, définissons la base  $\vec{t}_{d_1}, \vec{t}_{d_2}$  duale de  $\vec{t}_1, \vec{t}_2$  [95]

$$\vec{t}_{d_\alpha} \equiv [\vec{t}_\alpha \cdot \vec{t}_\beta]^{-1} \vec{t}_\beta \quad (5.40)$$

où par abus de notation,  $[\vec{t}_\alpha \cdot \vec{t}_\beta]^{-1}$  représente la composante  $\alpha\beta$  de l'inverse de la matrice 2 fois 2 dont la composante  $\alpha\beta$  est obtenue par  $\vec{t}_\alpha \cdot \vec{t}_\beta$ . Il vient alors

$$\vec{t}_{d_\alpha} \cdot \vec{t}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad (5.41)$$

Soit  $\vec{t}_{T_1}(\vec{x}_0, t) : \mathbb{S}_0^1 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  le scalaire représentant la contribution de frottement (force surfacique) selon  $\vec{t}_{d_1}$  et  $\vec{t}_{T_2}(\vec{x}_0, t) : \mathbb{S}_0^1 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  le scalaire représentant la contribution de frottement selon  $\vec{t}_{d_2}$ . La force de frottement  $\vec{T}$  s'exprime alors comme étant (l'indice  $T$  se réfère à la direction tangentielle)

$$\vec{T} \equiv t_{T_\alpha} \vec{t}_{d_\alpha} \quad (5.42)$$

avec l'amplitude de la force surfacique (exprimée en  $N/m^2$ ) tangentielle donnée par

$$\begin{aligned} \|\vec{T}\| &= \sqrt{t_{T_\alpha} [\vec{t}_{d_\alpha}]_i t_{T_\beta} [\vec{t}_{d_\beta}]_i} \\ &= \sqrt{t_{T_\alpha} [\vec{t}_\alpha \cdot \vec{t}_\beta]^{-1} [\vec{t}_\beta]_i t_{T_\beta} [\vec{t}_{d_\beta}]_i} \\ &= \sqrt{t_{T_\alpha} t_{T_\beta} [\vec{t}_\alpha \cdot \vec{t}_\beta]^{-1} \delta_{\alpha\beta}} \\ &= \sqrt{t_{T_\alpha} t_{T_\beta} [\vec{t}_\alpha \cdot \vec{t}_\beta]^{-1}} \end{aligned} \quad (5.43)$$

Une grandeur qui va permettre d'évaluer l'énergie dissipée par friction est la vitesse de glissement  $\vec{v}_T$  (exprimée en  $m/s$ ). Elle est définie dans la base des tangentes par

$$\vec{v}_T \equiv \dot{u}_\beta \vec{t}_\beta \quad (5.44)$$

Dès lors, en définissant  $\gamma_c$  la norme de la vitesse de glissement, et  $\Phi_c \equiv \|\vec{T}\| - \mu_c t_N$  le critère de Coulomb ( $\mu_c$  étant le coefficient de frottement), les conditions relatives au frottement de Coulomb s'écrivent

$$\begin{aligned} \vec{v}_T &= -\gamma_c \frac{\vec{T}}{\|\vec{T}\|} \\ \Phi_c &\equiv \|\vec{T}\| - \mu_c t_N \leq 0 \\ \gamma_c &\geq 0 \\ \gamma_c \Phi_c &= 0 \end{aligned} \quad (5.45)$$

Ces relations expriment que pour le cas où le contact est collant, il n'y a pas de glissement ( $\gamma_c = 0$ ,  $\vec{v}_T = 0$ ) et le critère est négatif ( $\Phi_c < 0$ ). Par contre, dans le cas d'un glissement ( $\gamma_c > 0$ ), le critère doit être nul ( $\Phi_c = 0$ ) et la vitesse de glissement doit être dans la direction opposée à la force de frottement. Remarquons que pour l'étude d'un autre type de frottement que celui de Coulomb, les relations (5.45) restent valables à l'exception du critère  $\Phi_c$  qui prendrait une autre expression.

En procédant comme à la section (2.1.3), nous allons exprimer la variation virtuelle de l'énergie de contact au temps  $t$  ( $W_{cont}$ ), afin d'exprimer  $\vec{F}_{cont}^{\xi_1}$  la force de contact au nœud esclave  $\xi_1$  du corps 1 et  $\vec{F}_{cont}^{\xi_2}$  la force de contact au nœud maître  $\xi_2$  du corps 2. Pour ce faire, nous allons partir du principe des travaux virtuels (2.10), que nous avons adapté pour l'interaction de deux corps (5.20). De cette équation nous déduisons  $\delta W_{cont}$  le travail virtuel des forces de contact

$$\delta W_{cont} \equiv \sum_{i=1,2} \int_{\mathbb{S}_T^i} \left\{ \vec{T}_{S^i} \cdot \delta \vec{x} \right\} d\mathbb{S}^i \quad (5.46)$$

avec  $\vec{T}_{S^i}$  la traction surfacique du corps  $i$ . Dans le cas où il y a contact, mais où les corps ne s'interpénètrent pas (c'est-à-dire  $g = 0$ ), les relations (5.16)

$$\mathbb{S}_T^1(t) = \mathbb{S}_T^2(t) \quad \text{et} \quad \vec{T}_{S^1}(\vec{x}_0, t) = -\vec{T}_{S^2}(\vec{x}_0, t) \quad \forall \vec{x}_0 \in \mathbb{S}_T^1 \quad (5.47)$$

sont vérifiées. De plus, nous venons de voir que la traction surfacique pouvait être exprimée en fonction d'une pression normale  $t_N$  et d'une force surfacique tangentielle  $\vec{T}$ . La relation (5.46) se réécrit donc

$$\begin{aligned} \delta W_{cont} &= \int_{\mathbb{S}^1(t)} \left\{ \vec{T}_{S^1}(t) \cdot [\delta \vec{x}^1 - \varphi(\vec{x}_0, t) \delta \vec{x}^2] \right\} d\mathbb{S}^1(t) \\ &= \int_{\mathbb{S}^1(t)} \left\{ [t_N \vec{n} + \vec{T}] \cdot [\delta \vec{x}^1 - \varphi(\vec{x}_0, t) \delta \vec{x}^2] \right\} d\mathbb{S}^1(t) \end{aligned} \quad (5.48)$$

En procédant comme pour obtenir (5.34), nous avons

$$\delta g(\vec{x}_0, t) = [\delta \vec{x}^1 - \varphi(\vec{x}_0, t) \delta \vec{x}^2] \cdot \vec{n}(\vec{x}_0, t) \quad (5.49)$$

En considérant les conditions (5.39) et en procédant comme pour obtenir (5.38), il vient

$$[\delta \vec{x}^1 - \varphi \delta \vec{x}^2] \cdot \vec{t}_\alpha = [\vec{t}_\beta \cdot \vec{t}_\alpha] \dot{u}_\beta \quad (5.50)$$

En utilisant (5.40), (5.42), (5.49) et (5.50), la relation (5.48) devient

$$\begin{aligned} \delta W_{cont} &= \int_{\mathbb{S}^1(t)} \left\{ t_N \cdot \delta g + t_{T_\alpha} \vec{t}_{d_\alpha} \cdot [\delta \vec{x}^1 - \varphi(\vec{x}_0, t) \delta \vec{x}^2] \right\} d\mathbb{S}^1(t) \\ &= \int_{\mathbb{S}^1(t)} \left\{ t_N \cdot \delta g + t_{T_\alpha} [\vec{t}_\alpha \cdot \vec{t}_\beta]^{-1} \vec{t}_\beta \cdot [\delta \vec{x}^1 - \varphi(\vec{x}_0, t) \delta \vec{x}^2] \right\} d\mathbb{S}^1(t) \end{aligned} \quad (5.51)$$

qui se réécrit finalement

$$\delta W_{cont} = \int_{\mathbb{S}^1(t)} \{t_N \delta g + t_{T_\alpha} \delta u_\alpha\} d\mathbb{S}^1(t) \quad (5.52)$$

Remarquons que dans le cas du glissement, la puissance de dissipation (liée au terme en  $t_{T_\alpha} \delta u_\alpha$  de la précédente relation) s'exprime alors grâce à (5.41), (5.42), (5.44) et (5.45)

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_{frot} &= - \int_{\mathbb{S}^1(t)} \{t_{T_\alpha} \dot{u}_\alpha\} d\mathbb{S}^1(t) = - \int_{\mathbb{S}^1(t)} \{t_{T_\alpha} \delta_{\alpha\beta} \dot{u}_\beta\} d\mathbb{S}^1(t) \\ &= - \int_{\mathbb{S}^1(t)} \{t_{T_\alpha} \vec{t}_{d_\alpha} \vec{t}_\beta \dot{u}_\beta\} d\mathbb{S}^1(t) = - \int_{\mathbb{S}^1(t)} \{\vec{T} \cdot \vec{v}_T\} d\mathbb{S}^1(t) \end{aligned} \quad (5.53)$$

où le signe négatif est introduit pour avoir une puissance positive. Cette dernière relation, indépendante du modèle de Coulomb, se réécrit, dans le cas particulier du modèle de Coulomb grâce à la relation (5.45)

$$\dot{\Delta}_{frot} = \int_{\mathbb{S}^1(t)} \{\mu_c t_N \gamma_c\} d\mathbb{S}^1(t) > 0 \quad (5.54)$$

Par souci d'allégement des équations, et par abus de notation, nous pouvons nous affranchir de l'intégrale sur la surface en redéfinissant les pressions et forces surfaciques par des forces

$$\begin{aligned} t_N &\leftarrow \int_{\mathbb{S}^1(t)} \{t_N\} d\mathbb{S}^1(t) \\ t_{T_\alpha} &\leftarrow \int_{\mathbb{S}^1(t)} \{t_{T_\alpha}\} d\mathbb{S}^1(t) \\ \vec{T} &\leftarrow \int_{\mathbb{S}^1(t)} \{\vec{T}\} d\mathbb{S}^1(t) \end{aligned} \quad (5.55)$$

Pour la méthode de la pénalité, ce moyen de procéder revient à introduire la surface dans le coefficient de pénalité. Deux possibilités s'offrent alors à nous : soit utiliser la même pénalité pour tous les nœuds esclaves, soit utiliser une pénalité qui dépend de la surface associée au nœud esclave considéré. Comme nous avons des maillages relativement réguliers, nous choisissons la première méthode.

Procédons maintenant en considérant que les corps s'interpénètrent. Cette fois-ci le gap ne peut donc plus être supposé comme étant nul. Occupons-nous d'un seul nœud esclave  $\xi_1$  et d'une surface maître définie par les nœuds  $\xi_2$ . La force appliquée sur le nœud esclave s'écrit  $\vec{F}_{cont}^{\xi_1}$  et la force appliquée sur un nœud maître s'écrit  $\vec{F}_{cont}^{\xi_2}$ . Soit

un champ cinématiquement admissible de déplacement  $\delta\vec{x}^\xi$ . La variation de l'énergie de contact au temps  $t^n$ , s'écrit alors

$$\delta W_{cont}^n = \left[ \vec{F}_{cont}^n \right]^{\xi_1} \cdot [\delta\vec{x}^n]^{\xi_1} + \left[ \vec{F}_{cont}^n \right]^{\xi_2} \cdot [\delta\vec{x}^n]^{\xi_2} \quad (5.56)$$

Discretisons alors spatialement la relation (5.52) en utilisant les relations (5.34) et (5.38), il vient en tenant compte de la surface dans  $t_N$  et  $t_{T_\alpha}$

$$\begin{aligned} \delta W_{cont}^n &= t_N \vec{n} \cdot \left[ [\delta\vec{x}^n]^{\xi_1} - \varphi^{\xi_2} \left( [\vec{x}^n]^{\xi_1} \right) [\delta\vec{x}^n]^{\xi_2} \right] + \\ &\quad t_{T_\alpha} A_{\beta\alpha}^{-1} \left[ [\delta\vec{x}^n]^{\xi_1} - \varphi^{\xi_2} \left( [\vec{x}^n]^{\xi_1} \right) [\delta\vec{x}^n]^{\xi_2} \right] \cdot \vec{t}_\beta + \\ &\quad t_{T_\alpha} A_{\beta\alpha}^{-1} g \vec{n} \cdot D_\beta^{\xi_2} \left( [\vec{x}^n]^{\xi_1} \right) [\delta\vec{x}^n]^{\xi_2} \end{aligned} \quad (5.57)$$

Finalement en comparant (5.56) et (5.57), il vient du fait que les  $\delta\vec{x}$  sont arbitraires

$$\begin{aligned} \left[ \vec{F}_{cont}^n \right]^{\xi_1} &= t_N \vec{n} \left( [x^n]^{\xi_1} \right) + t_{T_\alpha} A_{\beta\alpha}^{-1} \vec{t}_\beta \left( [x^n]^{\xi_1} \right) \\ \left[ \vec{F}_{cont}^n \right]^{\xi_2} &= -t_N \varphi^{\xi_2} \left( [x^n]^{\xi_1} \right) \vec{n} \left( [x^n]^{\xi_1} \right) - t_{T_\alpha} A_{\beta\alpha}^{-1} \varphi^{\xi_2} \left( [x^n]^{\xi_1} \right) \vec{t}_\beta \left( [x^n]^{\xi_1} \right) \\ &\quad - t_{T_\alpha} A_{\beta\alpha}^{-1} \left( [\vec{x}^n]^{\xi_1} \right) g \left( [\vec{x}^n]^{\xi_1} \right) \vec{n} \left( [\vec{x}^n]^{\xi_1} \right) D_\beta^{\xi_2} \left( [\vec{x}^n]^{\xi_1} \right) \end{aligned} \quad (5.58)$$

avec

$$A_{\alpha\beta} \left( [\vec{x}^n]^{\xi_1} \right) = \left[ \vec{t}_\beta \left( [\vec{x}^n]^{\xi_1} \right) \cdot \vec{t}_\alpha \left( [\vec{x}^n]^{\xi_1} \right) - g \left( [\vec{x}^n]^{\xi_1} \right) \vec{n} \left( [\vec{x}^n]^{\xi_1} \right) \cdot \vec{t}_{\alpha,\beta} \left( [\vec{x}^n]^{\xi_1} \right) \right] \quad (5.59)$$

L'expression (5.58), qui va permettre de vérifier la conservation de l'énergie et du moment angulaire (grâce aux termes en  $g\vec{n}$ ), a été établie pour la première fois par Armero et Petöcz [3,4]. Nous allons maintenant adapter cette formulation des forces de contact pour avoir un schéma d'intégration conservatif. Avant cela allons réécrire les conditions de conservation que doivent vérifier les forces de contact.

## 5.2 Les lois de conservation adaptées au contact

Même si les forces de contact sont comptabilisées dans les forces externes agissant sur le corps 1 et sur le corps 2, le système formé par les deux corps étant isolé, les relations de conservation établies à la section 3.1.2 restent valables à condition de sommer les contributions provenant des deux corps. Une autre manière plus rigoureuse de procéder est de partir du principe quasi-variationnel en considérant deux corps, et d'en déduire les lois de conservation (*c.f.* section 5.1.1), ce qui fait apparaître naturellement la contribution simultanée des deux corps. Nous considérons également  $\vec{F}_{cont/diss}$  les forces de dissipation et  $\vec{G}_{cont/diss}$  les vitesses de dissipation afin de pouvoir généraliser les expressions à l'algorithme EDMC.

### 5.2.1 Conservation du moment linéaire

Les relations (3.7) et (3.40) deviennent respectivement (avec  $B \in [1, 2]$  l'indice d'un corps et  $\xi_B$  le nœud numéro  $\xi$  du corps  $B$ )

$$\sum_B \sum_{\xi_B} \left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_B} = 0 \quad \text{action-réaction} \quad (5.60)$$

et

$$\sum_B \sum_{\xi_B} \left[ \vec{F}_{cont/diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_B} = 0 \quad \text{action-réaction} \quad (5.61)$$

### 5.2.2 Conservation du moment angulaire

Les relations (3.13), (3.44) et (3.45) deviennent quant à elles respectivement

$$\sum_B \left[ \frac{\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n}{2} \right]^{\xi_B} \wedge \left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_B} = 0 \quad (5.62)$$

et les forces dissipatives doivent vérifier

$$\sum_B \left[ \frac{\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n}{2} \right]^{\xi_B} \wedge \left[ \vec{F}_{cont/diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_B} = 0 \quad (5.63)$$

Les vitesses de dissipation, indépendantes des forces de dissipation, doivent quant à elles vérifier

$$\sum_B M^{\xi_B \mu_B} \left[ \vec{G}_{cont/diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_B} \wedge \left[ \frac{\dot{\vec{x}}^{n+1} + \dot{\vec{x}}^n}{2} \right]^{\mu_B} = 0 \quad (5.64)$$

Dans cette dernière relation, les vitesses de dissipation gardent leur expression précédente (4.80), ce qui permet de vérifier directement cette équation.

### 5.2.3 Conservation de l'énergie

Soit  $W_{cont}$  l'énergie accumulée lors d'une pénétration d'un corps dans l'autre et  $\Delta_{frot}$  l'énergie dissipée par le frottement. Dans le cas idéal où les corps ne s'interpénétreraient pas durant l'interaction,  $W_{cont}$  doit être nul pour tout temps  $t$ . Néanmoins, Armero et Petöcz [3, 4] ont proposé de laisser les corps s'interpénétrer (ce qui est cohérent avec l'algorithme de la pénalité), provoquant ainsi une accumulation d'énergie et d'imposer la condition  $W_{cont} = 0$  seulement quand les corps perdent le contact. Dès lors, les relations (3.19) et (3.51) deviennent respectivement

$$\sum_B \left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_B} \cdot \left[ \vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n \right]^{\xi_B} = W_{cont}^{n+1} - W_{cont}^n - \underbrace{\Delta_{frot}}_{>0} \quad (5.65)$$

alors que les forces et les vitesses dissipatives doivent vérifier (en considérant des forces externes et non internes, ce qui explique les signes négatifs)

$$\begin{aligned} \sum_B -M^{\xi_B \mu_B} \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} - \dot{\vec{x}}^n \right]^{\mu_B} \cdot \left[ \vec{G}_{cont/diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_B} + \left[ \vec{F}_{cont/diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_B} \cdot \left[ \vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n \right]^{\xi_B} \\ = -\Delta_{num} \end{aligned} \quad (5.66)$$

Dans cette dernière relation, les vitesses de dissipation gardent leur expression précédente (4.80), ce qui permet de retirer leur influence ( $\Delta_K$ ) de l'équation (5.66)

$$\sum_B \left[ \vec{F}_{cont/diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_B} \cdot \left[ \vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n \right]^{\xi_B} = \underbrace{-\Delta_{num} + \Delta_K}_{=-\Delta_W < 0} \quad (5.67)$$

Il faut maintenant adapter la formulation (5.58) afin qu'elle vérifie ces lois de conservation. Dans un premier temps nous nous occupons des forces normales, avant de considérer les forces tangentielles.

## 5.3 Expression énergétiquement consistante des forces normales de contact

Nous allons reprendre dans cette section la formulation proposée par Petöcz et Armero [3]. Nous vérifierons ensuite les équations de conservation.

### 5.3.1 Discrétisation temporelle de la composante normale

Définissons d'abord la configuration  $n + \frac{1}{2}$  obtenue pour les positions nodales interpolées entre les temps  $t^n$  et  $t^{n+1}$  (c.f. relations ci-dessous). Les relations (5.13) et (5.14) deviennent donc

$$\begin{aligned}
 \bar{x}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{\bar{x}^n + \bar{x}^{n+1}}{2} \\
 \bar{y}(\bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) &= \varphi^{\xi_2}(u^{n+\frac{1}{2}}) \left[ \bar{x}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_2} \text{ avec } u^{n+\frac{1}{2}} \text{ qui minimise} \\
 &\quad \left\| \varphi^{\xi_2}(u^{n+\frac{1}{2}}) \left[ \bar{x}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_2} - \left[ \bar{x}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_1} \right\| \\
 g(\bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) &= \theta \left\| \bar{y}(\bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) - \bar{x}^{n+\frac{1}{2}} \right\| \\
 \bar{n}(\bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) &= \frac{\bar{x}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{y}(\bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})}{g(\bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})}
 \end{aligned} \tag{5.68}$$

avec  $\theta = 1$  si les deux corps ne s'interpénètrent pas et  $\theta = -1$  si les corps s'interpénètrent. Cela revient à projeter sur les surfaces en jeu pour des positions nodales intermédiaires.

L'originalité de la méthode proposée par Petöcz et Armero [3] est la définition d'un gap dynamique  $g_d$ , qui se définit comme l'intégration par différence finie, intégration au second ordre, de la relation (5.34). Il vient alors

$$\begin{aligned}
 g_d^{n+1} &\equiv g_d^n + \bar{n}(\bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \cdot [\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n]^{\xi_1} - \\
 &\quad \varphi^{\xi_2}(u^{n+\frac{1}{2}}) \bar{n}(\bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \cdot [\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n]^{\xi_2}
 \end{aligned} \tag{5.69}$$

Ce qui revient à utiliser les coordonnées  $u$  de la projection au temps  $t^{n+\frac{1}{2}}$ , pour évaluer cette projection aux temps  $t^n$  et  $t^{n+1}$ . Soient  $cont^n$  un indicateur du contact dans la configuration  $n$  et  $g^n$  le gap obtenu par la relation (5.13) lors de la projection dans la configuration  $n$ . Dès lors, la méthode pour calculer et initialiser le  $g_d$  est reprise à la Figure 5.3. Il faut remarquer que le gap dynamique est initialisé au gap réel avant le contact, et qu'une configuration de contact est toujours considérée (car  $cont^n$  est vrai) au moment où le gap réel redevient positif, pourvu que le gap dynamique reste négatif ou nul. C'est cette particularité qui va permettre au système de restaurer l'énergie

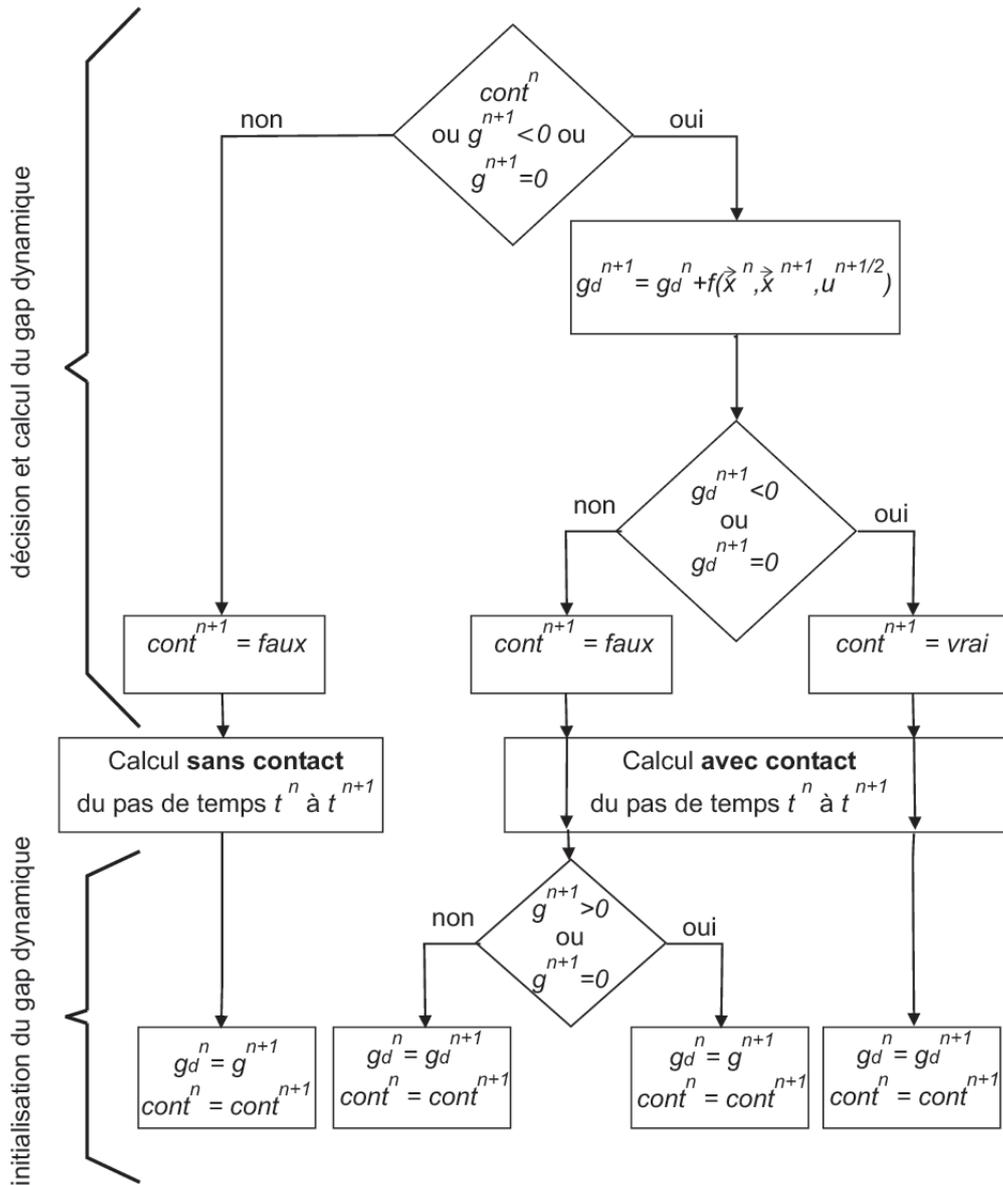


Figure 5.3: Décision et initialisation de la force normale.

accumulée par le contact. Supposons que le contact soit traité par la méthode de la pénalité  $k_N$ , le potentiel de régulation de la pénalité vaut par exemple

$$\begin{aligned}
 U(g) &= \frac{1}{2}k_N g^2 \text{ si } g \leq 0 \\
 &= 0 \text{ si } g > 0
 \end{aligned}
 \tag{5.70}$$

Dès lors, la relation (5.39) est approximée par (le signe négatif permettant d'obtenir une pression positive)

$$\begin{aligned}
t_N(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) &= -\frac{U(g_d^{n+1})-U(g_d^n)}{g_d^{n+1}-g_d^n} && \text{si } g_d^{n+1} \neq g_d^n \\
&= -\frac{\partial U}{\partial g} \left( \frac{g_d^{n+1}+g_d^n}{2} \right) && \text{si } g_d^{n+1} = g_d^n
\end{aligned} \tag{5.71}$$

et  $\left[ \vec{F}_{cont} \right]_N$ , la composante normale de la force de contact (5.58), se discrétise temporellement en

$$\begin{aligned}
\left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]_N^{\xi_1} &= t_N(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \vec{n}(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \\
\left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]_N^{\xi_2} &= -t_N(x^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \varphi^{\xi_2}(u^{n+\frac{1}{2}}) \vec{n}(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})
\end{aligned} \tag{5.72}$$

Des forces de dissipation au premier ordre peuvent également être introduites via

$$\begin{aligned}
\left[ F_{cont/diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_1} &= -\frac{\chi U(g_d^{n+1}-g_d^n) \vec{n}(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})}{g_d^{n+1}-g_d^n} && \text{si } cont^n \text{ et } cont^{n+1} \text{ vrais} \\
&= 0 && \text{sinon} \\
\left[ \vec{F}_{cont/diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_2} &= \frac{\chi U(g_d^{n+1}-g_d^n) \varphi^{\xi_2}(u^{n+\frac{1}{2}}) \vec{n}(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})}{g_d^{n+1}-g_d^n} && \text{si } cont^n \text{ et } cont^{n+1} \text{ vrais} \\
&= 0 && \text{sinon}
\end{aligned} \tag{5.73}$$

Nous pouvons maintenant nous assurer que les lois de conservation (5.60), (5.61), (5.62), (5.63), (5.65) et (5.67) sont vérifiées. Rappelons que l'expression des vitesses de dissipation n'ayant pas changé par rapport au cas hypoélastique, la relation (5.64) est vérifiée (section 4.4.2). De plus, dans la relation (5.67), il n'y a que le potentiel de dissipation interne et pas le potentiel de dissipation cinétique qui intervient. Remarquons qu'une expression de la matrice de raideur a été établie par Armero et Petöcz [3], nous en reprenons les grandes lignes dans l'appendice D.1.

### 5.3.2 Conservation du moment linéaire

Soient les forces conservatives (5.72) et dissipatives (5.73). Il vient donc, en utilisant les propriétés des fonctions de forme, respectivement

$$\begin{aligned}
\left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]_N^{\xi_1} + \sum_{\xi_2} \left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]_N^{\xi_2} &= t_N(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \vec{n}(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \underbrace{\left[ 1 - \sum_{\xi_2} \varphi^{\xi_2}(u^{n+\frac{1}{2}}) \right]}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.74}$$

et

$$\begin{aligned} \left[ \vec{F}_{cont/diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_1} + \sum_{\xi_2} \left[ \vec{F}_{cont/diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_2} &= -\chi \frac{U(g_d^{n+1} - g_d^n)}{g_d^{n+1} - g_d^n} \vec{n}(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \\ &\underbrace{\left[ 1 - \sum_{\xi_2} \varphi^{\xi_2}(u^{n+\frac{1}{2}}) \right]}_{=0} = 0 \end{aligned} \quad (5.75)$$

qui vérifient respectivement (5.60) et (5.61).

### 5.3.3 Conservation du moment angulaire

A nouveau, nous regardons ce qui se passe pour les forces conservatives (5.72) et dissipatives (5.73). Il vient alors en utilisant les relations (5.68)

$$\begin{aligned} \sum_B \left[ \frac{\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n}{2} \right]^{\xi_B} \wedge \left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]_N^{\xi_B} &= -t_N(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \vec{n}(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \wedge \\ &\underbrace{\left\{ \left[ \frac{\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n}{2} \right]^{\xi_1} - \varphi^{\xi_2}(u^{n+\frac{1}{2}}) \left[ \frac{\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n}{2} \right]^{\xi_2} \right\}}_{=g(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \vec{n}(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})} = 0 \end{aligned} \quad (5.76)$$

et

$$\begin{aligned} \sum_B \left[ \frac{\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n}{2} \right]^{\xi_B} \wedge \left[ \vec{F}_{cont/diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_B} &= \chi \frac{U(g_d^{n+1} - g_d^n)}{g_d^{n+1} - g_d^n} \vec{n}(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \wedge \\ &\underbrace{\left[ \frac{\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n}{2} \right]^{\xi_1} - \varphi^{\xi_2}(u^{n+\frac{1}{2}}) \left[ \frac{\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n}{2} \right]^{\xi_2}}_{=g(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \vec{n}(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})} = 0 \end{aligned} \quad (5.77)$$

qui vérifient respectivement (5.62) et (5.63).

### 5.3.4 Conservation de l'énergie

Nous reprenons ici la méthode proposée par Armero et Petöcz [3]. Soit un cycle défini par une prise de contact entre la configuration 1 et la configuration 2, un contact persistant entre les configurations 2 et  $n' \geq 2$ , et par une perte du contact entre les configurations  $n'$  et  $n' + 1$ . Pour la composante normale de la force conservative, sur ce cycle de contact, le travail  $W_{cont}$  des forces de contact est négatif (c'est-à-dire que

l'énergie du système est en partie stockée dans la pénétration) durant le contact persistant et est nul après la perte de contact, ce qui vérifiera la partie normale de la relation (5.65). Nous avons d'abord en toute généralité, et grâce à la relation (5.69)

$$\begin{aligned}
W_{cont}^{n+1} - W_{cont}^n &= \left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]_N^{\xi_1} \cdot [\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n]^{\xi_1} + \left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]_N^{\xi_2} \cdot [\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n]^{\xi_2} \\
&= t_N(\bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \\
&\quad \vec{n}(\bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \cdot \left\{ [\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n]^{\xi_1} - \varphi^{\xi_2}(u^{n+\frac{1}{2}}) [\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n]^{\xi_2} \right\} \\
&= t_N(\bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) [g_d^{n+1} - g_d^n] \tag{5.78}
\end{aligned}$$

Grâce à la relation (5.71), cette dernière équation devient

$$W_{cont}^{n+1} - W_{cont}^n = - [U(g_d^{n+1}) - U(g_d^n)] \tag{5.79}$$

Etudions d'abord la prise de contact du cycle. En vertu de la Figure 5.3 et de la relation (5.69), nous avons

$$\begin{aligned}
g_d^1 &= g^1 > 0 \\
cont^1 &= faux \\
W_{cont}^1 &= -U(g^1) = 0 \\
g_d^2 &= g^1 + \vec{n}(\bar{x}^{\xi_1}, t_{\frac{3}{2}}) \cdot \left\{ [\bar{x}^2 - \bar{x}^1]^{\xi_1} - \varphi^{\xi_2}(u^{\frac{3}{2}}) [\bar{x}^2 - \bar{x}^1]^{\xi_2} \right\} \leq 0 \\
cont^2 &= vrai \tag{5.80}
\end{aligned}$$

Le travail des forces de contact peut alors être évalué par la relation (5.79)

$$W_{cont}^2 = \underbrace{W_{cont}^1}_{=0} - U(g_d^2) + \underbrace{U(g_d^1)}_{=0} = -U(g_d^2) < 0 \tag{5.81}$$

Considérons maintenant les pas (s'il y en a) où le contact est persistant ( $n \in [2, n']$ ). En initialisant le processus récursif initialisé par la relation (5.80) et la relation (5.81), il vient en utilisant la Figure 5.3 et la relation (5.69)

$$\begin{aligned}
cont^{n-1} &= vrai \\
W_{cont}^{n-1} &= -U(g_d^{n-1}) \geq 0 \\
g_d^n &= g_d^{n-1} + \vec{n}(\bar{x}^{\xi_1}, t^{n-\frac{1}{2}}) \cdot \left\{ [\bar{x}^n - \bar{x}^{n-1}]^{\xi_1} - \varphi^{\xi_2}(u^{n-\frac{1}{2}}) [\bar{x}^n - \bar{x}^{n-1}]^{\xi_2} \right\} \leq 0 \\
cont^n &= vrai \tag{5.82}
\end{aligned}$$

Grâce à la relation (5.79), il vient

$$W_{cont}^n = \underbrace{W_{cont}^{n-1} + U(g_d^{n-1})}_{=0} - U(g_d^n) = -U(g_d^n) < 0 \tag{5.83}$$

Enfin, considérons le pas de temps où le contact est perdu. Nous avons

$$\begin{aligned}
cont^{n'} &= \text{vrai} \\
W_{cont}^{n'} &= -U(g_d^{n'}) \geq 0 \\
g_d^{n'+1} &= g_d^{n'} + \vec{n}(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n'+\frac{1}{2}}) \cdot \left\{ [\vec{x}^{n'+1} - \vec{x}^{n'}]^{\xi_1} - \varphi^{\xi_2}(u^{n'+\frac{1}{2}}) [\vec{x}^{n'+1} - \vec{x}^{n'}]^{\xi_2} \right\} > 0 \\
cont^{n'+1} &= \text{faux}
\end{aligned} \tag{5.84}$$

Le travail des forces de contact peut alors être exprimé grâce à la relation (5.79) et à la relation (5.70)

$$W_{cont}^{n'+1} = \underbrace{W_{cont}^{n'} + U(g_d^{n'})}_{=0} - U(g_d^{n'+1}) = -U(g_d^{n'+1}) = 0 \tag{5.85}$$

Cette dernière relation ( $W_{cont}^{n'+1} = 0$ ) est obtenue seulement parce que le contact est toujours considéré (car  $cont$  est vrai) malgré le fait que  $g_d^{n'+1} > 0$  et que  $U = 0$  (mais pas la force) pour un gap positif. Il faut remarquer, que lors de la perte de contact, il faut réinitialiser le gap dynamique à une grandeur positive pour conduire à un potentiel nul (voir Figure 5.3).

Si nous regardons maintenant la composante normale de la force de dissipation (5.73), en se rappelant qu'elle est non-nulle uniquement si le contact est persistant, nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_B \left[ \vec{F}_{cont/diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_B} \cdot [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^{\xi_B} &= -\chi \frac{U(g_d^{n+1} - g_d^n)}{g_d^{n+1} - g_d^n} \vec{n}(x^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \cdot \\
&\quad \left\{ [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^{\xi_1} - \varphi^{\xi_2}(u^{n+\frac{1}{2}}) [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^{\xi_2} \right\} \\
&= -\chi U(g_d^{n+1} - g_d^n) \leq 0
\end{aligned} \tag{5.86}$$

Ce qui vérifie bien la relation (5.67), en identifiant  $\Delta_W$  à  $\chi U(g_d^{n+1} - g_d^n)$ .

Remarquons que le présent schéma ne dégénère jamais en un algorithme de la pénalité classique, sauf dans le cas trivial où le gap est toujours nul. En effet, il existe trois différences majeures par rapport à une formulation classique. La première est que le gap utilisé n'est pas une pénétration instantanée obtenue par une "simple" projection géométrique, mais un gap dynamique résultant d'une approximation au second ordre de l'intégration de la vitesse de variation du gap. La deuxième différence provient du fait que la force normale n'est pas directement proportionnelle au gap mais utilise un potentiel (qui lui même dépend du gap dynamique). Ces deux différences fondamentales assurent à l'algorithme énergétiquement consistant sa stabilité durant un contact persistant. En effet, avec l'algorithme énergétiquement consistant si deux corps s'interpénètrent, de l'énergie est stockée dans l'interaction de contact, alors qu'avec une formulation classique de la pénalité, de l'énergie peut être introduite dans le système, ce qui conduit à l'instabilité. La troisième différence entre les deux formulations est que l'algorithme énergétiquement consistant restitue l'énergie stockée dans l'interaction de contact au moment où celui-ci est perdu. Ce processus se fait en appliquant une force au pas de temps pour lequel le contact est perdu.

## 5.4 Expression énergétiquement consistante des forces de frottement de contact

Nous allons reprendre dans cette section la formulation proposée par Petöcz et Armero [4]. Nous vérifierons ensuite les équations de conservation.

### 5.4.1 Discrétisation temporelle de la composante tangente

Complétons les définitions (5.68) par leurs pendants tangentiels, soient

$$\begin{aligned}
 \vec{t}_\alpha(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) &= D_\alpha^{\xi_2} \left( u^{n+\frac{1}{2}} \right) \left[ \vec{x}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_2} \\
 \vec{t}_{\alpha,t}(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) &= D_\alpha^{\xi_2} \left( u^{n+\frac{1}{2}} \right) \left[ \dot{\vec{x}}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_2} \\
 \vec{t}_{\alpha,\beta} \left( u^{n+\frac{1}{2}} \right) &= \frac{\partial D_\alpha^{\xi_2}}{\partial u_\beta} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \left[ \vec{x}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_2} \\
 A_{\alpha\beta} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) &= \vec{t}_\beta \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \vec{t}_\alpha \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) - \\
 &\quad g \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \vec{n} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \vec{t}_{\alpha,\beta} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right)
 \end{aligned} \tag{5.87}$$

Comme nous avons défini un gap dynamique, nous définissons  $u_d$  les coordonnées dynamiques de la projection. Elles sont déterminées par la relation (5.38) discrétisée temporellement au second ordre (grâce aux relations (5.68) et (5.87)) en

$$\begin{aligned}
 A_{\alpha\beta} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \left[ u_d^{n+1} - u_d^n \right]_\beta = \\
 \vec{t}_\alpha \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \left\{ \left[ \vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n \right]^{\xi_1} - \varphi^{\xi_2} \left( u^{n+\frac{1}{2}} \right) \left[ \vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n \right]^{\xi_2} \right\} + \\
 g \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \vec{n} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \cdot D_\alpha^{\xi_2} \left( u^{n+\frac{1}{2}} \right) \left[ \vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n \right]^{\xi_2}
 \end{aligned} \tag{5.88}$$

Nous définissons les coordonnées dynamiques de collement par  $\bar{u}_d$ . Le point de collement défini par ces coordonnées, correspond à la position que le nœud esclave devrait avoir si aucun glissement n'intervient (contact parfaitement collant). Toutefois, pour une méthode de la pénalité, la projection du nœud peut s'écarter de ce point de collement, la force de friction étant alors proportionnelle à cet écart. Si cette force de friction ne vérifie pas le critère de Coulomb (5.45), le glissement intervient et la force de friction vaut  $\mu_c t_N$  et est dirigée vers le point de collement. Comme illustré à la Figure 5.4, les coordonnées dynamiques de collement sont initialisées aux coordonnées réelles (non-dynamiques) de l'entrée en contact (*i.e.*  $\bar{u}_d = u^{n+1}$  si  $cont^{n+1} = vrai$  et  $cont^n = faux$ ). Soient  $\vec{t}_\alpha$  et  $\vec{t}_{d\alpha}$  respectivement les tangentes et tangentes duales évaluées au point de collement. De la même manière, définissons la métrique  $\bar{m}_{\alpha\beta}$  comme étant

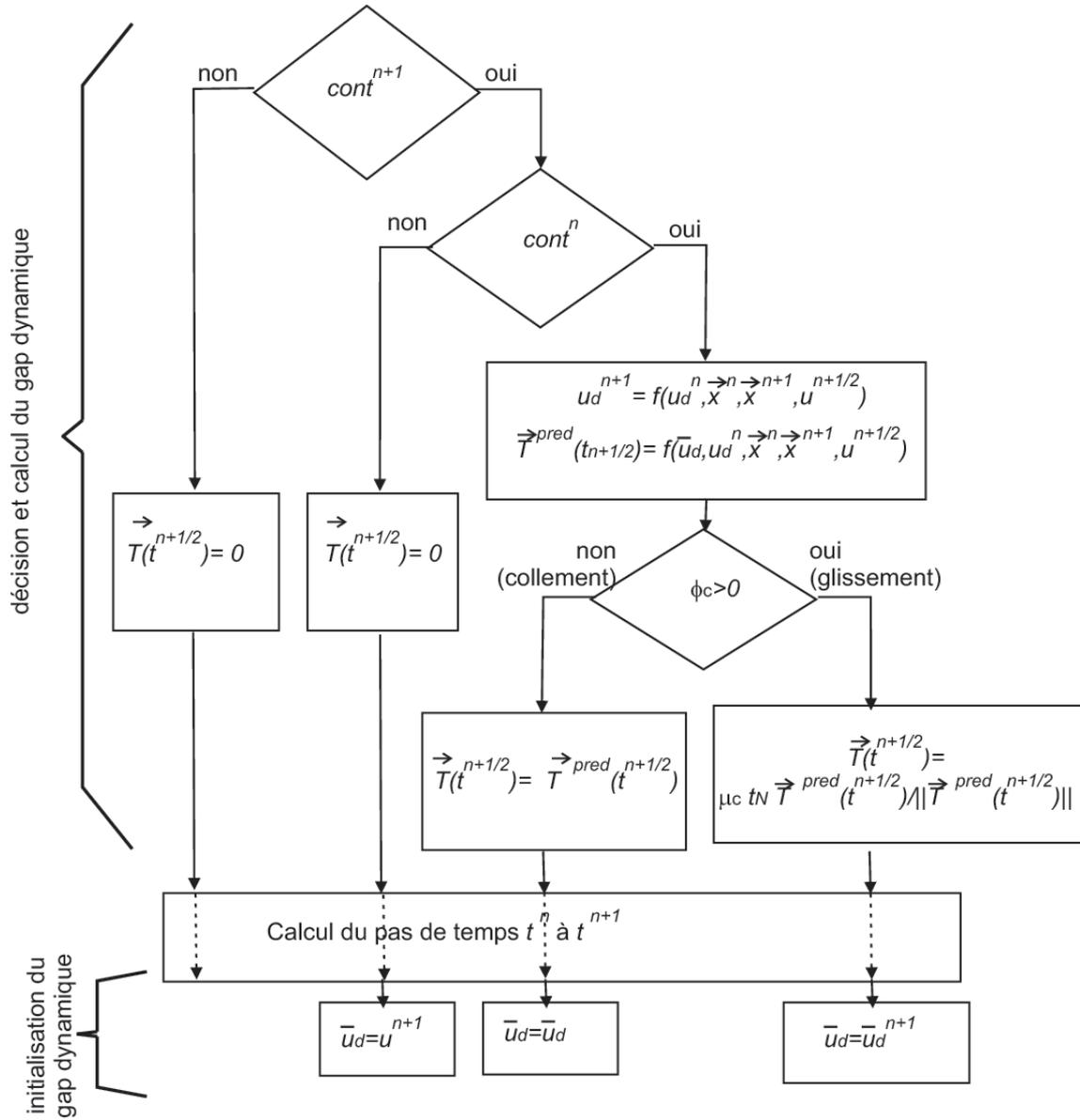


Figure 5.4: Décision et initialisation des forces tangentes.

$[\vec{t}_\alpha \cdot \vec{t}_\beta]$  évalué en  $\bar{u}_d$ . Comme précisé par Armero et Petöcz [4], cette métrique doit être constante, pour pouvoir additionner le travail des forces de frottement. Dès lors cette métrique est définie au temps de la prise de contact. Cette hypothèse n'introduit pas de nouvelle approximation étant donné que cela revient à modifier la pénalité lors du calcul des forces comme nous allons le voir. Dans un premier temps, en utilisant les définitions (5.87), un prédicteur collant  $t_{t_\alpha}^{pred}$  est calculé par [4] ( $k_T$  étant la pénalité tangentielle, le signe négatif permettant d'opposer la force au glissement)

$$t_{T_\alpha}^{pred} \left( x^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) = -k_T \bar{m}_{\alpha\beta} \left[ \frac{u_d^{n+1} + u_d^n}{2} - \bar{u}_d \right]_\beta \quad (5.89)$$

La force de frottement prédite devient alors

$$\vec{T}^{pred} \left( x^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) = k_T t_{T_\alpha}^{pred} \left( x^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \vec{t}_{d_\alpha} \left( x^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (5.90)$$

Dès lors, nous pouvons évaluer  $\|\vec{T}^{pred}\|$  par la formule (5.43)

$$\|\vec{T}^{pred} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right)\| = \sqrt{t_{T_\alpha}^{pred} \left( x^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) t_{T_\beta}^{pred} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \left[ \vec{t}_\alpha \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \vec{t}_\beta \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \right]^{-1}} \quad (5.91)$$

Et les composantes finales sont déduites par

$$\begin{aligned} t_{T_\alpha} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) &= t_{T_\alpha}^{pred} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \text{ si } \Phi_c \left( \vec{T}^{pred} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \right) \leq 0 \\ t_{T_\alpha} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) &= \frac{t_{T_\alpha}^{pred} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right)}{\|\vec{T}^{pred} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right)\|} \mu_c t_N \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &\text{ si } \Phi_c \left( \vec{T}^{pred} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \right) > 0 \end{aligned} \quad (5.92)$$

Dans le cas où le glissement intervient, nous avons les nouvelles coordonnées de collage données par  $\bar{u}_d = u_d^{n+1}$  (*c.f.* discussion section 5.4.4). Finalement, les forces de frottement sont obtenues par discrétisation temporelle de la relation (5.58)

$$\begin{aligned} \left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]_T^{\xi_1} &= t_{T_\alpha} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) A_{\beta\alpha}^{-1} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \vec{t}_\beta \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ \left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]_T^{\xi_2} &= -t_{T_\alpha} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) A_{\beta\alpha}^{-1} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \left\{ \varphi^{\xi_2} \left( u^{n+\frac{1}{2}} \right) \vec{t}_\beta \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + g \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \vec{n} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) D_\beta^{\xi_2} \left( u^{n+\frac{1}{2}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.93)$$

Avant de vérifier les lois de conservation, nous allons discrétiser la relation exprimant la dissipation d'énergie venant du frottement (5.54). Dans un premier temps, en utilisant les relations (5.44) et (5.45), nous avons

$$\dot{u}_\beta \vec{t}_\beta = -\gamma_c \frac{\vec{T}}{\|\vec{T}\|} = -\gamma_c \frac{t_{T_\alpha}^{pred} \vec{t}_{d_\alpha}}{\|\vec{T}^{pred}\|} \quad (5.94)$$

En multipliant cette relation par  $\frac{t_{T_\gamma}^{pred} \vec{t}_{d_\gamma}}{\|\vec{T}^{pred}\|}$ , et en utilisant (5.41), il vient

$$\begin{aligned} \dot{u}_\beta \vec{t}_\beta \cdot \frac{t_{T_\gamma}^{pred} \vec{t}_{d_\gamma}}{\|\vec{T}^{pred}\|} &= -\gamma_c \frac{t_{T_\alpha}^{pred} \vec{t}_{d_\alpha}}{\|\vec{T}^{pred}\|} \cdot \frac{t_{T_\gamma}^{pred} \vec{t}_{d_\gamma}}{\|\vec{T}^{pred}\|} \\ \frac{\dot{u}_\beta t_{T_\beta}^{pred}}{\|\vec{T}^{pred}\|} &= -\gamma_c \end{aligned} \quad (5.95)$$

Enfin, en utilisant ce résultat, la discrétisation temporelle de (5.54) devient

$$\Delta_{frot} = -\mu_c t_N \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \frac{\Delta \bar{u}_\beta t_{T_\beta}^{pred}}{\|\vec{T}^{pred}\|} \geq 0 \quad (5.96)$$

où  $\Delta \bar{u}$  est le glissement. Ce glissement étant opposé à la force de prédiction,  $\Delta_{frot}$  est positif. Nous n'introduisons pas de forces de dissipation numérique, car le frottement dissipe naturellement de l'énergie.

Nous pouvons maintenant nous assurer que les lois de conservation (5.60), (5.62) et (5.65) sont vérifiées. Rappelons que l'expression des vitesses de dissipation n'ayant pas changé par rapport au cas hypoélastique, la relation (5.64) est vérifiée (section 4.4.2). De plus, dans la relation (5.67), il n'y a que le potentiel de dissipation interne et pas le potentiel de dissipation cinétique qui intervient. Remarquons qu'une expression de la matrice de raideur a été établie par Armero et Petöcz [4], dont nous reprenons les grandes lignes en appendice D.1.

## 5.4.2 Conservation du moment linéaire

Soient les forces de frottement (5.93). Il vient donc, en utilisant les propriétés des fonctions de forme

$$\begin{aligned} \left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]_T^{\xi_1} + \sum_{\xi_2} \left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]_T^{\xi_2} &= t_{T_\alpha} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) A_{\beta\alpha}^{-1} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \left\{ \vec{t}_\beta \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\left. \left[ 1 - \sum_{\xi_2} \varphi^{\xi_2} \left( u^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] + g \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \vec{n} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \sum_{\xi_2} D_\beta^{\xi_2} \left( u^{n+\frac{1}{2}} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5.97)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$

qui vérifie bien (5.60).

### 5.4.3 Conservation du moment angulaire

Soient les forces de frottement (5.93). Il vient alors en utilisant les relations (5.68) et (5.87)

$$\begin{aligned}
\sum_B \left[ \frac{\bar{x}^{n+1} + \bar{x}^n}{2} \right]^{\xi_B} \wedge \left[ \bar{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]_T^{\xi_B} &= -t_{T_\alpha} \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) A_{\beta\alpha}^{-1} \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \left\{ \vec{t}_\beta \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \right. \\
&\wedge \underbrace{\left[ \left[ \frac{\bar{x}^{n+1} + \bar{x}^n}{2} \right]^{\xi_1} - \varphi^{\xi_2} (u^{n+\frac{1}{2}}) \left[ \frac{\bar{x}^{n+1} + \bar{x}^n}{2} \right]^{\xi_2} \right]}_{=g(\bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \vec{n}(\bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})} \\
&\left. \vec{n} \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \wedge \underbrace{D_\beta^{\xi_2} \left( u^{n+\frac{1}{2}} \right) \left[ \frac{\bar{x}^{n+1} + \bar{x}^n}{2} \right]^{\xi_2}}_{\vec{t}_\beta \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right)} \right\} = 0 \quad (5.98)
\end{aligned}$$

qui vérifie (5.62).

### 5.4.4 Conservation de l'énergie

Comme cela a été proposé par Armero et Petöcz [4], nous montrerons que la force de frottement collant est dissipative, avec une dissipation qui tend vers zéro uniquement pour une pénalité tangentielle tendant vers l'infini. De même, pour le contact glissant, la force de frottement surestime la dissipation de Coulomb, sauf pour une pénalité tangentielle tendant vers l'infini. Nous avons d'abord grâce aux relations (5.87), (5.88) et (5.93)

$$\begin{aligned}
\Delta_{frot} &= - \left[ \bar{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]_T^{\xi_1} \cdot [\bar{x}^{n+1} - \bar{x}]^{\xi_1} - \left[ \bar{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]_T^{\xi_2} \cdot [\bar{x}^{n+1} - \bar{x}]^{\xi_2} \\
&= -t_{T_\alpha} \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) A_{\beta\alpha}^{-1} \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad \left\{ \vec{t}_\beta \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \left\{ [\bar{x}^{n+1} - \bar{x}]^{\xi_1} - \varphi^{\xi_2} (u^{n+\frac{1}{2}}) [\bar{x}^{n+1} - \bar{x}]^{\xi_2} \right\} + \right. \\
&\quad \left. g \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \vec{n} \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) D_\beta^{\xi_2} \left( u^{n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \varphi^{\xi_2} (u^{n+\frac{1}{2}}) [\bar{x}^{n+1} - \bar{x}]^{\xi_2} \right\} \\
&= -t_{T_\alpha} \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) [u_d^{n+1} - u_d^n]_\alpha \quad (5.99)
\end{aligned}$$

Définissons  $\eta_d$  comme l'énergie adimensionnelle accumulée par le gap dynamique de glissement

$$\eta_d^n = \bar{m}_{\alpha\beta} [u_d^n - \bar{u}_d]_\alpha [u_d^n - \bar{u}_d]_\beta \quad (5.100)$$

Dès lors, grâce à (5.89) et (5.92), la relation (5.99) devient

$$\begin{aligned}
\Delta_{frot} &= \frac{k_T}{2} [\eta_d^{n+1} - \eta_d^n] \quad \text{si } \Phi_c(\vec{T}^{pred}) \leq 0 \text{ (collement)} \\
&= \frac{k_T \mu_c t_N}{2 \|\vec{T}^{pred}\|} [\eta_d^{n+1} - \eta_d^n] \quad \text{si } \Phi_c(\vec{T}^{pred}) > 0 \text{ (glissement)} \quad (5.101)
\end{aligned}$$

Supposons un cycle de  $n'$  pas sans glissement suivis d'un pas avec glissement. Grâce au fait que la métrique  $\bar{m}_{\alpha\beta}$  est constante<sup>3</sup>, nous avons (en notant que  $\eta_d^0 = 0$ )

$$\begin{aligned}\Delta_{frot} &= \sum_{n=0}^{n=n'-1} \frac{k_T}{2} [\eta_d^{n+1} - \eta_d^n] + \frac{k_T \mu_c t_N}{2 \|\vec{T}^{pred}\|} [\eta_d^{n'+1} - \eta_d^{n'}] \\ &= \frac{k_T}{2} \eta_d^{n'} \left[ 1 - \frac{\mu_c t_N}{\|\vec{T}^{pred}\|} \right] + \frac{k_T \mu_c t_N}{2 \|\vec{T}^{pred}\|} \eta_d^{n'+1} > 0\end{aligned}\quad (5.102)$$

A ce stade, nous avons prouvé que l'algorithme n'introduisait pas d'énergie dans le système, puisque le frottement dissipe bien de l'énergie. Puisqu'il y a eu glissement, il reste à déterminer le nouveau point de collement. Pour ce faire, nous allons utiliser l'expression (5.96) qui est l'expression discrétisée (temporellement) de l'énergie dissipée par frottement. Si le nouveau point de collement  $\bar{u}_d$  est noté  $\bar{u}_d^{n'+1}$ , alors cette relation (5.96) devient grâce à (5.89) et (5.92)

$$\Delta_{frot} = \mu_c t_N \left( \bar{x}_d^{\xi_1}, t^{n'+\frac{1}{2}} \right) k_T \frac{[\bar{u}_d^{n'+1} - \bar{u}_d]_{\beta} \bar{m}_{\alpha\beta} \left[ \frac{u_d^{n'+1} + u_d^{n'}}{2} - \bar{u}_d \right]_{\alpha}}{\|\vec{T}^{pred}\|} \quad (5.103)$$

Dans le cas idéal où  $u_d^{n'}$  est égal à  $\bar{u}_d$  (pénalité tangentielle infinie), le nouveau point de collement devient  $\bar{u}_d^{n'+1} = u_d^{n'+1}$ , car alors la relation (5.102) se réécrit

$$\begin{aligned}\Delta_{frot} &= \frac{k_T \mu_c t_N}{2 \|\vec{T}^{pred}\|} \eta_d^{n'+1} = \frac{k_T \mu_c t_N}{2 \|\vec{T}^{pred}\|} \bar{m}_{\alpha\beta} [\bar{u}_d^{n'+1} - \bar{u}_d]_{\alpha} [\bar{u}_d^{n'+1} - \bar{u}_d]_{\beta} \\ &= \frac{k_T \mu_c t_N}{\|\vec{T}^{pred}\|} \bar{m}_{\alpha\beta} [\bar{u}_d^{n'+1} - \bar{u}_d]_{\alpha} \left[ \frac{\bar{u}_d^{n'+1} + \bar{u}_d}{2} - \bar{u}_d \right]_{\beta}\end{aligned}\quad (5.104)$$

ce qui correspond bien à (5.103) quand  $u_d^{n'}$  est égal à  $\bar{u}_d$ . Dès lors, nous prendrons toujours le nouveau point de collement  $\bar{u}_d^{n'+1} = u_d^{n'+1}$  même si  $u_d^{n'}$  est différent de  $\bar{u}_d$ . Cette approximation se justifie par le fait que l'énergie perdue  $\left( \frac{k_T}{2} \eta_d^{n'} \left[ 1 - \frac{\mu_c t_N}{\|\vec{T}^{pred}\|} \right] \right)$  est bien positive, ce qui conduit l'algorithme à rester stable. De plus cette perte d'énergie est du même ordre que l'énergie perdue lors d'un cycle de contact où le contact est perdu avant qu'il n'y ait eu glissement. En effet dans ce cas, la relation (5.102) devient

$$\Delta_{frot} = \sum_{n=0}^{n=n'-1} \frac{k_T}{2} [\eta_d^{n+1} - \eta_d^n] = \frac{k_T}{2} \eta_d^{n'} > 0 \quad (5.105)$$

ce qui correspond à une perte d'énergie.

<sup>3</sup>Comme les corps sont en toute généralité déformables, cette métrique n'est constante que parce qu'elle est évaluée au moment de la prise de contact (*c.f.* section 5.4.1). Cela n'introduit pas d'erreur, puisque le fait d'avoir une métrique qui ne varie pas correspond à modifier la pénalité au cours du temps avec une métrique qui varie.

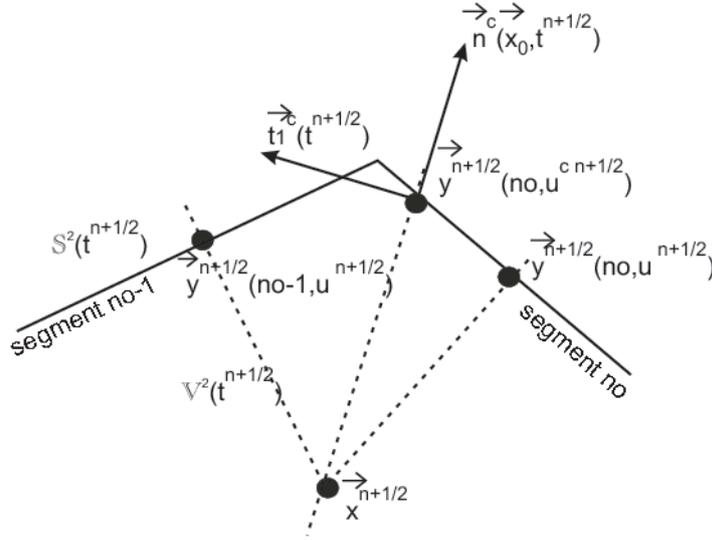


Figure 5.5: Projection sur une surface à normale non continue (en 2 dimensions).

## 5.5 Implémentation pratique des forces de contact

Dans les précédentes sections, nous avons exposé la théorie de la gestion du contact qui conduit à une intégration temporelle énergétiquement consistante. Cependant, il est nécessaire de pouvoir appliquer cette théorie dans le cadre de l'interaction entre deux corps déformables maillés en 2 ou en 3 dimensions. Pour de tels corps, leur surface limite ne possède pas une normale continue. Dans cette section, nous allons exposer la méthode originale que nous avons développée pour évaluer les relations (5.72), (5.73) et (5.93) pour une surface définie par un ensemble d'entités à normales discontinues. Dans le cas où le contact se fait entre deux corps déformables, les surfaces sont du premier degré puisque nous avons un maillage utilisant des fonctions de forme au premier degré. Les surfaces sont donc définies par des segments de droites en 2 dimensions et des surfaces de Coons bilinéaires en 3 dimensions. Dans [3, 4], la description du contact n'était donnée que pour un segment de droite. Supposons une méthode qui fournit, dans la configuration intermédiaire  $n + \frac{1}{2}$ , une expression continue de la normale  $\vec{n}^c(\vec{x}_0^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})$  à la surface discontinue. Supposons également, que cette méthode fournisse les coordonnées, associées à cette normale (numéro  $no$  de l'entité sur laquelle le nœud se projette et abscisses curvilignes  $u^{cn+\frac{1}{2}}$  de cette entité), de la projection sur la surface. Par exemple, considérons le problème en 2 dimensions représenté à la Figure 5.5. Dans la configuration  $n + \frac{1}{2}$ , le point  $\vec{x}$  se projette orthogonalement sur les segments  $no$  et  $no+1$ , avec pour chaque segment des coordonnées  $u^{n+\frac{1}{2}}$ . Supposons avoir un algorithme permettant de déterminer une projection qui rende la normale continue au voisinage de l'intersection des deux segments. Cette projection est notée  $\vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no, u^{cn+\frac{1}{2}})$  et correspond à une normale  $\vec{n}^c(t^{n+\frac{1}{2}})$ . La notation  $\vec{y}^n(no, u^{cn+\frac{1}{2}})$  désigne alors la position,

dans la configuration  $n$ , du point de projection, lui-même calculé dans la configuration intermédiaire. Afin d'obtenir une normale continue, nous utilisons, par exemple, la méthode proposée par Graillet [58] qui est expliquée en appendice D.2. Remarquons que d'autres techniques ont été récemment proposées comme celle du "smoothing-gap" proposée par Belytschko *et al.* [14] ou encore comme la technique consistant à traiter un contact segment sur segment comme proposé par Puso and Laursen [127]. Néanmoins, la méthode de Graillet s'est avérée robuste pour solutionner des problèmes faisant intervenir de nombreux contacts, et nous nous limiterons à cette technique dans le présent travail.

Un problème autre que la continuité de normale apparaît lors de l'étude de l'interaction entre deux corps maillés. Il s'agit du fait qu'il est difficile de définir un système de coordonnées curvilignes pour l'ensemble de la frontière du corps. En effet, si chaque entité  $no$  possède bien son propre système de coordonnées curvilignes, ce n'est pas le cas pour l'ensemble de ces entités. Il est possible d'en définir un, mais cela peut s'avérer difficile, principalement dans le cadre tridimensionnel. Nous avons dès lors choisi de réécrire les formules précédemment établies non plus en fonction des coordonnées curvilignes, mais en fonction des projections  $\vec{y}$  exprimées dans le repère global. Cette méthode possède l'avantage de conduire à une implémentation plus simple et plus efficace, en terme de coût de calcul, du traitement de la composante tangentielle de la force de contact.

Remarquons que nos développements sont valables dans le formalisme tridimensionnel, mais afin d'alléger les graphiques, ces derniers représentent toujours une situation bidimensionnelle. De plus, dans le cas où le contact se fait avec une matrice rigide, l'implémentation des forces développée ci-dessous reste valable telle quelle.

### 5.5.1 Force de contact normale

Les relations (5.68) deviennent

$$\begin{aligned}
 \vec{x}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{\vec{x}^n + \vec{x}^{n+1}}{2} \\
 g(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) &= \theta \left\| \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) - \vec{x}^{n+\frac{1}{2}} \right\| \\
 \vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) &= \frac{\vec{x}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no, u^{cn+\frac{1}{2}})}{g(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})}
 \end{aligned} \tag{5.106}$$

avec  $\theta = 1$  si les deux corps ne s'interpénètrent pas et  $\theta = -1$  si les corps s'interpénètrent. Remarquons que dans le cas où le gap tend vers zéro, la normale (toujours unitaire) est la normale (toujours définie) de l'entité à laquelle la projection (forcément unique puisque le gap est nul) appartient. Le gap dynamique  $g_d$ , défini par la relation (5.69) devient alors

$$g_d^{n+1} = g_d^n + \vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \cdot [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^{\xi_1} - \vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \cdot \left[ \vec{y}^{n+1}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) - \vec{y}^n(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) \right] \quad (5.107)$$

Finalement, grâce au gap dynamique, la pression de contact est évaluée par la relation (5.71) et les forces de contact normales (5.72), (5.73) sont directement obtenues pour le nœud esclave et pour l'entité maître  $no$

$$\begin{aligned} \left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]_N^{\xi_1} &= t_N(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \\ \left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]_N^{\xi_2} &= -t_N(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \varphi^{\xi_2}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) \vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (5.108)$$

Les forces de dissipation normales (5.73) deviennent

$$\begin{aligned} \left[ F_{cont/diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_1} &= -\chi \frac{U(g_d^{n+1} - g_d^n)}{g_d^{n+1} - g_d^n} \vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \text{ si } cont^n \text{ et } cont^{n+1} \\ &= 0 \text{ sinon} \\ \left[ F_{cont/diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_2} &= \chi \frac{U(g_d^{n+1} - g_d^n)}{g_d^{n+1} - g_d^n} \varphi^{\xi_2}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) \vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \\ &\quad \text{si } cont^n \text{ et } cont^{n+1} \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned} \quad (5.109)$$

### 5.5.2 Force de contact tangentielle

Le but de cette section est d'adapter la théorie développée à la section 5.4 dans le cadre où la normale est non continue, et en n'utilisant plus les coordonnées curvilignes de la surface maître, mais en utilisant les projections dans le repère global. Ce choix va permettre d'étudier le frottement lorsque la projection du nœud esclave passe d'une entité  $no$  à une autre, sans devoir définir un système de coordonnées curvilignes pour l'ensemble des entités maîtres.

Pour pouvoir trouver la force de frottement, en supposant que le point de collement et le point de contact actuel ne se trouvent pas nécessairement sur la même entité surfacique, nous allons créer un repère orthonormé ayant pour origine le point  $\vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no, u^{cn+\frac{1}{2}})$ . Soit le point de collement défini par les valeurs  $\bar{no}$ ,  $\bar{u}_d$ , respectivement le numéro de l'entité le supportant et ses abscisses réduites sur cette entité. Dès lors le repère orthonormé est créé à partir de la normale  $\vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})$ , et a pour tangentes

$$\begin{aligned}
\vec{t}_1^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) &= \vec{t}_1^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \wedge \vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \quad \text{avec} \\
\vec{t}_1^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) &= \frac{\vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \wedge \left[ \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(\bar{n}o, \bar{u}_d) - \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) \right]}{\| \vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \wedge \left[ \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(\bar{n}o, \bar{u}_d) - \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) \right] \|} \\
\vec{t}_2^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) &= \vec{t}_1^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \wedge \vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})
\end{aligned} \tag{5.110}$$

Dans cette expression,  $\vec{t}_1^c$  a été créé de manière à être dans le plan comprenant la normale, le point de collement et la projection actuelle. De plus, en supposant que le gap reste faible, la relation (5.59) se réduit en

$$A_{\alpha\beta}(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) = \delta_{\alpha\beta} \tag{5.111}$$

Il nous faut maintenant transformer la relation (5.88) qui donnait les nouvelles coordonnées curvilignes dynamiques à partir desquelles la force tangentielle était calculée. Le but est de ne plus obtenir ces coordonnées curvilignes dynamiques directement, mais d'obtenir la projection sur la surface maître qui y correspondra. Nous allons alors définir par  $\vec{x}$  un point, n'appartenant pas à la surface mais qui va permettre de déduire le nouveau numéro dynamique  $no_d^{n+1}$  de l'entité et ses nouvelles abscisses dynamiques  $u_d^{n+1}$ , à partir des entités dynamiques précédentes (*i.e.*  $no_d^n$  et  $u_d^n$ ). La projection (appelée projection dynamique) correspondant aux nouvelles abscisses dynamiques  $u_d^{n+1}$  de la nouvelle entité dynamique  $no_d^{n+1}$  est alors définie par

$$\vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no_d^{n+1}, u_d^{n+1}) = \min_{\vec{y} \in \mathbb{S}^2} \left\| \vec{y}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{x} \right\| \tag{5.112}$$

Nous allons maintenant expliquer comment obtenir  $\vec{x}$ . Par analogie avec la relation (5.88), nous définissons un incrément de gap dynamique tangentiel  $\Delta \vec{g}_{t_d}$  par

$$\Delta \vec{g}_{t_d} = [\vec{x}^{n+1}]^{\xi_1} - [\vec{x}^n]^{\xi_1} - \left[ \vec{y}^{n+1}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) - \vec{y}^n(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) \right] \tag{5.113}$$

Cet incrément de gap dynamique tangentiel, est alors cumulé au gap existant entre la projection dynamique précédente  $\vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no_d^n, u_d^n)$  et la projection du nœud esclave  $\vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no, u^{cn+\frac{1}{2}})$ , ce qui fournit le gap tangentiel dynamique actuel, qui vaut alors

$$\vec{g}_{t_d} = \left[ \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no_d^n, u_d^n) - \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) \right] + \Delta \vec{g}_{t_d} \tag{5.114}$$

Nous avons représenté ce gap dynamique tangentiel à la Figure 5.6.

Dès lors, en supposant que  $g$  reste faible, la relation (5.88) permet d'obtenir  $\vec{x}$  en projetant dans le plan tangent à la surface maître  $\mathbb{S}^2$  (Figure 5.6). Il vient donc

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) + \left[ \vec{t}_1^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \cdot \vec{g}_{t_d} \right] \vec{t}_1^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) + \\
&\quad \left[ \vec{t}_2^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \cdot \vec{g}_{t_d} \right] \vec{t}_2^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})
\end{aligned} \tag{5.115}$$

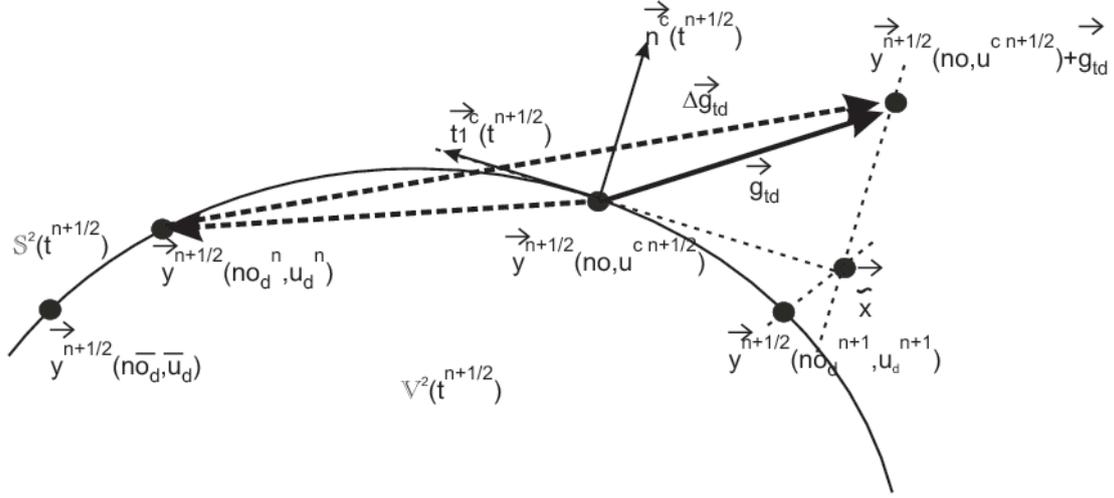


Figure 5.6: Construction pour trouver les coordonnées dynamiques en deux dimensions (calcul de la force de contact tangentielle).

Finalement, grâce à la relation (5.112), les nouvelles coordonnées dynamiques  $(no_d^{n+1}$  et  $u_d^{n+1})$  sont obtenues en projetant  $\vec{x}$  sur la surface dans la configuration  $n + \frac{1}{2}$  (Figure 5.6).

La démarche que nous avons suivie revient, dans le cas particulier où la surface est plane, à effectuer le changement de repère entre le repère définissant les coordonnées curvilignes de la surface et le repère orthonormé créé. En effet, notons  $\tilde{u}$  les coordonnées des points à partir du repère orthonormé  $n^c$ ,  $t_1^c$ ,  $t_2^c$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no_d^n, u_d^n) - \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) &= [\tilde{u}_d^n]_1 \vec{t}_1^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) + [\tilde{u}_d^n]_2 \vec{t}_2^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \\ \vec{x} - \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) &= [\tilde{u}_d^{n+1}]_1 \vec{t}_1^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) + [\tilde{u}_d^{n+1}]_2 \vec{t}_2^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (5.116)$$

et la relation (5.115) se réduit alors en

$$\begin{aligned} &[\tilde{u}_d^{n+1}]_\alpha - [\tilde{u}_d^n]_\alpha = \\ &\vec{t}_\alpha^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \cdot \left[ [\vec{x}^{n+1}]^{\xi_1} - [\vec{x}^n]^{\xi_1} - \vec{y}^{n+1}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) + \vec{y}^n(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) \right] \end{aligned} \quad (5.117)$$

qui correspond bien à la relation (5.88) sans aucune autre approximation que (5.111) et en supposant que  $g$  reste faible. Dans le cas général d'une surface courbe, le calcul des coordonnées dynamiques revient à définir des gaps tangentiels reliant les projections par le plus court chemin et non pas en suivant la surface. Etant donné que pour avoir une bonne discrétisation élément-fini, un élément linéaire ne peut pas représenter un arc de cercle de grande ouverture, l'approximation n'est pas plus pénalisante que celle qui consiste à discrétiser la surface.

Il reste maintenant à exprimer les forces tangentes en fonction des projections dynamiques  $\vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no_d^n, u_d^n)$  et  $\vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no_d^{n+1}, u_d^{n+1})$  obtenues. Redéfinissons  $\eta_d$  (5.100) à partir de la configuration initiale

$$\eta_d^n = [\vec{y}_0(no_d^n, u_d^n) - \vec{y}_0(\bar{n}o, \bar{u}_d)] \cdot [\vec{y}_0(no_d^n, u_d^n) - \vec{y}_0(\bar{n}o, \bar{u}_d)] \quad (5.118)$$

Cette définition, permet de définir une grandeur qui ne dépend pas de la déformation de la surface maître. Nous pouvons maintenant calculer les forces de contact. Le prédicteur collant (5.89) s'écrit

$$t_{T_\alpha}^{pred}(x^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) = -k_T r_c \left[ \frac{\vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no_d^n, u_d^n) + \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no_d^{n+1}, u_d^{n+1})}{2} - \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(\bar{n}o, \bar{u}_d) \right] \cdot \vec{t}_\alpha^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \quad (5.119)$$

avec  $r_c$  un facteur de mise à l'échelle. Ce facteur de mise à l'échelle tient le rôle de la métrique  $\bar{m}_{\alpha\beta}$  qui était prise constante à la section 5.4.4. Cette métrique était prise constante pour pouvoir simplifier les énergies mises en jeu dans chaque pas de contact collant (relation (5.102)). Dans notre simplification des équations, nous n'utilisons plus de métrique, mais nous devons toujours pouvoir effectuer cette simplification. Dès lors, nous mettons à l'échelle les forces de frottement par le facteur  $r_c$ . Physiquement, ce facteur, qui tient compte de la déformation de la surface maître, permet de ne pas augmenter la force artificiellement par un gonflement de la surface. Les détails permettant de calculer ce facteur de mise à l'échelle afin de vérifier que la dissipation des forces de frottement est bien énergétiquement consistante, sont explicités en appendice D.3. Nous reprenons ici l'expression finale

$$r_c = \frac{\eta_d^{n+1} - \eta_d^n}{\Delta^2 y(no_d^{n+1}, u_d^{n+1}) - \Delta^2 y(no_d^n, u_d^n)} \quad \text{si } no_d^{n+1}, u_d^{n+1} \neq no_d^n, u_d^n$$

$$= \frac{\eta_d^{n+1}}{\Delta^2 y(no_d^{n+1}, u_d^{n+1})} \quad \text{si } no_d^{n+1}, u_d^{n+1} = no_d^n, u_d^n \quad (5.120)$$

avec

$$\Delta^2 y(no_d^{n+1}, u_d^{n+1}) = \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \left[ \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no_d^{n+1}, u_d^{n+1}) - \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(\bar{n}o, \bar{u}_d) \right] \cdot \vec{t}_\alpha^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \right\}^2 \quad (5.121)$$

Comme la base duale correspond à la base initiale (repère orthonormé), la force de frottement prédite (5.90) devient alors

$$\vec{T}^{pred}(x^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) = k_T t_{T_\alpha}^{pred}(x^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \vec{t}_\alpha^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \quad (5.122)$$

et les composantes finales sont déduites par (5.92). Dans le cas où le glissement intervient, nous avons les nouvelles coordonnées de collement :  $\bar{u}_d = u_d^{n+1}$  et  $\bar{n}o_d = no_d^{n+1}$ .

Finalement, les forces de frottement sont obtenues par la relation (5.93) dans laquelle  $A_{\alpha\beta}$  est assimilé à  $\delta_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} \left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]_T^{\xi_1} &= t_{T_\alpha} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \vec{t}_\alpha^c \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ \left[ \vec{F}_{cont}^n \right]_T^{\xi_2} &= -t_{T_\alpha} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \varphi^{\xi_2} \left( no, u^{cn+\frac{1}{2}} \right) \vec{t}_\alpha^c \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) + \\ &\quad t_{T_\alpha} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) g \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \vec{n}^c \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) D_\alpha^{\xi_2} \left( no, u^{cn+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (5.123)$$

où  $D_\alpha^{\xi_2} \left( no, u^{cn+\frac{1}{2}} \right)$  doit-être calculé par rapport a la nouvelle base orthonormée créée, de manière à avoir

$$D_\alpha^{\xi_2} \left( no, u^{cn+\frac{1}{2}} \right) \left[ x^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_2} = \vec{t}_\alpha^c \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (5.124)$$

En pratique, comme ce terme est multiplié par le gap normal qui est supposé rester faible, nous pouvons le négliger.

Nous pouvons maintenant vérifier les principes de conservation en partant des nouvelles expressions des forces de contact. Cependant, comme la méthodologie reste la même qu'aux sections 5.3.2, 5.3.3, 5.3.4, 5.4.2, 5.4.3 et 5.4.4, nous reportons ces équations en appendice D.3.

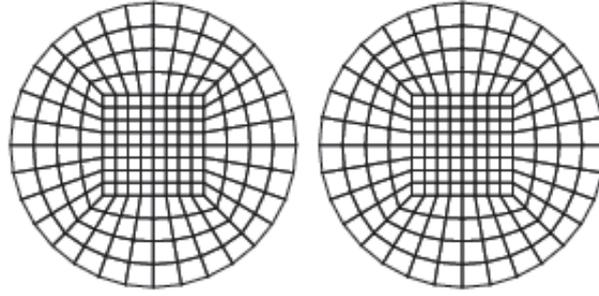


Figure 5.7: Maillage des cylindres.

## 5.6 Exemples numériques avec contact

Dans cette section, nous allons mettre en évidence, au travers d'exemples numériques, la nécessité d'utiliser le modèle développé au lieu du modèle classique de la pénalité utilisé avec les algorithmes traditionnels comme celui de Newmark. Remarquons, que l'algorithme énergétiquement consistant de l'interaction de contact utilise une formulation des forces calculée à partir d'une configuration intermédiaire. Il ne peut donc être appliqué qu'en combinaison avec l'algorithme EMCA ou EDMC (qui établit bien l'équilibre dans cette configuration intermédiaire) et pas avec l'algorithme de Newmark (qui établit l'équilibre dans la configuration finale).

Etant données les conclusions de la section 4.6, lors de l'utilisation du schéma énergétiquement consistant, nous utiliserons les termes correctifs  $\mathbf{C}^*$  et  $\mathbf{C}^{**}$  relatifs à la dissipation plastique. A nouveau, comme pour un matériau hypoélastique l'énergie interne n'est pas directement accessible, elle est calculée par le travail des forces internes. Pour le schéma conservatif, elle est calculée par la relation (4.70), alors que pour le schéma de Newmark, elle est calculée par la relation (2.79). Les forces de contact sont calculées par la relation (5.58) pour l'algorithme de Newmark, alors que pour les algorithmes conservatifs, les forces de contact sont obtenues par les relations (5.72), (5.73) et (5.93). Pour rappel, il existe trois différences fondamentales entre les deux modèles : le gap utilisé par la méthode énergétiquement consistante n'est pas une pénétration instantanée, mais un gap dynamique résultant d'une approximation au second ordre de l'intégration de la vitesse de variation du gap; la force normale n'est pas directement proportionnelle au gap mais utilise un potentiel; enfin, l'algorithme énergétiquement consistant restitue l'énergie stockée dans l'interaction de contact au moment où ce dernier est perdu.

### 5.6.1 Exemple 1 : Impact sans frottement de deux cylindres élasto-plastiques parallèles

Nous allons d'abord étudier un problème sans frottement afin de mettre en évidence une fois de plus les instabilités du schéma de Newmark, provenant du fait que l'énergie n'est pas conservée. Ce problème, traité ici avec un matériau hypoélastique, a été

Table 5.1: Propriétés des cylindres élasto-plastiques parallèles.

Propriété	Valeur
Rayon initial	$R = 1m$
Différence des coordonnées des centres (axe-x; axe-y)	$\vec{x} = (2.18m; 0m)$
Vitesse initiale du cylindre de gauche (axe-x; axe-y)	$\vec{\dot{x}} = (1m/s; -0.1m/s)$
Masse volumique	$\rho = 8.93kg/m^3$
Module de Young	$Y = 119.158N/m^2$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.375$
Limite élastique	$\Sigma_0 = 10N/m^2$
Paramètre d'écroutissage	$h = 0N/m^2$
Pénalité normale	$k_N = 10^4$

proposé par Meng et Laursen [102] avec un matériau hyperélastique. Il s'agit d'un cylindre, impactant avec une vitesse initiale un autre cylindre initialement au repos. Les deux cylindres sont identiques (propriétés reprises à la Table 5.1 et maillage en éléments-finis illustré à la Figure 5.7). Remarquons que les données correspondent à un faible module de Young car elles sont reprises des données adimensionnelles fournies par Meng et Laursen. L'origine du repère est située sur le point milieu du segment joignant les centres des cylindres. La simulation se produit en 4s et les différents pas de temps constants testés sont : 15ms, 7.5ms, 3.75ms et 1.875ms. Le contact sans frottement est traité avec une pénalité normale de  $10^4$  sauf pour la combinaison de l'algorithme de Newmark avec le pas de temps de 0.015s. Pour cette combinaison, une pénalité de  $10^4$  n'a pas permis à l'algorithme de converger (c'était déjà le cas pour le papier de Meng et Laursen [102]). Dès lors, une pénalité de  $10^3$  est utilisée dans cet unique cas. Nous allons comparer les résultats obtenus grâce :

- (i) à l'algorithme proposé (EMCA) en tenant compte des tenseurs de correction ( $\mathbf{C}^*$  et  $\mathbf{C}^{**}$ );
- (ii) à l'algorithme de Newmark [109] (avec les paramètres  $\beta = 0.25$  et  $\gamma = 0.5$ ).

La Figure 5.8 illustre les déformations plastiques équivalentes à la fin de la simulation ( $t = 4s$ ). Pour l'algorithme EMCA, les différences des résultats obtenus par les simulations utilisant des pas de temps de tailles différentes, sont inférieures à 5%. Ces différences s'expliquent par la gestion du contact à normale discontinue et par la possibilité qu'ont les corps de s'interpénétrer. Lorsque le schéma utilisé est celui de Newmark, les solutions obtenues sont radicalement différentes selon la taille du pas de temps. Pour une taille de pas de temps de  $\Delta t = 1.875ms$ , les différences sont minimales par rapport à l'algorithme EMCA. Par contre, lorsque la taille du pas de temps augmente, les différences obtenues sont supérieures à 100%. L'explication de ce phénomène est donnée à la Figure 5.9 qui représente le travail des forces de contact<sup>4</sup>. En effet, pour un pas de

<sup>4</sup>Pour rappel :  $W_{cont}^{n+1} = W_{cont}^n + \bar{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \cdot [\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n]$ .

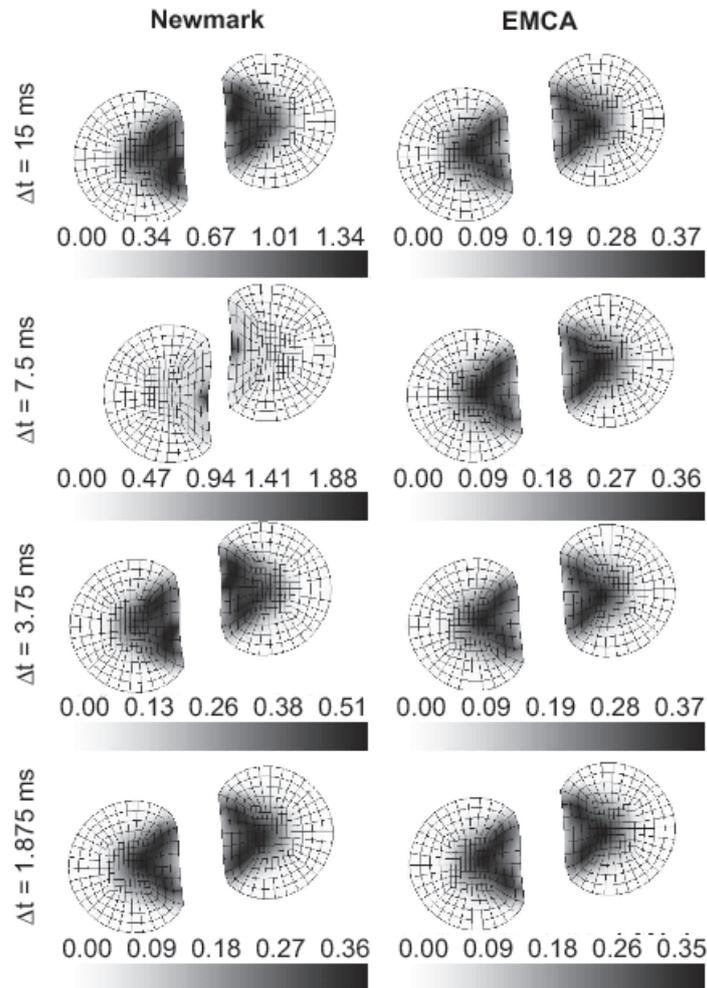


Figure 5.8: Déformation finale ( $t = 4s$ ) et déformation plastique équivalente pour les deux cylindres élasto-plastiques parallèles.

temps de  $1.875ms$  (Figure 5.9 (a)), les forces de contact du schéma de Newmark produisent un travail qui reste faible (1%) vis-à-vis des énergies en jeu (l'énergie cinétique de départ est de  $14J$ ). Par contre, pour un pas de temps de  $15ms$  (Figure 5.9 (b)), les forces de contact du schéma de Newmark produisent un travail important ( $\simeq 20\%$  de l'énergie cinétique initiale), résultant en une augmentation d'énergie du système qui tend à surestimer les déformations plastiques. Le schéma conservatif, lui, absorbe une partie de l'énergie durant la phase de contact, mais la restitue intégralement après la perte du contact (comme cela apparaît à la Figure 5.9, le travail final des forces de contact est nul), et ce pour toutes les tailles de pas de temps. Les Figures 5.10 (a) et (b) représentent l'énergie interne dissipée par plasticité. Comme pour l'étude des déformations plastiques, pour le schéma de Newmark, si le pas de temps est multiplié par un facteur 8, la solution obtenue est différente de plus de 100%. Pour la même

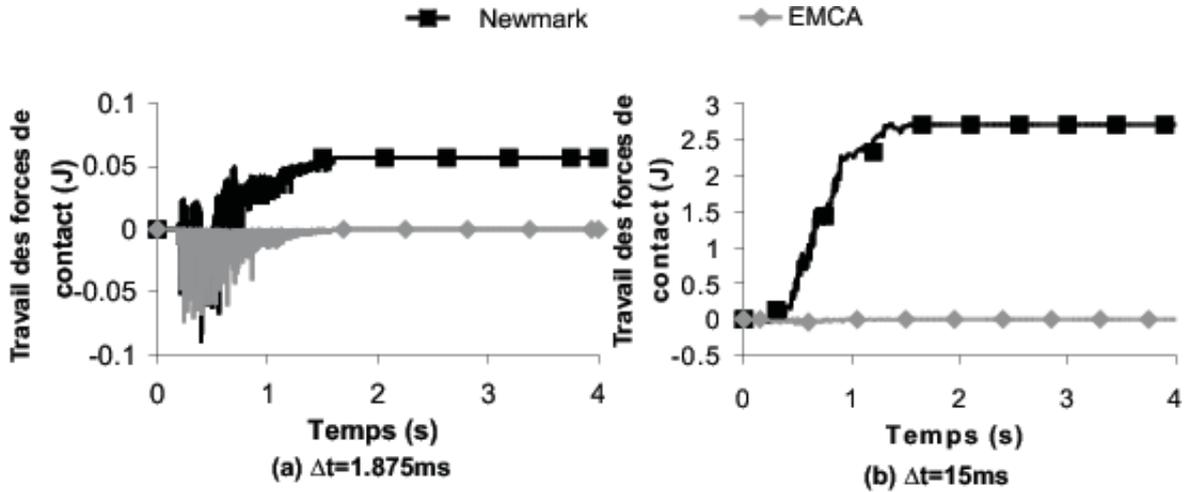


Figure 5.9: Evolution temporelle du travail des forces de contact pour les deux cylindres élasto-plastiques parallèles - (a)  $\Delta t = 1.875ms$  - (b)  $\Delta t = 15ms$ .

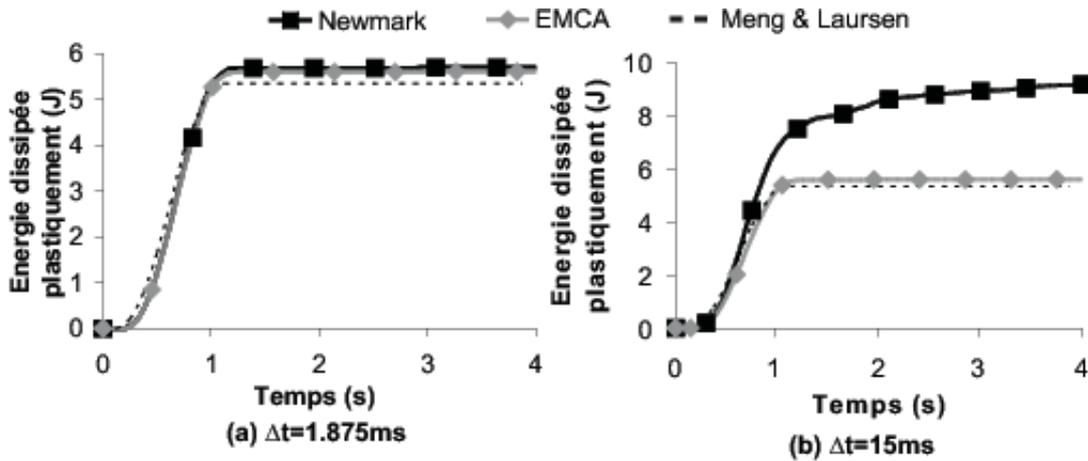


Figure 5.10: Evolution temporelle de la dissipation interne pour les deux cylindres élasto-plastiques parallèles - (a)  $\Delta t = 1.875ms$  - (b)  $\Delta t = 15ms$ .

augmentation de la taille du pas de temps, l'algorithme conservatif conduit à la même solution. Notre solution est similaire à 5% (Figures 5.10 (a)) près de la solution obtenue par Meng and Laursen [102]. Cette différence provient du choix de la loi constitutive (notre modèle hypoélastique utilise une limite élastique dépendant de la configuration courante, contrairement au modèle hyperélastique<sup>5</sup>). La Figure 5.11 représente l'énergie du système (addition de l'énergie cinétique et du travail des forces internes duquel est soustraite l'énergie de dissipation plastique) à la fin de la simulation. Nous voyons (Figure 5.11 (a)) que pour le schéma EMCA, contrairement à l'utilisation du schéma de Newmark, l'énergie reste quasi-constante. Par contre en analysant l'erreur (Figure

<sup>5</sup>c.f. remarque de la section 4.3.2

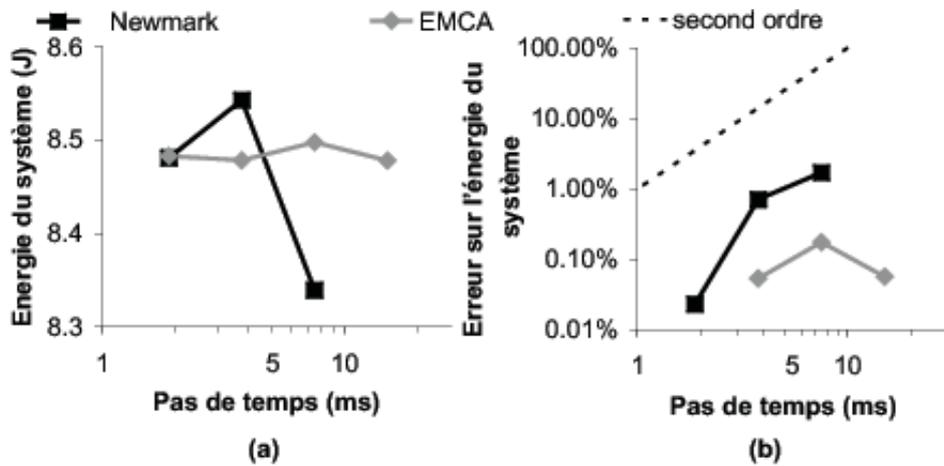


Figure 5.11: Energie finale (après 4s) du système (énergie cinétique ajoutée au travail des forces internes duquel est retirée l'énergie dissipée plastiquement) des deux cylindres élasto-plastiques parallèles - (a) énergie du système - (b) erreur sur l'énergie du système par rapport à la solution EMCA avec le plus petit pas de temps.

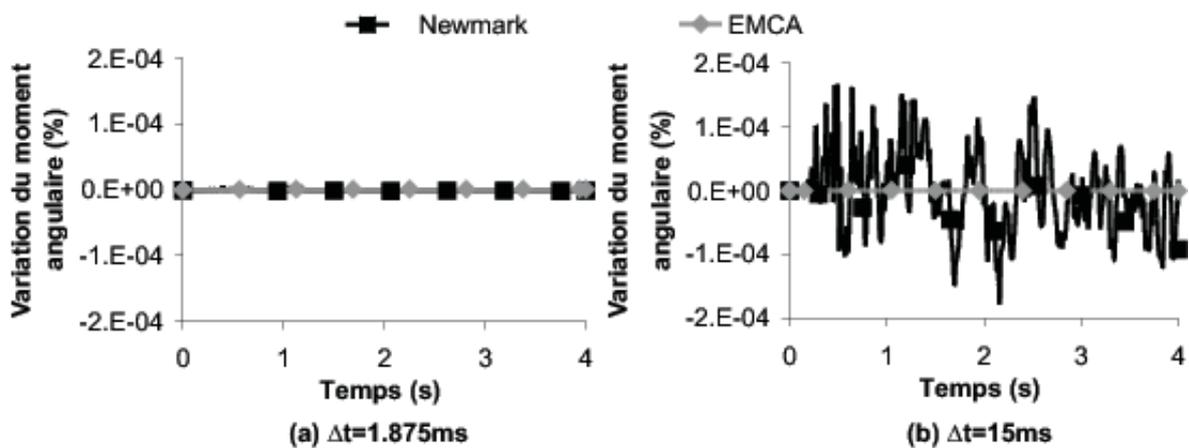


Figure 5.12: Evolution temporelle de la variation du moment angulaire pour les deux cylindres élasto-plastiques parallèles - (a)  $\Delta t = 1.875ms$  - (b)  $\Delta t = 15ms$ .

5.11 (b)), il apparaît que l'erreur n'est pas nécessairement croissante avec la taille du pas de temps. Cela provient de la gestion du contact, qui n'est pas géométriquement admissible. En effet, les pénétrations, et donc les déformées dépendent de la taille du pas de temps. Par exemple, le travail stocké durant le contact (Figure 5.15), et donc l'histoire des déformations, dépend du pas de temps. L'erreur est calculée en prenant comme référence la valeur du schéma conservatif obtenue pour le plus petit pas de temps. L'évolution temporelle de la variation du moment angulaire est représentée à la Figure 5.12. Seule la solution de Newmark présente des oscillations, bien qu'extrêmement faibles, pour un pas de temps de 15ms. Le nombre total d'itérations du schéma de

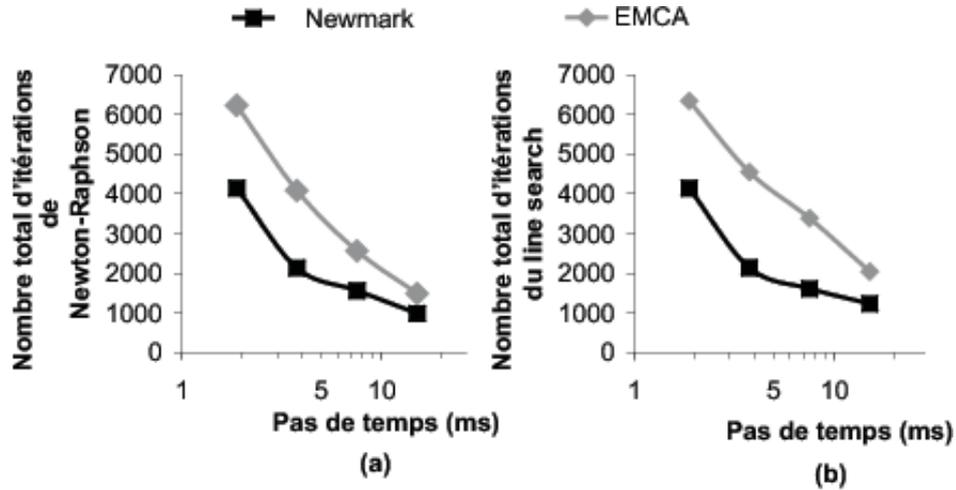


Figure 5.13: Nombre d'itérations pour les deux cylindres élasto-plastiques parallèles - (a) itérations de Newton-Raphson - (b) itérations du line search.

Table 5.2: Propriétés des cylindres élastiques.

Propriété	Valeur
Rayon initial	$R = 1m$
Différence des coordonnées des centres (axe-x; axe-y)	$\vec{x} = (3.6m; 0m)$
Vitesse initiale du cylindre de gauche (axe-x; axe-y)	$\vec{x} = (1m/s; -0.1m/s)$
Masse volumique	$\rho = 8.93kg/m^3$
Module de Young	$Y = 119.158N/m^2$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.375$
Coefficient de frottement	$\mu_c = 0.2$

Newton-Raphson, obtenu avec une tolérance de  $10^{-6}$  ((2.55) ou (B.6)), et le nombre d'itérations du "line search" utilisant une tolérance de  $10^{-3}$  ((2.54) ou (B.5)), sont reportés respectivement aux Figures 5.13 (a) et (b). L'algorithme de Newmark est moins onéreux en terme d'itérations mais conduit à des solutions erronées pour un pas de temps supérieur à  $1.875ms$ . Cette source d'erreur provient de la gestion du contact qui introduit de l'énergie dans le système, conduisant à son instabilité. A la section 7.4.2, nous étudierons ce même problème avec un algorithme explicite.

### 5.6.2 Exemple 2 : Impact avec frottement de deux cylindres élastiques parallèles

Nous reprenons l'exemple de la section 5.6.1, si ce n'est que, afin de faire apparaître l'influence du frottement, le matériau reste élastique afin que les seules dissipations d'énergie proviennent du contact. Nous reprenons les paramètres (propriétés reprises

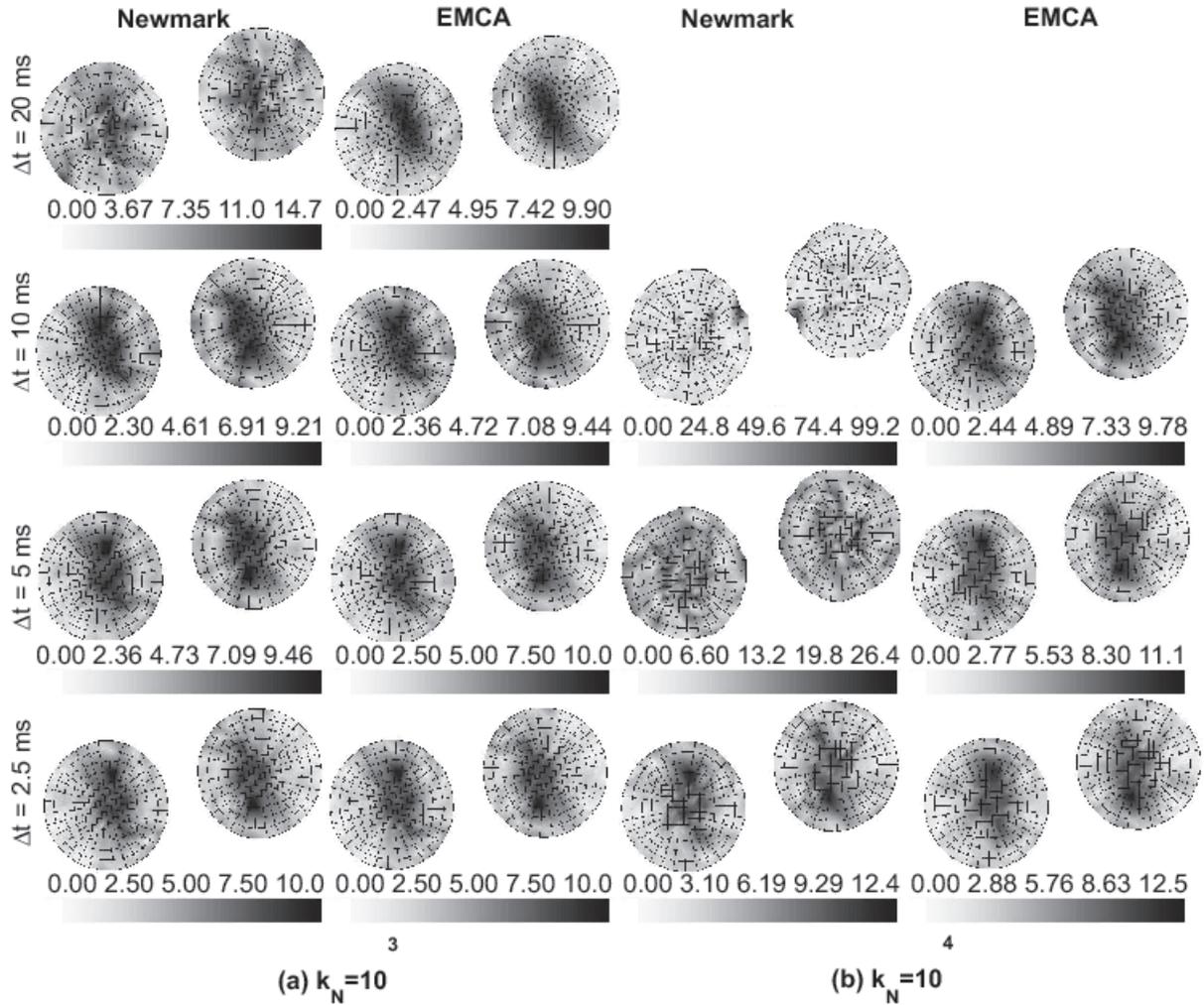


Figure 5.14: Déformation finale ( $t = 3.5s$ ) et contrainte équivalente de von Mises pour les deux cylindres élastiques parallèles - (a) pénalité normale  $10^3$  - (b) pénalité normale  $10^4$ .

à la Table 5.2) utilisés par Armero et Petöcz [4] qui ont proposé pour la première fois ce problème, en le traitant avec un modèle hyperélastique. La simulation se déroule en  $3.5s$  et les différents pas de temps constants testés sont :  $20ms$ ,  $10ms$ ,  $5ms$  et  $2.5ms$ . Nous comparons les résultats obtenus par les simulations suivantes :

- (i) l'algorithme de Newmark [109] ( $\beta = 0.25$  et  $\gamma = 0.5$ ), avec une pénalité normale  $k_N = 10^3$  et une pénalité tangentielle  $k_T = 10^2$ ;
- (ii) l'algorithme conservatif (EMCA), avec une pénalité normale  $k_N = 10^3$  et une pénalité tangentielle  $k_T = 10^2$ ;
- (iii) l'algorithme de Newmark [109] ( $\beta = 0.25$  et  $\gamma = 0.5$ ), avec une pénalité normale  $k_N = 10^4$  et une pénalité tangentielle  $k_T = 10^2$  (une pénalité  $k_T = 10^3$  ne

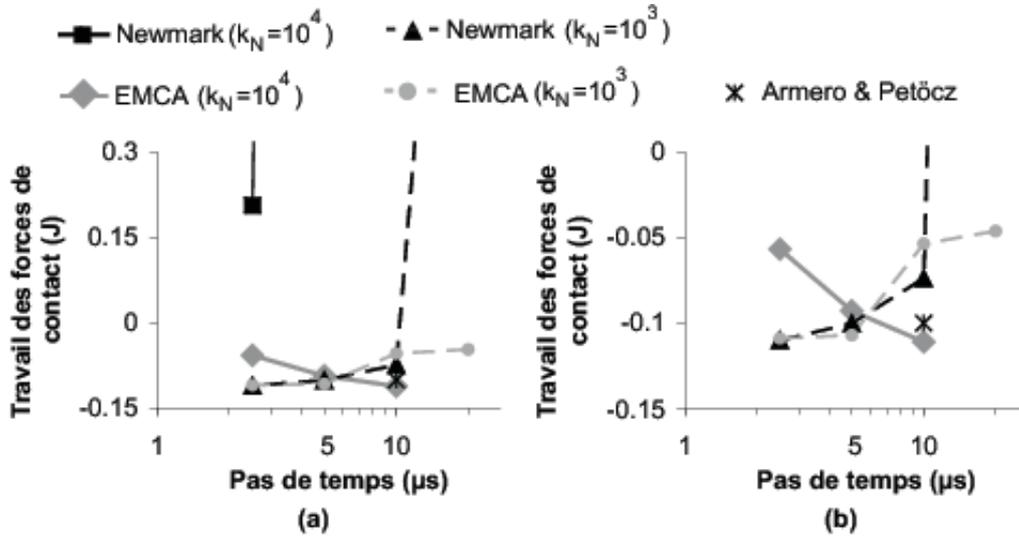


Figure 5.15: Travail des forces de contact après 3.5s pour les deux cylindres élastiques parallèles - (a) valeurs finales - (b) zoom sur les valeurs finales.

permettant pas de converger avec des pas de temps de  $10ms$ )<sup>6</sup>;

- (iv) l'algorithme conservatif (EMCA), avec une pénalité normale  $k_N = 10^4$  et une pénalité tangentielle  $k_T = 10^2$ .

Remarquons, que pour l'utilisation de la pénalité normale de  $10^4$ , les simulations avec un pas de temps de  $20ms$  n'ont pas abouti.

La Figure 5.14 illustre la contrainte équivalente de von Mises à la fin de la simulation ( $t = 3.5s$ ). Pour l'algorithme EMCA, les différences des résultats obtenus par les simulations utilisant des pas de temps de tailles différentes et des pénalités normales différentes, sont inférieures à 20%. Ces différences s'expliquent par la gestion du contact à normale discontinue, par le fait que le choix de la pénalité influence les résultats, mais aussi parce que les cylindres vibrent au cours du temps, ce qui modifie les contraintes élastiques avec l'erreur de phase. Lorsque le schéma utilisé est celui de Newmark, la simulation diverge quand la taille du pas de temps augmente (au delà de  $2.5ms$  pour une pénalité de  $10^4$  et au delà de  $10ms$  pour une pénalité de  $10^3$ ). L'analyse des Figures 5.15 (a) et (b) qui représentent le travail des forces de contact explique la divergence de l'algorithme de Newmark. L'utilisation de l'algorithme de Newmark avec une pénalité de  $10^4$  ne permet pas de simuler de la dissipation par frottement. En effet, les forces normales introduisent de l'énergie dans le système (voir discussion de la section 5.6.1). Pour une pénalité de  $10^3$ , l'algorithme dissipe bien de l'énergie tant que la taille du pas de temps reste inférieure à  $10ms$ . Dans le cas contraire, la gestion du contact introduit de l'énergie dans le système. L'utilisation de l'algorithme EMCA permet de garantir que

<sup>6</sup>Remarquons que nous ne vérifions plus la règle de bonne pratique  $k_T = \mu_c k_N$ , mais cette règle ne donne de toute manière aucune garantie sur la précision des résultats

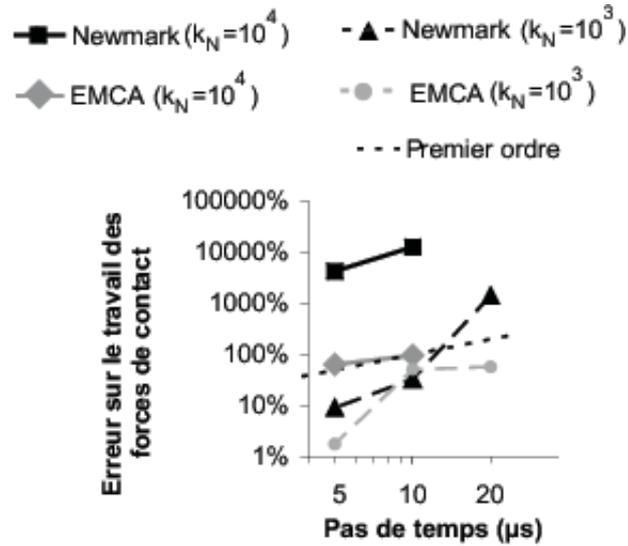


Figure 5.16: Erreur du travail des forces de contact (par rapport à la solution après 3.5s obtenue avec le même schéma et le plus petit pas de temps) pour les deux cylindres élastiques parallèles.

de l'énergie est bien dissipée par frottement pour toutes les pénalités et tous les pas de temps. Cependant, pour une pénalité de  $10^4$ , nous voyons que la dissipation par frottement diminue (en valeur absolue) lorsque le pas de temps diminue. Cela provient du fait que les oscillations (plus importantes quand le pas de temps diminue) provoquent des pertes temporaires de contact, et donc une absence de frottement. Par contre, lorsque la pénalité est plus faible, les oscillations ne provoquent pas la perte de contact et la dissipation augmente (en valeur absolue) quand la taille du pas diminue. La solution obtenue par Armero et Petöcz [4] ( $\Delta t = 10ms$ ,  $k_N = 10^4$  et  $k_T = 10^3$ , mais lors du calcul des forces, ils multiplient les pénalités par la longueur des segments qui vaut environ 0.1) est aussi représentée. Nous voyons que la valeur qu'ils trouvent correspond aux valeurs que nous obtenons. L'analyse de l'erreur (Figure 5.16), calculée en prenant comme référence le travail des forces de contact obtenu avec le même schéma et pour un pas de temps de  $2.5ms$ , montre que la gestion du contact ne permet pas d'obtenir une intégration précise au second ordre, mais plutôt au premier ordre. Cela provient des approximations de la relation (5.88) utilisée dans le calcul du contact (section 5.5.2) et du fait que le contact collant admet en réalité une dissipation d'énergie liée à la pénalité tangentielle (relation 5.102). La Figure 5.17 représente l'évolution des moments linéaires et angulaire des deux cylindres pour une simulation avec un pas de temps de  $20ms$  et une pénalité normale  $k_N = 10^3$ . Aussi bien l'algorithme de Newmark (Figure 5.17 (a)), que l'algorithme EMCA (Figure 5.17 (b)) préservent ces grandeurs.

Remarquons, que comme pour l'exemple précédent, l'algorithme de Newmark a une nouvelle fois introduit de l'énergie dans le système, ce qui a conduit à son instabilité lorsque la taille du pas a augmenté.

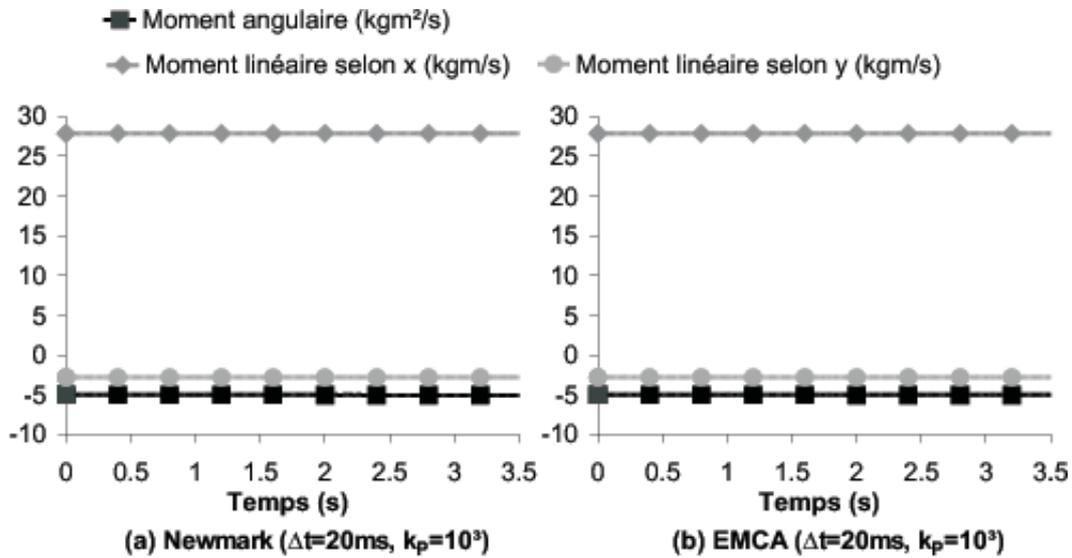


Figure 5.17: Evolution temporelle des moments linéaires et angulaire pour les deux cylindres élastiques parallèles - (a) schéma de Newmark - (b) schéma EMCA.

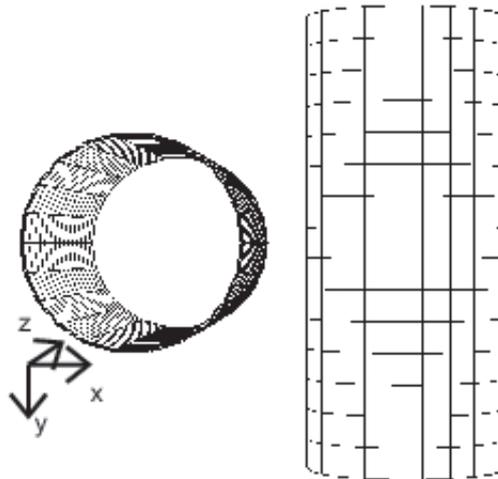


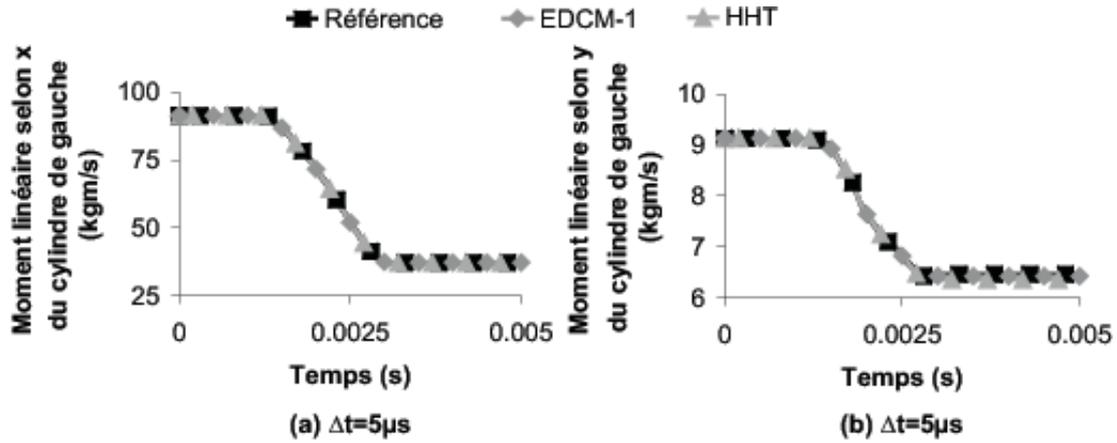
Figure 5.18: Géométrie et maillage des cylindres creux.

### 5.6.3 Exemple 3 : Impact avec frottement de deux cylindres creux

Il s'agit de simuler l'impact de deux cylindres perpendiculaires (Figure 5.18) en aluminium (propriétés reprises à la Table 5.3). Le cylindre de gauche a sa génératrice selon l'axe  $z$  et le cylindre de droite selon l'axe  $y$ . Chaque cylindre est discrétisé par 990 éléments (3 sur l'épaisseur, 22 sur la circonférence et 15 sur la longueur). Les centres (centre du cercle pris au milieu de la hauteur du cylindre) des deux cylindres

Table 5.3: Propriétés des cylindres creux.

Propriété	Valeur
Longueur	$L = 460mm$
Rayon moyen	$R = 98.5mm$
Epaisseur	$e = 3mm$
Différence des coordonnées des centres (axe-x; axe-y; axe-z)	$\vec{x} = (250mm; 0mm; 0mm)$
Vitesse initiale du cylindre de gauche (axe-x; axe-y; axe-z)	$\vec{v} = (40m/s; 4m/s; 0m/s)$
Masse volumique	$\rho = 2710kg/m^3$
Module de Young	$Y = 70000N/mm^2$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Limite élastique initiale	$\Sigma_0 = 90N/mm^2$
Paramètre d'érouissage linéaire	$h = 100N/mm^2$
Pénalité normale	$k_N = 10^5$
Pénalité tangentielle	$k_T = 10^3$
Coefficient de frottement	$\mu_c = 0.1$

Figure 5.19: Evolution temporelle des moments linéaires du cylindre de gauche pour un pas de temps de  $5\mu s$  - (a) moment linéaire selon  $x$  - (b) moment linéaire selon  $y$ .

sont séparés par le vecteur  $\vec{x}$  (Table 5.3). Le cylindre de gauche a une vitesse initiale uniforme  $\vec{v}$  (Table 5.3) et son centre est initialement à l'origine du système d'axe. Les deux cylindres interagissent avec frottement (propriétés reprises à la Table 5.3). Nous allons comparer les résultats obtenus grâce :

- (i) à l'algorithme dissipatif proposé (EDMC-1) en tenant compte des tenseurs de correction  $\mathbf{C}^*$  et  $\mathbf{C}^{**}$ , avec un rayon spectral infini de 0.8 (paramètres calculés par la Table 3.1);
- (ii) à l'algorithme de Hilber-Hughes-Taylor (HHT), avec un rayon spectral infini de 0.8 (paramètres calculés par la Table 2.2);

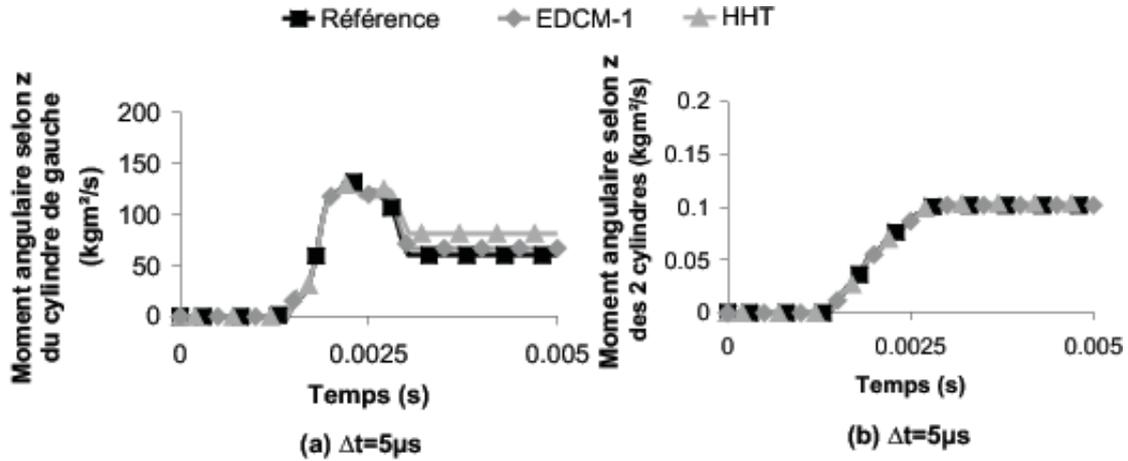


Figure 5.20: Evolution temporelle du moment angulaire selon  $z$  pour un pas de temps de  $5 \mu s$  - (a) moment angulaire selon  $z$  du cylindre de gauche - (b) moment angulaire selon  $z$  des 2 cylindres creux.

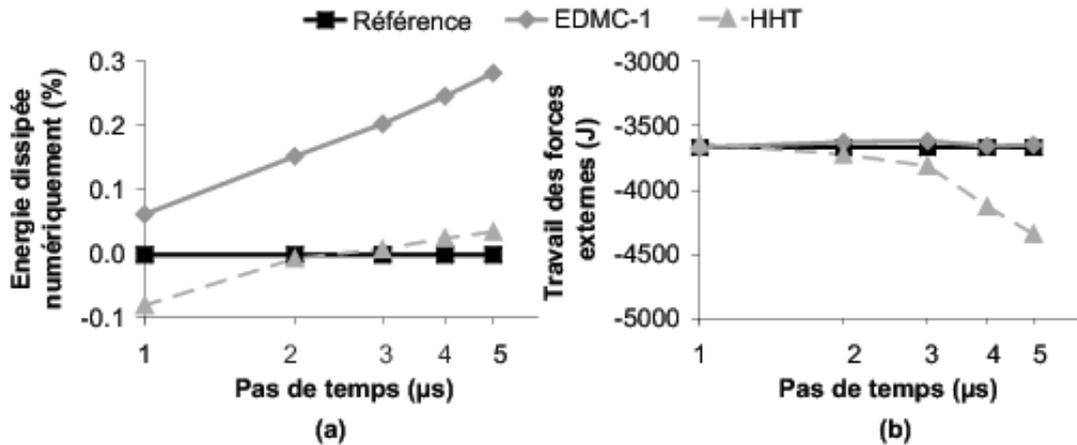


Figure 5.21: Energie finale (après  $5 ms$ ) des 2 cylindres creux - (a) énergie dissipée numériquement - (b) travail des forces de contact.

- (iii) à une solution de référence obtenue avec l'algorithme EMCA, les tenseurs de corrections et un faible pas de temps ( $\Delta t = 1 \mu s$ ).

Nous comparons les résultats obtenus avec des pas de temps de  $1 \mu s$ ,  $2 \mu s$ ,  $3 \mu s$ ,  $4 \mu s$  et  $5 \mu s$ . La solution de référence est obtenue avec un pas de temps de  $1 \mu s$ .

Les Figures 5.19 (a) et (b) illustrent respectivement, l'évolution temporelle du moment linéaire selon  $x$  et selon  $y$ , du cylindre ayant une vitesse initiale (cylindre de gauche). Nous voyons, que dans la direction de l'impact ( $x$ ), le cylindre perd de sa quantité de mouvement qu'il transmet au cylindre de droite. Vues du cylindre de gauche, les solutions obtenues par les différentes méthodes sont identiques. Dans la direction tangentielle ( $y$ ), le cylindre de gauche transmet par frottement de la quantité

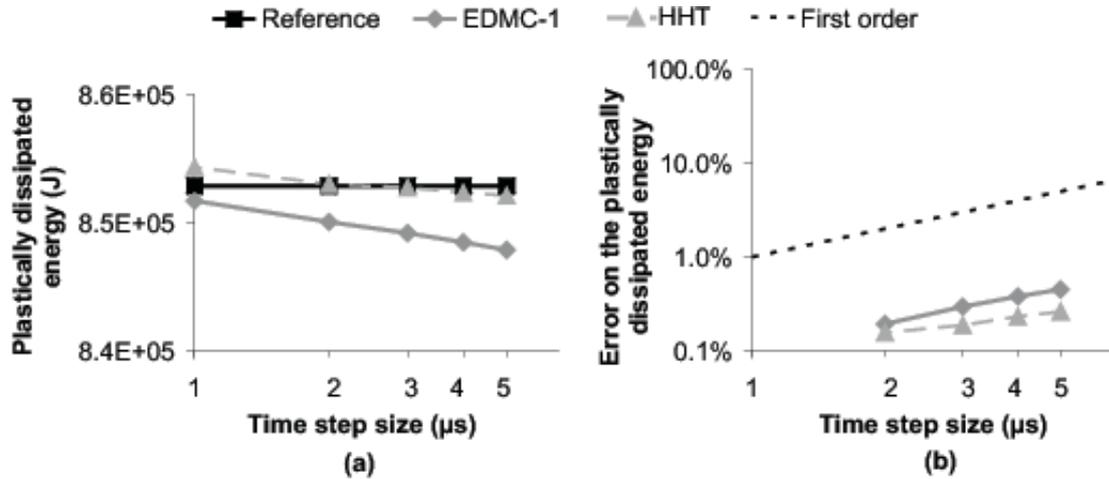


Figure 5.22: Energie finale (après  $5ms$ ) des 2 cylindres creux - (a) énergie dissipée plastiquement - (b) erreur sur l'énergie dissipée plastiquement par rapport au plus petit pas de temps du même schéma.

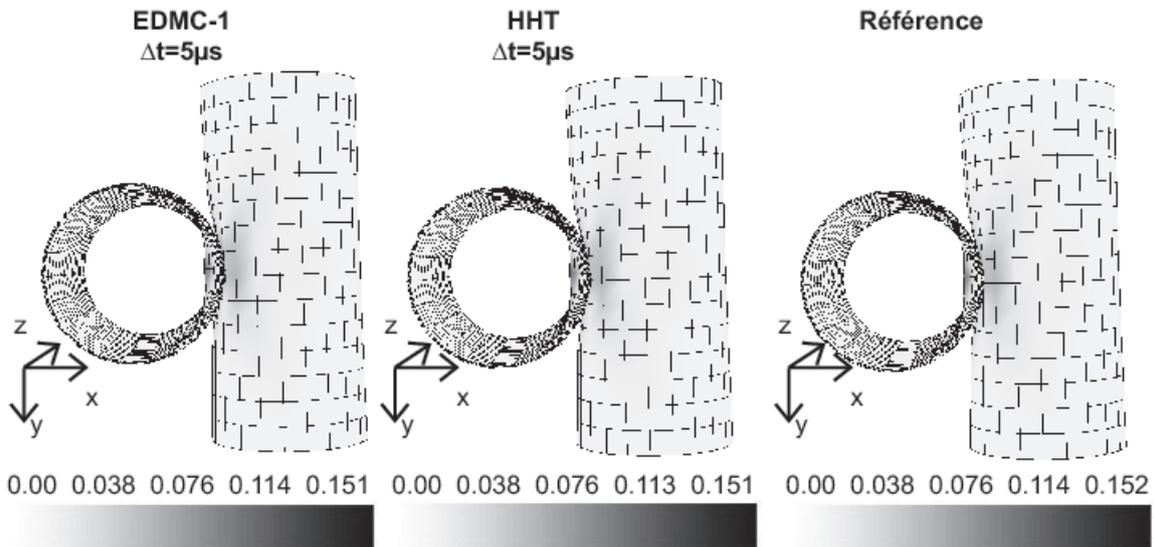


Figure 5.23: Déformation plastique équivalente finale (après  $5ms$ ) des 2 cylindres élasto-plastiques perpendiculaires.

de mouvement au cylindre de droite. Les différences obtenues entre le schéma HHT et EDMC-1 sont de l'ordre du pourcent. La solution EDMC-1 restitue la même solution que la méthode de référence (erreur de l'ordre de  $10^{-4}\%$ ). Signalons, sans présenter les graphiques, que le moment linéaire selon  $z$  reste nul à la précision numérique près (ordre de  $10^{-3}\%$  du moment linéaire selon  $x$ ) et que la somme des moments linéaires des deux cylindres reste bien constante. La Figure 5.20 (a) montre que comme l'impact a lieu en-dessous ( $y$  positif) du centre de gravité du cylindre de droite, le moment an-

gulaire selon  $z$  du cylindre de gauche commence par augmenter. Ensuite, sous l'effet du frottement, le moment angulaire selon  $z$  du cylindre de gauche diminue. Le schéma EDMC-1 donne une solution différente de 10% à la solution de référence (EMCA). Le schéma HHT donne une solution différente de 35% de la solution de référence. Le moment angulaire des 2 cylindres ne reste pas constant durant le contact (Figure 5.20 (b)). Cette variation négligeable de 0.1% provient du fait que nous avons négligé le terme (5.124) dans le calcul des forces de contact tangentiel (5.123), terme qui permet de retrouver la conservation du moment angulaire (section 5.4.3). La Figure 5.21 (a) représente l'énergie dissipée numériquement à la fin de la simulation. Il apparaît que pour de petits pas de temps, le schéma HHT introduit de l'énergie dans le système (voir discussion 2.3.3). Par contre, le schéma EDMC-1 reste toujours dissipatif, même dans le cadre non-linéaire considéré ici. La Figure 5.21 (b) représente le travail des forces de contact (qui doit correspondre à l'énergie dissipée par frottement). Lorsque le schéma EDMC-1 est utilisé, cette énergie reste constante et similaire à la solution de référence (à moins de 1% près) pour tous les pas de temps. Par contre, lorsque le schéma utilisé est le schéma HHT, elle varie de 20% lorsque le pas est multiplié par 5. Les Figures 5.22 (a) et (b) illustrent respectivement l'énergie dissipée plastiquement après  $5ms$  par les deux cylindres, et l'erreur sur cette énergie en prenant comme référence la solution obtenue avec le même schéma et le plus petit pas de temps ( $1ms$ ). La solution obtenue avec le schéma EDMC-1 sous-estime la dissipation plastique, du fait que de l'énergie cinétique initiale est dissipée numériquement. Pour des petits pas de temps, la solution HHT surestime cette énergie car de l'énergie est introduite artificiellement (Figure 5.21 (a)). De plus, nous voyons qu'à nouveau la précision du schéma HHT n'est plus que du premier ordre par rapport au pas de temps, et ce à cause des non-linéarités (Figure 5.22 (b)). Finalement, la Figure 5.23 représente les déformations plastiques équivalentes après l'impact. Les solutions obtenues par les différentes simulations sont globalement équivalentes.

## 5.7 Conclusions sur la formulation de l'interaction de contact

Dans cette section nous avons exposé la manière d'évaluer les forces de contact afin d'obtenir un schéma d'intégration énergétiquement consistant. Pour ce faire, nous avons repris la théorie proposée par Armero et Petöcz [3, 4], dont nous avons proposé une implémentation pratique originale dans le cadre de surfaces à normale discontinue. De manière tout à fait générale, nous avons proposé cette formulation dans le cadre 3D.

Au vu d'un exemple numérique simulant du contact sans frottement, nous avons montré que le schéma de Newmark pouvait conduire à une création d'énergie dans le système par l'intermédiaire des forces de contact normale. Si pour de petit pas de temps cette énergie reste négligeable, elle peut devenir très importante lorsque la taille du pas de temps utilisé augmente, ce qui conduit à des solutions n'ayant plus aucune signification physique. Par contre, le schéma conservatif ne crée jamais d'énergie à la suite du contact, ce qui lui permet de donner une solution énergétiquement consistante pour toutes les tailles du pas de temps menant à convergence. En introduisant le frottement, nous avons toujours observé le même phénomène, mais en outre, les algorithmes de Newmark et HHT donnent une estimation de la dissipation par frottement qui dépend de la taille du pas de temps. Cette variation est beaucoup moins importante avec l'algorithme EMCA ou EDMC-1. De plus, nous avons vu que le schéma HHT pouvait être instable (apport d'énergie au système plutôt que dissipation) suite aux non-linéarités. Par contre le schéma EDMC-1 est toujours dissipatif, même dans le cadre non-linéaire.

Cependant, nous avons vu que l'algorithme EMCA n'avait pas une précision au second ordre par rapport au pas de temps, et ce pour deux raisons. La première raison est que lors de la prise de contact, la pénétration, et donc la déformation résultante, n'est pas toujours plus faible lorsque la taille du pas de temps diminue. Cela provient du fait que la solution n'est pas géométriquement admissible. L'autre problème vient de la gestion du contact tangentiel, qui suite à l'utilisation de l'algorithme de la pénalité, accepte un glissement même pour le contact collant. Une méthode de type Lagrangien augmenté, comme celle proposée par Laursen et Chawla [91, 33, 90] pourrait améliorer ces problèmes. Finalement, remarquons que l'implémentation d'une loi de glissement différente de celle de Coulomb ne pose *a priori* aucun problème.

## Chapitre 6

# Utilisation combinée des algorithmes implicite et explicite

Les algorithmes implicites nécessitent une résolution itérative à chaque pas de temps, contrairement aux algorithmes explicites. Mais pour des raisons liées à la stabilité, les méthodes explicites travaillent avec de plus petits pas de temps. Les méthodes explicites sont dès lors plus adaptées pour résoudre des problèmes de dynamique rapide gouvernés par de hautes fréquences. Cela est particulièrement vrai lorsque le nombre de degrés de libertés est important, car alors, les itérations coûtent cher et les problèmes de convergences sont fréquents [151]. Par contre, quand le problème est gouverné par de basses fréquences, les algorithmes implicites permettent de travailler avec des pas de temps plus grands, réduisant ainsi le coût tout en améliorant la précision et la stabilité [151, 50, 145]. Cependant, pour certains problèmes de dynamique rapide, il apparaît qu'une résolution implicite peut se révéler moins chère et plus précise qu'une résolution explicite [125, 66, 59]. Dès lors, le choix de l'algorithme d'intégration se révèle toujours délicat. De plus, pour la plupart des problèmes industriels, une méthode de résolution combinant les deux familles d'algorithmes se révèle souvent avantageuse. Trois méthodologies peuvent amener cette combinaison.

La première méthode consiste à intégrer, dans le temps, des forces de manière implicite et d'autres de manière explicite. Par exemple, pour Kane *et al.* [83], les accélérations de contact sont traitées de manière implicite et les accélérations résultant des forces internes sont traitées par un algorithme explicite. Plesha et Belytschko [122] traitent les parties linéaires et non-linéaires des relations constitutives respectivement de manière implicite et explicite.

Une autre manière de combiner les méthodes est de diviser le maillage en sous-domaines. Chaque sous-domaine est traité avec un algorithme d'intégration différent et/ou avec un pas de temps différent. Belytschko et Mullen [18], ainsi que Hughes et Liu [73, 72] sont les premiers à avoir étudié la stabilité d'une décomposition en un domaine traité de manière explicite et en un domaine traité de manière implicite avec un plus grand pas de temps. Les schémas implicites et explicites (en réalité un algorithme prédictor-correcteur explicite) sont basés sur un schéma de Newmark. Liu *et al.* [97],

ont détaillé l'implémentation numérique de cette méthode. Miranda *et al.* [104], ainsi que Belytschko et Lu [17] ont ensuite étendu cette méthode au schéma de Hilber-Hughes-Taylor. Néanmoins, Daniels [41,43] a montré que ces méthodes souffraient d'un manque de stabilité. Il a alors proposé de corriger la gestion de l'interface (transition entre les sous-domaines), en utilisant la solution au temps milieu du sous-domaine de plus grand pas de temps, afin de garantir cette stabilité dans le cas de l'utilisation d'un algorithme de Newmark. Les deux sous-domaines peuvent être implicites, explicites ou un de chaque méthode. Un cas particulier où les deux sous-domaines sont explicites est donné par Wu et Smolinski [149]. La stabilité peut aussi être garantie en vérifiant les conditions d'interface à l'aide de multiplicateurs de Lagrange. Cette méthode a été proposée par Combescure et Gravouil [36,37], par Gravouil et Combescure [60], ainsi que par Combescure *et al.* [38] en utilisant des algorithmes de Newmark. Ces auteurs ont aussi envisagé une extension à des problèmes non-linéaires. Cette dernière méthode a été étendue au cas où un sous-domaine est réduit à l'aide d'une base modale par Faucher et Combescure [47]. Alors que toutes ces précédentes méthodes utilisent un algorithme implicite de type Newmark, remarquons une variante proposée par Lim et Taylor [96] qui intègrent le sous-domaine composé d'éléments déformables par un algorithme explicite, et le sous-domaine composé d'éléments rigides par un algorithme conservatif (section 3). Par contre, dans ce cas, la taille du pas de temps implicite équivaut à la taille du pas explicite.

Enfin, une troisième méthode de combinaison consiste à intégrer certains intervalles temporels avec une méthode implicite et certains intervalles temporels avec une méthode explicite. Peu de travaux ont développé cette combinaison. De plus, le domaine d'intérêt de la majorité de ces travaux est uniquement la mise en forme de matériaux. Pour Jung et Yang [80], un processus d'emboutissage commence avec un schéma implicite. Lorsqu'un problème de convergence survient, le schéma bascule vers un schéma explicite. Aucun retour vers l'implicite n'est planifié. Une autre méthode consiste à simuler l'emboutissage (considéré comme un processus de dynamique rapide) avec une méthode explicite, et à simuler le retour élastique (considéré comme un processus de dynamique lente) avec un schéma implicite. Cette méthode a été développée par Prior [126], par Finn *et al.* [48] ainsi que par Narkeeran et Lovell [108]. Le temps de transition est fixé par l'utilisateur et les conditions initiales lors du changement de méthode sont définies en imposant des vitesses et des accélérations nulles. Rust et Schweizerhof [133] utilisent cette combinaison pour évaluer la charge limite et le mode de ruine d'une structure (à parois mince en particulier). La déformation de la pièce pour une charge inférieure à la charge de ruine, est calculée en quasi-statique par une méthode implicite, qui présente l'avantage, par rapport à l'usage d'un algorithme explicite, de fournir une solution équilibrée tout en utilisant de grands pas de temps (ce qui diminue le temps de calcul). Lorsque la pièce est proche de la ruine, et pendant la ruine, les non-linéarités (déformations plastiques, contact ...) empêchent la méthode implicite de converger et une méthode explicite est alors utilisée.

Nous allons généraliser cette troisième méthode aux problèmes d'impact, qui font

intervenir les forces d'inertie. Pour ce faire, des conditions initiales stables lors du passage de l'explicite vers l'implicite vont être définies de manière à pouvoir passer d'un petit pas de temps explicite à un grand pas de temps implicite. Dans un premier temps, nous allons rappeler les schémas explicites usuellement utilisés. Ensuite nous exposerons la méthode que nous avons développée pour passer d'un schéma explicite vers un schéma implicite.

## 6.1 Intégration explicite de l'équation d'équilibre

Soit l'équation de conservation de la quantité de mouvement semi-discrétisée (2.38) que nous rappelons ici

$$M^{\xi\mu} [\ddot{\vec{x}}]^\mu = [\vec{F}_{ext} - \vec{F}_{int}]^\xi \quad \forall t \in \mathbb{T} \quad (6.1)$$

Nous avons vu au chapitre 2, que l'utilisation d'algorithme d'intégration pour intégrer cette équation nécessite de bien sélectionner des paramètres pour rendre l'algorithme stable (pas de création numérique d'énergie) pour toutes les tailles du pas de temps (algorithme inconditionnellement stable). Pour ce faire, nous avons veillé à ce que les valeurs propres de la matrice spectrale ne bifurquent pas d'une valeur complexe vers une valeur réelle. Le prix à payer pour pouvoir utiliser de grands pas de temps était de devoir itérer pour résoudre l'équation d'équilibre. Nous allons exposer dans cette section les algorithmes principaux permettant d'éviter ces itérations, sous la contrainte de devoir limiter la taille du pas de temps (algorithme conditionnellement stable). L'algorithme explicite de la différence centrée, qui est une écriture explicite de l'algorithme de Newmark et qui ne dissipe pas d'énergie numériquement est historiquement l'algorithme explicite le plus utilisé. Par la suite, Chung and Lee [35] ont introduit de la dissipation numérique en modifiant les paramètres de Newmark. Cet algorithme a été généralisé par Hulbert et Chung [74] en pondérant les forces d'inertie. D'autres algorithmes explicites peuvent introduire de la dissipation numérique, comme l'algorithme de Tchamwa [129, 143, 146]. Finalement, remarquons l'existence d'algorithmes explicites à deux pas comme celui proposé par Zhai [152]. Dans cette section nous nous contenterons d'exposer l'algorithme de la différence centrée et l'algorithme de Hulbert et Chung qui sont les plus utilisés.

### 6.1.1 L'algorithme explicite de la différence centrée

Il s'agit du schéma d'intégration le plus répandu pour intégrer (2.38) dans le cas de problèmes de dynamique rapide [15, 16, 70]. C'est également le schéma le plus utilisé dans la plupart des codes commerciaux destinés aux simulations d'impact et de problèmes de mise à forme. Pour un algorithme explicite, la solution au temps  $t^{n+1}$  ne dépend que des éléments des solutions au temps  $t^n$ . Il n'est donc pas itératif. Son désavantage est d'être conditionnellement stable, et donc de posséder une limite sur la taille du pas de temps.

#### Principe de base

Dans un premier temps, les vitesses au nœud  $\xi$ , au temps intermédiaire  $t^{n+\frac{1}{2}}$ , sont calculées par

$$[\dot{x}^{n+\frac{1}{2}}]^\xi = [\dot{x}^{n-\frac{1}{2}}]^\xi + \Delta t [\ddot{x}^n]^\xi \quad (6.2)$$

Les positions au temps  $t^{n+1}$ , sont calculées à partir de ces vitesses

$$[x^{n+1}]^\xi = [x^n]^\xi + \Delta t [\dot{x}^{n+\frac{1}{2}}]^\xi \quad (6.3)$$

L'équation d'équilibre (2.38) n'est pas vérifiée itérativement, mais est utilisée pour déduire les accélérations au temps  $t^{n+1}$

$$[\ddot{x}^{n+1}]^\xi = [M^{-1}]^{\xi\mu} [F_{ext}^{n+1} - F_{int}^{n+1}]^\mu \quad (6.4)$$

En pratique, la matrice des masses est diagonalisée pour accélérer la résolution de cette dernière équation. Les forces internes sont obtenues par l'expression (2.97) pour le cas d'un système masse ressort ou par l'expression (4.22) pour le cas d'un modèle hypoélastique. Les forces externes sont obtenues par l'expression (5.58) dans le cas d'une interaction de contact.

### Précision et stabilité dans le cadre linéaire et extension au non-linéaire

Comme pour les algorithmes implicites (section 3), la stabilité de l'algorithme est étudiée à partir de la matrice spectrale définie par le système d'équations (6.2), (6.3) et (6.4) qui peut s'écrire, en posant  $\Omega = \omega\Delta t$

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ \Delta t \dot{x}^{n+\frac{1}{2}} \\ \Delta t^2 \ddot{x}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -\Omega^2 & -\Omega^2 & -\Omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^n \\ \Delta t \dot{x}^{n-\frac{1}{2}} \\ \Delta t^2 \ddot{x}^n \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Cependant, plutôt que d'analyser ce système, posons

$$[\dot{x}^{n+\frac{1}{2}}]^\xi \equiv [\dot{x}^{n+1}]^\xi - \frac{\Delta t}{2} [\ddot{x}^{n+1}]^\xi \quad (6.6)$$

Dès lors, le système (6.5) peut se réécrire

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ \Delta t \dot{x}^{n+1} \\ \Delta t^2 \ddot{x}^{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ -\frac{\Omega^2}{2} & 1 - \frac{\Omega^2}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\Omega^2}{4} \\ -\Omega^2 & -\Omega^2 & -\frac{\Omega^2}{2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^s(\Omega)} \begin{pmatrix} x^n \\ \Delta t \dot{x}^n \\ \Delta t^2 \ddot{x}^n \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

ce qui correspond au système de l'algorithme de Newmark (2.62) avec les paramètres  $\beta = 0$  et  $\gamma = \frac{1}{2}$ . Les valeurs propres déduites valent, outre la valeur propre triviale nulle,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1 - \frac{\Omega^2}{2} + \sqrt{\left[\frac{\Omega^2}{2} - 1\right]^2 - 1} \\ \lambda_2 &= 1 - \frac{\Omega^2}{2} - \sqrt{\left[\frac{\Omega^2}{2} - 1\right]^2 - 1}\end{aligned}\quad (6.8)$$

Ces deux valeurs propres sont complexes conjuguées et ont un module unitaire pour autant que

$$\Omega \leq 2 \quad (6.9)$$

L'algorithme est donc bien conditionnellement stable puisque la taille du pas de temps doit être bornée. Dans le cas où le système comprend plusieurs degrés de liberté, cette relation doit être adaptée et c'est la pulsation maximale du système  $\omega_{max}$  qui conditionne la taille du pas de temps. De plus, pour tenir compte des non-linéarités, un facteur de sécurité  $\gamma_s < 1$  est introduit. La relation (6.9) devient alors, en assimilant le pas de temps  $\Delta t$  à un pas de temps stable de taille maximale, dit critique  $\Delta t_{crit}$

$$\Delta t_{crit} = \frac{2\gamma_s}{\omega_{max}} \quad (6.10)$$

Le problème est maintenant d'évaluer  $\omega_{max}$ . L'approximation la plus facile, comme celle de Flanagan et Belytschko [49], consiste à évaluer les fréquences propres de chaque élément et retenir la plus petite. Le pas de temps dépend alors directement de la plus petite longueur du maillage. Cela revient à dire qu'une onde ne peut traverser un élément sur un pas de temps. Cette méthode a le désavantage de surestimer la pulsation maximale de la structure ([15], page 45). Elle peut alternativement être évaluée par la méthode dite "power iteration" ou méthode de la puissance [40] comme proposé par Benson [20].

Le paramètre de sécurité peut être évalué en tenant compte d'une erreur d'intégration afin de s'assurer de la stabilité dans le domaine non-linéaire. Les développements originaux relatifs à cette évaluation ont été publiés par l'auteur dans [110].

Remarquons qu'une analyse dans le cadre non-linéaire comme cela avait été effectué pour l'algorithme de Newmark (section 2.2.3) ne peut conclure que l'énergie incrémentale est bornée puisque  $\beta < \frac{1}{4}$ . Le fait que ce schéma corresponde à l'algorithme de Newmark avec les paramètres  $\beta = 0$  et  $\gamma = \frac{1}{2}$ , lui confère une nature symplectique (*c.f.* section 2.2.5), ce qui implique qu'il conserve le moment angulaire et que son énergie totale oscille [142]. Il n'est donc pas G-stable. Etant donné que cet algorithme possède un rayon spectral unitaire, il ne dissipe pas d'énergie. Nous allons présenter maintenant un algorithme explicite qui possède de la dissipation numérique.

### 6.1.2 L'algorithme explicite de la méthode $\alpha$ -généralisée

Hulbert et Chung [74] ont étendu leur schéma implicite (section 2.3) au schéma explicite en posant  $\alpha_F = 1$ . Pour ne pas altérer la précision du schéma, l'analyse déterminant les autres paramètres doit être refaite en conséquence. Le principal intérêt de ce schéma est l'introduction d'une dissipation numérique.

#### Principe

Dans un premier temps, l'équation d'équilibre (2.107)

$$[1 - \alpha_M] M^{\xi\mu} [\ddot{x}^{n+1}]^\mu + \alpha_M M^{\xi\mu} [\ddot{x}^n]^\mu = [1 - \alpha_F] [\vec{F}_{ext}^{n+1} - \vec{F}_{int}^{n+1}]^\xi + \alpha_F [\vec{F}_{ext}^n - \vec{F}_{int}^n]^\xi \quad (6.11)$$

est réécrite en prenant  $\alpha_F = 1$  de manière à déduire directement des accélérations

$$[\ddot{x}^{n+1}]^\xi = \frac{1}{1 - \alpha_M} [M^{-1}]^{\xi\mu} [F_{ext}^n - F_{int}^n]^\mu - \frac{\alpha_M}{1 - \alpha_M} [\ddot{x}^n]^\xi \quad (6.12)$$

En pratique la matrice des masses  $M$  est diagonalisée. Une fois les accélérations connues, les vitesses sont déduites par (2.48), soit par

$$[\dot{x}^{n+1}]^\xi = [\dot{x}^n]^\xi + \Delta t [1 - \gamma] [\ddot{x}^n]^\xi + \Delta t \gamma [\ddot{x}^{n+1}]^\xi \quad (6.13)$$

Les nouvelles positions sont alors obtenues par (2.46)

$$[x^{n+1}]^\xi = [x^n]^\xi + \Delta t [\dot{x}^n]^\xi + \Delta t^2 \left[ \frac{1}{2} - \beta \right] [\ddot{x}^n]^\xi + \Delta t^2 \beta [\ddot{x}^{n+1}]^\xi \quad (6.14)$$

Les forces internes sont évaluées via l'expression (2.97) pour le cas d'un système masse ressort ou à l'aide de l'expression (4.22) pour le cas d'un modèle hypoélastique. Les forces externes sont obtenues par l'évaluation de (5.58), où  $t_N$  et  $t_{T_\alpha}$  sont évalués par la méthode de la pénalité, dans le cas d'une interaction de contact.

Il reste maintenant à analyser les propriétés numériques de cet algorithme pour en déduire les relations entre les paramètres  $\alpha_M$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\Delta t$ . Remarquons que cet algorithme est une généralisation de l'algorithme explicite de Chung and Lee [35], qui ne pondère pas les forces d'inertie ( $\alpha_M = 0$ ).

#### Précision et stabilité dans le cadre linéaire et extension au non-linéaire

Comme pour l'algorithme implicite (section 2.3) la stabilité de l'algorithme est étudiée à partir de la matrice spectrale définie par le système d'équations (6.12), (6.13)

et (6.14)

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ \Delta t \dot{x}^{n+\frac{1}{2}} \\ \Delta t^2 \ddot{x}^{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 - \frac{\Omega^2 \beta}{1 - \alpha_M} & 1 & \frac{1}{2} - \frac{\beta}{1 - \alpha_M} \\ \frac{-\gamma \Omega^2}{1 - \alpha_M} & 1 & 1 - \frac{\gamma}{1 - \alpha_M} \\ \frac{-\Omega^2}{1 - \alpha_M} & 0 & -\frac{\alpha_M}{1 - \alpha_M} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^s(\Omega)} \begin{pmatrix} x^n \\ \Delta t \dot{x}^{n-\frac{1}{2}} \\ \Delta t^2 \ddot{x}^n \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

Nous reprenons ici les résultats de l'analyse de cette matrice. Les détails peuvent être trouvés dans [74]. D'abord, la précision au second ordre est imposée par la relation (2.116) qui devient, avec  $\alpha_F = 1$

$$\gamma = \frac{3}{2} - \alpha_M \quad (6.16)$$

Soit  $\Omega_b$  la pulsation de bifurcation pour laquelle les fréquences propres complexes deviennent réelles. Les valeurs propres de la matrice spectrale vérifient alors l'équation

$$\det [\mathbf{A}^s(\Omega_b) - \lambda \mathbf{I}] = [\lambda + \rho_b]^2 [\lambda + \rho_s] = 0 \quad (6.17)$$

avec  $\rho_b$  l'opposé de la valeur propre double à la bifurcation et  $\rho_s$  l'opposé de la valeur propre simple à la bifurcation. En identifiant les termes de même puissance de cette équation et en utilisant la relation (6.16), les relations suivantes sont obtenues [74]

$$\begin{aligned} \alpha_M &= \frac{2\rho_b \rho_s + \rho_b - 1}{[\rho_b + 1][\rho_s + 1]} \\ \beta &= 1 + \frac{1 - \rho_b - 2\rho_b \rho_s}{[\rho_b + 1][\rho_s + 1]} + \frac{[1 - \rho_b][1 - \rho_b \rho_s]^2}{[1 + \rho_b]^2 [1 + \rho_s][2 + \rho_s - \rho_b \rho_s]} \\ \Omega_b &= \sqrt{[1 + \rho_b][2 + \rho_s - \rho_b \rho_s]} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Grâce à ces équations, la limite de stabilité peut être exprimée en fonction de  $\rho_b$  et  $\rho_s$  [74] par

$$\Omega \leq \sqrt{\underbrace{\frac{4[1 + \rho_b][2 - \rho_b \rho_s + \rho_s][3 - \rho_b + \rho_s - 3\rho_b \rho_s]}{2[5 - \rho_b^2] + [5 - 13\rho_b - \rho_b^2 + \rho_b^3]\rho_s [1 - \rho_b]^3 \rho_s^2}}_{\equiv \Omega_s}} \quad (6.19)$$

Afin d'éviter la bifurcation, il faut

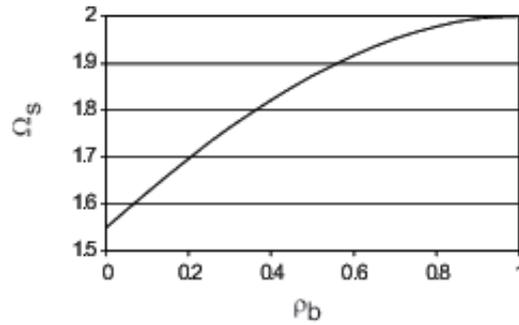
$$\Omega_s \leq \Omega_b \quad (6.20)$$

L'égalité  $\Omega_s = \Omega_b$ , ainsi qu'une optimisation de la dissipation numérique, est obtenue pour [74]

$$\rho_s = \rho_b \quad (6.21)$$

Table 6.1: Propriétés de l'algorithme  $\alpha$ -généralisé explicite

algorithme	$\alpha_M$	$\beta$	$\gamma$	$\Omega_s$	ordre
Chung Hulbert explicite	$\frac{2\rho_b-1}{1+\rho_b}$	$\frac{5-3\rho_b}{[1+\rho_b]^2[2-\rho_b]}$	$\frac{5-\rho_b}{2[1+\rho_b]}$	$\sqrt{\frac{12[1+\rho_b]^3[2-\rho_b]}{10+15\rho_b-\rho_b^2+\rho_b^3-\rho_b^4}}$	2

Figure 6.1: Evolution de la limite de stabilité en fonction du rayon spectral  $\rho_b$ .

Grâce aux relations (6.16), (6.18) et (6.21), tous les paramètres peuvent être exprimés en fonction du rayon spectral à la bifurcation (et plus en fonction du rayon spectral à pulsation infinie, puisque ces pulsations ne sont plus accessibles en explicite). Ces valeurs sont reprises à la Table 6.1. Remarquons qu'une réécriture du schéma, comme cela a été proposé par Daniels [42], permet d'obtenir des expressions des paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  similaires (en substituant  $\rho_b$  à  $\rho_\infty$ ) à celles du schéma  $\alpha$ -généralisé (Table 2.2).

Ce schéma est donc conditionnellement stable, la taille du pas de temps est bornée en fonction de la fréquence maximale  $\omega_{max}$  de la structure mais aussi du rayon spectral. De plus, pour  $\rho_b = 0$ , les hautes fréquences sont annihilées en un pas de temps. En prenant une sécurité  $\gamma_s$  pour tenir compte des non-linéarités, (6.19) devient

$$\Delta t_{crit} = \frac{\gamma_s \Omega_s(\rho_b)}{\omega_{max}} \quad (6.22)$$

L'évolution de  $\Omega_s$  (Figure 6.1) montre que pour un rayon spectral  $\rho_b$  proche de zéro, correspondant à un fort amortissement numérique des hautes fréquences, la taille du pas de temps critique est réduite de 22.5%. Cependant, l'amortissement introduit permet de travailler avec une sécurité plus proche de l'unité. La pulsation maximale est toujours évaluée par la méthode dite "power iteration" proposée par Benson [20] et le paramètre de sécurité est évalué en tenant compte d'une erreur d'intégration afin de s'assurer de la stabilité dans le domaine non-linéaire [110].

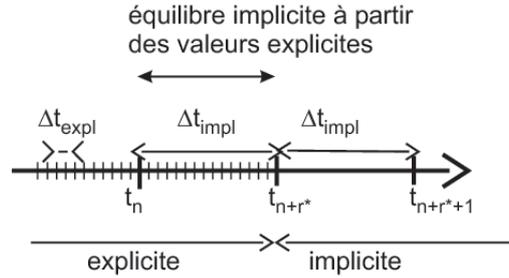


Figure 6.2: Description de la méthode utilisée pour équilibrer la méthode explicite (remarquons que le pas de temps implicite n'est pas nécessairement constant).

## 6.2 Equilibrage de pas de temps explicites

L'objectif de ce chapitre est de combiner temporellement un algorithme implicite et un algorithme explicite. Néanmoins, lorsqu'il faut passer d'un algorithme explicite à un algorithme implicite, nous passons d'une situation non-équilibrée utilisant de petits pas de temps, vers une situation qui doit être équilibrée utilisant de grands pas de temps. Afin de résoudre ce problème nous avons développé une méthode originale permettant d'équilibrer les derniers pas de temps explicites et, ainsi, d'initialiser le premier pas implicite. Nous allons d'abord exposer le principe de cet équilibrage, ensuite nous détaillerons les équations qui permettent de stabiliser le processus explicite. Ces équations seront détaillées pour un algorithme implicite de type EMCA ou EDMC (sections 3.1 et 3.2) et dans le cas de l'utilisation d'un matériau hypoélastique ainsi que pour l'élément de contact. Elles peuvent être également développées pour un algorithme implicite  $\alpha$ -généralisé (section 2.3). Nous avons publié ces développements, relatifs aux méthodes  $\alpha$ -généralisées, dans [117, 112, 111]. Finalement, nous montrerons que nous avons stabilisé le passage d'un algorithme explicite vers un algorithme implicite sur des exemples numériques.

### 6.2.1 Principe de l'équilibrage

Supposons que nous soyons arrivés au temps  $t^n$  par une méthode explicite avec un pas de temps  $\Delta t_{expl}$  et que nous désirons passer vers un algorithme implicite avec un pas de temps  $\Delta t_{impl}$ . Obligeons le futur pas de temps implicite à être égal à un multiple entier ( $r^*$ ) du pas de temps explicite

$$\Delta t_{impl} = r^* \Delta t_{expl} \quad (6.23)$$

Dès lors, la méthode suivie est la suivante (Figure 6.2). Les valeurs nodales et aux points de Gauss de la configuration  $n$  sont sauvegardées. Elles serviront de valeurs de départ pour le calcul du pas de temps d'équilibre. Ensuite,  $r^*$  pas de temps explicites sont calculés. Nous obtenons alors des déplacements nodaux notés  $\bar{x}_{expl}^{n+r^*}$ . Nous pouvons donc prédire de nouvelles valeurs nodales, servant à équilibrer, à l'aide d'un algorithme

implicite, les  $r^*$  pas explicites. Dans un premier temps, nous allons prédire de la manière tout à fait classique utilisée pour le schéma EDMC les inconnues implicites. Ensuite nous utiliserons la solution explicite  $\bar{x}_{expl}^{n+r^*}$  obtenue pour effectuer une correction. Il vient donc initialement

$$\begin{aligned} \left[ \bar{x}_{impl}^{n+r^*,0} \right]^\xi &= \left[ \bar{x}^n + \Delta t_{impl} \dot{\bar{x}}^n + \frac{\Delta t_{impl}^2}{4} \ddot{\bar{x}}^n + \Delta t_{impl} \vec{G}_{diss} \left( \dot{\bar{x}}_{impl}^{n+r^*,0} \right) \right]^\xi \\ \left[ \dot{\bar{x}}_{impl}^{n+r^*,0} \right]^\xi &= \left[ \dot{\bar{x}}^n + \frac{\Delta t_{impl}}{2} \ddot{\bar{x}}^n \right]^\xi \\ \left[ \ddot{\bar{x}}_{impl}^{n+r^*,0} \right]^\xi &= 0 \end{aligned} \quad (6.24)$$

avec  $\vec{G}_{diss} \left( \dot{\bar{x}}_{impl}^{n+r^*,i} \right)$  calculé comme (4.80), c'est-à-dire

$$\left[ \vec{G}_{diss} \left( \dot{\bar{x}}_{impl}^{n+r^*,i} \right) \right]^\xi = \chi \frac{\left\| \left[ \dot{\bar{x}}_{impl}^{n+r^*,i} \right]^\xi \right\| - \left\| \left[ \dot{\bar{x}}^n \right]^\xi \right\|}{\left\| \left[ \dot{\bar{x}}_{impl}^{n+r^*,i} \right]^\xi \right\| + \left\| \left[ \dot{\bar{x}}^n \right]^\xi \right\|} \frac{\left[ \dot{\bar{x}}_{impl}^{n+r^*,i} + \dot{\bar{x}}^n \right]^\xi}{2} \quad (6.25)$$

Le principe que nous proposons est de partir d'une prédiction qui vérifie toujours bien les relations de l'algorithme EDMC (3.36) et (3.37) entre les déplacements, les vitesses et les accélérations, qui s'écrivent dans le cas présent

$$\left[ \bar{x}_{impl}^{n+r^*} \right]^\xi = \left[ \bar{x}^n \right]^\xi + \frac{\Delta t_{impl}}{2} \left[ \dot{\bar{x}}_{impl}^{n+r^*} + \dot{\bar{x}}^n \right]^\xi + \Delta t_{impl} \left[ \vec{G}_{diss} \left( \dot{\bar{x}}_{impl}^{n+r^*} \right) \right]^\xi \quad (6.26)$$

et

$$\left[ \dot{\bar{x}}_{impl}^{n+r^*} \right]^\xi = \left[ \dot{\bar{x}}^n \right]^\xi + \frac{\Delta t_{impl}}{2} \left[ \ddot{\bar{x}}_{impl}^{n+r^*} \right]^\xi + \frac{\Delta t_{impl}}{2} \left[ \ddot{\bar{x}}^n \right]^\xi \quad (6.27)$$

Nous considérons donc une première itération obtenue à partir des déplacements calculés par les  $r^*$  pas explicites

$$\left[ \Delta \bar{x}^1 \right]^\xi = \left[ \bar{x}_{expl}^{n+r^*} + \Delta t_{impl} \vec{G}_{diss} \left( \dot{\bar{x}}_{impl}^{n+r^*,1} \right) - \bar{x}_{impl}^{n+r^*,0} \right]^\xi \quad (6.28)$$

Grâce à cet incrément, nous en déduisons les positions, les vitesses et les accélérations de prédiction

$$\begin{aligned}
\left[ \ddot{x}_{impl}^{n+r^*,1} \right]^\xi &= \left[ \ddot{x}_{expl}^{n+r^*} + \Delta t_{impl} \vec{G}_{diss} \left( \dot{x}_{impl}^{n+r^*,1} \right) \right]^\xi \\
\left[ \dot{x}_{impl}^{n+r^*,1} \right]^\xi &= \left[ \dot{x}_{impl}^{n+r^*,0} \right]^\xi + \\
&\quad \frac{2}{\Delta t_{impl}} \left[ \ddot{x}_{expl}^{n+r^*} - \ddot{x}_{impl}^{n+r^*,0} + \Delta t_{impl} \vec{G}_{diss} \left( \dot{x}_{impl}^{n+r^*,0} \right) \right]^\xi \\
\left[ \ddot{x}_{impl}^{n+r^*,1} \right]^\xi &= \left[ \ddot{x}_{impl}^{n+r^*,0} \right]^\xi + \\
&\quad \frac{4}{\Delta t_{impl}^2} \left[ \ddot{x}_{expl}^{n+r^*} - \ddot{x}_{impl}^{n+r^*,0} + \Delta t_{impl} \vec{G}_{diss} \left( \dot{x}_{impl}^{n+r^*,0} \right) \right]^\xi
\end{aligned} \tag{6.29}$$

De cette manière, nous vérifions toujours bien les relations de l'algorithme EDMC (6.26) et (6.27). Remarquons que nous n'utilisons pas  $\ddot{x}_{expl}^{n+r^*}$  ni  $\dot{x}_{expl}^{n+r^*}$ . A ce stade, les itérations de Newton-Raphson peuvent se résoudre comme expliqué à l'appendice B.1. La loi d'équilibre (3.38) au nœud  $\xi$  se discrétise en

$$\frac{1}{2} M^{\xi\mu} \left[ \ddot{x}_{impl}^{n+r^*} + \ddot{x}^n \right]^\mu = \left[ \vec{F}_{ext}^{n+\frac{r^*}{2}} - \vec{F}_{int}^{n+\frac{r^*}{2}} - \vec{F}_{diss}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]^\xi \tag{6.30}$$

Le résidu (B.2) de l'itération  $i > 1$  du schéma de Newton-Raphson, à la configuration  $n + r^*$ , est exprimé comme étant

$$\begin{aligned}
\left( \Delta \vec{F}^i \right)^\xi &= \frac{1}{2} M^{\xi\mu} \left[ \ddot{x}_{impl}^{n+r^*,i} + \ddot{x}^n \right]^\mu + \\
&\quad \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{r^*}{2}} \left( \dot{x}_{impl}^{n+r^*,i+1} \right) + \vec{F}_{diss}^{n+\frac{r^*}{2}} \left( \dot{x}_{impl}^{n+r^*,i+1} \right) - \vec{F}_{ext}^{n+\frac{r^*}{2}} \left( \dot{x}_{impl}^{n+r^*,i+1} \right) \right]^\xi
\end{aligned} \tag{6.31}$$

et les corrections s'écrivent

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}^{i\xi\mu} \left[ \Delta \ddot{x}^{i+1} \right]^\mu &= - \left[ \Delta \vec{F}^i \right]^\xi \\
\left[ \ddot{x}_{impl}^{n+r^*,i+1} \right]^\mu &= \left[ \ddot{x}_{impl}^{n+r^*,i} + \alpha_{ls} \Delta \ddot{x}^{i+1} \right]^\mu \\
\left[ \dot{x}_{impl}^{n+r^*,i+1} \right]^\mu &= \left[ \dot{x}_{impl}^{n+r^*,i} + \frac{\Delta t_{impl}}{2} \alpha_{ls} \Delta \dot{x}^{i+1} \right]^\mu \\
\left[ \ddot{x}_{impl}^{n+r^*,i} \right]^\mu &= \left[ \ddot{x}_{impl}^{n+r^*,i} + \alpha_{ls} \frac{\Delta t_{impl}^2}{4} \Delta \ddot{x}^{i+1} \right]^\mu + \\
&\quad \Delta t_{impl} \left[ \vec{G}_{diss} \left( \dot{x}^{n+1,i+1} \right) - \vec{G}_{diss} \left( \dot{x}_{impl}^{n+r^*,i} \right) \right]^\mu
\end{aligned} \tag{6.32}$$

où  $S$  est la matrice tangente Jacobienne définie par (B.4) et où  $\alpha_{ls}$  est le paramètre de "line search" obtenu par un système itératif analogue à celui de l'appendice A.1. De cette manière, les relations de l'algorithme EDMC (6.26) et (6.27) sont vérifiées à chaque itération, ce qui permettra de vérifier la consistance énergétique lors du passage explicite-implicite.

### 6.2.2 Stabilité et consistance énergétique de l'équilibrage

En considérant que les relations (6.26), (6.27) et (6.30) sont vérifiées par le schéma de résolution présenté à la section 6.2.1, l'algorithme d'équilibrage sera stable (c'est-à-dire qu'aucune énergie ne sera introduite numériquement) dans le cadre non-linéaire, pour autant que les forces  $\vec{F}^{n+\frac{r^*}{2}}$  et les vitesses  $\vec{G}_{diss}^{n+\frac{r^*}{2}}$  soient bien évaluées. En s'inspirant de la section 3.2.2, les relations que ces grandeurs doivent vérifier pour assurer la stabilité du schéma sont aisément obtenues. Dans les paragraphes qui suivent, les forces sont celles calculées par la méthode implicite d'équilibrage. Cependant, par soucis de clarté, nous omettrons les indices *impl* relatifs aux forces.

#### La conservation du moment linéaire

Cette loi de conservation (3.5) se réécrit

$$\vec{L}^{n+r^*} - \vec{L}^n = \Delta t_{impl} \sum_{\xi} \left[ \vec{F}_{ext}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]^{\xi} \quad (6.33)$$

et est vérifiée si les forces internes vérifient la relation

$$\sum_{\xi} \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]^{\xi} = 0 \quad (6.34)$$

et si les forces de dissipation vérifient la relation

$$\sum_{\xi} \left[ \vec{F}_{diss}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]^{\xi} = 0 \quad (6.35)$$

#### La conservation du moment angulaire

La conservation du moment angulaire (3.9) se discrétise en

$$\vec{J}^{n+r^*} - \vec{J}^n = \frac{\Delta t_{impl}}{2} \left[ \vec{x}_{impl}^{n+r^*} + \vec{x}^n \right]^{\xi} \wedge \left[ \vec{F}_{ext}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]^{\xi} \quad (6.36)$$

Cette relation est vérifiée si les forces internes vérifient

$$\left[ \frac{\vec{x}_{impl}^{n+r^*} + \vec{x}^n}{2} \right]^{\xi} \wedge \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]^{\xi} = 0 \quad (6.37)$$

et si les forces dissipatives vérifient

$$\left[ \frac{\vec{x}^{n+r^*} + \vec{x}^n}{2} \right]^\xi \wedge \left[ \vec{F}_{diss}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]^\xi = 0 \quad (6.38)$$

Les vitesses de dissipation doivent quant à elles vérifier

$$M^{\xi\mu} \left[ \vec{G}_{diss}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]^\xi \wedge \left[ \frac{\dot{\vec{x}}^{n+r^*} + \dot{\vec{x}}^n}{2} \right]^\mu = 0 \quad (6.39)$$

### La conservation de l'énergie

La relation énergétique (3.46) se réécrit en

$$E^{n+r^*} - E^n = -\Delta_{int} - \Delta_{num} \quad (6.40)$$

La relation que les forces internes doivent vérifier est

$$\left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]^\xi \cdot \left[ \vec{x}^{n+r^*} - \vec{x}^n \right]^\xi = U_{int}^{n+r^*} - U_{int}^n + \Delta_{int} \quad (6.41)$$

et la relation que les forces et les vitesses dissipatives doivent vérifier est

$$M^{\xi\mu} \left[ \dot{\vec{x}}^{n+r^*} - \dot{\vec{x}}^n \right]^\mu \cdot \left[ \vec{G}_{diss}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]^\xi + \left[ \vec{F}_{diss}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]^\xi \cdot \left[ \vec{x}^{n+r^*} - \vec{x}^n \right]^\xi = \Delta_{num} \quad (6.42)$$

### 6.2.3 Construction des forces pour le cas du ressort

Soit un ressort joignant les nœuds  $\xi$  et  $\mu$  (ces indices s'interchangeant dans les expressions suivantes). Soit  $U(l)$  le potentiel des forces internes du ressort. Ce potentiel dépend de la longueur  $l = \|\vec{x}^\xi - \vec{x}^\mu\|$  du ressort.

#### Forces internes

Soit l'expression des forces internes (3.20), qui devient dans ce cas particulier

$$\begin{aligned}
\left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]^\xi &= \frac{U(l^{n+r^*}) - U(l^n)}{l^{n+r^*2} - l^{n2}} \\
&\quad \left\{ [\bar{x}^{n+r^*} + \bar{x}^n]^\xi - [\bar{x}^{n+r^*} + \bar{x}^n]^\mu \right\} \text{ si } l^{n+r^*} \neq l^n \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial l} U \left( \frac{l^{n+r^*} + l^n}{2} \right)}{l^{n+r^*} + l^n} \\
&\quad \left\{ [\bar{x}^{n+r^*} + \bar{x}^n]^\xi - [\bar{x}^{n+r^*} + \bar{x}^n]^\mu \right\} \text{ si } l^{n+r^*} \rightarrow l^n
\end{aligned} \tag{6.43}$$

En procédant comme à la section 3.1.3, il est aisé de démontrer que cette expression vérifie les relations (6.34), (6.37) et (6.41).

### Forces dissipatives

La force de dissipation numérique (3.58) devient

$$\left[ \vec{F}_{diss}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]^\xi = \frac{\Delta_W}{l^{n+r^*2} - l^{n2}} \left\{ [\bar{x}^{n+r^*} + \bar{x}^n]^\xi - [\bar{x}^{n+r^*} + \bar{x}^n]^\mu \right\} \tag{6.44}$$

avec le choix de  $\Delta_W$  (3.60) conduisant à un algorithme du premier ordre par rapport au pas de temps qui devient

$$\Delta_W = \chi \frac{\partial^2}{\partial l^2} U \left( \frac{l^{n+r^*} + l^n}{2} \right) \frac{[l^{n+r^*} - l^n]^2}{2} \tag{6.45}$$

Les vitesses de dissipation au premier ordre sont donc obtenues par la relation (6.25). En procédant comme à la section 3.2.3, les relations (6.35), (6.38), (6.39) et (6.42) sont directement vérifiées à partir des expressions (6.25) et (6.44), ce qui garantit la conservation des moments linéaires et angulaires ainsi que la dissipation positive de l'énergie.

### Exemple numérique : Etude d'un système masse-ressort

Nous reprenons l'exemple du système masse ressort en rotation (Figure 2.1) présenté dans la section (2.2.4). Nous allons comparer les résultats obtenus grâce :

- (i) à l'algorithme conservatif (EMCA) avec un pas de temps de 1.5s;
- (ii) à l'algorithme explicite de la différence centrée avec une sécurité  $\gamma_s = 0.68465$ , ce qui permet d'avoir un pas de temps effectif de  $\Delta t = 0.5s$ ;

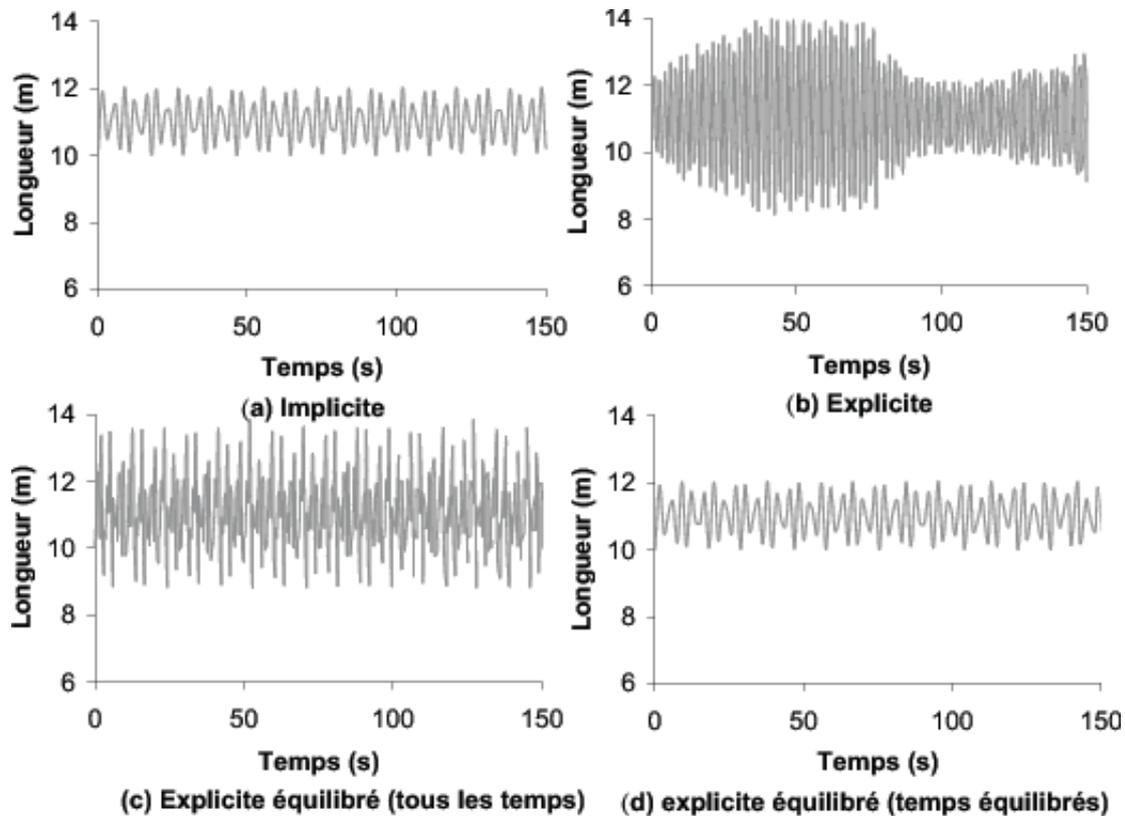


Figure 6.3: Evolution temporelle de la longueur du ressort - (a) résolution implicite (EMCA) - (b) résolution explicite (différence centrée) - (c) résolution explicite équilibrée tous les 3 pas de temps par l'algorithme EMCA (les temps équilibrés et non équilibrés sont représentés) - (d) résolution explicite équilibrée tous les 3 pas de temps par l'algorithme EMCA (seuls les temps équilibrés sont représentés).

(iii) à l'algorithme explicite de la différence centrée ( $\gamma_s = 0.68465$ ), mais en équilibrant les pas explicites par un algorithme EMCA ( $\Delta t_{impl} = 3\Delta t_{expl}$ ).

La Figure 6.3 représente l'évolution de la longueur du ressort et la Figure 6.4 représente l'évolution temporelle des énergies. La solution implicite (Figure 6.3 (a) et Figure 6.4 (a)) donne la solution attendue, c'est-à-dire les oscillations du ressort autour de la position d'équilibre relatif (dans le repère tournant). La solution explicite (Figure 6.3 (b) et Figure 6.4 (b)) est instable, nous voyons que l'énergie totale et que les oscillations de la longueur peuvent augmenter au cours du temps. Cela est dû aux non-linéarités géométriques non-prises en compte lors de l'étude de stabilité des algorithmes explicites. Analysons les résultats lorsque les pas explicites sont équilibrés tous les 3 pas de temps par un pas implicite. La Figure 6.3 (c) et la Figure 6.4 (c) illustrent respectivement la longueur et les énergies pour tous les pas de temps explicites. Il apparaît que si la solution n'est pas instable comme pour la simulation explicite, les oscillations sont plus importantes que pour la solution implicite. Cela s'explique par le

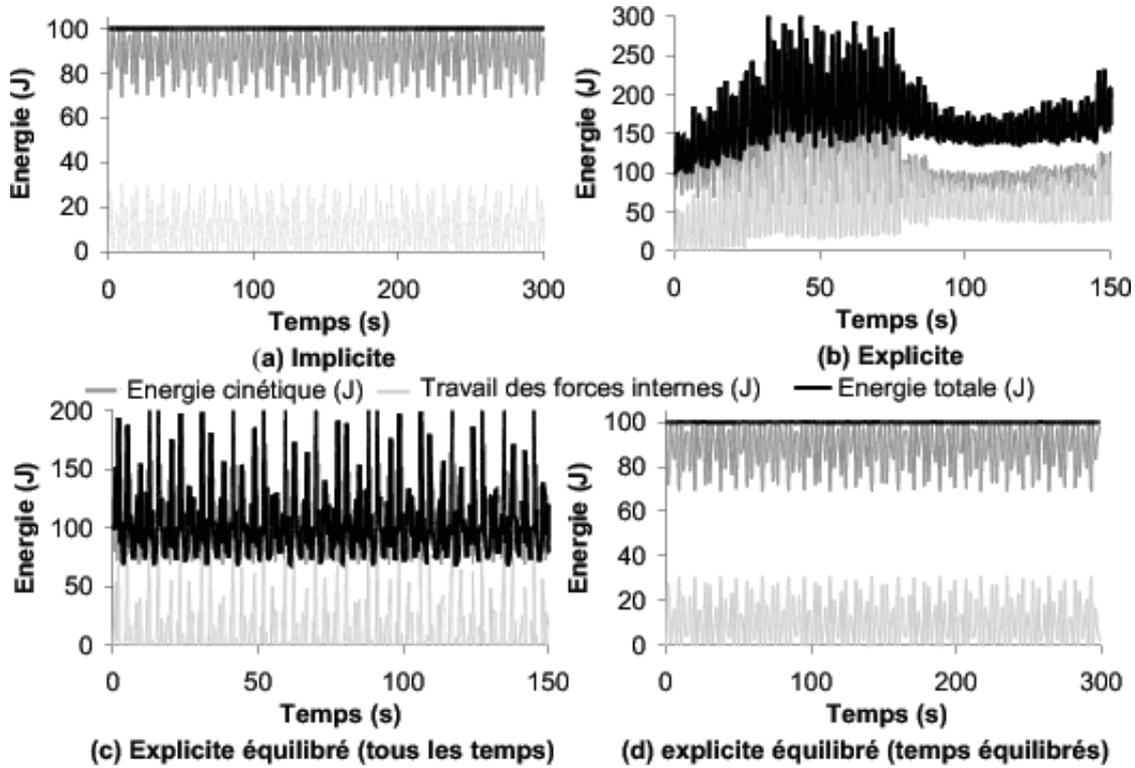


Figure 6.4: Evolution temporelle de l'énergie du ressort - (a) résolution implicite (EMCA) - (b) résolution explicite (différence centrée) - (c) résolution explicite équilibrée tous les 3 pas de temps par l'algorithme EMCA (les temps équilibrés et non équilibrés sont représentés) - (d) résolution explicite équilibrée tous les 3 pas de temps par l'algorithme EMCA (seuls les temps équilibrés sont représentés).

fait que les pas explicites sont non-équilibrés et provoquent donc ces oscillations. Cependant l'équilibrage qui a lieu tous les trois pas explicites empêche la solution de devenir instable. De plus, si nous représentons la solution obtenue pour les temps équilibrés (Figure 6.3 (d) et Figure 6.4 (d)), nous retrouvons la solution énergétiquement consistante implicite. Enfin, signalons qu'une solution implicite nécessite la résolution de 749 itérations de Newton-Raphson, alors que l'équilibrage des pas de temps explicite nécessite la résolution de 671 itérations de Newton-Raphson. Cet exemple permet de démontrer que la méthodologie utilisée pour équilibrer les pas explicites est stable dans le cadre non-linéaire. L'intérêt de cet équilibrage réside dans la possibilité de passer d'un algorithme explicite à un algorithme implicite. Une autre possibilité d'utilisation dans le cadre non-linéaire consiste à rendre une simulation explicite énergétiquement consistante, tout en nécessitant moins d'itérations qu'une solution implicite traditionnelle. Nous verrons également dans le prochain chapitre comment stabiliser le schéma explicite en calculant une erreur d'intégration.

### 6.2.4 Expression des forces dans le cas du matériau hypoélastique

Nous allons réécrire la formulation des forces internes proposée à la section (4), mais en l'adaptant pour l'équilibrage des pas explicites. Les expressions étant simplement obtenues en remplaçant  $n + 1$  par  $n + r^*$ , nous n'écrivons que les résultats principaux.

#### Tenseurs des déformations

Le gradient des déformations  $\mathbf{F}$  entre les configurations  $n$  et  $n + r^*$  est défini par

$$\mathbf{F}_n^{n+r^*} = \frac{\partial \bar{x}^{n+r^*}}{\partial \bar{x}^n} \quad (6.46)$$

Il se décompose en un tenseur rotation  $\mathbf{R}$  et en un tenseur des déformations  $\mathbf{U}$  qui est symétrique défini positif tel que

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_n^{n+r^*} &= \mathbf{R}_n^{n+r^*} \mathbf{U}_n^{n+r^*} \\ \mathbf{U}_n^{n+r^*} &= \mathbf{U}_n^{n+r^*T} \\ \mathbf{R}_n^{n+r^*T} \mathbf{R}_n^{n+r^*} &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (6.47)$$

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\mathbf{GL}$ , le tenseur des déformations d'Almansi  $\mathbf{A}$  et de tenseur des déformations naturelles  $\mathbf{E}$  sont définis par

$$\begin{aligned} \mathbf{GL}_n^{n+r^*} &= \frac{1}{2} \left[ \mathbf{F}_n^{n+r^*T} \mathbf{F}_n^{n+r^*} - \mathbf{I} \right] \\ \mathbf{A}_n^{n+r^*} &= \frac{1}{2} \left[ \mathbf{I} - \mathbf{f}_n^{n+r^*T} \mathbf{f}_n^{n+r^*} \right] \\ \mathbf{E}_n^{n+r^*} &= \frac{1}{2} \ln \left[ \mathbf{F}_n^{n+r^*T} \mathbf{F}_n^{n+r^*} \right] \end{aligned} \quad (6.48)$$

Calculons maintenant les tenseurs des contraintes.

#### Tenseurs des contraintes

L'incrément élastique de contraintes corotationnelles est déduit du tenseur des déformations naturelles par

$$\Delta \Sigma_n^{n+r^*} = \mathcal{H} : \mathbf{E}_n^{n+r^*} \quad (6.49)$$

où  $\mathcal{H}$  est le tenseur de Hooke du quatrième ordre. Les contraintes de Cauchy corotationnelles sont évaluées par

$$\Sigma^{cn+r^*} = \left[ \Sigma^n + \Delta \Sigma_n^{n+r^*} - \mathbf{s}^c \right] \quad (6.50)$$

avec  $\mathbf{s}^c$  le terme de correction plastique. Soient le prédicteur élastique  $\mathbf{s}^e$  défini par la partie déviatorique de  $\Sigma^n + \Delta \Sigma_n^{n+r^*}$  et le tenseur normal  $\mathbf{N}^c$  défini par (4.16). Le système composé des relations (4.17), (4.18) et (4.19) se réécrit

$$\begin{aligned}\varepsilon^{pn+r^*} &= \varepsilon^{pn} + \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma^p \\ \Sigma_v^{n+r^*}(\varepsilon^{pn+r^*}) &= \Sigma_v^{n+r^*}(\gamma^p) \\ \boldsymbol{\alpha}^{cn+r^*} &= \boldsymbol{\alpha}^n + \sqrt{\frac{2}{3}}[\bar{\alpha}(\varepsilon^{pn+r^*}) - \bar{\alpha}(\varepsilon^{pn})] \mathbf{N}^c \\ \mathbf{s}^c &= 2G\gamma^p \mathbf{N}^c\end{aligned}\quad (6.51)$$

avec le critère de von Mises (4.20) [124] évalué au temps  $t^{n+r^*}$

$$\begin{aligned}[\mathbf{s}^e - 2G\gamma^p \mathbf{N}^c - \boldsymbol{\alpha}^{cn+r^*}(\gamma^p)] : [\mathbf{s}^e - 2G\gamma^p \mathbf{N}^c - \boldsymbol{\alpha}^{cn+r^*}(\gamma^p)] &= \\ \frac{2}{3} [\Sigma_v^{n+r^*}(\gamma^p)]^2 &\end{aligned}\quad (6.52)$$

Enfin, le schéma de la rotation finale instantanée conduit à

$$\Sigma^{n+r^*} = \mathbf{R}_n^{n+r^*} \Sigma^{cn+r^*} \mathbf{R}_n^{n+r^*T} \quad (6.53)$$

A partir de cette expression, les forces internes peuvent être évaluées.

### Formulation des forces internes

L'expression (4.24) devient

$$\begin{aligned}\left[\vec{F}_{int}^{n+\frac{r^*}{2}}\right]^\xi &= \frac{1}{2} \left[\vec{F}_{int}^* + \vec{F}_{int}^{**}\right]^\xi \\ \left[\vec{F}_{int}^*\right]^\xi &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ [\mathbf{I} + \mathbf{F}_n^{n+r^*}] [\Sigma^{nT} + \mathbf{C}^*] \mathbf{f}_0^{nT} \vec{D}^\xi J_0^n \right\} d\mathbb{V}_0 \\ \left[\vec{F}_{int}^{**}\right]^\xi &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ [\mathbf{I} + \mathbf{f}_n^{n+r^*}] [\Sigma^{n+r^*T} + \mathbf{C}^{**}] \mathbf{f}_0^{n+r^*T} \vec{D}^\xi J_0^{n+r^*} \right\} d\mathbb{V}_0\end{aligned}\quad (6.54)$$

Soit  $\mathbf{U}_n^{\text{el}^{n+r^*}}$  le tenseur des déformations élastiques défini par

$$\mathcal{H} : \frac{1}{2} \ln \left[ \mathbf{U}_n^{\text{el}^{n+r^*}} \mathbf{U}_n^{\text{el}^{n+r^*}} \right] = \mathcal{H} : \mathbf{E}_n^{n+r^*} - \mathbf{s}_n^{cn+r^*} \quad (6.55)$$

Le tenseur élastique de Green-Lagrange  $\mathbf{GL}_n^{\text{el}^{n+r^*}}$ , et le tenseur élastique d'Almansi  $\mathbf{A}_n^{\text{el}^{n+r^*}}$  sont définis à partir de  $\mathbf{U}_n^{\text{el}^{n+r^*}}$

$$\begin{aligned}\mathbf{GL}_n^{\text{el}^{n+r^*}} &\equiv \frac{1}{2} \left[ \mathbf{U}_n^{\text{el}^{n+r^*}} \mathbf{U}_n^{\text{el}^{n+r^*}} - \mathbf{I} \right] \\ \mathbf{A}_n^{\text{el}^{n+r^*}} &\equiv \frac{1}{2} \mathbf{R}_n^{n+r^*} \left[ \mathbf{I} - \mathbf{U}_n^{\text{el}^{n+r^*}-1} \mathbf{U}_n^{\text{el}^{n+r^*}-1} \right] \mathbf{R}_n^{n+r^*T}\end{aligned}\quad (6.56)$$

Les tenseurs plastiques correspondants sont définis par

$$\begin{aligned}\mathbf{GL}_n^{\text{pl}^{n+r^*}} &\equiv \mathbf{GL}_n^{n+r^*} - \mathbf{GL}_n^{\text{el}^{n+r^*}} \\ \mathbf{A}_n^{\text{pl}^{n+r^*}} &\equiv \mathbf{A}_n^{n+r^*} - \mathbf{A}_n^{\text{el}^{n+r^*}}\end{aligned}\quad (6.57)$$

Dès lors, nous pouvons déduire les tenseurs  $\mathbf{C}^*$  et  $\mathbf{C}^{**}$  qui conduisent à un schéma énergétiquement consistant

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^* &= \frac{\frac{D_{int}}{J_0^n} - \Sigma^n : \mathbf{GL}_n^{\text{pl}^{n+r^*}}}{\mathbf{GL}_n^{n+r^*} : \mathbf{GL}_n^{n+r^*}} \mathbf{GL}_n^{n+r^*} \\ \mathbf{C}^{**} &= \frac{\frac{D_{int}}{J_0^{n+r^*}} - \Sigma^{n+r^*} : \mathbf{A}_n^{\text{pl}^{n+r^*}}}{\mathbf{A}_n^{n+r^*} : \mathbf{A}_n^{n+r^*}} \mathbf{A}_n^{n+r^*}\end{aligned}\quad (6.58)$$

avec

$$D_{int} \simeq \frac{1}{2} \varepsilon_n^{pn+r^*} \{ [\Sigma_v^{n+r^*} + \bar{\alpha}^{n+r^*}] J_0^{n+r^*} + [\Sigma_v^n + \bar{\alpha}^n] J_0^n \} \quad (6.59)$$

En procédant comme à la section 4.2.1, il est aisé de démontrer que l'expression (6.54) vérifie les relations (6.34), (6.37) et (6.41).

### Formulation des forces de dissipation

En procédant comme à la section 4.4.2, nous réécrivons (4.81) sous la forme

$$\begin{aligned}\left[ \vec{F}_{diss}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]^\xi &= \frac{1}{2} \left[ \vec{F}_{diss}^* + \vec{F}_{diss}^{**} \right]^\xi \\ \left[ \vec{F}_{diss}^* \right]^\xi &= \frac{1}{2} \int_{V_0} \left\{ [\mathbf{I} + \mathbf{F}_n^{n+r^*}] \mathbf{D}^* \mathbf{f}_0^{nT} \vec{D}^\xi J_0^n \right\} dV_0 \\ \left[ \vec{F}_{diss}^{**} \right]^\xi &= \frac{1}{2} \int_{V_0} \left\{ [\mathbf{I} + \mathbf{f}_n^{n+r^*}] \mathbf{D}^{**} \mathbf{f}_0^{n+r^*T} \vec{D}^\xi J_0^{n+r^*} \right\} dV_0\end{aligned}\quad (6.60)$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^* &= \frac{\frac{D_W}{J_0^n}}{\mathbf{GL}_n^{n+r^*} : \mathbf{GL}_n^{n+r^*}} \mathbf{GL}_n^{n+r^*} \\ \mathbf{D}^{**} &= \frac{\frac{D_W}{J_0^{n+r^*}}}{\mathbf{A}_n^{n+r^*} : \mathbf{A}_n^{n+r^*}} \mathbf{A}_n^{n+r^*}\end{aligned}\quad (6.61)$$

Table 6.2: Propriétés de la poutre sous pression.

Propriété	Valeur
Longueur	$L = 100mm$
Largeur	$l = 8mm$
Hauteur	$h = 8mm$
Masse volumique	$\rho = 10000kg/m^3$
Module de Young	$Y = 186000N/mm^2$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Limite élastique	$\Sigma_0 = 20000N/mm^2$
Paramètre d'écroutissage	$h = 16000N/mm^2$

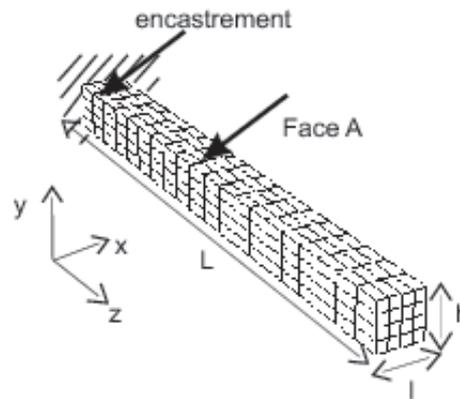


Figure 6.5: Géométrie et maillage de la poutre sous flexion.

Un choix du potentiel  $D_W$  conduisant à un schéma d'intégration temporel au premier ordre par rapport au pas de temps est

$$D_W = \frac{\chi}{2} \mathbf{E}_n^{el^{n+r^*}} : \mathcal{H} : \mathbf{E}_n^{el^{n+r^*}} J_0^n \quad (6.62)$$

Les vitesses de dissipation au premier ordre sont obtenues par la relation (6.25). En procédant comme à la section 4.4.2, les relations (6.35), (6.38), (6.39) et (6.42) sont directement vérifiées à partir des expressions (6.25) et (6.60).

### Exemple numérique : Poutre sous pression

La dynamique d'une poutre encastree est étudiée. La pièce est discrétisée en 320 éléments uniformes (4 fois 4 sur la section et 20 sur la longueur). Sa géométrie est reprise à la Figure 6.5. Les dimensions et les propriétés matérielles sont reprises à la Table 6.2. Sur la face A (Figure 6.5), une force, dépendant du temps  $t$ , est appliquée

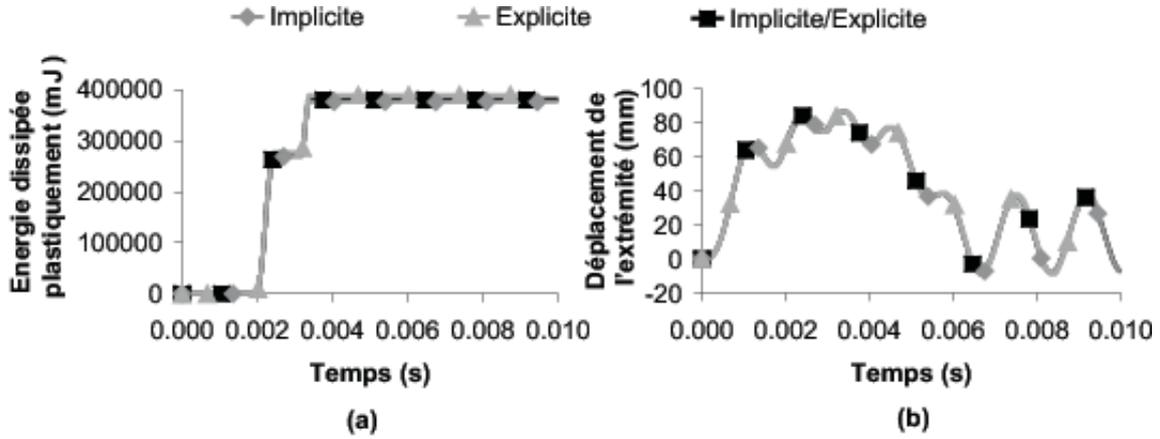


Figure 6.6: Evolution temporelle des résultats de la poutre sous flexion - (a) énergie dissipée plastiquement - (b) déplacement selon  $y$  de l'extrémité.

sur chaque nœud. Cette force est donnée par

$$\begin{pmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \\ \vec{F}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 350 \\ 0 \end{pmatrix} N/ms \times \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 3ms \\ (6ms - t), & 3ms < t \leq 6ms \end{cases} \quad (6.63)$$

Après  $6ms$ , les forces sont relaxées. Nous allons comparer les résultats obtenus grâce :

- (i) à l'algorithme énergétiquement consistant EDMC avec un pas de temps de  $0.015ms$  et un rayon spectral infini de  $0.8$  (paramètres calculés par la Table 3.1);
- (ii) à l'algorithme explicite  $\alpha$ -généralisé avec un rayon spectral de bifurcation égal à  $0.8$  et une sécurité  $\gamma_s = 0.7599193$ , ce qui permet d'avoir un pas de temps  $\Delta t = 0.3\mu s$ ;
- (iii) à la combinaison des deux algorithmes ci-dessus avec un algorithme implicite ( $\Delta t_{impl} = 0.015ms$  et  $\rho_\infty = 0.8$ ) entre  $t = 0ms$  et  $t = 2ms$  ainsi qu'entre  $t = 3ms$  et  $t = 10ms$ , un algorithme explicite ( $\rho_b = 0.8$  et  $\gamma_s = 0.7599193$ ) entre  $t = 2ms$  et  $t = 3ms$  (l'équilibrage de l'explicite vers l'implicite se fait donc avec  $\Delta t_{impl} = 50\Delta t_{expl}$ ).

La Figure 6.6 (a) représente l'évolution temporelle de l'énergie dissipée plastiquement. Les différences entre les méthodes implicites et explicites sont inférieures à 3%. Néanmoins, lorsque l'algorithme implicite bascule vers l'algorithme explicite au temps  $t = 2ms$ , pour revenir à un algorithme implicite au temps  $t = 3ms$ , aucune perturbation de la solution n'apparaît. La même conclusion est obtenue en analysant le déplacement de l'extrémité de la poutre à la Figure 6.6 (b). Durant le chargement ( $t < 3ms$ ), le déchargement ( $3ms \leq t < 6ms$ ), et la vibration libre de la poutre ( $t \leq 10ms$ ), les solutions obtenues sont similaires en amplitude et en phase. Finalement, les déformations plastiques équivalentes (Figure 6.7) obtenues sont identiques à 2% près.

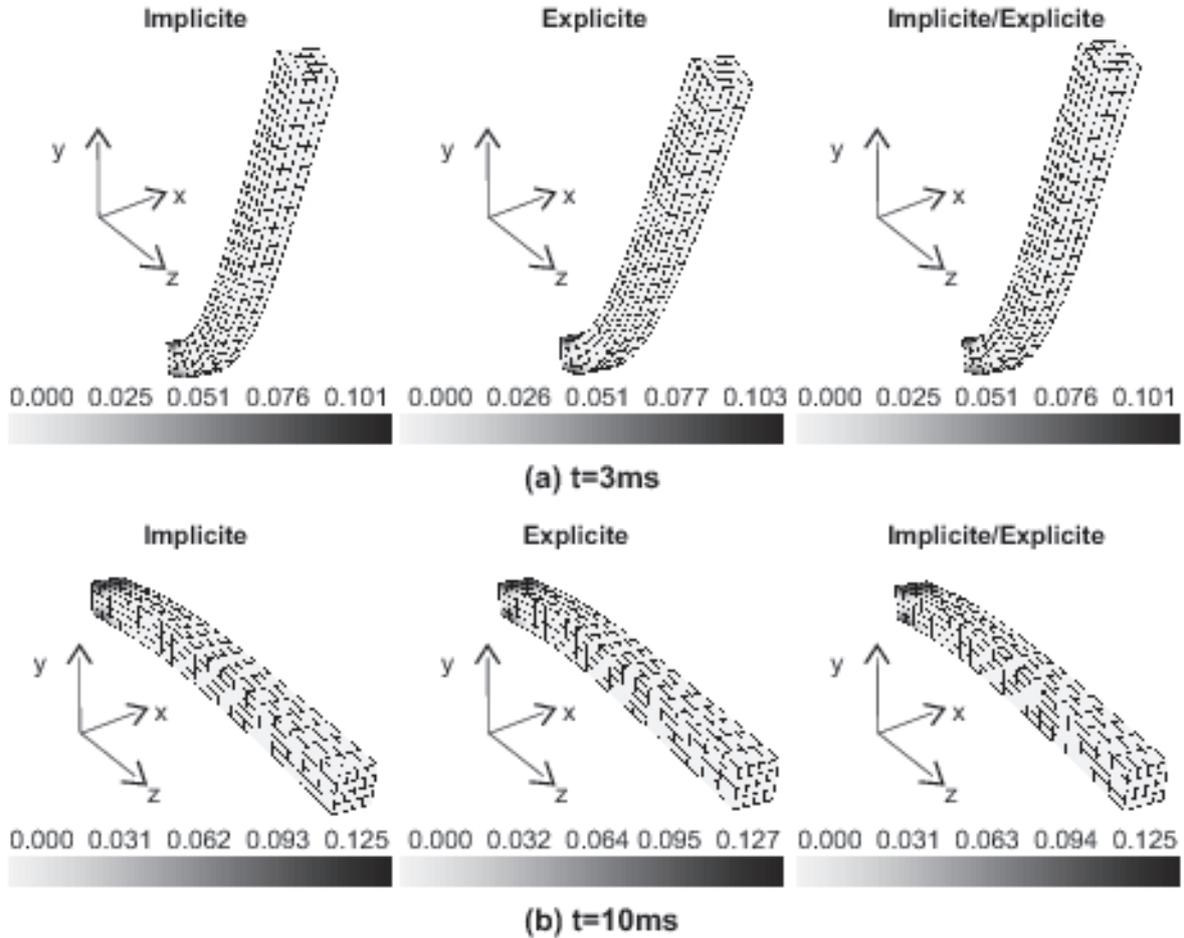


Figure 6.7: Déformation plastique équivalente de la poutre sous flexion - (a) après 3ms - (b) après 10ms.

### 6.2.5 Expression des forces dans le cas de l'interaction de contact

La formulation des forces énergétiquement consistantes relatives à une interaction de contact a été exposée en détail à la section 5. Nous allons expliquer ici comment évaluer les forces de contact pour l'équilibrage de l'explicite vers l'implicite. Remarquons dans un premier temps que dans l'expression des forces de contact utilisée dans la résolution explicite (5.58), la pression de contact  $t_N$  est calculée à l'aide du gap courant (méthode de la pénalité)

$$\begin{aligned} t_N &= -k_N g & \text{si } g \leq 0 \\ &= 0 & \text{si } g > 0 \end{aligned} \quad (6.64)$$

alors que pour la résolution implicite la pression de contact est calculée (5.71) à l'aide d'un gap dynamique. Pour le calcul des forces de frottement, la force de frottement

prédite est calculée à partir des coordonnées curvilignes  $u$  par la méthode explicite

$$t_{T_\alpha}^{pred}(x^{\xi_1}) = -k_T \bar{m}_{\alpha\beta} [u - \bar{u}_d]_\beta \quad (6.65)$$

alors que pour l'algorithme implicite, des coordonnées curvilignes dynamiques sont utilisées (5.89). Il faut donc s'assurer que lorsque l'algorithme passe d'une solution implicite à une solution explicite, le gap soit initialisé au gap dynamique et que les coordonnées curvilignes soient initialisées aux coordonnées curvilignes dynamiques. Par contre, lorsque l'algorithme passe d'une résolution implicite à une résolution explicite, le gap dynamique est initialisé au gap courant et les coordonnées curvilignes dynamiques aux coordonnées curvilignes courantes.

### Formulation de la composante normale

Comme nous avons établi (5.68), définissons la configuration  $n + \frac{r^*}{2}$  obtenue pour les positions nodales interpolées entre les temps  $t^n$  et  $t^{n+r^*}$

$$\begin{aligned} \bar{x}^{n+\frac{r^*}{2}} &= \frac{\bar{x}^n + \bar{x}^{n+r^*}}{2} \\ \bar{y}(\bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}}) &= \varphi^{\xi_2}(u^{n+\frac{r^*}{2}}) \left[ \bar{x}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]^{\xi_2} \text{ avec } u^{n+\frac{r^*}{2}} \text{ qui minimise} \\ &\quad \left\| \varphi^{\xi_2}(u^{n+\frac{r^*}{2}}) \left[ \bar{x}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]^{\xi_2} - \left[ \bar{x}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]^{\xi_1} \right\| \\ g(\bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}}) &= \theta \left\| \bar{y}(\bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}}) - \bar{x}^{n+\frac{r^*}{2}} \right\| \\ \bar{n}(\bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) &= \frac{\bar{x}^{n+\frac{r^*}{2}} - \bar{y}(\bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}})}{g(\bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}})} \end{aligned} \quad (6.66)$$

avec  $\theta = 1$  si les deux corps ne s'interpénètrent pas et  $\theta = -1$  si les corps s'interpénètrent. Le gap dynamique est ensuite calculé, en se rappelant que pour la méthode explicite  $g_d^n = g^n$ , par la relation (5.69) qui se réécrit

$$\begin{aligned} g_d^{n+r^*} &= g_d^n + \bar{n}(\bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}}) \cdot [\bar{x}^{n+r^*} - \bar{x}^n]^{\xi_1} - \\ &\quad \varphi^{\xi_2}(u^{n+\frac{r^*}{2}}) \bar{n}(\bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}}) \cdot [\bar{x}^{n+r^*} - \bar{x}^n]^{\xi_2} \end{aligned} \quad (6.67)$$

Dès lors, la relation (5.71) devient

$$\begin{aligned} t_N(\bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}}) &= -\frac{U(g_d^{n+r^*}) - U(g_d^n)}{g_d^{n+r^*} - g_d^n} \text{ si } g_d^{n+r^*} \neq g_d^n \\ &= -\frac{\partial U}{\partial g} \left( \frac{g_d^{n+r^*} + g_d^n}{2} \right) \text{ si } g_d^{n+r^*} = g_d^n \end{aligned} \quad (6.68)$$

et  $\left[ \vec{F}_{cont} \right]_N$ , la composante normale de la force de contact devient finalement

$$\begin{aligned}
\left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]_N^{\xi_1} &= t_N(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}}) \vec{n}(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}}) \\
\left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]_N^{\xi_2} &= -t_N(x^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}}) \varphi^{\xi_2}(u^{n+\frac{r^*}{2}}) \vec{n}(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}})
\end{aligned} \tag{6.69}$$

Les forces de dissipation au premier ordre sont introduites par

$$\begin{aligned}
\left[ F_{cont/diss}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]^{\xi_1} &= -\chi \frac{U(g_d^{n+r^*} - g_d^n)}{g_d^{n+r^*} - g_d^n} \vec{n}(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}}) \text{ si } cont^n \text{ et } cont^{n+r^*} \\
&= 0 \text{ sinon} \\
\left[ \vec{F}_{cont/diss}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]^{\xi_2} &= \chi \frac{U(g_d^{n+r^*} - g_d^n)}{g_d^{n+r^*} - g_d^n} \varphi^{\xi_2}(u^{n+\frac{r^*}{2}}) \vec{n}(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}}) \\
&\quad \text{si } cont^n \text{ et } cont^{n+r^*} \\
&= 0 \text{ sinon}
\end{aligned} \tag{6.70}$$

Les vitesses de dissipation au premier ordre sont obtenues par la relation (6.25). En procédant comme à la section 5.3.1, les relations de conservation des moments (6.34), (6.35), (6.37), (6.39) sont directement vérifiées à partir des expressions (6.25), (6.69) et (6.70). De plus, en ce qui concerne l'énergie, les relations (5.79) et (5.86) qui sont les relations permettant de démontrer la consistence énergétique de l'interaction de contact sont également vérifiées (section 5.3.4).

### Formulation de la composante tangente

De la même manière que nous avons défini (5.87) nous avons

$$\begin{aligned}
\vec{t}_\alpha(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}}) &= D_\alpha^{\xi_2} \left( u^{n+\frac{r^*}{2}} \right) \left[ \vec{x}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]^{\xi_2} \\
\vec{t}_{\alpha,t}(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}}) &= D_\alpha^{\xi_2} \left( u^{n+\frac{r^*}{2}} \right) \left[ \dot{\vec{x}}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]^{\xi_2} \\
\vec{t}_{\alpha,\beta} \left( u^{n+\frac{r^*}{2}} \right) &= \frac{\partial D_\alpha^{\xi_2}}{\partial u_\beta} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) \left[ \vec{x}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]^{\xi_2} \\
A_{\alpha\beta} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) &= \vec{t}_\beta \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) \cdot \vec{t}_\alpha \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) - \\
&\quad g \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) \vec{n} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) \cdot \vec{t}_{\alpha,\beta} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right)
\end{aligned} \tag{6.71}$$

Soient  $u_d$  les coordonnées dynamiques de la projection, il faut initialiser les coordonnées dynamiques à celles de la méthode explicite ( $u_d^n = u^n$  et  $\bar{u}_d = \bar{u}$ ). La relation (5.88) devient alors

$$\begin{aligned}
& A_{\alpha\beta} \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) [u_d^{n+r^*} - u_d^n]_{\beta} = \\
& \vec{t}_{\alpha} \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) \cdot \left\{ [\bar{x}^{n+r^*} - \bar{x}^n]^{\xi_1} - \varphi^{\xi_2} (u^{n+\frac{r^*}{2}}) [\bar{x}^{n+r^*} - \bar{x}^n]^{\xi_2} \right\} + \\
& g \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) \vec{n} \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) \cdot D_{\alpha}^{\xi_2} \left( u^{n+\frac{r^*}{2}} \right) [\bar{x}^{n+r^*} - \bar{x}^n]^{\xi_2}
\end{aligned} \tag{6.72}$$

Le prédicteur de collement (5.89) devient alors

$$t_{T_{\alpha}}^{pred} \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) = -k_T \bar{m}_{\alpha\beta} \left[ \frac{u_d^{n+r^*} + u_d^n}{2} - \bar{u}_d \right]_{\beta} \tag{6.73}$$

et les composantes finales sont déduites par

$$\begin{aligned}
t_{T_{\alpha}} \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) &= t_{T_{\alpha}}^{pred} \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) \text{ si } \Phi_c \left( T^{pred} \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) \right) \leq 0 \\
t_{T_{\alpha}} \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) &= \frac{t_{T_{\alpha}}^{pred} \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right)}{\| \vec{T}^{pred} \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) \|} \mu_c t_N \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) \\
&\text{ si } \Phi_c \left( T^{pred} \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) \right) > 0
\end{aligned} \tag{6.74}$$

Finalement, les forces de frottement sont obtenues par

$$\begin{aligned}
\left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]_T^{\xi_1} &= t_{T_{\alpha}} \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) A_{\beta\alpha}^{-1} \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) \vec{t}_{\beta} \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) \\
\left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{r^*}{2}} \right]_T^{\xi_2} &= -t_{T_{\alpha}} \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) A_{\beta\alpha}^{-1} \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) \\
&\quad \left\{ \varphi^{\xi_2} \left( u^{n+\frac{r^*}{2}} \right) \vec{t}_{\beta} \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) + \right. \\
&\quad \left. g \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) \vec{n} \left( \bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{r^*}{2}} \right) D_{\beta}^{\xi_2} \left( u^{n+\frac{r^*}{2}} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{6.75}$$

En procédant comme à la section 5.4.1, les relations de conservation des moments (6.34) et (6.37) sont directement vérifiées à partir de l'expression (6.75). De plus, en ce qui concerne l'énergie, la relation (5.101) qui est la relation permettant de démontrer la consistance énergétique de l'interaction de contact est également vérifiée (section 5.4.4).

### Remarque

Si les équations (5.79) et (5.101) sont bien vérifiées, l'étude d'un cycle (prise de contact, contact collant ou glissant pendant plusieurs pas et perte de contact) réalisée

Table 6.3: Propriétés de l'élément en contact.

Propriété	Valeur
Longueur	$L = 1.27m$
Largeur	$l = 1.27m$
Hauteur	$h = 0.889m$
Masse volumique	$\rho = 8930kg/m^3$
Module de Young	$Y = 106900N/mm^2$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.29$
Pénalité normale	$k_N = 10^7$
Pénalité tangentielle	$k_T = 10^6$
Coefficient de frottement	$\mu_c = 0.05$

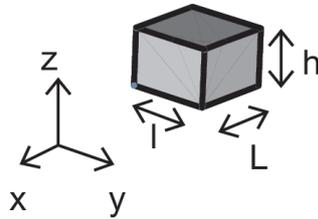


Figure 6.8: Géométrie et maillage de l'élément en contact.

à la section 5.3.4 et à la section 5.4.4 n'est valable en toute rigueur que si tous les pas de temps explicites durant ce cycle sont équilibrés, ce qui par la nature même de l'algorithme explicite n'est jamais le cas en pratique. En conséquence, la partie calculée par une méthode purement explicite n'a pas nécessairement le bilan énergétique voulu. Néanmoins, cette remarque est une conséquence de l'utilisation d'un algorithme explicite qui est non-équilibré par nature et pas de la méthode d'équilibrage. De plus, étant donnée la taille des pas explicites, ce bilan énergétique est généralement approché avec une assez bonne précision.

### Exemple numérique : Élément en contact

Soit un élément de volume élastique (la géométrie est reprise à la Figure 6.8 et les propriétés matérielles sont reprises à la Table 6.3). Cet élément à sa base encastrée dans le plan  $z = 0$ . Une matrice rigide plane d'équation initiale  $z = 1m$  se déplace selon les fonctions représentées à la Figure 6.9. Dans un premier temps la matrice est abaissée. Ensuite elle glisse selon la direction  $x$ , avant d'être relevée. L'interaction avec frottement entre la matrice et l'élément est simulée à l'aide des paramètres repris à la Table 6.3. Nous allons comparer les résultats obtenus grâce :

- (i) à l'algorithme énergétiquement consistant EMCA avec un pas de temps de  $0.015s$ ;

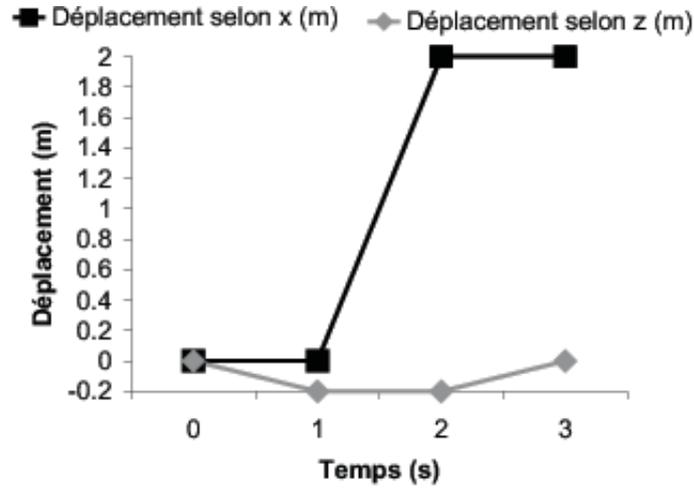


Figure 6.9: Evolution temporelle du déplacement de la matrice rigide pour l'élément en contact.

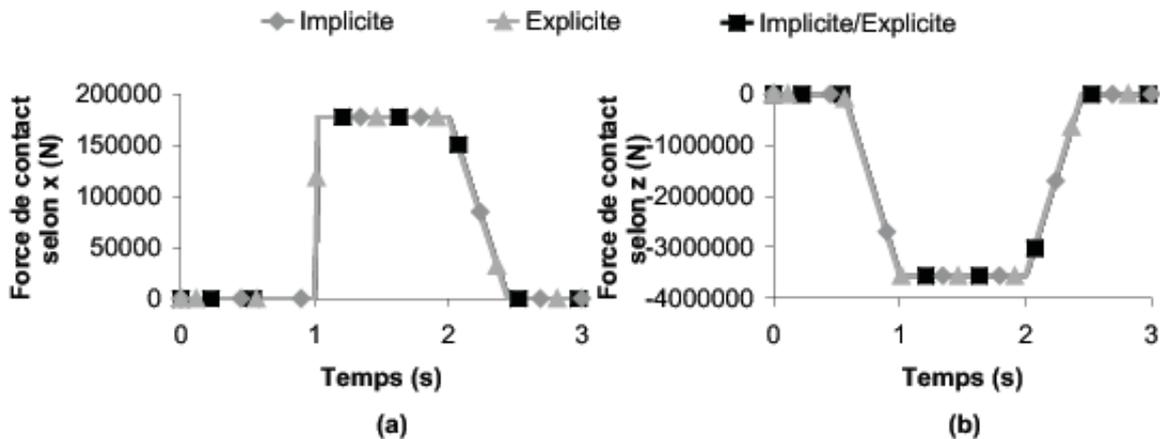


Figure 6.10: Evolution temporelle des forces de contact de l'élément en contact.

- (ii) à l'algorithme explicite  $\alpha$ -généralisé avec un rayon spectral unitaire et une sécurité  $\gamma_s = 0.7544297$ , ce qui permet d'avoir un pas de temps  $\Delta t = 0.15ms$ ;
- (iii) à la combinaison des deux algorithmes ci-dessus, l'algorithme implicite ( $\Delta t_{impl} = 0.015s$ ) est utilisé entre  $t = 0s$  et  $t = 0.5s$ , entre  $t = 0.65s$  et  $t = 1.5s$ , entre  $t = 1.65s$  et  $t = 2.1s$  et entre  $t = 2.25s$  et  $t = 3s$ , alors qu'un algorithme explicite ( $\gamma_s = 0.7544297$ ) est utilisé entre  $t = 0.5s$  et  $t = 0.65s$  (prise de contact), entre  $t = 1.5s$  et  $t = 1.65s$  (glissement) et entre  $t = 2.1s$  et  $t = 2.25s$  (perte de contact). L'équilibrage de l'explicite vers l'implicite se fait donc avec  $\Delta t_{impl} = 100\Delta t_{expl}$ .

La Figure 6.10 (a) représente l'évolution temporelle de la force de contact (pour les quatre nœuds en contact) selon  $x$  et la Figure 6.10 (b) selon  $z$ . Il apparaît que pendant la descente de la matrice ( $0s \leq t < 1s$ ) la résultante des forces de frottement est nulle

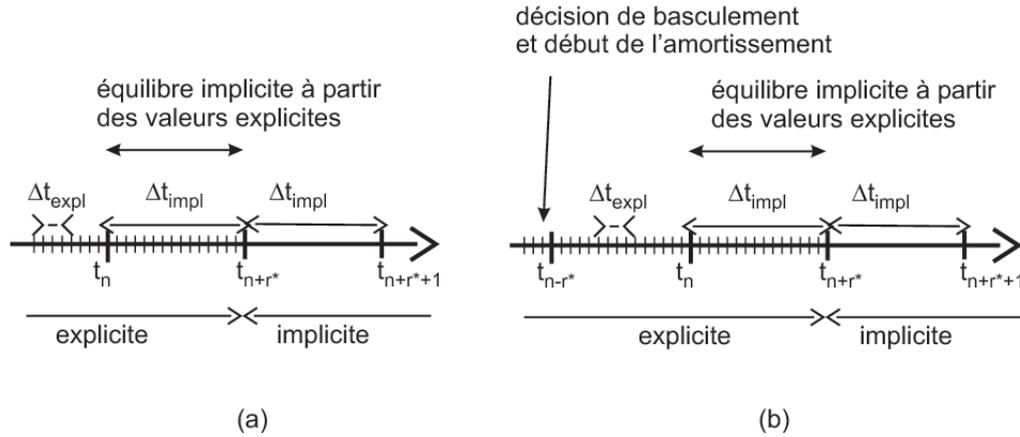


Figure 6.11: Description de la variante utilisée pour équilibrer la méthode explicite - (a) méthode initialement proposée - (b) variante proposée.

par symétrie. Pendant le glissement ( $1s \leq t < 2s$ ) la force normale reste constante, et pendant la remontée de la matrice ( $2s \leq t < 3s$ ), la force normale et la force de frottement diminuent progressivement. Les solutions obtenues par les trois méthodes sont équivalentes.

### 6.2.6 Variante de l'équilibrage de pas de temps explicites

Dans le cas où l'algorithme explicite utilisé est l'algorithme  $\alpha$ -généralisé, la transition de l'explicite vers l'implicite peut être facilitée (c'est-à-dire que le nombre d'itérations peut-être diminué) si, avant d'équilibrer les pas explicites, de la dissipation numérique est introduite. La méthode initialement proposée est illustrée à la Figure 6.11 (a), alors que la variante est illustrée à la Figure 6.11 (b). Dès lors, si nous équilibrons les  $r^*$  pas de temps explicites entre les temps  $t^n$  et  $t^{n+r^*}$  par un pas implicite, les  $r^*$  pas explicites entre les temps  $t^{n-r^*}$  et  $t^n$  sont calculés avec un rayon spectral de bifurcation nul ( $\rho_b = 0$ ). Cette méthode présente l'avantage de lisser les valeurs nodales de la méthode explicite. Dans [111], nous avons détaillé cette procédure.

### 6.3 Conclusions sur l'utilisation combinée des algorithmes implicite et explicite

Dans ce chapitre, nous avons proposé de combiner temporellement un algorithme implicite avec un algorithme explicite. L'objectif de cette méthode est de pouvoir simuler le moment de l'impact avec un algorithme explicite très rapide puisque de toute façon la taille des pas de temps doit être petite pour avoir une bonne précision. Par contre, la dynamique succédant au choc peut être simulée avec un plus grand pas de temps et donc avec un algorithme implicite. Nous avons développé des conditions initiales pour passer d'un algorithme explicite vers un algorithme implicite. Pour ce faire, nous avons équilibré de manière énergétiquement consistante dans le cadre non-linéaire les pas de temps explicites. La précision de nos développements a été validée sur des exemples numériques. Il s'agit maintenant de trouver des critères qui permettent de déterminer les moments où l'algorithme doit basculer d'un schéma à un autre, ce qui est l'objet de la section suivante.

# Chapitre 7

## Gestion automatique de l'intégration temporelle

Nous avons vu au chapitre précédent comment basculer d'un algorithme explicite vers un algorithme implicite et vice-versa. Afin d'affranchir l'utilisateur du choix des temps de bascule, des critères automatiques de décision pour passer d'une méthode à une autre vont être présentés. Ils seront basés sur une mesure de l'erreur d'intégration [63, 32, 75, 45, 115, 116, 110, 118] mais aussi sur un rapport des temps CPU nécessaires au calcul d'un pas de temps implicite et d'un pas de temps explicite.

Mais avant de développer ces critères, nous allons exposer comment optimiser du point de vue du temps de calcul la simulation de systèmes complexes. Dans un premier temps nous expliquerons comment évaluer la taille du pas de temps des schémas implicites. Ensuite nous regarderons comment minimiser le coût de l'inversion de la matrice tangente lors de la résolution du système de Newton-Raphson.

## 7.1 Gestion de la taille du pas de temps

La gestion de la taille du pas implicite est celle proposée par Gérardin [61], que nous avons étendue aux problèmes non-linéaires en grandes déformations [115, 116, 110, 118]. Cette extension permet d'adapter continuellement la taille du pas de temps avec l'évolution de la dynamique du système, tout en gardant la taille constante durant de longs intervalles temporels. Pour évaluer la taille du pas de temps, une erreur d'intégration est calculée. Nous allons présenter la manière de calculer cette erreur pour la méthode EDMC. Le lecteur intéressé par le développement de cette méthode pour l'algorithme  $\alpha$ -généralisé peut se référer à [110].

L'erreur d'intégration est déduite du terme de troncature de la relation (3.37). Le terme tronqué du développement en série de Taylor (section 2.2.1) étant un terme du troisième ordre, l'erreur est donc du troisième ordre :  $O\left(\frac{1}{6}\Delta t^3\ddot{\ddot{x}}\right) \simeq O\left(\frac{1}{6}\Delta t^2\Delta\ddot{\ddot{x}}\right)$ . Dès lors, l'erreur de troncature au nœud  $\xi$  s'écrit

$$e_t^\xi = \frac{\Delta t^2}{6} \left\| \ddot{\ddot{x}}^{n+1} - \ddot{\ddot{x}}^n \right\|^\xi \quad (7.1)$$

Remarquons, que même si la précision du schéma est au premier ordre, cette expression (en  $\Delta t^2$ ) reste valable car nous ne précisons pas l'ordre de  $\ddot{\ddot{x}}^{n+1} - \ddot{\ddot{x}}^n$ . Pour avoir une erreur qui ne dépend pas de la taille du problème et de ses dimensions, l'erreur globale du système est rendue adimensionnelle

$$e_{ad} = \frac{\Delta t^2}{6\sqrt{\ddot{x}_0^\xi \cdot \ddot{x}_0^\xi}} \sqrt{\sum_\xi \left[ \left\| \ddot{\ddot{x}}^{n+1} - \ddot{\ddot{x}}^n \right\|^\xi \right]^2} \quad (7.2)$$

Nous allons maintenant corriger cette erreur en fonction d'une erreur de référence  $e_{ref}$ . Cette erreur est calculée pour un système linéaire à un degré de liberté de pulsation adimensionnelle  $\Omega$ . Grâce à la relation (3.71), et en considérant la solution exacte du système ( $x = x_0 \cos(\omega t)$ ), la différence d'accélération s'écrit

$$\begin{aligned} \Delta t^2 \ddot{\ddot{x}}^{n+1} - \Delta t^2 \ddot{\ddot{x}}^n &= \frac{-2\Omega^2}{1 + \frac{\Omega^2}{4} [1 + \chi]^2} x^n - \frac{\Omega^2 [1 + \chi]}{1 + \frac{\Omega^2}{4} [1 + \chi]^2} \Delta t \dot{x}^n - 2\Delta t^2 \ddot{x}^n \\ &= \left[ \frac{-2\Omega^2}{1 + \frac{\Omega^2}{4} [1 + \chi]^2} + 2\Omega^2 \right] x_0 \cos(\omega t^n) + \\ &\quad \left[ \frac{\Omega^3 [1 + \chi]}{1 + \frac{\Omega^2}{4} [1 + \chi]^2} \right] x_0 \sin(\omega t^n) \end{aligned} \quad (7.3)$$

L'erreur de référence est alors calculée en moyennant ce saut sur une période

$$\begin{aligned} e_{ref}(\Omega) &= \frac{\omega}{2\pi} \int_{t^n=0}^{\frac{2\pi}{\omega}} \left\{ \frac{\Delta t^2}{6x_0} \left\| \ddot{\ddot{x}}^{n+1} - \ddot{\ddot{x}}^n \right\| \right\} dt^n \\ &= \frac{\Omega^3 [1 + \chi]}{3\pi \left[ 1 + \frac{\Omega^2}{4} [1 + \chi]^2 \right]} \sqrt{1 + \frac{\Omega^2}{4} [1 + \chi]^2} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Remarquons que  $\Omega = \omega\Delta t$ , qui représente la pulsation adimensionnelle, doit être connu pour évaluer cette expression. Pour un système linéaire, il est généralement admis que dix pas de temps suffisent pour avoir une bonne approximation d'une période [62], ce qui correspond à  $\Omega \simeq 0.6$ . Dès lors, l'erreur de référence est évaluée par  $e_{ref}$  ( $\Omega = 0.6$ ). Et l'erreur (7.2) est réécrite

$$e_{ad,ref} = \frac{e_{ad}}{e_{ref}} = \frac{\Delta t^2}{6e_{ref}(\Omega = 0.6) \sqrt{\vec{x}_0^\xi \cdot \vec{x}_0^\xi}} \sqrt{\sum_{\xi} \left[ \left\| \ddot{\vec{x}}^{n+1} - \ddot{\vec{x}}^n \right\|_{\xi} \right]^2} \quad (7.5)$$

Néanmoins, pour un mouvement de rotation uniforme, cette erreur n'est pas nulle même si le mouvement est parfaitement intégré car la direction de l'accélération change. Nous utilisons donc l'erreur d'intégration suivante

$$e_{int} = \frac{\Delta t^2}{6e_{ref}(\Omega = 0.6) \sqrt{\vec{x}_0^\xi \cdot \vec{x}_0^\xi}} \sqrt{\sum_{\xi} \left[ \left\| \ddot{\vec{x}}^{n+1} \right\|_{\xi} - \left\| \ddot{\vec{x}}^n \right\|_{\xi} \right]^2} \quad (7.6)$$

qui reste nulle pour un mouvement rigide même pour le cas particulier du mouvement de rotation uniforme.

La taille du pas de temps est déduite de l'erreur d'intégration (7.6) et d'une tolérance *PRCU* fixée par l'utilisateur (valeur typique  $10^{-4}$ ). La relation qui doit être vérifiée est

$$e_{int} < PRCU \quad (7.7)$$

La nouvelle taille du pas de temps implicite prédite  $\Delta t_p$  qui permet d'obtenir l'erreur d'intégration voulue (par exemple la moitié de la tolérance *PRCU*, ce qui permet de rester sous la tolérance en cas de variation de l'erreur) est déduite de la taille du pas de temps actuel ( $\Delta t_a$ ) et de l'erreur d'intégration ( $e_{int}$ ). En utilisant la relation développée par Géraudin [63], il vient

$$\left[ \frac{\Delta t_p}{\Delta t_a} \right]^{\eta_e} = \frac{PRCU}{2e_{int}} \quad (7.8)$$

avec  $\eta_e$  un paramètre qui est évalué comme suit : en analysant l'erreur de référence (7.4), il apparaît que  $\lim_{\Omega \rightarrow 0} e_{ref} = \mathcal{O}(\Omega^3)$  et que  $\lim_{\Omega \rightarrow \infty} e_{ref} = \mathcal{O}(\Omega^2)$ . Dès lors, nous déduisons  $\eta \in [2, 3]$ . Pratiquement nous choisissons  $\eta = 2.5$ . La méthode pour modifier le pas de temps, basée sur les relations (7.6) et (7.8), est celle que nous avons développée dans [116,110] qui permet d'intégrer avec précision des systèmes non-linéaires en modifiant la taille du pas de temps le moins souvent et le plus judicieusement possible.

De plus, comme nous l'avons montré dans [110], cette méthode de gestion de l'erreur d'intégration peut aussi être utilisée pour calculer la sécurité utilisée pour évaluer la taille du pas de temps (6.10) d'une méthode explicite. Nous montrerons dans ce chapitre que cette méthode s'avère nécessaire lors de l'étude de la dynamique rapide par un schéma explicite.

## 7.2 Gestion de la réactualisation de la matrice tangente

Pour des problèmes non-linéaires, si la matrice de raideur n'est pas recalculée et inversée, l'itération est beaucoup moins chère. Cependant la convergence de ce schéma modifié de Newton-Raphson est plus lente que si cette matrice tangente est calculée et inversée à chaque itération. De plus, les itérations sans réactualisation peuvent aussi diverger. Dès lors, les critères utilisés pour décider de la réactualisation, doivent considérer deux points [110, 116] :

- (i) la convergence des itérations doit être assurée;
- (ii) ne pas réactualiser la matrice de raideur doit diminuer le temps de calcul.

L'évolution du résidu adimensionnel utilisé dans la relation (B.6) indique si les itérations convergent. Tant que ce résidu décroît, même si la matrice tangente n'est pas réactualisée, le processus converge. Un indicateur qui permet de savoir s'il est intéressant de recalculer cette matrice, est de calculer le ratio  $S_{ratio}$  entre le temps CPU nécessaire pour une itération avec réactualisation de la matrice tangente et le temps CPU nécessaire pour une itération sans réactualisation de la matrice tangente [110, 116]. Ce ratio est en général beaucoup plus grand que l'unité et sa valeur augmente avec le nombre de degrés de liberté du problème. L'algorithme proposé est le suivant

- (i) la matrice tangente est recalculée à la première itération si la taille du pas de temps a changé ( $\mathbf{S}$  dépend de  $\Delta t$ ) ou si la ligne de ciel a changé (contact entre corps déformables);
- (ii) après la première itération, si le résidu est divisé par  $\frac{S_{ratio}}{10}$  (ce qui assure la convergence puisque le résidu diminue), la matrice tangente est gardée constante jusqu'à ce que le numéro de l'itération devienne supérieur à  $S_{ratio}$  (ce qui permet d'assurer la convergence la plus rapide possible);
- (iii) si le résidu n'a pas diminué de  $\frac{S_{ratio}}{10}$ , l'itération suivante se fait avec réactualisation de la matrice de raideur, mais si le résidu a augmenté, cette itération avec réactualisation se fait en reprenant les valeurs nodales de la dernière itération ayant convergé (c'est-à-dire la pénultième itération) et non de la précédente itération qui n'a pas convergé.

Cet algorithme permet d'éviter de recalculer et d'inverser un nombre important de matrices tangentes. Pour les problèmes ayant beaucoup de degrés de liberté, le temps de résolution est ainsi fortement diminué comme nous l'avons illustré dans [110, 116].

## 7.3 Gestion de l'utilisation combinée des algorithmes

Dans cette section, nous exposons les critères que nous avons développés pour passer d'un algorithme à un autre. Nous utilisons l'erreur d'intégration (7.6) et un rapport  $r_{ratio}^*$  entre le temps CPU nécessaire au calcul d'un pas implicite et le temps CPU nécessaire au calcul d'un pas explicite. Un tel ratio a été utilisé par Ramirez et Belytschko [128] pour déterminer si la simulation complète d'un système linéaire devait se faire avec un schéma explicite ou un schéma implicite. Nous généralisons cette méthode aux problèmes non-linéaires et à la combinaison d'algorithmes. Dans un premier temps le ratio  $r_{ratio}^*$  est évalué. Si la méthode actuelle est implicite, le coût moyen de la méthode implicite est calculé en ajoutant 0.9 fois le temps CPU implicite moyen à 0.1 fois le temps nécessaire au dernier pas implicite. La même technique est obtenue pour évaluer le temps CPU moyen d'un pas explicite. Le ratio  $r_{ratio}^*$  est alors obtenu en divisant ces deux temps. L'initialisation de  $r_{ratio}^*$  est obtenue en commençant l'analyse par un pas explicite. Ce pas, dont le CPU nécessaire est calculé, est rejeté et l'analyse redémarre en implicite. Les temps CPU nécessaires à ce pas explicite et à ce pas implicite permettent d'initialiser  $r_{ratio}^*$ .

### 7.3.1 Décision de passage d'un algorithme implicite vers un algorithme explicite

Soit  $\gamma_{ie}$  la sécurité du critère de passage d'un algorithme à un autre (valeur typique  $\gamma_{ie} = 2$ ). Dès lors, le critère de passage d'un algorithme implicite à un algorithme explicite s'écrit

$$\gamma_{ie} \Delta t_{impl} < r_{ratio}^* \Delta t_{expl} \quad (7.9)$$

Dans cette relation, la sécurité  $\gamma_{ie}$  est prise supérieure à l'unité de manière à éviter de passer d'une méthode à l'autre trop souvent. Une discussion sur le choix de cette valeur peut être trouvée dans [111]. Le pas explicite est toujours accessible par la relation (6.10) ou (6.22).

Cette méthodologie permet de prendre en compte le nombre de degrés de liberté, l'efficacité de l'algorithme, les mises à jour de la matrice de raideur, les tolérances sur les résidus et sur l'erreur d'intégration.

Si l'algorithme est passé d'une méthode implicite à une méthode explicite, il faut maintenant être capable de repasser à une méthode implicite si la dynamique s'adoucit.

### 7.3.2 Décision de passage d'un algorithme explicite vers un algorithme implicite

Pendant que la méthode utilisée était une méthode implicite, le pas de temps explicite était toujours accessible. Par contre, lorsque la méthode utilisée est explicite, le pas de temps implicite n'est pas directement accessible. En utilisant les développements de la section 7.1, les accélérations nodales nous permettent d'estimer la taille du pas implicite qui permettrait d'intégrer la simulation. En utilisant la relation (7.8), l'erreur d'intégration est proportionnelle à  $\Delta t^{\eta_e}$ , ce qui conduit à

$$\left[ \frac{\Delta t_{impl}}{\Delta t_{expl}} \right]^{\eta_e} = \frac{PRCU}{2e_{int} \left( \Delta t_{expl}, \ddot{\vec{x}}_{expl} \right)} \quad (7.10)$$

En utilisant cette relation et en inversant la relation (7.6), la taille du pas implicite s'écrit

$$\Delta t_{impl} = \left[ 6 \frac{\frac{PRCU}{2} e_{ref} (\Omega = 0.6) \sqrt{\vec{x}_0^\xi \cdot \vec{x}_0^\xi} (\Delta t_{expl})^{\eta_e - 2}}{\sqrt{\sum_\xi \left[ \left\| \ddot{\vec{x}}_{expl}^{n+1} \right\|^\xi - \left\| \ddot{\vec{x}}_{expl}^n \right\|^\xi \right]^2}} \right]^{\frac{1}{\eta_e}} \quad (7.11)$$

Dès lors, le critère de bascule vers la méthode implicite est similaire à (7.9), et il vient

$$\Delta t_{impl} > \gamma_{ie} r_{ratio}^* \Delta t_{expl} \quad (7.12)$$

avec  $\Delta t_{expl}$  le pas de temps explicite actuel.

Cependant, lors de l'implémentation pratique de cette méthode, certains problèmes tels que la divergence des itérations pour de grands pas de temps implicites peuvent rendre imprécis l'évaluation de  $r_{ratio}^*$ . Nous allons étudier ce problème dans la section suivante.

### 7.3.3 Autres considérations sur le basculement

Un problème dans l'évaluation de  $r_{ratio}^*$  réside dans le fait que l'algorithme implicite est passé vers un algorithme explicite lorsque la dynamique était rapide et les problèmes de convergence fréquents. Du fait du nombre important d'itérations, le temps CPU nécessaire au calcul d'un pas implicite était important. Dès lors, le facteur  $r_{ratio}^*$  est aussi important. Par contre, si l'algorithme repasse à une méthode implicite, c'est que la dynamique du système s'est adoucie. Le ratio  $r_{ratio}^*$  est alors surévalué. Nous le corrigeons en modifiant le temps CPU moyen d'un pas implicite pendant le calcul explicite.

Si le pas de temps implicite prédit  $\Delta t_{impl}$  augmente, ce temps CPU est diminué. Par exemple, si  $\Delta t_{impl}$  augmente de 10%, dès lors, le temps CPU moyen d'un pas implicite est diminué de 2.5%. Ce choix de valeurs arbitraire a été obtenu par expérience numérique.

La convergence des itérations implicites est maintenant analysée. Considérons un pas de temps implicite dont l'erreur d'intégration (7.6) vérifie la relation (7.7) mais pour lequel le pas de temps suivant diverge. Dès lors, la relation (7.9) peut être vérifiée et l'algorithme peut basculer vers une méthode explicite. Mais dans ce cas, la relation (7.12) est aussi vérifiée, et l'algorithme redevient implicite ce qui conduit à de nouveaux problèmes de divergence. Dès lors, la gestion de la divergence des itérations est la suivante. Quand un problème de divergence survient, le pas implicite est recommencé avec une plus petite taille de pas de temps. Si la condition (7.9) est vérifiée, l'algorithme passe en explicite mais il reste en implicite dans le cas contraire. Pour ces deux possibilités, le saut adimensionnel d'accélération qui en résulte et la taille du nouveau pas de temps sont alors gardés en mémoire. Ce saut d'accélération est défini en considérant les relations (7.6) et (7.8), et il vient

$$e_a = \frac{\sqrt{\sum_{\xi} \left[ \left\| \ddot{\vec{x}}^{n+1} \right\|^{\xi} - \left\| \ddot{\vec{x}}^n \right\|^{\xi} \right]^2}}{\sqrt{\bar{x}_0^{\xi} \cdot \bar{x}_0^{\xi} [\Delta t]^{\eta_e}}} \quad (7.13)$$

qui est conservé en mémoire sous la notation  $e_{a,g}$ . Le pas de temps gardé en mémoire ( $\Delta t_{impl,g}$ ) est la moyenne entre le pas actuel et le pas qui n'a pas convergé. Dès lors, la taille du pas de temps implicite (utilisée dans le cas de l'algorithme implicite ou prédite dans le cas de l'algorithme explicite) est limitée à  $\Delta t_{impl,g}$ . Pour les deux schémas, lorsque le saut d'accélération adimensionnel (7.13) devient inférieur à  $e_{a,g}$ , le pas de temps implicite maximal est augmenté. Il vient alors

$$\begin{aligned} \Delta t_{impl,g} &\leftarrow \Delta t_{impl,g} \left[ \frac{e_{a,g}}{e_a} \right]^{\frac{1}{\eta_e}} \\ e_{a,g} &= e_a \end{aligned} \quad (7.14)$$

Remarquons que nous avons discuté dans [111] l'influence de paramètres comme la dissipation numérique de l'algorithme explicite sur la transition automatique. Il apparaît que si l'algorithme explicite ne possède pas de dissipation numérique, les oscillations numériques ne permettent pas de vérifier la relation de passage vers un algorithme implicite (7.12) car le pas de temps implicite prédit (7.11) est fortement perturbé par ces oscillations.

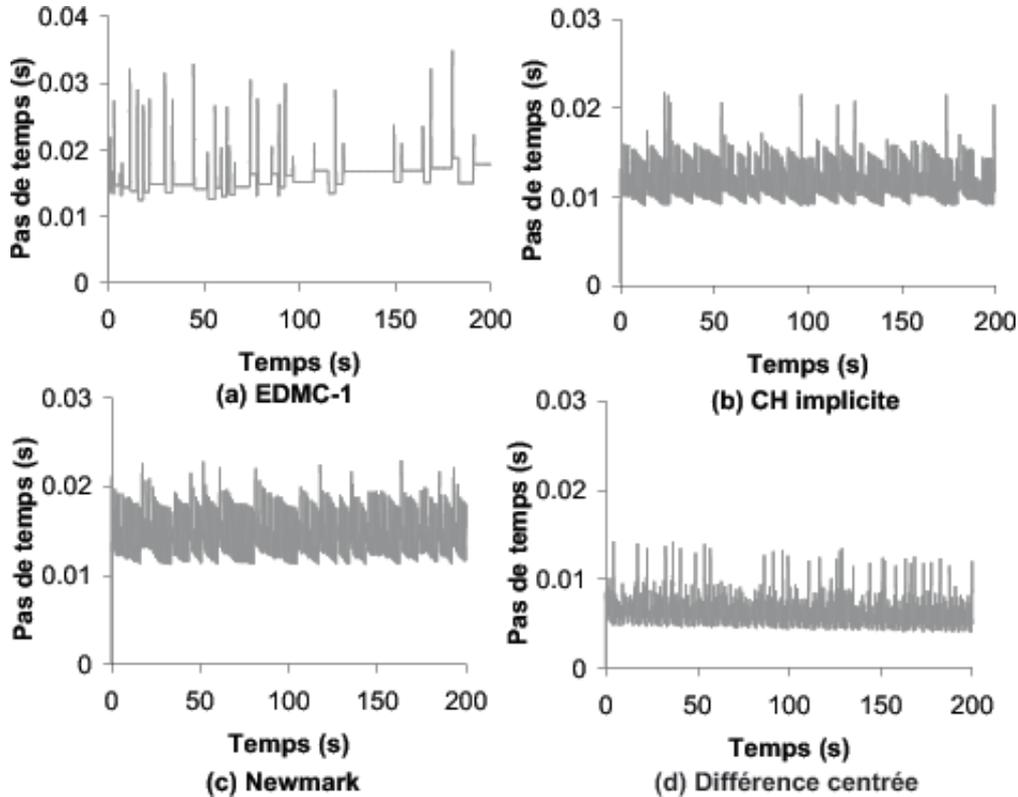


Figure 7.1: Evolution temporelle de la taille du pas de temps, résolution avec pas de temps automatique - (a) algorithme EDMC-1 - (b) algorithme CH implicite - (c) algorithme de Newmark - (d) algorithme de la différence centrée.

## 7.4 Exemples numériques de la gestion automatique

Dans cette section nous allons mettre en évidence, au travers d'exemples numériques, l'efficacité de la gestion automatique des paramètres. Dans un premier temps, nous étudierons la gestion automatique du pas de temps, puis le basculement automatique entre un algorithme implicite et un algorithme explicite. Remarquons que nous avons publié dans [111] une discussion sur le passage automatique d'un algorithme à un autre pour un algorithme implicite de type  $\alpha$ -généralisé.

### 7.4.1 Exemple 1 : Etude d'un système masse-ressort

Nous reprenons l'exemple du système masse ressort en rotation (Figure 2.1) présenté dans la section (2.2.4). Nous allons comparer les résultats obtenus en utilisant la gestion automatique du pas de temps (tolérance  $PRCU = 10^{-4}$  sur l'erreur d'intégration (7.7)), pour les algorithmes :

- (i) dissipatif implicite énergétiquement consistant (EDMC-1) avec un rayon spectral infini  $\rho_\infty = 0.8$  (les valeurs des paramètres se déduisant par la Table 3.1);

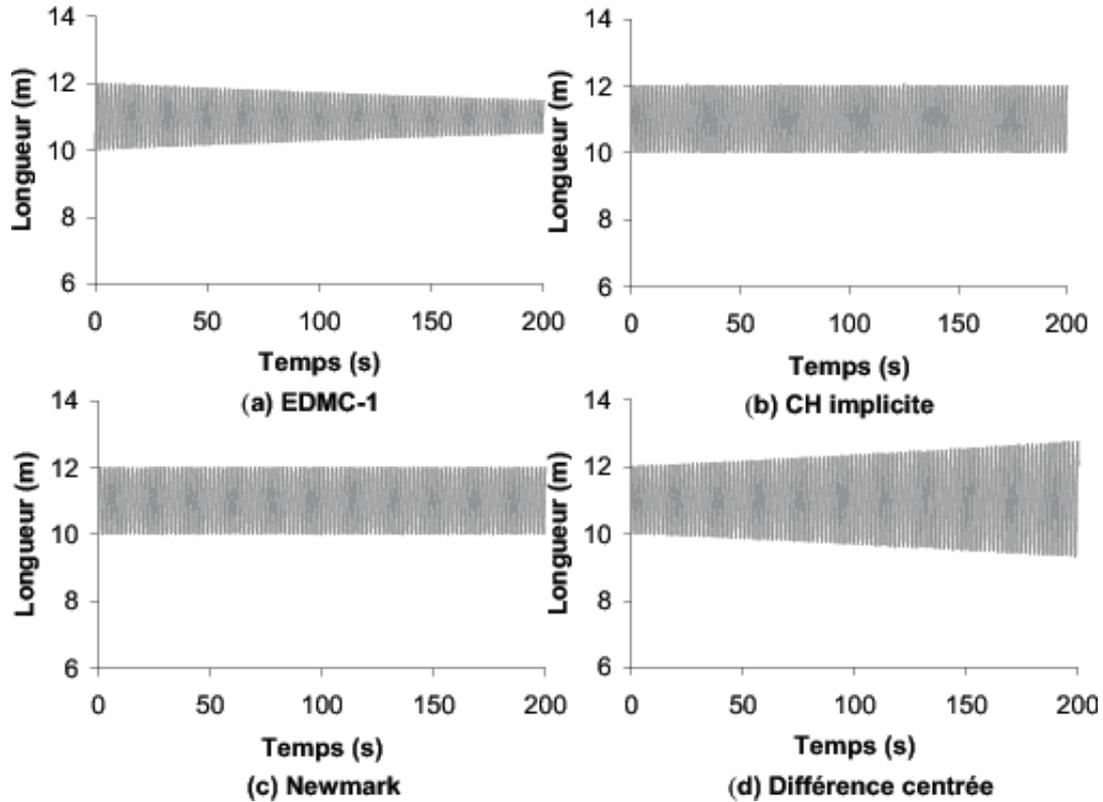


Figure 7.2: Evolution temporelle de la longueur du ressort, résolution avec pas de temps automatique - (a) algorithme EDMC-1 - (b) algorithme CH implicite - (c) algorithme de Newmark - (d) algorithme de la différence centrée.

- (ii) implicite de Chung-Hulbert avec un rayon spectral infini  $\rho_\infty = 0.2$  (les valeurs des paramètres se déduisant par la Table 2.2);
- (iii) implicite de Newmark avec un rayon spectral infini  $\rho_\infty = 1$ ;
- (iv) explicite de la différence centrée (sécurité  $\gamma_s = 2/3$ , le pas de temps étant calculé par la méthode de Benson [20]).

Remarquons que nous prenons des valeurs de rayon spectral infini  $\rho_\infty$  différentes pour le schéma EDMC-1 et de Chung-Hulbert, car nous avons vu à la section 4.5.1 que le schéma EDMC-1 était efficace pour un rayon spectral proche de 1 et que le schéma de Chung-Hulbert était efficace pour un rayon spectral proche de zéro. La Figure 7.1 illustre la taille du pas de temps. Nous voyons, que pour intégrer avec la même précision, c'est l'algorithme EDMC-1 qui utilise la plus grande taille moyenne de pas de temps, alors que c'est l'algorithme de la différence centrée qui utilise la plus faible (ce qui n'est pas étonnant). La Figure 7.2 représente l'évolution de la longueur obtenue avec les différentes simulations. Nous tirons trois enseignements de ces courbes. Le premier est que c'est l'algorithme EDMC-1 qui dissipe le plus d'énergie. Cela provient en partie

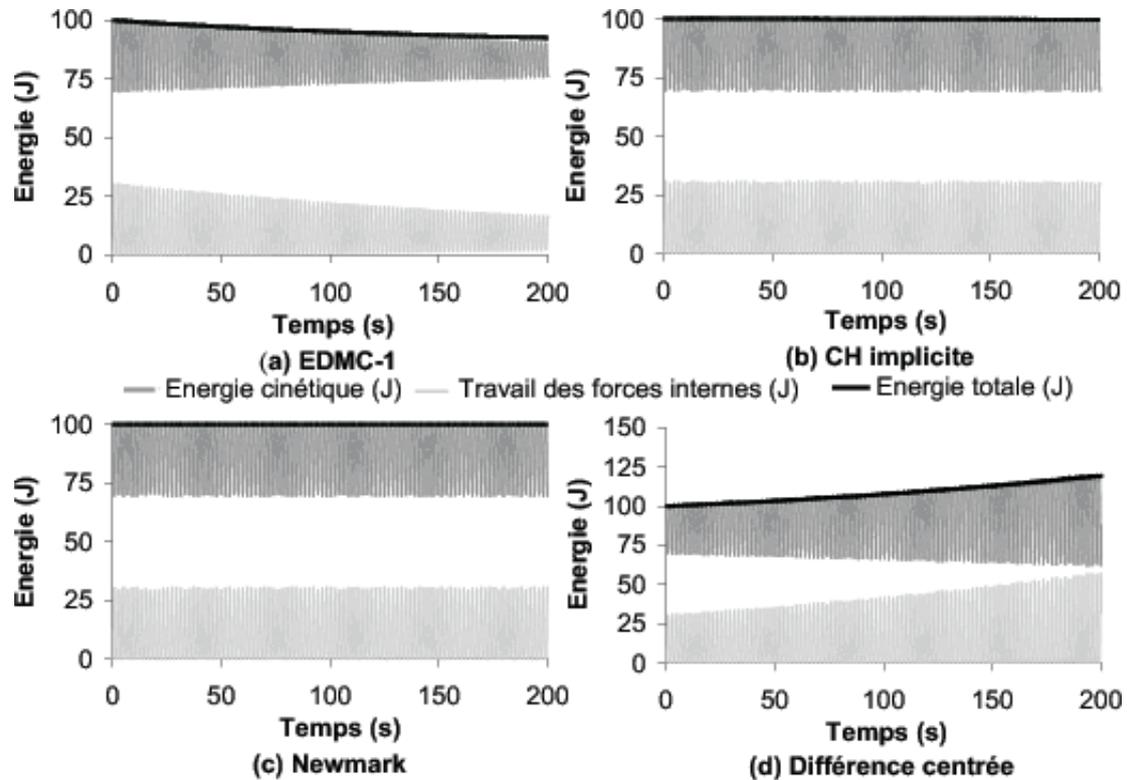


Figure 7.3: Evolution temporelle de l'énergie, résolution avec pas de temps automatique - (a) algorithme EDMC-1 - (b) algorithme CH implicite - (c) algorithme de Newmark - (d) algorithme de la différence centrée.

du fait que le pas de temps utilisé est le plus grand, ce qui augmente la pulsation adimensionnelle et donc la dissipation, mais aussi du fait que le schéma EDMC-1 dissipe plus fortement les basses fréquences que l'algorithme de Chung-Hulbert. Le deuxième enseignement est que les méthodes de Newmark et de Chung-Hulbert ne montrent pas de divergence comme celles observées avec un grand pas de temps aux Figures 2.3 et 2.7. L'algorithme de gestion de la taille du pas de temps est donc capable de limiter le phénomène d'instabilité propre à ces méthodes dans le cadre non-linéaire. Enfin le troisième est que l'algorithme explicite de la différence centrée ne conduit plus à une aussi forte instabilité que lorsque le pas de temps est pris égal au pas critique comme illustré par la Figure 6.3. Cependant l'amplitude des oscillations augmente quand même avec le temps, ce qui prouve que l'algorithme reste instable. Avec une tolérance *PRCU* plus faible cette instabilité serait encore réduite. Ces trois observations sont confirmées par l'analyse de l'énergie illustrée à la Figure 7.3. Remarquons que, bien que le rayon spectral de la méthode de Chung-Hulbert soit inférieur à celui de la méthode EDMC-1, la dissipation numérique est moindre. Cela provient de deux causes. La première est que pour un même rayon spectral infini et une même pulsation adimensionnelle, la méthode EDMC-1 a un rayon spectral plus faible, ce qui correspond à plus de dissipation

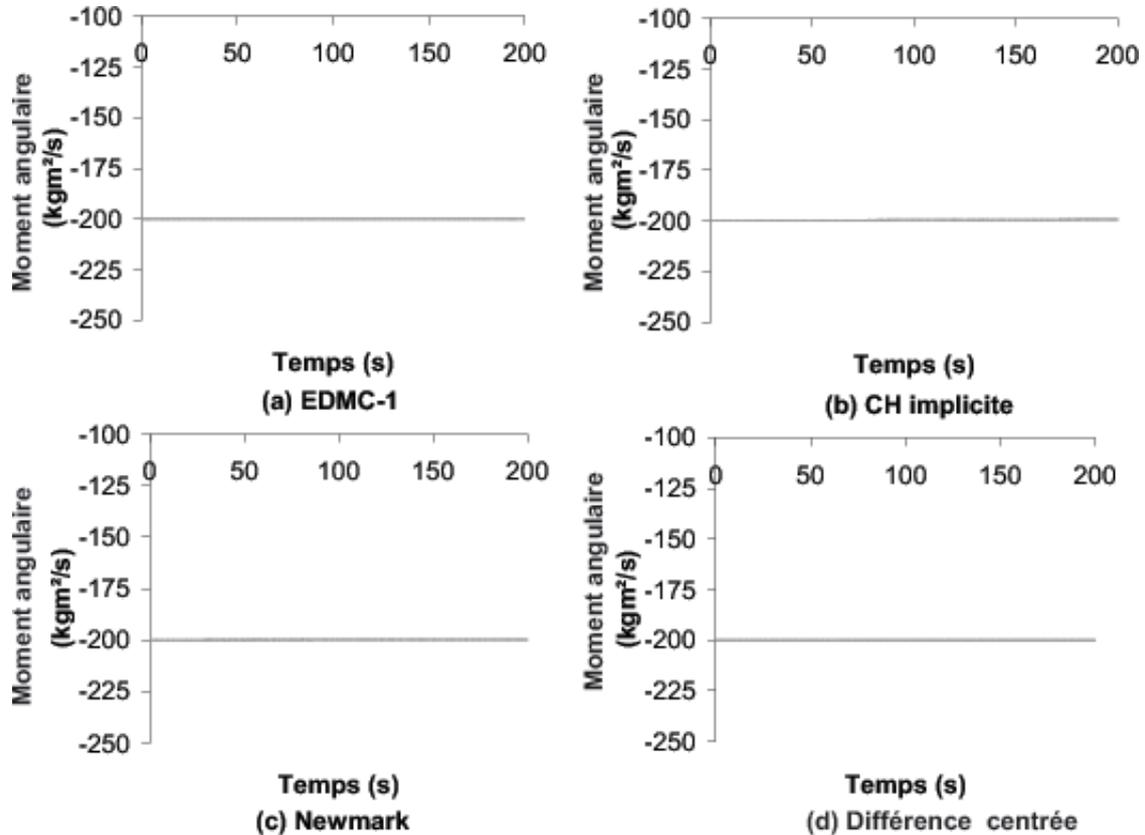


Figure 7.4: Evolution temporelle du moment angulaire, résolution avec pas de temps automatique - (a) algorithme EDMC-1 - (b) algorithme CH implicite - (c) algorithme de Newmark - (d) algorithme de la différence centrée.

(Figure 3.5). La seconde cause est que le pas de temps moyen de la méthode EDMC-1 est plus grand que celui de la méthode de Chung-Hulbert. La dissipation est donc plus importante. La Figure 7.4 représente le moment angulaire. Pour la simulation EDMC-1, le moment angulaire est conservé comme le prévoit la théorie. De même, l'algorithme de la différence centrée étant symplectique, le moment angulaire est conservé. Pour les schémas de Newmark et de Chung-Hulbert, le pas de temps est suffisamment faible pour que le moment angulaire soit conservé.

### 7.4.2 Exemple 2 : Impact de deux cylindres

Reprenons l'étude de l'impact des deux cylindres élasto-plastiques de la section 5.6.1, mais en utilisant les algorithmes

- (i) explicite de Chung-Hulbert avec un rayon spectral de bifurcation  $\rho_b = 0.2$  (et une sécurité  $\gamma_s = 0.9$ );
- (ii) explicite de la différence centrée (avec une sécurité  $\gamma_s = 0.9$ ).

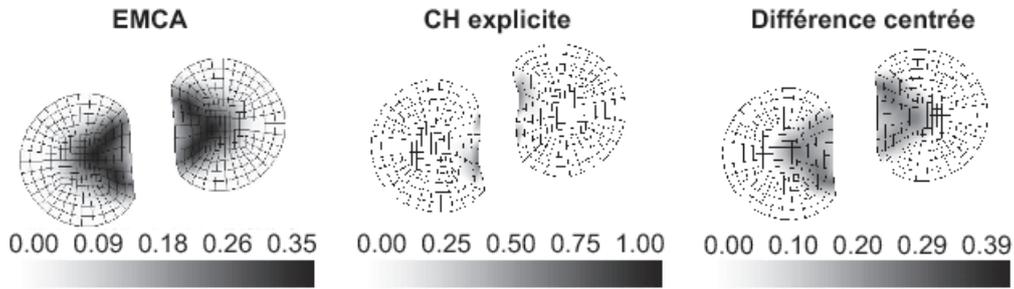


Figure 7.5: Déformations finales ( $t = 4s$ ) et déformations plastiques équivalentes pour les deux cylindres élasto-plastiques parallèles.

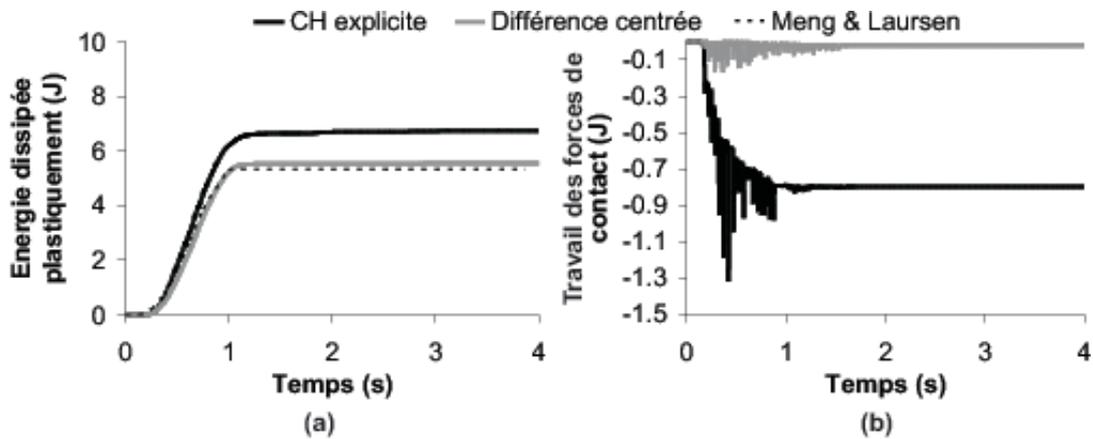


Figure 7.6: Evolution temporelle de l'énergie pour les deux cylindres élasto-plastiques parallèles - (a) énergie dissipée plastiquement - (b) travail des forces de contact.

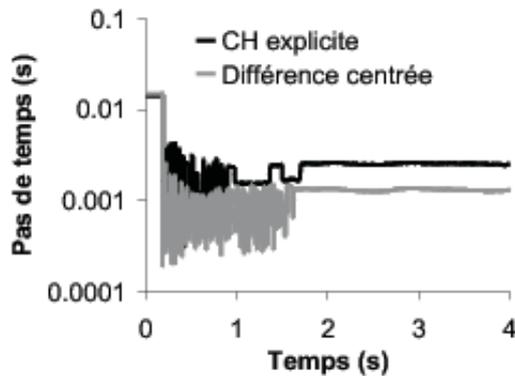


Figure 7.7: Evolution temporelle de la taille du pas de temps.

Pour les deux cylindres, la vitesse du son dans le matériau vaut  $\sqrt{\frac{Y}{2\rho[1+\nu]}} = 2.2m/s$ , ce qui est de l'ordre de grandeur de la vitesse des cylindres et fait de ce problème une simulation de dynamique rapide. Dans ce cas, si le pas de temps est pris égal au pas de temps critique (fois une sécurité  $\gamma_s = 0.9$ ), la solution diverge très rapidement lorsque le contact apparaît. Par contre en utilisant une gestion automatique du pas de temps pour les deux méthodes explicites (tolérance  $PRCU = 10^{-4}$  sur l'erreur d'intégration (7.7)), les solutions aboutissent, même si les résultats ne sont pas identiques aux résultats implicites (Figure 7.5).

La Figure 7.5 illustre les déformations plastiques équivalentes à la fin de la simulation ( $t = 4s$ ). Nous rapportons la solution obtenue avec l'algorithme implicite EMCA pour comparer les solutions. Il apparaît que si la méthode de la différence centrée donne une solution (déformations plastiques équivalentes) surestimée de 10%, la méthode explicite de Chung-Hulbert surestime les déformations aux nœuds qui ont été en contact. Cette différence se confirme en analysant l'évolution des énergies au cours du temps. La Figure 7.6 (a) représente l'évolution de l'énergie dissipée plastiquement, et montre que pour la méthode explicite de Chung-Hulbert, cette énergie est surestimée. La Figure 7.6 (b) représente le travail des forces de contact. Pour la méthode explicite de Chung-Hulbert, le travail à la fin de la simulation n'est pas nul, ce qui correspond à une perte d'énergie du système, même si elle reste faible. Finalement, La Figure 7.7 représente l'évolution de la taille du pas de temps. Nous voyons qu'au temps  $t \simeq 0.18s$ , les cylindres entrent en contact et que la gestion automatique diminue la taille du pas de temps. La méthode explicite de Chung-Hulbert permet de travailler avec des pas plus grands (2 fois plus), même si la précision finale obtenue est beaucoup plus faible.

### 7.4.3 Exemple 3 : Barre de Taylor

Reprenons l'exemple de la barre de Taylor déjà analysé à la section 4.3.2. Nous augmentons la discrétisation de la barre, afin de mieux faire apparaître l'intérêt de combiner les méthodes implicites et explicites. La nouvelle discrétisation est illustrée à la Figure 7.8 et comprend 1152 (8 selon les axes  $x$  et  $y$ , et 24 sur la longueur) éléments. Ses propriétés matérielles sont reprises à la Table 4.3. De plus, plutôt que de fixer selon l'axe de la barre les nœuds de la base, nous définissons une matrice rigide fixe à une distance de  $1mm$  de cette base. L'interaction se fait avec frottement (pénalité normale  $k_N = 10^8$ , pénalité tangentielle  $k_T = 10^6$  et coefficient de frottement  $\mu_c = 0.2$ ).

Les paramètres de gestion automatique de la section 7.1 et de la section 7.3 (gestion de la taille du pas de temps (7.7), basculement vers la méthode explicite (7.9), évaluation du pas de temps implicite équivalent (7.11) et basculement vers un algorithme implicite (7.12)) sont : dépendance entre le pas et l'erreur  $\eta_e = 2.5$ , sécurité de basculement  $\gamma_{ie} = 1.5$  et précision sur l'erreur d'intégration  $PRCU = 10^{-4}$ . Remarquons que diminuer  $\eta_e$  ou  $\gamma_{ie}$ , correspond à favoriser le basculement d'une méthode à une autre et inversement. En effet, si  $\eta_e$  est diminué, le pas de temps implicite prédit (7.11) est plus grand, et si  $\gamma_{ie}$  est diminué, les critères de basculement (7.9) et (7.12) seront plus vite vérifiés. Pour



Figure 7.8: Discrétisation raffinée de la barre de Taylor.

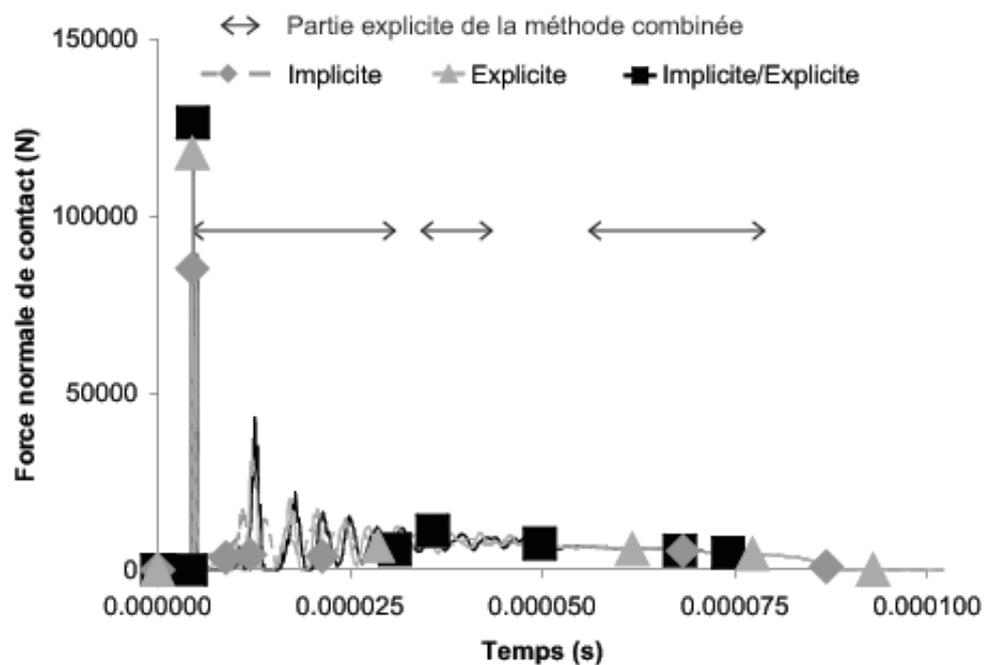


Figure 7.9: Evolution temporelle des forces de contact normale pour la barre de Taylor raffinée.

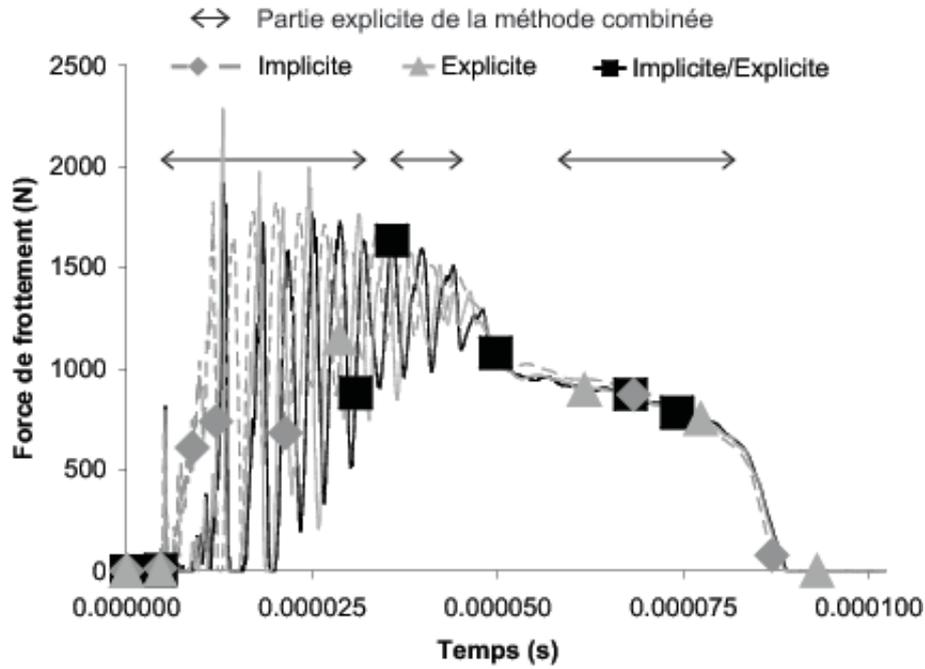


Figure 7.10: Evolution temporelle des forces de frottement pour la barre de Taylor raffinée.

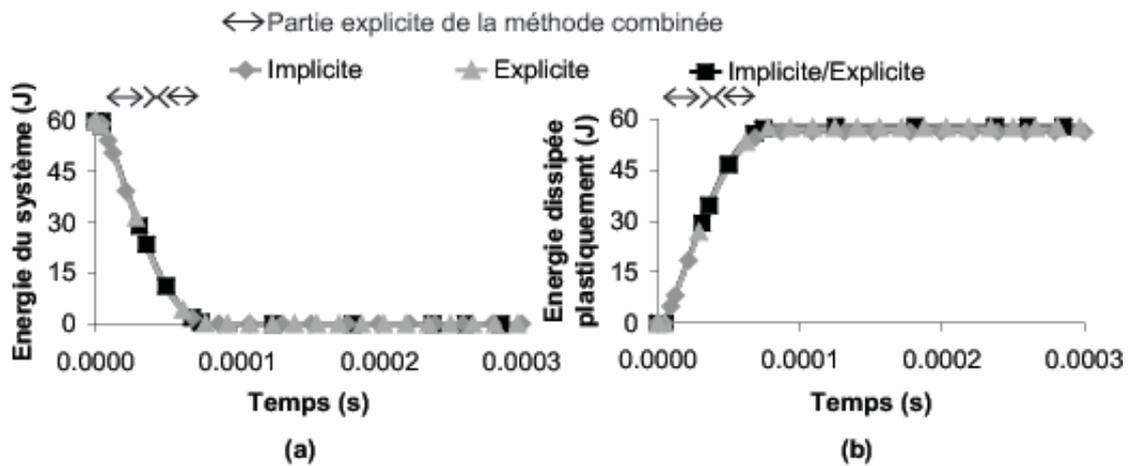


Figure 7.11: Evolution temporelle de l'énergie de la barre de Taylor raffinée - (a) énergie du système (énergie cinétique ajoutée au travail des forces internes duquel est retirée l'énergie dissipée plastiquement) - (b) énergie dissipée plastiquement.

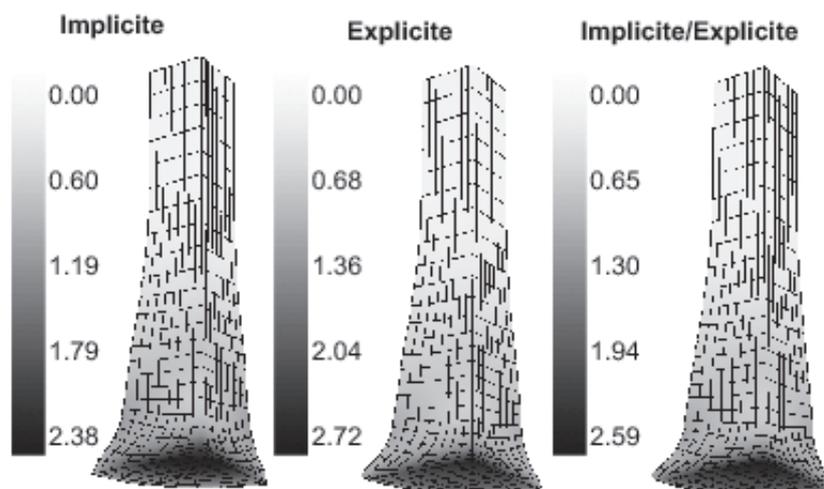


Figure 7.12: Déformation plastique équivalente de la barre de Taylor raffinée.

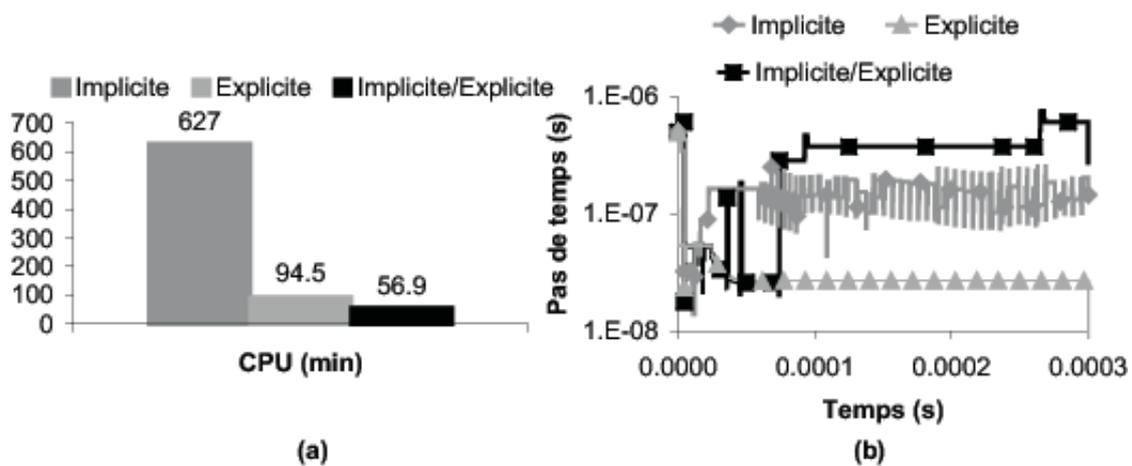


Figure 7.13: Temps de calcul de la barre de Taylor raffinée - (a) temps CPU pour la simulation - (b) évolution de la taille du pas de temps.

les pas implicites, la tolérance du système de Newton-Raphson atteinte est  $10^{-8}$  ((2.55) ou (B.6)), et la précision du système de line search atteinte est  $10^{-5}$  ((2.54) ou (B.5)). Nous comparons les résultats obtenus grâce :

- (i) à l'algorithme énergétiquement consistant EDMC avec un rayon spectral infini de 0.8 (paramètres calculés par la Table 3.1);
- (ii) à l'algorithme explicite  $\alpha$ -généralisé avec un rayon spectral de bifurcation égal à 0.8 et une sécurité  $\gamma_s = 0.7$ ;
- (iii) à la combinaison des deux algorithmes ci-dessus où le changement de méthode se fait automatiquement, le changement vers l'algorithme implicite se faisant par la méthode expliquée à la section (6.2.6).

La simulation se déroule sur  $0.4ms$  de manière à prendre en compte le rebond de la barre.

La Figure 7.9 illustre l'évolution temporelle de la force de contact normale et la Figure 7.10 illustre l'évolution temporelle de la force de frottement. Pour la méthode implicite/explicite combinée, nous représentons, à l'aide d'une double flèche, les intervalles calculés par la méthode explicite (les autres intervalles sont calculés par une méthode implicite). Les résultats obtenus par la méthode combinée sont similaires à ceux obtenus par une simulation entièrement en explicite ou en implicite. Il apparaît que, pour l'utilisation de la méthode combinée, l'algorithme utilisé devient explicite au moment de l'impact. L'algorithme tente alors par deux fois de redevenir implicite, mais repasse à un schéma explicite suite aux importantes non-linéarités. Finalement, il repasse définitivement en implicite quand le contact se stabilise (moins d'oscillations). Le rebond de la barre est alors simulé en implicite. La Figure 7.11 (a) illustre l'évolution de l'énergie interne (énergie cinétique ajoutée au travail des forces internes duquel est retirée l'énergie dissipée plastiquement) et la Figure 7.11 (b) l'évolution de l'énergie dissipée plastiquement. Il apparaît que les solutions sont similaires à 3% près. L'algorithme explicite dissipe plastiquement un peu plus d'énergie du fait que l'expression des forces internes n'inclut pas les tenseurs correctifs  $\mathbf{C}^*$  et  $\mathbf{C}^{**}$  du chapitre 4. Cette analyse est confirmée par l'analyse des déformations plastiques (Figure 7.12) qui sont plus importantes pour la méthode explicite. Finalement, la Figure 7.13 (a) représente le temps de calcul CPU nécessaire aux simulations et la Figure 7.13 (b) l'évolution de la taille du pas de temps. Il apparaît que pour calculer l'impact avec suffisamment de précision, l'algorithme implicite utilise des pas de temps de la taille du pas explicite tout en étant plus coûteux. Par contre l'algorithme combiné passe en explicite, ce qui lui permet d'être onze fois moins cher. D'autre part, l'algorithme explicite utilise un petit pas de temps pour calculer le rebond de la barre, alors que la méthode combinée redevient implicite avec un pas de temps beaucoup plus grand, ce qui réduit le coût de 40%. Enfin signalons que pour la méthode tout implicite, la taille du pas de temps est inférieure durant le rebond par rapport à la taille du pas de temps de la méthode combinée. Cela est dû au fait que lors du passage vers l'implicite, la méthode combinée a dissipé de l'énergie avant d'équilibrer les pas explicites (section 6.2.6).

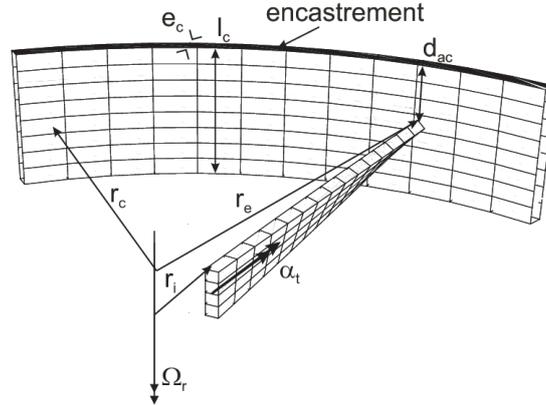


Figure 7.14: Géométrie et maillage de l'interaction aube carter.

#### 7.4.4 Exemple 4 : Modélisation simplifiée de l'interaction aube-carter

Considérons une aube vrillée de rotor avec une section droite rectangulaire. La géométrie est représentée à la Figure 7.14 et les dimensions sont reprises à la Table 7.1. L'aube et le carter sont composés du même matériau (propriétés reportées à la Table 7.1) qui obéit à une loi d'écroutissement isotrope avec saturation :

$$\Sigma_v = \Sigma_0 + [\Sigma_\infty - \Sigma_0] \left[ 1 - e^{-h_e \bar{\varepsilon}^{pl}} \right] + h_e \bar{\varepsilon}^{pl} \quad (7.15)$$

L'aube est discrétisée par 60 éléments (4 selon la section et 15 selon la longueur) alors que le carter est discrétisé par 512 éléments (64 selon la circonférence et 8 selon la section). La vitesse de rotation ( $\Omega_r$ ) est constante (Table 7.1). La configuration initiale correspond à une configuration qui équilibre les forces centrifuges. Cette mise en rotation initiale est calculée avec un algorithme de Newton-Raphson où les forces externes sont les forces d'inertie calculées analytiquement en fonction de la position des nœuds et de la vitesse de rotation imposée. La répartition de contraintes obtenues après la mise en rotation est illustrée à la Figure 7.15. Pour simuler un phénomène de balourd, l'axe de rotation de l'aube est déplacé durant le premier tour, de sorte que l'aube interagisse avec le carter, ce qui conduit à des déformations permanentes de cette dernière. Le déplacement du centre de rotation est le suivant. Sa position initiale est équivalente avec le centre de symétrie du carter. Durant la première moitié de la première révolution (c'est-à-dire durant 9ms), le centre de rotation est déplacé de 6cm dans la direction opposée de la position initiale de l'aube. Dès lors, l'aube entre en contact avec le carter (les paramètres de la loi de Coulomb sont repris à la Table 7.1). Durant la seconde moitié de la première révolution, le centre de rotation retourne à sa position initiale.

Les paramètres de gestion automatique (section 7.1 et section 7.3) sont :  $\eta_e = 2.5$ ,  $\gamma_{ie} = 1.5$  et  $PRCU = 10^{-3}$ . Comme mentionné à la section 7.4.3, diminuer  $\eta_e$  ou  $\gamma_{ie}$ , correspond à favoriser le basculement d'une méthode à une autre et inversement. Pour les pas implicites, la tolérance du système de Newton-Raphson atteinte est  $10^{-8}$  (2.55)

Table 7.1: Propriétés de l'interaction aube-carter.

Propriété	Valeur
Rayon interne du carter	$r_c = 1.305m$
Epaisseur du carter	$e_c = 5mm$
Largeur du carter	$l_c = 0.4m$
Rayon externe de l'aube	$r_e = 1.3m$
Rayon interne de l'aube	$r_i = 0.1m$
Longueur de la section droite de l'aube	$L = 0.11m$
Largeur de la section droite de l'aube	$l = 0.032m$
Angle de vrille de l'aube	$\alpha_t = 45^\circ$
Distance entre le bord de l'aube et le bord du carter	$d_{ac} = 0.145m$
Vitesse de révolution	$\Omega_r = 3333.3tr/min.$
Masse volumique	$\rho = 4450kg/m^3$
Module de Young	$Y = 110000N/mm^2$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.31$
Limite élastique initiale	$\Sigma_0 = 1000N/mm^2$
Limite élastique de saturation	$\Sigma_\infty = 1300N/mm^2$
Paramètre d'écrouissage exponentiel	$h_e = 100$
Paramètre d'écrouissage linéaire	$h = 300N/mm^2$
Pénalité normale	$k_N = 10^7$
Pénalité tangentielle	$k_T = 10^6$
Coefficient de frottement	$\mu_c = 0.2$

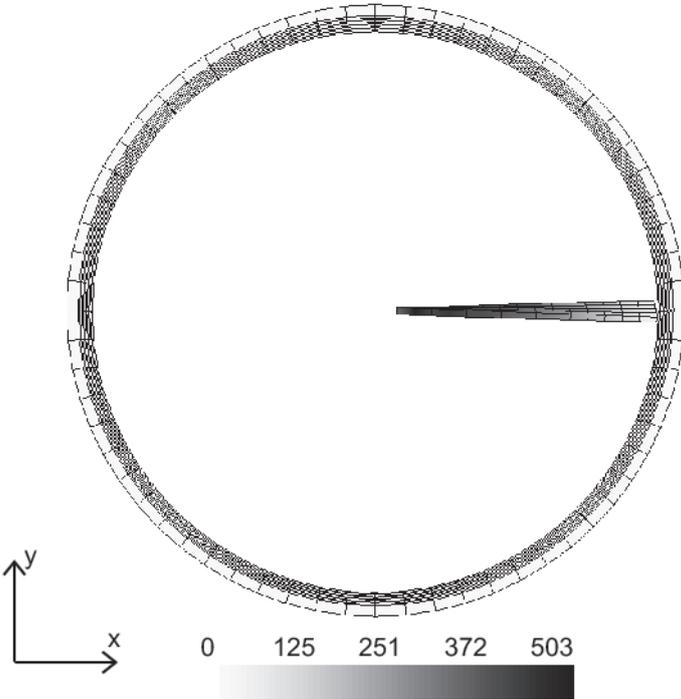


Figure 7.15: Mise en rotation de l'aube (contrainte équivalente de von Mises ( $N/mm^2$ )).

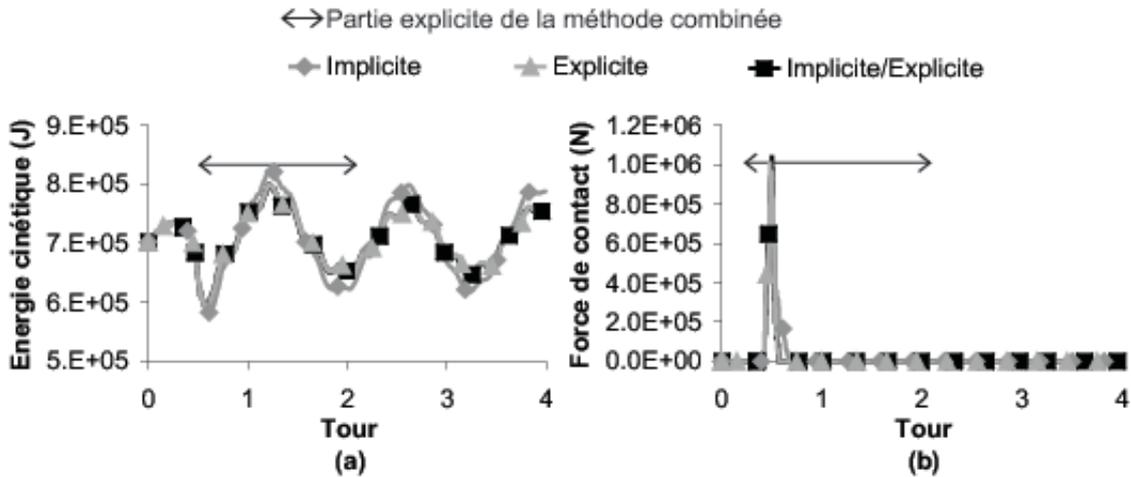


Figure 7.16: Evolution temporelle pour l'interaction aube carter - (a) énergie cinétique du système - (b) résultante des forces de contact sur l'aube.

ou (B.6), et la précision du système de line search atteinte est  $10^{-3}$  (2.54) ou (B.5). Nous comparons les résultats obtenus grâce :

- (i) à l'algorithme énergétiquement consistant EDMC avec un rayon spectral infini de 0.8 (paramètres calculés par la Table 3.1);
- (ii) à l'algorithme explicite  $\alpha$ -généralisé avec un rayon spectral de bifurcation égal à 0.2<sup>1</sup> et une sécurité  $\gamma_s = 0.7$ ;
- (iii) à la combinaison des deux algorithmes ci-dessus où le changement de méthode se fait automatiquement, le changement vers l'algorithme implicite se faisant par la méthode expliquée à la section (6.2.6).

La simulation se déroule sur 4 révolutions de manière à simuler la phase de contact qui génère les déformations plastiques ainsi que la phase de vibration libre de l'aube. Nous souhaitons que lors de la prise de contact, l'algorithme passe à une méthode explicite avant de simuler la vibration par une méthode implicite.

La Figure 7.16 (a) représente l'évolution temporelle de l'énergie cinétique (de l'aube et du carter) et la Figure 7.16 (b) représente l'évolution temporelle de la force de contact sur l'aube. Nous avons représenté sur ces figures la partie simulée par un algorithme explicite de la méthode combinée. Il apparaît que l'algorithme combiné passe d'une méthode implicite à une méthode explicite au moment de la prise de contact (après environ 4 dixièmes de tour) et repasse à une méthode implicite (après environ 2 tours) pour simuler la vibration libre de l'aube. Les courbes des énergies cinétiques et de la

<sup>1</sup>Forte dissipation numérique pour amortir les vibrations de l'aube afin que l'algorithme puisse repasser en implicite. Remarquons que pour l'exemple de la section 7.4.3, la barre n'était pas soumise à d'aussi fortes vibrations.

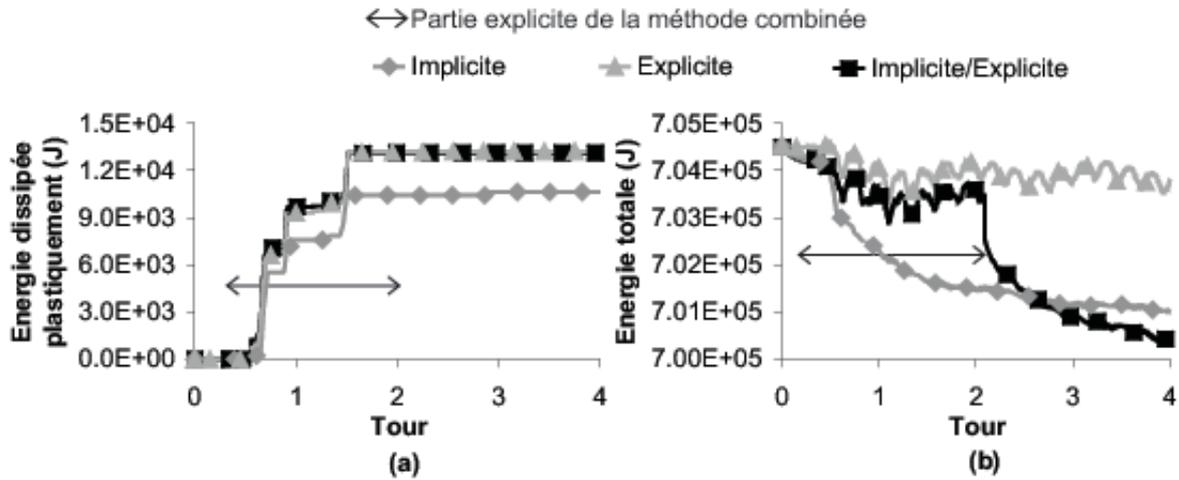


Figure 7.17: Evolution temporelle de l'énergie pour l'interaction aube carter - (a) énergie dissipée plastiquement - (b) énergie totale du système (somme de l'énergie cinétique et du travail des forces internes duquel est retirée le travail des forces externes de contact et d'entraînement).

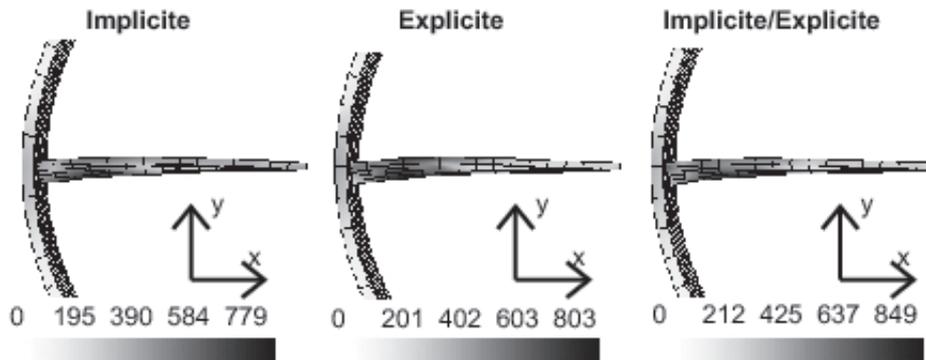


Figure 7.18: Contrainte équivalente de von Mises ( $N/mm^2$ ) pour l'interaction aube carter, après une demi révolution.

force de contact sont équivalentes à 1% près pour les différentes simulations. La Figure 7.17 (a) illustre l'évolution temporelle de l'énergie plastiquement dissipée. Il apparaît que la méthode explicite surestime l'énergie plastiquement dissipée d'environ 25% par rapport à la méthode implicite. Cette source de surestimation était déjà mentionnée à la section 7.4.3, et provient du fait que l'algorithme explicite n'équilibre pas les configurations calculées et ne possède pas les tenseurs correctifs des déformations plastiques. L'évolution de l'énergie totale du système (énergie cinétique ajoutée au travail des forces internes moins le travail des forces de contact) est représentée à la Figure 7.17 (b). Il y apparaît que, malgré la dissipation numérique, l'algorithme explicite a une énergie totale qui ne diminue pas strictement avec le temps, mais seulement en moyenne. Lors

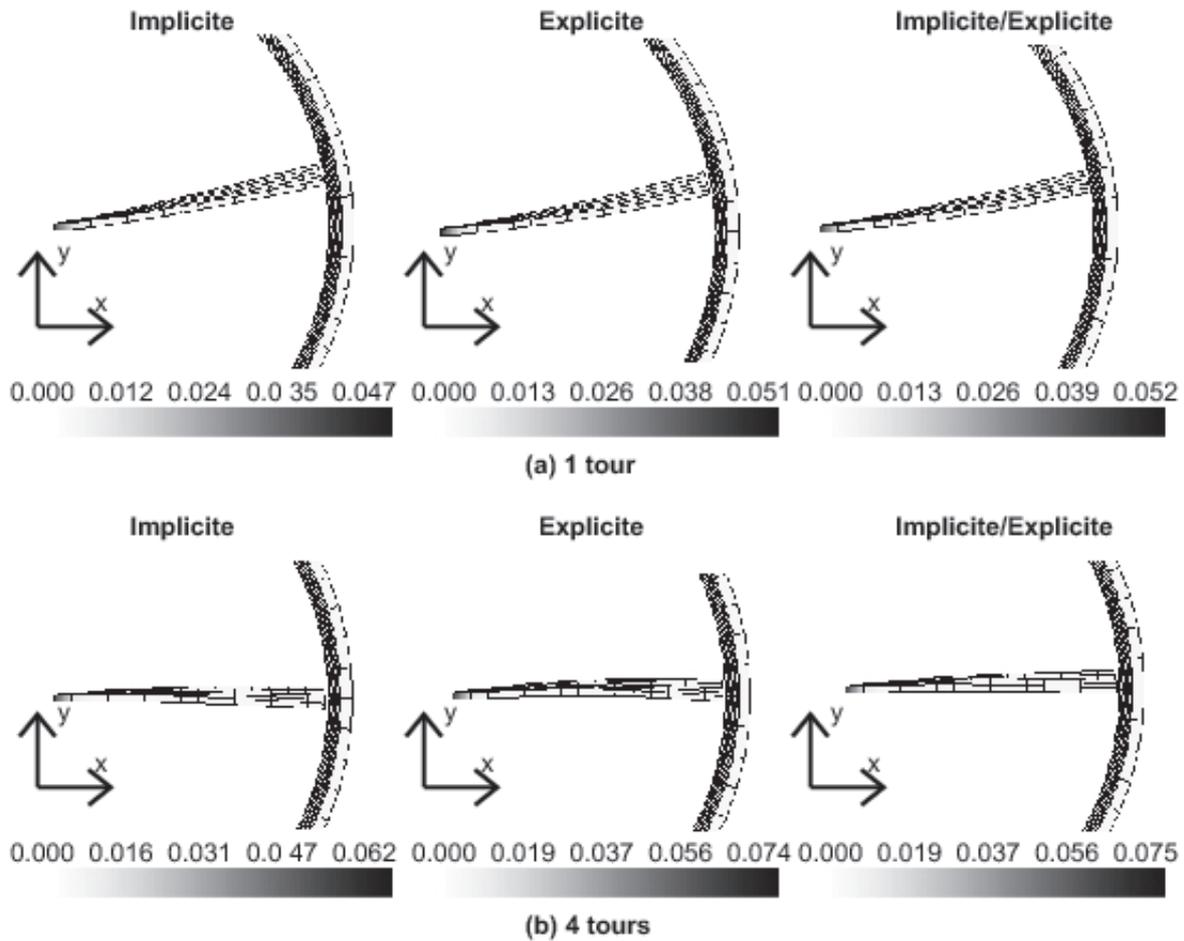


Figure 7.19: Déformation plastique équivalente pour l'interaction aube carter - (a) après une révolution - (b) après quatre révolutions.

du passage d'un algorithme explicite vers un algorithme implicite, la méthode combinée n'introduit pas d'énergie numérique, mais conduit bien à une dissipation comme cela est souhaité (*c.f.* section 6.2.6).

L'aube commence à plastifier après un demi tour. En effet, les contraintes équivalentes de von Mises après un demi-tour (valeurs reprises à la Figure 7.18) sont inférieures à la limite élastique initiale. La différence de 10% entre les solutions s'explique par la gestion du contact par la méthode de la pénalité, qui est géométriquement inadmissible (*c.f.* section 5.6.1). Les déformations plastiques permanentes après un tour et après quatre tours, sont illustrées, respectivement, à la Figure 7.19 (a) et à la Figure 7.19 (b). Remarquons que sous l'effet des vibrations, l'aube plastifie encore entre le premier et le quatrième tour. L'algorithme explicite surévalue les déformations plastiques équivalentes d'environ 8%. Les résultats de la méthode combinée utilisant un algorithme explicite lors de l'interaction entre l'aube et le carter, sont quasi similaires à ceux de la solution

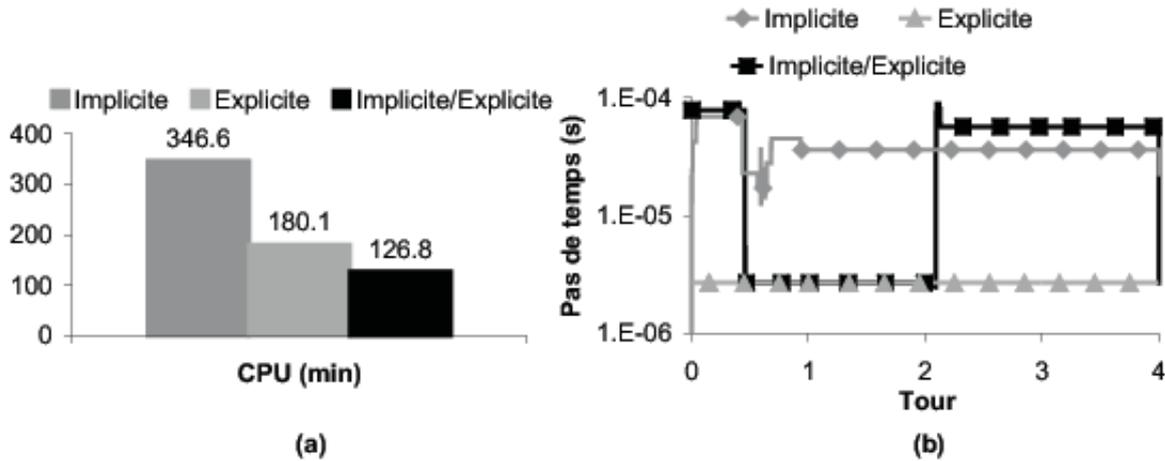


Figure 7.20: Temps de calcul pour l'interaction aube carter - (a) temps CPU pour la simulation - (b) évolution de la taille du pas de temps.

explicite. Enfin, la Figure 7.20 (a) illustre les temps de calcul CPU nécessaires aux différentes simulations. Le simulation explicite est 40% plus onéreuse que la simulation combinée, et la simulation implicite est 250% plus onéreuse que la simulation combinée. La Figure 7.20 (b) montre que la méthode combinée est passée d'un pas explicite à un pas de temps implicite 20 fois plus grand lors du basculement vers la méthode implicite, et ce, sans introduire d'énergie parasite. Remarquons que comme la méthode explicite dissipe de l'énergie, et qu'avant d'équilibrer les pas explicites, nous utilisons un rayon à la bifurcation égal à zéro (section 6.2.6), la méthode EDMC-1 implicite de la méthode combinée peut utiliser un plus grand pas de temps que la méthode complètement implicite. En effet, la majorité des oscillation numériques ont été dissipées par l'algorithme explicite avant de repasser à une méthode implicite. Nous pouvons donc conclure que la méthode combinée a permis de réduire les temps de calcul sans avoir de pertes de précision autre que celles inhérentes à l'utilisation d'un algorithme explicite.

## 7.5 Conclusion sur la gestion automatique

Nous avons présenté dans cette section, des méthodes permettant de gérer les paramètres d'intégration (pas de temps, réactualisation de la matrice de raideur) du schéma implicite, en fonction d'une erreur d'intégration et de rapports de temps CPU. Cette gestion permet à une intégration implicite de garantir une certaine précision.

Nous avons aussi montré que lors d'une simulation explicite, lorsque la dynamique étudiée a une vitesse caractéristique proche de la vitesse du son dans le matériau (vitesse qui conditionne la taille du pas de temps), le pas de temps ne peut être pris égal au pas de temps critique multiplié par une sécurité constante. Par contre, si cette sécurité est calculée en fonction de l'erreur d'intégration, les simulations aboutissent, mais restent moins précises qu'une simulation implicite. En effet, il est apparu que la méthode explicite, du fait de son manque de consistance énergétique dans le domaine non-linéaire surestimait les déformations plastiques.

A partir de l'erreur d'intégration et d'un rapport des temps CPU, nous avons développé une méthode permettant de passer d'une méthode implicite à une méthode explicite lors de la simulation de problèmes faisant se succéder des intervalles temporels gouvernés par des fréquences d'ordres très différents. Nous avons alors simulé plusieurs problèmes avec une méthode implicite, une méthode explicite et une méthode combinée. Le fait d'utiliser une combinaison des deux méthodes, gérée automatiquement, n'introduit aucune erreur supplémentaire, autres que celles venant de l'utilisation de l'algorithme explicite. De plus, cette combinaison automatique a permis de réduire le temps de calcul sans compromettre la précision.



# Chapitre 8

## Applications numériques

Dans les précédents chapitres, nous avons démontré les avantages de l'utilisation des algorithmes développés pour le cadre non-linéaire par rapport à l'utilisation des autres familles d'algorithmes. Dans le présent chapitre, nous traiterons plusieurs problèmes grâce à ces développements afin de prouver qu'ils peuvent être utilisés dans des situations plus complexes que celles étudiées dans les précédentes applications numériques. Comme méthode de base, nous utiliserons la méthode implicite EDMC-1 développée. Comme, nous avons vu à la section 4.5.1 que la méthode EDMC-1 était performante pour de faibles dissipations numériques, nous allons utiliser un grand rayon spectral (*e.g.*  $\rho_\infty = 0.8$ ). Nous allons donc comparer cette solution avec une méthode  $\alpha$ -généralisée de Chung-Hulbert possédant une forte dissipation numérique (*e.g.*  $\rho_\infty = 0.2$ ). Nous montrerons également l'intérêt de combiner la méthode EDMC-1 avec un algorithme explicite, avec dissipation numérique, afin de diminuer le temps de simulation.

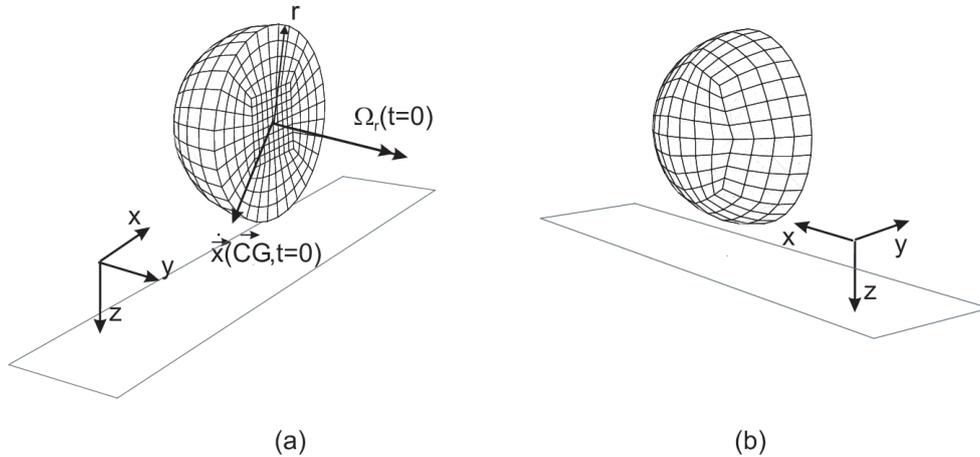


Figure 8.1: Géométrie et maillage de la balle - (a) vue de face - (b) vue de dos.

## 8.1 Simulation du rebond d'une balle élastique

Cette application numérique va permettre de montrer que la gestion du contact avec frottement permet de simuler des phénomènes physiques non seulement de manière qualitative, mais aussi avec une bonne précision quantitative. Pour ce faire, nous allons analyser le rebond d'une balle, ayant une vitesse de translation initiale, mais aussi, une vitesse de rotation initiale. Nous comparerons notre solution au modèle théorique de Stronge [144] et aux expériences de Johnson [78], tous deux obtenus pour une sphère élastique. Les courbes obtenues par ces méthodes sont adimensionnelles et dépendent de deux valeurs : la première est le coefficient de Poisson de la sphère (ici  $\nu = 0.3$ ) et la seconde est le coefficient de restitution (rapport entre les énergies cinétiques après et avant le rebond) de la balle (ici supposé proche de l'unité<sup>1</sup>, ce qui est le cas pour un matériau élastique subissant de faibles déformations).

### 8.1.1 Description du modèle

Pour analyser le rebond d'une sphère, nous supposons que le vecteur correspondant à l'axe de rotation initial de la sphère est perpendiculaire à la vitesse initiale du centre de gravité (Figure 8.1). De ce fait, seule une demi sphère doit-être étudiée (Figure 8.1). La demi sphère est discrétisée à l'aide de 1024 éléments (8 éléments sur un rayon selon  $x$  et selon  $z$ ), le maillage étant illustré à la Figure 8.1. Comme nous allons le voir, l'analyse théorique du rebond faisant intervenir des grandeurs adimensionnelles, les caractéristiques matérielles ne représentent pas une balle réelle (Table 8.1). Initialement, la balle possède une vitesse de rotation  $\Omega_r$  autour de l'axe  $y$  (Figure 8.1). Cette vitesse de rotation est toujours prise d'un module unitaire. De plus, le centre de gravité a

<sup>1</sup>Après le rebond, la sphère vibre et une partie de l'énergie cinétique initiale se retrouve sous forme d'énergie potentielle. Le coefficient de restitution est donc toujours inférieur à l'unité.

Table 8.1: Propriétés de la balle.

Propriété	Valeur
Rayon initial	$r = 1m$
Masse	$M = 1kg$
Module de Young	$Y = 10N/mm^2$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Vitesse de révolution	$ \Omega_r  = 1rad/s$
Pénalité normale	$k_N = 10^6$
Pénalité tangentielle	$k_T = 10^6$
Coefficient de frottement	$\mu_c = 0.1$

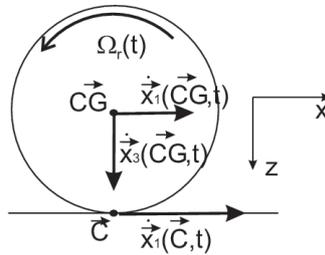


Figure 8.2: Décomposition des vitesses de la balle.

une vitesse initiale  $\vec{\dot{x}}(\vec{C}\vec{G}, t = 0)$  comprise dans le plan  $Oxz$  (Figure 8.1). Nous allons analyser différentes situations, chaque situation étant caractérisée par la vitesse initiale du centre de gravité. L'interaction avec une surface rigide se fait sous l'hypothèse d'un frottement de Coulomb (valeurs reportées à la Table 8.1). La pénalité tangentielle est prise égale à la pénalité normale, afin de minimiser le gap du point de collement (*c.f.* section 5.4.1) et ainsi obtenir une précision suffisante sur les résultats (ce qui n'est pas le cas dans cet exemple pour le choix  $k_N = \mu_c k_T$ ). L'algorithme utilisé est l'algorithme EDMC-1 avec un rayon spectral infini  $\rho_\infty = 0.8$  (*c.f.* section 3.2). La précision de la gestion automatique du pas de temps est de  $10^{-3}$  (*c.f.* section 7.1), la précision du processus de Newton-Raphson (B.6) est de  $10^{-7}$  et la précision du line-search (B.5) est de  $10^{-3}$ .

### 8.1.2 Analyse des rebonds successifs de la balle

Nous allons analyser les rebonds successifs d'une balle ayant une vitesse de rotation et une vitesse de translation initiale. L'analyse théorique effectuée par Stronge [144] supposait que la surface de contact restait faible devant le carré du rayon (pour être dimensionnellement exact). Dans le cas qui nous occupe, grâce à la discrétisation éléments-finis, le contact se fait de manière ponctuelle (le rebond reste suffisamment peu violant pour qu'il n'y ait qu'un seul nœud en contact). La matrice rigide étant horizontale, le

contact se fait toujours avec un nœud situé en aplomb du centre de gravité (Figure 8.2).

Analysons la physique du rebond. Pour ce faire, définissons les grandeurs relatives au centre de gravité. Soient  $\dot{\vec{x}}(\vec{CG}, t)$  la vitesse du centre de gravité, et  $\Omega_r(t)$  la vitesse de rotation, par rapport au centre de gravité et autour de l'axe  $y$ , de la balle (Figure 8.2). En supposant que le matériau reste élastique, le coefficient de restitution est proche de l'unité et le module de la vitesse verticale du centre de gravité après le rebond vaut pratiquement le module de la vitesse verticale du centre de gravité avant le rebond. Pour analyser le mouvement horizontal et la rotation, il faut considérer la vitesse du point qui entre en contact avec la matrice rigide. En fonction du fait que ce point va subir un contact collant ou glissant (ou une succession de phases collantes et glissantes) le mouvement de rotation ou la vitesse horizontale du centre de gravité peuvent même changer de sens. Soient  $\dot{\vec{x}}(\vec{C}, t)$  la vitesse du point en contact, et  $J(\vec{C}, t)$  le moment angulaire de la sphère, selon  $y$ , autour de ce point. Soit  $t = t^1$  le temps à la prise de contact (début du rebond) et soit  $t = t^2$  le temps à la perte de contact (fin du rebond). En se référant à la Figure 8.2, les relations adimensionnelles liant les vitesses sont

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}_1(\vec{C}, t)}{\mu_c \dot{x}_3(\vec{CG}, t^1)} &= \frac{\dot{x}_1(\vec{CG}, t)}{\mu_c \dot{x}_3(\vec{CG}, t^1)} + \frac{r\Omega_r(t)}{\mu_c \dot{x}_3(\vec{CG}, t^1)} \\ \frac{\dot{x}_3(\vec{C}, t)}{\mu_c \dot{x}_3(\vec{CG}, t^1)} &= \frac{\dot{x}_3(\vec{CG}, t)}{\mu_c \dot{x}_3(\vec{CG}, t^1)} \end{aligned} \quad (8.1)$$

Dans cette expression tous les termes peuvent être vus comme des vitesses adimensionnelles. Le contact étant supposé ponctuel, le moment angulaire au point de contact est constant durant la phase de contact comprise entre les temps  $t^1$  et  $t^2$ , et il vient

$$\begin{aligned} \frac{J(\vec{C})}{\mu_c Mr \dot{x}_3(\vec{CG}, t^1)} &= -\frac{\dot{x}_1(\vec{CG}, t^1)}{\mu_c \dot{x}_3(\vec{CG}, t^1)} + \frac{2}{5} \frac{r\Omega_r(t^1)}{\mu_c \dot{x}_3(\vec{CG}, t^1)} \\ &= -\frac{\dot{x}_1(\vec{CG}, t^2)}{\mu_c \dot{x}_3(\vec{CG}, t^1)} + \frac{2}{5} \frac{r\Omega_r(t^2)}{\mu_c \dot{x}_3(\vec{CG}, t^1)} \end{aligned} \quad (8.2)$$

Connaissant les conditions initiales en  $t = t^1$ , afin de déterminer totalement les conditions finales en  $t = t^2$ , il faut établir une relation liant les vitesses au point de contact en  $t = t^1$  et en  $t = t^2$ . Cette relation a été établie analytiquement pour une sphère élastique (de coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$  et de coefficient de restitution proche de l'unité) par Stronge [144]. La courbe résultant de cette analyse est illustrée à la Figure 8.3 par une courbe pleine, alors que les résultats expérimentaux de Johnson [78] sont représentés par des carrés pleins.

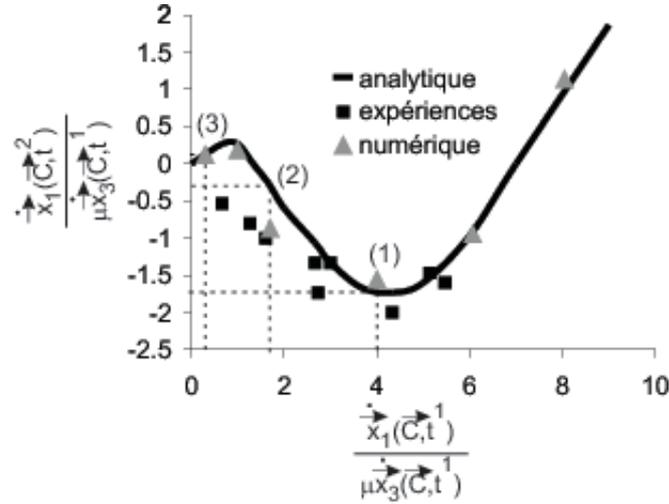


Figure 8.3: Evolution de la vitesse tangentielle (horizontale) finale du point de contact en fonction de la vitesse tangentielle de prise de contact pour le rebond d'une sphère élastique (avec  $\nu = 0.3$ ) - (a) la ligne pleine correspond à la théorie analytique de Stronge [144] - (b) les carrés pleins correspondent aux résultats expérimentaux de Johnson [78] - (c) les triangles pleins correspondent à nos résultats numériques - (d) les nombres 1 à 3 correspondent aux rebonds successivement étudiés.

Grâce à cette courbe, ainsi qu'aux relations (8.1) et (8.2), nous pouvons déterminer analytiquement les 3 rebonds successifs d'une balle de conditions initiales

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}_1(\vec{C}, t^1)}{\mu_c \dot{x}_3(\vec{C}, t^1)} &= -4 \\ \frac{J(\vec{C})}{\mu_c M r \dot{x}_3(\vec{C}, t^1)} &= -0.6 \end{aligned} \quad (8.3)$$

Soit la Figure 8.4 où les abscisses représentent la vitesse adimensionnelle selon  $x$  du centre de gravité et où les ordonnées représentent la vitesse de rotation adimensionnelle. Nous y avons représenté les droites correspondant aux équations (8.3). Leur intersection, représentée par une étoile, correspond donc aux conditions initiales du premier rebond. Etant donné que le moment angulaire reste constant lors du contact, le point de contact doit se déplacer sur la ligne grasse en pointillés de la Figure 8.4 ( $\frac{J(\vec{C})}{\mu_c M r \dot{x}_3(\vec{C}, t^1)} = -0.6$ ). La Figure 8.3 donne directement la vitesse théorique de perte de contact, c'est-à-dire  $\frac{\dot{x}_1(\vec{C}, t^2)}{\mu_c \dot{x}_3(\vec{C}, t^1)} = 1.7$  (la courbe de la Figure 8.3 étant symétrique). Le point de perte de contact du premier bond, qui correspond aux conditions initiales du deuxième bond est représenté par un carré creux sur la Figure 8.4. Il apparaît donc que la vitesse

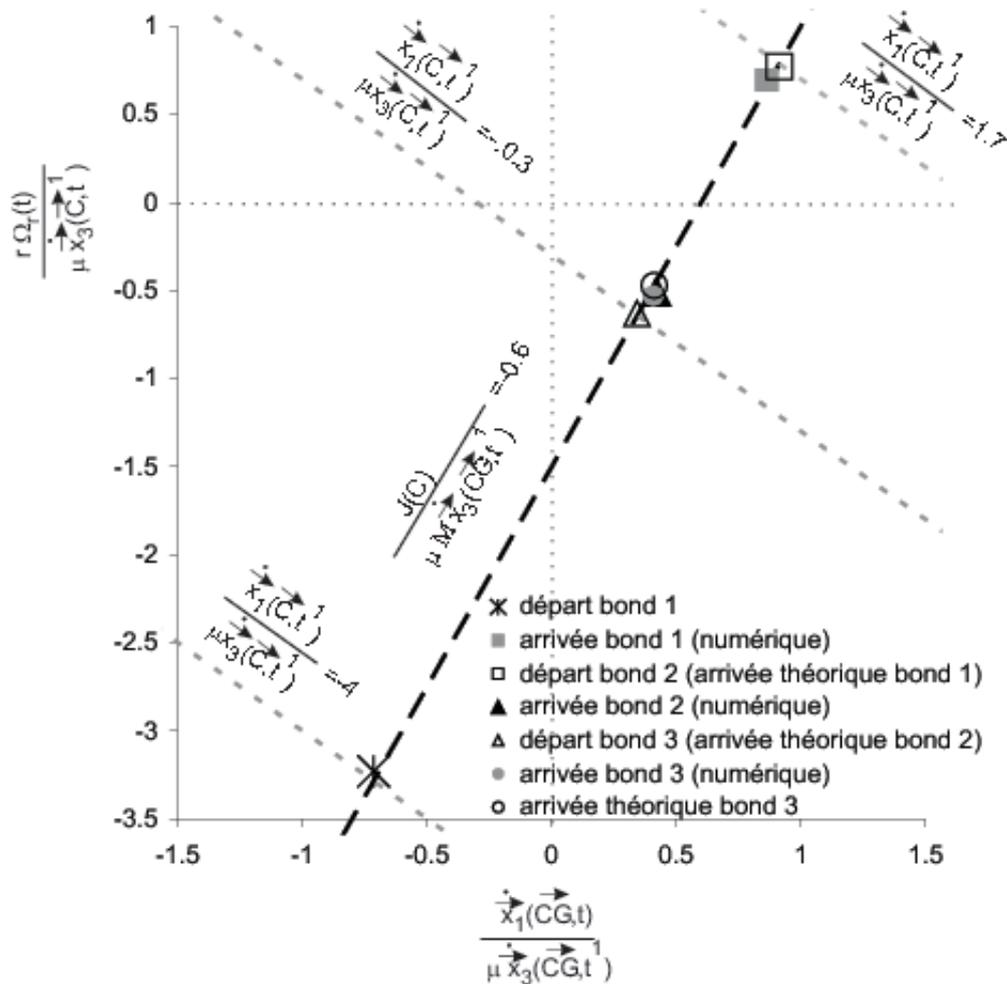


Figure 8.4: Caractérisation des rebonds de la sphère élastique (avec  $\nu = 0.3$ ) - (a) le point de départ du bond 1, représenté par une étoile est relatif aux conditions initiales - (b) les points de départ  $i \geq 2$ , représentés par des figures creuses, sont relatifs à l'arrivée théorique du bond  $i$  et les conditions initiales du bond  $i + 1$  - (c) les points d'arrivées, représentés par des figures pleines sont relatifs aux simulations numériques.

de rotation de la sphère, ainsi que sa vitesse selon l'axe  $x$ , du centre de gravité, ont changé toutes les deux de direction. Le résultat obtenu par la simulation numérique, est représenté par un carré plein sur la Figure 8.4 et par un triangle plein sur la Figure 8.3. Nous remarquons qu'il correspond à 5% près à la valeur théorique, tout en arrivant aux mêmes conclusions concernant les changements de sens des vitesses. Les évolutions temporelles de la vitesse du point en contact et du centre de gravité sont respectivement représentées à la Figure 8.5 (a) et à la Figure 8.5 (b). Remarquons que la vitesse selon l'axe  $z$  étant constante, les temps des trois rebonds sont identiques. Il apparaît que les oscillations résultant de la prise de contact s'amortissent avec le temps grâce à la

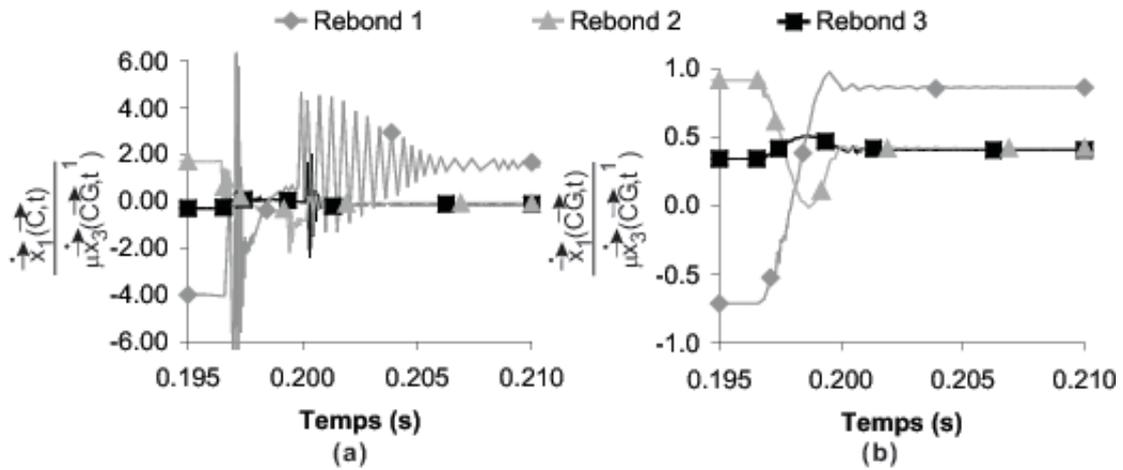


Figure 8.5: Evolution temporelle des vitesses pour les rebonds de la sphère - (a) vitesse du point de contact - (b) vitesse du centre de gravité.

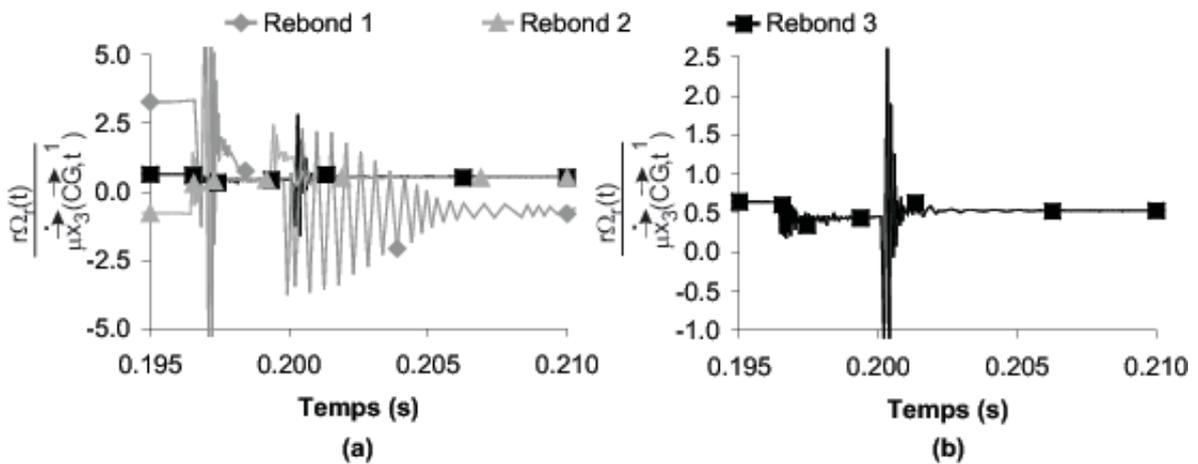


Figure 8.6: Evolution temporelle des vitesses de rotation pour les rebonds de la sphère - (a) pour les 3 rebonds - (b) zoom pour le troisième rebond.

dissipation numérique. La vitesse du centre de gravité ne subit pas ces oscillations qui sont locales. L'évolution temporelle de la vitesse de rotation est illustrée à la Figure 8.6. La simulation éléments-finis du premier rebond est illustrée à la Figure 8.7 (a).

Le second rebond est initialisé par les conditions finales théoriques du premier rebond,

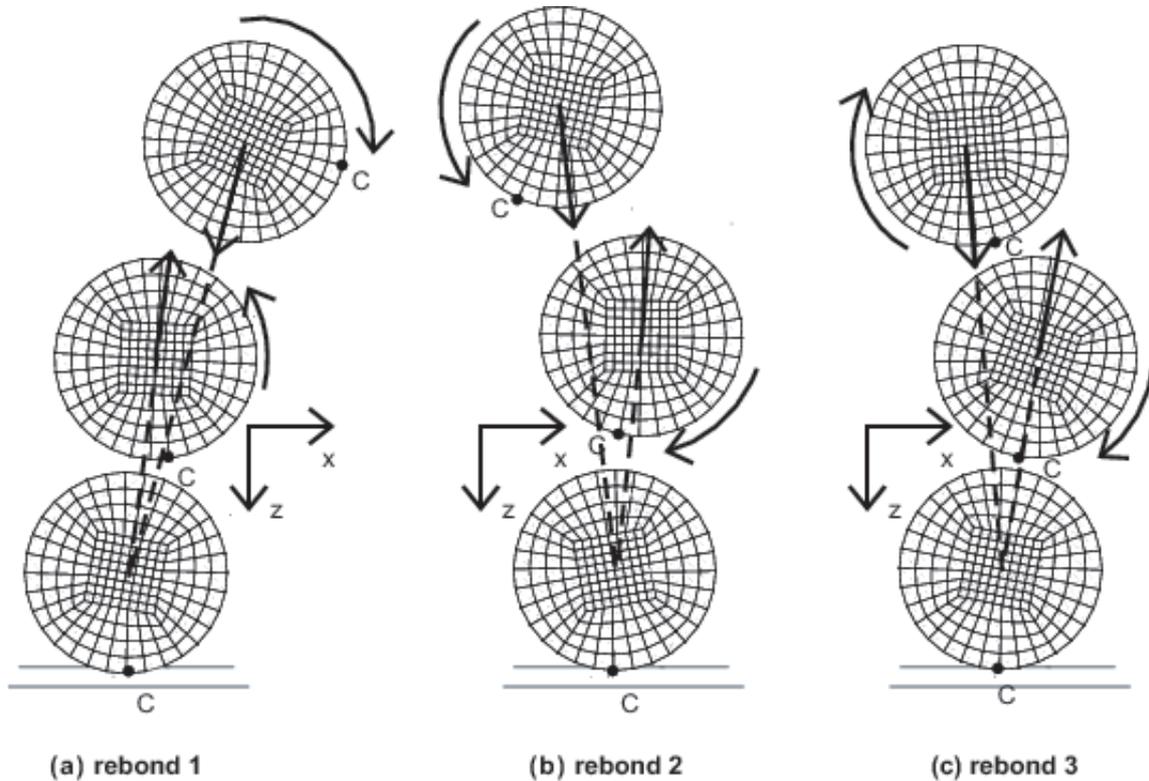


Figure 8.7: Simulation des rebonds - (a) premier rebond - (b) deuxième rebond - (c) troisième rebond.

à savoir

$$\frac{\dot{x}_1(\vec{C}, t^1)}{\mu_c \dot{x}_3(\vec{CG}, t^1)} = 1.7$$

$$\frac{J(\vec{C})}{\mu_c M r \dot{x}_3(\vec{CG}, t^1)} = -0.6 \quad (8.4)$$

Afin d'éviter toute accumulation d'erreur, nous partons également de ces conditions pour la simulation éléments-finis (il est impératif de partir des mêmes conditions initiales pour la solution analytique et pour la solution éléments-finis). Ce point de départ est représenté par un carré creux sur la Figure 8.4. La Figure 8.3 permet de déterminer la vitesse théorique de perte de contact, c'est-à-dire  $\frac{\dot{x}_1(\vec{C}, t^2)}{\mu_c \dot{x}_3(\vec{CG}, t^1)} = -0.3$ . Ce point de perte de contact, qui correspond aux conditions initiales du troisième bond est représenté par un triangle creux sur la Figure 8.4. A nouveau, la vitesse de rotation change de signe, mais pas la vitesse selon  $x$  au centre de gravité. Le triangle plein de la Figure 8.4 représente les résultats obtenus par la simulation numérique, qui fournit des résultats à

15% près de la solution théorique. Ces résultats sont également reportés par un triangle plein sur la Figure 8.3. La simulation éléments-finis du deuxième rebond est illustrée à la Figure 8.7 (b).

Le troisième rebond est initialisé par les conditions finales théoriques du deuxième rebond, qui sont

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\tilde{x}}_1(\vec{C}, t^1)}{\mu_c \dot{\tilde{x}}_3(\vec{C}\vec{G}, t^1)} &= -0.3 \\ \frac{J(\vec{C})}{\mu_c M r \dot{\tilde{x}}_3(\vec{C}\vec{G}, t^1)} &= -0.6 \end{aligned} \quad (8.5)$$

Ce point de départ est représenté par un triangle creux sur la Figure 8.4. Grâce à la Figure 8.3 la vitesse théorique de perte de contact est évaluée à  $\frac{\dot{\tilde{x}}_1(\vec{C}, t^2)}{\mu_c \dot{\tilde{x}}_3(\vec{C}\vec{G}, t^1)} = -0.06$ . Ce point de perte de contact, qui correspond aux conditions initiales de l'éventuel quatrième rebond est représenté par un cercle creux sur la Figure 8.4. Cette fois la vitesse de rotation et la vitesse selon  $x$  au centre de gravité gardent la même direction. Le cercle plein de la Figure 8.4 représente les résultats obtenus par la simulation numérique, qui fournit des résultats à 10% près de la solution théorique (obtenue sous les hypothèses de contact ponctuel, d'une solution de type sinusoïdale, de petites déformations, d'un module de Poisson égal à 0.3 et d'un coefficient de restitution égal à 1). Ces résultats sont également reportés par un triangle plein sur la Figure 8.3. La simulation éléments-finis de ce dernier rebond est illustrée à la Figure 8.7 (c).

### 8.1.3 Conclusions sur la simulation numérique des rebonds d'une balle.

Dans cet exemple numérique, nous avons analysé les rebonds successifs d'une balle en rotation et en translation à l'aide de l'algorithme énergétiquement consistant, du point de vue des lois de conservation, que nous avons développé. Les résultats obtenus ont été comparés avec ceux obtenus par une analyse théorique de cette simulation. Nous avons obtenus les mêmes résultats d'un point de vue qualitatif, c'est-à-dire les changements ou non de sens des vitesses de rotation et de translation. D'un point de vue quantitatif, nous avons obtenu une précision variant entre 5% et 15% des résultats expérimentaux. Etant donné les approximations liées à la gestion du contact par la méthode de la pénalité (déplacement du point de collement, ...), et des approximations nécessaires à l'étude théorique du modèle (petites déformations, hypothèse d'une solution de type sinusoïdale, ...), nous concluons que les résultats numériques sont conformes à ceux attendus par une étude analytique. Cela est d'autant plus vrai que les résultats expérimentaux présentent une erreur de même amplitude par rapport à l'analyse théorique, dont les

hypothèses ne sont pas parfaitement vérifiées en pratique. Par exemple, pour une simulation expérimentale tout comme pour une simulation éléments-finis, le coefficient de restitution n'est pas rigoureusement égal à 1 puisque de l'énergie cinétique est transformée en énergie potentielle après le rebond.

## 8.2 Simulation du flambement d'un longeron à section carrée

Dans le cadre de l'amélioration de la sécurité dans des domaines tels que celui de l'automobile, l'étude numérique du flambement de longerons revêt une importance capitale. En effet, en cas d'accident, plus particulièrement d'accident frontal, les pièces du châssis doivent absorber le choc tout en préservant l'habitacle intact et en limitant le niveau d'accélération dans celui-ci. Les pièces maîtresses de ce châssis sont les longerons. Il est donc intéressant de pouvoir quantifier la quantité d'énergie qu'une telle pièce peut absorber, en fonction de sa géométrie, du matériau utilisé, mais aussi de la vitesse d'impact. Une méthode numérique étant nettement moins coûteuse qu'une méthode expérimentale, il convient de garantir la précision d'une simulation éléments-finis. Dans cette section, nous allons montrer que les algorithmes que nous avons développés sont aptes à simuler avec précision un tel phénomène. Pour ce faire, nous comparerons les résultats obtenus avec ceux numériques, mais aussi expérimentaux de la littérature.

### 8.2.1 Description du modèle

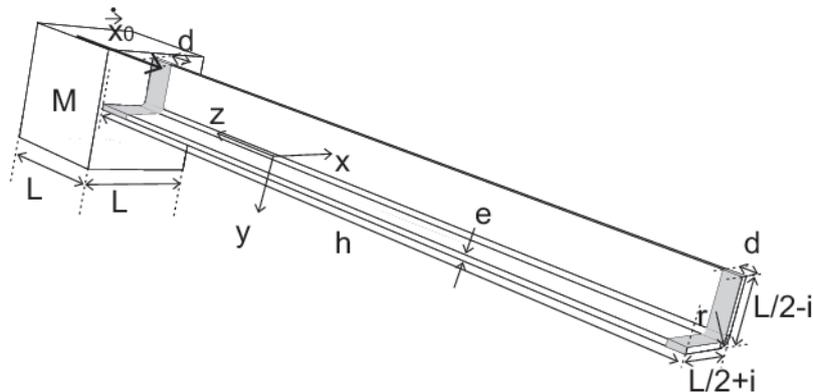


Figure 8.8: Géométrie du longeron.

Soit un longeron creux, d'épaisseur  $e$ , à section carrée. La géométrie de ce longeron est représentée à la Figure 8.8. Par symétrie, seulement un quart de la pièce est étudié. Le longeron de hauteur  $h$  a un côté de dimension  $L$ . Les jonctions des côtés sont raccordées avec un rayon  $r$ . La section étant symétrique, le flambement ne pourra se faire de la même manière que dans la réalité. En effet, les matériaux contenant toujours des imperfections, et la section n'étant pas parfaitement symétrique, le flambement se fera toujours en privilégiant une direction. Il est donc impératif d'introduire dans le modèle des imperfections. Langseth *et al.* [88] ont proposé de modifier l'épaisseur du longeron pour une section passant par un nœud donné. Cependant le choix de ce nœud, conditionne les résultats. Jones et Karagiozova [79] ont proposé de rendre la section

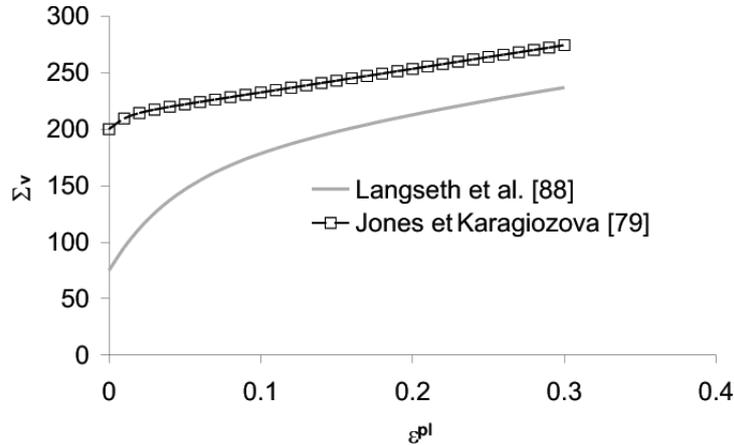


Figure 8.9: Loi d'écroûissage du longeron.

rectangulaire (mais toujours proche du carré), tout en conservant la surface totale de la section, en modifiant les longueurs d'une distance  $i$  (Figure 8.8). Nous avons opté ici pour cette méthode. L'impact se fait en projetant axialement, avec une vitesse initiale  $\vec{x}_0$ , un volume quasi-indéformable de masse  $M$  sur le longeron (Figure 8.8). Ce corps est constitué d'un matériau élastique ayant un module de Young dix fois supérieur à celui du longeron. Afin de simuler les conditions de l'expérimentation, Langseth *et al.* [88], qui utilisent des éléments de coque, proposent de bloquer les degrés de liberté de rotation des extrémités du longeron. De cette manière, les bords du longerons ne peuvent se retourner. Ne disposant pas de tels degrés de liberté, nous avons contraint les nœuds situés à une distance  $d$  des extrémités (parties grisées de la Figure 8.8) à ne subir qu'un mouvement axial. Nous allons étudier deux géométries pour lesquelles nous disposons de solutions expérimentales.

### 8.2.2 Longerons de Jones et Karagiozova [79]

Les données géométriques du longeron sont reprises à la Table 8.2. Il s'agit d'un longeron en aluminium obéissant à une loi d'écroûissage isotropique avec saturation :  $\Sigma_v = \Sigma_0 + [\Sigma_\infty - \Sigma_0] \left[ 1 - e^{-h_e \varepsilon^{pl}} \right] + h \varepsilon^{pl}$ . Les paramètres de cette loi sont repris à la Table 8.2. Cette loi est illustrée à la Figure 8.9. Remarquons que, contrairement à ce que nous avons fait, Jones et Karagiozova [79] utilisent une approximation linéaire par morceaux plutôt qu'une loi avec saturation.

Nous allons étudier l'influence de la vitesse d'impact sur la déformation des longerons, pour une énergie cinétique absorbée valant approximativement  $600J$  dans chacun des quatre cas (pour le longeron complet). Cette valeur est approximative car elle résulte des expérimentations effectuées par Yang [150]. Nous reprenons à la Table 8.3 les quatre valeurs de la vitesse et de la masse de la pièce rigide qui impacte le cylindre, ainsi que la durée de la simulation que nous effectuons. De plus, il apparaît que pour la simulation N76 (cette dénomination est celle relative aux résultats expérimentaux), la pénalité

Table 8.2: Propriétés du longeron de Jones et Karagiozova

Propriété	Valeur
Hauteur	$h = 146mm$
Longueur	$L = 23.7mm$
Epaisseur	$e = 1.14mm$
Distance	$d = 2.5mm$
Rayon	$r = 2.1$
Imperfection	$i = 0.12mm$
Masse volumique	$\rho = 2700kg/m^3$
Module de Young	$Y = 71000N/mm^2$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Limite élastique initiale	$\Sigma_0 = 200N/mm^2$
Limite élastique de saturation	$\Sigma_\infty = 211.64N/mm^2$
Paramètre d'écroissage exponentiel	$h_e = 100$
Paramètre d'écroissage linéaire	$h = 209$

Table 8.3: Propriétés dynamiques des longerons de Jones et Karagiozova

Nom	Vitesse	Masse	Durée de simulation	Pénalité
N76	14.84 m/s	5.45 kg	12ms	$k_N = 10^4$
G5	25.34 m/s	1.87 kg	7ms	$k_N = 10^3$
N41	64.62 m/s	0.28 kg	1.8ms	$k_N = 10^3$
N61	98.27 m/s	0.126 kg	1.5ms	$k_N = 10^3$

normale doit être plus importante pour éviter les pénétrations (cela provient de la forme du mode de ruine qui est différente). Les résultats expérimentaux sont illustrés à la Figure 8.10.

Notre modèle est constitué de 2600 éléments (120 éléments selon la longueur, 10 éléments sur chaque demi largeur, 2 éléments sur l'arc de cercle et 1 élément sur l'épaisseur). Ce nombre d'éléments s'avère nécessaire pour pouvoir capter les modes de flambement. Une étude de l'influence du nombre d'éléments est effectuée à la section 8.2.4. Nous allons comparer les solutions obtenues par les schémas d'intégration suivants :

- (i) l'algorithme implicite EDMC-1, avec un rayon spectral  $\rho_\infty = 0.8$  (c.f. section 3.2) avec une précision sur l'intégration temporelle de  $10^{-4}$  (c.f. section 7.1), une précision du processus de Newton-Raphson (B.6) de  $10^{-5}$  et une précision du line-search (B.5) de  $10^{-3}$ ;
- (ii) l'algorithme explicite  $\alpha$ -généralisé avec un rayon spectral de bifurcation égal à 0.2 et une sécurité  $\gamma_s = 0.666$ ;

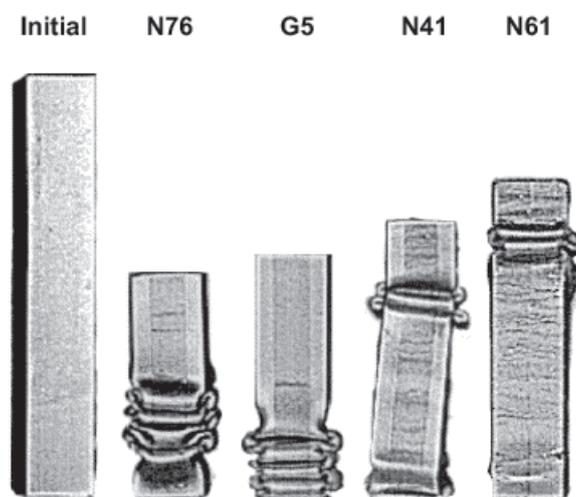


Figure 8.10: Résultats expérimentaux du flambement du longeron obtenus par Yang [150] et publiés par Jones et Karagiozova [79] (reproduction avec l'aimable autorisation du Professeur Jones).

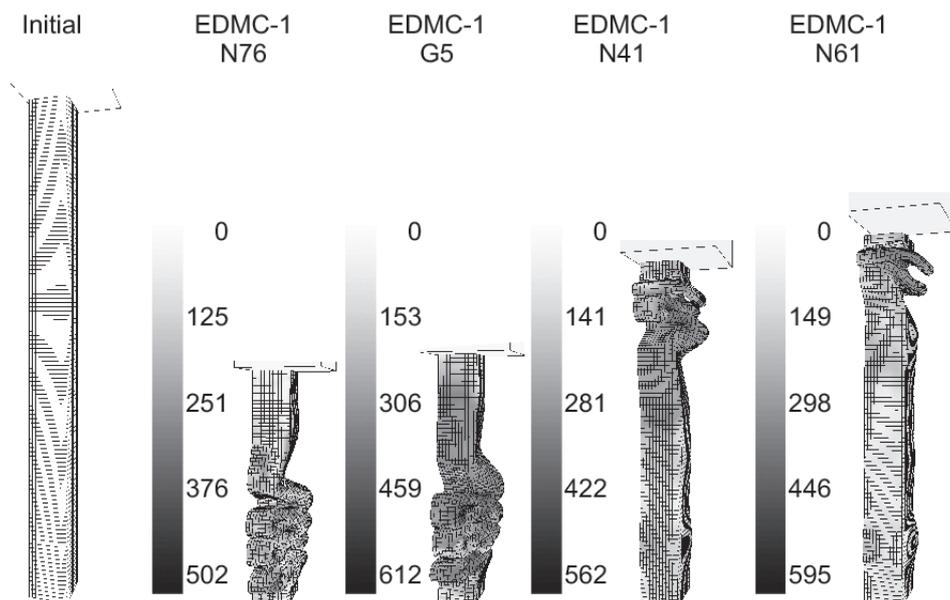


Figure 8.11: Déformations finales et contraintes équivalentes de von Mises ( $Mpa$ ) du flambement du longeron obtenues par la méthode EDMC-1.

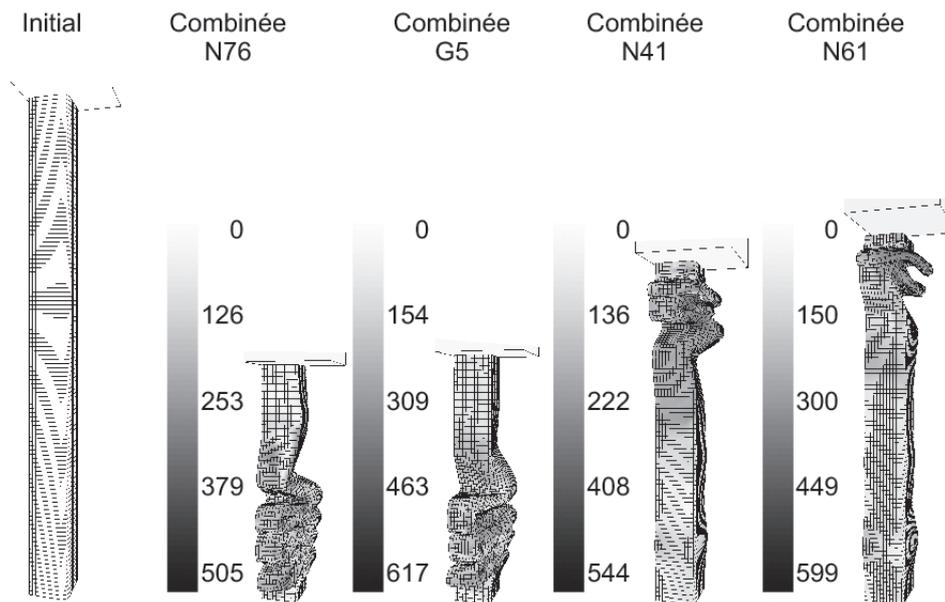


Figure 8.12: Déformations finales et contraintes équivalentes de von Mises ( $Mpa$ ) du flambement du longeron obtenues par la méthode combinée.

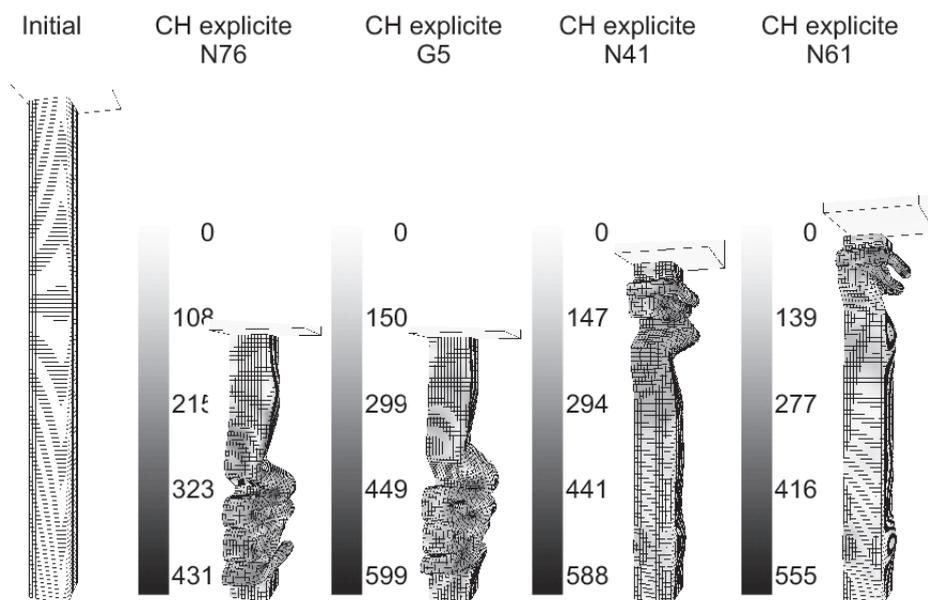


Figure 8.13: Déformations finales et contraintes équivalentes de von Mises ( $Mpa$ ) du flambement du longeron obtenues par la méthode explicite.

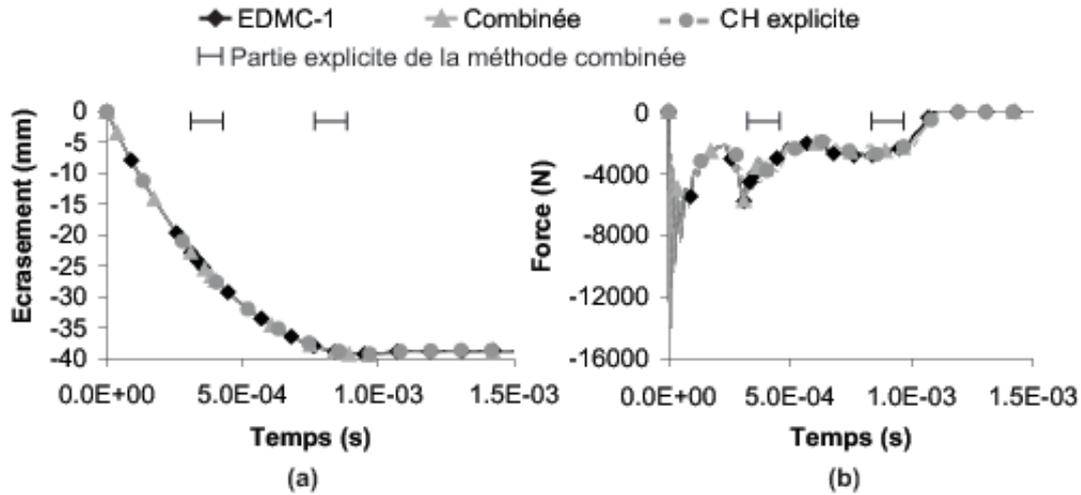


Figure 8.14: Evolution temporelle des grandeurs lors du flambement du longeron N61 - (a) déplacement de l'extrémité - (b) force sur l'extrémité.

- (iii) une combinaison de ces deux algorithmes (le changement vers l'algorithme implicite se faisant par la méthode expliquée à la section 6.2.6) avec les paramètres de gestion automatique du basculement (section 7.3) qui valent  $\eta_e = 2.5$  et  $\gamma_{ie} = 2$ .

Nous comparerons aussi nos résultats avec les solutions obtenues par Jones et Karagiozova [79]. Ces derniers ont utilisé des éléments de type coque et un schéma d'intégration de la différence centrée.

La Figure 8.11 illustre les configurations finales obtenues avec l'algorithme EDMC-1. Lorsque ces configurations sont comparées aux résultats expérimentaux (Figure 8.10), il apparaît que les modes de flambement sont tout à fait similaires : pour une haute vitesse, les boucles se forment au sommet du longeron, et pour une faible vitesse, les boucles se forment à la base du longeron. Le nombre de boucles obtenu par la simulation numérique est identique au nombre obtenu par l'expérience. Ces conclusions restent valables pour la méthode combinée qui fournit les déformations finales illustrées à la Figure 8.12, ainsi que pour la méthode explicite qui fournit les déformations finales illustrées à la Figure 8.13.

Nous allons comparer les méthodes d'intégration (EDMC-1, combinée et explicite) pour les longerons N61 et N76 qui sont respectivement celui ayant la plus grande vitesse d'impact et celui ayant la plus faible.

Pour le longeron N61, le déplacement de l'extrémité du longeron (qui correspond à l'écrasement) est représenté à la Figure 8.14 (a), alors que la force résultante s'exerçant à cette même extrémité est représentée à la Figure 8.14 (b). La Figure 8.15 (a) représente l'évolution temporelle de l'énergie plastiquement dissipée. La méthode combinée et la méthode entièrement implicite donnent les mêmes solutions, alors que la solution explicite donne une solution légèrement différente (3%). Pour la méthode combinée, nous avons représenté les intervalles temporels pour lesquels la méthode utilisée est explicite.

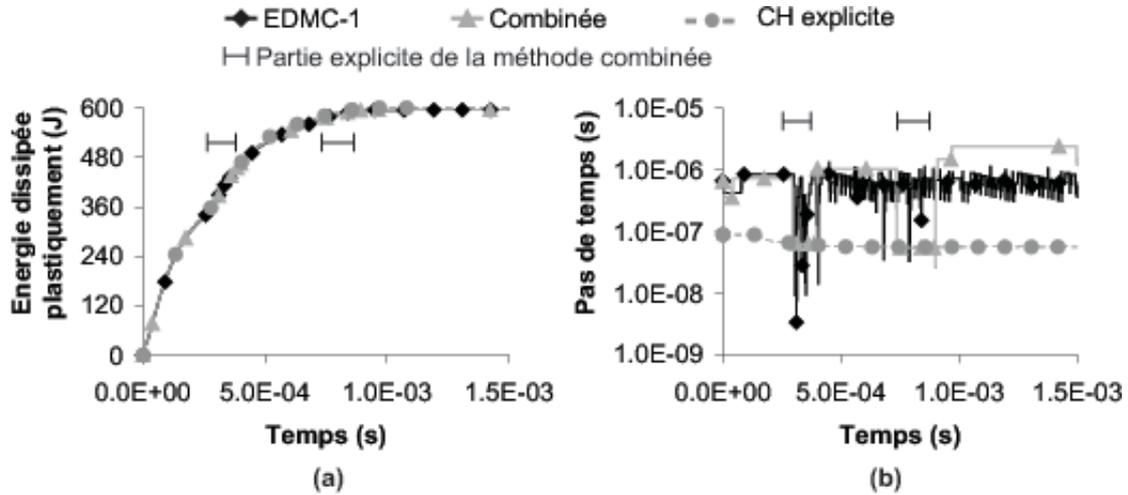


Figure 8.15: Evolution temporelle des grandeurs lors du flambement du longeron N61 - (a) énergie plastiquement dissipée - (b) pas de temps.

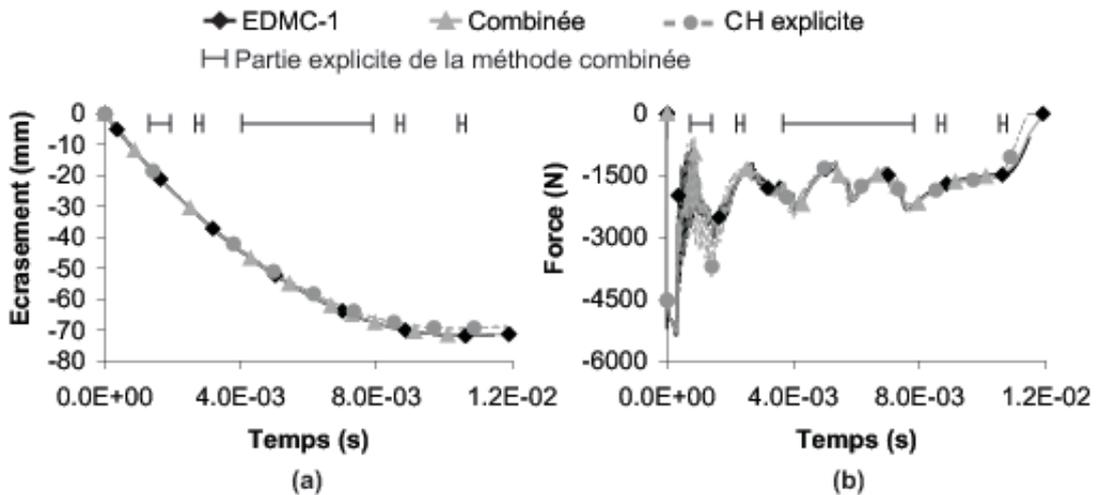


Figure 8.16: Evolution temporelle des grandeurs lors du flambement du longeron N76 - (a) déplacement de l'extrémité - (b) force sur l'extrémité.

Il apparaît que la phase de compression du longeron ( $t < 0.3\text{ms}$ ), avant la formation des boucles, se calcule en implicite, la phase de retour élastique ( $t > 1\text{ms}$ ), caractérisée par une diminution en valeur absolue de l'écrasement (Figure 8.14 (a)), se simule aussi avec la méthode implicite. Entre ces deux phases, l'algorithme bascule vers une méthode explicite pour former les boucles et gérer l'auto-contact. La Figure 8.15 (b) représente l'évolution de la taille du pas de temps. Lors de la formation des boucles, la méthode combinée passe en explicite, les pas explicites remplacent des pas implicites très coûteux en terme d'itérations et parfois de taille inférieure aux pas explicites. Remarquons que lors de la phase de retour élastique, le pas de temps de la méthode combinée est plus

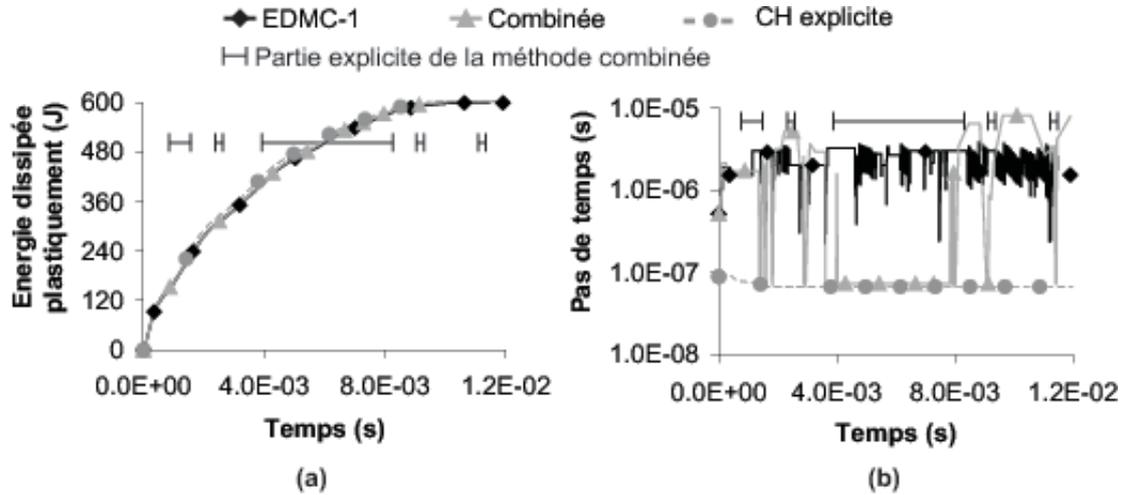


Figure 8.17: Evolution temporelle des grandeurs lors du flambement du longeron N76 - (a) énergie plastiquement dissipée - (b) pas de temps.

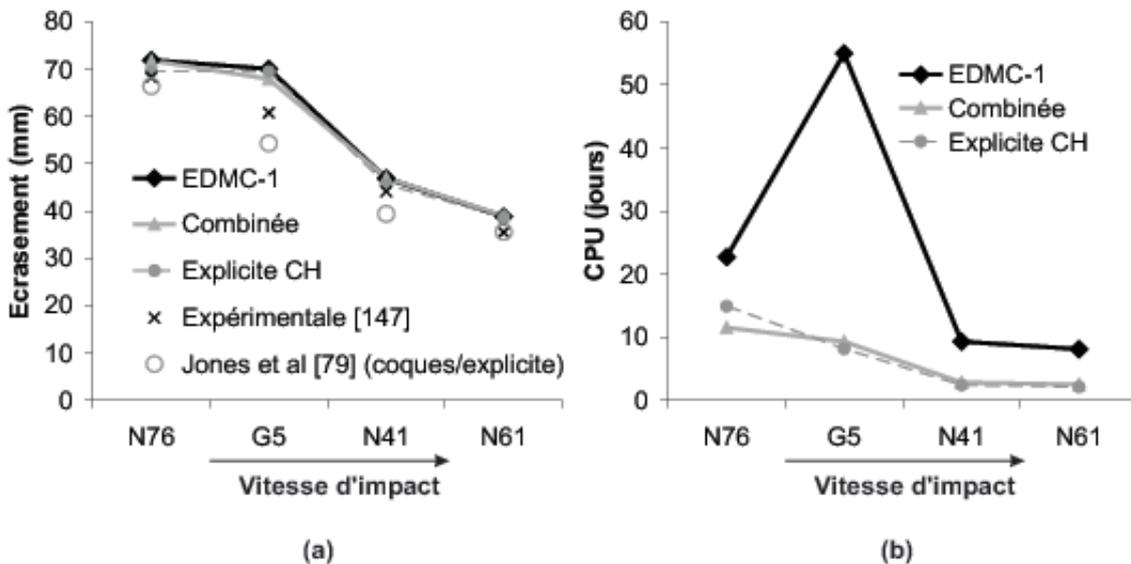


Figure 8.18: Résultats finaux du flambement du longeron - (a) écrasement - (b) temps CPU.

grand que pour la méthode complètement implicite EDMC-1. Cela résulte du fait que, comme nous avons vu à la section 4.5.1 que la méthode EDMC-1 était performante pour peu de dissipation numérique, nous avons utilisé un rayon spectral  $\rho_\infty = 0.8$  pour l'algorithme EDMC-1. Dès lors, les modes numériques ne sont pas totalement annihilés, ce qui restreint la taille du pas de temps. Par contre la méthode explicite de la méthode combinée permet d'amortir de manière très importante ces modes numériques, et donc de simuler la fin du calcul avec des pas implicites plus importants.

Pour le longeron N76, l'écrasement du longeron est représenté à la Figure 8.16 (a)

et la force résultante s'exerçant au sommet du longeron est représentée à la Figure 8.16 (b). Il apparaît que si le déplacement évolue de manière régulière, la force a plutôt l'allure d'une sinusoïde, où chaque maximum (en valeur absolue de la force) correspond au début de la formation d'une nouvelle boucle. L'évolution temporelle de l'énergie plastiquement dissipée est représentée à la Figure 8.17 (a). Tout comme pour le longeron N61, la méthode combinée et la méthode entièrement implicite donnent les mêmes solutions, alors que la solution explicite donne une solution différant de moins de 3%. Pour la méthode combinée, nous avons représenté les intervalles temporels pour lesquels la méthode utilisée est explicite. Il apparaît que la méthode explicite est principalement utilisée entre  $t = 4ms$  et  $t = 8ms$ . C'est durant cet intervalle que les deux dernières boucles se forment, et donc que les non-linéarités sont les plus importantes. L'algorithme combiné réagit donc comme nous le désirions.

La Figure 8.18 (a) compare, avec la solution expérimentale de Yang [150], l'écrasement du longeron pour les différentes simulations. Il apparaît que les solutions numériques obtenues ne dépassent pas 15% d'écart par rapport aux expériences. La Figure 8.18 (b) représente le temps CPU nécessaire aux simulations. Pour la méthode implicite, nous pourrions nous attendre à ce que si la vitesse d'impact diminue, les non-linéarités causent moins de problèmes de convergence. Le temps de calcul serait donc susceptible de diminuer avec la vitesse d'impact. Si cela se vérifie pour les longerons G5 et N76, il apparaît que lorsque la vitesse d'impact diminue, le temps CPU augmente pour les longerons N61, N41 et G5. Ce phénomène est dû à deux causes. La première raison est que le mode de flambement produit plus de boucles pour une faible vitesse d'impact. Les sources de non-linéarité sont donc plus nombreuses, ce qui implique une augmentation du nombre d'itérations. La seconde raison est que les modes numériques ont la même fréquence quelle que soit la vitesses d'impact. Or, nous avons vu à la section 4.5.1 que la méthode EDMC-1 était performante pour peu de dissipation numérique, ce qui explique le choix d'un rayon spectral à fréquence infinie égal à 0.8. Les modes numériques conditionnent donc la taille du pas de temps qui ne peut être beaucoup plus grande que le temps caractéristique de ces modes à haute fréquence. Le matériau étant de l'aluminium, qui a une faible densité, ce temps caractéristique devient plus faible que le pas de temps qui permettrait de simuler avec précision le mode de flambement une fois que la vitesse d'impact diminue. Or, comme la durée de la simulation augmente, le temps de calcul augmente aussi. Afin d'améliorer la dissipation numérique des hautes fréquences, un schéma EDMC précis au second ordre par rapport au pas de temps devra être envisagé. Pour la méthode explicite, le temps de calcul augmente toujours si la vitesse d'impact diminue. Cela s'explique aisément par le fait que la taille du pas de temps reste la même alors que la durée de la simulation augmente. Le nombre de pas de temps est donc plus important et le temps CPU de simulation également. Remarquons qu'à l'exception du longeron G5 qui a montré des problèmes de convergences, le temps CPU pour la méthode EDMC-1 augmente moins rapidement lorsque la vitesse d'impact diminue (facteur 3 entre les longerons N61 et N76) que pour la méthode explicite (facteur 8 entre les longerons N61 et N76). Cela provient du fait, que si le pas de temps

Table 8.4: Propriétés du longeron de Langseth *et al.* [88]

Propriété	Valeur
Hauteur	$h = 310mm$
Longueur	$L = 80mm$
Epaisseur	$e = 2.5mm$
Distance	$d = 5.5mm$
Rayon	$r = 3.5$
Imperfection	$i = 2mm$
Masse volumique	$\rho = 2700kg/m^3$
Module de Young	$Y = 71000N/mm^2$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Limite élastique initiale	$\Sigma_0 = 75N/mm^2$
Limite élastique de saturation 1	$\Sigma_{\infty 1} = 75N/mm^2$
Paramètre d'écroissage exponentiel 1	$h_{e1} = 25$
Limite élastique de saturation 2	$\Sigma_{\infty 2} = 200N/mm^2$
Paramètre d'écroissage exponentiel 2	$h_{e2} = 1.9$
Pénalité normale	$k_N = 10^4$

explicite reste le même pour toute les simulations, le pas de temps moyen implicite passe de  $0.8\mu s$  à  $2.5\mu s$  entre les simulations N61 et N76.

Finalement, par rapport à la méthode entièrement implicite, la méthode combinée permet de réduire le temps de calcul. Pour les hautes vitesses d'impact, la méthode explicite est légèrement moins chère (moins de 10%) que la méthode combinée, car l'existence de la sécurité des critères de basculement retarde les temps de basculement (mais cela est nécessaire pour éviter d'avoir trop de basculements entre les deux méthodes, ce qui augmenterait encore le temps CPU de la méthode combinée). Par contre, pour les faibles vitesses d'impact, comme pour le longeron N76, la méthode combinée permet un gain de 30% par rapport à la méthode explicite (et de 50% par rapport à la méthode EDMC-1).

Remarquons que la méthode implicite  $\alpha$ -généralisée de Chung-Hulbert avec une forte dissipation numérique ( $\rho_\infty = 0.2$ ) n'a pas convergé, malgré l'utilisation d'un algorithme de "line-search".

### 8.2.3 Longerons de Langseth *et al.* [88]

Les données géométriques sont reprises à la Table 8.4. Par rapport au longeron de Jones et Karagiozova [79], le longeron de Langseth *et al.* [88] est plus haut et plus large pour la même épaisseur. Il s'agit d'un longeron en Aluminium obéissant à une loi d'écroissage isotrope à double saturation :  $\Sigma_v = \Sigma_0 + \Sigma_{\infty 1} \left[1 - e^{-h_{e1}\varepsilon^{pl}}\right] + \Sigma_{\infty 2} \left[1 - e^{-h_{e2}\varepsilon^{pl}}\right]$ . Les paramètres de cette loi sont repris à la Table 8.4. Cette loi est

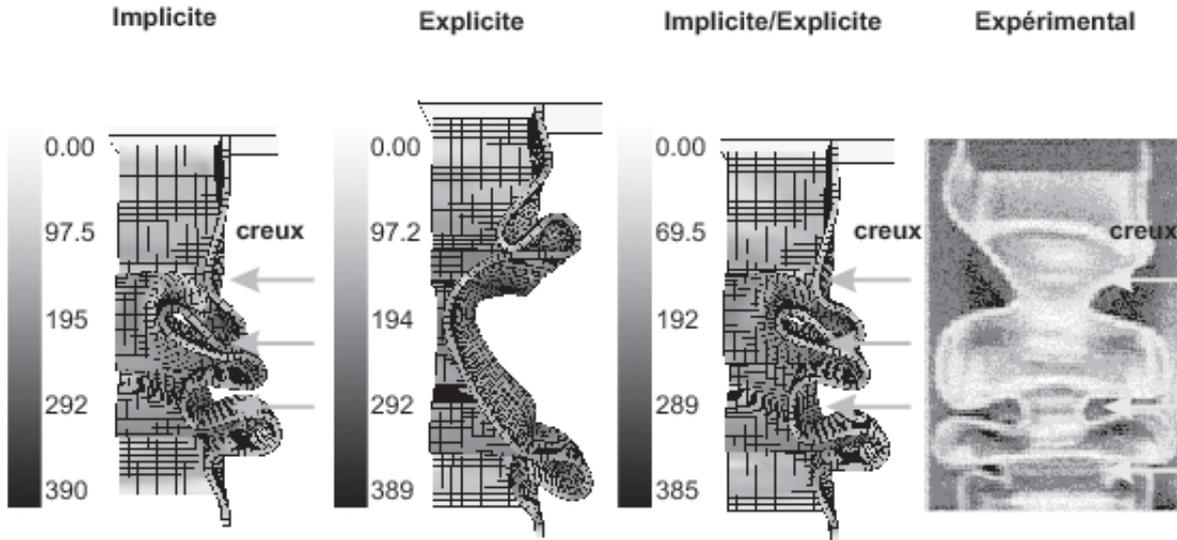


Figure 8.19: Déformations finales et contraintes équivalentes de von Mises ( $Mpa$ ) du flambement du longeron de Langseth *et al.* [88] (reproduction des résultats expérimentaux avec l'aimable autorisation du Professeur Langseth).

Table 8.5: Résultats finaux du longeron de Langseth *et al.* [88]

Méthode	Ecrasement (mm)	temps CPU (jours)
Implicite EDMC-1	168	13.6
Combinée	164	6.5
Explicite de Chung-Hulbert	152	6.76
Expérimentale (Langseth <i>et al.</i> [88])	158	-

illustrée à la Figure 8.9. Une masse de  $55.9kg$  (pour la totalité du longeron) impacte le longeron avec une vitesse de  $15.6m/s$ . Il s'agit approximativement de la même vitesse d'impact que le longeron N76 (de Jones et Karagiozova [79]), mais avec une masse dix fois plus importante.

Nous gardons le modèle utilisé pour l'étude du longeron de Jones et Karagiozova [79] de la section 8.2.2 : c'est-à-dire 2600 éléments (120 éléments selon la longueur, 10 éléments sur chaque demi largeur, 2 éléments sur l'arc de cercle et 1 élément sur l'épaisseur). Comme pour l'étude du longeron de Jones et Karagiozova [79], nous comparons toujours les solutions obtenues par les schémas d'intégration suivants :

- (i) l'algorithme implicite EDMC-1, avec un rayon spectral  $\rho_\infty = 0.8$  (*c.f.* section 3.2) avec une précision sur l'intégration temporelle de  $10^{-4}$  (*c.f.* section 7.1), une précision du processus de Newton-Raphson (B.6) de  $10^{-5}$  et une précision du line-search (B.5) de  $10^{-4}$ ;

- (ii) l'algorithme explicite  $\alpha$ -généralisé avec un rayon spectral de bifurcation égal à 0.2 et une sécurité  $\gamma_s = 0.666$ ;
- (iii) une combinaison de ces deux algorithmes (le changement vers l'algorithme implicite se faisant par la méthode expliquée à la section 6.2.6) avec les paramètres de gestion automatique du basculement (section 7.3) qui valent  $\eta_e = 2.5$  et  $\gamma_{ie} = 2$ .

La simulation numérique se déroule sur  $16ms$ . Nous comparons nos résultats avec les résultats expérimentaux obtenus par Langseth et al. [88].

La Figure 8.19 représente les solutions numériques obtenues après  $16ms$  par les différentes méthodes d'intégration, ainsi que la déformation expérimentale. Si le nombre de boucles et de creux entre la solution numérique et expérimentale (3 creux) correspond, leur forme est différente. En effet, la méthode explicite fournit une configuration qui s'éloigne de la méthode implicite, de la méthode combinée et de la solution expérimentale. Cet exemple permet de mettre en évidence un avantage de la méthode combinée par rapport à la méthode explicite : le mode de ruine est approché par une méthode énergétiquement consistante (c'est-à-dire EDMC-1), ce qui permet de simuler le mode de ruine avec une plus grande précision. La solution combinée fournit un mode de ruine plus proche de la solution expérimentale que la méthode explicite. Lorsque nous comparons l'écrasement (Table 8.5) obtenu à la fin de la simulation numérique avec l'écrasement expérimental, nous voyons que les résultats concordent à environ 5% près. La méthode combinée est un outre légèrement plus rapide (3%) que la méthode explicite, et nettement plus rapide que la méthode entièrement implicite (50%).

## 8.2.4 Influence du maillage lors de l'étude du flambement d'un longeron

Nous allons effectuer une étude de l'influence du maillage sur le longeron N61 décrit à la section 8.2.2. Ce cas a l'avantage de nécessiter un faible temps de calcul. Nous allons dans un premier temps étudier l'influence du maillage en gardant un élément selon l'épaisseur. Ensuite nous étudierons l'influence du nombre d'éléments sur l'épaisseur.

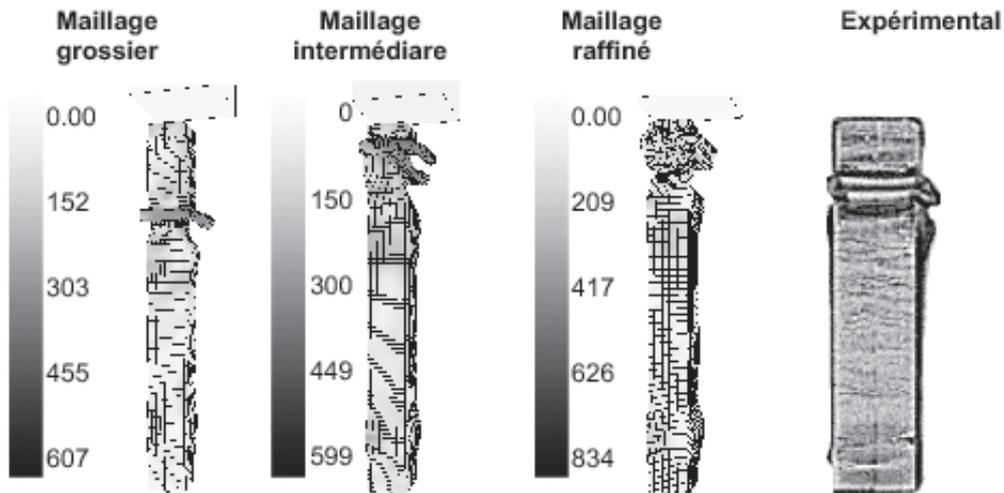
### Influence de la discrétisation longitudinale

Nous allons étudier les résultats obtenus avec les trois discrétisations reprises à la Table 8.6. Chaque discrétisation a un élément sur l'épaisseur. La méthode d'intégration utilisée est la méthode combinée.

La Figure 8.20 représente les déformations finales obtenues pour les différents maillages ainsi que la déformation expérimentale. Il apparaît que pour le maillage grossier, il se forme une seule boucle et non deux. Cela provient du fait qu'il n'y a pas assez d'éléments sur la longueur pour modéliser un mode de ruine à deux boucles. Lorsque l'écrasement final est analysé (Table 8.7), nous voyons qu'une augmentation de la discrétisation correspond à une diminution de la raideur de la structure (c'est-à-dire

Table 8.6: Discrétisations longitudinales du longeron N61

Discrétisation	Maillage grossier	Maillage intermédiaire	Maillage raffiné
Éléments sur la longueur	80	120	160
Éléments sur la demi largeur	7	10	11
Éléments sur l'arc de cercle	2	2	3
Éléments sur l'épaisseur	1	1	1
Nombre de degrés de liberté	7528	15648	23628

Figure 8.20: Déformations finales et contraintes équivalentes de von Mises ( $Mpa$ ) du flambement du longeron N61 pour les différentes discrétisations longitudinales.

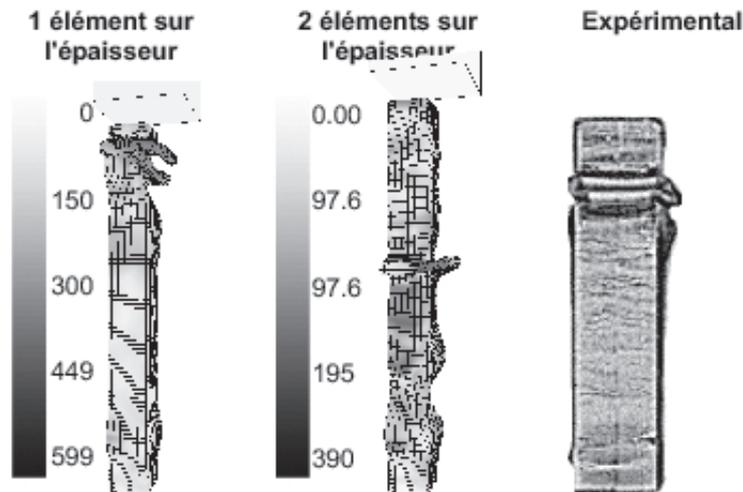
une augmentation de l'écrasement). Par contre, l'augmentation du nombre de degrés de liberté s'accompagne d'une augmentation plus que quadratique du temps CPU. Cela s'explique par le fait que pour le maillage grossier, le mode de ruine est plus aisé à simuler puisqu'il y a moins de boucles qui se forment. La matrice de raideur de la méthode implicite est donc plus petite en taille, mais le nombre d'itérations est aussi moins important. La méthode utilisée par l'algorithme est alors principalement implicite (durant 98% de la simulation). Par contre, pour le maillage raffiné, la méthode utilisée est principalement explicite (seule la mise en compression initiale se fait par une méthode implicite, c'est à dire 3% de la simulation). Entre ces deux discrétisations, la simulation du maillage intermédiaire par la méthode combinée conduit à une utilisation de la méthode explicite pour former les boucles ( $\simeq 30\%$  de la simulation), comme nous l'avons vu à la Figure 8.14.

Table 8.7: Résultats finaux du longeron N61 pour les différentes discrétisations.

Discrétisation	Ecrasement (mm)	Temps CPU (jours)
Maillage grossier	33.9	0.4
Maillage intermédiaire	39	2.5
Maillage raffiné	41	9.3
Solution expérimentale (Yang [150])	35.5	-

Table 8.8: Discrétisations selon l'épaisseur du longeron N61

Discrétisation	1 élément sur l'épaisseur	2 éléments sur l'épaisseur
Eléments sur la longueur	120	120
Eléments sur la demi largeur	10	10
Eléments sur l'arc de cercle	2	2
Eléments sur l'épaisseur	1	2
Nombre de degrés de liberté	15648	23468

Figure 8.21: Déformations finales et contraintes équivalentes de von Mises ( $Mpa$ ) du flambement du longeron N61 pour les différentes discrétisations selon l'épaisseur.

### Influence de la discrétisation sur l'épaisseur

Reprenons le maillage intermédiaire de la section précédente et regardons ce qui se passe si on augmente le nombre d'éléments selon l'épaisseur. Les discrétisations sont reprises à la Table 8.8. La méthode d'intégration utilisée est toujours la méthode combinée.

La Figure 8.21 représente les déformations finales obtenues pour les différents mail-

Table 8.9: Résultats finaux du longeron N61 pour les différentes discrétisations selon l'épaisseur.

Discrétisation	Ecrasement (mm)	Temps CPU (jours)
1 élément sur l'épaisseur	39	2.5
2 éléments sur l'épaisseur	32.3	2.01
Solution expérimentale (Yang [150])	35.5	-

lages ainsi que la déformation expérimentale. Nous voyons que le fait de mettre deux éléments selon l'épaisseur raidit la structure. L'élément sous-intégré se comportant mal en flexion, il n'est pas étonnant de voir apparaître un tel phénomène. Pour plus de rigueur, il serait utile de travailler avec des éléments de type "Enhance-Assumed-Strain" [1, 136, 137] qui corrigent cette tendance. Ce phénomène de raidissement se confirme en analysant l'écrasement obtenu (Table 8.9). Remarquons cependant qu'il n'existe pas, loin de là, de règle universelle affirmant qu'un élément sur l'épaisseur est plus précis que deux éléments selon l'épaisseur.

### 8.2.5 Conclusions sur la simulation du flambement d'un longeron à section carrée

Dans cette section nous avons montré que l'algorithme implicite EDMC-1 développé permettait de simuler avec, par rapport aux résultats expérimentaux, une précision de 10% le phénomène de flambement. Cependant, nous avons vu que lorsque la dynamique étudiée devenait moins rapide par rapport aux modes numériques, la dissipation numérique au premier ordre était insuffisante, ce qui entraînait un coût prohibitif des calculs. Un algorithme dissipatif précis au second ordre par rapport au pas de temps devra donc être envisagé comme développement ultérieur. La combinaison de la méthode implicite avec la méthode explicite a permis de garder la même précision en s'approchant du mode de ruine par une méthode stable implicite et en calculant la formation des boucles par la méthode explicite. Le temps de calcul est alors fortement réduit par rapport à une méthode implicite. Par rapport à la méthode explicite, la méthode combinée est moins onéreuse uniquement lorsque la vitesse d'impact est faible, car alors le pas implicite peut être significativement plus grand que le pas explicite.

### 8.3 Simulation d'un processus d'emboutissage d'un rail en forme de "S"

Dans ce paragraphe nous montrons que l'algorithme développé peut également être utilisé pour des problèmes de mise à forme dont la dynamique est évidemment beaucoup plus lente, voire négligeable. Nous allons étudier l'emboutissage d'un flan en "S" et son retour élastique après emboutissage.

Pratiquement les temps d'emboutissage sont de l'ordre de la seconde ou du dixième de seconde. Néanmoins, lorsqu'un algorithme dynamique est utilisé, la durée du pas de temps est conditionnée par les fréquences propres de la pièce. Dans le cas d'un algorithme explicite, la taille du pas de temps dépend directement de cette fréquence pour des raisons de stabilité. Dans le cas d'un algorithme implicite, la taille du pas de temps est indirectement liée à cette fréquence. En effet, pour intégrer avec suffisamment de précision et pour atteindre des configurations équilibrées successives, il ne faut pas que la taille du pas soit trop importante par rapport au temps caractéristique de vibration du flan. Afin d'accélérer le temps de calcul de l'emboutissage, la masse volumique est augmentée, ce qui diminue les fréquences propres de la structure. Cette méthode appelée "mass scaling" ne perturbe pas la solution tant que l'énergie cinétique reste inférieure à 5% du travail des forces internes [126].

En ce qui concerne le retour-élastique, il est calculé en retirant les matrices de contact. Il apparaît donc qu'une méthode dynamique explicite demande un temps de résolution très important. En outre, afin d'obtenir une solution stabilisée, de la dissipation numérique est indispensable, sans quoi l'énergie élastique stockée dans le flan va se transformer en énergie cinétique, et le flan va vibrer indéfiniment.

Ces constatations faites, nous allons présenter le problème qui nous concerne.

#### 8.3.1 Description du modèle

L'exemple présenté consiste en la simulation de l'emboutissage d'un flan d'épaisseur constante (Table 8.10) pour former un rail en forme de "S". La masse est dopée par un facteur 10000. Cet exemple numérique a été proposé comme test de référence lors de la conférence NUMISHEET 96 [119]. Le schéma de l'emboutissage est représenté à la Figure 8.22 : outre le flan (blank), le modèle est constitué d'un poinçon rigide (punch), d'une matrice rigide (die), et d'un serre-flan (blank holder). L'emboutissage se fait en un temps égal à  $t_e = 0.25s$ . Le retour élastique se simule en un temps égal à  $t_{re} = 0.75s$ .

Détaillons les composants. La Figure 8.23 représente le maillage du flan. Il est composé de 1800 éléments (30 selon la longueur, 30 selon la largeur et 2 selon l'épaisseur). Le serre-flan est représenté à la Figure 8.24 (a). Il est composé de deux surfaces planes coplanaires, chacune limitée par un contour constitué de segments de droites et d'arcs de cercle. Au départ de l'emboutissage, il est situé à une distance de  $0.1\mu m$  du flan. Durant l'emboutissage ( $0 \leq t \leq t_e$ ), il se déplace de  $5\mu m$ , de manière à comprimer le flan contre la matrice rigide. Durant le retour élastique ( $t_e \leq t \leq t_e + t_{re}$ ) le serre-flan libère

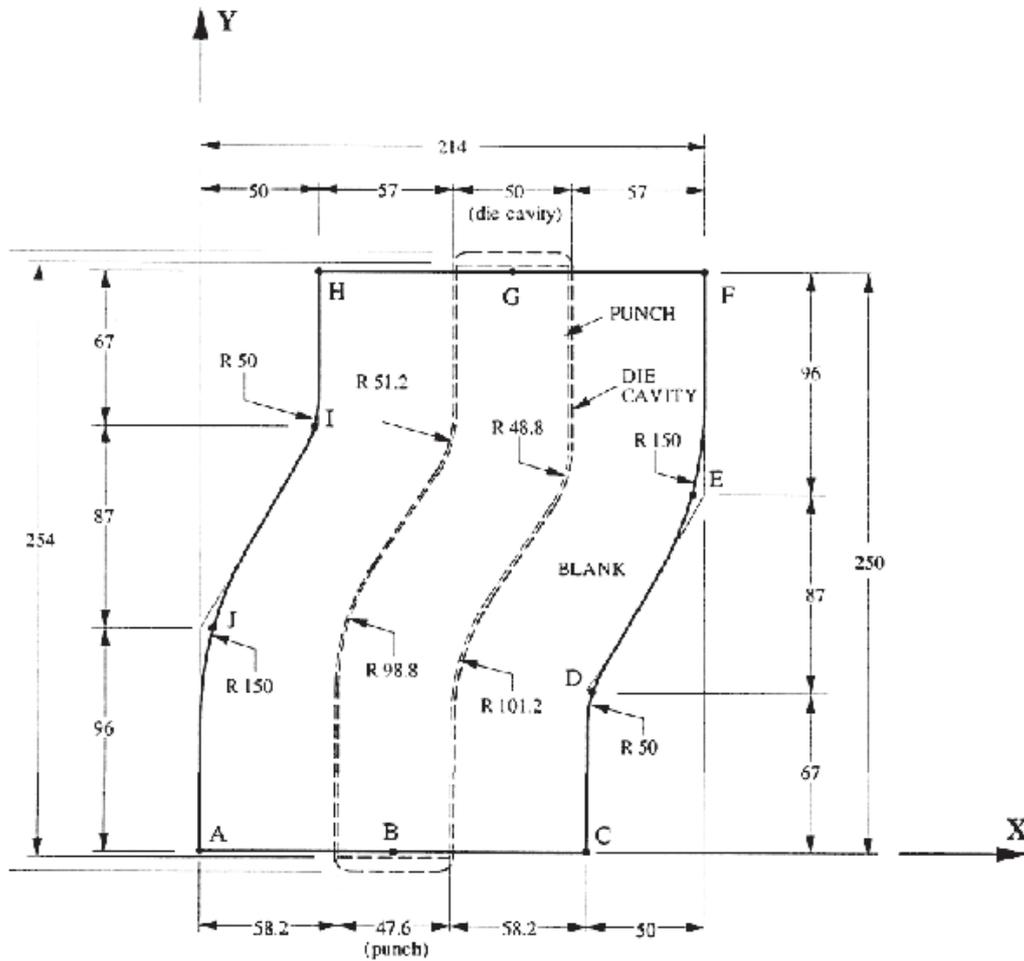


Figure 8.22: Schéma de l'emboutissage d'un rail en forme de "S".

la pièce de la matrice en reculant de  $20\text{mm}$ . La Figure 8.24 (b) représente le poinçon. Il est également constitué de surfaces planes et de surfaces de Coons limitées par des segments de droites et des arcs de cercle. C'est le poinçon qui s'enfonce dans la matrice rigide de  $37\text{mm}$  pendant l'emboutissage, provoquant les déformations irréversibles du flan. Pendant le retour élastique, le poinçon est retiré de  $57\text{mm}$ . La matrice rigide est représentée à la Figure 8.25. Elle est constituée de deux parties séparées par la cavité dans laquelle le flan va pénétrer. Chaque partie est composée de surfaces planes et de surfaces de Coons. Les contours des surfaces sont constitués de segments de droites et d'arcs de cercle. Initialement, la matrice rigide est contre le flan. Durant l'emboutissage, la matrice rigide reste fixe. Les deux parties s'écartent de  $28\text{mm}$  selon la direction  $x$  pendant le retour élastique.

Table 8.10: Propriétés du flan.

Propriété	Valeur
Épaisseur du flan	$e = 0.92mm$
Masse volumique réelle	$\rho = 8900kg/m^3$
Masse volumique effective (dopée)	$\rho = 8900.E4kg/m^3$
Module de Young	$Y = 206000N/mm^2$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Limite élastique initiale	$\Sigma_0 = 158N/mm^2$
Paramètre d'érouissage linéaire	$h = 1000N/mm^2$
Pénalité normale	$k_N = 10^5$
Pénalité tangentielle	$k_T = 10^3$
Coefficient de frottement	$\mu_c = 0.1$

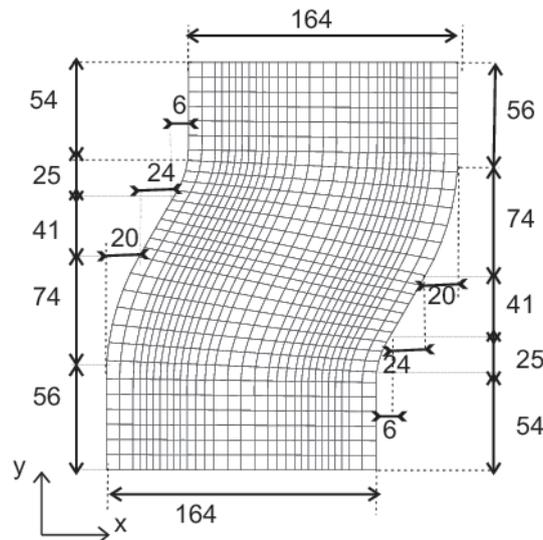


Figure 8.23: Discretisation et dimensions (mm) du flan pour l'emboutissage d'un rail en forme de "S".

### 8.3.2 Simulation d'un processus de mise à forme

Nous allons comparer les solutions obtenues pour les algorithmes suivants :

- (i) l'algorithme implicite EDMC-1, avec un rayon spectral  $\rho_\infty = 0.8$  (*c.f.* section 3.2) avec une précision sur l'intégration temporelle de  $10^{-4}$  (*c.f.* section 7.1), une précision du processus de Newton-Raphson (B.6) de  $10^{-8}$  et une précision du line-search (B.5) de  $10^{-2}$ ;
- (ii) l'algorithme explicite  $\alpha$ -généralisé avec un rayon spectral de bifurcation égal à 0.2 et une sécurité  $\gamma_s = 0.8$ ;

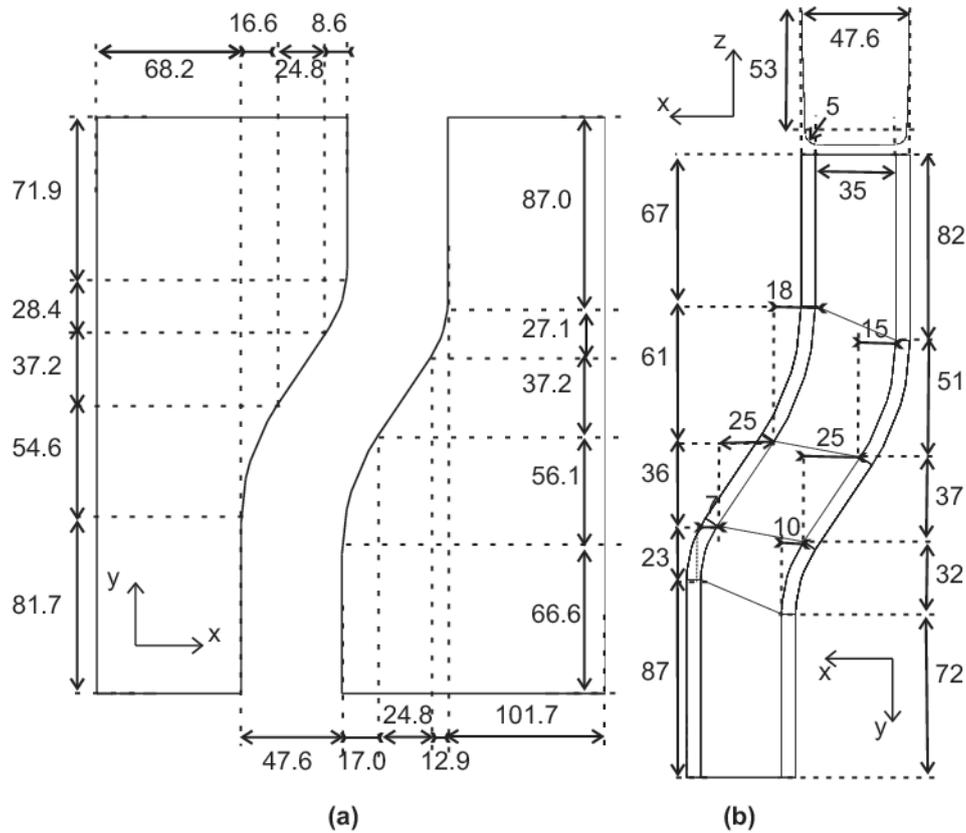


Figure 8.24: Modélisation et dimensions (mm) pour l'emboutissage d'un rail en forme de "S" - (a) serre-flan - (b) poinçon.

- (iii) une combinaison de ces deux algorithmes (le changement vers l'algorithme implicite se faisant par la méthode expliquée à la section 6.2.6) avec les paramètres de gestion automatique du basculement (section 7.3) qui valent  $\eta_e = 2.5$  et  $\gamma_{ie} = 2.5$ ;
- (iv) un algorithme implicite de Chung-Hulbert, avec un rayon spectral  $\rho_\infty = 0.2$  avec une précision sur l'intégration temporelle de  $10^{-4}$ , une précision du processus de Newton-Raphson de  $10^{-8}$  et une précision du line-search de  $10^{-2}$ .

Remarquons qu'il n'est pas possible d'effectuer aisément une étude quasi-statique. En effet, la phase de retour élastique serait caractérisée par la présence de modes rigides. Les Figures 8.26 (a) et (b) représentent la configuration ainsi que la contrainte de von Mises obtenues respectivement à la fin de l'emboutissage et à la fin du retour élastique en utilisant la méthode EDMC-1. Il apparaît qu'une partie de l'énergie stockée dans le flan suite à l'emboutissage se libère lors du retrait des outils et conduit à une torsion de la pièce emboutie. Les mêmes observations tiennent lorsque la méthode utilisée est la méthode combinée (Figures 8.27 (a) et (b)) ou la méthode implicite de Chung-Hulbert (Figure 8.28 (a) et (b)), ou encore la méthode explicite de Chung-Hulbert (Figure 8.29 (a) et (b)). Les solutions obtenues sont similaires à 1% près. La Figure



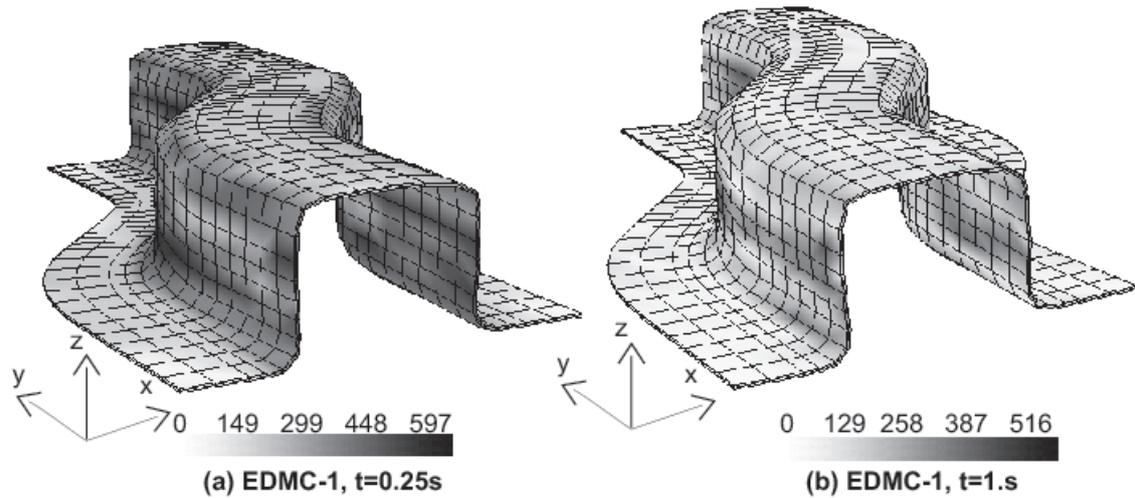


Figure 8.26: Déformation et contrainte équivalente de von Mises (Mpa) pour l'emboutissage d'un rail en forme de "S" par la méthode EDMC-1 - (a) après l'emboutissage - (b) après le retour élastique.

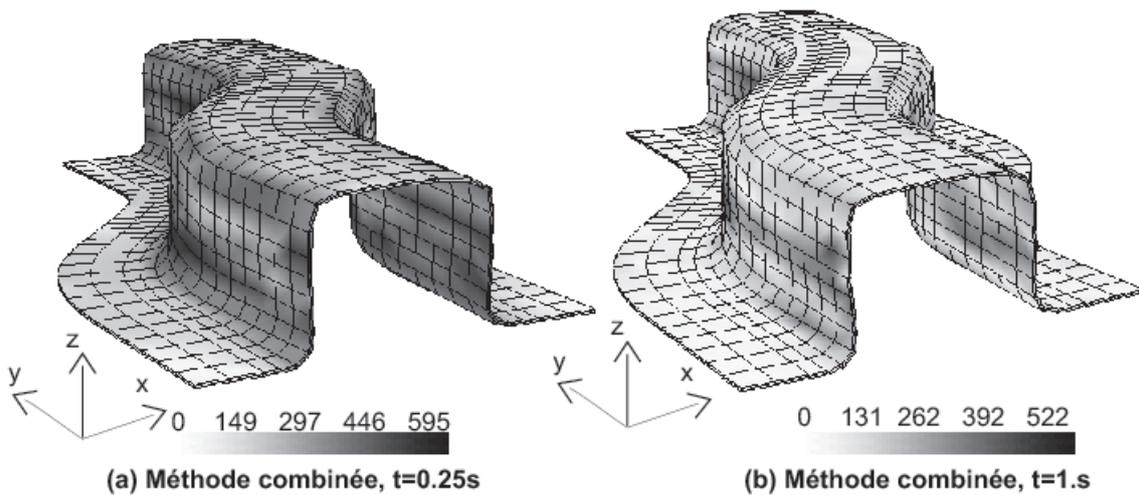


Figure 8.27: Déformation et contrainte équivalente de von Mises (Mpa) pour l'emboutissage d'un rail en forme de "S" par la méthode combinée - (a) après l'emboutissage - (b) après le retour élastique.

performante pour peu de dissipation numérique. Nous avons donc simulé l'emboutissage avec un rayon spectral  $\rho_\infty = 0.8$ . Cependant, pour un processus de dynamique lente comme c'est le cas ici, les modes numériques altèrent la convergence du processus, ce qui oblige à travailler avec un pas de temps limité en regard du temps caractéristique de ces modes. Par contre la méthode explicite de la méthode combinée permet d'amortir de manière très importante ces modes numériques. Par conséquent la méthode implicite qui lui succède permet de travailler avec des pas trois fois plus grands. Cette observation

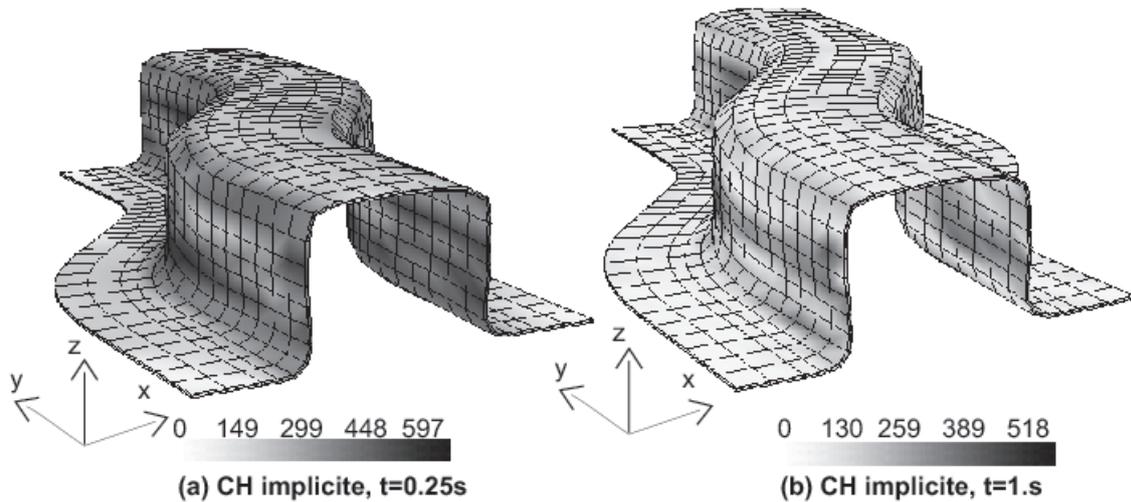


Figure 8.28: Déformation et contrainte équivalente de von Mises (Mpa) pour l'emboutissage d'un rail en forme de "S" par la méthode implicite de Chung-Hulbert - (a) après l'emboutissage - (b) après le retour élastique.

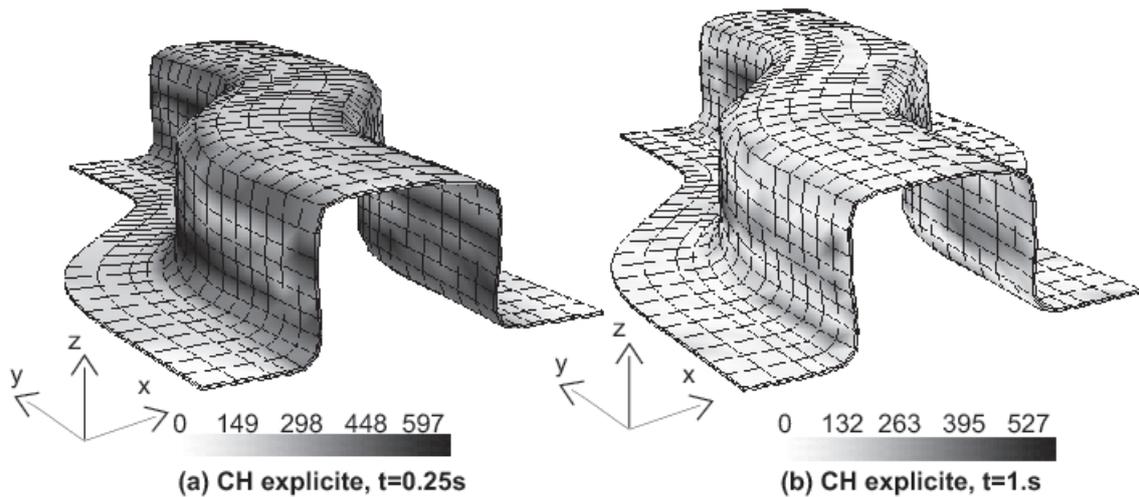


Figure 8.29: Déformation et contrainte équivalente de von Mises (Mpa) pour l'emboutissage d'un rail en forme de "S" par la méthode explicite de Chung-Hulbert - (a) après l'emboutissage - (b) après le retour élastique.

est confirmée par le fait que la méthode implicite de Chung-Hulbert utilisée avec une forte dissipation  $\rho_\infty = 0.2$  permet de travailler avec des pas de temps beaucoup (10 à 100 fois) plus grands. La Figure 8.33 (b) qui illustre les coûts confirme cette tendance : la méthode implicite de Chung-Hulbert est la moins onéreuse (10 fois moins). La méthode combinée permet de réduire les temps CPU par rapport à une méthode totalement implicite EDMC-1 d'un facteur 2. Du fait que l'algorithme EDMC-1 voit son pas de temps

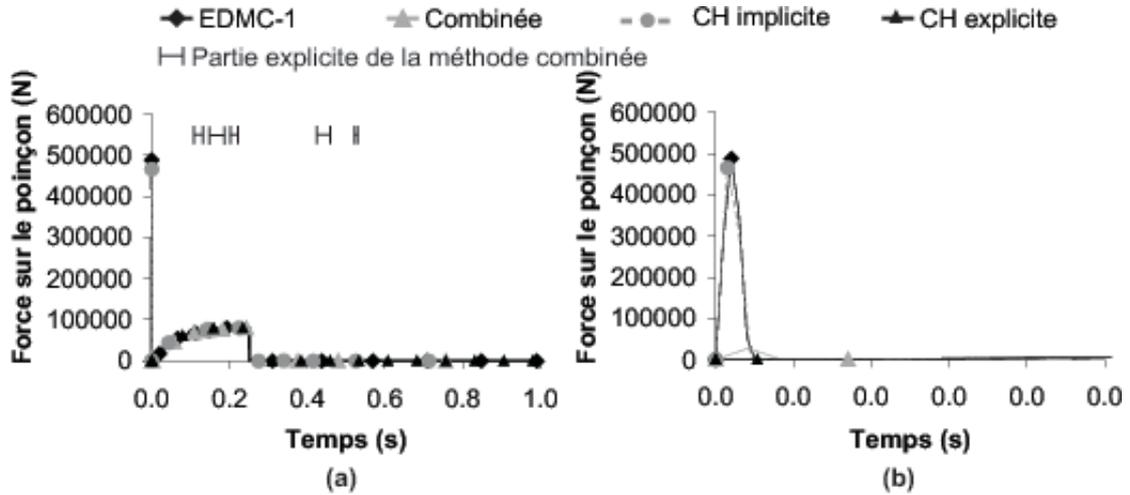


Figure 8.30: Evolution temporelle de la force résultante sur le poinçon - (a) force résultante sur 1s - (b) zoom sur l'overshoot.

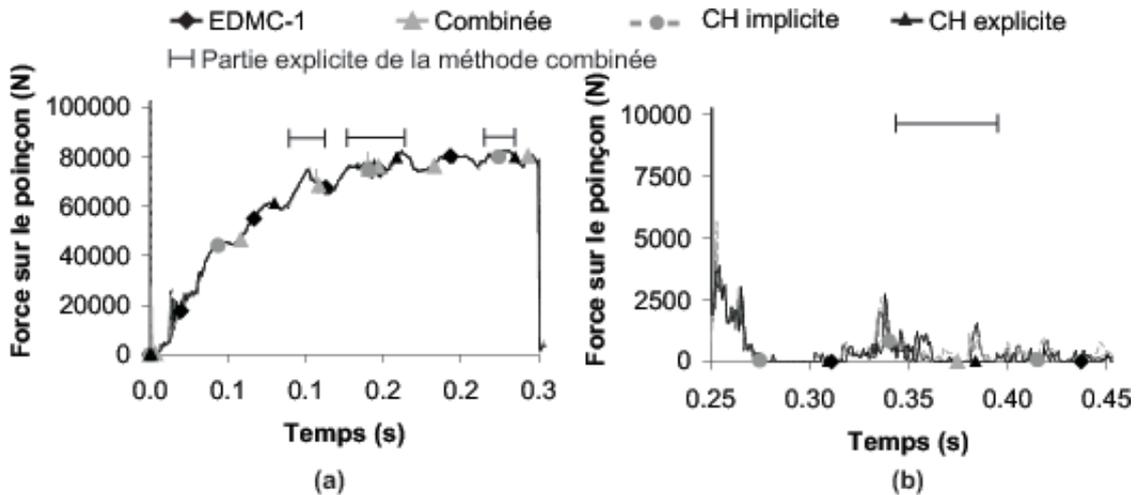


Figure 8.31: Evolution temporelle de la force résultante sur le poinçon - (a) force résultante durant l'emboutissage - (b) force résultante au début du retour élastique (entre 0.3 et 0.5s).

limité par les modes numériques, la méthode combinée n'est pas moins chère que la méthode entièrement explicite (elle est 5% plus chère). La Figure 8.34 (a) représente les temps CPU nécessaires à la simulation de l'emboutissage. La méthode combinée permet de réduire le temps de calcul par rapport à la méthode EDMC-1, mais est plus onéreuse que la méthode entièrement explicite. Cela provient du fait que l'algorithme EDMC-1 voit son pas de temps limité par les modes numériques, et de l'existence des critères de sécurité pour la décision de passage d'une méthode à une autre. Par contre, lorsque les temps CPU nécessaires à la simulation du retour élastique (Figure 8.31 (b))

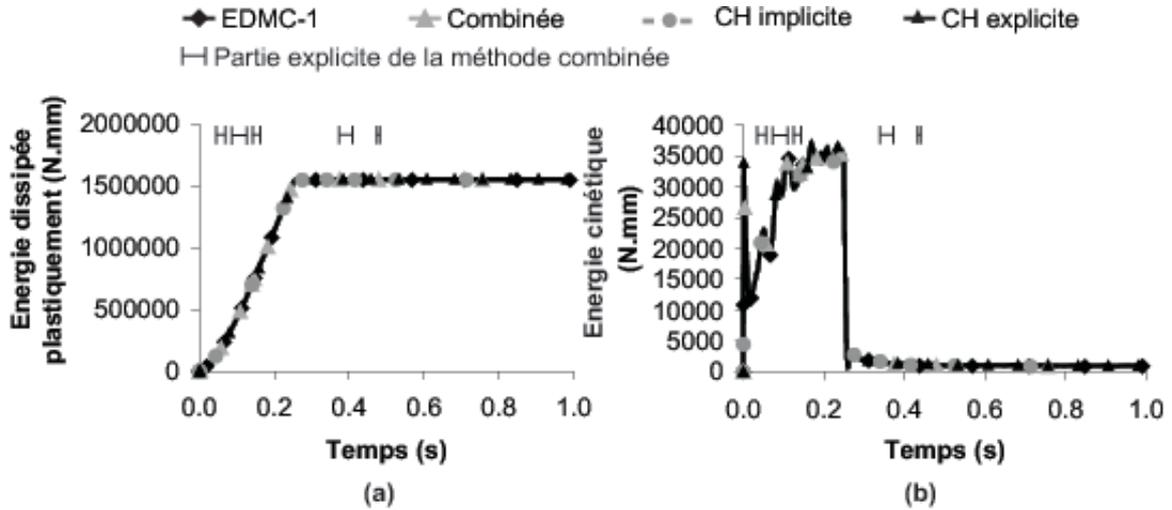


Figure 8.32: Evolution temporelle des énergies du flan - (a) énergie dissipée plastiquement - (b) énergie cinétique.

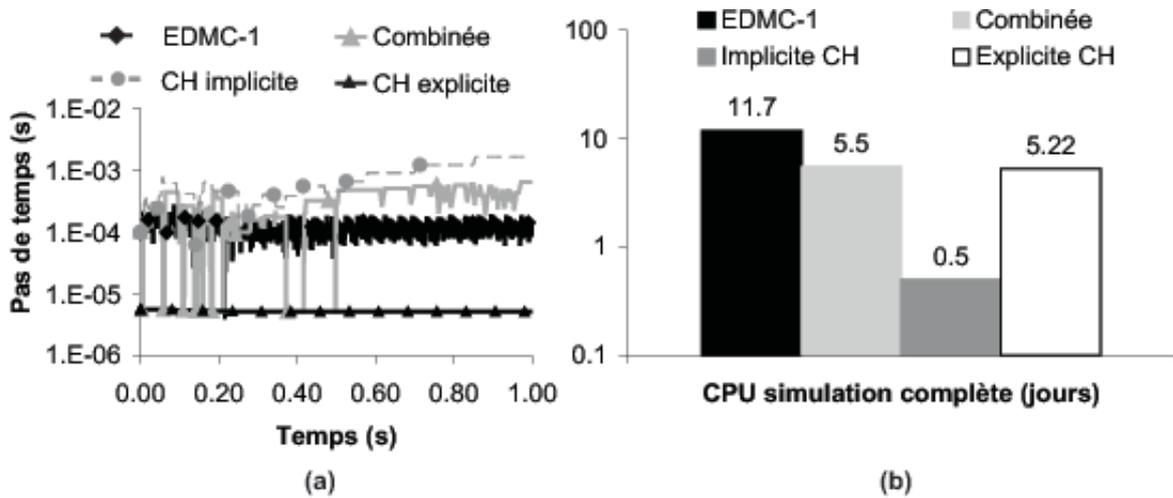


Figure 8.33: Coût de la simulation de l'emboutissage d'un rail en forme de "S" - (a) évolution temporelle du pas de temps - (b) temps CPU pour la simulation complète.

sont analysés, il apparaît que le temps nécessaire à la méthode combinée est inférieur au temps nécessaire à la méthode explicite. Remarquons que la méthode combinée ayant amorti les modes numériques, le temps nécessaire à la méthode combinée est inférieur à celui nécessaire à la méthode EDMC-1 complètement implicite.

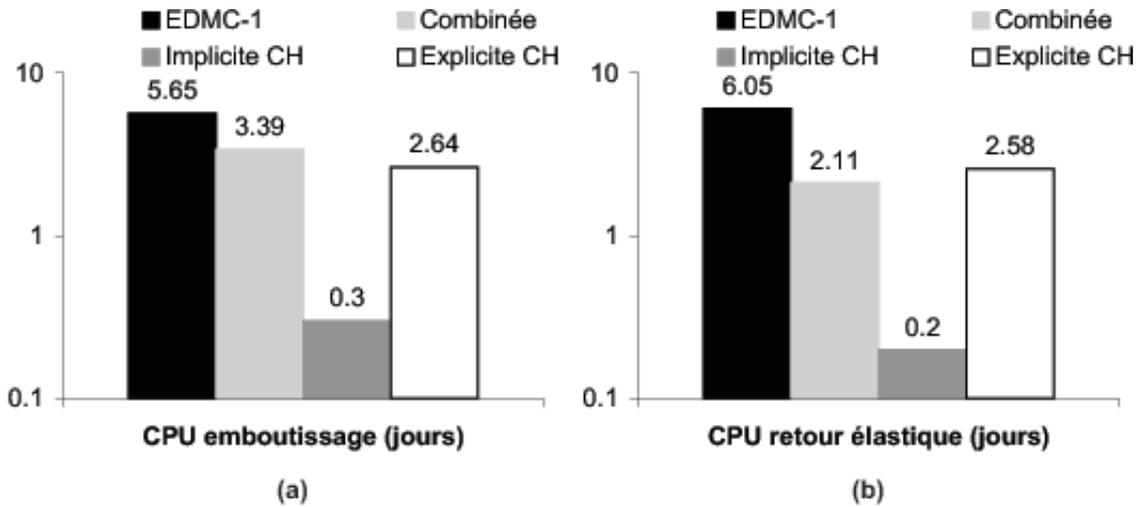


Figure 8.34: Coût de la simulation de l'emboutissage d'un rail en forme de "S" - (a) temps CPU pour la phase d'emboutissage - (b) temps CPU pour la phase de retour élastique.

### 8.3.3 Conclusion sur la simulation du processus de mise à forme

Dans cette section nous avons montré, en détaillant les coûts de calcul des phases d'emboutissage et de retrait, que la combinaison d'une méthode implicite et d'une méthode explicite permet de simuler un phénomène de mise à forme. La méthode explicite est bien adaptée pour simuler le phénomène d'emboutissage quand les non-linéarités ralentissent la convergence du schéma implicite. Par contre, pour calculer le spring-back, un schéma implicite avec de la dissipation numérique est particulièrement efficace car il permet de travailler avec des grands pas de temps tout en restant stable. Cependant, nous avons mis clairement en évidence les limitations de l'algorithme EDMC-1. En effet, ce dernier ne permettant pas de travailler avec une forte dissipation numérique, contrairement à l'algorithme implicite de Chung-Hulbert, il n'est pas particulièrement adapté à la simulation de processus de dynamique lente. N'oublions pas que cet algorithme a été développé afin de remédier au problème de stabilité qui existe pour les schémas traditionnels lors de la résolution de problèmes où la dynamique joue un rôle important. Cependant, nous espérons que l'extension de ce schéma à une précision du second ordre permettra de travailler avec plus de dissipation numérique et donc de remédier à ces inconvénients.

## 8.4 Simulation d'une perte d'aube dans un moteur d'avion

La perte d'une aube dans un turbo-fan est l'accident le plus critique qui puisse arriver dans un moteur d'avion. Cela peut survenir après qu'un oiseau ou un bloc de glace ait pénétré dans le moteur. Dans le cas de la rupture d'aube, le constructeur doit garantir, entre autres, que l'aube ne perce pas le carter. Nous allons présenter une simulation numérique d'un modèle fictif<sup>2</sup> et présenterons les résultats qui intéressent le plus un motoriste : les forces de suspension du palier et du carter. Le carter étant solidaire de l'aile, et constituant le seul lien entre le moteur et l'avion, la force exercée à sa suspension est intéressante à connaître. De la même manière, le palier constitue la liaison entre la partie tournante et la partie fixe du moteur. La force s'y exerçant doit donc pouvoir être évaluée.

### 8.4.1 Description du modèle

Soit une modélisation de fan de turboréacteur. La modélisation consiste en un arbre pour lequel la rotation est imposée, supportant en son extrémité une roue aubagée. Cet arbre est en rotation dans un carter et est supporté par un palier.

#### La partie tournante (rotor)

Table 8.11: Coordonnées (m) des points de passage des splines définissant l'aube

Point	spline 1	spline 2
1	$\vec{x} = (0.2; 0; 0)$	$\vec{x} = (0.791926; -0.113371; 0.00894856)$
2	$\vec{x} = (0.199332; 0.00895003; 0.0196538)$	$\vec{x} = (0.793946; -0.0946775; 0.0282278)$
3	$\vec{x} = (0.198781; 0.0163479; 0.0399462)$	$\vec{x} = (0.795149; -0.0758581; 0.0474636)$
4	$\vec{x} = (0.198348; 0.0221489; 0.0607543)$	$\vec{x} = (0.796353; -0.0570383; 0.0666998)$
5	$\vec{x} = (0.198037; 0.0263178; 0.0819519)$	$\vec{x} = (0.797556; -0.0382179; 0.0859366)$
6	$\vec{x} = (0.19785; 0.0288292; 0.103411)$	$\vec{x} = (0.79876; -0.019397; 0.105174)$
7	$\vec{x} = (0.197787; 0.0296681; 0.125)$	$\vec{x} = (0.799963; -0.000575643; 0.124412)$
8	$\vec{x} = (0.19785; 0.0288292; 0.14659)$	$\vec{x} = (0.799788; 0.0182754; 0.143657)$
9	$\vec{x} = (0.198037; 0.0263178; 0.168048)$	$\vec{x} = (0.799133; 0.03706; 0.162954)$
10	$\vec{x} = (0.198348; 0.0221489; 0.189246)$	$\vec{x} = (0.798046; 0.0557373; 0.182332)$
11	$\vec{x} = (0.198781; 0.0163479; 0.210054)$	$\vec{x} = (0.796538; 0.0742676; 0.201823)$
12	$\vec{x} = (0.199332; 0.00894999; 0.230346)$	$\vec{x} = (0.794618; 0.0926119; 0.221455)$
13	$\vec{x} = (0.2; 0; 0.25)$	$\vec{x} = (0.7923; 0.110731; 0.24126)$

<sup>2</sup>Pour des raisons de confidentialité, SNECMA nous a fourni un modèle fictif mais néanmoins réaliste et non un modèle réel d'un turbo-fan;

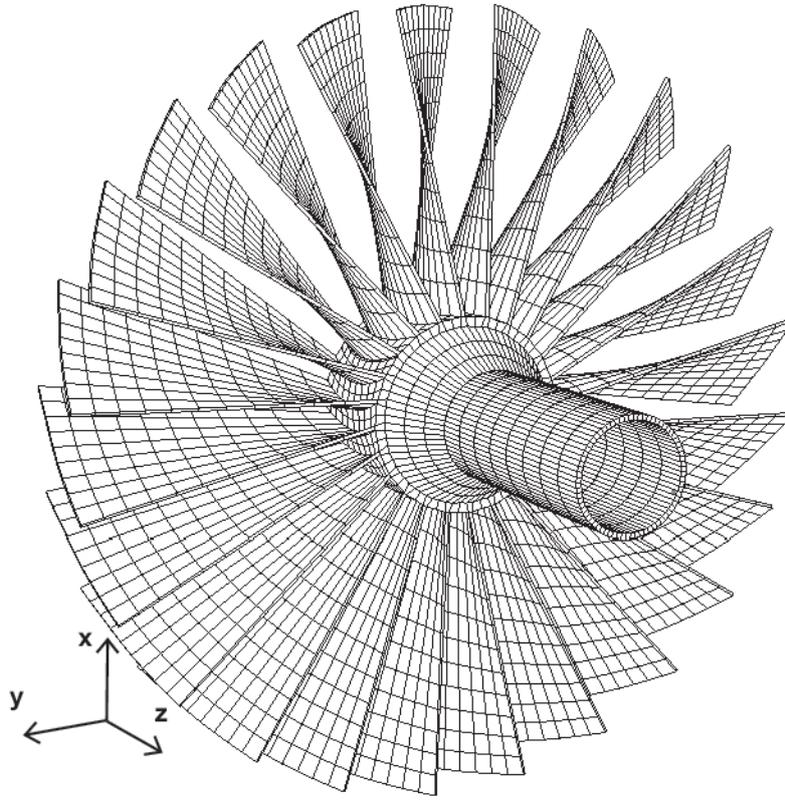


Figure 8.35: Modélisation du rotor.

Table 8.12: Propriétés de l'aube

Propriété	Valeur
Épaisseur	$e = 8mm$
Masse volumique	$\rho = 3600kg/m^3$
Module de Young	$Y = 88000N/mm^2$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.31$
Limite élastique initiale	$\Sigma_0 = 880N/mm^2$
Paramètre d'érouissage	$h = 26700N/mm^2$

La partie tournante (Figure 8.35) possède une symétrie cyclique pour un angle de  $15^\circ$ . La Figure 8.36 représente cette portion. L'aube est décrite par une surface réglée dont la génératrice droite s'appuie sur deux splines. Ces deux splines correspondent à l'équation de la fibre milieu du pied d'aube et de la fibre milieu de la tête d'aube. Les équations de ces splines sont obtenues à partir des points de passage de la Table 8.11. L'aube a une épaisseur  $e$  (Table 8.12) constante et est constituée d'un alliage spécial à base de titane (Table 8.12). Le disque a son pourtour extérieur limité par la

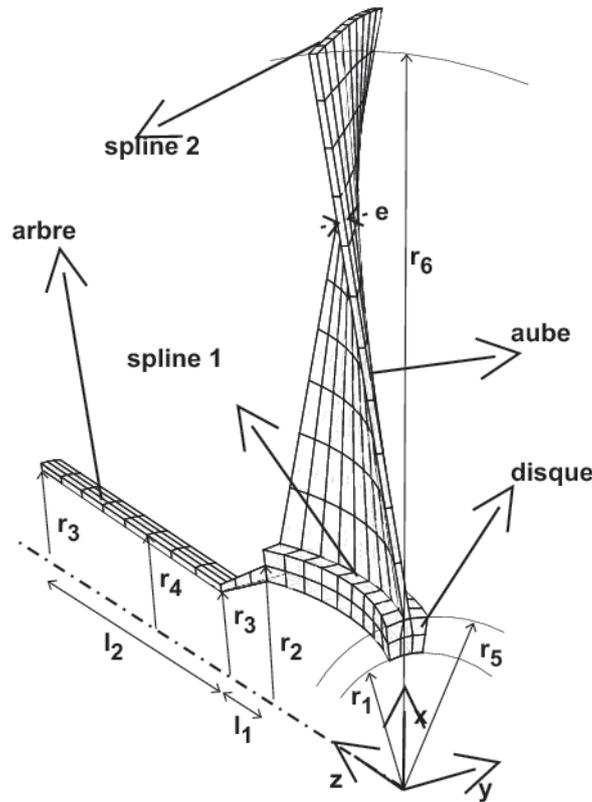


Figure 8.36: Modélisation du rotor ( $15^\circ$  d'arc).

spline définissant le pied de l'aube, a un rayon interne  $r_1$  et un rayon externe  $r_5$  (Table 8.13). L'arbre, d'une longueur  $l_2$ , a un rayon interne  $r_3$  constant et un rayon externe  $r_4$  constant. Il est attaché au disque par une jonction, de longueur  $l_1$ , de même diamètre que l'arbre à une extrémité et de rayon interne  $r_1$ , de rayon externe  $r_2$  à l'autre extrémité (Table 8.13). L'arbre, le disque et la jonction sont constitués du même alliage à base d'acier (Table 8.13).

Le maillage est constitué de briques à 8 nœuds dont le champ de pression est sous-intégré. L'aube est discrétisée radialement avec 11 éléments tels que l'élément en pied d'aube a une hauteur 50% plus importante que l'élément en tête d'aube. L'aube ainsi que la roue possèdent 9 éléments selon l'axe de rotation (selon les splines). Le disque est discrétisé par deux éléments selon son épaisseur. Le disque, l'arbre et la jonction roue-arbre possèdent 72 éléments selon la circonférence. L'arbre et la jonction ont 1 élément dans la direction radiale. La jonction possède 3 éléments selon l'axe alors que l'arbre en possède 8.

Table 8.13: Propriétés du disque et de l'arbre

Propriété	Valeur
Rayon interne du disque	$r_1 = 160mm$
Rayon externe de la jonction arbre-disque	$r_2 = 180mm$
Rayon interne de l'arbre	$r_3 = 99mm$
Rayon externe de l'arbre	$r_4 = 110mm$
Rayon interne du disque	$r_5 = 200mm$
Rayon externe du disque	$r_6 = 800mm$
Longueur de la jonction arbre-disque	$l_1 = 120mm$
Longueur de l'arbre	$l_1 = 500mm$
Masse volumique	$\rho = 6300kg/m^3$
Module de Young	$Y = 165000N/mm^2$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.31$
Limite élastique initiale	$\Sigma_0 = 800N/mm^2$
Paramètre d'érouissage	$h = 271N/mm^2$

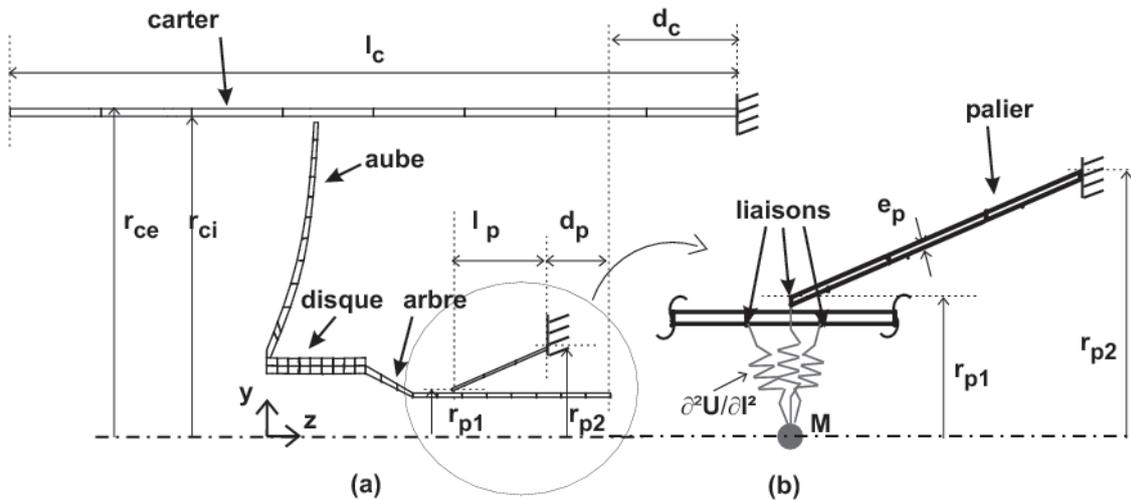


Figure 8.37: Modélisation du stator - (a) coupe du rotor et du stator - (b) liaison arbre-palier.

### La partie fixe (stator)

Le carter est cylindrique et a un rayon interne  $r_{ci}$  et un rayon externe  $r_{ce}$  (Table 8.14). Il a une longueur  $l_c$  et est encastré à une extrémité (Figure 8.37 (a)). Cette extrémité est située à une distance  $d_c$  de l'extrémité de l'arbre sur sa partie arrière de telle manière que la totalité du rotor soit incluse dans le carter. Il est composé d'un alliage à base d'aluminium (Table 8.14).

Le palier est constitué d'un tronc conique (Figure 8.37 (b)) de longueur  $l_p$ , de rayon

Table 8.14: Propriétés du carter

Propriété	Valeur
Rayon interne du carter	$r_{ci} = 815mm$
Rayon externe du carter	$r_{ce} = 835mm$
Longueur du carter	$l_c = 1842mm$
Distance entre l'extrémité du carter et l'extrémité de l'arbre	$d_c = 322mm$
Masse volumique	$\rho = 2710kg/m^3$
Module de Young	$Y = 55200N/mm^2$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.31$
Limite élastique initiale	$\Sigma_0 = 550N/mm^2$
Paramètre d'écroutissage	$h = 281N/mm^2$

Table 8.15: Propriétés du palier

Propriété	Valeur
Rayon interne 1 du palier	$r_{p1} = 115mm$
Rayon interne 2 du palier	$r_{p2} = 220mm$
Épaisseur du palier	$e_p = 6.5mm$
Longueur du palier	$l_p = 240mm$
Distance entre l'extrémité du palier et l'extrémité de l'arbre	$d_p = 160mm$
Masse volumique	$\rho = 3600kg/m^3$
Module de Young	$Y = 88000N/mm^2$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.31$
Limite élastique initiale	$\Sigma_0 = 550N/mm^2$
Paramètre d'écroutissage	$h = 2600N/mm^2$
Raideur des ressorts	$\frac{\partial^2 U}{\partial l^2} = 1e11N/m$
Masse associée au nœud central	$M = 0.05kg$

intérieur variant de  $r_{p1}$  à  $r_{p2}$  et ayant une épaisseur  $e_p$  (Table 8.15). Il est encasté à son extrémité de plus large rayon qui est située à une distance  $d_p$  de l'extrémité de l'arbre (Figure 8.37 (a)). Il est constitué d'un alliage à base de titane dont les propriétés sont reprises à la Table 8.15.

La liaison entre l'arbre et le palier se fait par l'intermédiaire d'un nœud central de masse  $M$ , contraint à se déplacer dans le plan de la section étroite du palier (Figure 8.37 (b)). Chaque nœud de la circonférence de rayon  $r_{p1}$  du palier (indiqué par une flèche à la Figure 8.37) est relié à ce nœud central par des ressorts de raideur constantes (propriétés reportées à la Table 8.15). De même, l'ensemble des nœuds situés sur la surface extérieure de l'arbre (indiqués par une flèche à la Figure 8.37), et situés de part et d'autre du nœud central  $M$ , sont reliés à ce dernier par l'intermédiaire de ressorts. Cette manière de procéder permet de créer une interaction entre une partie tournante

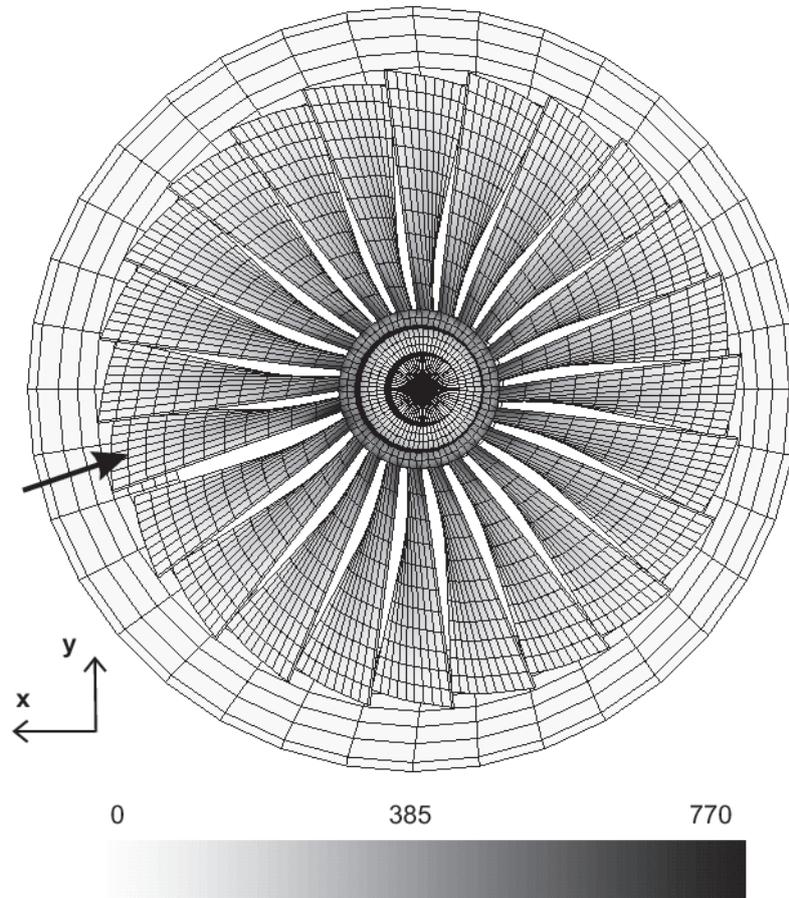


Figure 8.38: Mise en rotation du rotor (contrainte équivalente de von Mises ( $N/mm^2$ ), la flèche indique l'aube qui va se briser.

(arbre) et une partie fixe (palier) sans activer d'algorithme de contact entre ces parties. Afin de pouvoir effectuer une simulation explicite, une masse de  $0.05\text{ kg}$  est associée au nœud central.

Le maillage est toujours constitué de briques à 8 nœuds dont le champ de pression est sous-intégré. Le carter et le palier possèdent 1 élément dans la direction radiale. Le carter possède 8 éléments selon la direction de l'axe de rotation et 36 éléments sur la circonférence. Le palier possède 3 éléments selon la direction de l'axe et 20 éléments sur sa circonférence.

La totalité du maillage correspond à 4977 éléments (ressorts et masse compris) et à 28790 degrés de liberté.

### 8.4.2 Conditions initiales

Au temps  $t = 0s$ , le rotor est en rotation avec une vitesse constante de  $4775\text{tr}/\text{min}$ . Cette mise en rotation est calculée, au préalable, avec un algorithme de Newton-Raphson

Table 8.16: Paramètres des lois de contact de la perte d'aube

Propriété	Valeur
Pénalité normale de l'interaction collante	$k_{p1} = 10^9$
Pénalité tangentielle de l'interaction collante	$k_{T1} = 10^8$
Pénalité normale de l'interaction avec frottement	$k_{p2} = 10^9$
Pénalité tangentielle de l'interaction avec frottement	$k_{T2} = 10^7$
Coefficient de frottement de l'interaction avec frottement	$\mu_{c2} = 0.1$
Pénalité normale de l'interaction sans frottement	$k_{p3} = 10^9$

où les forces externes sont les forces d'inertie calculées analytiquement en fonction de la position des nœuds et de la vitesse de rotation imposée. La répartition de contraintes obtenues après la mise en rotation est illustrée à la Figure 8.38. L'aube indiquée par une flèche sur cette figure est en fait non parfaitement solidaire du disque. Pour la mise en rotation, elle est jointe au disque par une loi de contact collant, c'est-à-dire qui ne permet pas le glissement, et qui considère les gaps positifs et non pas négatifs (paramètres repris à la Table 8.16). Une fois la mise en rotation obtenue, cette interaction de contact est relaxée, ce qui permet de simuler la perte d'aube. L'interaction de l'aube libre, ainsi que des autres aubes avec le carter se fait à l'aide d'une loi de contact avec frottement (paramètres repris à la Table 8.16). L'interaction entre l'aube libre et la tête des aubes fixées au disque se fait avec la même loi. Les aubes suiveuses, c'est-à-dire les aubes attachées au disque qui suivent l'aube lâchée, peuvent interagir entre elles (sur toute leur surface) en obéissant à une loi de contact sans frottement (paramètres repris à la Table 8.16).

### 8.4.3 Simulation du premier tour

Dans cette section, nous allons simuler le premier tour suivant la perte de l'aube. Nous avons simulé le phénomène à l'aide des algorithmes suivants :

- (i) l'algorithme implicite EDMC-1, avec un rayon spectral  $\rho_\infty = 0.8$  (*c.f.* section 3.2) avec une précision sur l'intégration temporelle de  $10^{-4}$  (*c.f.* section 7.1), une précision du processus de Newton-Raphson (B.6) de  $10^{-5}$  et une précision du line-search (B.5) de  $10^{-3}$ ;
- (ii) l'algorithme explicite  $\alpha$ -généralisé avec un rayon spectral de bifurcation égal à 0.4 et une sécurité  $\gamma_s = 0.8$ ;
- (iii) une combinaison de ces deux algorithmes (le changement vers l'algorithme implicite se faisant par la méthode expliquée à la section 6.2.6) avec les paramètres de gestion automatique du basculement (section 7.3) qui valent  $\eta_e = 2.5$  et  $\gamma_{ie} = 2$ ;

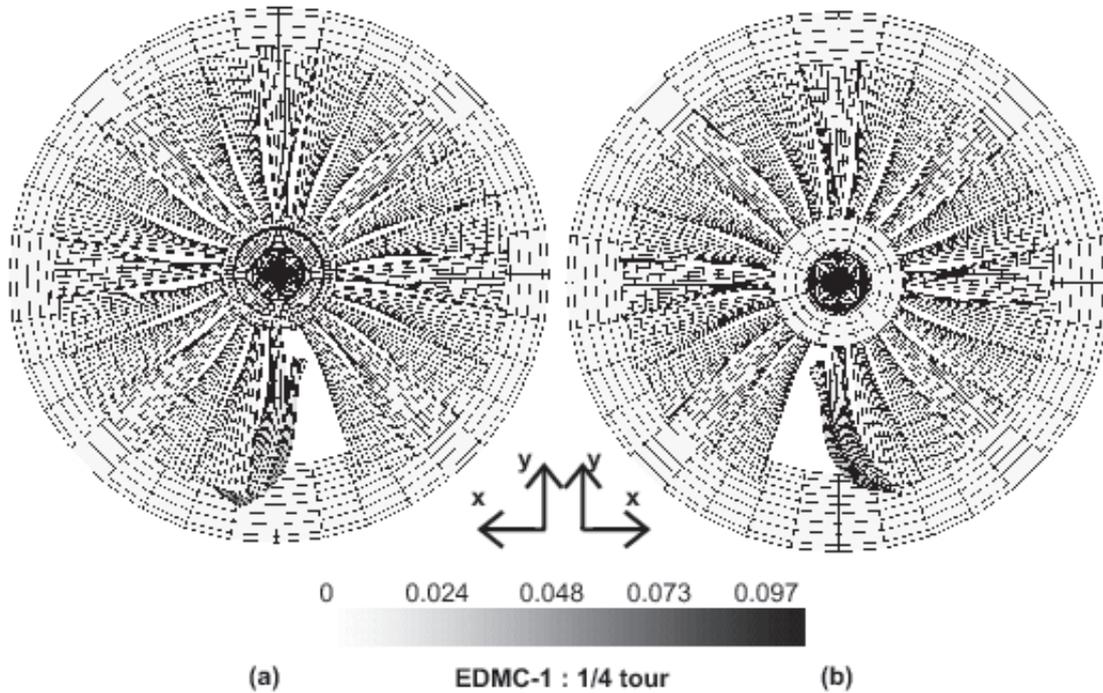


Figure 8.39: Déformation après 1/4 de tour et déformation plastique équivalente du lâcher d'aube par la méthode EDMC-1 - (a) vue de face - (b) vue de derrière.

- (iv) l'algorithme implicite de Chung-Hulbert, avec un rayon spectral  $\rho_\infty = 0.2$  (*c.f.* section 2.3) avec une précision sur l'intégration temporelle de  $10^{-4}$  (*c.f.* section 7.1), une précision du processus de Newton-Raphson (2.55) de  $10^{-5}$  et une précision du line-search (2.54) de  $10^{-3}$ .

### Configurations après le premier quart de tour

Nous allons décrire la succession des configurations obtenues pour chaque méthode. La Figure 8.39 représente la configuration obtenue après le premier 1/4 de tour avec le schéma EDMC-1, la Figure 8.40 représente la configuration obtenue avec la méthode combinée, la Figure 8.41 représente la configuration obtenue avec le schéma explicite  $\alpha$ -généralisé, et la Figure 8.42 représente la configuration obtenue avec le schéma implicite de  $\alpha$ -généralisé. La méthode combinée fournit les mêmes configurations que la simulation EDMC-1 entièrement implicite. Il en est de même pour les autres configurations étudiées par la suite. Par contre, il apparaît des différences pour les autres méthodes. Pour le schéma explicite, le pied de l'aube libérée a tendance à se rapprocher de l'aube suiveuse (zone entourée sur la Figure 8.41), ce qui n'est pas le cas pour les deux autres méthodes. Pour la méthode implicite  $\alpha$ -généralisée, les déformations plastiques équivalentes atteintes à la tête de l'aube libérée sont deux fois plus importantes que pour la méthode EDMC-1 et 50% plus importantes que pour la méthode explicite.

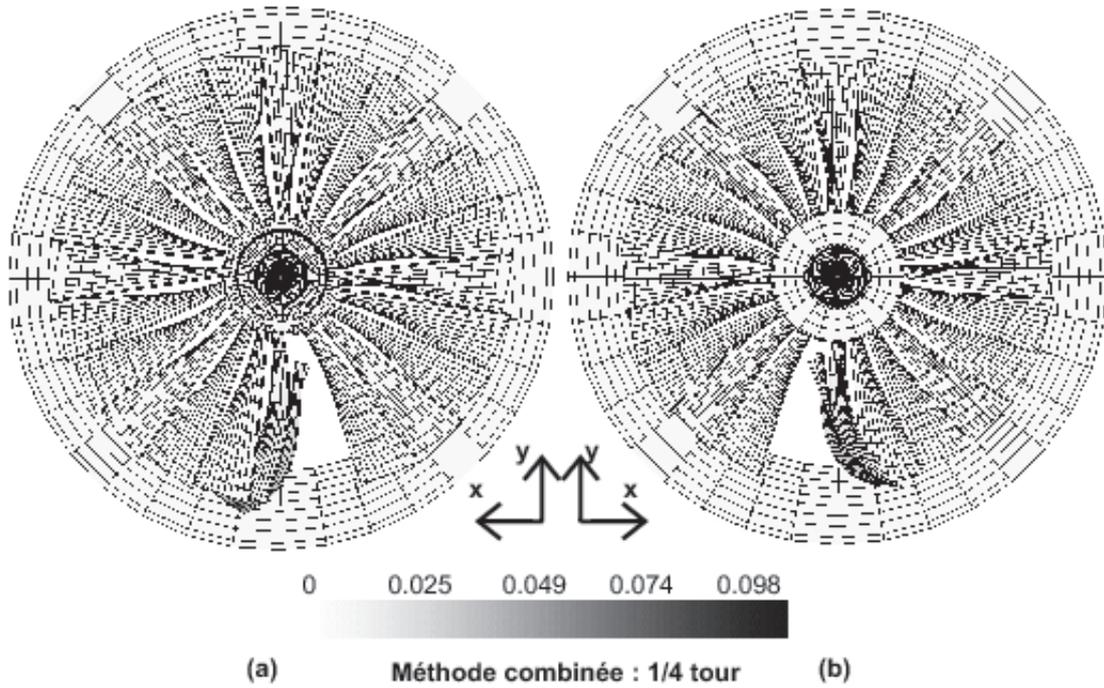


Figure 8.40: Déformation (vue de face et de derrière) après 1/4 de tour et déformation plastique équivalente du lâcher d'aube par la méthode combinée.

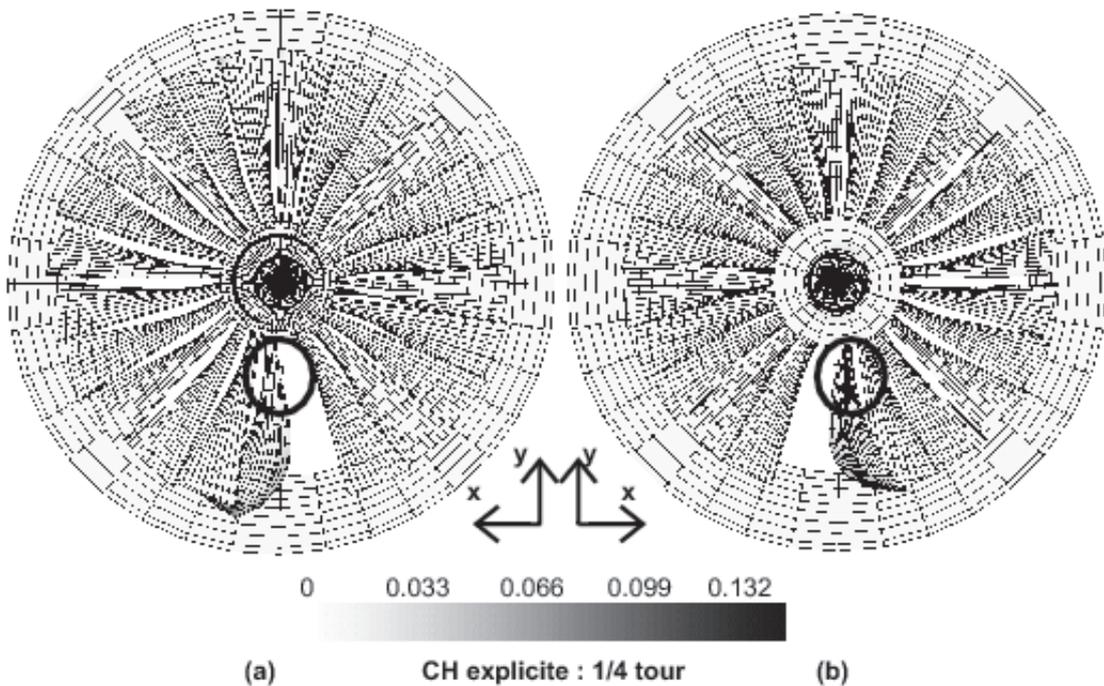


Figure 8.41: Déformation après 1/4 de tour et déformation plastique équivalente du lâcher d'aube par la méthode explicite CH - (a) vue de face - (b) vue de derrière.

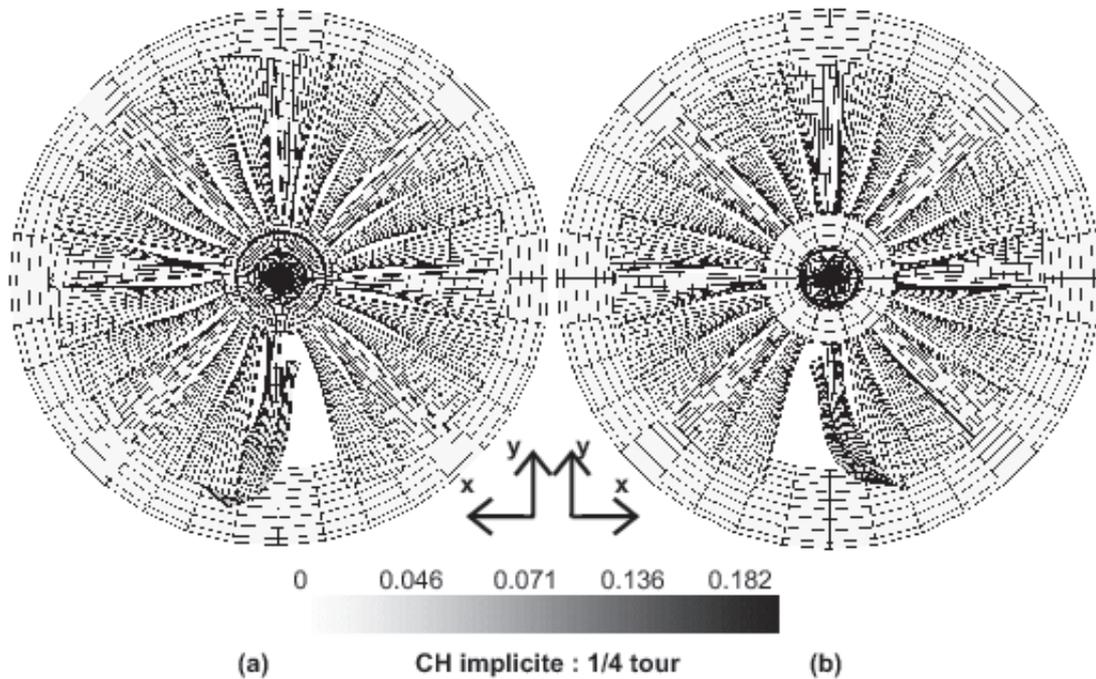


Figure 8.42: Déformation après 1/4 de tour et déformation plastique équivalente du lâcher d'aube par la méthode implicite CH - (a) vue de face - (b) vue de derrière.

### Configurations après le premier demi-tour

Si nous analysons les résultats obtenus après 1/2 tour, il apparaît que l'aube libre heurte la quatrième aube suiveuse. Pour la méthode EDMC-1 (Figure 8.43) et pour la méthode combinée (Figure 8.44), l'aube libre heurte la quatrième aube avant de passer en-dessous. Pour la méthode explicite  $\alpha$ -généralisée (Figure 8.45), les déformations de l'aube libre sont plus importantes, ce qui l'empêche de glisser sous la quatrième aube suiveuse. Cette dernière fléchit donc plus. Comme les déformations plastiques équivalentes obtenues après 1/4 de tour étaient plus importantes pour la méthode implicite  $\alpha$ -généralisée que pour la méthode EDMC-1, la quatrième aube suiveuse fléchit plus avant que l'aube libre ne puisse passer dessous. Cependant, à partir de ce point la méthode  $\alpha$ -généralisée implicite ne converge plus. Nous supposons que les instabilités numériques se produisant lorsque l'aube libre percute le carter ont conduit à la divergence de la simulation.

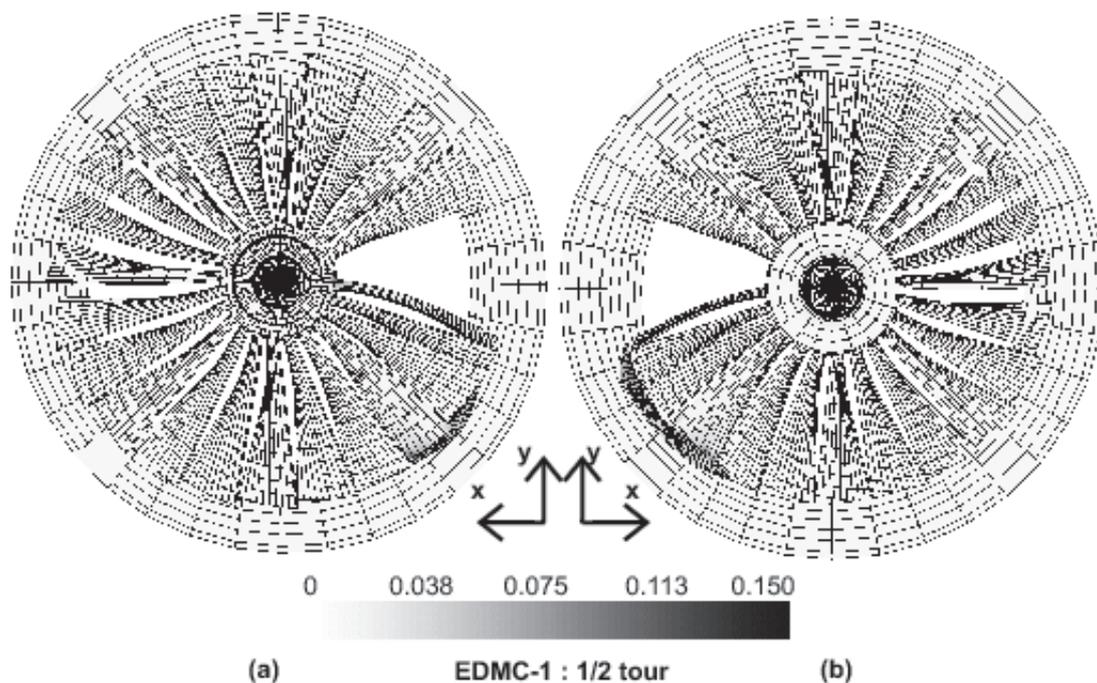


Figure 8.43: Déformation après 1/2 de tour et déformation plastique équivalente du lâcher d'aube par la méthode EDMC-1 - (a) vue de face - (b) vue de derrière.

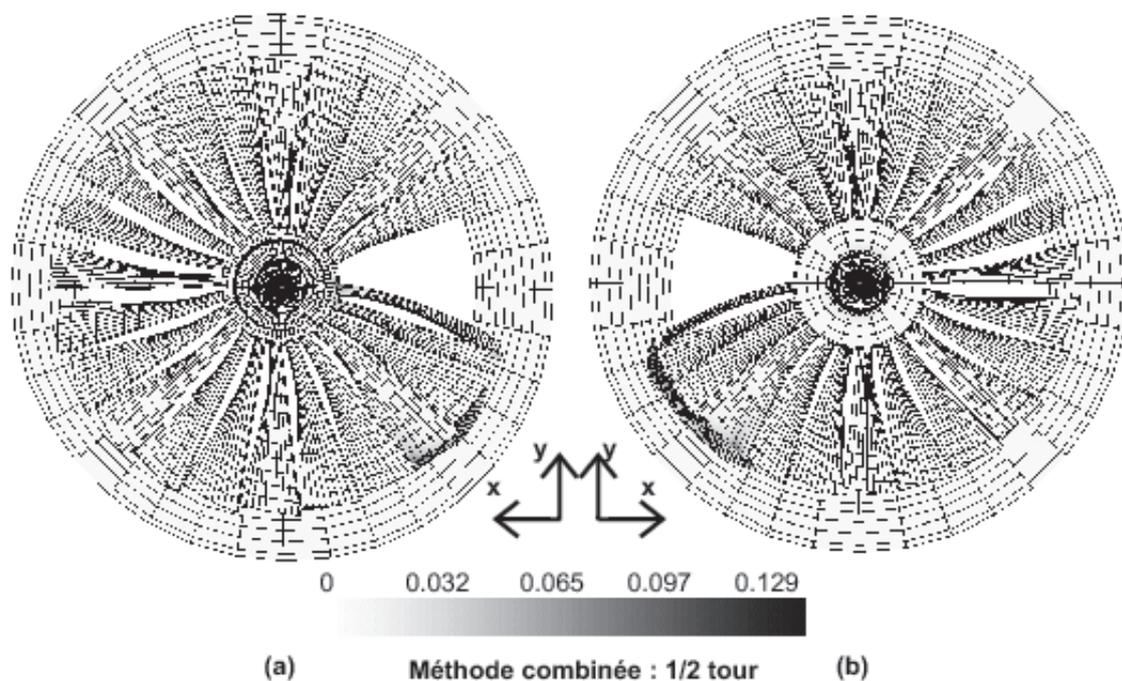


Figure 8.44: Déformation (vue de face et de derrière) après 1/2 de tour et déformation plastique équivalente du lâcher d'aube par la méthode combinée.

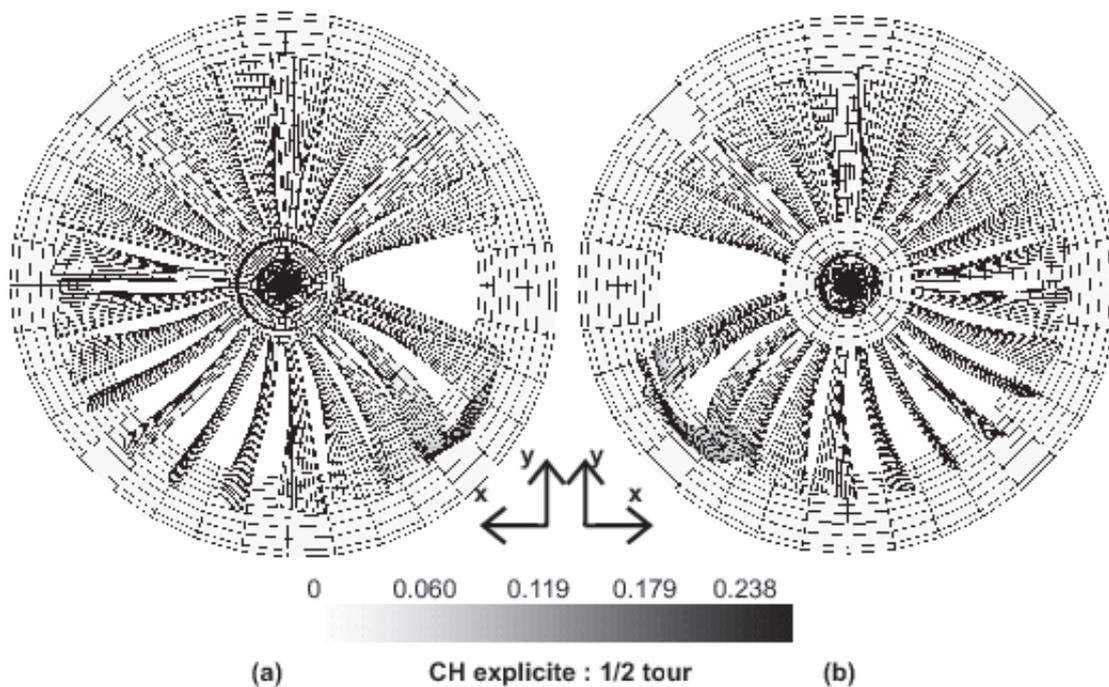


Figure 8.45: Déformation après 1/2 de tour et déformation plastique équivalente du lâcher d'aube par la méthode explicite CH - (a) vue de face - (b) vue de derrière.

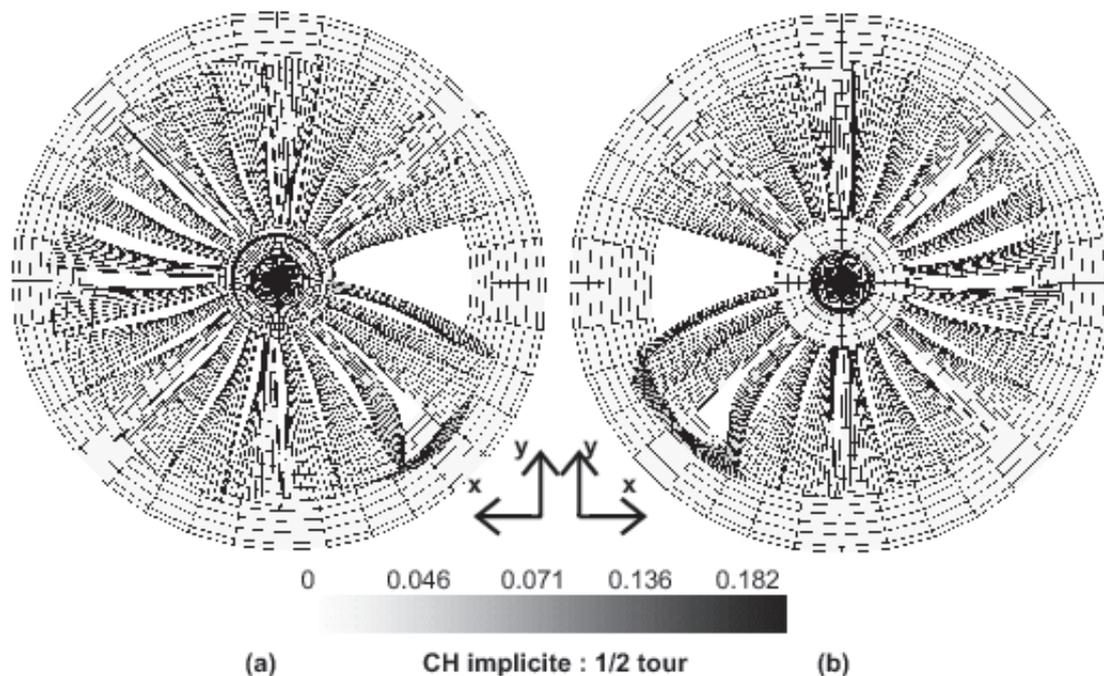


Figure 8.46: Déformation après 1/2 de tour et déformation plastique équivalente du lâcher d'aube par la méthode implicite CH - (a) vue de face - (b) vue de derrière.

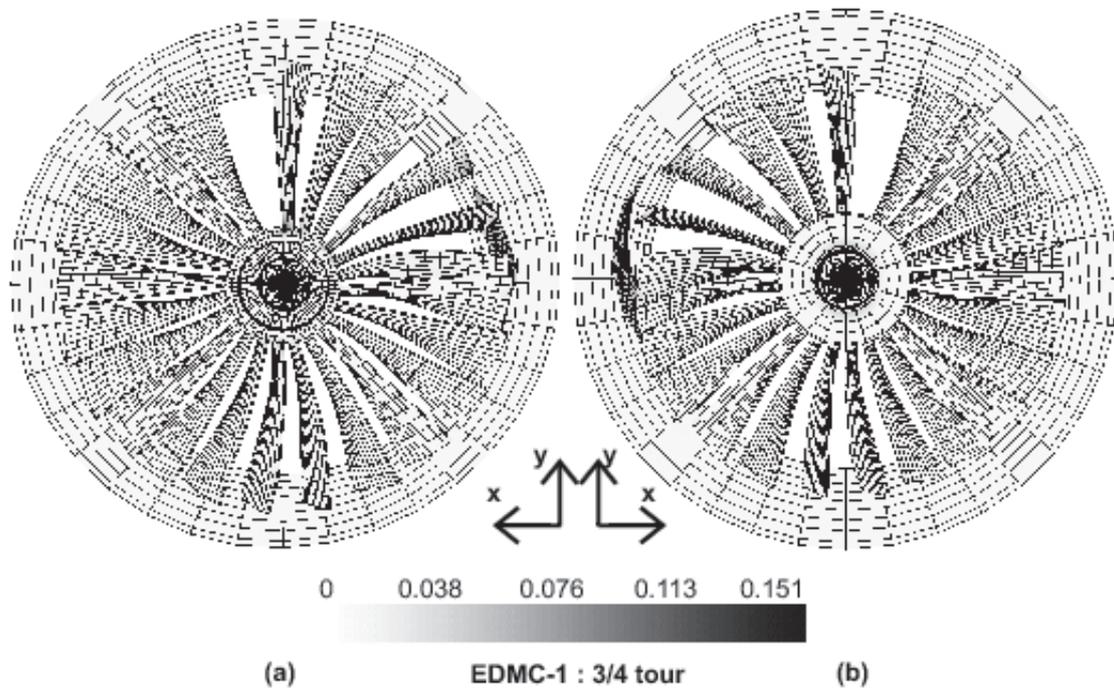


Figure 8.47: Déformation après 3/4 de tour et déformation plastique équivalente du lâcher d'aube par la méthode EDMC-1 - (a) vue de face - (b) vue de derrière.

### Configurations après le troisième quart de tour

La Figure 8.47 illustre la configuration après trois quarts de tour pour la méthode EDMC-1. Une fois que la quatrième aube suiveuse a été suffisamment pliée, l'aube libre est passée en dessous, et est allé interagir avec les suivantes. Il en va de même pour la méthode combinée (Figure 8.48). Pour la méthode  $\alpha$ -généralisé explicite (Figure 8.49), l'aube libre n'est pas passée sous la quatrième aube suiveuse, ce qui a entraîné un fléchissement plus important de celle-ci.

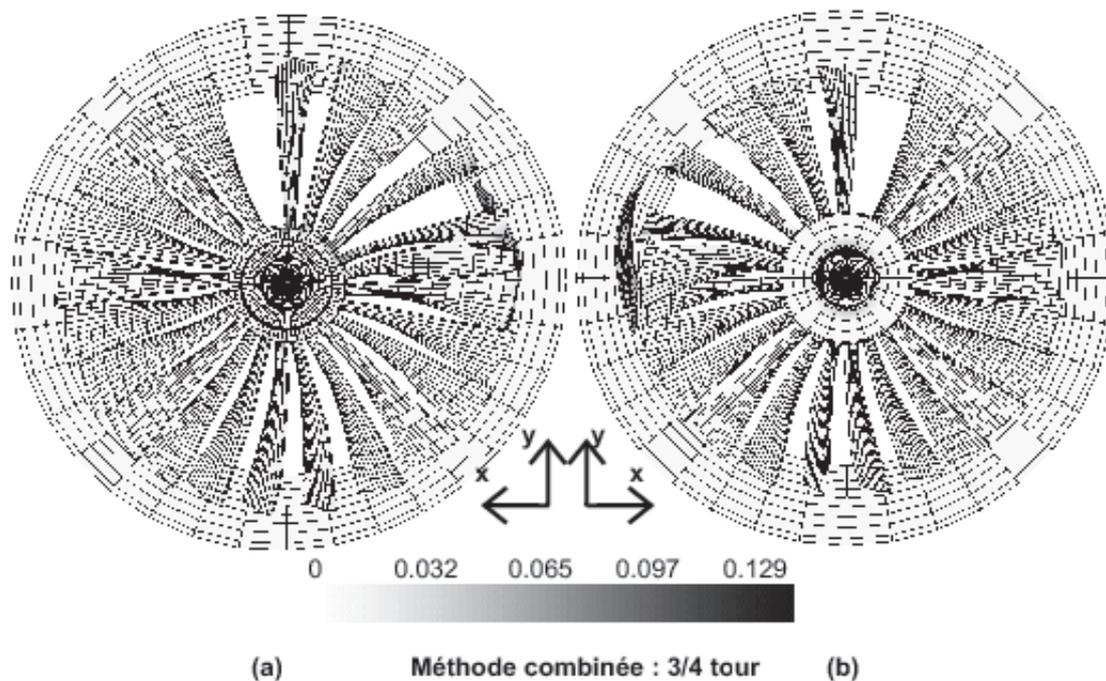


Figure 8.48: Déformation (vue de face et de derrière) après 3/4 de tour et déformation plastique équivalente du lâcher d'aube par la méthode combinée.

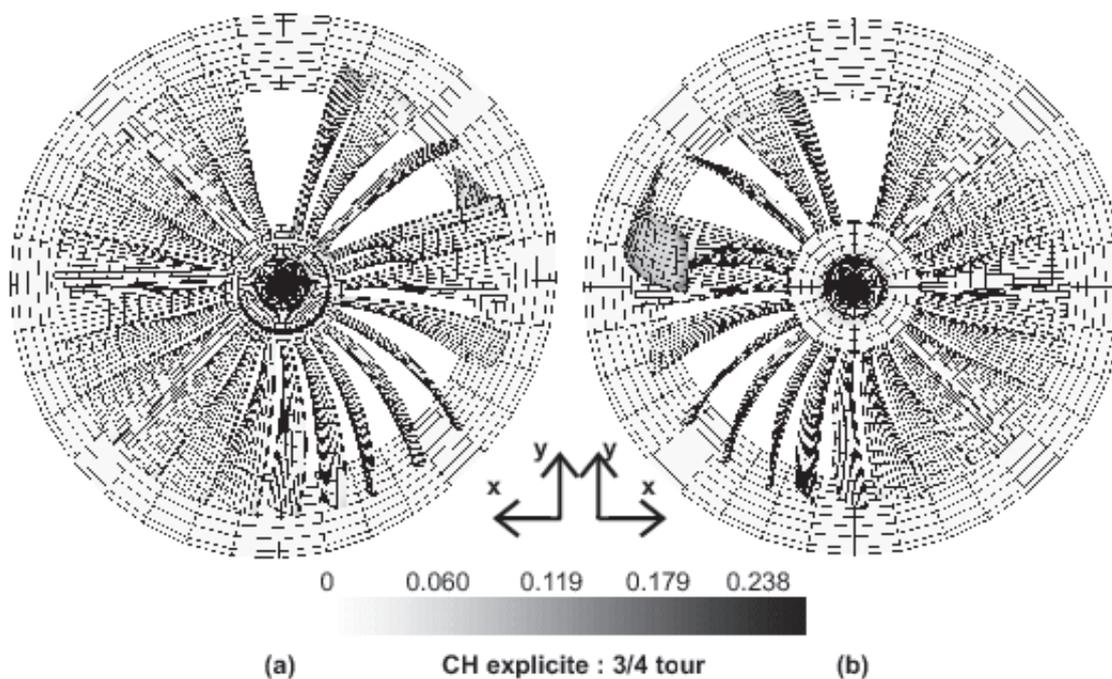


Figure 8.49: Déformation après 3/4 de tour et déformation plastique équivalente du lâcher d'aube par la méthode explicite CH - (a) vue de face - (b) vue de derrière.

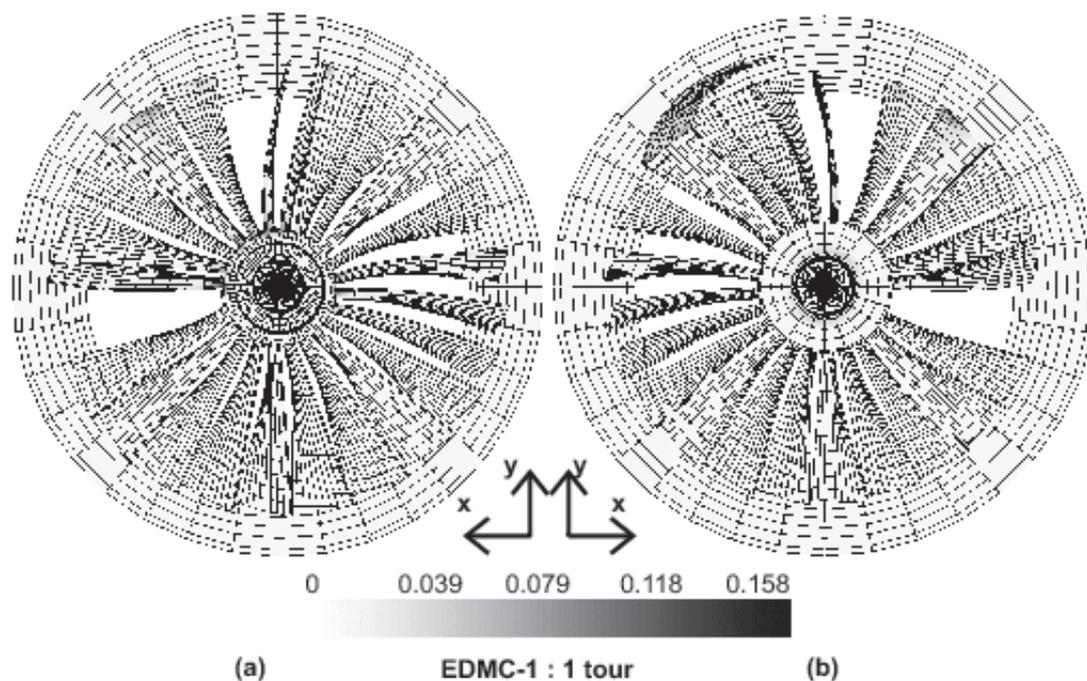


Figure 8.50: Déformation après 1 tour et déformation plastique équivalente du lâcher d'aube par la méthode EDMC-1 - (a) vue de face - (b) vue de derrière.

### Configurations après un tour

En analysant les résultats après 1 tour, nous remarquons qu'après un tour, aussi bien avec la méthode EDMC-1 (Figure 8.50), qu'avec la méthode combinée (Figure 8.51) et qu'avec la méthode explicite (Figure 8.52), l'aube libre a été repoussée vers l'arrière du carter, et n'est plus en contact qu'avec une seule aube. D'un point de vue physique, il est important de noter que si les forces aérodynamiques avaient été prises en compte, le résultat aurait été différent puisque l'arrière du carter correspond à une zone de haute pression, ce qui peut tendre à repousser l'aube libre vers l'avant.

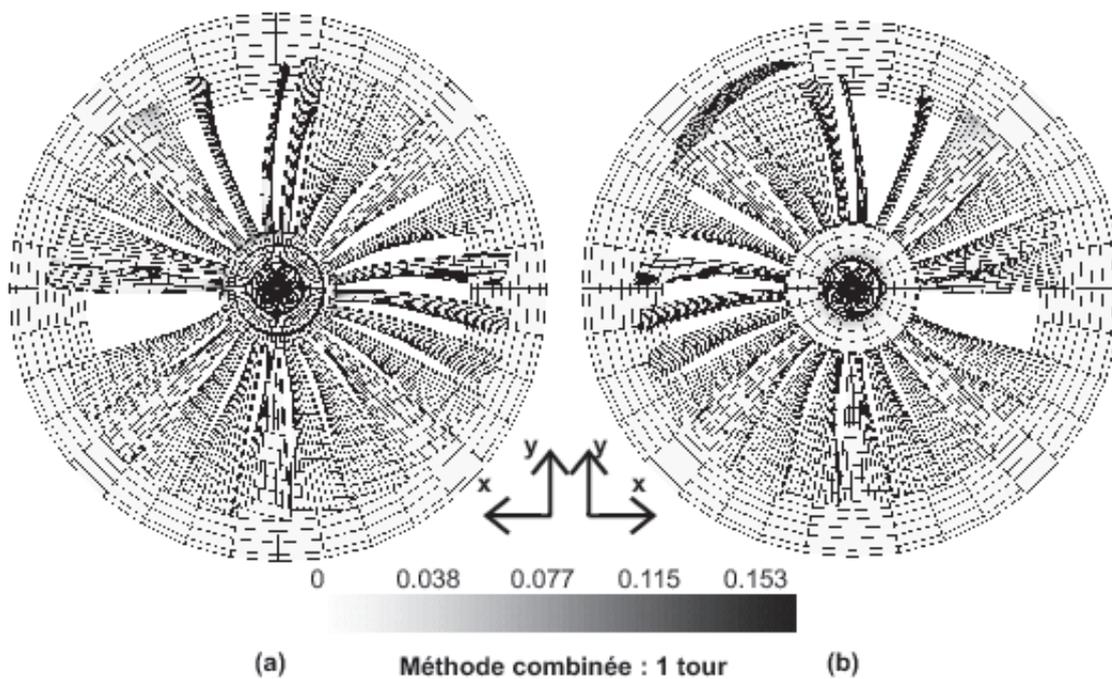


Figure 8.51: Déformation (vue de face et de derrière) après 1 tour et déformation plastique équivalente du lâcher d'aube par la méthode combinée.

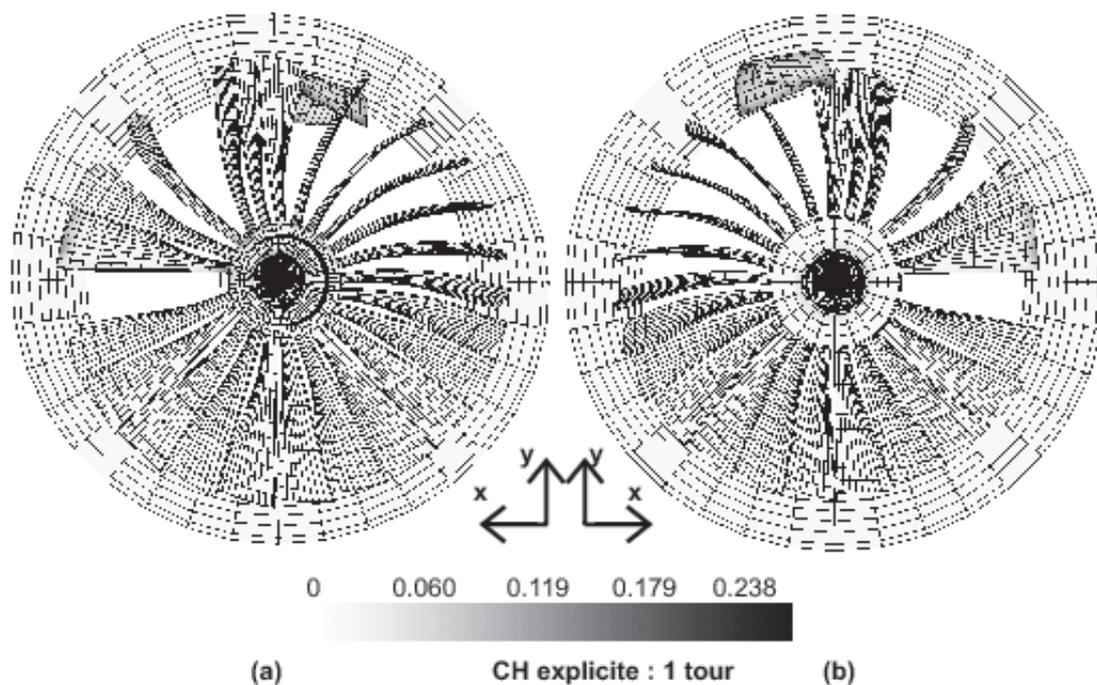


Figure 8.52: Déformation après 1 tour et déformation plastique équivalente du lâcher d'aube par la méthode explicite CH - (a) vue de face - (b) vue de derrière.

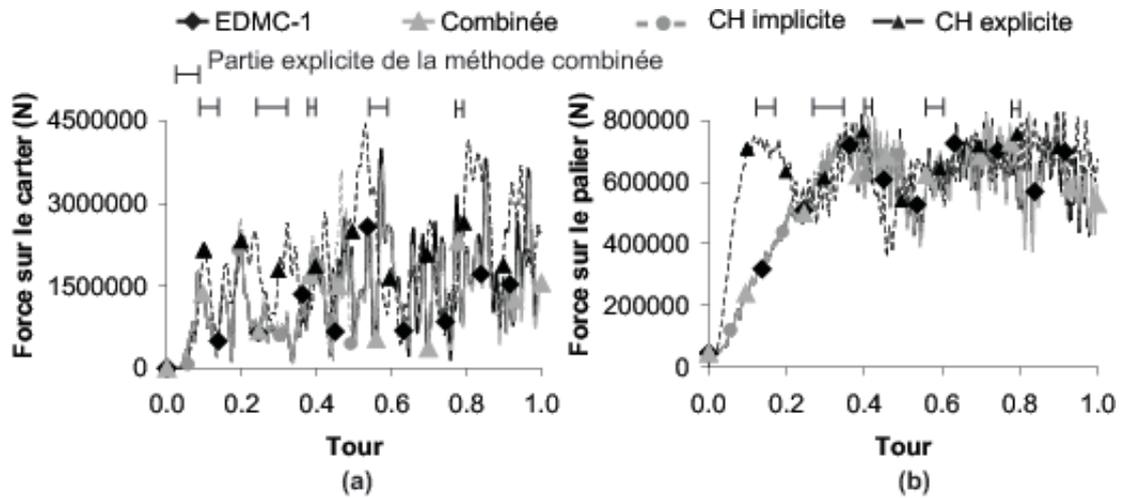


Figure 8.53: Evolution temporelle des forces aux encastremets - (a) force sur le carter - (b) force sur le palier.

### Evolution temporelle des résultats

La force résultante s'exerçant à l'encastrement du carter est représentée à la Figure 8.53 (a) et la force résultant s'exerçant à l'encastrement du palier est représentée à la Figure 8.53 (b). Pour la méthode combinée, nous avons représenté les intervalles temporels pour lesquels la méthode utilisée est explicite. Il apparaît que la majorité du calcul se déroule avec la méthode implicite. La méthode combinée et la méthode entièrement implicite donnent les mêmes solutions. Jusqu'au moment où elle diverge, la méthode implicite  $\alpha$ -généralisée fournit également la même solution. Par contre, la méthode explicite fournit d'autres grandeurs. La force sur le carter présente d'autres pics, mais ayant la même amplitude. Cela s'explique par le fait que, comme nous venons de le voir, les configurations obtenues sont différentes. La force sur le palier, augmente plus vite vers le même maximum pour la méthode explicite. Nous attribuons cela au fait que la méthode explicite n'intègre pas bien les non-linéarités (la stabilité de la méthode explicite en non-linéaire n'est pas garantie) lorsque la dynamique est rapide comme nous l'avons vu aux sections 6.2.3, 7.4.1 et 7.4.2. En effet, dans ce cas, nous avons vu que les systèmes masse-ressort étaient mal intégrés et que les déformations plastiques pouvaient être surestimées. Les forces transmises de l'arbre au palier étant donc différentes pour les méthodes implicite et explicite, nous supposons que c'est cela qui conduit à des configurations différentes pour la suite de la simulation. Cette hypothèse est confirmée par le fait que la méthode combinée, qui calcule le début de la perte d'aube en implicite et l'interaction entre aubes en explicite, fournit les mêmes résultats que la méthode implicite EDMC-1 et pas ceux obtenus par la méthode explicite. Remarquons que les hypothèses (pas d'interaction avec le fluide, pas de fragmentation de l'aube, ...) de notre modélisation étant relativement grossières, nos résultats n'ont de toute façon qu'une valeur qualitative et non quantitative. Cependant, nous pouvons tirer la même

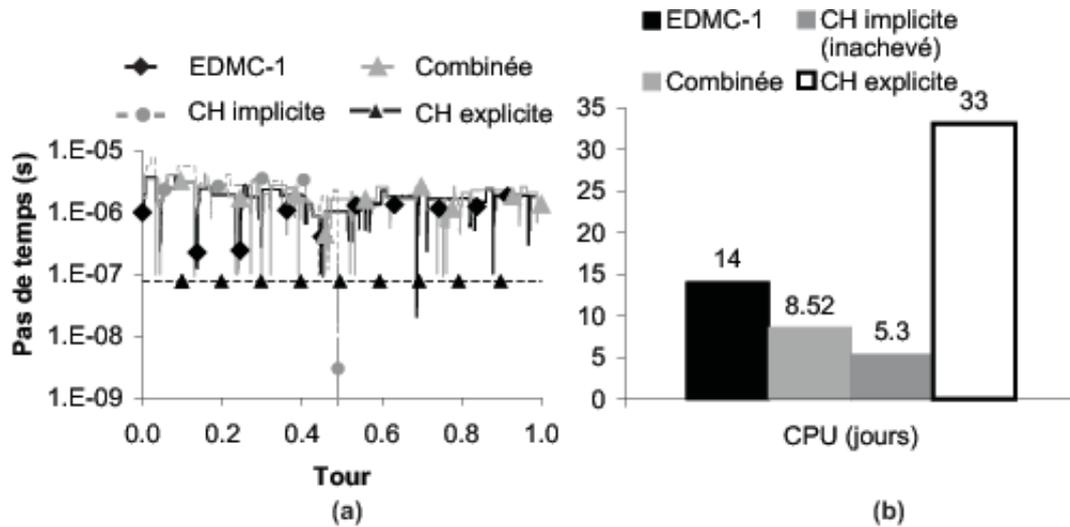


Figure 8.54: Coût des simulations numériques - (a) évolution du pas de temps - (b) temps CPU.

conclusion que Rust et Schweizerhof [133], à savoir que la méthode implicite (y compris  $\alpha$ -généralisée) permet d'approcher le moment où les non-linéarités sont trop importantes pour que les itérations convergent, avec plus de stabilité qu'une méthode implicite.

La Figure 8.54 (a) illustre l'évolution de la taille du pas de temps. Pour la méthode combinée, lorsque la méthode passe en explicite, les pas explicites remplacent des pas implicites très coûteux en terme d'itérations et sensiblement de mêmes tailles. Conformément à la physique, la méthode combinée utilise l'algorithme explicite au moment où l'aube lâchée va percuter les aubes suiveuses. Par contre, quand le phénomène principal est l'interaction entre le carter et les aubes solidaires, l'algorithme implicite est plus rapide. La Figure 8.54 (b) illustre le temps CPU nécessaire à la simulation par les différentes méthodes. La simulation combinée ne demande que 8.5 jours de temps CPU alors que la méthode implicite demande 14 jours. La méthode explicite a demandé 33 jours de simulation. Remarquons que ce temps ne dépend que de la taille du pas critique explicite. Ce dernier est principalement influencé par la raideur des ressort et par la masse qui définissent la liaison palier arbre. Ces valeurs ont été choisies pour assurer une liaison suffisamment rigide avec le palier sans introduire de masse parasite trop importante, et non pas pour avoir un très petit pas explicite.

Finalement, remarquons que si la pénalité normale de la méthode implicite de Chung-Hulbert est diminuée d'un facteur 10 par rapport aux précédentes simulations afin d'améliorer la convergence de la simulation, les résultats obtenus représentés à la Figure 8.55, montrent de fortes pénétrations, ce qui est intolérable.

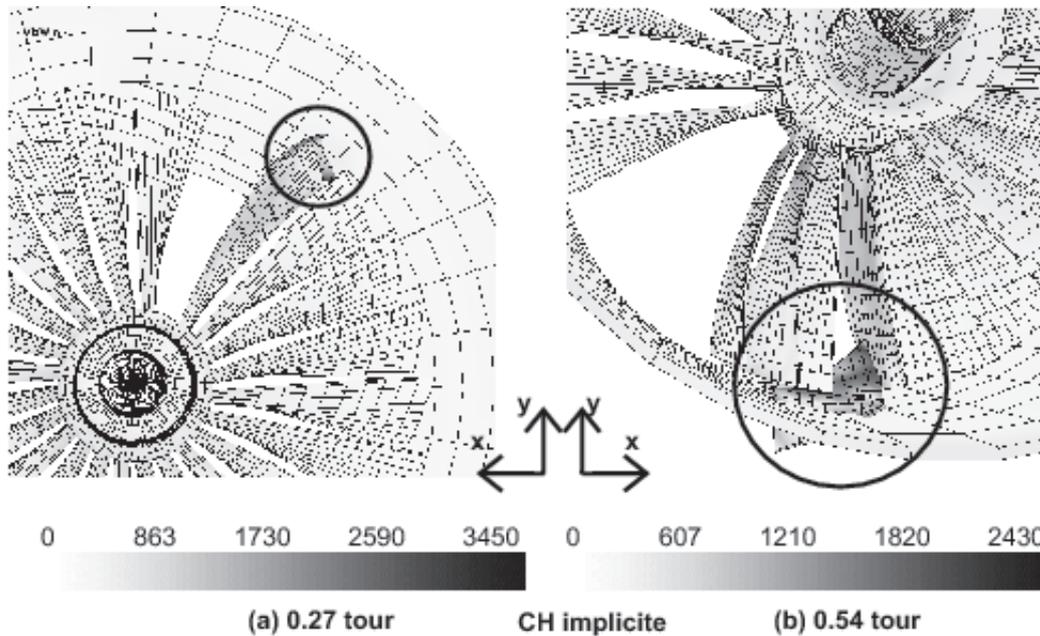


Figure 8.55: Déformation et contrainte équivalente de von Mises du lâcher d'aube par la méthode implicite CH, avec une réduction de la pénalité normale - (a) vue de face après 0.27 tour - (b) vue de derrière après 0.54 tour.

#### 8.4.4 Conclusions sur la simulation de la perte d'aube

Cet exemple numérique a permis de montrer que l'algorithme implicite développé était apte à simuler numériquement les phénomènes dynamiques complexes comme ceux résultants de la perte d'aube dans un turbo-réacteur. Cependant, la convergence de certains pas de temps est très faible et nécessite même par moments l'utilisation d'un pas de temps proche du pas explicite voire inférieur. L'utilisation de la combinaison implicite-explicite a permis de réduire le temps de calcul d'un facteur 2 sans perte de précision. Une méthode de Chung-Hulbert implicite n'a pas permis de simuler dans sa totalité le phénomène suite à une non convergence du calcul. La méthode entièrement explicite a fourni des résultats sensiblement différents de la méthode EDMC-1. Nous expliquons cela par le manque de stabilité de la méthode explicite dans le domaine non-linéaire. Par contre une méthode combinée permet d'atteindre, avec un algorithme implicite, de manière stable, une configuration complexe qui est alors calculée en explicite.

## Chapitre 9

# Conclusions générales et perspectives

L'objet de ce travail était d'établir des méthodes permettant d'intégrer temporellement, de manière efficace, des problèmes fortement non-linéaires.

Dans un premier temps, nous nous sommes occupés des propriétés de l'algorithme implicite dans le cadre non-linéaire. Nous avons vu que l'algorithme de Newmark, ainsi que les algorithmes en dérivant (algorithmes  $\alpha$ -généralisés), ne permettent pas d'obtenir des résultats énergétiquement consistants. Nous avons alors présenté un schéma d'intégration implicite conservatif énergétiquement consistant (vérifiant la conservation des moments linéaires et angulaires, et conduisant à une dissipation interne égale à l'énergie physiquement dissipée) se basant sur le schéma du point milieu. Nous avons montré que, même pour un système masse-ressort en rotation, le schéma de Newmark a des limitations (oscillation du moment angulaire, répartitions des énergies cinétiques et potentielles non conformes) que le schéma conservatif n'a pas montrées. Si de la dissipation numérique est introduite, le schéma  $\alpha$ -généralisé tend vers une solution de repos, alors que le schéma énergétiquement consistant tend vers une solution d'équilibre relatif.

Ensuite nous avons proposé une formulation originale des forces internes pour un matériau hypoélastique qui garantit la consistance énergétique de l'intégration dynamique. La difficulté principale pour établir cette formulation réside dans le fait qu'aucun potentiel interne ne pouvait être défini. Nous avons alors montré que, contrairement au schéma de Newmark, la solution obtenue avec cette formulation reste énergétiquement consistante pour toute taille du pas de temps (lorsque le processus de Newton-Raphson converge). Lorsque de la dissipation numérique est introduite, les mêmes avantages sont observés par rapport aux schémas  $\alpha$ -généralisés, même si le schéma n'est précis qu'au premier ordre par rapport au pas de temps.

Nous avons ensuite exposé les méthodes pour tenir compte de l'interaction entre corps tout en préservant la consistance énergétique. Dans ce cas de figure, le schéma de Newmark peut créer de l'énergie induite par le phénomène de contact, ce qui rend la solution physiquement inacceptable. Par contre, le schéma conservatif donne une

solution physique pour toute taille de pas de temps.

Après avoir développé un algorithme implicite énergétiquement consistant dans le cadre non-linéaire, nous avons présenté une manière de combiner cet algorithme implicite à l'algorithme explicite. Pour ce faire, nous avons présenté une manière originale de stabiliser les pas explicites afin de pouvoir continuer la simulation à l'aide d'un algorithme implicite.

Nous avons alors proposé une manière d'estimer la taille du pas de temps en fonction d'une erreur d'intégration. Si cette méthode est nécessaire pour une méthode implicite pour laquelle la taille du pas de temps n'est pas bornée, elle s'est aussi avérée nécessaire pour l'étude de problèmes de dynamique rapide par une méthode explicite. En effet, comme nous l'avons vu à partir de l'exemple du ressort et de l'exemple d'impact de cylindres, si le pas de temps est pris égal au pas critique (multiplié par une sécurité fixe), le manque de consistance énergétique de la méthode conduit à la divergence lorsque la vitesse du son dans le matériau est de l'ordre de la vitesse des phénomènes étudiés. Par contre en utilisant la gestion automatique du pas de temps, les erreurs d'intégration restent bornées. Nous avons aussi développé des critères permettant de passer automatiquement d'une méthode implicite à une méthode explicite, et vice-versa. Des exemples numériques ont illustré l'efficacité en terme de précision et de coût de ces gestions automatiques.

Finalement, nous avons présenté des exemples numériques plus complexes. Au travers de ces exemples, nous avons montré que les algorithmes implicites énergétiquement consistants développés sont capables de simuler des processus physiques complexes tels que la perte d'aube ou l'écrasement de cylindres et de produire des résultats en accord avec la théorie analytique ou l'expérimentation. Dans le cadre d'une étude de dynamique rapide comme la perte d'aube, l'algorithme EDMC-1 a concurrencé l'algorithme explicite au point de vue temps de calcul. De plus, nous pensons que l'algorithme explicite souffre alors d'un manque de précision car le pas de temps est de l'ordre du temps caractérisant les phénomènes étudiés, tout en ne vérifiant pas exactement les lois de conservation. Néanmoins, l'algorithme EDMC-1 ne permet pas encore de travailler avec de fortes dissipations numériques. Dès lors, lorsque la dynamique du système est plus lente comme pour un processus de mise en forme, il s'avère moins efficace qu'un algorithme de Chung-Hulbert avec une forte dissipation numérique. Nous espérons que le développement d'un algorithme EDMC précis au second ordre permettra de résoudre ce problème. Nous avons également montré que la combinaison d'un algorithme implicite et d'un algorithme explicite permet de diminuer le temps de calcul de problèmes longs, comme la perte d'une aube, sans modifier la qualité des résultats obtenus. Dans ce cas, la méthode explicite induit moins de perte de précision car la méthode stable implicite permet d'amener la simulation de manière énergétiquement consistante au moment où les non-linéarités nécessitent d'utiliser une méthode explicite.

Dans le futur, outre le développement d'un algorithme EDMC précis au second ordre, il sera intéressant d'étendre la méthode d'intégration énergétiquement consistante aux éléments de type "Enhanced Assumed Strain". Cela permettra d'améliorer la précision

de simulations numériques telles que le flambement de longerons. Le développement d'un algorithme thermo-dynamique énergétiquement consistant pourra également être envisagé. Enfin, l'utilisation d'un découpage spatial en sous-domaines, accompagnée d'un basculement automatique entre méthodes implicite et explicite dans chaque sous-domaine permettrait une réduction supplémentaire du temps de calcul de simulations complexes, comme l'étude d'un moteur d'avion complet.



# Bibliographie

- [1] ADAM, L. *Modélisation thermomécanique en grandes déformations de la mise à forme anisotherme des métaux. Application à la superplasticité*. PhD thesis, Université de Liège, 2003. in French.
- [2] ANTMAN, S. *Non Linear Problems of Elasticity*. Springer-Verlag, 1995.
- [3] ARMERO, F., AND PETÖCZ, E. Formulation and analysis of conserving algorithms for frictionless dynamic contact/impact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 158 (1998), 269–300.
- [4] ARMERO, F., AND PETÖCZ, E. A new dissipative time-stepping algorithm for frictional contact problems: formulation and analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 179 (1999), 151–178.
- [5] ARMERO, F., AND ROMERO, I. Dissipative integration algorithms for nonlinear elastodynamics. In *ECCM99, Proceedings of the European Conference on Computational Mechanics* (Munich, Germany, 1999), W. Wunderlich, Ed. CD-ROM.
- [6] ARMERO, F., AND ROMERO, I. On the formulation of high-frequency dissipative time-stepping algorithms for non-linear dynamics. Part I: low-order methods for two model problems and nonlinear elastodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2001), 2603–2649.
- [7] ARMERO, F., AND ROMERO, I. On the formulation of high-frequency dissipative time-stepping algorithms for non-linear dynamics. Part II: second-order methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2001), 6783–6824.
- [8] BAJER, A., AND DEMKOWICZ, L. Dynamic contact/impact problems, energy conservation, and planetary gear trains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191 (2002), 4159–4191.
- [9] BAUCHAU, O., AND BOTTASSO, C. On the design of energy preserving and decaying schemes for flexible, nonlinear multi-body systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 169 (1999), 61–79.

- 
- [10] BAUCHAU, O., BOTTASSO, C., AND TRAINELLI, L. Robust integration schemes for flexible multibody systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (2003), 395–420.
- [11] BAUCHAU, O., CHOI, J.-Y., AND BOTTASSO, C. Time integrators for shells in multibody dynamics. *Computers & Structures* 80 (2002), 871–889.
- [12] BAUCHAU, O., AND JOO, T. Computational schemes for non-linear elastodynamics. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 45 (1999), 693–719.
- [13] BAUCHAU, O., AND THERON, N. Energy decaying scheme for non-linear beam models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 134 (1996), 37–56.
- [14] BELYTSCHKO, T., DANIEL, W., AND VENTURA, G. A monolithic smoothing-gap algorithm for contact-impact based on the signed distance function. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 55 (2002), 101–125.
- [15] BELYTSCHKO, T., AND HUGHES, T. *Computational Methods for Transient Analysis*. North Holland, 1983.
- [16] BELYTSCHKO, T., LIU, W., AND MORAN, B. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley and Sons, 2000.
- [17] BELYTSCHKO, T., AND LU, Y. Stability analysis of elemental explicit-implicit partitions by Fourier methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 95 (1992), 87–96.
- [18] BELYTSCHKO, T., AND MULLEN, R. Stability of explicit-implicit mesh partitions in time integration. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 12 (1978), 1575–1586.
- [19] BELYTSCHKO, T., AND SCHOEBERLE, D. On the unconditional stability of an implicit algorithm for non-linear structural dynamics. *Journal of Applied Mechanics* 42 (1975), 865–869.
- [20] BENSON, D. J. Stable time step estimation for multi-material eulerian hydrocodes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 167 (1998), 191–205.
- [21] BETSCH, P., AND STEINMANN, P. Conservation properties of a time fe method. part i: Time-stepping schemes for n-body problems. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 49 (2000), 599–638.

- 
- [22] BETSCH, P., AND STEINMANN, P. Inherent energy conserving time finite elements for classical mechanics. *Journal of Computational Physics* 160 (2000), 88–116.
- [23] BETSCH, P., AND STEINMANN, P. Conservation properties of a time FE method. part II: Time-stepping schemes for non-linear elastodynamics. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 50 (2001), 1931–1955.
- [24] BORRI, M., BOTTASSO, L., AND TRAINELLI, L. Integration of elastic multibody system by invariant conserving/dissipating algorithms. i. formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2001), 3669–3699.
- [25] BOTTASSO, C., BAUCHAU, O., AND CHOI, J.-Y. An energy decaying scheme for non-linear dynamics of shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191 (2002), 3099–3121.
- [26] BOTTASSO, C., AND BORRI, M. Energy preserving/decaying schemes for non-linear beam dynamics using the helicoidal approximation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 143 (1997), 393–415.
- [27] BOTTASSO, C., AND BORRI, M. Integrating finite rotation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 164 (1998), 307–331.
- [28] BOTTASSO, L., BORRI, M., AND TRAINELLI, L. Integration of elastic multibody system by invariant conserving/dissipating algorithms. ii. numerical schemes and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2001), 3701–3733.
- [29] BRANK, B. An energy conserving non-linear dynamic finite formulation for flexible composite laminates. *Computers & Structures* 80 (2002), 677–689.
- [30] BRISEGHIELLA, L., MAJORANA, C., AND PELLEGRINO, C. Conservation of angular momentum and energy in the integration of non-linear dynamics equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 179 (1999), 247–263.
- [31] CAIGNAERT, C. Cour de Spé. T.S.I. Cours de mathématiques, Lycée Colbert. <http://c.caignaert.free.fr/>.
- [32] CASSANO, A., AND CARDONA, A. A comparaison between three variable-step algorithms for the integration of the equations of motion in structural dynamics. *Latin American Research* 21 (1991), 187–197.
- [33] CHAWLA, V., AND LAURSEN, T. Energy consistent algorithms for frictional contact problems. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 42 (1998), 799–827.

- [34] CHUNG, J., AND HULBERT, G. A time integration algorithms for structural dynamics with improved numerical dissipations: the generalized- $\alpha$  method. *Journal of Applied Mechanics* 60 (1993), 371–375.
- [35] CHUNG, J., AND LEE, J. A new family of explicit time integration methods for linear and non-linear structural dynamics. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 37 (1994), 3961–3976.
- [36] COMBESCURE, A., AND GRAVOUIL, A. A time-space multi-scaled algorithm for transient structural nonlinear problems. *Mécanique et Industrie* 2 (2001), 43–55.
- [37] COMBESCURE, A., AND GRAVOUIL, A. A numerical scheme to couple subdomains with different time-steps for predominantly linear transient analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191 (2002), 1129–1157.
- [38] COMBESCURE, A., GRAVOUIL, A., AND HERRY, B. An algorithm to solve transient structural non-linear problems for non-matching time-space domains. *Computers & Structures* 81 (2003), 1211–1222.
- [39] CRISFIELD, M. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, vol. 1. John Wiley and Sons, 2001.
- [40] DAHLQUIST, G. *Numerical Methods*. Prentice-Hall, 1974.
- [41] DANIELS, W. Subcycling first- and second-order generalizations of the trapezoidal rule. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 42 (1998), 1091–1119.
- [42] DANIELS, W. Explicit/implicit partitioning and a new explicit form of the generalized alpha method. *Communication in Numerical Method in Engineering* 19 (2003), 909–920.
- [43] DANIELS, W. A partial velocity approach to subcycling structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (2003), 375–394.
- [44] DEMKOWICZ, L., AND BAJER, A. Conservative discretization of contact/impact problems for nearly rigid bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2001), 1903–1924.
- [45] DUTTA, A., AND RAMAKRISHNAN, C. Accurate computation of design sensitivities for structures under transient dynamic loads using time marching scheme. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 41 (1998), 977–999.
- [46] ERLICHER, S., BONAVENTURA, L., AND BURSI, O. The analysis of the  $\alpha$ -generalized method for non-linear dynamic problems. *Computational Mechanics* 28 (2002), 83–104.

- [47] FAUCHER, V., AND COMBESURE, A. A time and space mortar method for coupling linear modal subdomains and non-linear subdomains in explicit structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (2003), 509–533.
- [48] FINN, M., GALBRAITH, P., WU, L., HALLQUIST, J., LUM, L., AND LIN, T.-L. Use of a coupled explicit-implicit solver for calculating spring-back in automotive body panels. *Journal of Material Processing Technology* 50 (1995), 395–409.
- [49] FLANAGAN, D., AND BELYTSCHKO, T. Eigenvalues and stable timesteps for the uniform strain hexaedron and quadrilateral. *Journal of Applied Mechanics* 51 (1981), 35–40.
- [50] GELIN, J., BOULMANE, L., AND BOISSE, P. Quasi-static implicit and transient explicit analyses of sheet-metal forming using a  $C^0$  three-nodes shell element. *Journal of Material Processing Technology* 50 (1995), 54–69.
- [51] GOICOLEA, J., AND GARCIA ORDEN, J. Dynamic analysis of rigid and deformable multibody systems with penalty methods and energy-momentum schemes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 188 (2000), 789–804.
- [52] GONZALEZ, O. Mechanical systems subject to holonomic constraints: Differential-algebraic formulations and conservative integration. *Physica D* 132 (1999), 165–174.
- [53] GONZALEZ, O. Exact energy and momentum conserving algorithms for general models in nonlinear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2000), 1763–1783.
- [54] GONZALEZ, O., AND SIMO, J. On the stability of symplectic and energy-momentum algorithms for non-linear hamiltonian systems with symmetry. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 134 (1996), 197–222.
- [55] GRAFFIGNE, C. Analyse. Cours de mathématiques - U41, Université René Descartes, Paris 5. <http://www.math-info.univ-paris5.fr/~graff/DEUG/M2/>.
- [56] GRAHAM, E., AND JELENÍČ, G. A general framework for conservative single-step time-integration schemes with higher-order accuracy for a central-force system. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (2003), 3585–3618.
- [57] GRAHAM, E., JELENÍČ, G., AND CRISFIELD, M. A note on the equivalence of two recent time-integration schemes for n-body problems. *Communication in Numerical Method in Engineering* 18 (2002), 615–620.

- [58] GRAILLET, D. Modélisation tridimensionnelle du contact entre structures à parois minces dans les phénomènes d'impacts et de mise à forme. Activity report of FRIA fellowship - third year, Université de Liège, Liège, augustus 1998. In French.
- [59] GRAILLET, D., AND PONTHOT, J.-P. Efficient implicit schemes for the treatment of the contact between deformable bodies: Applications to shock-absorber devices. *International Journal of Crashworthiness* 4, 3 (1999), 173–286.
- [60] GRAVOUIL, A., AND COMBESURE, A. Multi-time-step explicit-implicit method for non-linear structural dynamics. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 50 (2001), 199–225.
- [61] GÉRADIN, M. *Analyse, Simulation et Conception de Systèmes Polyarticulés et Déployables*. Cours IPSI, Paris, mars 11-13 1997.
- [62] GÉRADIN, M., AND CARDONA, A. *Flexible Multibody Dynamics (A Finite Element Approach)*. John Wiley and Sons, 2000.
- [63] GÉRADIN, M., AND RIXEN, D. *Mechanical Vibrations (Theory and Applications to Structural Dynamics)*. John Wiley and Sons, Paris, 1994.
- [64] HALLQUIST, J. DYNA2D User's manual and DYNA3D User's manual. Tech. rep., Lawrence Livermore National Laboratories, Livermore, USA, 1980.
- [65] HILBER, H., HUGHES, T., AND TAYLOR, R. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 5 (1977), 283–292.
- [66] HOGGE, M., AND PONTHOT, J.-P. Efficient implicit schemes for transient problems in metal forming simulation. In *NUPHYMAT'96, Numerical and physical study of material forming processes* (CEMEF-Ecole nationale supérieure des mines de Paris, Sophia-Antipolis, France, June 5-7 1996).
- [67] HUGHES, T. Stability, convergence and growth and decay of energy of the average acceleration method in nonlinear structural dynamics. *Computers & Structures* 6 (1976), 313–324.
- [68] HUGHES, T. A note on the stability of Newmark's algorithm in nonlinear structural dynamics. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 11, 2 (1977), 383–386.
- [69] HUGHES, T. Numerical implementation of constitutive models: rate-independent deviatoric plasticity. In *Theoretical foundation for large-scale computations of nonlinear material behaviour* (1983), Nemat-Nasser, Ed.
- [70] HUGHES, T. *The Finite Element Method*. Prentice Hall, 1987.

- [71] HUGHES, T., CAUGHEY, T., AND LIU, W. Finite-element method for non-linear elastodynamics which conserve energy. *Journal of Applied Mechanics* 45 (june 1978), 366–370.
- [72] HUGHES, T., AND LIU, W. Implicit-explicit finite elements in transient analysis: implementation and numerical examples. *Journal of Applied Mechanics* 45 (1978), 375–378.
- [73] HUGHES, T., AND LIU, W. Implicit-explicit finite elements in transient analysis: stability theory. *Journal of Applied Mechanics* 45 (1978), 371–374.
- [74] HULBERT, G., AND CHUNG, J. Explicit time integration algorithms for structural dynamics with optimal numerical dissipation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 137 (1996), 175–188.
- [75] HULBERT, G., AND JANG, I. Automatic time step control algorithms for structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 126 (1995), 155–178.
- [76] HUNG, N. *Compléments de mécanique des solides*. Université de Liège, 1989. in French.
- [77] IBRAHIMBEGOVIC, A., AND MAMOURI, S. Energy conserving/decaying implicit time-stepping scheme for non-linear dynamics of three-dimensional beams undergoing finite rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191 (2002), 4241–4258.
- [78] JOHNSON, K. The bounce of superball. *International Journal of Mechanics Engineering Education* 111 (1983), 57–63.
- [79] JONES, N., AND KARAGIOZOVA, D. Dynamic buckling of elastic-plastic square tubes under axial impact - II: structural response. *International Journal of Impact Engineering* 30 (2004), 167–192.
- [80] JUNG, D., AND YANG, D. Step-wise combined implicit-explicit finite-element simulation of autobody stamping process. *Journal of Material Processing Technology* 83 (1998), 245–260.
- [81] KANE, C., MARDSEN, J., AND ORTIZ, M. Symplectic-energy-momentum preserving variational integrators. *Journal of Mathematical Physics* 40, 7 (1999), 3353–3371.
- [82] KANE, C., MARDSEN, J., ORTIZ, M., AND WEST, M. Variational integrators and the Newmark algorithm for conservative and dissipative mechanical system. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 49 (2000), 1295–1325.

- [83] KANE, C., REPETTO, E., ORTIZ, M., AND MARDSEN, J. Finite element analysis of nonsmooth contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 180 (1999), 1–26.
- [84] KEY, S., AND KRIEG, R. On the numerical implementation of inelastic time-dependant and time-independent, finite strain constitutive equations in structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 33 (1982), 439–452.
- [85] KUHL, D., AND CRISFIELD, M. Energy-conserving and decaying algorithms in non-linear structural dynamics. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 45 (1999), 569–599.
- [86] KUHL, D., AND RAMM, E. Constraint energy momentum algorithm and its application to non-linear dynamics of shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 136 (1996), 293–315.
- [87] KUHL, D., AND RAMM, E. Generalized energy-momentum method for non-linear adaptive shell dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 178 (1999), 343–366.
- [88] LANGSETH, M., HOPPERSTAD, O., AND BERSTAD, T. Crashworthiness of aluminium extrusions: validation of numerical simulation, effect of mass ratio and impact velocity. *International Journal of Impact Engineering* 22 (1999), 829–854.
- [89] LAURSEN, T. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers & Structures* 42, 1 (1992), 97–116.
- [90] LAURSEN, T. *Computational Contact and Impact Mechanics*. Springer, 2002.
- [91] LAURSEN, T., AND CHAWLA, V. Design of energy conserving algorithms for frictionless dynamic contact problems. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 40 (1997), 863–886.
- [92] LAURSEN, T., AND LOVE, G. Improved implicit integrators for transient impact problems-geometric admissibility within the conserving framework. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 53 (2002), 245–274.
- [93] LAURSEN, T., AND MENG, X. A new solution procedure for application of energy-conserving algorithms to general constitutive models in nonlinear elastodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2001), 6309–6322.
- [94] LAURSEN, T., AND SIMO, J. Algorithmic symmetrisation of coulomb frictional problems using augmented lagrangians. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 108 (1993), 133–146.

- 
- [95] LAURSEN, T., AND SIMO, J. A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation frictional contact problems. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 36 (1993), 3451–3485.
- [96] LIM, H., AND TAYLOR, R. An explicit-implicit method for flexible-rigid multibody system. *Finite Elements in Analysis and Design* 37 (2001), 881–900.
- [97] LIU, K., BELYTSCHKO, T., AND ZHANG, Y. Implementation and accuracy of mixed-time implicit-explicit methods for structural dynamics. *Computers & Structures* 19, 4 (1984), 521–530.
- [98] LOVE, G., AND LAURSEN, T. Improved implicit integrators for transient impact problems—dynamic frictional dissipation within the admissible conserving framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (2003), 2223–2248.
- [99] LUBLINER, J. *Plasticity Theory*. Macmillan, 1990.
- [100] MAENCHEN, M., AND SACK, S. The tensor code. *Methods of Computational Physics* 3 (1964), 387–400.
- [101] MENG, X., AND LAURSEN, T. Energy consistent algorithms for dynamic finite deformation plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191 (2001), 1639–1675.
- [102] MENG, X., AND LAURSEN, T. On energy consistency of large deformation plasticity models, with application to the design of unconditionally stable time integrators. *Finite Elements in Analysis and Design* 38 (2002), 949–963.
- [103] MIEHE, C., AND SCHRÖDER, J. Energy and momentum conserving elastodynamics of a non-linear brick-type mixed finite shell element. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 50 (2001), 1801–1823.
- [104] MIRANDA, I., FERENCZ, R., AND HUGHES, T. An improved implicit-explicit time integration method for structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 18 (1989), 643–653.
- [105] NAGTEGAAL, J. On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 33 (1982), 469–484.
- [106] NAGTEGAAL, J., AND VELDPAUS, F. Analysis of metal forming problems with an improved finite strain plasticity formulation. In *Numerical Methods in Industrial Forming Processes* (Pineridge, Swansea, U.K., 1982).

- [107] NAGTEGAAL, J., AND VELDPAUS, F. On the implementation of finite strain plasticity equations in a numerical model. In *Numerical Analysis of Forming Processes* (Pittman et al. (Eds) John Wiley and sons, 1984), pp. 351–371.
- [108] NARKEERAN, N., AND LOVELL, M. Predicting springback in sheet metal forming: an explicit to implicit sequential solution procedure. *Finite Elements in Analysis and Design* 33 (1999), 29–42.
- [109] NEWMARK, N. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE* 85, EM3 (1959), 67–94.
- [110] NOELS, L., STAINIER, L., AND PONTHOT, J.-P. Self-adapting time integration management in crash-worthiness and sheet metal forming computations. *International Journal of Vehicle Design* 30, 2 (2002), 67–114.
- [111] NOELS, L., STAINIER, L., AND PONTHOT, J.-P. Combined implicit/explicit algorithms for crashworthiness analysis. *International Journal of Impact Engineering* (2004).
- [112] NOELS, L., STAINIER, L., AND PONTHOT, J.-P. Combined implicit/explicit time integration algorithms for the numerical simulation of sheet metal forming. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 168 (2004), 331–339. Selected Papers from the Second International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering (ACOMEN 2002) - Edited by H. De Schepper, M. Hogge and R. Van Keer.
- [113] NOELS, L., STAINIER, L., AND PONTHOT, J.-P. Energy-momentum conserving algorithm for non-linear hypoelastic constitutive models. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 59 (2004), 83–114.
- [114] NOELS, L., STAINIER, L., AND PONTHOT, J.-P. On the use of large time steps with an energy-momentum conserving algorithm for non-linear hypoelastic constitutive models. *International Journal of Solids and Structures* 41 (2004), 663–693.
- [115] NOELS, L., STAINIER, L., PONTHOT, J.-P., AND BONINI, J. Automatic time stepping algorithms for implicit numerical simulations of blade/casing interactions. *International Journal of Crashworthiness* 6, 3 (2001), 351–361.
- [116] NOELS, L., STAINIER, L., PONTHOT, J.-P., AND BONINI, J. Automatic time stepping algorithms for implicit numerical simulations of non-linear dynamics. *Advances in Engineering Software* 33, 10 (2002), 581–595.
- [117] NOELS, L., STAINIER, L., PONTHOT, J.-P., AND BONINI, J. Combined implicit-explicit algorithms for non-linear structural dynamics. *Revue Européenne des Elements-Finis (Dynamique Rapide)* 11 (2002), 565–591.

- [118] NOELS, L., STAINIER, L., PONTHOT, J.-P., AND BONINI, J. Détermination automatique de la taille du pas de temps pour les schémas implicites en dynamique non-linéaire. *Mécanique et Industrie 3* (2002), 63–77.
- [119] NUMISHEET. 3rd international conference: numerical simulation of 3-d sheet metal forming processes - verification of simulations with experiments. Tech. rep., NUMISHHET 96, Dearborn, Michigan, USA, 1996.
- [120] ORTIZ, M., RADOVITZKY, R., AND REPETTO, E. The computation of the exponential and logarithmic mappings and their first and second linearizations. *International Journal of Numerical Methods in Engineering 52* (2001), 1431–1441.
- [121] ORTIZ, M., AND STAINIER, L. The variational formulation of viscoplastic updates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 171* (1999), 419–444.
- [122] PLESHA, M., AND BELYTSCHKO, T. A constitutive operator splitting method for nonlinear transient analysis. *Computers & Structures 20*, 4 (1985), 767–777.
- [123] PONTHOT, J.-P. *Traîtement unifié de la mécanique des milieux continus solides en grandes transformations par la méthode des éléments finis*. PhD thesis, Université de Liège, 1995. in French.
- [124] PONTHOT, J.-P. Unified stress update algorithms for the numerical simulation of large deformation elasto-plastic and elasto-viscoplastic processes. *International Journal of Plasticity 18* (2002), 91–126.
- [125] PONTHOT, J.-P., AND HOGGE, M. On relative merits of implicit schemes for transient problems in metal forming simulation. In *International conference on numerical methods for metal forming in industry* (Baden-Baden, Germany, Sept 1994), vol. 2, pp. 128–148.
- [126] PRIOR, A. Applications of implicit and explicit finite element techniques to metal forming. *Journal of Material Processing Technology 45* (1994), 679–656.
- [127] PUSO, M., AND LAURSEN, T. A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 193* (2004), 601–627.
- [128] RAMIREZ, M., AND BELYTSCHKO, T. An expert system for setting time steps in dynamics finite element programs. *Engineering with Computers 5* (1989), 205–219.
- [129] RIO, G., SOIVE, A., AND GROLLEAU, V. Comparative study of numerical explicit time integration algorithms. In *Structures Under Shock and Impact VII* (2002), N. Jones, C. Brebbia, and A. Rajendran, Eds., pp. 207–216.

- [130] ROMERO, I., AND ARMERO, F. High-frequency dissipative time-stepping algorithms for the dynamics of nonlinear shells. In *ECCOMAS 2000, Proceedings of the Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering* (Barcelona, Spain, 2000), E. Oñate, G. Brigeda, and B. Swález, Eds.
- [131] ROMERO, I., AND ARMERO, F. Numerical integration of the stiff dynamics of geometrically exact shells: an energy-dissipative momentum-conserving scheme. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 54 (2002), 1043–1086.
- [132] ROMERO, I., AND ARMERO, F. An objective finite element approximation of the kinematics of geometrically exact rods and its use in the formulation of an energy-momentum conserving scheme in dynamics. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 54 (2002), 1683–1716.
- [133] RUST, W., AND SCHWEIZERHOF, K. Finite element limit load analysis of thin-walled structures by ANSYS (implicit), LS-DYNA (explicit) and in combination. *Thin-Walled Structures* 41 (2003), 227–244.
- [134] SANSOUR, C., WAGNER, W., WRIGGERS, P., AND SANSOUR, J. An energy-momentum integration scheme and enhanced strain finite elements for non-linear dynamics of shells. *International Journal of Non Linear Mechanics* 37 (2002), 951–966.
- [135] SIMO, J. Algorithms for static dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 99 (1992), 61–112.
- [136] SIMO, J., AND ARMERO, F. Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 33 (1992), 1413–1449.
- [137] SIMO, J., ARMERO, F., AND TAYLOR, R. Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3d finite deformation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 110 (1993), 359–386.
- [138] SIMO, J., AND GONZALEZ, O. Recent results on the numerical integration of infinite-dimensional hamiltonian system. In *Recent Developments in Finite Element Analysis* (CIMNE, Barcelona, Spain, 1994), T. Hughes, E. Onate, and O. Zienkiewicz, Eds., pp. 255–271.
- [139] SIMO, J., AND HUGHES, T. *Computational inelasticity*. Springer, 1998.
- [140] SIMO, J., AND TARNOW, N. The discrete energy-momentum method. Conserving algorithms for nonlinear elastodynamics. *ZAMP* 43 (1992), 757–792.

- [141] SIMO, J., AND TARNOW, N. A new energy and momentum conserving algorithms for the nonlinear dynamics of shells. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 37 (1994), 2527–2549.
- [142] SIMO, J., TARNOW, N., AND WONG, K. Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 100 (1992), 63–116.
- [143] SOIVE, A., RIO, G., AND GROLLEAU, V. Filtration des hautes fréquences numériques en dynamique explicite. In *Actes du Sixième Colloque National en Calcul des Structures* (Giens, France, 2003), vol. 2, pp. 173–180.
- [144] STRONGE, W. *Impact mechanics*. Cambridge University Press, 2000.
- [145] SUN, J., LEE, K., AND LEE, H. Comparaison of implicit and explicit finite element methods for dynamic problem. *Journal of Material Processing Technology* 105 (2000), 110–118.
- [146] TCHAMWA, B. *Contribution à l'étude des méthodes d'intégration directe explicites en dynamique non-linéaire des structures*. PhD thesis, Université de Nantes, 1998. in French.
- [147] WILKINS, M. Calculation of elastoplastic flows. *Methods of Computational Physics* 3 (1964), 211–263.
- [148] WOOD, W., BOSSAK, M., AND ZIENKIEWICZ, O. An alpha modification of newmark's method. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 15 (1981), 1562–1566.
- [149] WU, Y., AND SMOLINSKI, P. A multi-time step integration algorithm for structural dynamics based on the modified trapezoidal rule. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 187 (2000), 641–660.
- [150] YANG, C.-C. *Dynamic buckling of square tubes*. Ph.d. thesis, University of Liverpool, 1997.
- [151] YANG, D., JUNG, D., SONG, I., YOO, D., AND LEE, J. Comparative investigation into implicit, explicit, and iterative implicit/explicit schemes for the simulation of sheet-metal forming processes. *Journal of Material Processing Technology* 50 (1995), 39–53.
- [152] ZHAI, W.-M. Two simple fast integration methods for large-scale dynamic problems in engineering. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 39 (1996), 4199–4214.

- [153] ZHONG, H., AND CRISFIELD, M. An energy-conserving co-rotational procedure for the dynamics of shell structures. *Engineering Computations* 15, 5 (1998), 552–576.

# Appendice A

## Annexes relatives au chapitre 2

### A.1 Algorithme itératif de recherche linéaire (line search)

Dans cette section, nous exposons l'algorithme permettant d'obtenir  $\alpha_{ls}$  le coefficient du "line search" utilisé dans l'équation (2.52). Considérons que nous sommes à l'itération  $i + 1$  du processus de Newton-Raphson au pas  $n + 1$ . Omettons les exposant  $n + 1$  par souci de clarté. L'idée de base est de déterminer  $\Delta\vec{x}^{i+1}$  en inversant la matrice tangente  $\mathbf{S}^i$ , puis de corriger les inconnues en multipliant  $\Delta\vec{x}^{i+1}$  par  $\alpha_{ls}$ . D'après Simo et Hughes ([139], page 322), en utilisant une tolérance assez large pour le line-search, cette méthode permet d'optimiser la vitesse de convergence et le coût des calculs.

#### A.1.1 Etablissement de l'équation de la recherche linéaire

En utilisant le résidu défini par (2.51), à l'itération  $i + 1$ , l'équation à résoudre est

$$\left[\Delta\vec{F}(\vec{x}^{i+1})\right]^\xi = \vec{0} \quad (\text{A.1})$$

Définissons  $\vec{x}_{exact}$  la solution de (A.1). Dès lors, grâce à (2.53) et en définissant un potentiel  $U$  tel que

$$U(\vec{x}^{i+1}) = \frac{1}{2} [\vec{x}_{exact} - \vec{x}^{i+1}]^\mu \cdot \mathbf{S}^{\xi\mu}(\vec{x}_{exact}) [\vec{x}_{exact} - \vec{x}^{i+1}]^\xi - [\vec{x}_{exact} - \vec{x}^{i+1}]^\xi \cdot \left[\Delta\vec{F}(\vec{x}^{i+1})\right]^\xi \quad (\text{A.2})$$

l'équation (A.1) se réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(\vec{x}^{i+1})}{\partial [\vec{x}^{i+1}]^\xi} &= \left[\Delta\vec{F}(\vec{x}^{i+1})\right]^\xi - \mathbf{S}^{\xi\mu}(\vec{x}^{i+1}) [\vec{x}_{exact} - \vec{x}^{i+1}]^\mu + \\ &\quad \mathbf{S}^{\xi\mu}(\vec{x}_{exact}) [\vec{x}_{exact} - \vec{x}^{i+1}]^\mu \\ &= \vec{0} \text{ si } [\vec{x}^{i+1}]^\xi = [\vec{x}_{exact}]^\xi \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Le potentiel étant défini, nous reprenons ici l'analyse effectuée par Crisfield [39], page 254. Grâce à l'équation (2.52), nous avons

$$[\Delta \vec{x}^{i+1}]^\xi = [\mathbf{S}^{-1}(\vec{x}^i)]^{\xi\mu} [\Delta \vec{F}(\vec{x}^i)]^\mu \quad (\text{A.4})$$

Supposons que la matrice tangente permette d'obtenir la direction donnant la solution exacte mais pas l'amplitude. Ce n'est qu'une hypothèse qui, n'étant pas vérifiée en pratique, conduit l'algorithme de Newton-Raphson à itérer. Nous avons alors

$$[\vec{x}_{exact}]^\xi = [\vec{x}^{i+1}]^\xi = [\vec{x}^i]^\xi + \alpha_{ls} [\Delta \vec{x}^{i+1}]^\xi \quad (\text{A.5})$$

Etant donné que  $\vec{x}^i$  et  $\Delta \vec{x}^{i+1}$  sont connus, l'inconnue est  $\alpha_{ls}$  et l'équation (A.3) devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(\alpha_{ls})}{\partial \alpha_{ls}} &= \frac{\partial U(\vec{x}^{i+1})}{\partial [\vec{x}^{i+1}]^\xi} \cdot \frac{\partial [\vec{x}^{i+1}]^\xi}{\partial \alpha_{ls}} \\ &= \left[ \Delta \vec{F}(\vec{x}^i + \alpha_{ls} \Delta \vec{x}^{i+1}) \right]^\xi \cdot [\Delta \vec{x}^{i+1}]^\xi = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Il faut donc trouver  $\alpha_{ls}$  qui vérifie

$$\left[ \Delta \vec{F}(\vec{x}^i + \alpha_{ls} \Delta \vec{x}^{i+1}) \right]^\xi \cdot [\Delta \vec{x}^{i+1}]^\xi = 0 \quad (\text{A.7})$$

La manière de procéder est la suivante.

### A.1.2 Résolution de la recherche linéaire

Dans un premier temps, le résidu du "line search" initial  $r_{ls}^0$  est calculé par

$$r_{ls}^0 = \Delta \vec{F}^\xi(\vec{x}^i) \cdot \Delta \vec{x}^{i+1\xi} \quad (\text{A.8})$$

Comme nous avons  $\mathbf{S}^{i\xi\mu} [\Delta \vec{x}^{i+1}]^\mu = - [\Delta \vec{F}^i]^\xi$ , et sous réserve que la matrice jacobienne soit définie positive (ce qui est généralement le cas), nous avons  $r_{ls}^0 < 0$ . Le paramètre  $\alpha_{ls}^1$  de départ est pris égal à l'unité. Etant donné que le minimum du potentiel  $U$  doit être atteint, il existe une borne de  $\alpha_{ls}$  au delà de laquelle  $r_{ls}$  est positif. Pour optimiser la convergence du line search, si  $r_{ls}^1 < 0$ , nous incrémentons  $\alpha_{ls}^1$  d'une unité jusqu'à vérifier  $r_{ls}^1 > 0$  avec

$$r_{ls}^1 = \vec{F}^\xi(\vec{x}^i + \alpha_{ls}^1 \Delta \vec{x}^{i+1}) \cdot \Delta \vec{x}^{i+1\xi} \quad (\text{A.9})$$

Nous commençons alors les itérations, avec à l'itération  $j > 1$  du "line search", le résidu calculé en utilisant le coefficient de line search  $\alpha_{ls}^j$

$$r_{ls}^j = \vec{F}^\xi(\vec{x}^i + \alpha_{ls}^j \Delta \vec{x}^{i+1}) \cdot \Delta \vec{x}^{i+1\xi} \quad (\text{A.10})$$

Considérons  $\alpha_{ls}^k$ ,  $k \leq j$  la dernière valeur obtenue vérifiant  $r_{ls}^k < 0$  et  $\alpha_{ls}^l$ ,  $l \leq j$  la dernière valeur obtenue vérifiant  $r_{ls}^l > 0$ . Dès lors, par la méthode de la sécante, nous avons le nouveau paramètre de line search

$$\alpha_{ls}^{j+1} = \alpha_{ls}^k - r_{ls}^k \frac{\alpha_{ls}^l - \alpha_{ls}^k}{r_{ls}^l - r_{ls}^k} \quad (\text{A.11})$$

Remarquons que d'autres manières d'extrapolation peuvent-être utilisées, Crisfield [39] ayant discuté les méthodes possibles, nous y renvoyons le lecteur intéressé. Il faut maintenant définir un critère pour stopper les itérations.

### A.1.3 Convergence de la recherche linéaire

Soit une tolérance  $Tol_{ls}$  définie par l'utilisateur, typiquement  $10^{-2}$ . Les itérations sont stoppées quand

$$|r_{ls}| < Tol_{ls} \quad (\text{A.12})$$

Comme mentionné par Crisfield [39], le résidu peut être adimensionnalisé. Le critère d'arrêt devient

$$\left| \frac{r_{ls}^j}{r_{ls}^0} \right| < Tol_{ls} \quad (\text{A.13})$$

Enfin, afin d'éviter de trop faibles variations du paramètre de line-search, les itérations sont aussi stoppées si

$$\left| \frac{\alpha_{ls}^j - \alpha_{ls}^{j-1}}{\alpha_{ls}^{j-1}} \right| < Tol_{ls} \quad (\text{A.14})$$

## A.2 Etude de l'amplification numérique (overshoot) relative aux hautes fréquences dans le cadre de l'utilisation de l'algorithme $\alpha$ -généralisé

Nous reprenons ici les grandes lignes de l'analyse proposée par Erlicher *et al.* [46]. Soient les relations (2.46) et (2.48) liant les déplacements aux vitesses et aux accélérations. Si  $\omega_{max}$  est la plus haute pulsation propre de la discrétisation élément-fini, une pulsation adimensionnelle  $\Omega_{max}$  est définie par

$$\Omega_{max} = \omega_{max}\Delta t \quad (\text{A.15})$$

nous pouvons déduire que

$$\begin{aligned} [\ddot{\vec{x}}^{n+1}]^\xi &= \left[ \left[ 1 - \frac{1}{2\beta} \right] \ddot{\vec{x}}^n - \frac{\omega_{max}}{\beta\Omega_{max}} \dot{\vec{x}}^n + \frac{\omega_{max}^2}{\beta\Omega_{max}^2} [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n] \right]^\xi \\ [\dot{\vec{x}}^{n+1}]^\xi &= \left[ \left[ 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right] \frac{\Omega_{max}}{\omega_{max}} \ddot{\vec{x}}^n + \left[ 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right] \dot{\vec{x}}^n + \frac{\gamma\omega_{max}}{\beta\Omega_{max}} [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n] \right]^\xi \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

L'analyse de ces deux équations montre que si  $\gamma \neq 2\beta$ , les vitesses sont de l'ordre de  $\Omega_{max}$  et, s'il existe des accélérations initiales, les vitesses subiront un overshoot lors du premier pas de temps. Cette constatation est étendue au cas où un corps entre en contact avec un autre, ce qui correspond à considérer des accélérations initiales.

Soit l'équation d'équilibre de la méthode  $\alpha$ -généralisée (2.107), qui rend l'équation de Newmark (2.49) si  $\alpha_F = \alpha_M = 0$ . Grâce à (A.16), les forces peuvent alors se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} [1 - \alpha_F] [\vec{F}_{int}^{n+1} - \vec{F}_{ext}^{n+1}]^\xi - \alpha_F [\vec{F}_{int}^n - \vec{F}_{ext}^n]^\xi &= \frac{-\omega_{max}^2 [1 - \alpha_M]}{\beta\Omega_{max}^2} M^{\xi\mu} [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\mu + \\ &\frac{1 - \alpha_M - 2\beta}{2\beta} M^{\xi\mu} [\ddot{\vec{x}}^n]^\mu + \\ &\frac{\omega_{max} [1 - \alpha_M]}{\beta\Omega_{max}} M^{\xi\mu} [\dot{\vec{x}}^n]^\mu \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

L'analyse de cette équation montre que les forces et donc les déplacements ne subissent pas d'overshoot lors du premier pas de temps puisqu'il n'y a pas de terme en  $\Omega_{max}$ . Remarquons que si une matrice de dissipation est introduite, ce n'est plus le cas [46].

### A.2.1 Existence de l'overshoot au premier pas de temps

Supposons que les paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  sont ceux qui amènent la meilleure précision, c'est-à-dire ceux définis aux Tables 2.1 et 2.2 ( $\beta = \frac{1}{[1+\rho_\infty]^2}$  et  $\gamma = \frac{3-\rho_\infty}{2+2\rho_\infty}$ ). A ce stade, notre analyse est toujours valable pour l'algorithme de Newmark. Supposons en outre l'absence de forces externes (ce qui n'est pas restrictif car l'analyse serait identique). Si

nous ne considérons que les hautes fréquences (*i.e.*  $\Omega_{max} \gg 1$ ) et si nous supposons que les déplacements restent bornés (*i.e.*  $\|\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n\| \not\rightarrow \infty$ ), ce qui vient d'être confirmé sur le premier pas de temps : alors, les équations (A.16) deviennent

$$\begin{aligned} [\ddot{\vec{x}}^{n+1}]^\xi &= \left[ \frac{1 - 2\rho_\infty - \rho_\infty^2}{2} \ddot{\vec{x}}^n - \frac{\omega_{max} [1 + \rho_\infty]^2}{\Omega_{max}} \dot{\vec{x}}^n \right]^\xi \\ [\dot{\vec{x}}^{n+1}]^\xi &= \left[ \frac{[1 - \rho_\infty]^2}{4} \frac{\Omega_{max}}{\omega_{max}} \ddot{\vec{x}}^n - \frac{1 + 2\rho_\infty - \rho_\infty^2}{2} \dot{\vec{x}}^n \right]^\xi \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

et l'équation (A.17) devient

$$\begin{aligned} \left[ [1 - \alpha_F] \vec{F}_{int}^{n+1} - \alpha_F \vec{F}_{int}^n \right]^\xi &= \left[ \frac{[1 - \alpha_M][1 + \rho_\infty]^2}{2} - 1 \right] M^{\xi\mu} [\ddot{\vec{x}}^n]^\mu + \\ &\quad \frac{\omega_{max} [1 - \alpha_M][1 + \rho_\infty]^2}{\Omega_{max}} M^{\xi\mu} [\dot{\vec{x}}^n]^\mu \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Remarquons que nous conservons les termes relatifs aux vitesses, pour pouvoir généraliser les expressions au cas où les accélérations sont nulles.

Procédons maintenant de manière récursive. Les relations (A.18) deviennent

$$\begin{aligned} [\ddot{\vec{x}}^{n+1}]^\xi &= [-2\rho_\infty \ddot{\vec{x}}^n - \rho_\infty^2 \ddot{\vec{x}}^{n-1}]^\xi \\ &= [-1]^{n+1} \rho_\infty^n \left[ \frac{2\rho_\infty - [n+1][1 - \rho_\infty^2]}{2} \ddot{\vec{x}}_0 + \frac{\omega_{max} [n+1][1 + \rho_\infty]^2}{\Omega_{max}} \dot{\vec{x}}_0 \right]^\xi \\ [\dot{\vec{x}}^{n+1}]^\xi &= [-2\rho_\infty \dot{\vec{x}}^n - \rho_\infty^2 \dot{\vec{x}}^{n-1}]^\xi \\ &= [-1]^{n+1} \rho_\infty^n \left[ -\frac{[n+1][1 - \rho_\infty^2]\Omega_{max}}{4\omega_{max}} \ddot{\vec{x}}_0 - \frac{[n+1][\rho_\infty^2 - 1] - 2\rho_\infty}{2} \dot{\vec{x}}_0 \right]^\xi \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Ces dernières relations sont introduites dans (A.19), ce qui amène à

$$\begin{aligned} \left[ [1 - \alpha_F] \vec{F}_{int}^{n+1} - \alpha_F \vec{F}_{int}^n \right]^\xi &= [-1]^n \rho_\infty^{n-1} \left[ \frac{[1 - \alpha_M][1 + \rho_\infty]^2}{2} - 1 \right] M^{\xi\mu} \\ &\quad \left[ \frac{2\rho_\infty - n[1 - \rho_\infty^2]}{2} \ddot{\vec{x}}_0 + \frac{\omega_{max} n[1 + \rho_\infty]^2}{\Omega_{max}} \dot{\vec{x}}_0 \right]^\mu + \\ &\quad [-1]^n \rho_\infty^{n-1} \frac{\omega_{max} [1 - \alpha_M][1 + \rho_\infty]^2}{\Omega_{max}} M^{\xi\mu} \\ &\quad \left[ -\frac{n[1 - \rho_\infty^2]\Omega_{max}}{4\omega_{max}} \ddot{\vec{x}}_0 - \frac{n[\rho_\infty^2 - 1] - 2\rho_\infty}{2} \dot{\vec{x}}_0 \right]^\mu \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Grâce à (A.20), l'énergie (2.94) peut être évaluée

$$\begin{aligned}
E^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} \right]^\xi \cdot M^{\mu\xi} \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} \right]^\mu + U_{int}^{n+1} \\
&= \rho_\infty^{2n} \frac{[n+1]^2 [1-\rho_\infty]^4 \Omega_{max}^2}{32\omega_{max}^2} \left[ \ddot{\vec{x}}_0 \right]^\xi \cdot M^{\mu\xi} \left[ \ddot{\vec{x}}_0 \right]^\mu + \\
&\quad 2[n+1] \rho_\infty^{2n} \frac{[1-\rho_\infty]^2 [n+1] [\rho_\infty - 1] - 2\rho_\infty \Omega_{max}}{4 \omega_{max}} \left[ \ddot{\vec{x}}_0 \right]^\xi \cdot M^{\mu\xi} \left[ \dot{\vec{x}}_0 \right]^\mu + \\
&\quad \rho_\infty^{2n} \left[ \frac{[n+1] [\rho_\infty - 1] - 2\rho_\infty}{2} \right]^2 \frac{1}{2} \left[ \dot{\vec{x}}_0 \right]^\xi \cdot M^{\mu\xi} \left[ \dot{\vec{x}}_0 \right]^\mu \tag{A.22}
\end{aligned}$$

ainsi que la pseudo énergie (2.87)

$$\begin{aligned}
\tilde{E}^{n+1} &= E^{n+1} + \frac{\Delta t^2}{2} \left[ \beta - \frac{\gamma}{2} \right] \left[ \ddot{\vec{x}}_0 \right]^\xi \cdot M^{\mu\xi} \left[ \ddot{\vec{x}}_0 \right]^\mu \\
&= \rho_\infty^{2n} \left[ \frac{[n+1]^2 [1-\rho_\infty]^2}{16} + \frac{[-\rho_\infty + \frac{n+1}{2} - \frac{n+1}{2} \rho_\infty^2]^2}{4[1+\rho_\infty]^2} \right] \\
&\quad \frac{\Omega_{max}^2 [1-\rho_\infty]^2}{2\omega_{max}^2} \left[ \ddot{\vec{x}}_0 \right]^\xi \cdot M^{\mu\xi} \left[ \ddot{\vec{x}}_0 \right]^\mu + \\
&\quad 2[n+1] \rho_\infty^{2n} \frac{[1-\rho_\infty]^2 [n+1] [\rho_\infty - 1] - 2\rho_\infty \Omega_{max}}{4 \omega_{max}} \left[ \ddot{\vec{x}}_0 \right]^\xi \cdot M^{\mu\xi} \left[ \dot{\vec{x}}_0 \right]^\mu + \\
&\quad \rho_\infty^{2n} \left[ \frac{[n+1] [\rho_\infty - 1] - 2\rho_\infty}{2} \right]^2 \frac{1}{2} \left[ \dot{\vec{x}}_0 \right]^\xi \cdot M^{\mu\xi} \left[ \dot{\vec{x}}_0 \right]^\mu \tag{A.23}
\end{aligned}$$

## A.2.2 Tendence asymptotique pour un grand nombre de pas temps et L-stabilité

Remarquons que les relations établies sont valables pour tous les paramètres  $\alpha_M$  et  $\alpha_F$  de l'algorithme  $\alpha$ -généralisé, mais sont aussi valables pour l'algorithme de Newmark. Nous pouvons donc analyser l'évolution des termes en fonction des pas de temps. Nous faisons l'hypothèse que les accélérations initiales sont non-nulles, ce qui est le cas lors de la simulation d'un impact. Pour les accélérations et les vitesses, le terme dominant de (A.20) est celui qui dépend des accélérations initiales, ce qui amène

$$\begin{aligned}
\frac{\left[ \ddot{\vec{x}}^{n+1} \right]^\xi}{\left[ \ddot{\vec{x}}^n \right]^\xi} &= \frac{\rho_\infty \left[ -\rho_\infty + \frac{n+1}{2} [1-\rho_\infty]^2 \right]}{\rho_\infty - \frac{n}{2} [1-\rho_\infty]} \\
\frac{\left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} \right]^\xi}{\left[ \dot{\vec{x}}^n \right]^\xi} &= -\frac{n+1}{n} \rho_\infty \tag{A.24}
\end{aligned}$$

Après un grands nombre de pas de temps, ces relations conduisent au cas limite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[ \ddot{\vec{x}}^{n+1} \right]^\xi}{\left[ \ddot{\vec{x}}^n \right]^\xi} &= -\rho_\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} \right]^\xi}{\left[ \dot{\vec{x}}^n \right]^\xi} &= -\rho_\infty \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

ce qui montre, que l'overshoot provenant du premier pas de temps et relatif aux hautes fréquences (car  $\Omega_{max}$  est supposé  $\gg 1$ ), est annihilé au cours du temps. De plus, si  $\rho_\infty = 0$ , l'overshoot est amorti en un pas de temps, ce qui rend l'algorithme L-stable. Les forces (A.21) quant à elles conduisent à

$$\begin{aligned} \frac{\left[ [1-\alpha_F] \vec{F}_{int}^{n+1} - \alpha_F \vec{F}_{int}^n \right]^\xi}{\left[ [1-\alpha_F] \vec{F}_{int}^n - \alpha_F \vec{F}_{int}^{n-1} \right]^\xi} &= -\rho_\infty \\ \frac{\left[ -\rho_\infty + \frac{n+1}{2} - \frac{n+1}{2} \rho_\infty^2 \right] \left[ -\rho_\infty + \rho_\infty \alpha_M + \alpha_M \right] - \frac{\rho_\infty}{2} \left[ 1 - \rho_\infty^2 \right] \left[ 1 - \alpha_M \right]}{\left[ -\rho_\infty + \frac{n}{2} - \frac{n}{2} \rho_\infty^2 \right] \left[ -\rho_\infty + \rho_\infty \alpha_M + \alpha_M \right] - \frac{\rho_\infty}{2} \left[ 1 - \rho_\infty^2 \right] \left[ 1 - \alpha_M \right]} & \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

ce qui conduit après un grand nombre de pas de temps

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[ [1 - \alpha_F] \vec{F}_{int}^{n+1} - \alpha_F \vec{F}_{int}^n \right]^\xi}{\left[ [1 - \alpha_F] \vec{F}_{int}^n - \alpha_F \vec{F}_{int}^{n-1} \right]^\xi} = -\rho_\infty \quad (\text{A.27})$$

qui démontre également que les forces internes tendent vers une constante à cause de la dissipation numérique. Pour les énergies, et les pseudo-énergies, les termes dominants, en supposant l'énergie interne bornée, conduisent à

$$\frac{E^{n+1}}{E^n} = \frac{\rho_\infty^2 [n+1]^2}{n^2} \subset [\rho_\infty^2, 4\rho_\infty] \quad (\text{A.28})$$

et à

$$\frac{\tilde{E}^{n+1}}{\tilde{E}^n} = \frac{\rho_\infty^2 [n+1]^2 \left[ \frac{[n+1]^2 [1-\rho_\infty]^2}{16} + \frac{\left[ -\rho_\infty + \frac{n+1}{2} - \frac{n+1}{2} \rho_\infty^2 \right]^2}{4[1+\rho_\infty]^2} \right]}{n^2 \left[ \frac{n^2 [1-\rho_\infty]^2}{16} + \frac{\left[ -\rho_\infty + \frac{n}{2} - \frac{n}{2} \rho_\infty^2 \right]^2}{4[1+\rho_\infty]^2} \right]} \in [0, 1] \quad (\text{A.29})$$

En analysant (A.28) et (A.29), il apparaît que le ratio entre les énergies n'est pas borné par l'unité, ce qui explique que l'énergie peut augmenter au cours du temps. Par contre la pseudo-énergie est toujours limitée par l'unité pour les hautes fréquences (car  $\Omega_{max}$  est supposé  $\gg 1$ ). Mais si  $\rho_\infty = 0$ , l'énergie associée aux hautes fréquences est annihilée en un pas de temps, ce qui rend l'algorithme L-stable.

Les limites donnent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E^{n+1}}{E^n} = \rho_\infty^2 \quad (\text{A.30})$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{E}^{n+1}}{\tilde{E}^n} = \rho_\infty^2 \quad (\text{A.31})$$

ce qui démontre que pour un grand nombre de pas de temps, les énergies associées aux hautes fréquences s'annihilent.

# Appendice B

## Annexes relatives au chapitre 3

### B.1 Méthode de résolution des algorithmes EMCA et EDMC

Dans cette section nous allons exposer la méthode de résolution, du type de l'algorithme EDMC. Pour obtenir la résolution de l'algorithme conservatif, il suffit de négliger les termes dissipatifs ( $\vec{G}_{diss}$  et  $\vec{F}_{diss}$ ). Le système d'équations (3.36), (3.37) et (3.38) est résolu par un algorithme prédicteur-correcteur.

#### B.1.1 Prédiction

Les valeurs prédites (itération 0 à la configuration  $n + 1$ ) sont obtenues à partir de (3.36) et de (3.37), en prenant  $\ddot{\vec{x}}^{n+1} = 0$ . Il vient donc

$$\begin{aligned} [\vec{x}^{n+1,0}]^\xi &= \left[ \vec{x}^n + \Delta t \dot{\vec{x}}^n + \frac{\Delta t^2}{4} \ddot{\vec{x}}^n + \Delta t \vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2},0} \right]^\xi \\ [\dot{\vec{x}}^{n+1,0}]^\xi &= \left[ \dot{\vec{x}}^n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\vec{x}}^n \right]^\xi \\ [\ddot{\vec{x}}^{n+1,0}]^\xi &= 0 \end{aligned} \tag{B.1}$$

#### B.1.2 Corrections

Le résidu de l'itération  $i$  du schéma de Newton-Raphson, à la configuration  $n + 1$ , est exprimé par la linéarisation de (3.38)

$$\begin{aligned} [\Delta \vec{F}^i]^\xi &= \frac{1}{2} M^{\xi\mu} \left[ \ddot{\vec{x}}^{n+1,i} + \ddot{\vec{x}}^n \right]^\mu + \\ &\quad \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}}(\vec{x}^{n+1,i}) + \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}}(\vec{x}^{n+1,i}) - \vec{F}_{ext}^{n+\frac{1}{2}}(\vec{x}^{n+1,i}) \right]^\xi \end{aligned} \tag{B.2}$$

Nous choisissons de linéariser l'équation d'équilibre en fonction des accélérations. En effet, comme nous allons le voir dans la construction de l'expression de la matrice tangente, c'est la solution la moins coûteuse pour tenir compte de la vitesse de dissipation. En linéarisant les relations (3.36), (3.37) et (3.38), la correction de l'itération  $i + 1$  à la configuration  $n + 1$  devient

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}^{i\xi\mu} \left[ \Delta \ddot{\vec{x}}^{i+1} \right]^\mu &= - \left[ \Delta \vec{F}^i \right]^\xi \\
\left[ \ddot{\vec{x}}^{n+1,i+1} \right]^\mu &= \left[ \ddot{\vec{x}}^{n+1,i} + \alpha_{ls} \Delta \ddot{\vec{x}}^{i+1} \right]^\mu \\
\left[ \dot{\vec{x}}^{n+1,i+1} \right]^\mu &= \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1,i} + \frac{\Delta t}{2} \alpha_{ls} \Delta \ddot{\vec{x}}^{i+1} \right]^\mu \\
\left[ \vec{x}^{n+1,i+1} \right]^\mu &= \left[ \vec{x}^{n+1,i} + \alpha_{ls} \frac{\Delta t^2}{4} \Delta \ddot{\vec{x}}^{i+1} + \Delta t \vec{G}_{diss}(\dot{\vec{x}}^{n+1,i+1}) - \Delta t \vec{G}_{diss}(\dot{\vec{x}}^{n+1,i}) \right]^\mu
\end{aligned} \tag{B.3}$$

où  $S$  est la matrice tangente définie par

$$\mathbf{S}^{\xi\mu} = \frac{\partial \left\{ \frac{1}{2} M^{\xi\nu} \left[ \ddot{\vec{x}}^{n+1} + \ddot{\vec{x}}^n \right]^\nu + \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} + \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{F}_{ext}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi \right\}}{\partial \left[ \ddot{\vec{x}}^{n+1} \right]^\mu} \tag{B.4}$$

et où  $\alpha_{ls}$  est le paramètre de "line search" obtenu par un système itératif (*c.f.* appendice A.1). La convergence du "line search" est obtenue quand ( $Tol_{ls}$  étant la tolérance)

$$\| \Delta \vec{F}^\xi \left( \vec{x}^{n+1,i}, \alpha_{ls} \Delta \ddot{\vec{x}}^{i+1} \right) \cdot \Delta \ddot{\vec{x}}^{i+1\xi} \| < Tol_{ls} \tag{B.5}$$

L'équation (B.3) est résolue itérativement jusqu'à convergence, *i.e.* jusqu'à obtenir

$$\frac{\Delta \vec{F}^{i+1\xi} \cdot \Delta \vec{F}^{i+1\xi}}{\left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}}(\vec{x}^{n+1}) \right]^\xi \cdot \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}}(\vec{x}^{n+1}) \right]^\xi + \left[ \vec{F}_{ext}^{n+\frac{1}{2}}(\vec{x}^{n+1}) \right]^\xi \cdot \left[ \vec{F}_{ext}^{n+\frac{1}{2}}(\vec{x}^{n+1}) \right]^\xi} < Tol \tag{B.6}$$

où  $Tol$  est une tolérance utilisateur. Nous allons maintenant exprimer la matrice tangente.

### B.1.3 La matrice tangente

Soit  $\mathbf{K}^{\xi\mu}$  la matrice de raideur obtenue par

$$\mathbf{K}^{\xi\mu} = \frac{\partial \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} + \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi}{\partial \left[ \vec{x}^{n+1} \right]^\mu} - \frac{\partial \left[ \vec{F}_{ext}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi}{\partial \left[ \vec{x}^{n+1} \right]^\mu} \tag{B.7}$$

Dès lors, en comparant (B.4) et (B.7), nous pouvons déduire ( $\mathbf{I}$  étant le tenseur unité du second degré)

$$\mathbf{S}^{\xi\mu} = \mathbf{K}^{\xi\nu} \frac{\partial \vec{x}^\nu}{\partial \ddot{x}^\mu} + \frac{1}{2} M^{\xi\mu} \mathbf{I} \quad (\text{B.8})$$

En utilisant les équations (3.36) et (3.37), nous pouvons obtenir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{x}^\nu}{\partial \ddot{x}^\mu} &= \frac{\partial \vec{x}^\nu}{\partial \dot{x}^\xi} \frac{\partial \dot{x}^\xi}{\partial \ddot{x}^\mu} \\ &= \left[ \frac{\Delta t}{2} \mathbf{I} \delta_{\nu\xi} + \Delta t \frac{\partial \left[ \vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\nu}{\partial \dot{x}^\xi} \right] \frac{\Delta t}{2} \mathbf{I} \delta_{\xi\mu} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Supposons que  $\left[ \vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi$  ne dépendent que de la valeur des vitesses au nœud  $\xi$ . Dès lors, en définissant  $\mathbf{G} \left( \dot{x}^\mu \right)$  la dérivée de  $\vec{G}_{diss}$  (appendice C.6), par rapport à la vitesse, évaluée au nœud  $\mu$ , la relation (B.9) devient

$$\frac{\partial \vec{x}^\nu}{\partial \ddot{x}^\mu} = \left[ \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{G} \left( \dot{x}^\mu \right) \right] \delta_{\nu\mu} \quad (\text{B.10})$$

Finalement la relation (B.8) s'écrit

$$\mathbf{S}^{\xi\mu} = \mathbf{K}^{\xi\mu} \left[ \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{G} \left( \dot{x}^\mu \right) \right] + \frac{1}{2} M^{\xi\mu} \mathbf{I} \quad (\text{B.11})$$

Dans cette expression, apparaît l'avantage d'avoir linéarisé l'équation d'équilibre par rapport aux accélérations. En effet, cela évite de devoir inverser  $\mathbf{G} \left( \dot{x}^\mu \right)$ .

## B.2 Etude de l'amplification numérique (overshoot) relative aux hautes fréquences dans le cadre de l'utilisation de l'algorithme EDMC-1

Dans cette annexe, nous effectuons une analyse similaire à celle de l'annexe A.2, mais en considérant la méthode EDMC-1. Soit  $\omega_{max}$  la plus haute pulsation propre de la discrétisation élément-fini, la pulsation adimensionnelle  $\Omega_{max}$  est définie (A.15). Grâce aux relations (3.36), (3.37), (3.52), et en considérant le potentiel (3.54), nous pouvons déduire que

$$\begin{aligned} \left[ \ddot{\vec{x}}^{n+1} \right]^\xi &= \left[ -\ddot{\vec{x}}^n - \frac{4\omega_{max}}{\Omega_{max}[1+\chi]} \dot{\vec{x}}^n + \frac{4\omega_{max}^2}{\Omega_{max}^2[1+\chi]} [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n] \right]^\xi \\ \left[ \dot{\vec{x}}^{n+1} \right]^\xi &= \left[ -\frac{1-\chi}{1+\chi} \dot{\vec{x}}^n + \frac{2\omega_{max}}{\Omega_{max}} [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n] \right]^\xi \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

L'analyse de ces deux équations montre qu'il n'y a aucun terme de l'ordre de  $\Omega_{max}$ . Il n'y a donc pas d'overshoot des vitesses à cause des accélérations initiales.

De plus l'équation d'équilibre de la méthode EDMC (3.38) se réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} + \vec{F}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{F}_{ext}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi &= \frac{-2\omega_{max}^2}{\Omega_{max}^2[1+\chi]} M^{\xi\mu} [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^\mu - \\ &\quad \frac{4\omega_{max}}{\Omega_{max}[1+\chi]} M^{\xi\mu} [\dot{\vec{x}}^n]^\mu \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

L'analyse de cette équation montre que les forces, et donc les déplacements, ne subissent pas d'overshoot lors du premier pas de temps puisqu'il n'y a pas de terme en  $\Omega_{max}$ .

# Appendice C

## Annexes relatives au chapitre 4

### C.1 Etude d'un mode rigide

Soit une configuration  $n$  caractérisée par des contraintes  $\Sigma^n$ , et un volume  $\int_{\mathbb{V}_0} J_0^n d\mathbb{V}_0$ . Supposons que nous intégrons un mode rigide. Dès lors, pour le premier pas de temps, grâce à (4.4), nous avons

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_n^{n+1} &= \mathbf{R}_n^{n+1} \\
 \mathbf{f}_n^{n+1} &= -\mathbf{R}_n^{n+1} \\
 \mathbf{F}_0^{n+1} &= \mathbf{R}_n^{n+1} \mathbf{F}_0^n \\
 \mathbf{f}_0^{n+1} &= -\mathbf{f}_0^n \mathbf{R}_n^{n+1} \\
 J_0^{n+1} &= J_0^n
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

ce qui démontre que le volume est conservé. Les contraintes sont alors calculées par (4.11)

$$\Sigma^{n+1} = -\mathbf{R}_n^{n+1} \Sigma^n \mathbf{R}_n^{n+1} \tag{C.2}$$

Les forces internes (4.24) valent alors

$$\begin{aligned}
 \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^\xi &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ [\mathbf{I} + \mathbf{R}_n^{n+1}] \Sigma^n \mathbf{f}_0^{nT} \vec{D}^\xi J_0^n \right\} d\mathbb{V}_0 + \\
 &\quad \frac{1}{4} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ [\mathbf{I} - \mathbf{R}_n^{n+1}] \mathbf{R}_n^{n+1} \Sigma^n [-\mathbf{R}_n^{n+1}] \mathbf{R}_n^{n+1} \mathbf{f}_0^{nT} \vec{D}^\xi J_0^n \right\} d\mathbb{V}_0 \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ [\mathbf{I} + \mathbf{R}_n^{n+1}] \Sigma^n \mathbf{f}_0^{nT} \vec{D}^\xi J_0^n \right\} d\mathbb{V}_0
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

En procédant de la même manière, pour le deuxième pas du mode rigide, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{n+1}^{n+2} &= \mathbf{R}_{n+1}^{n+2} \\
\mathbf{f}_{n+1}^{n+2} &= -\mathbf{R}_{n+1}^{n+2} \\
\mathbf{F}_0^{n+2} &= \mathbf{R}_{n+1}^{n+2} \mathbf{R}_n^{n+1} \mathbf{F}_0^n \\
\mathbf{f}_0^{n+2} &= \mathbf{f}_0^n \mathbf{R}_n^{n+1} \mathbf{R}_{n+1}^{n+2} \\
J_0^{n+2} &= J_0^n
\end{aligned} \tag{C.4}$$

et

$$\Sigma^{n+2} = \mathbf{R}_{n+1}^{n+2} \mathbf{R}_n^{n+1} \Sigma^n \mathbf{R}_n^{n+1} \mathbf{R}_{n+1}^{n+2} \tag{C.5}$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned}
\left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{3}{2}} \right]^\xi &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ -[\mathbf{I} + \mathbf{R}_{n+1}^{n+2}] \mathbf{R}_n^{n+1} \Sigma^n \mathbf{R}_n^{n+1} \mathbf{R}_n^{n+1} \mathbf{f}_0^{nT} \vec{D}^\xi J_0^n \right\} d\mathbb{V}_0 + \\
&\quad \frac{1}{4} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ [\mathbf{I} - \mathbf{R}_{n+1}^{n+2}] \mathbf{R}_{n+1}^{n+2} \mathbf{R}_n^{n+1} \Sigma^n \mathbf{R}_n^{n+1} \mathbf{R}_{n+1}^{n+2} \mathbf{R}_{n+1}^{n+2} \mathbf{R}_n^{n+1} \mathbf{f}_0^{nT} \vec{D}^\xi J_0^n \right\} d\mathbb{V}_0 \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ [\mathbf{R}_n^{n+1} + \mathbf{R}_{n+1}^{n+2} \mathbf{R}_n^{n+1}] \Sigma^n \mathbf{f}_0^{nT} \vec{D}^\xi J_0^n \right\} d\mathbb{V}_0
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Par récurrence, après  $n' + 1$  pas de temps, nous avons

$$\left[ \vec{F}_{int}^{n+n'+\frac{1}{2}} \right]^\xi = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ [\mathbf{I} + \mathbf{R}_{n+n'+1}^{n+n'}] \mathbf{R}_n^{n'} \Sigma^n \mathbf{f}_0^{nT} \vec{D}^\xi J_0^n \right\} d\mathbb{V}_0 \tag{C.7}$$

où  $\mathbf{R}_n^{n'} = \mathbf{R}_{n'-1}^{n'} \dots \mathbf{R}_n^{n+1}$ . Cette expression démontre que l'intégration d'un mode rigide se fait sans perturber les contraintes, ni le volume. Elle ne modifie que l'orientation des forces internes.

## C.2 Démonstration des relations liant les tenseurs élastiques

A partir des relations (4.44) et (4.45), qui valent respectivement

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}_2^3 \mathbf{R}_1^2 \quad (\text{C.8})$$

et

$$\mathcal{H} : \mathbf{E}_2^3 = -\mathbf{R}_1^2 \mathcal{H} : \mathbf{E}_1^{\text{el}2} \mathbf{R}_1^{2T} \quad (\text{C.9})$$

nous devons démontrer (4.46), soit

$$\begin{aligned} \mathbf{GL}_2^3 &= -\mathbf{A}_1^{\text{el}2} \\ \mathbf{A}_2^3 &= -\mathbf{QGL}_1^{\text{el}2} \mathbf{Q}^T \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Décomposons le tenseur  $\mathbf{U}_2^3$  dans sa base propre définie par les vecteurs propres  $\vec{N}_i^{\mathbf{U}_2^3}$  et les valeurs propres  $\lambda_i^{\mathbf{U}_2^3}$ . Il vient

$$\mathbf{U}_2^3 = \sum_i \left\{ \lambda_i^{\mathbf{U}_2^3} \vec{N}_i^{\mathbf{U}_2^3} \otimes \vec{N}_i^{\mathbf{U}_2^3} \right\} \quad (\text{C.11})$$

De la même manière, nous avons

$$\mathbf{U}_1^{\text{el}2} = \sum_i \left\{ \lambda_i^{\mathbf{U}_1^{\text{el}2}} \vec{N}_i^{\mathbf{U}_1^{\text{el}2}} \otimes \vec{N}_i^{\mathbf{U}_1^{\text{el}2}} \right\} \quad (\text{C.12})$$

Par définition de la fonction logarithme, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2^3 &= \sum_i \left\{ \ln \left( \lambda_i^{\mathbf{U}_2^3} \right) \vec{N}_i^{\mathbf{U}_2^3} \otimes \vec{N}_i^{\mathbf{U}_2^3} \right\} \\ \mathbf{E}_1^{\text{el}2} &= \sum_i \left\{ \ln \left( \lambda_i^{\mathbf{U}_1^{\text{el}2}} \right) \vec{N}_i^{\mathbf{U}_1^{\text{el}2}} \otimes \vec{N}_i^{\mathbf{U}_1^{\text{el}2}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Dès lors, la relation (C.9) peut se réécrire

$$\sum_i \left\{ \ln \left( \lambda_i^{\mathbf{U}_2^3} \right) \mathcal{H} : \vec{N}_i^{\mathbf{U}_2^3} \otimes \vec{N}_i^{\mathbf{U}_2^3} \right\} = \sum_i \left\{ \ln \left( \frac{1}{\lambda_i^{\mathbf{U}_1^{\text{el}2}}} \right) \mathbf{R}_1^2 \mathcal{H} : \vec{N}_i^{\mathbf{U}_1^{\text{el}2}} \otimes \vec{N}_i^{\mathbf{U}_1^{\text{el}2}} \mathbf{R}_1^{2T} \right\} \quad (\text{C.14})$$

En utilisant la définition de  $\mathcal{H}$  (4.14), qui est supposé constant et isotrope, cette équation devient

$$\begin{aligned} \sum_i \left\{ \frac{1}{2} \ln \left( \left[ \lambda_i^{\mathbf{U}_2^3} \right]^2 \right) \vec{N}_i^{\mathbf{U}_2^3} \otimes \vec{N}_i^{\mathbf{U}_2^3} \right\} = \\ \sum_i \left\{ \frac{1}{2} \ln \left( \left[ \frac{1}{\lambda_i^{\mathbf{U}_1^{\text{el}2}}} \right]^2 \right) \mathbf{R}_1^2 \vec{N}_i^{\mathbf{U}_1^{\text{el}2}} \otimes \vec{N}_i^{\mathbf{U}_1^{\text{el}2}} \mathbf{R}_1^{2T} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

En utilisant les propriétés de symétrie des tenseurs  $\mathbf{U}$ , et l'unicité de la décomposition dans la base propre d'un tenseur, nous avons finalement

$$\frac{1}{2}\mathbf{U}_2^3\mathbf{U}_2^3 = \frac{1}{2}\mathbf{R}_1^2\mathbf{U}_1^{\text{el}^{2-1}}\mathbf{U}_1^{\text{el}^{2-1}}\mathbf{R}_1^{2T} \quad (\text{C.16})$$

Grâce aux relations (4.41) et (C.8), nous avons directement (C.10).

## C.3 Implémentation des forces internes

L'implémentation de l'expression (4.24) est décrite dans le cas de la sous-intégration de la pression (1 point de Gauss volumique et 4(8) points de Gauss déviatoriques pour un élément 2D(3D)). Les valeurs se référant au point de Gauss volumique sont notées avec un exposant  $V$  et les valeurs se référant aux points de Gauss déviatoriques sont notées avec un exposant  $D$ . La partie déviatorique d'un tenseur est notée avec l'exposant **dev**.

### C.3.1 Partie volumique

La pression d'un élément est intégrée au point de Gauss volumique pour éviter le "locking" en pression. Dès lors, l'expression des forces internes en ce point devient (avec  $p^V = k \sum_i = 1, 3 \{ \Sigma_{ii}^V \}$ )

$$\begin{aligned} \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi V} &= \frac{1}{4} \int_{V_0} \left\{ [\mathbf{I} + \mathbf{F}_n^{n+1}]^V p^{nV} \mathbf{I} [\mathbf{f}_0^{nT}]^V [\vec{D}^\xi]^V J_0^{nV} \right\} dV_0 + \\ &\quad \frac{1}{4} \int_{V_0} \left\{ [\mathbf{I} + \mathbf{f}_n^{n+1}]^V p^{n+1V} \mathbf{I} [\mathbf{f}_0^{n+1T}]^V [\vec{D}^\xi]^V J_0^{n+1V} \right\} dV_0 \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Pour une sous-intégration à un point de Gauss volumique, il vient

$$\left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi V} = \frac{1}{4} \left\{ [\mathbf{I} + \mathbf{f}_n^{n+1}]^V p^{n+1V} \mathbf{I} [\mathbf{f}_0^{n+1T}]^V [\vec{D}^\xi]^V J_0^{n+1V} \right\} w_g^V V_0 \quad (\text{C.18})$$

où  $w_g$  est le poids du point de Gauss. Cette pression peut également être intégrée sur les points de Gauss déviatoriques (report de pression), ce qui conduit à

$$\left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi V} = \frac{1}{4} \sum_D \left\{ [\mathbf{I} + \mathbf{f}_n^{n+1}]^D p^{n+1V} \mathbf{I} [\mathbf{f}_0^{n+1T}]^D [\vec{D}^\xi]^D J_0^{n+1D} \right\} w_g^D V_0 \quad (\text{C.19})$$

### C.3.2 Partie déviatorique

La partie déviatorique du tenseur des contraintes est exprimée à partir de (4.15) et de (4.21). Il vient

$$\Sigma^{\text{dev}^{n+1}} = \mathbf{R} \left[ \Sigma^{\text{dev}^n} + 2G\mathbf{E}^{\text{dev}} - \mathbf{s}^c \right] \mathbf{R}^T \quad (\text{C.20})$$

et les termes correctifs sont intégrés aux points de Gauss déviatoriques. La force en un tel point s'écrit donc

$$\begin{aligned} \left[ \vec{F}_{int}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi D} &= \frac{1}{4} \int_{V_0} \left\{ [\mathbf{I} + \mathbf{F}_n^{n+1}]^D [\Sigma^{\text{dev}^n} + \mathbf{C}^*]^D [\mathbf{f}_0^{nT}]^D [\vec{D}^\xi]^D J_0^{nD} \right\} dV_0 + \\ &\quad \frac{1}{4} \int_{V_0} \left\{ [\mathbf{I} + \mathbf{f}_n^{n+1}]^D [\Sigma^{\text{dev}^{n+1}} + \mathbf{C}^{**}]^D [\mathbf{f}_0^{n+1T}]^D [\vec{D}^\xi]^D J_0^{n+1D} \right\} dV_0 \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

où les termes correctifs (4.51) sont évalués à partir du travail accompli par les contraintes déviatoriques mais aussi par la pression volumique

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}^* &= \frac{\frac{D_{int}^D}{J_0^{nD}} - \left[ (\boldsymbol{\Sigma}^{\text{dev}^n})^D + p^n V \mathbf{I} \right] : \mathbf{GL}_n^{\text{pl}^{n+1D}}}{\mathbf{GL}_n^{n+1D} : \mathbf{GL}_n^{n+1D}} \mathbf{GL}_n^{n+1D} \\
 \mathbf{C}^{**} &= \frac{\frac{D_{int}^D}{J_0^{n+1D}} - \left[ (\boldsymbol{\Sigma}^{\text{dev}^{n+1}})^D + p^{n+1} V \mathbf{I} \right] : \mathbf{A}_n^{\text{pl}^{n+1D}}}{\mathbf{A}_n^{n+1D} : \mathbf{A}_n^{n+1D}} \mathbf{A}_n^{n+1D} \quad (\text{C.22})
 \end{aligned}$$

Dans cette expression, il faut utiliser la pression volumique car c'est cette dernière qui est intégrée dans (C.18) ou dans (C.19). Dès lors, pour que les relations (4.49) et (4.51) conduisent toujours à la relation (4.50), il faut utiliser la pression volumique pour calculer les tenseurs correctifs. De manière rigoureuse, il faut utiliser la formulation volumique avec report de pression (C.19) pour que la relation (C.22) soit exacte.

Remarquons aussi que les tenseurs plastiques sont évalués à partir des relations (4.42), avec  $\mathbf{U}^{\text{el}}$  calculé à partir des relations (4.38) et (4.40) où les termes ( $\mathbf{E}^{\text{el}}$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{s}^c$ ) sont évalués au point de Gauss  $D$ . En outre, que dans l'étude 2-D en état plan de déformation, l'expression (C.22) est calculée en prenant en compte le fait que les tenseurs  $\boldsymbol{\Sigma}^{\text{dev}}$ ,  $\mathbf{GL}_n^{\text{pl}^{n+1}}$  et  $\mathbf{A}_n^{\text{pl}^{n+1}}$  ont une composante non nulle dans la direction perpendiculaire au plan.

## C.4 La matrice de raideur tangente relative au modèle hypoélastique

La matrice de raideur dérivée des forces internes (4.24) et des forces de dissipation numérique (4.81) est maintenant évaluée.

### C.4.1 Première partie des forces

D'abord l'expression  $\vec{F}_{int}^* + \vec{F}_{diss}^*$  est dérivée par rapport aux positions, au temps  $t^{n+1}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^{*\xi\mu} &= \frac{\partial [\vec{F}_{int}^* + \vec{F}_{diss}^*]^\xi}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \underbrace{\left\{ \frac{\partial \mathbf{F}_n^{n+1}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} [\boldsymbol{\Sigma}^{nT} + \mathbf{C}^* + \mathbf{D}^*] \mathbf{f}_0^{nT} \vec{D}^\xi J_0^n \right\}}_{\mathbf{K}^{*1}} d\mathbb{V}_0 + \\
&\quad \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \underbrace{\left\{ [\mathbf{F}_n^{n+1} + \mathbf{I}] \frac{\partial [\mathbf{C}^* + \mathbf{D}^*]}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} \mathbf{f}_0^{nT} \vec{D}^\xi J_0^n \right\}}_{\mathbf{K}^{*2}} d\mathbb{V}_0
\end{aligned} \tag{C.23}$$

où  $\mathbf{K}^{*1}$  est la partie géométrique et  $\mathbf{K}^{*2}$  la partie matérielle.

#### Obtention de $\mathbf{K}^{*1}$

Avec la relation (4.1) et la relation (4.3), il vient

$$\frac{\partial \mathbf{F}_n^{n+1}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} [\boldsymbol{\Sigma}^{nT} + \mathbf{C}^* + \mathbf{D}^*] = \mathcal{N}^1 \bullet [\vec{B}^n]^\mu \tag{C.24}$$

avec le tenseur du premier ordre  $[\vec{B}^n]^\mu$  défini par  $[\vec{B}^n]^\mu = \mathbf{f}_0^{nT} \vec{D}^\mu$ , avec le tenseur du quatrième ordre  $\mathcal{N}^1$  défini par  $\mathcal{N}_{ijkl}^1 = \mathbf{I}_{ik} [\boldsymbol{\Sigma}_{lj}^n + \mathbf{C}_{jl}^* + \mathbf{D}_{jl}^*]$ , et avec l'opération  $[\vec{B}^n]^\xi \bullet \mathcal{N}^1 \bullet [\vec{B}^n]^\mu$  définie par

$$\mathbf{K}_{ik}^{*1} = \left[ [\vec{B}^n]^\xi \bullet \mathcal{N}^1 \bullet [\vec{B}^n]^\mu \right]_{ik} = [\vec{B}^n]_j^\xi \mathcal{N}_{ijkl}^1 [\vec{B}^n]_l^\mu \tag{C.25}$$

#### Obtention de $\mathbf{K}^{*2}$

Dérivons maintenant  $\mathbf{C}^* + \mathbf{D}^*$

$$\frac{\partial [\mathbf{C}^* + \mathbf{D}^*]}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} = \frac{\partial \left[ \frac{\frac{D_{int} + DW}{J_0^n} - \mathbf{GL}^{p^{n+1}} : \boldsymbol{\Sigma}_n^{n+1}}{\mathbf{GL}_n^{n+1} : \mathbf{GL}_n^{n+1}} \mathbf{GL}_n^{n+1} \right]}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} = \mathbf{C}^* \bullet [\vec{B}^n]^\mu \tag{C.26}$$

**Dérivation de  $\overline{\mathbf{GL}}$**  Pour évaluer  $\mathcal{C}^*$ , nous avons à partir des relations (4.1) et (4.3)

$$\frac{\partial \mathbf{GL}_n^{n+1}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} = \mathcal{C}^{*1} \bullet [\vec{B}^n]^\mu \quad (\text{C.27})$$

avec  $\mathcal{C}^{*1}_{ijkl} = \frac{1}{2} \left[ \delta_{il} \mathbf{F}_n^{n+1}{}_{kj} + \delta_{jl} \mathbf{F}_n^{n+1}{}_{ki} \right]$ .

**Dérivation de  $\frac{1}{\mathbf{GL}:\mathbf{GL}}$**  En utilisant ces résultats, il vient

$$\frac{\partial \left[ \frac{1}{\mathbf{GL}_n^{n+1}:\mathbf{GL}_n^{n+1}} \right] \mathbf{GL}_n^{n+1}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} = \mathcal{C}^{*2} \bullet [\vec{B}^n]^\mu \quad (\text{C.28})$$

avec  $\mathcal{C}^{*2}_{ijkl} = -\frac{2}{[\mathbf{GL}_n^{n+1}:\mathbf{GL}_n^{n+1}]^2} \mathbf{GL}_{ij} [\mathbf{F}_n^{n+1} \mathbf{GL}_n^{n+1}]_{kl}$ .

**Dérivation de  $D_{int} + D_W$**  Supposons que la dérivée de la dissipation interne (dont l'expression dépend du modèle matériau et qui sera évaluée en appendice C.5) s'écrit sous la formulation suivante

$$\frac{\partial D_{int}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} = \mathbf{D}_{int} [\vec{B}^{n+1}]^\mu = \mathbf{D}_{int} \mathbf{f}_n^{n+1T} [\vec{B}^n]^\mu \quad (\text{C.29})$$

Supposons également que la dérivée de la dissipation numérique (dont l'expression sera évaluée en appendice C.6) s'écrit sous la formulation suivante

$$\frac{\partial D_W}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} = \mathbf{D}_W [B^{n+1}]^\mu = \mathbf{D}_W \mathbf{f}_n^{n+1T} [\vec{B}^n]^\mu \quad (\text{C.30})$$

Dès lors, il vient

$$\frac{\partial [D_{int} + D_W]}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} \mathbf{GL}_n^{n+1} = \mathcal{C}^{*3} \bullet [\vec{B}^n]^\mu \quad (\text{C.31})$$

avec  $\mathcal{C}^{*3}_{ijkl} = \mathbf{GL}_{ij} \left[ \mathbf{D}_{int} \mathbf{f}_n^{n+1T} + \mathbf{D}_W \mathbf{f}_n^{n+1T} \right]_{kl}$ .

**Dérivation de  $\mathbf{GL}^{\text{pl}}$**  Pour être capable de dériver le terme  $\mathbf{GL}_n^{\text{pl}^{n+1}}$ , il est tout d'abord décomposé en  $\mathbf{GL}_n^{n+1} - \mathbf{GL}_n^{\text{el}^{n+1}}$ . En utilisant (C.27) et les propriétés de symétrie de  $\Sigma$ , la partie  $\mathbf{GL}_n^{n+1}$  devient

$$-\left[ \frac{\partial \mathbf{GL}_n^{n+1}}{\partial [x^{n+1}]^\mu} : \Sigma^n \right] \mathbf{GL}_n^{n+1} = \mathcal{C}^{*4} \bullet [\vec{B}^n]^\mu \quad (\text{C.32})$$

avec  $\mathcal{C}^{*4}_{ijkl} = -\mathbf{GL}_n^{n+1}{}_{ij} [\mathbf{F}_n^{n+1} \Sigma^n]_{kl}$ . La partie  $\mathbf{GL}_n^{\text{el}^{n+1}}$  est obtenue en utilisant la définition des termes élastiques (4.38-4.41). Avec la définition du tenseur de Hooke

(4.14), la définition de la correction plastique (4.17) et en utilisant le fait que pour de la plasticité  $J2$ , la trace de  $\mathbf{N}^c$  est égale à zéro, il vient

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\text{el}n+1} &= \mathbf{E}_n^{n+1} - \gamma \mathbf{N}^c \\ \frac{1}{2} \ln [2\mathbf{GL}_n^{\text{el}n+1} + \mathbf{I}] &= \frac{1}{2} \ln [2\mathbf{GL}_n^{n+1} + \mathbf{I}] - \gamma^p \mathbf{N}^c \\ \mathbf{GL}_n^{\text{el}n+1} &= \frac{1}{2} \exp \{ \ln [2\mathbf{GL}_n^{n+1} + \mathbf{I}] - 2\gamma^p \mathbf{N}^c \} - \frac{1}{2} \mathbf{I}\end{aligned}\quad (\text{C.33})$$

En supposant que la norme de  $\mathbf{M}$  reste proche de zéro, la dérivée de l'exponentielle d'un tenseur  $\mathbf{M}$  peut être approximée par  $\partial \exp \mathbf{M} \simeq \frac{1}{2} [\partial \mathbf{M} \exp \mathbf{M} + \exp \mathbf{M} \partial \mathbf{M}]$  [105]. Dès lors, il vient

$$\begin{aligned}2 \frac{\partial [\mathbf{GL}_n^{\text{el}n+1}]_{ij}}{\partial [\bar{x}^{n+1}]^\mu} &= \frac{\partial [\ln [2\mathbf{GL}_n^{n+1} + \mathbf{I}] - 2\gamma^p \mathbf{N}^c]_{im}}{\partial [\bar{x}^{n+1}]^\mu} [2\mathbf{GL}_n^{\text{el}n+1} + \mathbf{I}]_{mj} + \\ &[\mathbf{GL}_n^{\text{el}n+1} + \mathbf{I}]_{im} \frac{\partial [\ln [2\mathbf{GL}_n^{n+1} + \mathbf{I}] - 2\gamma^p \mathbf{N}^c]_{mj}}{\partial [\bar{x}^{n+1}]^\mu}\end{aligned}\quad (\text{C.34})$$

Soit  $\bar{\mathcal{M}}$  le tenseur du quatrième ordre défini par

$$\mathbf{R}_n^{n+1} \frac{\partial [\mathcal{H} : \mathbf{E}_n^{n+1} - 2G\gamma^p \mathbf{N}^c]}{\partial [\bar{x}^{n+1}]^\mu} \mathbf{R}_n^{n+1T} = \bar{\mathcal{M}} \bullet [\vec{B}^{n+1}]^\mu = \bar{\mathcal{M}} \bullet \mathbf{f}_n^{n+1T} [\vec{B}^n]^\mu \quad (\text{C.35})$$

et calculé dans l'appendice C.5. En utilisant cette définition, la relation (C.34) peut se réécrire

$$\begin{aligned}2 \frac{\partial [\mathbf{GL}_n^{\text{el}n+1}]_{ij}}{\partial [\bar{x}^{n+1}]^\mu} &= \\ \mathbf{R}_n^{n+1} \text{ }_{pi} [\mathcal{H}^{-1} \bar{\mathcal{M}}] \text{ }_{pqkn} \mathbf{R}_n^{n+1} \text{ }_{qm} [2\mathbf{GL}_n^{\text{el}n+1} + \mathbf{I}] \text{ }_{mj} \mathbf{f}_n^{n+1} \text{ }_{ln} [\vec{B}^n] \text{ }_l^\mu &+ \\ [2\mathbf{GL}_n^{\text{el}n+1} + \mathbf{I}] \text{ }_{im} \mathbf{R}_n^{n+1} \text{ }_{pm} [\mathcal{H}^{-1} \bar{\mathcal{M}}] \text{ }_{pqkn} \mathbf{R}_n^{n+1} \text{ }_{qj} \mathbf{f}_n^{n+1} \text{ }_{ln} [\vec{B}^n] \text{ }_l^\mu &\end{aligned}\quad (\text{C.36})$$

Soit  $\mathbf{C}^5$  la matrice définie par  $\mathbf{R} \Sigma^n \mathbf{U}^{\text{el}2} \mathbf{R}^T$ . En utilisant les propriétés de symétrie de  $\Sigma$ , de  $\mathbf{U}^{\text{el}}$  et du tenseur matériel ( $[\mathcal{H}^{-1} \bar{\mathcal{M}}]_{ijkl} = [\mathcal{H}^{-1} \bar{\mathcal{M}}]_{jikl}$ ), la relation (C.36) devient

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{GL}_n^{\text{el}n+1}}{\partial [x^{n+1}]^\mu} : \Sigma^n \right] \mathbf{GL}_n^{n+1} = \mathbf{C}^{*5} \bullet [\vec{B}^n]^\mu \quad (\text{C.37})$$

avec  $\mathbf{C}^{*5}_{ijkl} = \mathbf{GL}_n^{n+1} \text{ }_{ij} \{ \mathbf{C}^5 : [\mathcal{H}^{-1} \bar{\mathcal{M}}] \} \text{ }_{kn} \mathbf{f}_n^{n+1} \text{ }_{ln}$ , où  $[\mathbf{M} : \mathcal{H}]_{kl}$  est égale à  $\mathbf{M}_{ij} \mathcal{H}_{ijkl}$ .

**Grouperment des termes** Finalement, le tenseur  $\mathcal{C}^*$  défini dans la relation (C.26) s'écrit, en utilisant les relations (C.27), (C.28), (C.31), (C.32) et (C.37)

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^* = & \left[ \frac{\frac{D_{int} + D_W}{J_0^n} - \mathbf{GL}^{\mathbf{pl}^{n+1}} : \Sigma^n}{\mathbf{GL}_n^{n+1} : \mathbf{GL}_n^{n+1}} \right] \mathcal{C}^{*1} + \left[ \frac{D_{int} + D_W}{J_0^n} - \mathbf{GL}^{\mathbf{pl}^{n+1}} : \Sigma^n \right] \mathcal{C}^{*2} + \\ & \left[ \frac{1}{J_0^n \mathbf{GL}_n^{n+1} : \mathbf{GL}_n^{n+1}} \right] \mathcal{C}^{*3} + \left[ \frac{1}{\mathbf{GL}_n^{n+1} : \mathbf{GL}_n^{n+1}} \right] \mathcal{C}^{*4} + \\ & \left[ \frac{1}{\mathbf{GL}_n^{n+1} : \mathbf{GL}_n^{n+1}} \right] \mathcal{C}^{*5} \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

### Obtention de $\mathbf{K}^*$

Finalement, en utilisant la relation (C.24) et la relation (C.26), l'expression (C.23) devient

$$\mathbf{K}^{*\xi\mu} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ \left[ \vec{B}^n \right]^\xi \bullet \mathcal{K}^* \bullet \left[ \vec{B}^n \right]^\mu J_0^n \right\} d\mathbb{V}_0 \quad (\text{C.39})$$

avec  $\mathcal{K}^*_{ijkl}$  défini par  $\mathcal{N}_{ijkl}^1 + [\mathbf{F}_n^{n+1} + \mathbf{I}]_{im} \mathcal{C}^*_{mjkl}$ .

### C.4.2 Deuxième partie des forces

Maintenant l'expression  $\vec{F}_{int}^{**}$  est dérivée par les positions au temps  $t^{n+1}$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{**\xi\mu} = & \frac{\partial \left[ \vec{F}_{int}^{**} + \vec{F}_{diss}^{**} \right]^\xi}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} \\ = & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \underbrace{\left\{ \frac{\partial \mathbf{f}_n^{n+1}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} \left[ \Sigma^{n+1T} + \mathbf{C}^{**} + \mathbf{D}^{**} \right] \mathbf{f}_0^{n+1T} \vec{D}^\xi J_0^{n+1} \right\}}_{\mathbf{K}^{**1}} d\mathbb{V}_0 + \\ & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \underbrace{\left\{ \left[ \mathbf{f}_n^{n+1} + \mathbf{I} \right] \frac{\partial \Sigma^{n+1T}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} \mathbf{f}_0^{n+1T} \vec{D}^\xi J_0^{n+1} \right\}}_{\mathbf{K}^{**2}} d\mathbb{V}_0 + \\ & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \underbrace{\left\{ \left[ \mathbf{f}_n^{n+1} + \mathbf{I} \right] \frac{\partial [\mathbf{C}^{**} + \mathbf{D}^{**}]}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} \mathbf{f}_0^{n+1T} \vec{D}^\xi J_0^{n+1} \right\}}_{\mathbf{K}^{**3}} d\mathbb{V}_0 + \\ & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \underbrace{\left\{ \left[ \mathbf{f}_n^{n+1} + \mathbf{I} \right] \left[ \Sigma^{n+1T} + \mathbf{C}^{**} + \mathbf{D}^{**} \right] \frac{\partial \left[ \mathbf{f}_0^{n+1T} \vec{D}^\xi J_0^{n+1} \right]}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} \right\}}_{\mathbf{K}^{**4}} d\mathbb{V}_0 \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

**Obtention de  $\mathbf{K}^{**1}$** 

La première partie de la relation (C.40) est d'abord évaluée. Avec la relation  $\partial \mathbf{f} = -\mathbf{f} \partial \mathbf{F} \mathbf{f}$  et en utilisant les relations (4.1) et (4.3), il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}_n^{n+1}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} \left[ \Sigma^{n+1T} + \mathbf{C}^{**} + \mathbf{D}^{**} \right] &= -\mathbf{F}_0^n \mathbf{f}_0^{n+1} \frac{\partial \mathbf{F}_0^{n+1}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} \mathbf{f}_0^{n+1} \left[ \Sigma^{n+1T} + \mathbf{C}^{**} + \mathbf{D}^{**} \right] \\ &= \mathcal{N}^2 \bullet \left[ \vec{B}^{n+1} \right]^\mu \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

avec  $\mathcal{N}_{ijkl}^2 = -[\mathbf{f}_n^{n+1}]_{ik} [\Sigma_{lj}^{n+1} + \mathbf{C}^{**}_{jl} + \mathbf{D}^{**}_{jl}]$ .

**Obtention de  $\mathbf{K}^{**2}$** 

La seconde partie de la relation (C.40) est évaluée à partir de la dérivée de  $\Sigma^{n+1}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma^{n+1}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} &= \frac{\partial \left[ \mathbf{R}_n^{n+1} \Sigma^{cn+1} \mathbf{R}_n^{n+1T} \right]}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} \\ &= \mathbf{R}_n^{n+1} \frac{\partial \Sigma^{cn+1}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} \mathbf{R}_n^{n+1T} + \frac{\partial \mathbf{R}_n^{n+1}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} \mathbf{R}_n^{n+1T} \Sigma^{n+1} + \Sigma^{n+1} \mathbf{R}_n^{n+1} \frac{\partial \mathbf{R}_n^{n+1T}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

En utilisant la définition de  $\bar{\mathcal{M}}$  (C.35), il vient

$$\mathbf{R}_n^{n+1} \frac{\partial \Sigma^{cn+1}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} \mathbf{R}_n^{n+1T} = \mathbf{R}_n^{n+1} \frac{\partial [\mathcal{H} : \mathbf{E}_n^{n+1} - 2g\gamma \mathbf{N}^c]}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} \mathbf{R}_n^{n+1T} = \bar{\mathcal{M}} \bullet \left[ \vec{B}^{n+1} \right]^\mu \quad (\text{C.43})$$

De plus, nous avons [123, 107]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_n^{n+1}}{\partial [x^{n+1}]^\mu} \mathbf{R}_n^{n+1T} &\simeq \mathcal{J}^1 \bullet \left[ \vec{B}^{n+1} \right]^\mu \\ \mathbf{R}_n^{n+1} \frac{\partial \mathbf{R}_n^{n+1T}}{\partial [x^{n+1}]^\mu} &\simeq -\mathcal{J}^1 \bullet \left[ \vec{B}^{n+1} \right]^\mu \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

avec  $\mathcal{J}^1 = \frac{1}{2} [\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}]$ . Dès lors, en appelant  $\mathcal{J}(\mathbf{M})$  le tenseur de Jaumann

$$[\mathcal{J}(\mathbf{M})]_{ijkl} = \frac{1}{2} [\mathbf{M}_{il} \delta_{jk} - \mathbf{M}_{ik} \delta_{jl} + \mathbf{M}_{jl} \delta_{ik} - \mathbf{M}_{kj} \delta_{il}] \quad (\text{C.45})$$

la relation (C.42) se réécrit (en utilisant les relations (C.43) et (C.44))

$$\frac{\partial \Sigma^{n+1}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} = [\bar{\mathcal{M}} + \mathcal{J}(\Sigma^{n+1})] \bullet \left[ \vec{B}^{n+1} \right]^\mu \quad (\text{C.46})$$

Remarquons que pour l'implémentation décrite dans l'appendice C.3, ce terme est décomposé en un tenseur relatif au point de Gauss volumique (pression), et en un tenseur relatif au point de Gauss déviatorique (contrainte déviatorique). Dès lors, le vecteur  $\vec{B}$  dépend du point de Gauss auquel le tenseur se rapporte.

**Obtention de  $\mathbf{K}^{**3}$** 

Maintenant la troisième partie de la relation (C.40) est développée. Nous avons

$$\frac{\partial [\mathbf{C}^{**} + \mathbf{D}^{**}]}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} = \frac{\partial \left[ \frac{\frac{D_{int} + D_W - \mathbf{A} \mathbf{P}_n^{n+1} : \Sigma^{n+1}}{J_0^{n+1}}}{\mathbf{A}_n^{n+1} : \mathbf{A}_n^{n+1}} \mathbf{A}_n^{n+1} \right]}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} = \mathcal{C}^{**} \bullet [\vec{B}^{n+1}]^\mu \quad (\text{C.47})$$

Evaluons  $\mathcal{C}^{**}$ .

**Dérivation de  $\mathbf{A}$**  Avec les relations (4.1) et (4.3), il vient

$$\frac{\partial \mathbf{A}_n^{n+1}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} = \mathcal{C}^{**1} \bullet [\vec{B}^{n+1}]^\mu \quad (\text{C.48})$$

avec  $\mathcal{C}^{**1}_{ijkl} = \frac{1}{2} [\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl} - 2\delta_{il} \mathbf{A}_{jk} - 2\delta_{jl} \mathbf{A}_{ik}]$ .

**Dérivation de  $\mathbf{A} : \mathbf{A}$**  En utilisant ces résultats

$$\frac{\partial \left[ \frac{1}{\mathbf{A}_n^{n+1} : \mathbf{A}_n^{n+1}} \right] \mathbf{A}_n^{n+1}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} = \mathcal{C}^{**2} \bullet [\vec{B}^{n+1}]^\mu \quad (\text{C.49})$$

avec  $\mathcal{C}^{**2}_{ijkl} = -\frac{2}{[\mathbf{A}_n^{n+1} : \mathbf{A}_n^{n+1}]^2} \mathbf{A}_{ij} [\mathbf{A} - 2\mathbf{A}^2]_{kl}$ .

**Dérivation de  $D_{int} + D_W$**  A partir de la définition de  $\mathbf{D}_{int}$  (C.29) et de la définition de  $\mathbf{D}_W$  (C.30), il vient

$$\frac{\partial [D_{int} + D_W]}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} \mathbf{A}_n^{n+1} = \mathcal{C}^{**3} \bullet [\vec{B}^{n+1}]^\mu \quad (\text{C.50})$$

avec  $\mathcal{C}^{**3}_{ijkl} = \mathbf{A}_{ij} [\mathbf{D}_{int} + \mathbf{D}_W]_{kl}$ .

**Dérivation du Jacobien** De plus, nous avons

$$\frac{\partial \left[ \frac{1}{J_0^{n+1}} \right]}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} \mathbf{A}_n^{n+1} = \mathcal{C}^{**4} \bullet [\vec{B}^{n+1}]^\mu \quad (\text{C.51})$$

avec  $\mathcal{C}^{**4}_{ijkl} = -\frac{1}{J_0^{n+1}} \mathbf{A}_{ij} \delta_{kl}$ .

**Dérivation de  $\mathbf{A}^{\text{pl}}$**  Pour dériver le terme  $\mathbf{A}^{\text{pl}n+1}$ , il est décomposé en  $\mathbf{A}_n^{n+1} - \mathbf{A}_n^{\text{el}n+1}$ . En utilisant (C.48) et les propriétés de symétrie de  $\Sigma$ , la partie  $\mathbf{A}_n^{n+1}$  devient

$$-\left[\frac{\partial \mathbf{A}_n^{n+1}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} : \Sigma^{n+1}\right] \mathbf{A}_n^{n+1} = \mathcal{C}^{**5} \bullet [\vec{B}^{n+1}]^\mu \quad (\text{C.52})$$

avec (en utilisant la symétrie de  $\Sigma$ )  $\mathcal{C}^{**5}_{ijkl} = -\mathbf{A}_n^{n+1}{}_{ij} [\Sigma^{n+1} - 2\mathbf{A}\Sigma^{n+1}]_{kl}$ . La partie  $\mathbf{A}_n^{\text{el}n+1}$  est obtenue à partir des définitions (4.38-4.41). Avec la définition de  $\mathcal{J}(\mathbf{M})$  (C.45) il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}_n^{\text{el}n+1}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{R}_n^{n+1} \mathbf{U}_n^{\text{el}n+1-2} \mathbf{R}_n^{n+1T}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} \\ &= \mathcal{J}(\mathbf{A}^{\text{el}}) \bullet [\vec{B}^{n+1}]^\mu - \frac{1}{2} \mathbf{R}_n^{n+1} \frac{\partial \mathbf{U}_n^{\text{el}n+1-2}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} \mathbf{R}_n^{n+1T} \\ &= \mathcal{J}(\mathbf{A}^{\text{el}}) \bullet [\vec{B}^{n+1}]^\mu + \frac{1}{2} \mathbf{R}_n^{n+1} \mathbf{U}_n^{\text{el}n+1-2} \frac{\partial \mathbf{U}_n^{\text{el}n+1-2}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} \mathbf{U}_n^{\text{el}n+1-2} \mathbf{R}_n^{n+1T} \\ &= \mathcal{J}(\mathbf{A}^{\text{el}}) \bullet [\vec{B}^{n+1}]^\mu + \mathbf{R}_n^{n+1} \mathbf{U}_n^{\text{el}n+1-2} \frac{\partial \mathbf{G}\mathbf{L}_n^{\text{el}n+1}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} \mathbf{U}_n^{\text{el}n+1-2} \mathbf{R}_n^{n+1T} \quad (\text{C.53}) \end{aligned}$$

La relation (C.36) peut se réécrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\mathbf{G}\mathbf{L}_n^{\text{el}n+1}]}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} &= \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{R}_n^{n+1T} [\mathcal{H}^{-1} \bar{\mathcal{M}}] \mathbf{R}_n^{n+1} \mathbf{U}_n^{\text{el}n+1-2} + \mathbf{U}_n^{\text{el}n+1-2} \mathbf{R}_n^{n+1T} [\mathcal{H}^{-1} \bar{\mathcal{M}}] \mathbf{R}_n^{n+1} \right\} \\ &\quad \bullet [\vec{B}^{n+1}]^\mu \quad (\text{C.54}) \end{aligned}$$

En combinant les relations (C.53) et (C.54), il vient

$$\frac{\partial \mathbf{A}_n^{\text{el}n+1}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} = \left\{ \mathcal{J}(\mathbf{A}^{\text{el}}) + [\mathcal{H}^{-1} \bar{\mathcal{M}}] - [\mathbf{A}^{\text{el}} [\mathcal{H}^{-1} \bar{\mathcal{M}}] + [\mathcal{H}^{-1} \bar{\mathcal{M}}] \mathbf{A}^{\text{el}}] \right\} \bullet [\vec{B}^{n+1}]^\mu \quad (\text{C.55})$$

En définissant  $\mathbf{C}^{**6}_{ij} = \Sigma^{n+1}{}_{mn} \mathcal{J}(\mathbf{A}^{\text{el}})_{mni} + [\Sigma^{n+1} - 2\mathbf{A}_n^{\text{el}n+1} \Sigma^{n+1}]_{mn} [\mathcal{H}^{-1} \bar{\mathcal{M}}]_{mni}$ , et en utilisant les propriétés de symétrie de  $\Sigma$ ,  $\mathbf{A}^{\text{el}}$  et  $\mathcal{H}^{-1} \bar{\mathcal{M}}$ , la relation (C.55) conduit à

$$\left[\frac{\partial \mathbf{A}_n^{\text{el}n+1}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} : \Sigma^{n+1}\right] \mathbf{A}_n^{n+1} = \mathcal{C}^{**6} \bullet [\vec{B}^{n+1}]^\mu \quad (\text{C.56})$$

avec  $\mathcal{C}^{**6}_{ijkl} = \mathbf{A}_{ij} \mathbf{C}^{**6}_{kl}$ .

**Dérivation de  $\Sigma^{n+1}$**  Le dernier terme de l'expression (C.47), est directement obtenu de la relation (C.46)

$$-\left[\frac{\partial \Sigma^{n+1}}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} : \mathbf{A}^{\mathbf{pl}^{n+1}}\right] \mathbf{A}_n^{n+1} = \mathcal{C}^{**7} \bullet [\vec{B}^{n+1}]^\mu \quad (\text{C.57})$$

avec  $\mathcal{C}^{**7}_{ijkl} = -\mathbf{A}_{ij} \mathbf{A}^{\mathbf{pl}}_{mn} [\mathcal{J}(\Sigma^{n+1}) + \bar{\mathcal{M}}]_{mnkl}$ .

**Grouperment des termes** Finalement, en utilisant les relations (C.48) à (C.52), ainsi que les relations (C.56) et (C.57), le tenseur  $\mathcal{C}^{**}$  défini dans la relation (C.47) devient

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{**} = & \left[ \frac{D_{int} + D_W}{J_0^{n+1}} - \mathbf{A}^{\mathbf{pl}^{n+1}} : \Sigma^{n+1} \right] \mathcal{C}^{**1} + \left[ \frac{D_{int} + D_W}{J_0^{n+1}} - \mathbf{A}^{\mathbf{pl}^{n+1}} : \Sigma^{n+1} \right] \mathcal{C}^{**2} + \\ & \left[ \frac{1}{J_0^{n+1} \mathbf{A}_n^{n+1} : \mathbf{A}_n^{n+1}} \right] \mathcal{C}^{**3} + \left[ \frac{D_{int} + D_W}{\mathbf{A}_n^{n+1} : \mathbf{A}_n^{n+1}} \right] \mathcal{C}^{**4} + \\ & \left[ \frac{1}{\mathbf{A}_n^{n+1} : \mathbf{A}_n^{n+1}} \right] \mathcal{C}^{**5} + \left[ \frac{1}{\mathbf{A}_n^{n+1} : \mathbf{A}_n^{n+1}} \right] \mathcal{C}^{**6} + \left[ \frac{1}{\mathbf{A}_n^{n+1} : \mathbf{A}_n^{n+1}} \right] \mathcal{C}^{**7} \quad (\text{C.58}) \end{aligned}$$

**Obtention de  $\mathbf{K}^{**4}$**

Et enfin, le quatrième terme de la relation (C.40) est facilement obtenu par

$$\frac{\partial \left[ \mathbf{f}_0^{n+1 T} \vec{D}^\xi J_0^{n+1} \right]_i}{\partial [\vec{x}^{n+1}]_k^\mu} = [\vec{B}^{n+1}]_j^\xi [-\delta_{jk} \delta_{il} + \delta_{ij} \delta_{kl}] [\vec{B}^{n+1}]_l^\mu J_0^{n+1} \quad (\text{C.59})$$

**Obtention de  $\mathbf{K}^{**}$**

Dès lors, si nous définissons  $\mathcal{G}(\mathbf{M})$ , le tenseur géométrique, tel que

$$\mathcal{G}(\mathbf{M}) = -\mathbf{M}_{il} \delta_{jk} + \mathbf{M}_{ij} \delta_{kl} \quad (\text{C.60})$$

et grâce aux relations (C.41), (C.46), (C.47) et (C.59), nous pouvons réécrire la relation (C.40) comme étant

$$\mathbf{K}^{**\xi\mu} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ [\vec{B}^{n+1}]^\xi \bullet \mathcal{K}^{**} \bullet [\vec{B}^{n+1}]^\mu J_0^{n+1} \right\} d\mathbb{V}_0 \quad (\text{C.61})$$

avec

$$\mathcal{K}^{**}_{ijkl} = \mathcal{N}_{ijkl}^2 + [\mathbf{f}_n^{n+1} + \mathbf{I}]_{im} [\bar{\mathcal{M}} + \mathcal{J}(\Sigma^{n+1}) + \mathcal{C}^{**} + \mathcal{G}(\Sigma^{n+1} + \mathbf{C}^{**} + \mathbf{D}^{**})]_{mjkl} \quad (\text{C.62})$$

### C.4.3 Obtention de $\mathbf{K}$

L'expression finale de la matrice de raideur est obtenue par la relation (C.39) et par la relation (C.61)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}^{\xi\mu} &= \frac{\partial [\vec{F}_{int}]^\xi}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} \\
 &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{V}_0} \left\{ [\vec{B}^n]^\xi \bullet \mathcal{K}^* \bullet [\vec{B}^n]^\mu J_0^n + [\vec{B}^{n+1}]^\xi \bullet \mathcal{K}^{**} \bullet [\vec{B}^{n+1}]^\mu J_0^{n+1} \right\} d\mathbb{V}_0
 \end{aligned}
 \tag{C.63}$$

Remarquons que cette matrice est non-symétrique. Néanmoins, c'est toujours le cas pour une formulation classique utilisant une dérivée de Jaumann puisque la relation (C.45) donne un tenseur non-symétrique. Dans l'hypothèse où le modèle hypoélastique envisagé utiliserait les contraintes de Kirchhoff et non de Cauchy, le terme de Jaumann disparaîtrait, et enlèverait une partie de la non-symétrie. Cependant, le fait que le tenseur  $\bar{\mathcal{M}}$  soit multiplié par  $\mathbf{f}$  dans l'expression (C.62) maintiendrait une non symétrie.

## C.5 Dérivation des tenseurs matériels

### C.5.1 Dérivation des contraintes

Le tenseur  $\bar{\mathcal{M}}$  défini dans la relation (C.35) vaut [107, 124]

$$\bar{\mathcal{M}}_{ijkl} = k\delta_{ij}\delta_{kl} + g^* \left[ \delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} - 2\mu^* \mathbf{N}_{ij} \mathbf{N}_{kl} \right] \quad (\text{C.64})$$

avec  $g^* = \beta G$  et

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Sigma^{v,n+1} + \alpha^{\bar{n}+1} - \bar{\alpha}^{\bar{n}}}{\sqrt{[\mathbf{s}^e - \boldsymbol{\alpha}] : [\mathbf{s}^e - \boldsymbol{\alpha}]}} \\ \mu^* &= \frac{g^*}{1 + \frac{h}{3g^* + [\beta-1]h}} \\ h &= \frac{\partial \Sigma^{v,n+1}}{\partial \varepsilon^p} \end{aligned} \quad (\text{C.65})$$

Le paramètre  $\beta$  de cette dernière relation représente la norme du rayon de la surface de charge finale, divisée par la norme du rayon de la surface définie par le prédicteur élastique.

Remarquons que

$$\mathcal{H}_{ijmn}^{-1} \bar{\mathcal{M}}_{mnlk} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta \left[ \frac{1}{2}\delta_{il}\delta_{jk} + \frac{1}{2}\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} - \mu^* \mathbf{N}_{ij} \mathbf{N}_{kl} \right] \quad (\text{C.66})$$

### C.5.2 Dérivation de la dissipation interne

Pour obtenir le tenseur  $\mathbf{D}_{\text{int}}$  défini dans la relation (C.29), nous avons dérivé la relation (4.58)

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{\text{int}}}{\partial [\bar{x}^{n+1}]^\mu} &= \frac{1}{2} \left\{ [\Sigma_v^{n+1} + \bar{\alpha}^{n+1}] J_0^{n+1} + [\Sigma_v^n + \bar{\alpha}^n] J_0^n \right\} \frac{\partial \varepsilon_n^{pn+1}}{\partial [\bar{x}^{n+1}]^\mu} + \\ &\frac{1}{2} \left[ h \varepsilon_n^{pn+1} + \bar{\alpha}^{n+1} - \bar{\alpha}^n \right] J_0^{n+1} \frac{\partial \varepsilon_n^{pn+1}}{\partial [\bar{x}^{n+1}]^\mu} + \\ &\frac{1}{2} \left[ \Sigma_v^{n+1} + \bar{\alpha}^{n+1} \right] \varepsilon_n^{pn+1} \frac{\partial J_0^{n+1}}{\partial [\bar{x}^{n+1}]^\mu} \end{aligned} \quad (\text{C.67})$$

avec [107, 124]

$$\frac{\partial \varepsilon_n^{pn+1}}{\partial [\bar{x}^{n+1}]^\mu} = \sqrt{\frac{2}{3}} [\mu^* (\beta - 1) + 1] \mathbf{N} \left[ \bar{\mathbf{B}}^{n+1} \right]^\mu \quad (\text{C.68})$$

et avec

$$\frac{\partial J_0^{n+1}}{\partial [\bar{x}^{n+1}]^\mu} = J_0^{n+1} \mathbf{I} \left[ \bar{\mathbf{B}}^{n+1} \right]^\mu \quad (\text{C.69})$$

Dès lors, il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\text{int}} = & \frac{1}{2} \{ [\Sigma_v^{n+1} + \bar{\alpha}^{n+1} + (h\varepsilon_n^{p^{n+1}} + \bar{\alpha}^{n+1} - \bar{\alpha}^n)] J_0^{n+1} + [\Sigma_v^n + \bar{\alpha}^n] J_0^n \} \\ & \sqrt{\frac{2}{3}} [\mu^* (\beta - 1) + 1] \mathbf{N} + \frac{1}{2} [\Sigma_v^{n+1} + \bar{\alpha}^{n+1}] J_0^{n+1} \mathbf{I} \end{aligned} \quad (\text{C.70})$$

## C.6 Dérivation de la dissipation numérique

### C.6.1 Dérivation des vitesses de dissipation du premier ordre

Calculons dans un premier temps le tenseur  $\mathbf{G}(\dot{x}^\mu)$ , dérivée de  $\vec{G}_{diss}$  par rapport à la vitesse  $\dot{x}^{n+1}$  utilisé dans l'équation (B.10) de la section (B.1.3). L'expression de  $\vec{G}_{diss}$  est tirée de la relation (4.80). Comme, la valeur de  $\vec{G}_{diss}$  en un nœud ne dépend que de la vitesse en ce nœud, nous dérivons directement par rapport à la vitesse en ce nœud, et nous omettons les indice  $\mu$ , en considérant implicitement que toutes les valeurs calculées se rapportent en ce nœud. Il vient alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}(\dot{x}) &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}^{n+1}} \vec{G}_{diss}^{n+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\chi}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^{n+1}} \left\{ \frac{\left\| \dot{x}^{n+1} \right\| - \left\| \dot{x}^n \right\|}{\left\| \dot{x}^{n+1} \right\| + \left\| \dot{x}^n \right\|} \left[ \dot{x}^{n+1} + \dot{x}^n \right] \right\} \\
&= \frac{\chi}{2} \frac{\partial \left\{ \frac{\left\| \dot{x}^{n+1} \right\| - \left\| \dot{x}^n \right\|}{\left\| \dot{x}^{n+1} \right\| + \left\| \dot{x}^n \right\|} \right\}}{\partial \dot{x}^{n+1}} \left[ \dot{x}^{n+1} + \dot{x}^n \right] + \frac{\chi}{2} \frac{\partial \left[ \dot{x}^{n+1} + \dot{x}^n \right]}{\partial \dot{x}^{n+1}} \frac{\left\| \dot{x}^{n+1} \right\| - \left\| \dot{x}^n \right\|}{\left\| \dot{x}^{n+1} \right\| + \left\| \dot{x}^n \right\|}
\end{aligned} \tag{C.71}$$

En utilisant le fait que  $\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{a(x)-c}{a(x)+c} \right\} = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{2c}{[a+c]^2}$  et en utilisant la relation

$$\frac{\partial \left\| \dot{x} \right\|}{\dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\left\| \dot{x} \right\|} \tag{C.72}$$

la relation (C.71) devient

$$\mathbf{G}(\dot{x}) = \chi \frac{\left\| \dot{x}^n \right\|}{\left\| \dot{x}^{n+1} \right\| \left[ \left\| \dot{x}^{n+1} \right\| + \left\| \dot{x}^n \right\| \right]^2} \left[ \dot{x}^{n+1} + \dot{x}^n \right] \otimes \dot{x}^{n+1} + \frac{\chi}{2} \frac{\left\| \dot{x}^{n+1} \right\| - \left\| \dot{x}^n \right\|}{\left\| \dot{x}^{n+1} \right\| + \left\| \dot{x}^n \right\|} \mathbf{I} \tag{C.73}$$

### C.6.2 Dérivation du potentiel de dissipation du premier ordre

Nous pouvons maintenant calculer  $\mathbf{D}_W$ , dérivée de  $D_W$  par rapport aux positions  $\bar{x}^{n+1}$  utilisé dans l'équation (C.30). A partir de (4.75), il vient

$$\frac{\partial D_W}{\partial [\bar{x}^{n+1}]^\mu} = \frac{\chi}{2} \mathbf{E}_n^{el^{n+1}} : \mathcal{H} : \frac{\partial \mathbf{E}_n^{el^{n+1}}}{\partial [\bar{x}^{n+1}]^\mu} J_0^n + \frac{\chi}{2} \frac{\partial \mathbf{E}_n^{el^{n+1}}}{\partial [\bar{x}^{n+1}]^\mu} : \mathcal{H} : \mathbf{E}_n^{el^{n+1}} J_0^n \tag{C.74}$$

Grâce aux propriétés de symétrie de  $\mathcal{H}$  ( $\mathcal{H}_{ijkl} = \mathcal{H}_{klij}$ ), et en utilisant la définition du tenseur matériel (C.35), la relation (C.74) devient

$$\frac{\partial D_W}{\partial [\vec{x}^{n+1}]^\mu} = \chi \left[ \mathbf{R}_n^{n+1} \mathbf{E}_n^{\text{el}^{n+1}} \mathbf{R}_n^{n+1T} \right] : \bar{\mathcal{M}} J_0^n \left[ \vec{B}^{n+1} \right]^\mu \quad (\text{C.75})$$

Et finalement, l'expression de  $\mathbf{D}_W$  devient

$$\mathbf{D}_W = \chi \left[ \mathbf{R}_n^{n+1} \mathbf{E}_n^{\text{el}^{n+1}} \mathbf{R}_n^{n+1T} \right] : \bar{\mathcal{M}} J_0^n \quad (\text{C.76})$$



# Appendice D

## Annexes relatives au chapitre 5

### D.1 La matrice de raideur tangente relative au contact

Soient les forces de contact normales (5.72) et (5.73). Soient les forces de frottement (5.93). Une expression de la matrice de raideur qui en dérive, a été exprimée par Armero et Petöcz [3,4]. Dans notre formalisme, nous avons choisi de rendre la normale continue dans le cas du contact faisant intervenir des entités maillées entre elles (*c.f.* appendice D.2). Dès lors, l'expression analytique de la matrice tangente devient fort complexe (dans l'établissement de son expression analytique, mais aussi dans le nombre d'opérations numériques nécessaires à son évaluation). Nous choisissons alors d'utiliser une matrice de raideur numérique. Par contre, pour le cas où le contact se produit avec une matrice rigide, une matrice de raideur peut aisément être déduite analytiquement et évaluée lors de la résolution numérique.

#### D.1.1 Matrice de raideur relative aux forces normales conservatives

Soit l'expression (5.72) des forces normales conservatives de contact, mais l'expression implémentée est l'expression (5.108). Etant donné que les forces sont relatives au seul nœud esclave  $\xi$ , nous omettons les exposants relatifs au nœud. De plus, nous omettons les exposants  $c$  relatifs à la continuité. La matrice de raideur s'obtient par

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_N &= \frac{\partial \left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]_N}{\partial \vec{x}^{n+1}} \\ &= \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \otimes \frac{\partial t_N(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} + t_N(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \frac{\partial \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} \\ &= \frac{\partial t_N(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial g_d^{n+1}} \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \otimes \frac{\partial g_d^{n+1}}{\partial \vec{x}^{n+1}} + t_N(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \frac{\partial \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Grâce à (5.71), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_N(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial g_d^{n+1}} &= \frac{t_N(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) - \frac{\partial U(g)}{\partial g} (g_d^{n+1})}{g_d^{n+1} - g_d^n} \text{ si } g_d^{n+1} \neq g_d^n \\ &= -\frac{\partial^2 U(g)}{\partial g^2} (g_d^{n+1}) \text{ si } g_d^{n+1} = g_d^n \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

La relation (5.107) permet d'exprimer la dérivée du gap normal

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_d^{n+1}}{\partial \vec{x}^{n+1}} &= \left[ \frac{\partial \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} \right]^T [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n] + \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) - \\ &\quad \left[ \frac{\partial \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} \right]^T [\vec{y}^{n+1}(u^{n+\frac{1}{2}}) - \vec{y}^n(u^{n+\frac{1}{2}})] - \\ &\quad \left[ \frac{\partial [\vec{y}^{n+1}(u^{n+\frac{1}{2}}) - \vec{y}^n(u^{n+\frac{1}{2}})]}{\partial \vec{x}^{n+1}} \right]^T \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Si le mouvement de la surface est une translation (pour que la direction de la normale en  $t^n$ ,  $t^{n+\frac{1}{2}}$  et  $t^{n+1}$  soit identique), le dernier terme de cette équation s'annule puisque la normale est perpendiculaire à la dérivée de la surface

$$\begin{aligned} &\frac{\partial [\vec{y}_i^{n+1}(u^{n+\frac{1}{2}}) - \vec{y}_i^n(u^{n+\frac{1}{2}})]}{\partial \vec{x}_j^{n+1}} \vec{n}_i(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) = \\ &\underbrace{\frac{\partial [\vec{y}_i^{n+1}(u) - \vec{y}_i^n(u)]}{\partial u_k} (u^{n+\frac{1}{2}})}_{=0} \vec{n}_i(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \frac{\partial u_k^{n+\frac{1}{2}}}{\partial \vec{x}_j^{n+1}} \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Dans le cas où la matrice rigide subit des rotations, ce terme devrait être pris en compte. En groupant (D.2), (D.3) et (D.4), la relation (D.1) se décompose en une partie matérielle et en une partie géométrique

$$\mathbf{K}_N = [\mathbf{K}_{mat}]_N + [\mathbf{K}_{geo}]_N \quad (\text{D.5})$$

avec (en l'absence de rotation de la surface maître)

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{geo}]_N &= \frac{\partial t_N(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial g_d^{n+1}} \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \otimes \\ &\quad \left[ \frac{\partial \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} \right]^T [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n - \vec{y}^{n+1}(u^{n+\frac{1}{2}}) + \vec{y}^n(u^{n+\frac{1}{2}})] + \\ &\quad t_N(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \frac{\partial \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

une matrice qui dépend de la forme de la surface maître. Pour une droite ou un plan en translation, ce terme est nul car la dérivée de la normale est nulle. Nous supposons en plus que la courbure de la surface reste suffisamment faible pour négliger ce terme qui est d'une importance seconde par rapport à  $\mathbf{K}_{mat}$ . Puisque nous négligeons le terme géométrique, nous négligeons aussi le terme (D.4) même dans le cas où il y a une rotation rigide (car même ordre de grandeur). Nous supposons donc par la suite qu'il n'y a pas de rotation rigide et que le mouvement de la matrice est donc une translation. Le terme matériel est évalué par

$$[\mathbf{K}_{mat}]_N = \frac{\partial t_N(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial g_d^{n+1}} \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \otimes \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \quad (\text{D.7})$$

avec  $\frac{\partial t_N(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial g_d^{n+1}}$  obtenu par l'expression (D.2).

### D.1.2 Matrice de raideur relative aux forces normales de dissipation

Soit l'expression (5.73) des forces normales de dissipation. L'expression implémentée est l'expression (5.109). En procédant exactement comme à la section précédente, nous arrivons directement au résultat

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_D &= \frac{\partial \vec{F}_{cont/diss}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial \vec{x}^{n+1}} \\ &= [\mathbf{K}_{mat}]_D + [\mathbf{K}_{geo}]_D \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

avec

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{geo}]_D &= -\chi \left[ \frac{\frac{\partial U}{\partial g} (g_d^{n+1} - g_d^n) - \frac{U(g_d^{n+1} - g_d^n)}{g_d^{n+1} - g_d^n}}{g_d^{n+1} - g_d^n} \right] \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \otimes \\ &\quad \left[ \frac{\partial \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} \right]^T \left[ \vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n - \vec{y}^{n+1} \left( u^{n+\frac{1}{2}} \right) + \vec{y}^n \left( u^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] \\ &\quad - \chi \frac{U (g_d^{n+1} - g_d^n)}{g_d^{n+1} - g_d^n} \frac{\partial \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

et

$$[\mathbf{K}_{mat}]_D = -\chi \left[ \frac{\frac{\partial U}{\partial g} (g_d^{n+1} - g_d^n) - \frac{U(g_d^{n+1} - g_d^n)}{g_d^{n+1} - g_d^n}}{g_d^{n+1} - g_d^n} \right] \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \otimes \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \quad (\text{D.10})$$

### D.1.3 Matrice de raideur relative aux forces de frottement

Soit l'expression (5.93) des forces de frottement. Cependant, en pratique, c'est l'expression (5.123) qui est utilisée. Comme pour les forces normales, nous omettrons les exposants relatifs au nœud et les exposants relatifs à la continuité. Nous construisons au nœud esclave le repère orthonormé (5.110) qui se réécrit

$$\begin{aligned}\vec{t}_1(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) &= \frac{\vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \wedge \left[ \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(\bar{u}_d) - \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(u^{n+\frac{1}{2}}) \right]}{\| \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \wedge \left[ \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(\bar{u}_d) - \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(u^{n+\frac{1}{2}}) \right] \|} \wedge \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \\ \vec{t}_2(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) &= \vec{t}_1(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \wedge \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})\end{aligned}\quad (\text{D.11})$$

La matrice de raideur s'écrit donc

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_T &= \frac{\partial \left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]_T}{\partial \vec{x}^{n+1}} \\ &= \vec{t}_\alpha(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \otimes \frac{\partial t_{T_\alpha}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} + t_{T_\alpha}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \frac{\partial \vec{t}_\alpha(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}}\end{aligned}\quad (\text{D.12})$$

Dans le cas où la matrice est rigide et se translate, les relations (5.120) et (5.121) conduisent à

$$r_c = 1 \quad (\text{D.13})$$

car  $\eta_d$  correspond à  $\Delta^2 y$  puisque la norme d'un vecteur ne dépend pas de la base tant qu'elle est orthonormée (et que  $\vec{t}_\alpha$  constitue une base orthonormée, sous l'hypothèse que  $\Delta y$  n'a pas de composante hors plan). Il faut distinguer le cas où il y a glissement, du cas collant.

#### Cas collant

Analysons le cas où il n'y a pas de glissement. Dans ce cas nous avons  $t_{T_\alpha} = t_{T_\alpha}^{pred}$  défini par (5.119). A ce stade, nous devons utiliser l'hypothèse que  $\vec{x}$  de la relation (5.115) et sa projection  $\vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(u_d^{n+1})$  sur  $\mathbb{S}^2$  sont confondus. Grâce aux relations (5.114)

et (5.115), il vient

$$\begin{aligned}
t_{T_\alpha}^{pred}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) &= -k_T \left[ \frac{\bar{y}^{n+\frac{1}{2}}(u_d^n) + \bar{y}^{n+\frac{1}{2}}(u_d^{n+1})}{2} - \bar{y}^{n+\frac{1}{2}}(\bar{u}_d) \right] \cdot \vec{t}_\alpha(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \\
&= -k_T \left[ \frac{\bar{y}^{n+\frac{1}{2}}(u_d^n) + \bar{y}^{n+\frac{1}{2}}(u^{n+\frac{1}{2}}) + \vec{g}_{t_d}}{2} - \bar{y}^{n+\frac{1}{2}}(\bar{u}_d) \right] \cdot \vec{t}_\alpha(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \\
&= -k_T \left[ \bar{y}^{n+\frac{1}{2}}(u_d^n) - \bar{y}^{n+\frac{1}{2}}(\bar{u}_d) \right] \cdot \vec{t}_\alpha(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \\
&\quad - k_T \left[ \frac{\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n - \bar{y}^{n+1}(u^{n+\frac{1}{2}}) + \bar{y}^n(u^{n+\frac{1}{2}})}{2} \right] \cdot \vec{t}_\alpha(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \quad (D.14)
\end{aligned}$$

Il vient dès lors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial t_{T_\alpha}^{pred}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} &= -\frac{k_T}{2} \vec{t}_\alpha(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) + \\
&\quad \frac{k_T}{2} \left[ \frac{\partial [\bar{y}^{n+1}(u) - \bar{y}^n(u)]}{\partial u_\beta} (u^{n+\frac{1}{2}}) \otimes \frac{\partial u_\beta^{n+\frac{1}{2}}}{\partial \vec{x}^{n+1}} \right]^T \vec{t}_\alpha(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) - \\
&\quad k_T \left[ \frac{\partial \vec{t}_\alpha(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} \right]^T \left[ \frac{\bar{y}^{n+\frac{1}{2}}(u_d^n) + \bar{y}^{n+\frac{1}{2}}(u_d^{n+1})}{2} - \bar{y}^{n+\frac{1}{2}}(\bar{u}_d) \right] \quad (D.15)
\end{aligned}$$

Puisque la matrice est rigide et ne fait que se translater, le deuxième terme s'annule, et, en réécrivant le dernier terme, il vient

$$\frac{\partial t_{T_\alpha}^{pred}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} = -\frac{k_T}{2} \vec{t}_\alpha(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) + t_{T_\beta}^{pred}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \left[ \frac{\partial \vec{t}_\alpha(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} \right]^T \vec{t}_\beta(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \quad (D.16)$$

Dès lors, puisque  $t_{T_\alpha} = t_{T_\alpha}^{pred}$ , la relation (D.12) se réécrit

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_{geo}^{col} + \mathbf{K}_{mat}^{col} \quad (D.17)$$

La combinaison de (D.12) et de (D.16) permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{geo}^{col} &= t_{T_\beta}^{pred}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \vec{t}_\alpha(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \otimes \left[ \frac{\partial \vec{t}_\alpha(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} \right]^T \vec{t}_\beta(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) + \\
&\quad t_{T_\alpha}^{pred}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \frac{\partial \vec{t}_\alpha(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} \quad (D.18)
\end{aligned}$$

et

$$\mathbf{K}_{mat}^{col} = -\frac{k_T}{2} \vec{t}_\alpha(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \otimes \vec{t}_\alpha(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \quad (\text{D.19})$$

Le terme géométrique  $\mathbf{K}_{geo}^{col}$  provient de deux sources : le fait que pour notre définition du repère (D.11), les tangentes changent de direction si le nœud esclave bouge, et le fait que la surface maître est courbe. En pratique, nous négligerons ce terme par rapport à  $\mathbf{K}_{mat}^{col}$ .

### Cas glissant

Dans ce cas, nous avons

$$t_{T_\alpha}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) = \frac{\mu_c t_N}{\sqrt{t_{T_\beta}^{pred} t_{T_\beta}^{pred}}} t_{T_\alpha}^{pred}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \quad (\text{D.20})$$

et il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{T_\alpha}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} &= \frac{\mu_c t_N}{\sqrt{t_{T_\beta}^{pred} t_{T_\beta}^{pred}}} \frac{\partial t_{T_\alpha}^{pred}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} - \\ &\quad \frac{\mu_c t_N}{\sqrt{t_{T_\beta}^{pred} t_{T_\beta}^{pred}}} t_{T_\alpha}^{pred}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) t_{T_\gamma}^{pred}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \frac{\partial t_{T_\gamma}^{pred}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} + \\ &\quad \mu_c \frac{t_{T_\alpha}^{pred}}{\sqrt{t_{T_\beta}^{pred} t_{T_\beta}^{pred}}} \frac{\partial t_N(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial g_d^{n+1}} \frac{\partial g_d^{n+1}}{\partial \vec{x}^{n+1}} \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

Soit  $r_g = \frac{\mu_c t_N}{\sqrt{t_{T_\beta}^{pred} t_{T_\beta}^{pred}}}$ . En utilisant (D.3), (D.4) et (D.16), la relation (D.21) devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{T_\alpha}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} &= r_g \left[ -\frac{k_T}{2} \vec{t}_\alpha(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) + t_{T_\beta}^{pred}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \left[ \frac{\partial \vec{t}_\alpha(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} \right]^T \vec{t}_\beta(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \right] + \\ &\quad \frac{r_g k_T}{2} \frac{t_{T_\alpha}^{pred}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) t_{T_\gamma}^{pred}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{t_{T_\beta}^{pred} t_{T_\beta}^{pred}} \vec{t}_\gamma(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) - \\ &\quad r_g \frac{t_{T_\alpha}^{pred}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) t_{T_\gamma}^{pred}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) t_{T_\xi}^{pred}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{t_{T_\beta}^{pred} t_{T_\beta}^{pred}} \left[ \frac{\partial \vec{t}_\gamma(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} \right]^T \vec{t}_\xi(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) + \\ &\quad r_g \frac{t_{T_\alpha}^{pred}}{t_N} \frac{\partial t_N(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial g_d^{n+1}} \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) + \\ &\quad r_g \frac{t_{T_\alpha}^{pred}}{t_N} \frac{\partial t_N(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial g_d^{n+1}} \left[ \frac{\partial \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} \right]^T \left[ \vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n - \vec{y}^{n+1}(u^{n+\frac{1}{2}}) + \vec{y}^n(u^{n+\frac{1}{2}}) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

La relation (D.12) se réécrit alors

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_{geo}^{gl} + \mathbf{K}_{mat}^{gl} \quad (\text{D.23})$$

La combinaison de (D.12), (D.20) et de (D.22) donne

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{geo}^{gl} = & r_g t_{T_\beta}^{pred}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \vec{t}_\alpha(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \otimes \left[ \frac{\partial \vec{t}_\alpha(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} \right]^T \vec{t}_\beta(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) + \\ & r_g \frac{t_{T_\alpha}^{pred}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) t_{T_\gamma}^{pred}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) t_{T_\xi}^{pred}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{t_{T_\beta}^{pred} t_{T_\beta}^{pred}} \vec{t}_\alpha(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \otimes \left[ \frac{\partial \vec{t}_\gamma(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} \right]^T \vec{t}_\xi(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) + \\ & r_g \frac{t_{T_\alpha}^{pred}}{t_N} \frac{\partial t_N(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial g_d^{n+1}} \vec{t}_\alpha(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \otimes \left[ \frac{\partial \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} \right]^T [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n - \vec{y}^{n+1}(u^{n+\frac{1}{2}}) + \vec{y}^n(u^{n+\frac{1}{2}})] + \\ & r_g t_{T_\alpha}^{pred}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \frac{\partial \vec{t}_\alpha(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial \vec{x}^{n+1}} \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{mat}^{gl} = & -r_g \frac{k_T}{2} \vec{t}_\alpha(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \otimes \vec{t}_\alpha(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) + \\ & \frac{r_g k_T}{2} \frac{t_{T_\alpha}^{pred}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) t_{T_\gamma}^{pred}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{t_{T_\beta}^{pred} t_{T_\beta}^{pred}} \vec{t}_\alpha(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \otimes \vec{t}_\gamma(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) + \\ & r_g \frac{t_{T_\alpha}^{pred}}{t_N} \frac{\partial t_N(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial g_d^{n+1}} \vec{t}_\alpha(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \otimes \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

En pratique, le terme (D.24) est négligé et le terme (D.25) est approximé en considérant que la force de frottement est dirigée vers  $\vec{t}_1(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})$ , ce qui est une excellente approximation vu la définition des tangentes (D.11). Il vient alors

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{mat}^{gl} = & -r_g \frac{k_T}{2} \vec{t}_1(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \otimes \vec{t}_1(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) - r_g \frac{k_T}{2} \vec{t}_2(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \otimes \vec{t}_2(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) + \\ & \frac{r_g k_T}{2} \vec{t}_1(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \otimes \vec{t}_1(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) + \mu_c \frac{\partial t_N(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial g_d^{n+1}} \vec{t}_1(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \otimes \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \\ = & -r_g \frac{k_T}{2} \vec{t}_2(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \otimes \vec{t}_2(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) + \mu_c \frac{\partial t_N(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial g_d^{n+1}} \vec{t}_1(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \otimes \vec{n}(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

avec  $\frac{\partial t_N(\vec{x}, t^{n+\frac{1}{2}})}{\partial g_d^{n+1}}$  donné par (D.2).



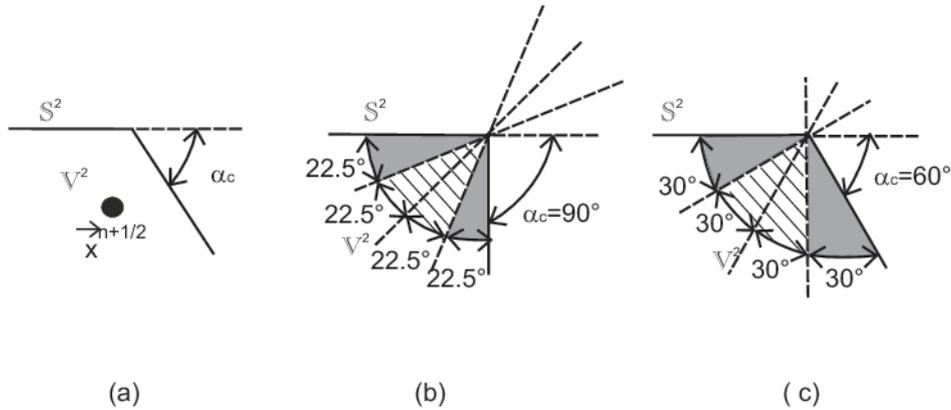


Figure D.2: Description des cas où il n'y a deux projections - (a) définition de l'angle d'ouverture  $\alpha_c$  - (b) cas limite  $\alpha_c = 90^\circ$  - (c) cas limite  $\alpha_c = 60^\circ$ .

### D.2.2 Cas où il y a une projection

Le cas trivial, où il y a une seule projection sur le segment  $no$  pour les coordonnées  $u^{n+\frac{1}{2}}$  conduit directement à

$$\begin{aligned} \bar{y}^{n+\frac{1}{2}} \left( no, u^{n+\frac{1}{2}} \right) &= \bar{y}^{n+\frac{1}{2}} (C) \\ \vec{n}^c(\bar{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) &= \frac{\bar{y}^{n+\frac{1}{2}} \left( no, u^{n+\frac{1}{2}} \right) - \bar{x}^{n+\frac{1}{2}}}{\left\| \bar{y}^{n+\frac{1}{2}} \left( no, u^{n+\frac{1}{2}} \right) - \bar{x}^{n+\frac{1}{2}} \right\|} \end{aligned} \quad (D.28)$$

### D.2.3 Cas où il y a plusieurs projections

Ce cas est le plus complexe. Dans le cadre où il y a plus de deux projections, nous considérons les deux projections de gap minimum. Nous supposons un problème plan, la généralisation au cas 3D se fera par la suite. Soit  $\alpha_c$  l'ouverture de l'angle défini à la Figure D.2 (a). Supposons que l'angle est supérieur à  $90^\circ$  (le cas limite étant illustré à la Figure D.2 (b)). Dès lors, le nœud esclave est toujours en double contact. Afin de rendre l'évolution de la normale continue, et de permettre que le nœud évolue d'un statut de simple contact au statut de double contact, nous allons différencier deux types de contact. Si le nœud est plus proche d'un segment que de la bissectrice du coin, le contact se fait avec ce segment (zone grisée de la Figure D.2 (b)). Les formules utilisées sont donc les formules (D.28). Par contre si le nœud est plus proche de la bissectrice de l'angle (zone hachurée de la Figure D.2 (b)), nous devons rendre la normale continue lors du passage de la zone grisée à la zone hachurée. Pour ce faire, Graillet [58] a proposé la méthode suivante. Soit la Figure D.3, sur laquelle est représentée le coin d'ouverture  $\alpha_c$  et les quatre demi-droites divisant le coin en quatre angles de  $\frac{180^\circ - \alpha_c}{4}$ . Supposons que le nœud esclave  $\bar{x}^{n+\frac{1}{2}}$  soit plus proche du segment  $no$  que du segment  $no-1$  (c'est-à-dire entre les demi-droites  $b$  et  $b'$ ). Les deux projections obtenues sont  $\bar{y}^{n+\frac{1}{2}} \left( no-1, u^{n+\frac{1}{2}} \right)$  et

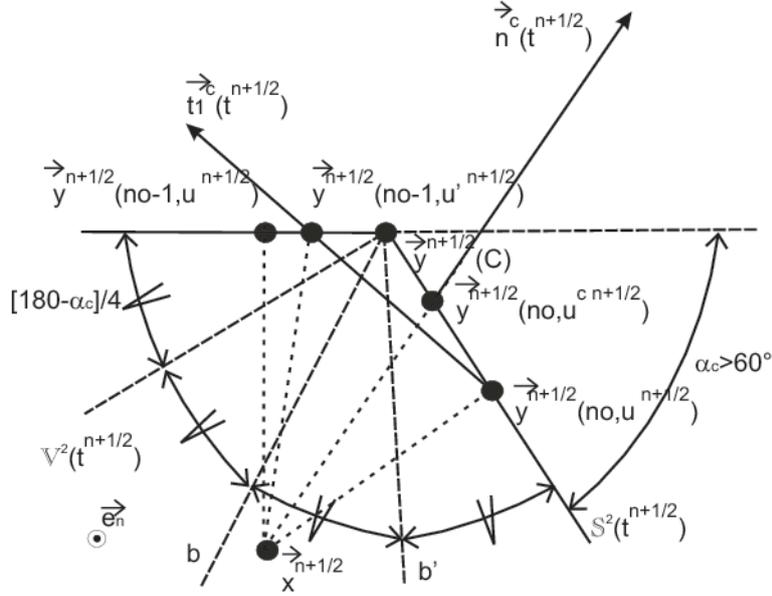


Figure D.3: Cas où il n'y a deux projections et une ouverture supérieure à  $60^\circ$  (en 2 dimensions).

$\vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no, u^{n+\frac{1}{2}})$ . L'originalité de la méthode proposée par Graillet consiste à déplacer la projection  $\vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no-1, u^{n+\frac{1}{2}})$  en  $\vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no-1, u^{m+\frac{1}{2}})$  afin de pouvoir définir la normale continue et la projection continue par

$$\begin{aligned} \vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) &= \frac{\vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no-1, u^{m+\frac{1}{2}}) - \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no, u^{n+\frac{1}{2}})}{\left\| \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no, u^{n+\frac{1}{2}}) - \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no-1, u^{m+\frac{1}{2}}) \right\|} \wedge \vec{e}_n \\ \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) &= \left[ \vec{x}^{n+\frac{1}{2}} + a\vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \right] \cap \mathbb{S}^2(t^{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (D.29)$$

où  $\vec{e}_n$  est le vecteur perpendiculaire au plan et  $a$  une inconnue scalaire. Le choix de  $\vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no-1, u^{m+\frac{1}{2}})$  qui amène une continuité de normale est obtenu de la manière suivante. Soit  $\vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(C)$  le sommet du coin (Figure D.3). Dès lors, le système à résoudre est le suivant

$$\begin{aligned} \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no-1, u^{m+\frac{1}{2}}) &= \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(C) + \alpha' L' \frac{\vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no-1, u^{n+\frac{1}{2}}) - \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(C)}{\left\| \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no-1, u^{n+\frac{1}{2}}) - \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(C) \right\|} \\ L' &= \left\| \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no, u^{n+\frac{1}{2}}) - \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(C) \right\| \end{aligned} \quad (D.30)$$

où l'inconnue est  $\alpha'$  est déterminée de manière à rendre la normale continue. Le principe est que si le nœud esclave passe de la bissectrice de l'angle (demi-droite  $b$ ), au quart de

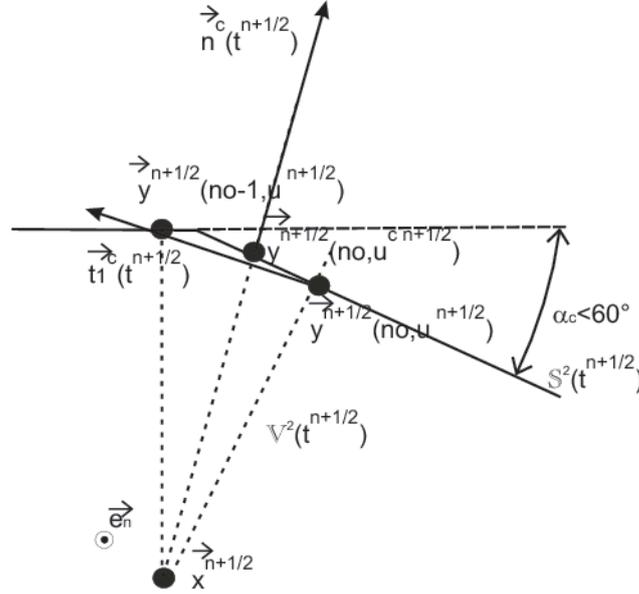


Figure D.4: Cas où il n'y a deux projections et une ouverture inférieure à 60° (en 2 dimensions).

l'angle (demi-droite  $b'$ ), la normale doit évoluer d'une direction parallèle à la bissectrice de l'angle, à une direction perpendiculaire au côté  $no$ . Le point  $\bar{y}^{n+\frac{1}{2}}(no-1, u^{n+\frac{1}{2}})$  doit donc passer du point  $\bar{y}^{n+\frac{1}{2}}(no-1, u^{n+\frac{1}{2}})$  au point  $\bar{y}^{n+\frac{1}{2}}(C)$ , et finalement  $\alpha'$  doit passer de l'unité à zéro. Des relations trigonométriques de base, conduisent au système

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{\|\bar{y}^{n+\frac{1}{2}}(no, u^{n+\frac{1}{2}}) - \bar{x}^{n+\frac{1}{2}}\|}{L'} - g_{b2} \\ g_{b1} &= \tan\left(\frac{\pi - \alpha_c}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha_c}{1 - \cos \alpha_c}} \\ g_{b2} &= \tan\left(\frac{\pi - \alpha_c}{4}\right) = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha_c}{2}}}{1 + \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha_c}{2}}}} \end{aligned} \quad (D.31)$$

Les formules établies ci-dessus sont valables pour toute ouverture  $\alpha_c$ . Cependant dans le cas où l'angle d'ouverture  $\alpha_c$  est inférieur à 60° (D.2 (c)), le nœud esclave est toujours plus proche de la bissectrice du coin que des segments formant le coin. Dès lors, la normale peut être rendue continue d'une manière plus simple. Elle est rendue continue en la considérant perpendiculaire au segment joignant les deux projections (Figure D.4). Le point de projection est alors obtenu en prenant l'intersection entre la surface et la droite issue du nœud esclave et ayant pour direction la normale. Avec  $\vec{e}_n$  le vecteur perpendiculaire au plan,  $a$  une inconnue scalaire, et en supposant que l'intersection se

fasse sur le segment  $no$ , il vient

$$\begin{aligned} \vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) &= \frac{\vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no-1, u^{n+\frac{1}{2}}) - \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no, u^{n+\frac{1}{2}})}{\left\| \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no, u^{n+\frac{1}{2}}) - \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no-1, u^{n+\frac{1}{2}}) \right\|} \wedge \vec{e}_n \\ \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) &= \left[ \vec{x}^{n+\frac{1}{2}} + a\vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \right] \cap \mathbb{S}^2(t^{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

Finalement, dans le cas 3D, les formules ci-dessus restent valables, en considérant le plan passant par les points  $\vec{x}^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $\vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no-1, u^{n+\frac{1}{2}})$  et  $\vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no, u^{n+\frac{1}{2}})$ . Remarquons cependant que la gestion proposée rend la normale continue pour un déplacement du nœud esclave mais pas lorsque l'angle d'ouverture passe d'une valeur inférieure à  $60^\circ$  à une autre valeur supérieure à  $60^\circ$ . De plus, cette méthode présente le désavantage de ne pas posséder de matrice de raideur facilement exprimable. Etant donné le faible nombre de nœuds en contact par rapport au nombre total de nœuds, nous exprimons la matrice de raideur de manière numérique.

## D.3 Vérification de la consistance énergétique des forces de contact implémentées

Nous avons vérifié aux sections 5.3.2, 5.3.3, 5.3.4, 5.4.2, 5.4.3 et 5.4.4 que les forces de contact (5.72), (5.73) et (5.93) vérifient les lois de conservation (5.60), (5.61), (5.62), (5.63), (5.65) et (5.67). Cependant, les forces de contact implémentées sont (5.108), (5.109) et (5.123). Nous vérifions dans cette section que ces nouvelles forces vérifient toujours les lois de conservation.

### D.3.1 Conservation du moment linéaire

Soient les forces conservatives (5.108), (5.123) et dissipatives (5.109). Il vient donc, en utilisant les propriétés des fonctions de forme, respectivement

$$\begin{aligned}
\left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_1} + \sum_{\xi_2} \left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_2} &= t_N(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \underbrace{\left[ 1 - \sum_{\xi_2} \varphi^{\xi_2}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) \right]}_{=0} + \\
t_{T_\alpha}(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \vec{t}_\alpha^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) &\underbrace{\left[ 1 - \sum_{\xi_2} \varphi^{\xi_2}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) \right]}_{=0} + \\
t_{T_\alpha}(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) g(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) &\underbrace{\sum_{\xi_2} D_\beta^{\xi_2}(no, u^{cn+\frac{1}{2}})}_{=0} = 0
\end{aligned} \tag{D.33}$$

et

$$\begin{aligned}
\left[ \vec{F}_{cont/diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_1} + \sum_{\xi_2} \left[ \vec{F}_{cont/diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_2} &= -\chi \frac{U(g_d^{n+1} - g_d^n)}{g_d^{n+1} - g_d^n} \\
\vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) &\underbrace{\left[ 1 - \sum_{\xi_2} \varphi^{\xi_2}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) \right]}_{=0} = 0
\end{aligned} \tag{D.34}$$

qui vérifient respectivement (5.60) et (5.61).

### D.3.2 Conservation du moment angulaire

Nous regardons ce qui se passe pour les forces conservatives (5.108), (5.123) et dissipatives (5.109). Il vient alors, grâce à (5.106) et à (5.124)

$$\begin{aligned}
\sum_B \left[ \frac{\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n}{2} \right]^{\xi_B} \wedge \left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_B} &= t_N(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \underbrace{\left[ \frac{\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n}{2} \right]^{\xi_1} - \varphi^{\xi_2}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) \left[ \frac{\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n}{2} \right]^{\xi_2}}_{=g(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})} \wedge \vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \\
&+ t_{T\alpha}(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \left\{ \underbrace{\left[ \frac{\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n}{2} \right]^{\xi_1} - \varphi^{\xi_2}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) \left[ \frac{\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n}{2} \right]^{\xi_2}}_{=g(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})} \wedge \vec{t}_\alpha^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) + \right. \\
&\left. (\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) g(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \underbrace{D_\alpha^{\xi_2}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) \left[ \frac{\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n}{2} \right]^{\xi_1}}_{\vec{t}_\alpha^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})} \wedge \vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \right\} = 0 \quad (D.35)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_B \left[ \frac{\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n}{2} \right]^{\xi_B} \wedge \left[ \vec{F}_{cont/diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_B} &= \chi \frac{U(g_d^{n+1} - g_d^n)}{g_d^{n+1} - g_d^n} \vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \wedge \\
&\underbrace{\left[ \frac{\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n}{2} \right]^{\xi_1} - \varphi^{\xi_2}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) \left[ \frac{\vec{x}^{n+1} + \vec{x}^n}{2} \right]^{\xi_2}}_{=g(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}})} \\
&= 0 \quad (D.36)
\end{aligned}$$

qui vérifient respectivement (5.62) et (5.63)

### D.3.3 Conservation de l'énergie

A partir du cycle défini par une prise de contact entre la configuration 1 et la configuration 2, un contact persistant entre les configurations 2 et  $n' \geq 2$ , et par une perte du contact entre les configurations  $n'$  et  $n' + 1$ , nous pouvons retrouver la conservation de l'énergie. La démonstration relative à la partie normale est identique à celle faite à la section 5.3.4, étant donné que nous avons toujours grâce à la relation (5.107)

$$\begin{aligned}
W_{cont}^{n+1} - W_{cont}^n &= \left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]_N^{\xi_1} \cdot [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^{\xi_1} + \left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]_N^{\xi_2} \cdot [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^{\xi_2} \\
&= t_N(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \vec{n}^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \cdot \\
&\quad \left\{ [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^{\xi_1} - \varphi^{\xi_2}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^{\xi_2} \right\} \\
&= t_N(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) [g_d^{n+1} - g_d^n] \\
&= - [U(g_d^{n+1}) - U(g_d^n)] \quad (D.37)
\end{aligned}$$

qui correspond bien à la relation (5.79) et vérifie donc bien la conservation de l'énergie. Pour la composante normale de la force de dissipation (5.73), en se rappelant qu'elle est non-nulle uniquement si le contact est persistant, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_B \left[ \vec{F}_{cont/diss}^{n+\frac{1}{2}} \right]^{\xi_B} \cdot [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^{\xi_B} &= -\chi \frac{U(g_d^{n+1} - g_d^n)}{g_d^{n+1} - g_d^n} \vec{n}^c(x^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \cdot \\ &\quad \left[ [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^{\xi_1} - \varphi^{\xi_2}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^{\xi_2} \right] \\ &= -\chi U(g_d^{n+1} - g_d^n) \leq 0 \end{aligned} \quad (D.38)$$

Ce qui vérifie bien la relation (5.67), en identifiant  $\Delta_W$  à  $\chi U(g_d^{n+1} - g_d^n)$ . Occupons-nous maintenant de la forces de frottement. Nous avons d'abord grâce à la relation (5.123)

$$\begin{aligned} \Delta_{frot} &= - \left[ \vec{F}_{cont}^{n+\frac{1}{2}} \right]_T^{\xi_1} \cdot [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^{\xi_1} - \left[ \vec{F}_{cont}^n \right]_T^{\xi_2} \cdot [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^{\xi_2} \\ &= -t_{T_\alpha} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \left\{ \vec{t}_\alpha^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \cdot \right. \\ &\quad \left\{ [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^{\xi_1} - \varphi^{\xi_2}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^{\xi_2} \right\} - \\ &\quad g \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \vec{n}^c(x^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) D_\alpha^{\xi_2} \left( no, u^{cn+\frac{1}{2}} \right) \cdot \\ &\quad \left. \varphi^{\xi_2}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) [\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n]^{\xi_2} \right\} \end{aligned} \quad (D.39)$$

En négligeant  $g \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) D_\alpha^{\xi_2} \left( no, u^{cn+\frac{1}{2}} \right)$ , qui a déjà été négligé lors de l'assimilation de  $A_{\alpha\beta}$  à  $\delta_{\alpha\beta}$ , nous avons grâce à la relation (5.114)

$$\Delta_{frot} = -t_{T_\alpha} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \vec{t}_\alpha^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \cdot \left\{ \vec{g}_{td} - \left[ \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no_d^n, u_d^n) - \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no, u^{cn+\frac{1}{2}}) \right] \right\} \quad (D.40)$$

En utilisant (5.115) et en se rappelant que  $\vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no_d^{n+1}, u_d^{n+1})$  est la projection de  $\vec{x}$  sur la surface (section 5.5), cette dernière relation devient

$$\begin{aligned} \Delta_{frot} &= -t_{T_\alpha} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \vec{t}_\alpha^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \cdot \left[ \vec{x} - \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no_d^n, u_d^n) \right] \\ &\simeq -t_{T_\alpha} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \vec{t}_\alpha^c(\vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \cdot \left[ \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no_d^{n+1}, u_d^{n+1}) - \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no_d^n, u_d^n) \right] \end{aligned} \quad (D.41)$$

Soit  $\Delta y^n$  et  $\Delta y^{n+1}$  définis par

$$\begin{aligned} \Delta y^n &= \left[ \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no_d^n, u_d^n) - \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(\bar{no}, \bar{u}_d) \right] \\ \Delta y^{n+1} &= \left[ \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(no_d^{n+1}, u_d^{n+1}) - \vec{y}^{n+\frac{1}{2}}(\bar{no}, \bar{u}_d) \right] \end{aligned} \quad (D.42)$$

Dès lors, en utilisant (5.119), (5.120), (5.121) et (5.122), il vient

$$\begin{aligned}
& t_{T_\alpha}^{pred} \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \vec{t}_\alpha^c \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \left[ \bar{y}^{n+\frac{1}{2}} \left( no_d^{n+1}, u_d^{n+1} \right) - \bar{y}^{n+\frac{1}{2}} \left( no_d^n, u_d^n \right) \right] = \\
& -\frac{1}{2} k_T r_c \vec{t}_\alpha^c \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \cdot [\Delta y^n + \Delta y^{n+1}] \vec{t}_\alpha^c \left( \vec{x}^{\xi_1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \cdot [\Delta y^{n+1} - \Delta y^n] \\
& = -\frac{k_T}{2} [\eta_d^{n+1} - \eta_d^n]
\end{aligned} \tag{D.43}$$

Et grâce à (5.92), la relation (D.41) se réécrit

$$\begin{aligned}
\Delta_{frot} &= \frac{k_T}{2} [\eta_d^{n+1} - \eta_d^n] \text{ si } \Phi_c(\vec{T}^{pred}) \leq 0 \\
&= \frac{k_T \mu_c t_N}{2 \|\vec{T}^{pred}\|} [\eta_d^{n+1} - \eta_d^n] \text{ si } \Phi_c(\vec{T}^{pred}) > 0
\end{aligned} \tag{D.44}$$

et nous retrouvons l'expression (5.101) de la section 5.4.4, ce qui prouve la consistance énergétique de cette implémentation.