

CALCUL DE LA PROPAGATION D'UNE ONDE DE RUPTURE DE BARRAGE

Michel PIROTON
Aspirant F.N.R.S.
Laboratoire L.H.C.N.
Université de Liège - Belgique

RESUME

La méthode des éléments finis basée sur la formulation classique de Galerkin fournit des résultats très médiocres dans la modélisation d'écoulements discontinus. Des alternatives ont été proposées, en ajoutant des termes dissipatifs ou en modifiant les fonctions de pondération. L'article présente la généralisation d'une d'entre elles, associée à un schéma itératif particulier. Cette méthode est à la base d'un programme de calcul unidimensionnel de propagation d'ondes dans un réseau de rivières ayant une section variable quelconque. Les applications présentées montrent le caractère sélectif de la méthode qui maintient la discontinuité sur un nombre limité de mailles, ainsi que la bonne correspondance des résultats avec ceux d'essais sur modèles réduits ou d'autres logiciels.

I. INTRODUCTION

Les conséquences catastrophiques que produit l'effacement subit d'un barrage ont amené depuis longtemps les chercheurs à s'intéresser à la propagation d'ondes de forte amplitude.

Le regain d'intérêt pour un problème résolu théoriquement et sous sa forme la plus simple par Ritter il y a près de 100 ans, s'explique d'abord par les nouvelles perspectives qu'ouvrent les calculateurs électroniques

et ensuite par l'importance qu'ont les simulations dans la stratégie de protection des populations et des biens en aval des sites.

Depuis Ritter, les travaux portent principalement sur la résolution des problèmes numériques liés à la modélisation du phénomène; une caractéristique bien connue des équations hyperboliques des « shallow water » est la difficulté à représenter numériquement des solutions discontinues, et plus précisément à contenir ces chocs par des techniques particulières sur quelques mailles de la discrétisation.

Les méthodes les plus répandues utilisent les différences finies, qu'elles résolvent les équations complètes ou simplifiées. Elles développent des schémas spéciaux pour décentrer les dérivées ou ajoutent des termes pour introduire dans le système une certaine dissipation d'énergie.

Connue pour sa souplesse dans la définition de la grille de discrétisation, plus particulièrement en bidimensionnel, la méthode des éléments finis basée sur la méthode classique de Galerkin a longtemps vu son champ d'application restreint devant les résultats médiocres obtenus dans la représentation de phénomènes discontinus. Certains auteurs ont cependant développé des variantes à cette méthode au caractère non dissipatif.

Le but de cet article est de présenter l'une d'entre elles, appliquée à un modèle unidimensionnel de résolution d'un réseau quelconque en instationnaire.

Il est basé sur les lois complètes de conservation de masse et de moment pour les « shallow water ».

II. MODELE MATHEMATIQUE

Les équations utilisées pour résoudre l'écoulement sont les équations de Saint-Venant en unidimensionnel.

Elles sont formulées en variables section-débit pour assurer au mieux une conservation de masse au travers de la modélisation.

Les équations de continuité et quantité de mouvement s'écrivent

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi U Q)}{\partial x} + g \Omega \frac{dZ}{dx} + g F = 0$$

avec :

| | |
|------------------------------|--|
| x, t | les variables de temps et d'espace |
| g | l'accélération de la pesanteur |
| $h(x, t)$ | la hauteur d'eau |
| $\Omega(x, h)$ | la section transversale mouillée |
| $Q(x, t)$ | le débit |
| $U(x, t) = \frac{Q}{\Omega}$ | la vitesse moyenne de la section |
| q | le débit latéral |
| $Z(x, t)$ | la cote de la surface libre |
| F | le terme de frottement qui s'exprime par la formule de Manning |

$$F = \frac{Q|Q|}{C^2 \Omega R^{4/3}}$$

| | |
|-----|--|
| C | le coefficient de Manning |
| R | le rayon hydraulique défini comme le rapport entre la surface mouillée Ω et le périmètre mouillé. |

ϕ un coefficient d'inégale répartition de la vitesse sur la section. Il est calculé

$$\phi = \frac{\int_{\Omega} u^2(y, z) d\Omega}{\Omega U^2}$$

Ce terme peut être évalué en se donnant a priori une répartition de la vitesse axiale sur la section.

Les équations se basent sur les hypothèses suivantes :

- Les carrés du rapport des vitesses dans les directions perpendiculaires à l'écoulement principal à celle de l'axe de propagation sont négligeables, ce qui permet de considérer uniquement le frottement sur les bords.
- La formulation du frottement en instationnaire est identique à celle de l'écoulement stationnaire.
- La distribution de pression est hydrostatique. Cette hypothèse supposant les vitesses verticales faibles vis-à-vis de la vitesse principale n'est plus valide dans la région du front d'onde. Cependant certains auteurs ont montré que les équations sont encore applicables lorsque le produit de la courbure de la surface libre et de la hauteur d'eau reste limité.
- La pente de fond est faible.

On peut écrire les équations sous la forme suivante pour $\phi \neq f(x)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \Omega \\ Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - \phi U^2 & 2\phi U \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \Omega \\ Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -q \\ g(-\Omega i + \frac{Q|Q|}{C^2 \Omega R^{4/3}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec

i la pente du fond et
$$c^2 = \frac{g\Omega}{\left(\frac{d\Omega}{dh}\right)}$$

ce qui donne finalement le système

$$\frac{\partial X}{\partial t} + A \frac{\partial X}{\partial x} + B = 0$$

III. DISCRETISATION SPATIALE ET TEMPORELLE

- La méthode des éléments finis assure la discrétisation spatiale des Ω , Q . Dans un élément, chaque variable s'exprime comme une fonction polynomiale de ses valeurs aux noeuds de l'élément.

Le vecteur inconnue s'écrit donc classiquement

$$\begin{bmatrix} \Omega \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_j & N_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_j & N_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_j \\ \Omega_n \\ Q_1 \\ Q_j \\ Q_n \end{bmatrix} = N \cdot \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_j \\ \Omega_n \\ Q_1 \\ Q_j \\ Q_n \end{bmatrix}$$

avec

n le nombre de points de discrétisation

Ω_j, Q_j les valeurs nodales des inconnues

N_j les fonctions d'interpolation

La formulation habituelle en éléments finis consiste alors à orthogonaliser l'erreur due à l'approximation de la discrétisation à une fonction de pondération P .

Conformément aux travaux de Nikolaos et Katopodes [1], cette fonction s'écrit

$$P = N + \varepsilon A^T \frac{\delta N}{\delta x}$$

avec

ε le paramètre fixant le degré de dissipation.

Appliquée à un grillage régulier pour un cas simplifié, cette méthode montre qu'on conserve des différences centrées sur les noeuds de calcul en introduisant des termes de dissipation. Ces applications montrent en plus que l'on reproduit des schémas de différences finies connus pour leur capacité à modéliser des phénomènes discontinus.

- La discrétisation temporelle des équations est obtenue par différences finies implicites sur deux pas de temps.

Les termes sont évalués par moyenne pondérée sur les deux pas soit

$$a = (1 - \theta)a^t + \theta a^{t+\Delta t}$$

tandis que la dérivée temporelle est obtenue par

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{a^{t+\Delta t} - a^t}{\Delta t}$$

avec

Δt le pas de temps

Si on applique cette discrétisation temporelle aux équations linéarisées sur un maillage éléments finis régulier, une décomposition de la solution en série de Fourier montre une stabilité inconditionnelle du schéma pour $\theta \geq 0.5$ avec effet stabilisant du frottement.

IV. RESOLUTION DU SYSTEME

La méthode de résolution procède par découplage des équations en utilisant une méthode de prédiction-corrrection.

Lors d'une itération, le premier système évalue une nouvelle approximation des $\Omega_j^{t+\Delta t}$ et le second système une nouvelle valeur des $Q_j^{t+\Delta t}$.

L'équation d'orthogonalisation s'écrit :

$$\int_{\Omega} P^T \left(\frac{\partial X}{\partial t} + AX + B \right) d\Omega = 0$$

Par découplage, on obtient

- pour le premier système

$$\Omega_j^{t+\Delta t} \int_{\Omega} N_i E_{1j} d\Omega = \int_{\Omega} \left(N_i T_1 - \varepsilon \frac{\partial N_i}{\partial x} (E_{2k} Q_k^* - T_2) \right) d\Omega$$

Soit pour $\varepsilon = 0$, la résolution classique de l'équation de continuité discrétisée en termes des $\Omega_j^{t+\Delta t}$.

- pour le second système

$$Q_j^{t+\Delta t} \int_{\Omega} \left[\left(N_i + 2\varepsilon\varphi U^* \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) E_{2j} \right] d\Omega = \int_{\Omega} \left[\left(N_i + 2\varepsilon\varphi U^* \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) T_2 - \varepsilon \frac{\partial N_i}{\partial x} (c^2 - \varphi (U^*)^2) (E_{1k} \Omega_k^* - T_1) \right] d\Omega$$

Soit pour $\varepsilon = 0$, la résolution de l'équation dynamique discrétisée en termes des $Q_j^{t+\Delta t}$.

avec

$$E_{1j} = \frac{N_j}{\Delta t}$$

$$T_1 = \frac{\Omega^t}{\Delta t} - (1-\theta) \frac{\partial Q^t}{\partial x} - \theta \frac{\partial Q^*}{\partial x} + (1-\theta)q^t + \theta q^{t+\Delta t}$$

$$E_{2j} = N_j \left(\frac{1}{\Delta t} + \theta g \frac{|U^*|}{C^2 R^{4/3}} - \varphi\theta \frac{U^*}{\Omega^*} \frac{\partial \Omega^*}{\partial x} \right) + 2\varphi\theta U^* \frac{\partial N_j}{\partial x}$$

$$T_2 = \frac{Q^t}{\Delta t} - (1-\theta)\varphi \frac{\partial(U^t Q^t)}{\partial x} - (1-\theta)g \Omega^t \frac{dZ^t}{dx} - \theta g \Omega^* \frac{dZ^*}{dx} - (1-\theta)g \frac{Q^* |U^*|}{C^2 R^{4/3}}$$

* valeur prédite ou provenant de l'itération précédente

V. DISSIPATION INTRODUITE DANS LE MODELE

Avant d'entreprendre des simulations de rupture, il convient de fixer les paramètres du modèle qui introduisent l'effet dissipatif.

Le premier paramètre φ provient de la discrétisation temporelle. Un exemple classique de seiche le démontre aisément.

Dans un canal horizontal, fermé à ses deux extrémités, l'eau possède au départ une déformée cosinusoidale de sa surface libre. On laisse alors évoluer librement le système dans le temps, sans qu'il y ait frottement.

En se plaçant dans des conditions telles qu'il serait licite de linéariser les équations, on doit retrouver les résultats théoriques de Lynch, qui montrent que le niveau oscille indéfiniment entre la courbe initiale et sa symétrique par rapport au niveau horizontal moyen. Toute diminution d'amplitude révèle donc une dissipation d'énergie dans le système.

Les résultats de cette simulation pour un canal de 100 kms de long ayant une profondeur au repos de 80 m, avec une amplitude de déformée de 4 m, sont donnés à la figure 1 pour différentes valeurs du coefficient θ .

Le canal est découpé en 10 éléments linéaires de 10 kms tandis que le pas de calcul est de 1 heure.

On constate que le décentrement vers le pas calculé, qui stabilise la convergence, rend aussi le système beaucoup plus dissipatif. Pour $\theta = 0,5$, par contre, le système est parfaitement conservatif.

Le second paramètre ε provient des fonctions de pondération particulières introduites lors de l'orthogonalisation. Pour sa fixation, Raymond et Garder [2] ont entrepris des études théoriques montrant sa liaison à la dimension du maillage et au pas temporel. Ils ont étudié son action très sélective sur les longueurs d'onde.

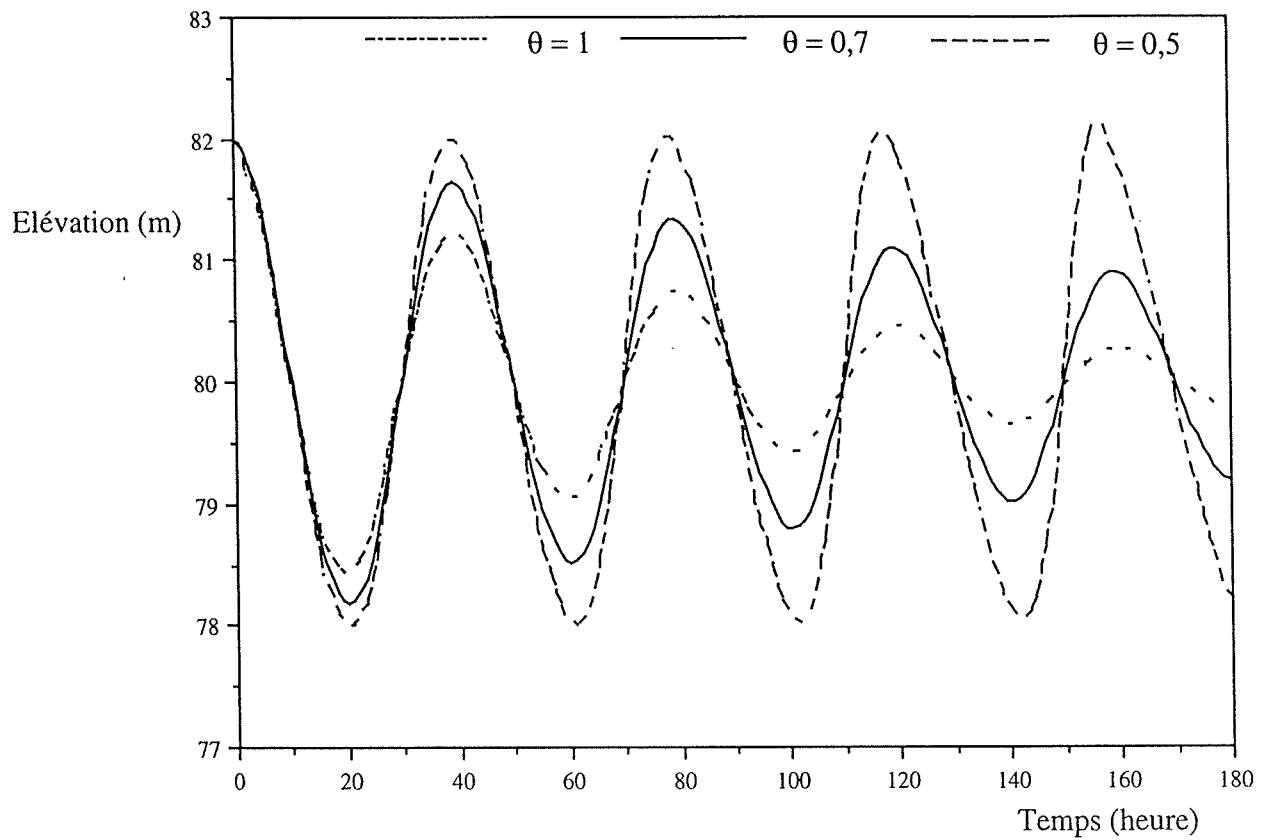


Figure 1 - Evolution temporelle de la hauteur d'eau à l'extrémité gauche du canal. Effet dissipatif de θ

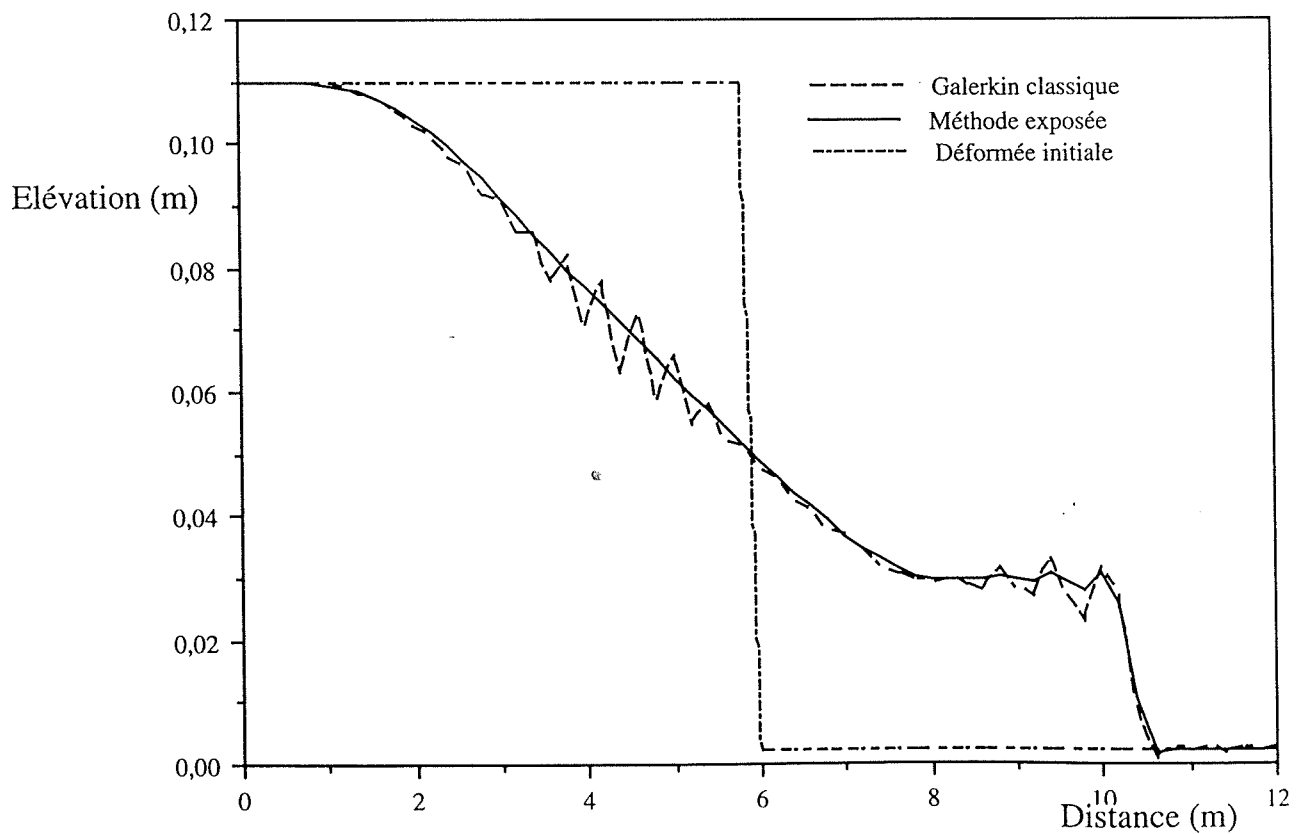


Figure 2 - Profil de la surface libre après 4 s. Effet sélectif de ϵ

Les simulations numériques montrent qu'une valeur de $\varepsilon = \Delta t/2$ est largement suffisante pour obtenir l'effet recherché.

Une simulation d'un modèle réduit de rupture permet de mettre en évidence les effets indésirables de la méthode classique de Galerkin. Bien qu'elle converge encore dans ce cas, on voit que la simulation d'effacement d'un barrage de 11 cm de haut dans un canal rectangulaire horizontal sans frottement est perturbée par des oscillations parasites, qui disparaissent complètement par la méthode modifiée.

La figure 2 montre les résultats obtenus après 4s, avec une discrétisation de 60 éléments linéaires pour 12 m.

VI. RESULTATS NUMERIQUES

Exemple 1

Les calculs de propagation d'ondes en l'absence de tout frottement constituent un bon test pour un modèle,

puisqu'ils permettent de distinguer l'effet dissipatif qu'il contient.

Dans un canal horizontal de 2000 m de long, une vanne placée à 1025 m du bord gauche maintient une différence de niveau entre l'aval ($h_0 = 0,5$ m) et l'amont ($h_1 = 10$ m). L'eau se trouve au repos au moment où on ouvre instantanément la vanne, permettant à une onde de se propager.

Le résultat numérique du profil de la surface libre après 60s est donné à la figure 3.

La comparaison avec la solution analytique de Stocker montre une bonne concordance pour une discrétisation de 80 éléments linéaires et une progression temporelle de $\Delta t = 0,5s$. Le décentrement temporel vaut, comme pour les simulations suivantes, $\theta = 0,7$ tandis que le décentrement spatial est fixé à $\varepsilon = \Delta t/2$.

Exemple 2

Cette application permet de confronter les résultats numériques à des essais effectués sur modèle réduit.

Pour vérifier les résultats de ses recherches, Dressler [4] a effectué une série d'essais en canal rectangulaire horizontal de 65 m de long pour 0,225 m de large.

La hauteur d'eau en amont du modèle est de 11 cm et l'onde se propage sur fond sec.

Le coefficient de frottement sur les parois de verre, adopté pour la simulation, est fixé à $C = 60,24$, bien que Dressler mentionne à son sujet de grandes variations entre la mesure en hauteur uniforme et ses considérations théoriques pour obtenir la même vitesse de propagation.

Pour reproduire le phénomène, une hauteur uniforme de 2mm a été ajoutée à l'aval.

La figure 4 compare les résultats expérimentaux avec la courbe numérique de Sakkas et Strelkoff [5] et celle obtenue par les éléments finis linéaires, 4,87s après l'effacement du barrage.

La figure 5 montre la vitesse de propagation du front d'onde mesurée expérimentalement, ainsi que les

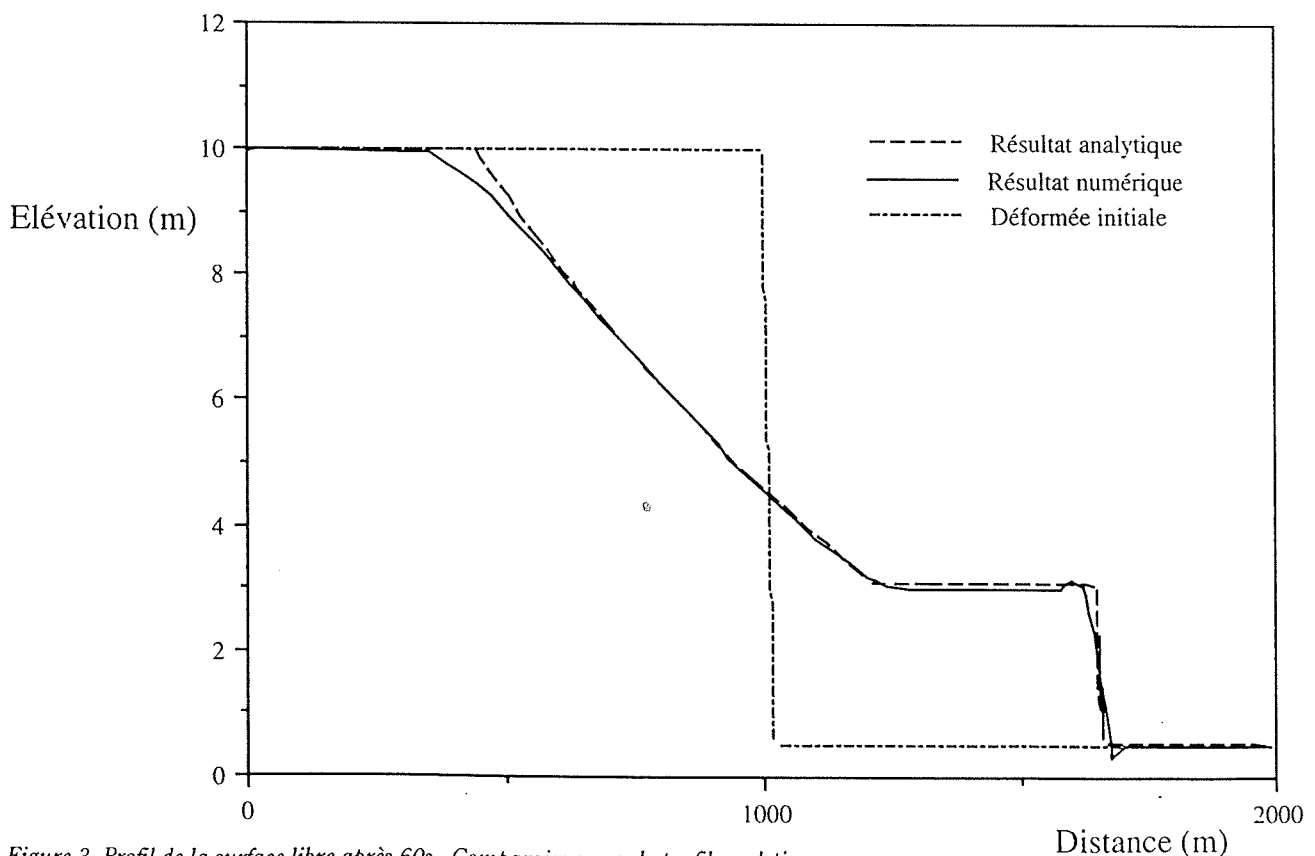


Figure 3. Profil de la surface libre après 60s - Comparaison avec le profil analytique

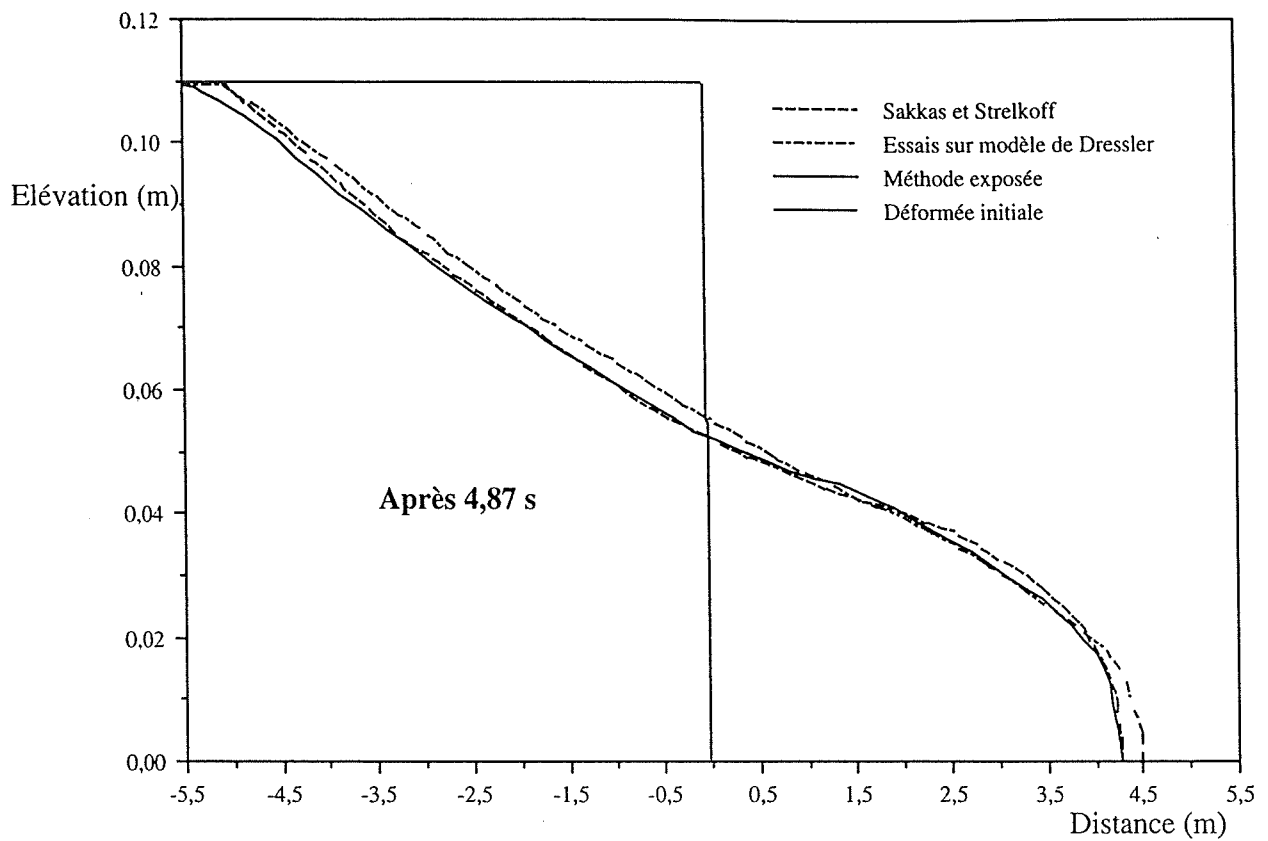


Figure 4 - Profil de la surface libre après 4,87s. Comparaison avec les résultats expérimentaux

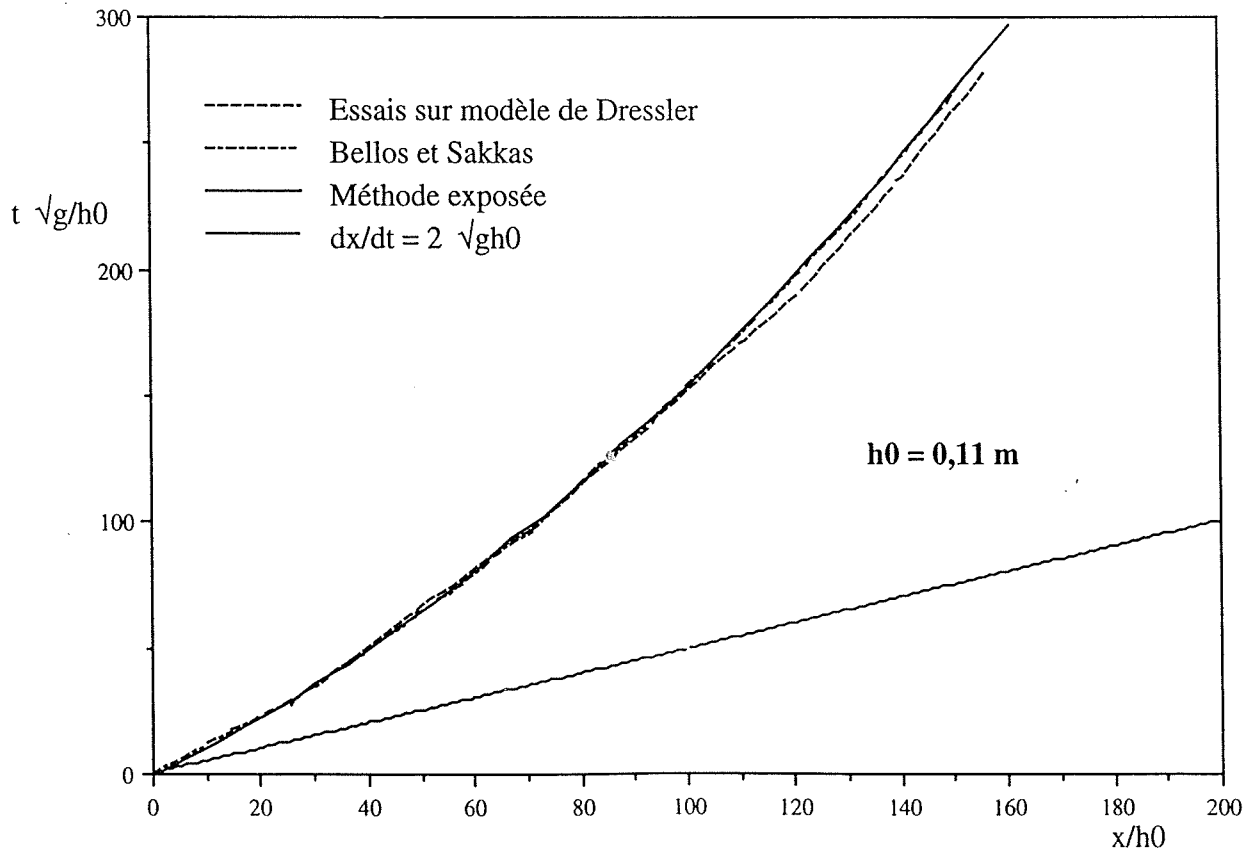


Figure 5 - Vitesse de propagation du front d'onde. Comparaison avec les résultats expérimentaux

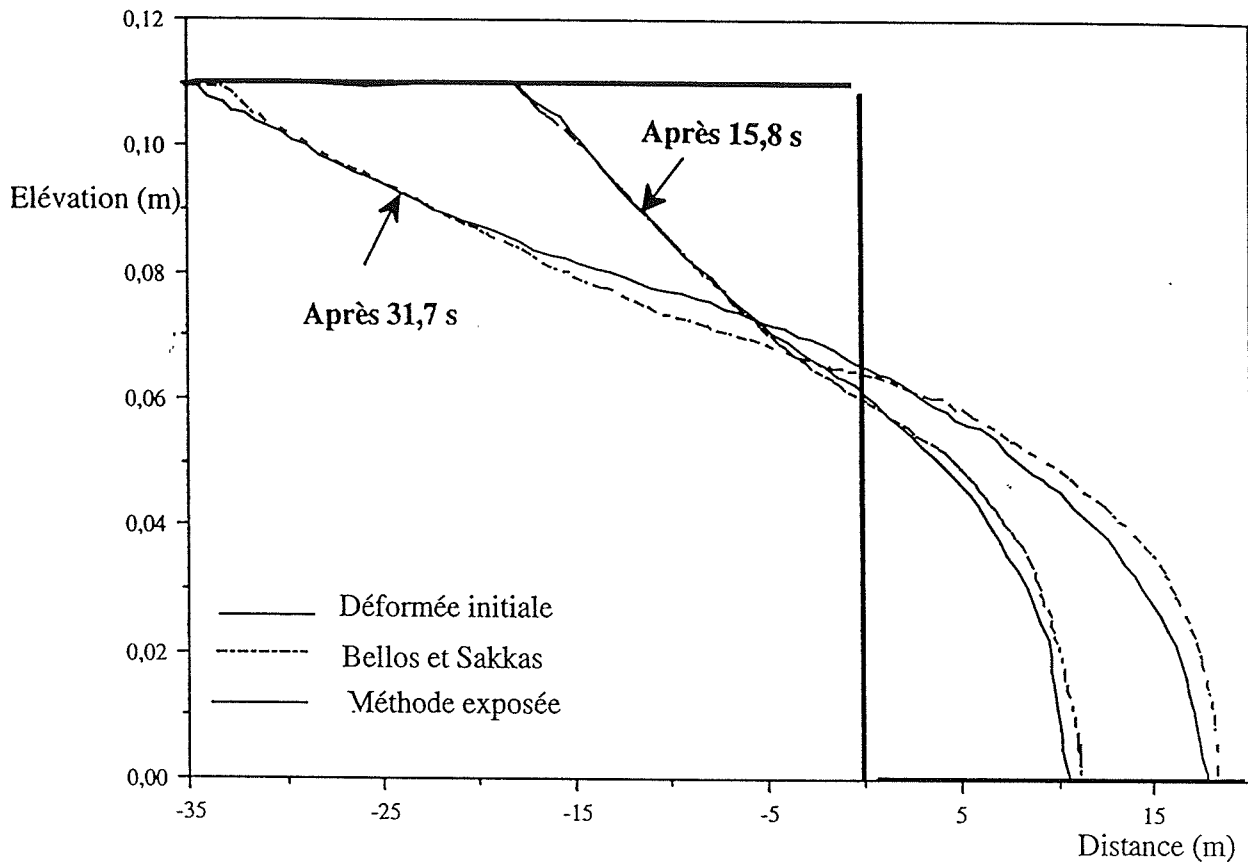


Figure 6 - Profil de la surface libre après 15,8s et 31,7s. Comparaison avec d'autres méthodes numériques

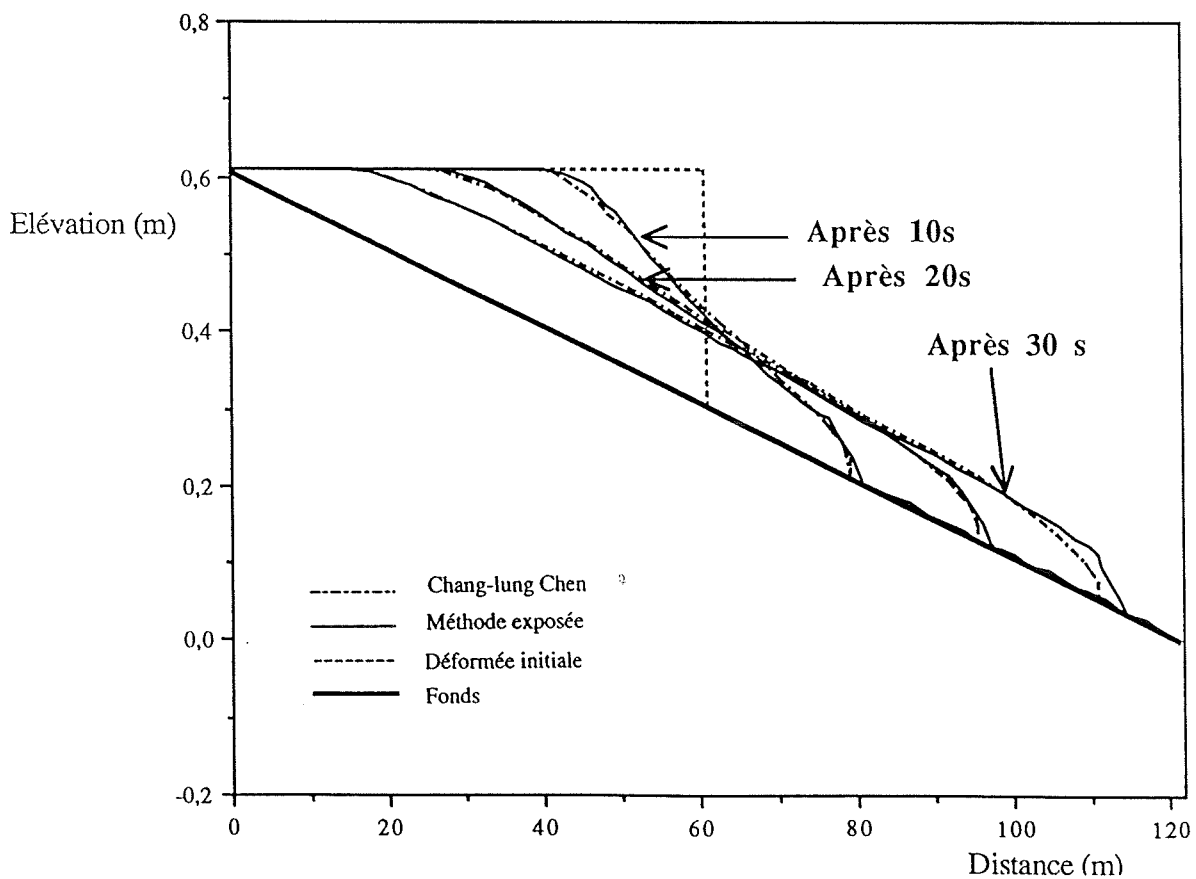


Figure 7 - Profil de la surface libre après 10, 20 et 30s. Comparaison avec Chang-lung Cheng

courbes numériques des mêmes auteurs.

La figure 6 compare les profils de la surface libre après 15,8s et 31,7s obtenus par Bellos et Sakkas [6], et par la méthode exposée dans cet article.

Ces résultats montrent là encore une bonne concordance.

Exemple 3

En 1960-61, le WES (Waterways Experiment Station, U.S. Corp of Engineers) a entrepris une série d'essais sur modèle dans un canal rectangulaire de 122 m de long sur 1,22 m de large. La pente du canal valait 0,005.

Le barrage, situé au milieu du canal, était ôté instantanément pour reproduire les conditions des ruptures brusques. La campagne d'essais comprenait des lâchers dans des conditions diverses de frottement et de débit.

La troisième simulation reproduit l'un d'eux, avec une hauteur d'eau au barrage de 0,305 m et une rugosité déterminée à partir d'un écoulement uniforme de $C = 111$.

En progressant par élargissement progressif du maillage avec le temps et en travaillant avec des valeurs de $\theta = 0,7$ et $\frac{\Delta t}{10} \leq \epsilon \leq \frac{\Delta t}{2}$, on obtient les profils de la figure 7 qui sont comparés aux résultats de Chang-lung Chen [8].

La figure 8 donne la distribution des vitesses le long du canal aux mêmes moments. On peut constater dans la distribution des vitesses, certaines perturbations numériques dans les résultats des deux modèles avec cependant une très bonne correspondance par rapport aux essais expérimentaux.

VII. CONCLUSIONS

Les quelques exemples développés montrent que la méthode de Galer-

kin peut être avantageusement modifiée pour modéliser avec précision des processus discontinus.

La résolution itérative donne une convergence rapide avec un minimum d'opérations tandis que la discrétisation implicite du temps conserve les avantages d'une plus grande stabilité et d'un choix de pas Δt plus grands.

La méthode des fonctions particulières permet d'éliminer les oscillations parasites sans écrêter le front d'onde.

A partir d'une variation brusque de hauteur sur un élément, on peut laisser évoluer le système qui reproduit dans les premiers instants les solutions de Ritter, avec une hauteur et un débit constants au droit du barrage. Les applications numériques montrent par ailleurs que le front d'onde peut être traité avec le reste de l'écoulement.

Le caractère général de la formulation autorise son application sans

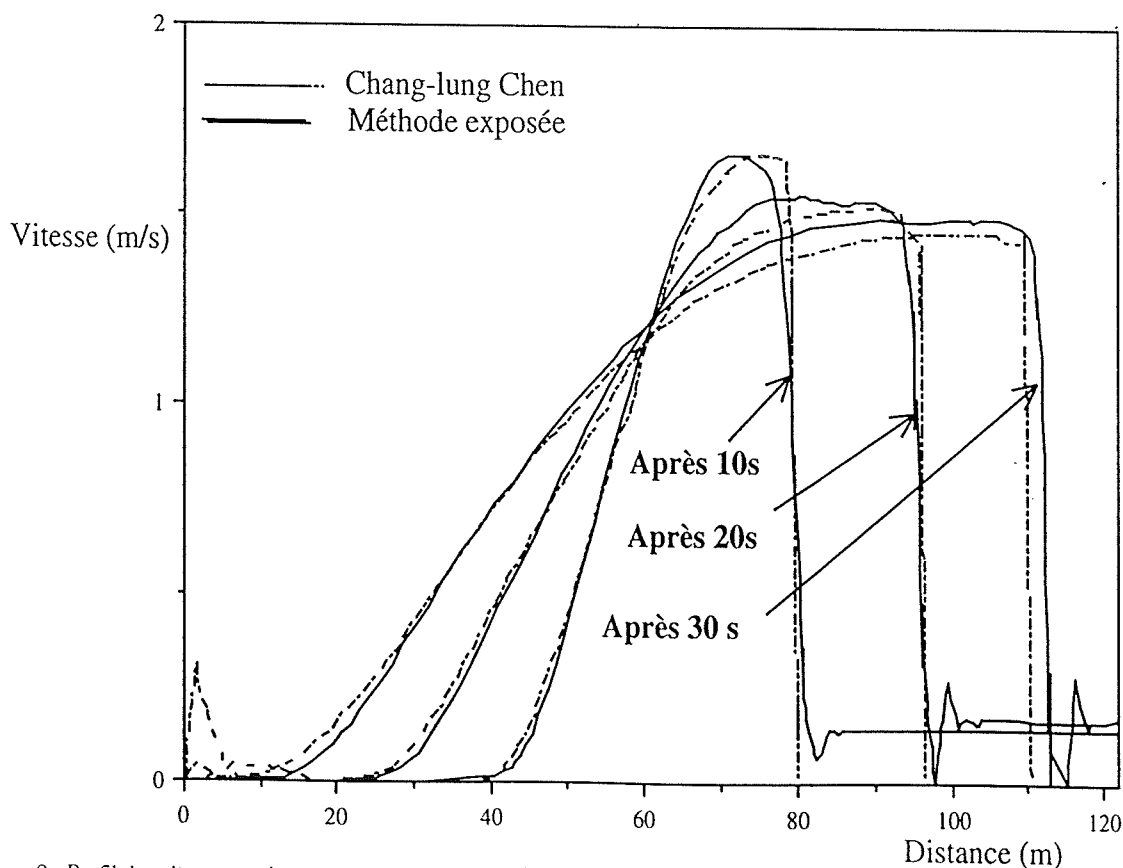


Figure 8 - Profil des vitesses après 10, 20 et 30s. Comparaison avec Chang-lung Cheng

aucune restriction à des géométries quelconques et son extension en bidimensionnel, où l'on dispose des avantages de souplesse inhérents à la méthode des éléments finis.

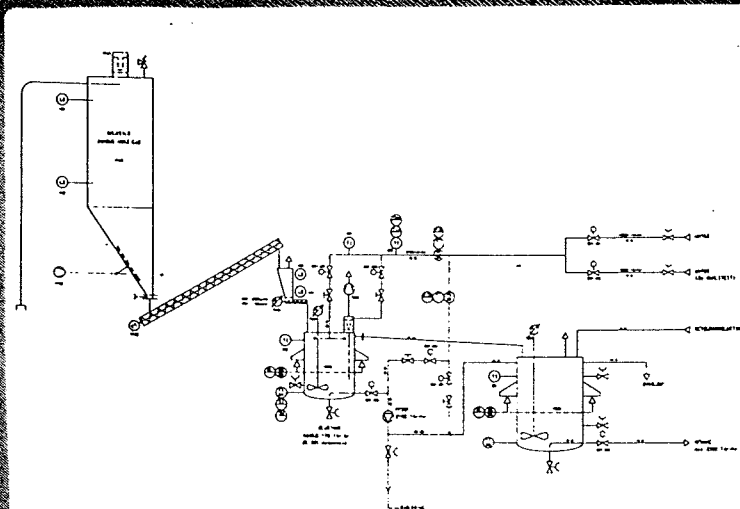
BIBLIOGRAPHIE

- (1) NIKOLAOS D. KATOPODES, «A dissipative Galerkin Scheme for Open-Channel Flow», Journal of hydraulic Engineering, ASCE, Vol 110 n°4, pp. 450-466, 1984.
- (2) RAYMOND, W.H., AND GARDER, A., «Selective Damping in Galerkin Method for Solving Wave Problems with Variable Grids», Monthly Weather Review, Vol 104, pp. 1583-1590, 1976.
- (3) STOKER J.J., «Water Waves», Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.
- (4) DRESSLER, R.F. «Comparison of Theories and Experiments for the Hydraulic Dam-Break Wave», Publication n° 38, International Association of Scientific Hydrology, pp. 319-328, 1954.
- (5) SAKKAS, J.G., AND STRELKOFF, T., «Dam Break Flood in a Prismatic Dry Channel», Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 99(12), pp. 2195-2216, 1973.
- (6) BELLOS, C.V., AND SAKKAS, J.G., «1D Dam-Break Flood-Wave Propagation on Dry Bed», Journal of hydraulic Engineering, Vol 113 n°12, pp. 1510-1524, Déc 1987.
- (7) «Floods Resulting from Suddenly Broken Dams», United States Army Corps of Engineers, Waterways Experiment Station, Vicksburg.
- (8) CHANG-LUNG CHENG, «Laboratory Verification of a Dam-Break Flood Model», Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol 106 n°4, pp. 535-556, 1980.

Installation complète de fabrication de lait de chaux pour le traitement de l'eau en général.
Commandes électriques comprises

Installations standards, mais aussi suivant spécification client.

Projets clef sur porte dans les domaines du stockage, transport, pesage et dosage, automatisation comprise.



**RIJKERS
INTERNATIONAL B.V.**

Boîte Postale 36 - 5400 AA Uden Pays-Bas Tél. (31) - 4132-63951 Fax (31) - 4132-66025