

UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES

**Applications des développements
harmoniques au calcul des
ouvrages hydrauliques métalliques**

par

Philippe RIGO
Ingénieur civil des Constructions ULg

1989

Collection des publications de la Faculté des Sciences Appliquées n° 120
Direction : A. Germain, Institut de Chimie, Bât. B6, Sart Tilman, B-4000 LIEGE, BELGIQUE

RESUME

Les bordages raidis ont fait l'objet de nombreux travaux qui ont pratiquement tous débouché sur des applications particulières.

Au départ, l'objectif poursuivi résulte du souci d'analyser aussi précisément que possible un nouveau type de barrage mobile en acier dont les éléments constitutifs sont des plaques et des coques orthotropes. Cet objectif primaire s'est en fait élargi à la mise au point d'un logiciel d'une portée beaucoup plus générale que ce qui a été fait jusqu'ici dans le domaine.

L'élément de base est la coque cylindrique, à épaisseur et rayon constants, et raidie par trois types de nervures, les raidisseurs et les traverses dans le sens longitudinal et les aiguilles dans le sens transversal.

Après une présentation de tous les développements analytiques nécessaires au calcul d'une structure bi-appuyée soumise à des forces de pression, nous avons envisagé le cas de structures sur appuis élastiques dont l'encastrement est un cas particulier. Pour ce faire, il convient d'appliquer des forces et des moments d'extrémités qui simulent les liaisons agissant au niveau des appuis de la structure.

Ce logiciel ainsi que les développements présentés sont appliqués au calcul d'un pont-canal, d'une porte marée-tempête et d'un barrage mobile. La conception et le calcul des vannes segments sont particulièrement délicats vu l'interaction existant entre le corps de la vanne et ses bras.

Un rappel des autres méthodes de calcul des coques et plaques est également présenté (bandes finies, éléments finis, ...). Des comparaisons au niveau des résultats sont réalisées entre les éléments finis et le logiciel proposé pour quelques cas précis d'application.

ABSTRACT

The hydraulic orthotropic steel structures have been the topic of many studies but practically all the researches were aiming at particular applications.

The first objective of the present research was the detailed study of a steel radial gate composed of orthotropic plates and shells. This first target has been widened by creating a software computing hydraulic orthotropic steel structures. In this field, the impact of our method is much more general than other previous ones.

The basic element is the cylindrical shell with a constant thickness and radius. The shells are reinforced by 3 types of stiffeners, 2 longitudinally and one transversally. After having presented all the mathematical developments for the design of a simply supported structure when the hydraulic forces are applied, we analyse the case of elastic and clamped supports. For this analysis we applied at each end of the shells, forces and bending moments to simulate the contact between the structure and the supports.

We use the new software for the design of a canal-bridge, a storm surge barrier and a mobile dam. The conception and the computing of a radial gate is specially difficult owing to the interaction between the girder-base and the arms.

An overview of the other methods of shell and plate design is also given (finite strips, finite elements, ...). An important comparison of the finite element method results and of our code has been included for many cases of applications.



SOMMAIRE.

INTRODUCTION.....	1
-------------------	---

PREMIERE PARTIE

HISTORIQUE DE LA METHODE DES BORDAGES RAIDIS ET DE LA CONCEPTION DES BARRAGES MOBILES.

CHAPITRE I : Historique de la méthode des bordages raidis.....	7
--	---

CHAPITRE II : L'évolution des barrages mobiles.

II.1 Introduction.....	11
II.2 Rappel des types de barrages mobiles existants.....	11
II.2.1 Les anciens barrages à commande manuelle.....	11
II.2.2 Les barrages mobiles à commande électro-mécanique.....	12
II.3 Proposition d'un barrage mobile ne comportant qu'une vanne par pertuis mais réalisant les objectifs précités.....	18
II.4 Conclusions	18

DEUXIEME PARTIE

LE LOGICIEL DE CALCUL DES BORDAGES CYLINDRIQUES RAIDIS

CHAPITRE I : Introduction	23
---------------------------------	----

CHAPITRE II : Les équations différentielles des coques cylindriques de section circulaire et d'épaisseur constante

II.1 Définitions et notations	25
II.2 Les équations différentielles générales des coques cylindriques de section circulaire et d'épaisseur constante	26

II.3	Les équations différentielles simplifiées des coques cylindriques de section circulaire et d'épaisseur constante	28
II.4	Les équations différentielles des coques cylindriques de section circulaire et raidies dans le sens des coordonnées	37
II.4.1	Quelques notions utiles du calcul symbolique	37
II.4.2	Calcul des $N_x, N_\varphi, M_x, M_\varphi$	39
II.4.3	Calcul des $N_{x\varphi}$ et $N_{\varphi x}$	42
II.4.4	Calcul des $M_{x\varphi}$ et $M_{\varphi x}$	48
II.4.5	Etablissement des équations différentielles des coques raidies en tenant compte de l'effet discontinu des raidisseurs	51
 CHAPITRE III : Etablissement du système d'équations différentielles		
III.1	Coques raidies par 3 lits de nervures	55
 CHAPITRE IV : Considérations sur les nervures du type traverse.		
61		
 CHAPITRE V : Résolution du système d'équations différentielles de la coque raidie et non chargée. Etablissement des expressions analytiques des u, v, w et des efforts $N_\varphi, N_x, M_\varphi, \dots$, en fonction des 4 constantes d'intégration.		
V.1	Résolution du système	65
V.2	Expressions des u, v, w	68
V.3	Détermination des relations entre les coefficients de w et de ceux de u et v	69
V.4	Calcul des éléments de réduction	71
V.5	Remarques	71
 CHAPITRE VI : Calcul de l'effet des traverses sur un cylindre complet. Schéma de la méthode de résolution.		
73		
VI.1	Détermination de l'amplitude des lignes de forces	74
VI.2	Remarques	78
 CHAPITRE VII : Schéma de la résolution complète du calcul d'une structure constituée de coques raidies.		
VII.1	Au niveau de chaque coque	81
VII.2	Au niveau de la structure complète	88
 CHAPITRE VIII : Développement analytique nécessaire à la résolution d'un assemblage de coques raidies		
VIII.1	Détermination des 4 constantes d'intégration pour les 4 cas de charge de base	91
VIII.1.1	Détermination des déplacements U_C, V_C, W_C	91
VIII.1.2	Détermination des déplacements U_A, V_A, W_A	93
VIII.1.3	Détermination des déplacements U_B, V_B, W_B	93
VIII.1.4	Détermination des déplacements U_D, V_D, W_D	94
VIII.2	Types de charge extérieure à envisager dans la résolution d'un cas concret	95
VIII.2.1	Variation de la charge en mètre d'eau selon $\alpha\varphi$	96
VIII.2.2	Détermination des déplacements U_o, V_o, W_o créés dans le cylindre complet chargé par la sollicitation extérieure $P(\varphi)$	98

VIII.3	Détermination des efforts transmis par les traverses sur le cylindre complet non raidi.	101
VIII.3.1	Détermination des 9 systèmes	102
VIII.4	Expression des conditions aux limites, matrices d'assemblage des différents panneaux	104
VIII.4.1	Conditions d'appui	105
VIII.4.2	Assemblage de plusieurs panneaux	106
VIII.4.3	Quelques conventions	107
VIII.4.4	Définition du sens de parcours de l'assemblage	109
VIII.4.5	Changement de repère	110
VIII.4.6	Formation des équations d'équilibre et de compatibilité	112
VIII.4.7	Rangement des coefficients dans la matrice A de manière à former le système de 8N équations à 8N inconnues.....	115
VIII.5	Expressions analytiques des déplacements et des éléments de réduction via les dérivées en u,v,w	116
VIII.6	Calcul des contraintes	118
VIII.6.1	Contraintes σ_x	118
VIII.6.2	Contraintes tangentielles $\tau_{x\phi}$, $\tau_{\phi x}$, $\tau_{\phi z}$	119
VIII.7	Vérification	124
VIII.7.1	Introduction	124
VIII.7.2	Vérification des équilibres de translation selon les axes Ox^* , Oy^* , Oz^*	125

CHAPITRE IX : Principe du logiciel de base

IX.1	Organigramme du logiciel de base	129
IX.2	Description des divers blocs de l'organigramme.	129
IX.2.1	Le bloc d'entrée	129
IX.2.2	Le bloc de base	129
IX.2.3	Le bloc de résolution	129
IX.2.4	Le bloc d'assemblage n°1	131
IX.2.5	Les blocs d'impression et de dessin	131

TROISIEME PARTIE

EXTENSION DU LOGICIEL DES BORDAGES RAIDIS A DES STRUCTURES AYANT DES CONDITIONS D'APPUI PARTICULIERES

CHAPITRE I :	Introduction	135
CHAPITRE II :	Généralités .	
II.1	Les conditions aux limites	137
II.2	Charges extérieures	137
II.2.1	Effort N_b	141
II.2.2	Moment M_b	141
II.3	Développement en série de Fourier de fonctions discontinues	142
II.4	Application du développement en série aux charges usuelles	144
II.4.1	Charge uniforme	144
II.4.2	Charge répartie sur un intervalle d^* centré	144
II.4.3	Deux charges réparties antisymétriques	145

CHAPITRE III : Expressions analytiques relatives aux forces et aux moments de bord (sections $x=0$ et $x=L$).

III.1	Introduction	147
III.2	Choix des fonctions de forme à donner aux forces et moments de bord	147
III.3	Expressions analytiques relatives à la force de bord N_b	150
III.3.1	Développement de la charge N_b de bord en série de Fourier	150
III.3.2	Expressions analytiques des déplacements U_a, V_a, W_a d'un cylindre complet chargé par des forces de bord N_b	152
III.4	Expressions analytiques relatives aux moments de bord M_b	155
III.4.1	Développement du moment de bord M_b en série de Fourier	155
III.4.2	Expressions analytiques des déplacements U_c, V_c, W_c d'un cylindre complet soumis à des moments de bord M_b	156
III.4.3	Remarques sur le développement en série de Fourier d'un moment de bord	159
III.5	Vérifications à l'aide de quelques exemples du comportement des développements en série des effets de bord.....	159
III.5.1	Exemple 1	159
III.5.1	Exemple 2	160
III.5.1	Exemple 3	162

CHAPITRE IV : Relations "Déplacements - Forces de bord- Moments de bord".

IV.1	Conservation des section planes	165
IV.2	Cas de la poutre bi-appuyée - Déplacements d'extrémités	167
IV.3	Cas d'une vanne-segment	168
IV.4	Mise en équation du problème	169
IV.5	Processus de résolution	171

CHAPITRE V : Choix des conditions de bord

V.1	Avantages et inconvénients du choix des conditions de continuité des forces de bord.	180
V.1.1	Exemple n° 1	181
V.1.2	Exemple n° 2	192
V.1.3	Conclusions	193
V.2	Choix de l'emplacement des points soumis aux conditions sur u et dw/dx	197
V.2.1	Cause d'indétermination du système	197
V.2.2	L'uniformité dans la répartition des conditions de bord	204
V.2.3	Conclusions	208
V.3	La complémentarité des forces et moments de bord	209

CHAPITRE VI : Schéma du logiciel des bordages raidis dans sa phase définitive.

VI.1	Présentation de l'organigramme final du logiciel	213
VI.2	Description des blocs du logiciel dans sa phase finale	213
VI.2.1	Complément n° 1 au bloc de base	213
VI.2.2	Complément n° 2 au bloc de résolution	213
VI.2.3	Complément n° 3 au bloc d'assemblage n° 1	215
VI.2.4	Bloc des effets de bord	215
VI.2.5	Bloc d'assemblage n° 2	215

CHAPITRE VII : Conclusions	217
---	-----

QUATRIEME PARTIE

LES APPLICATIONS

CHAPITRE I : Introduction	221
--	-----

CHAPITRE II : Expérimentation numérique

II.1 Le cylindre complet sous pression uniforme	223
II.2 Le cylindre complet sous une ligne de charge	224
II.3 Le cylindre complet fendu le long d'une génératrice	224
II.4 Coque cylindrique sous pression uniforme	226
II.5 La contribution des semelles à la reprise de l'effort de cisaillement	228
II.5.1 Sans transmission du cisaillement aux semelles	228
II.5.2 Avec transmission du cisaillement aux semelles.....	231
II.6 Applications aux voiles longs soumis à l'action de forces axiales appliquées aux 2 extrémités .	231
II.7 Vérification du principe de Saint-Venant	233

CHAPITRE III : Etude d'un pont canal.

III.1 Etude de la travée bi-appuyée	237
III.2 Etude du pont sur appuis multiples	242
III.3 Influence du nombre de termes de la série de Fourier	246

CHAPITRE IV : Etude d'une porte marée-tempête. 249 |

IV.1 La discrétisation de la structure	251
IV.2 Le calcul et les résultats	251

CHAPITRE V : L'étude d'un barrage mobile muni de vannes segments.

V.1 Etude des dimensions et des formes à donner aux vannes des barrages mobiles	255
V.1.1 Énumération des facteurs de choix relatifs à la forme à donner aux vannes des barrages mobiles	255
V.1.2 Influences des facteurs de choix	256
V.1.3 Un cas précis à titre d'exemple	257
V.2 Le prédimensionnement (première approche)	259
V.2.1 Choix de l'acier	259
V.2.2 Les contraintes admissibles	259
V.2.3 Les sollicitations	260
V.2.4 Schématisation de la structure	261
V.2.5 Résultats du prédimensionnement	263

V.3	Etude de l'articulation reliant les bras aux piles	264
V.3.1	Les articulations des bras	264
V.3.2	Conclusions	266
V.4	Calcul de la vanne (seconde approche)	268
V.4.1	Présentation des résultats	273
V.4.2	Influence de la rigidité des bras sur l'état de contrainte dans la vanne	279

CHAPITRE VI : Autres applications du logiciel des bordages raidis.

VI.1	Les sollicitations antisymétriques	283
VI.2	La précontrainte des coques en béton	287

CINQUIEME PARTIE

ETUDE DES LIENS ENTRE LES METHODES DE CALCUL

CHAPITRE I : Analyse des liens entre les diverses méthodes de calcul et étude de leurs interconnexions.	291
I.1 Classement des méthodes d'analyse harmonique des structures	292
I.1.1 La solution de GOLDBERG et LEVE pour des coques prismatiques simplement appuyées à leurs extrémités	294
I.1.2 Les bandes finies	295
I.1.3 Extension de la méthode des bandes finies	296
I.1.4 Les éléments tridimensionnels de coque épaisse adaptés à l'analyse harmonique des structures	296
I.1.5 La méthode des bordages raidis	297
I.1.6 Méthode de F. DEL POZO	298
I.1.7 Méthode de GUYON-MASSONNET	298
I.2 Méthode de YITZHAKI	298
I.3 Méthode des différences finies	299
I.4 Comparaison entre les méthodes d'analyse harmonique et les éléments finis classiques	299
I.5 Similitudes, face aux diverses conditions d'appuis, de la méthode des bordages raidis et des bandes finies	300
I.6 Classification des modèles de calcul selon le type d'hypothèses : contraintes (S.A.) ou déplacements (C.A)	303
I.7 Conclusion	303
CHAPITRE II : Accessibilité à la méthode des bordages raidis.	305
II.1 En pratique	306

SIXIEME PARTIE

CONCLUSIONS

Conclusions	309
--------------------------	------------

*

* *

INTRODUCTION

Les exigences de plus en plus sévères que l'on impose aux structures métalliques, aussi bien au niveau de leur fonction que de leur sécurité ou de leur aspect esthétique; ainsi que l'évolution de l'outil informatique, ont profondément modifié la technique de conception et de réalisation de ces ouvrages.

Anciennement, l'outil de prédimensionnement coïncidait avec celui utilisé pour les vérifications au stade final du projet. Le projeteur ne disposait que des règles classiques de la Résistance des Matériaux (R.D.M.) et de son talent, voire son courage, pour bâtir des ponts, des écluses, et autres ouvrages d'art. Il faut reconnaître qu'il a souvent bien réussi. Ainsi G. EIFFEL [E.1] et A. VIERENDEEL [V.1] furent tous deux des génies de la construction métallique : leur bon sens leur permit d'accomplir hier ce que peu d'entre nous érigerait aujourd'hui sans l'aide de l'informatique.

Actuellement, la voie du prédimensionnement s'écarte quelque peu de celle prise par les méthodes globales de calcul utilisées au stade final d'un projet [W.1]. En effet, il s'agit de distinguer la partie purement conceptuelle pour laquelle l'ingénieur doit partir des seules données (portée, retenue, charge, ..), pour fixer la forme de la structure et ensuite dimensionner les divers éléments constitutifs (bordages, aiguilles, raidisseurs, bras de support, articulations, caissons étanches, soudures, ...). Nous appellerons cette première phase : **Prédimensionnement**.

Ce prédimensionnement peut s'aborder de deux manières :

soit traditionnellement en appliquant les règles de la R.D.M. à des structures aussi simples que possibles; c'est selon cette approche que dans le cadre de ce travail, nous présenterons la Méthode de la Poutre Caisson qui sera développée ci-après,

soit par approximations successives, les dimensions de départ étant choisies a priori par des ingénieurs chevronnés ayant l'habitude du type de la structure étudiée. Ces itérations lourdes de temps pour l'ingénieur avant l'ordinateur sont maintenant courante et la C.A.O en est le plus bel exemple [C.2, M.1].

Ensuite viennent naturellement les calculs de vérification tenant compte de la géométrie de la structure ainsi définie, du poids propre, des cas de charges exceptionnelles, ...

C'est la deuxième phase, qui sera pour nous la **Vérification d'ensemble**.

Ainsi pour un ouvrage hydraulique tel que porte d'écluse, vanne de barrage mobile, cette seconde phase présente notamment les points suivants :

- vérification des contraintes et des déplacements dans toute la structure pour le cas normal d'utilisation,
- vérification des contraintes et des déplacements dans toute la structure pour les cas exceptionnels d'utilisation,
- calcul des assemblages (boulons HR, cordons de soudure, ...),
- vérification au voilement des panneaux,
- vérification au flambement des éléments comprimés,
- calcul des éléments nécessaires à la manoeuvre, vérins, articulations, points de fixations,,
- dimensionnement des étanchéités,
-

Pour réaliser ces vérifications, il s'agit de disposer d'un logiciel et d'un support informatique capable d'analyser la structure, non pas comme une série de pièces séparées, mais comme un ensemble monolithe à haut degré d'hyperstaticité.

La vérification des contraintes et des déplacements dans la structure nous intéresse au premier plan au niveau de cette thèse. Il s'agit en effet de se définir un outil permettant de calculer la structure globale en réduisant au maximum les simplifications et approximations sur la géométrie de la structure, sur l'interdépendance des divers éléments constitutifs (bordages, raidisseurs, aiguilles, bras, ...), sur la sollicitation, sur la déformation,

Un outil existe déjà : les éléments finis voire les bandes finies. Néanmoins, notre but est de mettre au point une méthode différente, ayant des caractéristiques spécifiques applicables aux structures hydrauliques réalisées en acier.

L'essentiel de cette thèse est consacré à l'extension de la méthode des bordages raidis pour permettre le calcul de nombreux ouvrages hydrauliques; par exemple, le calcul d'ensemble en régime élastique d'une vanne segment compte tenu de sa liaison avec ses bras. Pour ce cas particulier, le premier problème rencontré est celui de la forme circulaire du parement amont de ces ouvrages et le second est celui de la liaison de la vanne.

La seconde partie de cette thèse résout le premier problème, en créant le logiciel de calcul des bordages cylindriques raidis; logiciel ouvert aussi bien aux structures planes que courbes. Précédemment seules les équations relatives aux plaques avaient été utilisées; pour notre part, nous avons voulu traiter le problème dans toute sa généralité en utilisant les équations différentielles relatives aux coques cylindriques. Ces coques pourront être raidies par 3 lits distincts de nervures orientées selon les axes des coordonnées. De plus, des améliorations relatives à la contribution des semelles libres à la reprise des efforts rasants sont proposées.

La troisième partie propose une méthode nouvelle pour accroître le champ d'application du logiciel à des structures ayant des conditions de bord particulières (encastremements et appuis élastiques). En effet, l'appui simple était jusqu'alors la seule condition admissible vu les développements en série de Fourier de la méthode des bordages raidis. Cette troisième partie apporte donc la solution au problème posé par la liaison rigide entre la vanne et des bras relativement souples.

La quatrième partie est relative aux applications. Nous présenterons d'abord au travers de quelques exemples didactiques la confirmation de la validité de la méthode des bordages raidis. Pour ce faire, des comparaisons avec d'autres méthodes ont été réalisées.

Nous présentons ensuite, trois applications, le calcul de la travée centrale d'un pont canal sur appuis multiples, puis l'étude d'une porte marée tempête et enfin le calcul d'une vanne segment compte tenu des appuis élastiques que sont ses bras.

Dans le cadre de cette troisième application, nous étudions la forme à donner aux vannes des barrages mobiles en tenant compte de divers impératifs (portée, débit maximum et minimum, débit solide, embâcle, glace, ...). Ensuite, nous développons les idées maîtresses relatives à la méthode de prédimensionnement utilisée; cette méthode tient surtout par son approche du problème et par les simplifications émises plutôt que par la technique de calcul qui est d'ailleurs très simple.

Toutes ces considérations ont été mises au service d'un type nouveau de barrage mobile dont l'intérêt est grand lorsqu'il s'agit de retenues d'eau de faibles et moyennes hauteurs. Ainsi qu'on le verra ci-après (cf. Chap. II, 1ère partie), dans leur version moderne, les barrages mobiles comprennent souvent deux pièces importantes : la vanne et la hausse appelée aussi vannette. Leur utilisation s'indique parfaitement pour des retenues de l'ordre de 10 à 20 m. Elles seront toutefois utilement remplacées par une structure beaucoup plus simple, ne comprenant qu'une pièce mobile, pour les retenues de l'ordre de 3 à 5 m qui sont très fréquentes dans les parties supérieures des bassins hydrographiques.

La cinquième partie se consacre à l'étude des liens entre les grandes méthodes globales de calcul : éléments finis, bandes finies, bordages raidis,; nous y rappelons leurs bases théoriques et numériques et les relient par l'intermédiaire de leurs traits communs. On peut ainsi mieux cerner les particularités de la méthode des bordages raidis vis-à-vis des autres techniques de calcul et de ce fait, définir le domaine d'application propre à chaque méthode.

Avant d'aborder ces différents aspects, il est utile de restituer le problème. Pour ce faire, dans la première partie de cette thèse, nous retraçons brièvement l'historique de la méthode des bordages raidis (chapitre I) et ensuite l'évolution dans la conception des barrages mobiles (chapitre II); ceux-ci constituant par excellence le type de structure susceptible d'être calculée à l'aide du logiciel proposé. Le calcul de la vanne segment est d'ailleurs l'exemple principal d'application figurant dans la thèse.

PREMIERE PARTIE

HISTORIQUE DE LA METHODE DES BORDAGES RAIDIS ET
DE LA CONCEPTION DES BARRAGES MOBILES.

CHAPITRE I

HISTORIQUE DE LA METHODE DES BORDAGES RAIDIS

Le calcul des structures composées de coques et de plaques a toujours été l'objet du souci des ingénieurs. Ainsi, ponts, écluses, châteaux d'eau, barrages mobiles, toitures de bâtiments, ont été à l'origine de nombreuses recherches.

Diverses approches du problème ont été réalisées, Levy [L.1], Estanave [E.2], Timoshenko [T.1], Vlassov [V.2], Flügge [F.3], ..., Goldberg et Leve [G.1], ... s'occupèrent des plaques lisses; Massonnet [M.2], s'attacha lui au calcul des ponts à poutres multiples. L'apparition des ordinateurs permit le développement de la méthode des éléments finis [Z.1] puis des bandes finies [C.1].

Face à cette situation, une méthode spécifiquement adaptée aux structures hydrauliques, celles-ci étant toujours fortement raidies, était nécessaire; elle apparut sous le couvert de **développements harmoniques appliqués aux coques cylindriques raidies**.

Cette méthode, dite des **bordages raidis** trouve son origine en 1961 lorsque N.M. Dehousse [D.1] présenta les fondements théoriques de la méthode. Il développa les équations différentielles des coques cylindriques raidies, raidissages selon la circonférence mais aussi selon les génératrices. Il présenta aussi le moyen de tenir compte de l'effet concentré de ces nervures à l'aide des fonctions de Heaviside et de Dirac [F.1]. La résolution des équations différentielles qu'il établit, est basée sur les développements en série de Fourier. Il résolut ces équations pour des structures appuyées en $x=0$ et $x=L$, par des développements en série selon les génératrices (figure 1.1.1.); mais aussi par des développements selon la courbure lorsque les bords d'appuis sont en $\varphi=0$ et $\varphi=\varphi_0$ (figure 1.1.2.).

Limité par la lourdeur des expressions analytiques établies, seuls des cas simples purent être envisagés. De plus, seul le cas d'une coque unique fut pris en considération, les bords parallèles aux génératrices pouvant être libres, appuyés ou encastres mais pas en liaison avec une autre coque (figure 1.1.1).

Dans la suite de l'exposé, nous n'envisagerons que le cas du développement selon les génératrices (figure 1.1.1).

Au niveau des coques cylindriques, plus rien n'a été développé dans le cadre de cette méthode jusqu'aux développements que nous proposons aujourd'hui.

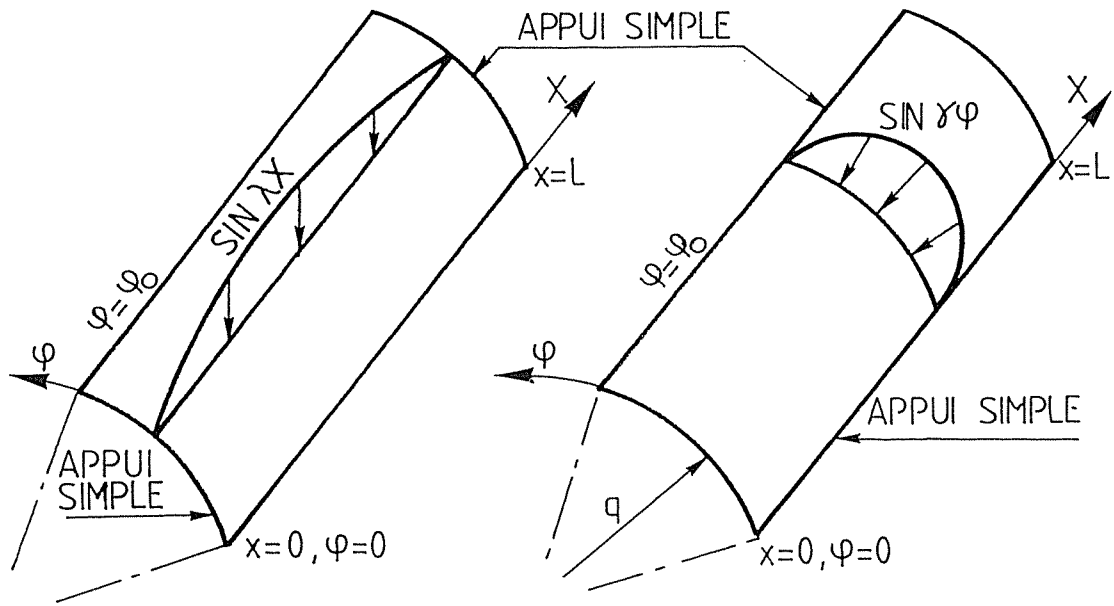


Figure 1.1.1

Figure 1.1.2.

Cependant, en 1967 N.M. Dehousse et J. Deprez ont réécrit les équations pour des plaques raidies et le premier exemple concret traité de structures complexes fut celui d'une porte d'écluse à vantail unique. Ce calcul fut possible grâce au support de l'ordinateur IBM 7040 du centre de calcul de l'Université de Liège, mais ne concernait encore qu'une seule plaque [D.2].

Ce n'est qu'en 1982 que Ph. Beguin [B.1] et R. Arnould [A.1] ont permis le calcul de structures pouvant contenir plusieurs panneaux raidis. Ils imposèrent à la jonction des différents panneaux les équations d'équilibre et de compatibilité, ce qui permit la détermination des inconnues hyperstatiques.

En résumé, avant l'élaboration du logiciel que nous proposons dans cette thèse, seul le cas particulier des structures composées de plaques avait été envisagé. De plus, ces plaques (figure 1.1.3) devaient obligatoirement être bi-appuyées en $x=0$ et $x=L$, ce qui constituait de nouveau une entrave à la généralisation de la méthode.

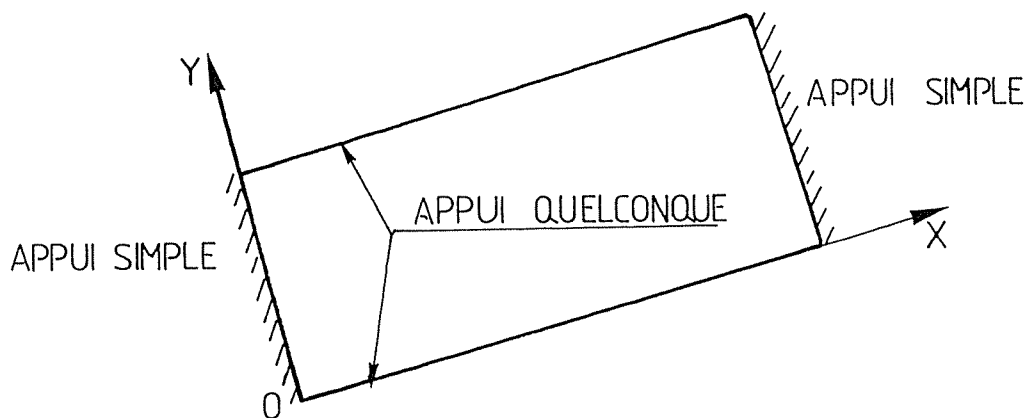


Figure 1.1.3.

Notre contribution est donc double, d'abord en partant des équations différentielles des coques cylindriques raidies auxquelles nous avons apporté des améliorations, **nous avons élaboré un logiciel de calcul pour des structures composées de coques et/ou de plaques raidies**. Ces développements sont décrits dans la partie II de cette thèse.

Ensuite, **nous avons élargi les possibilités d'applications du logiciel en permettant l'étude de structures ayant des appuis divers en $x=0$ et $x=L$ (appuis élastiques, encastrements,**). Cette contribution originale que nous proposons est reprise à la partie III de cette thèse.

Il faut souligner que nous avons préféré concevoir le logiciel de calcul basé sur la théorie des coques cylindriques, en faisant fi des développements existants relatifs aux plaques; plutôt que de fonder celui-ci sur les cas particuliers que sont les plaques.

Bien que la tâche semble plus ardue de concevoir d'abord en généralité et ensuite d'en déduire les cas particuliers, c'est en tout cas la route la plus sûre et celle que nous avons choisie.

Ainsi par exemple, l'intégration de la charge hydraulique nécessaire pour obtenir les déplacements, a donné des expressions contenant 38 termes différents dont les 16 termes requis pour les plaques déjà connus. Ceci n'est bien sûr qu'un exemple, mais il est révélateur des changements apportés.

CHAPITRE II

L'EVOLUTION DES BARRAGES MOBILES

II.1. INTRODUCTION

L'existence des barrages mobiles est une condition fondamentale du développement de la navigation fluviale [B.2, D.3, G.2].

Ceux-ci permettent en effet de conserver un tirant d'eau suffisant pour autoriser la navigation des unités de transport dans les meilleures conditions et ce, le plus grand nombre de jours possible par an.

Dans le principe, leur rôle est de maintenir les niveaux d'eau entre deux niveaux de référence : le niveau inférieur devant garantir une aisance suffisante aux bateaux et le niveau supérieur devant, quant à lui, limiter les débordements en amont du barrage mobile.

II.2. RAPPEL DES TYPES DE BARRAGES MOBILES EXISTANTS

II.2.1. Les anciens barrages à commande manuelle

Les plus connus en Europe sont sans aucun doute les barrages à aiguilles, à fermette, à poutrelles, à hausses [A.3, A.4, D.4, J.1].

La figure 1.2.1. donne à titre d'exemple la vue en coupe transversale d'un barrage à fermettes et aiguilles.

Dans ces barrages, la bouchure est réalisée par des aiguilles, c'est-à-dire des pièces de section carrée disposées verticalement (ou sous une faible pente vers l'aval). Elles prennent appui en bas sur un seuil en saillie et sont retenues à la partie supérieure par un dispositif qui peut être un câble tendu, une poutre, ...

Placées jointivement, les aiguilles travaillent indépendamment mais forment une paroi plus ou moins étanche.

Le paramètre fondamental en ce qui concerne la résistance des aiguilles est la **hauteur de la retenue**. En effet, celle-ci conditionne totalement la charge à supporter par les aiguilles; la largeur de la passe n'ayant ici aucune influence.

Les contraintes liées à la manutention conduisent à des dimensions très réduites de ces aiguilles; par exemple 15 cm x 15 cm de section.

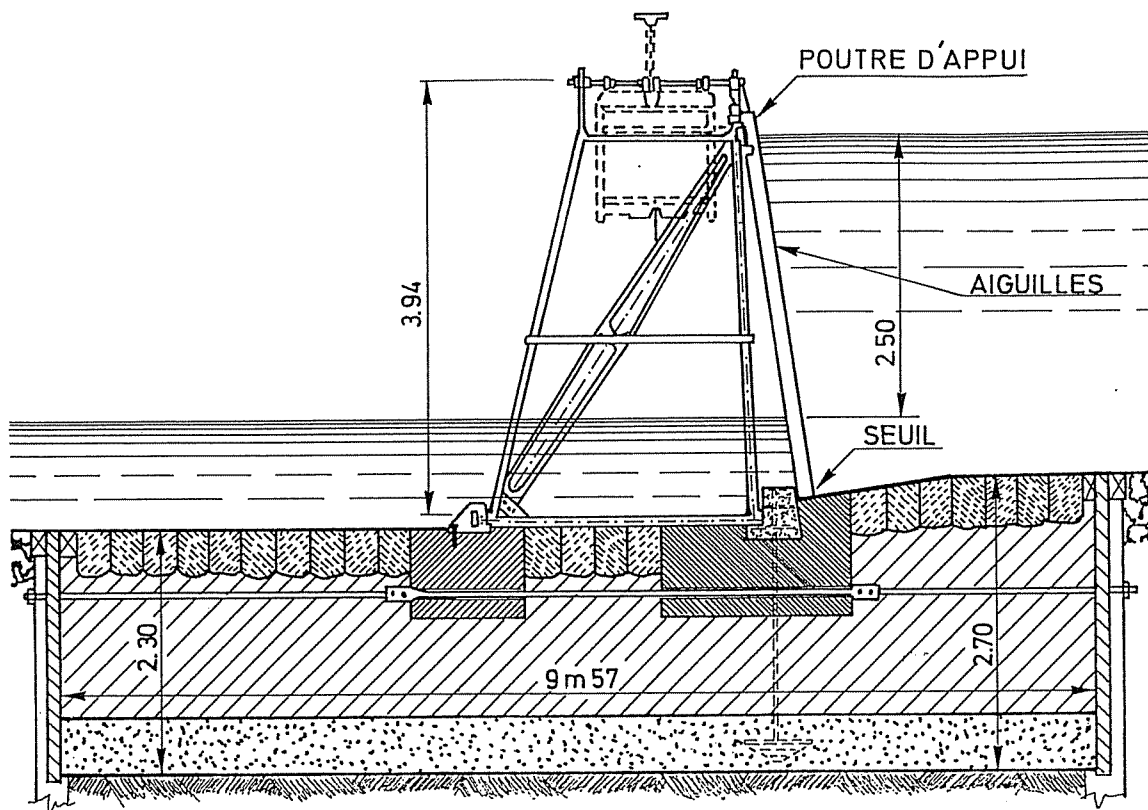


Figure 1.2.1.
 Vue en coupe transversale d'un barrage à fermettes et aiguilles.

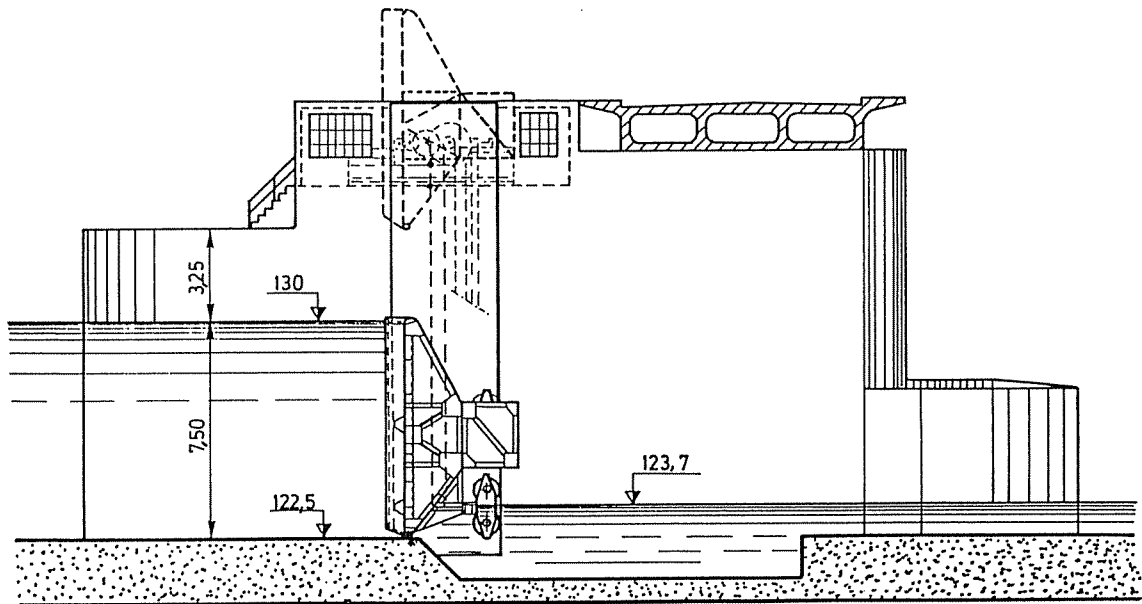
Le nombre d'éléments composant la bouchure étant très important, la précision du réglage du débit évacuable est très bonne. Mais par contre, l'étanchéité devient fort aléatoire vu le grand nombre d'éléments constitutifs entre lesquels aucun dispositif d'étanchéité n'est prévu et la vitesse d'exécution des opérations de manoeuvre est fortement réduite avec l'accroissement du nombre d'éléments à déplacer. De plus, le danger pour les barragistes qui effectuent ce travail n'est pas négligeable, et nombre de mesures de sécurité ont dû être prises au cours du temps pour les réduire.

Ces considérations s'appliquent dans leur principe à tous les anciens barrages composés d'un grand nombre de petits éléments; poutrelles, fermettes et hausses.

II.2.2. Les barrages mobiles à commande électro-mécanique

L'évolution des techniques, à savoir le développement de la connaissance des matériaux, l'élaboration de nouvelles techniques de calcul plus performantes, la tendance à l'automatisation, ont conduit au remplacement des barrages les plus anciens par des systèmes à segment, à secteur, à clapet, à vanne levante, ..., dont la figure 1.2.2. montre un exemple désormais

classique. [A.2, G.3, G.4, G.5, P.1].



COUPE TRANSVERSALE (VANNE LEVANTE)

Figure 1.2.2. - Vanne levante en une pièce.

Ces barrages sont tous caractérisés par un nombre réduit d'éléments constitutifs [P.2, R.1, V.3, W.2].

L'élément principal couvre à lui seul la totalité du pertuis et la manoeuvre se fait à l'aide de câbles, chaînes ou vérins.

Dans ces conditions, l'étanchéité est très bonne vu ce nombre réduit d'éléments constituant la bouchure. Il en résulte une grande sécurité pour le personnel de contrôle et une grande vitesse d'exécution des manoeuvres.

N'ayant souvent qu'un seul élément pour réguler le débit, la précision des manoeuvres à effectuer doit cependant être d'un très haut niveau, pas toujours aisé à atteindre en pratique.

La recherche de la finesse de réglage que permettaient les anciens barrages mobiles du fait de la multiplicité des éléments constitutifs, a été réalisée par l'utilisation de vannes en deux parties : vanne et vannette. La partie supérieure (vannette) étant manoeuvrée pour l'évacuation des faibles débits, le corps principal (vanne) restant fixe. Ce n'est qu'en période de crue que l'ensemble est manoeuvré.

En effet, le réglage du débit est plus aisé à obtenir lors d'un écoulement de surface que lors d'un écoulement par lame de fond.

Connaissant cette règle, le concepteur actuel place couramment une vannette sur ou au-dessus du corps principal de la vanne. Celui-ci reposant sur le radier peut rester en place la plus grande partie de l'année, seule la vannette se déplaçant à la partie supérieure du corps principal assure la régulation.

Une attention particulière doit donc être portée sur la courbe des débits classés de la rivière afin de déterminer la fréquence de chaque type d'écoulement (figure 1.2.3.) [I.1].

En outre, il y a intérêt à réduire le nombre de piles en rivière, c'est-à-dire à augmenter la longueur des pertuis, l'objectif à atteindre étant : une

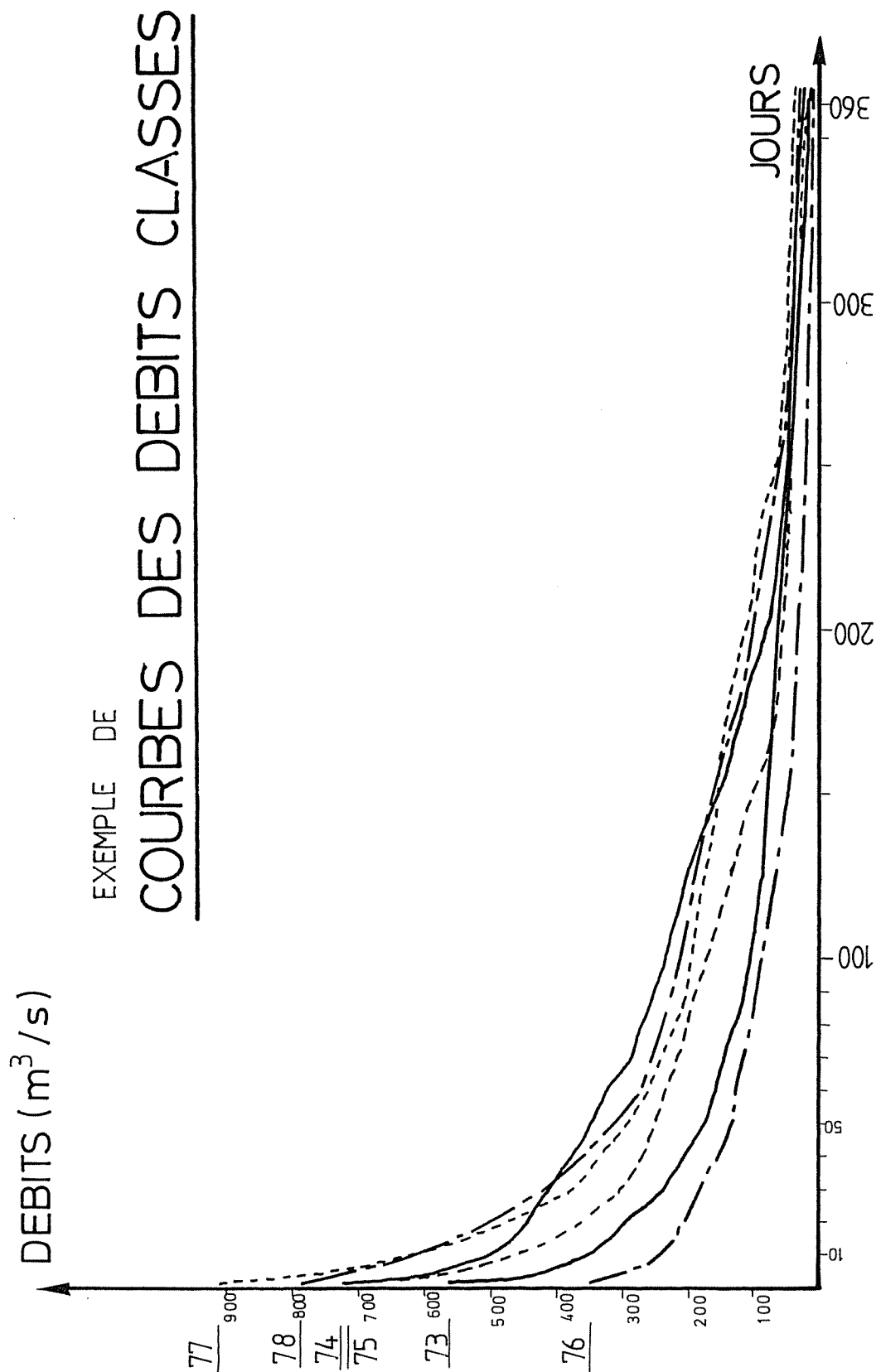


Figure 1.2.3

longueur utile pour l'écoulement la plus grande possible sans élargir la voie d'eau au droit du barrage.

L'accroissement des portées est permis par l'utilisation de plus en plus fréquente de vannes en caisson : structures fermées résistant bien à la torsion mais aussi à la flexion quel qu'en soit le sens [K.1].

La figure 1.2.4. retrace brièvement l'évolution de forme des corps de vanne à clapet [D.4].

Les formes données à leur section transversale tenant compte des efforts sollicitants et des progrès réalisés en construction métallique ont évolué comme suit :

Figure 1.2.4.a - bordé en forme d'équerre raidi appuyé sur le radier sur de nombreux appuis, par suite du peu de rigidité à la torsion,

Figure 1.2.4.b - bordé plan raidi fixé sur une poutre tubulaire prenant appui sur le radier par des paliers en nombre limité, la poutre tubulaire résistant bien à la torsion,

Figure 1.2.4.c - abandon du bordé plan et profilage de façon à lui donner une forme hydrodynamique plus favorable à l'écoulement des eaux : la poutre de torsion ne doit pas nécessairement se trouver à l'axe de torsion.

Figure 1.2.4.d - le clapet est constitué par une poutre tubulaire en forme de lentille dont le bordage fait partie; selon les dimensions de la section transversale, il y a ou non un tube antitor-sion.

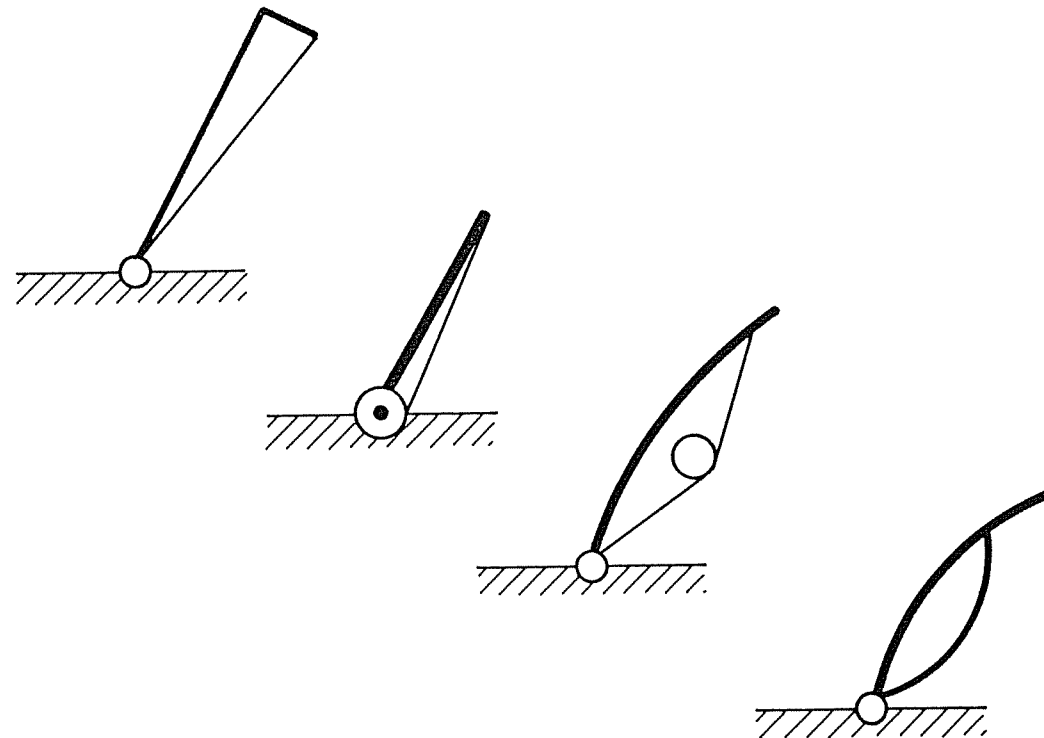


Figure 1.2.4. - Evolution de forme des corps de vanne à clapet

Ayant considéré ces divers paramètres, on aboutit à la conclusion qu'il n'est pas possible de définir un type de barrage mobile s'adaptant à toute la gamme des retenues existantes.

En effet, pour des retenues de grande hauteur (10 à 20 m), le système de vanne et vannette semble particulièrement bien indiqué pour atteindre des portées élevées (30m), tout en assurant une bonne régulation du débit (figure 1.2.5) [D.5].

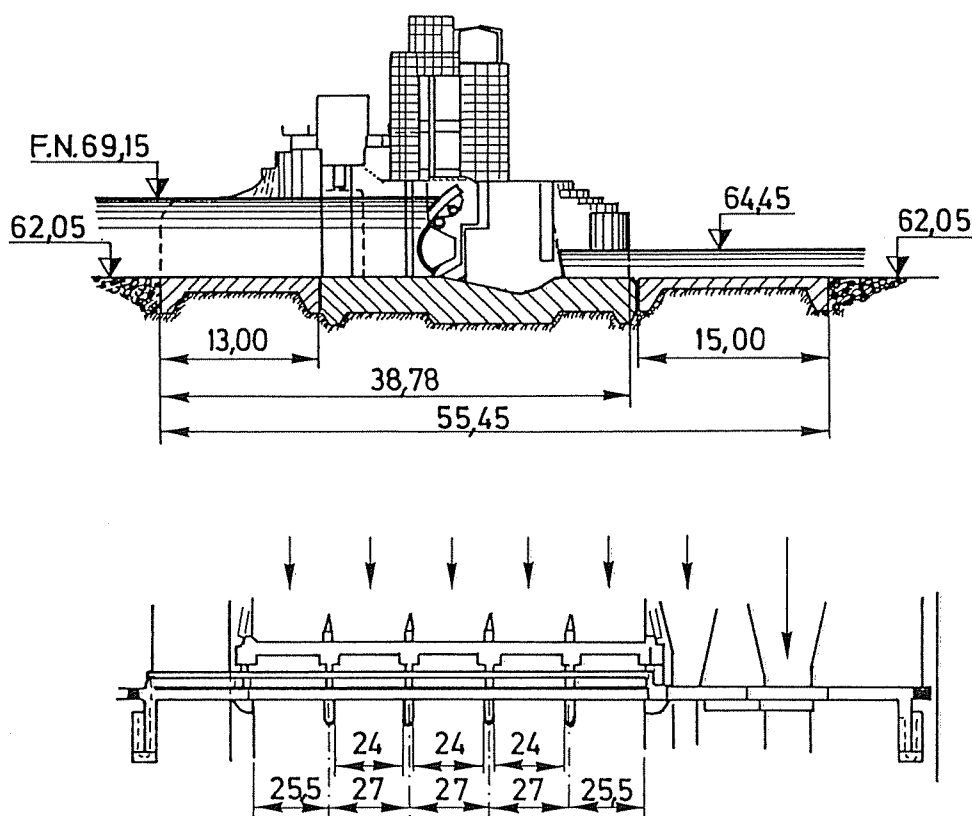


Figure 1.2.5 - Barrage de Ampsin-Neuville

Coupe dans un pertuis du barrage

Hauteur de retenue : 7 m

Vanne levante composée d'un corps de vanne principal en caisson et d'un clapet à la partie supérieure

Il en est autrement des retenues plus faibles (3 à 5 m), pour lesquelles la conjugaison d'emploi du système à vanne et vannette avec des portées élevées conduit à un manque évident de rigidité de chacune des 2 parties de la vanne (figure 1.2.6).

Il ne semble donc pas raisonnable d'implanter dans des biefs de faible retenue des ouvrages calqués sur des barrages existants correspondant à des retenues beaucoup plus grandes (10 à 20 m) où le problème de la rigidité ne se pose pas (figure 1.2.7).

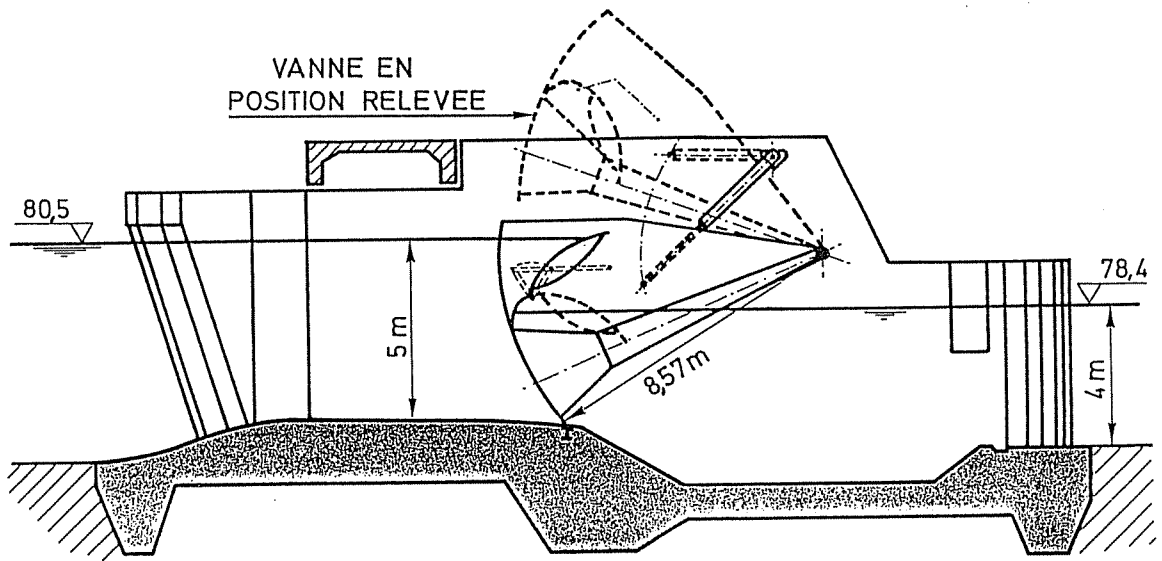


Figure 1.2.6 - Vue de la vanne segment traditionnelle.
Vanne et vannette.

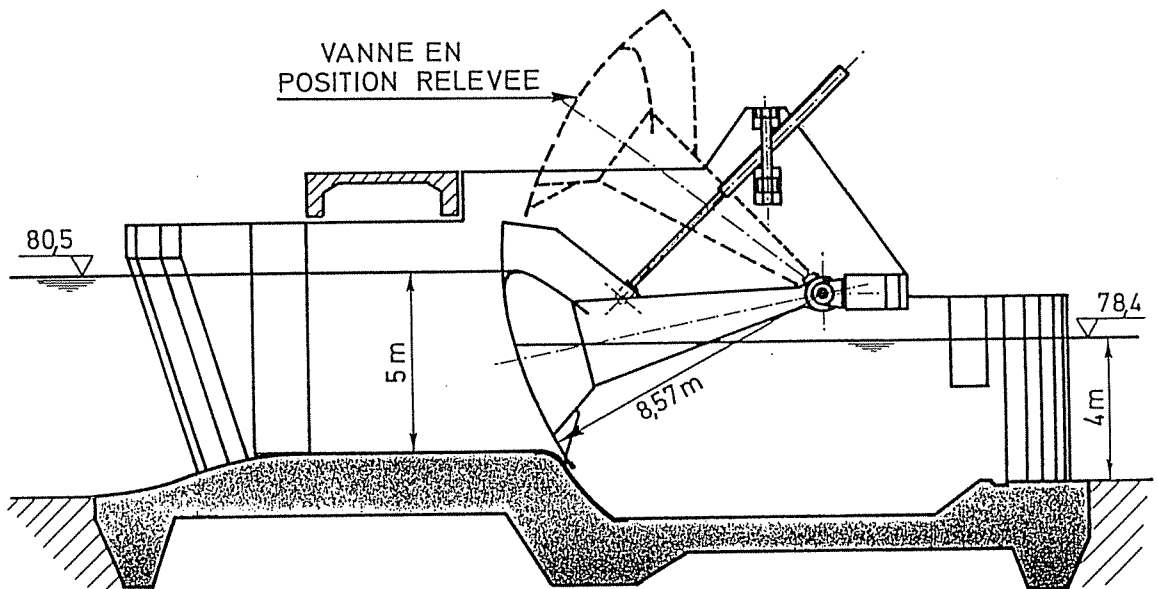


Figure 1.2.7 - Vue de la vanne segment à corps unique, levante et
baissante

II.3. PROPOSITION D'UN BARRAGE MOBILE NE COMPORTANT QU'UNE VANNE PAR PERTUIS MAIS REALISANT LES OBJECTIFS PRECITES (Figure 1.2.7).

Pour pallier le manque de rigidité et pour simplifier la commande du barrage, il est suggéré d'employer **un système de barrage mobile en une seule pièce**, couvrant en hauteur toute la retenue. Comme décrit plus haut, il permettra l'évacuation des petits débits et des glaces par un écoulement de surface; les débits de crues et les débits solides éventuels étant évacués par un écoulement de fond (figure 1.2.8).

Sur la figure 1.2.7 ce système de vanne unique a été adapté à la vanne segment mais pourrait également être adapté à la vanne levante qui serait de ce fait aussi baissante.

La comparaison des figures 1.2.6 et 1.2.7 montre nettement la moindre rigidité de la version vanne et vannette (figure 1.2.6) par rapport à la solution à pièce unique (figure 1.2.7) pour un même écoulement total.

La manoeuvre se fait à l'aide de vérins hydrauliques placés entre les deux bras et les piles. Le choix d'une vanne unique a de plus l'avantage d'économiser les systèmes mécaniques (vérins, pompes) ainsi que les systèmes de régulation et de commande nécessaires à la manoeuvre de la vannette.

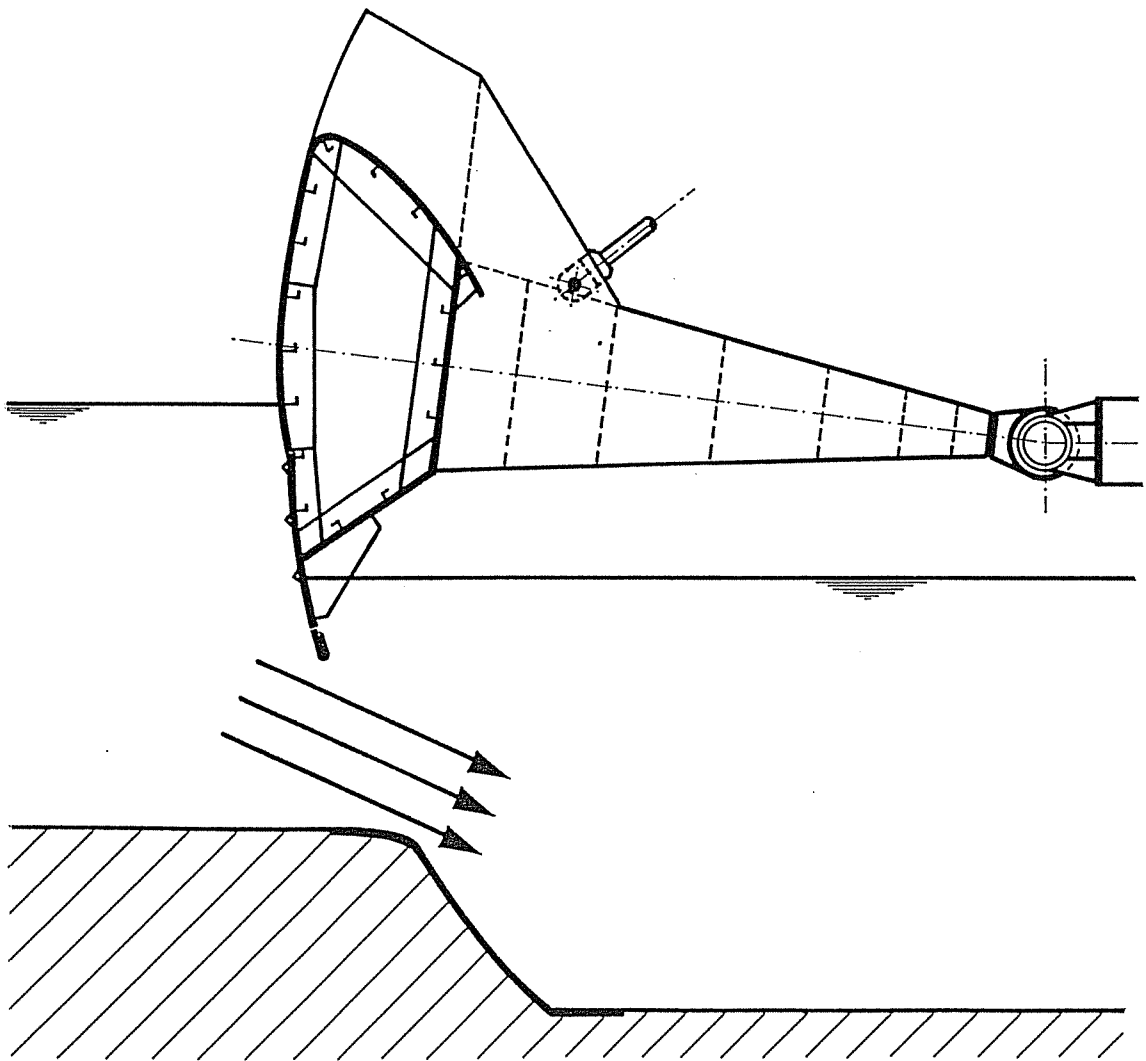
La figure 1.2.9 donne le détail de l'étanchéité au pied de la vanne. Celle-ci est importante vu que la vanne ne repose jamais sur le radier, les vérins étant en permanence en charge. L'évolution des techniques au niveau des vérins hydrauliques permet la conception de tels vérins [H.1].

On notera l'importance du choix du positionnement des vérins, de manière à conserver ceux-ci en permanence hors de l'eau. Les points d'attaches des vérins d'une part sur le bras de la vanne segment et d'autre part sur la pile, conditionnent totalement le diagramme des efforts dans les vérins pour une position donnée de la vanne.

II.4. CONCLUSION

Bien que les **barrages mobiles à vannes et vannettes** donnent entière satisfaction pour la gamme des retenues importantes (10 à 20 m), il n'est pas souhaitable d'utiliser ce type de barrage pour les faibles retenues (3 à 5 m). Pour des raisons de simplicité, de rigidité, et aussi d'économie, **il est proposé pour les faibles retenues une vanne unique** couvrant toute la hauteur mais permettant néanmoins l'écoulement de surface pour les faibles débits et l'écoulement par lame de fond pour les crues.

Nous avons adapté ce système de vanne unique à la vanne segment, très prisée actuellement pour son faible encombrement et aussi sa parfaite intégration dans les sites touristiques. [R.2]



COUPE TRANSVERSALE DE LA VANNE

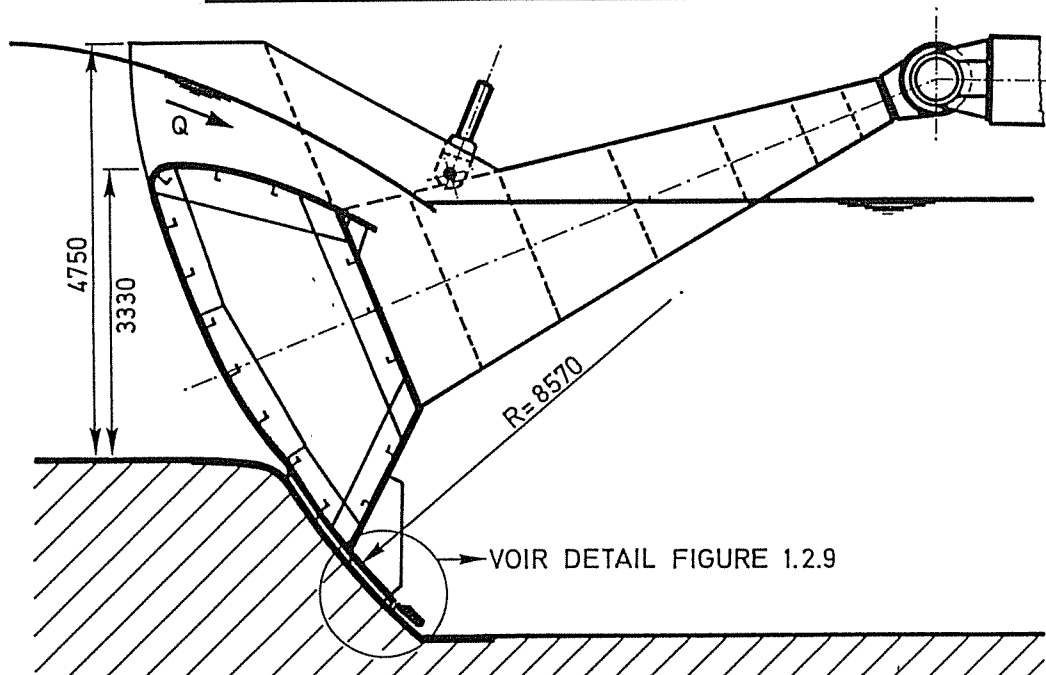


Figure 1.2.8 - Vues des positions possibles de la vanne segment

DETAIL DE L'ETANCHEITE

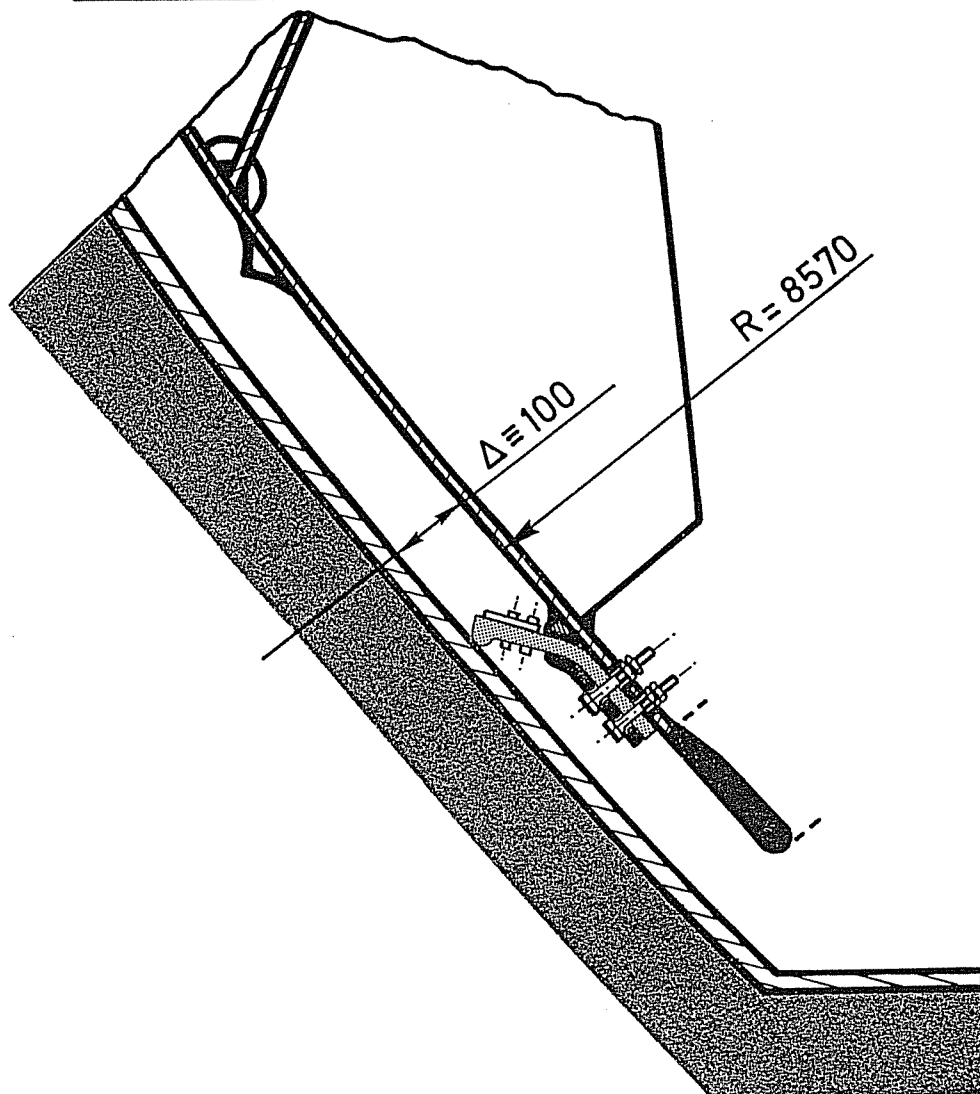


Figure 1.2.9. - Etanchéité au pied de la vanne
celle-ci ne reposant jamais sur le radier.

DEUXIEME PARTIE
LE LOGICIEL DE CALCUL DES BORDAGES
CYLINDRIQUES RAIDIS.

CHAPITRE I

INTRODUCTION

L'objet de cette partie de la thèse est l'élaboration d'une **Méthode Globale de Calcul** permettant de vérifier les contraintes et les déplacements au sein d'une structure déjà prédimensionnée. Pour des ouvrages tels que, portes d'écluses ou vannes de barrages mobiles, nous allons devoir tenir compte de l'interaction de plusieurs éléments discontinus avec d'autres continus.

Ainsi reprenons le cas du corps principal d'une des vannes levantes du barrage de Neuville-sous-Huy (figure 2.1.1).

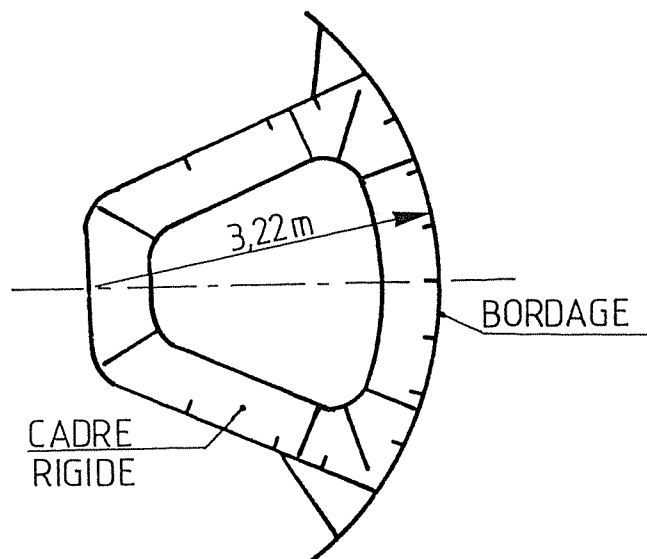


Figure 2.1.1 - Vanne du Barrage de Neuville-sous-Huy
Projet en construction soudée.

On y voit un bordage courbe et 3 bordages plans, ceux-ci étant raidis par un double lit de nervures, les aiguilles et les raidisseurs.

La deuxième partie de cette thèse que nous abordons maintenant est consacrée à la généralisation de l'algorithme de calcul des bordages raidis.

Le logiciel sera en effet prévu pour des structures composées de coques cylindriques dont les panneaux plans ne sont que des cas particuliers.

On portera, particulièrement attention au **Chapitre III** qui établit le **système d'équations différentielles complet** correspondant à une coque raidie par 3 niveaux de nervures (raidisseurs, aiguilles, traverses). Des améliorations par rapport aux relations proposées par N.M. Dehousse sont de plus apportées concernant la collaboration des semelles libres des nervures à la transmission de l'effort tranchant.

Remarques : Pour faciliter la lecture et la compréhension d'ensemble, certaines équations et expressions analytiques ont été placées dans le volume des annexes.

Les figures et les équations sont repérées au moyen d'un ensemble de 3 chiffres séparés par des points, les chiffres signifiant respectivement le numéro de la partie, le chapitre et enfin le numéro d'ordre.

CHAPITRE II

LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES DES COQUES CYLINDRIQUES DE SECTION CIRCULAIRE ET D'ÉPAISSEUR CONSTANTE

II.1. DEFINITIONS ET NOTATIONS

Le domaine de validité des développements qui suivent est le régime élastique.

Les coordonnées dont on a fait usage dans ce travail sont représentées à la figure 2.2.1.

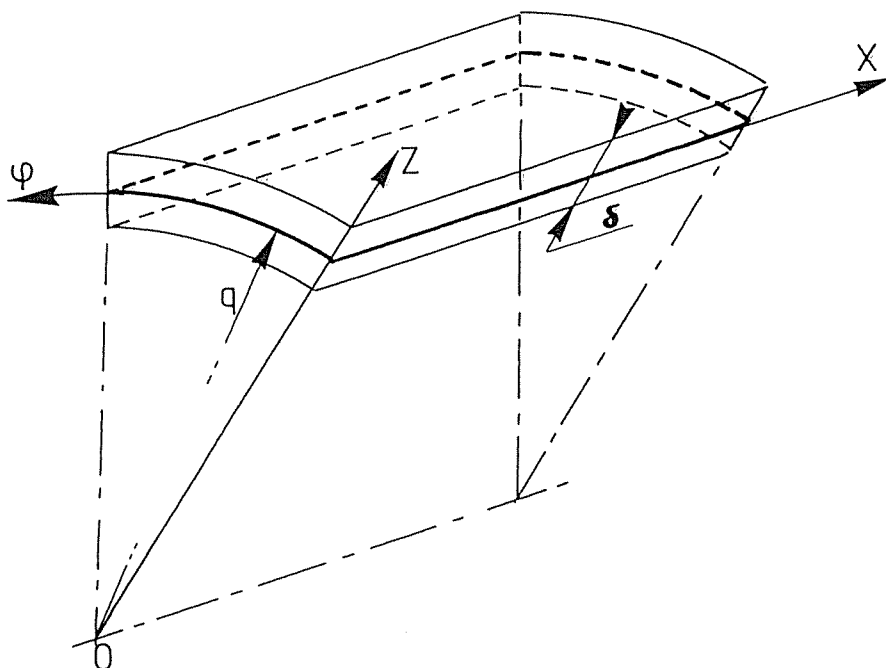


Figure 2.2.1

La surface schématisée est celle du feuillet de la coque située à mi-distance entre les surfaces d'intrados et d'extrados (feuillet médian) : c'est la surface de référence à partir de laquelle seront comptées les coordonnées z positivement vers le haut. La distance du centre à un point quelconque est donc $q+z$; celle du centre à la surface d'extrados : $q + \frac{\delta}{2}$ et celle du

centre à la surface d'intrados : $q - \frac{\delta}{2}$.

La figure 2.2.2. montre, avec leurs notations classiques, les contraintes qui agissent sur un élément infiniment petit dont le volume est $dx dz (q+z)d\varphi$. Les σ_x, σ_φ et σ_z sont positifs en traction.

Les contraintes $\tau_{x\varphi}$ et $\tau_{\varphi x}$ sont positives dans le sens où elles produisent une réduction de l'angle droit des coordonnées x et φ .

τ_{xz} et τ_{zx} sont positifs dans le sens où ils produisent une augmentation de l'angle droit des coordonnées z et x .

$\tau_{\varphi z}$ et $\tau_{z\varphi}$ sont positifs dans le sens où ils produisent une augmentation de l'angle droit des coordonnées z et φ .

Les forces massiques désignées par g_x, g_φ et g_z sont positives dans le sens des axes.

Les déplacements \bar{u}, \bar{v} et \bar{w} seront eux aussi positifs dans le sens des axes. Les déplacements surmontés d'une barre sont ceux d'un point quelconque. Les déplacements d'un point de la surface moyenne s'écriront simplement u, v et w .

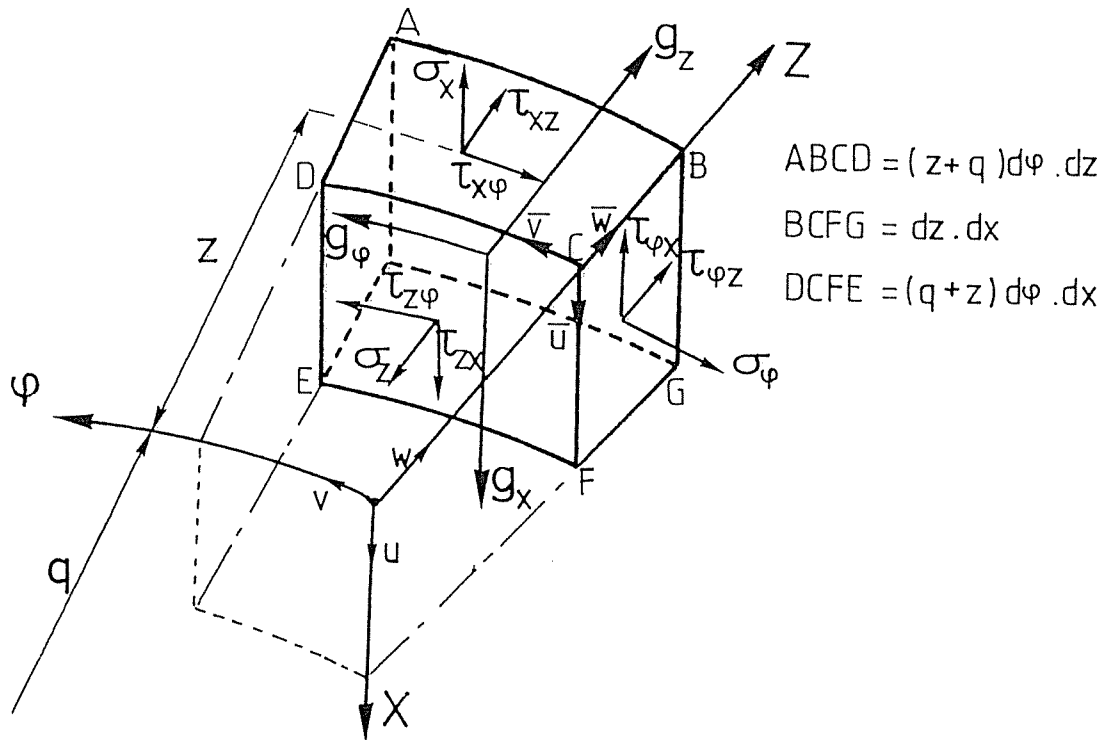


Figure 2.2.2

II.2. LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES GENERALES DES COQUES CYLINDRIQUES DE SECTION CIRCULAIRE ET D'EPaisseur CONSTANTE

Les 3 équations de l'équilibre de translation sont les suivantes :

$$\frac{d\sigma_z}{dz} - \frac{1}{z+q} \cdot \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\sigma_z - \sigma_\varphi}{z+q} + g_z = 0 \quad (2.2.1.a)$$

$$\frac{1}{z+q} \cdot \frac{\partial \sigma_{\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{2\tau_{z\varphi}}{z+q} + g_{\varphi} = 0 \quad (2.2.1.b)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{1}{z+q} \cdot \frac{\partial \tau_{\varphi x}}{\partial \varphi} - \frac{\tau_{zx}}{z+q} + g_x = 0 \quad (2.2.1.c)$$

Ces trois équations entre des contraintes peuvent être transformées en trois équations différentielles entre les déplacements en utilisant les relations de Hooke c'est-à-dire les relations déformations-déplacements de l'élasticité linéaire [D.1].

Pour simplifier les écritures, les notations suivantes, désormais classiques, seront employées :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f', \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = f^{\circ}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = f^*$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Les équations 2.2.1. se liront alors :

$$\begin{aligned} \bar{u}'^* (\lambda - G) - \frac{\bar{v}^{\circ}}{(z+q)^2} (\lambda + G) + \frac{\bar{v}^{\circ*}}{z+q} (\lambda - G) - \frac{\bar{w}}{(z+q)^2} (\lambda + 2G) \\ + \frac{\bar{w}^*}{z+q} (\lambda + 2G) + \bar{w}^{**} (\lambda + 2G) - \frac{G}{(z+q)^2} \bar{w}^{\circ\circ} - G \bar{w}'^* + g_z = 0 \end{aligned} \quad (2.2.2.a)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}'^{\circ} \frac{\lambda + G}{z+q} + \frac{\bar{v}^{\circ\circ}}{(z+q)^2} (\lambda + 2G) + \frac{\bar{w}^{\circ}}{(z+q)^2} (\lambda + G) + \frac{\bar{w}^{\circ*}}{z+q} (\lambda - G) - G \bar{v}^{**} + \frac{G}{(z+q)^2} \bar{v} \\ - \frac{G}{z+q} \cdot \bar{v}^* + G \cdot \bar{v}'^* + g_{\varphi} = 0 \end{aligned} \quad (2.2.2.b)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}'^* (\lambda + 2G) + \frac{\bar{v}^{\circ'}}{z+q} (\lambda + G) + \frac{\bar{w}'^{\circ}}{z+q} (\lambda - G) + \bar{w}'^{*} (\lambda - G) - G \bar{u}^{**} + G \frac{\bar{u}^{\circ\circ}}{(z+q)^2} \\ - \frac{G}{z+q} \cdot \bar{u}^* + g_x = 0 \end{aligned} \quad (2.2.2.c)$$

Ces trois équations aux dérivées partielles jointes aux conditions aux limites exprimées en fonction des déplacements u , v et w permettent en principe de résoudre le problème que pose la détermination des contraintes et déformations de la coque.

II.3. LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES SIMPLIFIEES DES COQUES CYLINDRIQUES DE SECTION CIRCULAIRE ET D'EPAISSEUR CONSTANTE.

Au lieu de considérer l'équilibre d'un élément infiniment petit dans le sens des trois coordonnées on envisage un élément de coque compris entre les surfaces d'intrados et d'extrados à la coque mais dont la surface moyenne est $dx \ q \ d\varphi$.

Nous pourrions écrire l'équilibre d'un tel élément à condition d'introduire les efforts unitaires et moments unitaires correspondants calculés par rapport à la surface moyenne.

$$N_{\varphi} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \sigma_{\varphi} dz \quad (2.2.3.a)$$

$$N_x = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{q}\right) dz \quad (2.2.3.b)$$

$$N_{x\varphi} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \tau_{x\varphi} \left(1 + \frac{z}{q}\right) dz \quad (2.2.3.c)$$

$$N_{\varphi x} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \tau_{\varphi x} dz \quad (2.2.3.d)$$

$$M_{\varphi} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \sigma_{\varphi} z dz \quad (2.2.3.e)$$

$$M_x = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{q}\right) z dz \quad (2.2.3.f)$$

$$M_{x\varphi} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \tau_{x\varphi} \left(1 + \frac{z}{q}\right) z dz \quad (2.2.3.g)$$

$$M_{\varphi x} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \tau_{\varphi x} z dz \quad (2.2.3.h)$$

$$Q_{\varphi} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \tau_{\varphi z} dz \quad (2.2.3.i)$$

$$Q_x = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{q}\right) dz \quad (2.2.3.j)$$

où N_x et N_φ sont positifs en traction

$N_{x\varphi}$ et $N_{\varphi x}$ sont positifs dans le sens où ils produisent une réduction de l'angle droit des axes x et φ .

M_x , M_φ , $M_{x\varphi}$ et $M_{\varphi x}$ sont positifs lorsqu'il créent à l'intrados des contraintes (σ_x , σ_φ , $\tau_{x\varphi}$ et $\tau_{\varphi x}$) de même sens que les N_x , N_φ , $N_{x\varphi}$ et $N_{\varphi x}$ positifs.

Q_x et Q_φ sont positifs vers le haut pour des facettes regardant les coordonnées négatives.

L'élément étudié se trouve alors chargé sur les bords latéraux par les efforts décrits par la figure 2.2.3. et les moments décrits par la figure 2.2.4.

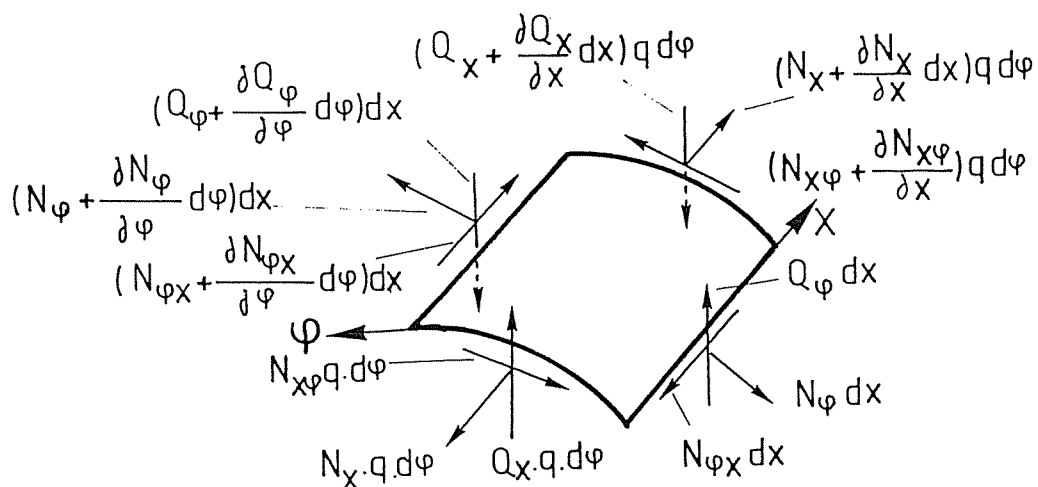


Figure 2.2.3.

La surface moyenne reçoit la charge extérieure et celle-ci peut être subdivisée comme ceci :

X , Y et Z (pressions spécifiques N/m^2)

M_x , M_φ et M_z (moments spécifiques $N.m/m^2$)

Ces diverses composantes sont définies à la figure 2.2.5 et sont comptées positivement dans le sens des axes.

Il faut aussi tenir compte des forces massiques g_x , g_φ et g_z (N/m^3) de la figure 2.2.2.

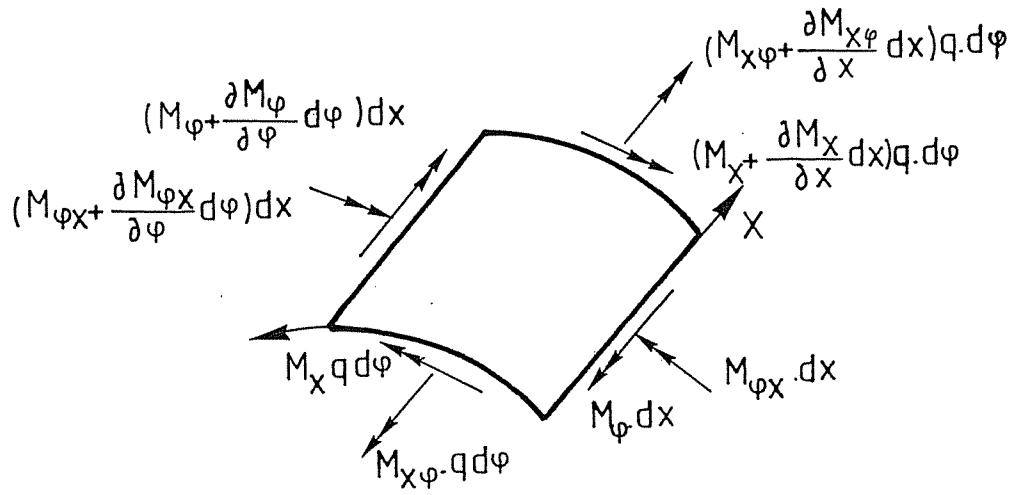


Figure 2.2.4.

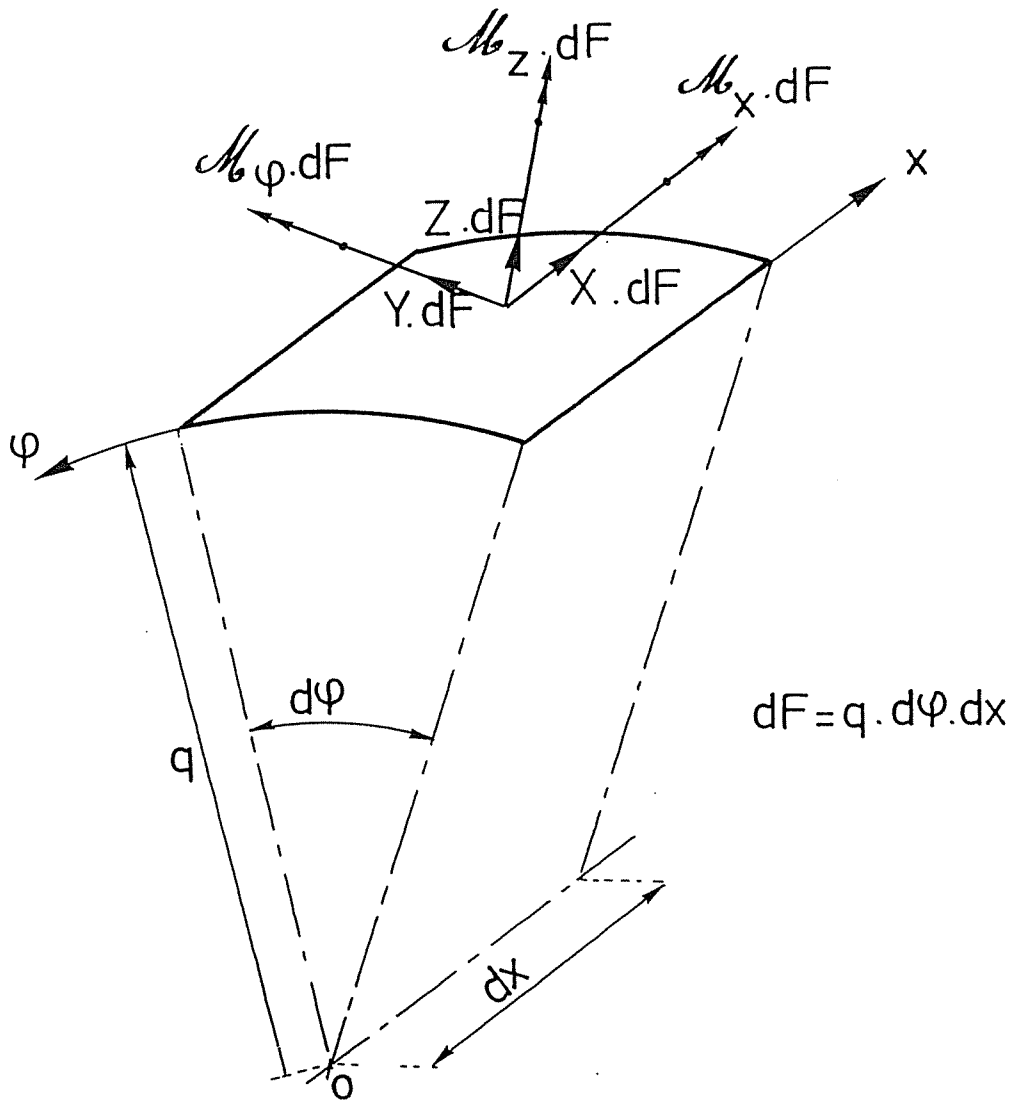


Figure 2.2.5.

Ceci étant nous pourrons écrire les 6 équations d'équilibre :

$$N'_x + \frac{N^\circ_{\varphi x}}{q} + X + g_x \delta = 0 \quad (2.2.4.a)$$

$$\frac{N^\circ_\varphi}{q} + N'_{x\varphi} - \frac{Q_\varphi}{q} + Y + g_\varphi \delta = 0 \quad (2.2.4.b)$$

$$\frac{N_\varphi}{q} + \frac{Q^\circ_\varphi}{q} + Q'_x = Z + g_z \delta \quad (2.2.4.c)$$

$$\frac{M^\circ_\varphi}{q} + M'_{x\varphi} - Q_\varphi + \mathcal{M}_x = 0 \quad (2.2.4.d)$$

$$M'_x + \frac{M^\circ_{\varphi x}}{q} - Q_x - \mathcal{M}_\varphi = 0 \quad (2.2.4.e)$$

$$N_{x\varphi} - N_{\varphi x} + \frac{M_{\varphi x}}{q} + \mathcal{M}_z = 0 \quad (2.2.4.f)$$

A ce point aucune hypothèse n'a été introduite. Néanmoins des hypothèses sont nécessaires pour la simplification du problème qui se présente : calculer les N_x , N_φ , $N_{x\varphi}$, $N_{\varphi x}$, M_x , M_φ , $M_{x\varphi}$, $M_{\varphi x}$, Q_φ et Q_x soit 10 grandeurs à partir des 6 équations (2.2.4.a à 2.2.4.f).

Si l'on veut arriver à des équations dont la solution soit abordable, il est indispensable d'introduire des simplifications dans le problème. La plus importante sera celle qui fait disparaître la variable z et les dérivées par rapport à z de manière à ne plus disposer que des deux variables x et φ .

Les simplifications considérées ici sont celles conduisant à la méthode D.K.J. (Donnell, von Karman, Jenkins) [D.6, K.2, J.2].

Les hypothèses engendrant ces simplifications sont les suivantes :

1. la coque considérée est mince, c'est-à-dire que $\delta/q \lll 1$ au point que δ/q est négligeable devant 1.
2. les composantes de la déformation sont faibles.
3. les points situés sur une normale à la surface moyenne avant déformation restent sur la normale à la surface moyenne déformée.
4. les effets de la contrainte normale à la surface moyenne ainsi que la contrainte normale sont négligeables.
5. les déplacements radiaux sont les mêmes pour tous les points de la même normale à la surface moyenne (dilatation ϵ_z empêchée).

Ces trois dernières hypothèses sont connues sous le nom d'hypothèses de Love-Kirchhoff [K.3, L.2, S.1].

Ces conditions correspondent en fait à imposer une variation linéaire des contraintes selon l'épaisseur de la coque. Cette approximation est licite pour les coques minces ($\delta \ll q$) que nous étudions. Pour tenir compte de la vraie distribution des contraintes selon l'épaisseur, il faut utiliser les équations tridimensionnelles de l'élasticité. En pratique, seule l'utilisation des différences finies [A.5] ou d'éléments finis dits de coque épaisse [F.2] permet d'approcher ce problème.

C'est au départ des hypothèses de la méthode D.K.J. que l'on ramène le système de trois équations différentielles à trois variables en un système à deux variables [B.3].

Le processus est bien connu.

On exprime d'abord les déplacements d'un point quelconque de la coque en fonction des déplacements de la surface moyenne en observant les hypothèses 3, 4 et 5.

En consultant les figures 2.2.6 et 2.2.7 on constate que :

$$\bar{u} = u - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{soit } u - zw' \quad (2.2.5.a)$$

$$\bar{v} = \frac{q+z}{q} v - \frac{z}{q} \frac{\partial w}{\partial \varphi} = \frac{q+z}{q} v - \frac{z}{q} w'' \quad (2.2.5.b)$$

$$\bar{w} = w \quad (2.2.5.c)$$

Par les relations linéaires déformation-déplacement, les composantes de la déformation pourront alors être calculées :

$$\epsilon_x = u' - z w'' \quad \left(= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \quad (2.2.6.a)$$

$$\epsilon_\varphi = \frac{v''}{q} + \frac{1}{z+q} (w - \frac{z}{q} w''') \quad \left(= \frac{1}{z+q} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} + \bar{w} \right) \right) \quad (2.2.6.b)$$

$$\epsilon_z = 0 \quad \left(= \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \quad (2.2.6.c)$$

$$\gamma_{x\varphi} = \frac{q+z}{q} v' - \frac{z}{q} w'' + \frac{1}{z+q} (u'' - z w''') \quad \left(= \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{1}{z+q} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} \right) \quad (2.2.6.d)$$

$$\gamma_{\varphi z} = 0 \quad \left(= \frac{1}{z+q} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - \frac{\bar{v}}{z+q} \right) \quad (2.2.6.e)$$

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \left(= \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \quad (2.2.6.f)$$

Ces relations (2.2.6) seront simplifiées en vertu de la première hypothèse de sorte que :

$$\epsilon_x = u' - zw'' \quad (2.2.7.a)$$

$$\epsilon_\varphi = \frac{v''}{q} + \frac{w}{q} - \frac{z}{q^2} w'' \quad (2.2.7.b)$$

$$\gamma_{x\varphi} = \frac{u''}{q} + v' - \frac{2z}{q} w'' \quad (2.2.7.c)$$

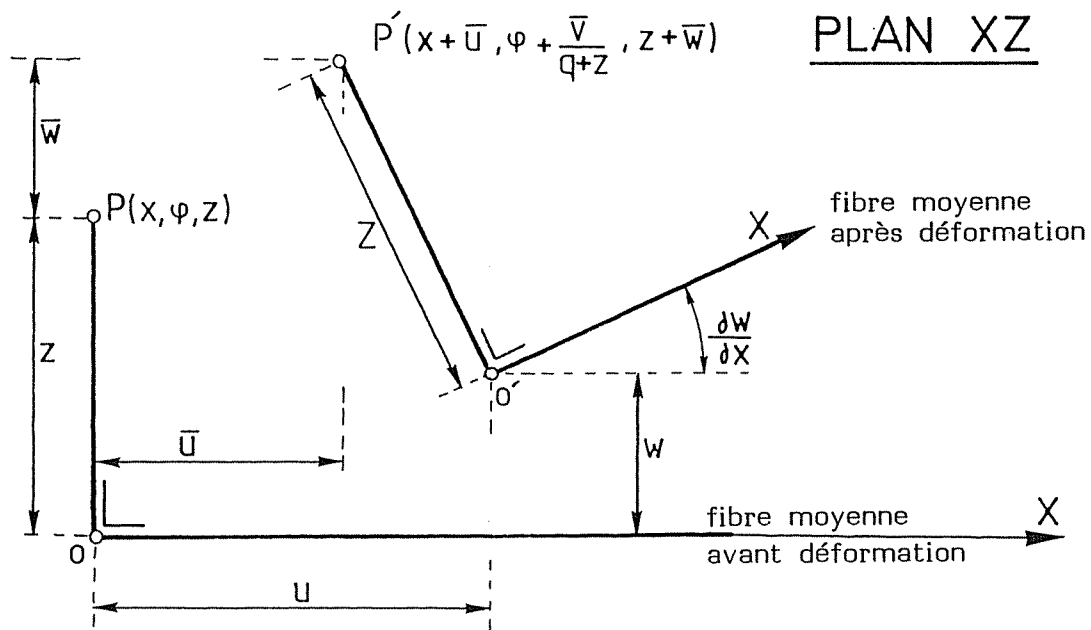


Figure 2.2.6

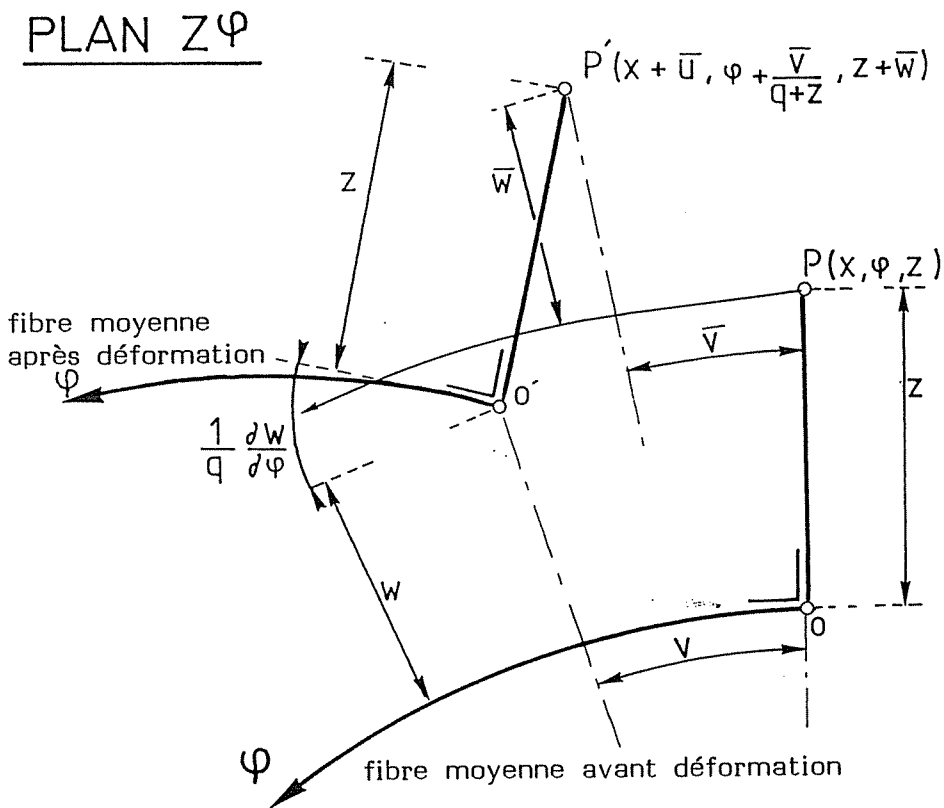


Figure 2.2.7.

Avant d'aller plus loin, il est utile de remarquer que l'expression (2.2.5.b) peut aussi s'écrire :

$$\bar{v} = v - \frac{z}{q} w^{\circ} \quad (2.2.5.d)$$

Enfin, par les relations contraintes-déformations, les composantes des contraintes seront calculées :

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left[u' + \frac{\nu v^{\circ}}{q} + \frac{\nu w}{q} - \frac{z}{q} (q w'' + \frac{\nu w^{\circ\circ}}{q}) \right] \quad (2.2.8.a)$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{v^{\circ}}{q} + \frac{w}{q} + \nu(u' - z w'') - \frac{z}{q^2} w^{\circ\circ} \right] \quad (2.2.8.b)$$

$$\tau_{x\varphi} = G \left(\frac{u^{\circ}}{q} + v' - \frac{2z}{q} w^{\circ'} \right) \quad (2.2.8.c)$$

Si l'on remplace alors les valeurs des contraintes (2.2.8) dans les relations (2.2.3.a à 2.2.3.h) on trouve :

$$N_{\varphi} = \frac{D}{q} (v^{\circ} + w + \nu q u') \quad (2.2.9.a)$$

$$N_x = \frac{D}{q} (u' q + \nu v^{\circ} + \nu w) \quad (2.2.9.b)$$

$$N_{x\varphi} = N_{\varphi x} = \frac{D}{q} \frac{1-\nu}{2} (u^{\circ} + q v') \quad (2.2.9.c)$$

$$M_{\varphi} = \frac{K}{q^2} (w^{\circ\circ} + \nu q^2 w'') \quad (2.2.9.d)$$

$$M_x = \frac{K}{q^2} (w'' q^2 + \nu w^{\circ\circ}) \quad (2.2.9.e)$$

$$M_{x\varphi} = M_{\varphi x} = \frac{K}{q} (1-\nu) w^{\circ'} \quad (2.2.9.f)$$

$$\text{avec } D = \frac{E\delta}{1-\nu^2}, \quad K = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$$

et pour autant que dans les intégrations on néglige δ/q devant l'unité.

Il faut à présent éliminer les efforts et moments unitaires entre les équations (2.2.4) et les équations (2.2.9).

Remarquons d'abord que l'hypothèse admise de négliger δ/q devant 1 conduit à transgresser légèrement les équations d'équilibre en ce sens qu'elle revient à supposer l'existence d'un moment M_z (2.2.4.f) dont la valeur est

$$-\frac{K}{q^2} (1-\nu) w^{\circ}.$$

En effet, si l'hypothèse δ/q négligeable n'est pas admise, l'équation (2.2.4.f) écrite en l'absence de charge

$$N_{x\varphi} - N_{\varphi x} + \frac{M_{\varphi x}}{q} = 0$$

est automatiquement vérifiée : elle résulte simplement de la réciprocité des contraintes tangentielles $\tau_{x\varphi} = \tau_{\varphi x}$:

$$\int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \tau_{x\varphi} \left(1 + \frac{z}{d}\right) dz - \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \tau_{\varphi x} dz + \frac{1}{q} \left[- \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \tau_{\varphi x} z dz \right] = 0$$

En annulant δ/q vis-à-vis de 1 cette identité disparaît. C'est ce que l'on peut constater à partir des équations (2.2.9.c) et (2.2.9.f).

Enfin la dernière simplification est celle qui consiste à négliger dans l'équation (2.2.4.b) le terme en Q_{φ}/q . Il est logique d'admettre que ce terme, qui représente la composante tangentielle de Q_{φ} ne joue qu'un rôle très peu important, l'action majeure s'exerçant dans le plan moyen et non perpendiculairement à ce plan (*).

Au total, ces deux simplifications paraissent sans importance pratique.

La résolution se poursuit en exprimant Q_x et Q_{φ} en fonction des autres efforts et moments unitaires par les relations (2.2.4.d) et (2.2.4.e).

$$Q_x = M'_x + \frac{M^{\circ}_{\varphi x}}{q} - \mathcal{M}_{\varphi} \quad (2.2.10.a)$$

$$Q_{\varphi} = \frac{M^{\circ}_{\varphi}}{q} + M'_{x\varphi} + \mathcal{M}_x \quad (2.2.10.b)$$

Ces efforts n'auraient d'ailleurs pu être exprimés autrement : le calcul par les expressions (2.2.4 i et j) est hors de question puisque par hypothèse les contraintes $\tau_{\varphi z}$ et τ_{xz} n'existent pas.

En introduisant les relations (2.2.10) dans (2.2.4.c) on obtiendra avec (2.2.4.a) et (2.2.4.b) un ensemble de trois relations d'où sortira le système différentiel cherché :

$$N'_x + \frac{N^{\circ}_{\varphi x}}{q} + X + g_x \delta = 0 \quad (2.2.11.a)$$

$$\frac{N^{\circ}_{\varphi}}{q} + N'_{x\varphi} + Y + g_{\varphi} \delta = 0 \quad (2.2.11.b)$$

 (*) Il n'y a cependant aucune difficulté de principe à aborder l'étude ci-après avec les équations dans lesquelles le terme Q_{φ}/q est conservé.

$$\frac{N}{q} \varphi + \frac{M^{\circ\circ}}{q^2} \varphi + \frac{M^{\circ\prime}}{q} x \varphi + M^{\prime\prime} x + \frac{M^{\circ\prime}}{q} \varphi x + \frac{M_b^{\circ}}{q} x - M_b^{\prime} \varphi = Z + g_z \delta \quad (2.2.11.c)$$

Pour la suite il n'est pas utile de distinguer les forces extérieures des forces massiques : les équations (2.2.11) montrent qu'elles jouent le même rôle; dans la suite les g_x , g_φ et g_z seront omis.

En remplaçant dans (2.2.11) les termes par leurs expressions (2.2.9), on obtient finalement le système :

$$\frac{D}{q} (u^{\prime\prime} q + v v^{\circ\prime} + v w^{\prime}) + \frac{D}{q^2} \frac{1-\nu}{2} (u^{\circ\circ} + q v^{\circ\prime}) + X = 0 \quad (2.2.12.a)$$

$$\frac{D}{q^2} (v^{\circ\circ} + w^{\circ} + v q u^{\circ\prime}) + \frac{D}{q} \frac{1-\nu}{2} (u^{\circ\prime} + q v^{\prime\prime}) + Y = 0 \quad (2.2.12.b)$$

$$\frac{D}{q^2} (v^{\circ} + w + v q u^{\prime}) + \frac{K}{q^4} w^{\circ\circ\circ\circ} + \frac{2K}{q^2} w^{\circ\circ\prime\prime} + K w^{\prime\prime\prime\prime} + \frac{M_b^{\circ}}{q} x - M_b^{\prime} \varphi = Z \quad (2.2.12.c)$$

Il s'agit donc bien d'un système linéaire à coefficients constants entre les trois fonctions u , v et w à deux variables x et φ .

La difficulté est donc très notablement réduite par rapport au système (2.2.2).

Il convient de remarquer que dans les équations (2.2.12) la charge éventuelle M_b^z n'apparaît plus puisque la dernière des équations d'équilibre n'est plus retenue.

Cela ne signifie pas que l'on ne puisse envisager l'action de tels moments.

Généralement ces moments seront matérialisés par deux forces ou deux lignes de forces du type X ou Y et que, dès lors, ils ne porteront pas l'étiquette M_b^z .

S'il s'agit de moments de surface, on pourra en utilisant l'artifice bien connu de Kirchhoff transformer ces moments en efforts X ou Y à considérer alors dans les forces X ou Y .

On ramène les trois équations différentielles à une seule, très aisément en éliminant u et v [J.3, E.3].

Ces trois équations sont de la forme

$$a_1 u + b_1 v + c_1 w + X = 0 \quad (2.2.13.a)$$

$$a_2 u + b_2 v + c_2 w + Y = 0 \quad (2.2.13.b)$$

$$a_3 u + b_3 v + c_3 w + \frac{M_b^{\circ}}{q} x - M_b^{\prime} \varphi = Z \quad (2.2.13.c)$$

où les $a_1 \dots c_3$ sont définis par les relations suivantes :

$$a_1 f = D f'' + \frac{D}{2q^2} (1-\nu) f^{\circ\circ}$$

$$b_1 f = \frac{D}{q} v f^{o'} + \frac{D}{2q} (1-v) f^{o'}$$

$$c_1 f = \frac{D}{q} v f'$$

$$a_2 f = \frac{D}{q} v f^{o'} + \frac{D}{2q} (1-v) f^{o'}$$

$$b_2 f = \frac{D}{q} f^{oo} + \frac{D}{2} (1-v) f''$$

$$c_2 f = \frac{D}{q} f^o$$

$$a_3 f = \frac{D}{q} v f'$$

$$b_3 f = \frac{D}{q} f^o$$

$$c_3 f = \frac{D}{q} f + \frac{K}{4} f^{oooo} + \frac{2K}{q} f^{oo''} + K f''''$$

puis on opère avec les a_i , b_i et c_i comme dans un système algébrique normal.

On élimine ainsi u et v et on trouve finalement la relation :

$$K q \Delta^4 w + \frac{D}{q} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \cdot (1-v^2) = q \Delta^2 (Z + \frac{d}{q} x) + \frac{\partial^3 Y}{\partial \varphi^3} \cdot \frac{1}{q} + (2+v) \frac{1}{q} \frac{\partial^3 Y}{\partial x^2 \partial \varphi} - \frac{1}{q^2} \frac{\partial^3 X}{\partial x \partial \varphi^2} + v \frac{\partial^3 X}{\partial x^3} \quad (2.2.14)$$

$$\text{où } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{q^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} .$$

II.4. LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES DES COQUES CYLINDRIQUES DE SECTION CIRCULAIRE ET RAIDIES DANS LE SENS DES COORDONNEES.

II.4.1. Quelques notions utiles du calcul symbolique

Il est commode pour ce qui suit de faire usage de la fonction de Heaviside $H(x)$ [S.2] dont les propriétés sont bien connues :

$$H(x) = 1 \quad \text{si } x > 0 \quad \text{et} \quad H(x) = 0 \quad \text{si } x < 0$$

En faisant usage de cette fonction, on définit aisément celle représentée à la figure 2.2.8 par $H(x-a) - H[x-(a+d)]$ ou encore $H[x-(b-\frac{d}{2})] - H[x-(b+\frac{d}{2})]$

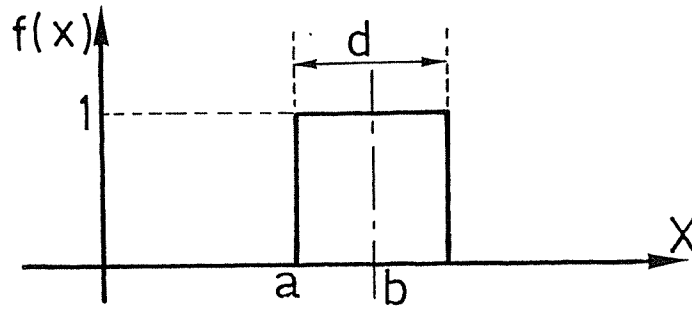


Figure 2.2.8

La fonction de la figure 2.2.9 s'écrit alors :

$$\sum_{k=0}^m [H[x-(b+k\varepsilon - \frac{d}{2})] - H[X-(b+k\varepsilon + \frac{d}{2})]]$$

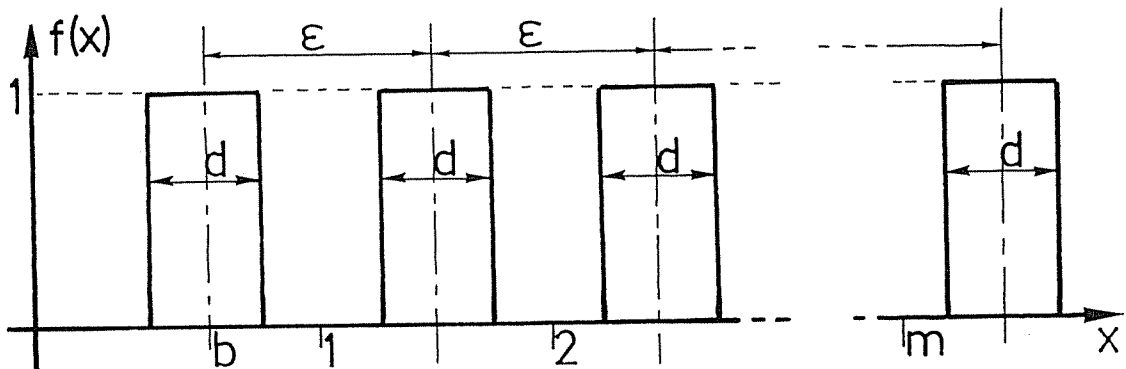


Figure 2.2.9.

On utilise également la fonction dite de Dirac [D.7], $\delta(x)$ qui est nulle partout sauf à l'origine où elle est infinie, de telle sorte que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

La propriété la plus importante de cette fonction est :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0) \text{ ou encore } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-\alpha) f(x) dx = f(\alpha)$$

La dérivée des fonctions symboliques telles que $H(x)$ ou $\delta(x)$ est définie à partir de la propriété d'intégration par parties :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s'(x) f(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) s(x) dx$$

si $s(x)$ désigne la fonction symbolique et pour autant que $f(x)$ s'annule en dehors d'un intervalle fini. Dans ces conditions on démontre aisément que :

$$H'(x) = \delta(x)$$

Ainsi donc on aura :

$$\Phi(x) [H'(x-\alpha) - H'(x-\beta)] = \Phi(x) [\delta(x-\alpha) - \delta(x-\beta)]$$

pour autant que $\Phi(x)$ s'annule à l'infini.

Dans ce qui suit, la fonction $\Phi(x)$ est du type $e^{-k|x|}$ si bien que la condition énoncée sera réalisée.

Ces fonctions $e^{-k|x|}$ sont en effet celles obtenues lors de la résolution de l'équation différentielle (2.5.6, 2.5.7 et 2.5.10).

On s'est borné à reprendre dans les quelques notes précédentes les relations strictement utiles aux calculs ultérieurs.
Pour plus de détails sur la question on consultera avec intérêt [F.1, S.2].

II.4.2. Calcul des $N_x, N_\varphi, M_x, M_\varphi$

La figure 2.2.10 donne la position des raidisseurs considérés dans ce travail.

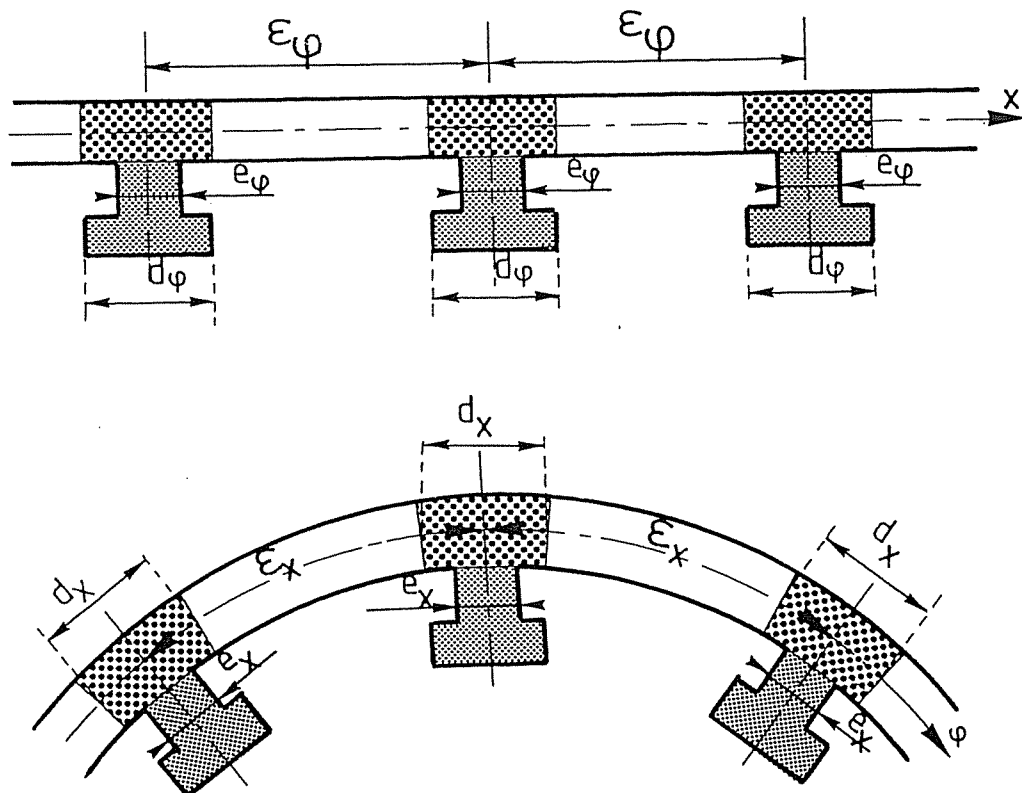


Figure 2.2.10.

Ces raidisseurs peuvent être sur ou sous la coque et posséder une autre forme que celle décrite.

Dans le dessein de mettre sur pied des équations différentielles propres aux coques raidies, on commencera par étudier, en analogie avec les relations (2.2.3), les efforts unitaires N_φ , N_x , $N_{x\varphi}$,

Ainsi, sur la largeur d'un raidisseur circonférentiel (d_φ) on pourra écrire :

$$d_\varphi N_\varphi = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \sigma_\varphi d_\varphi dz + \int_{\omega_\varphi} \sigma_\varphi e_\varphi dz$$

en admettant que σ_φ ne varie pas sur la largeur e_φ ni sur d_φ et en remarquant que e_φ varie en fonction de z dans le domaine ω_φ . ω_φ représente ici la section du raidisseur, sous la coque.

Les z sont comptés à partir de la surface médiane de la coque et positivement vers le haut. Ainsi donc, au droit d'un raidisseur et sur une largeur égale à d_φ , on pourra écrire :

$$N_\varphi = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \sigma_\varphi dz + \int_{\omega_\varphi} \sigma_\varphi \frac{e_\varphi}{d_\varphi} dz$$

Partout ailleurs l'expression de N_φ (2.2.3.a) reste valable si bien que l'on écrira d'une manière plus générale :

$$N_\varphi = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \sigma_\varphi dz + f(x) \int_{\omega_\varphi} \sigma_\varphi \frac{e_\varphi}{d_\varphi} dz$$

où $f(x)$ est une fonction nulle partout sauf au droit des raidisseurs où sur une largeur égale à d_φ elle prend la valeur 1.

En vertu du paragraphe précédent et de la figure 2.2.11 on écrira :

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \left[H\left[x - \left(b + k\varepsilon_\varphi - \frac{d_\varphi}{2}\right)\right] - H\left[x - \left(b + k\varepsilon_\varphi + \frac{d_\varphi}{2}\right)\right] \right]$$

D'une manière absolument similaire on définira :

$$f(\varphi) = \sum_{j=0}^n \left[H\left[\varphi - \left(b' + j\varepsilon_x - \frac{d_x}{2}\right)\right] - H\left[\varphi - \left(b' + j\varepsilon_x + \frac{d_x}{2}\right)\right] \right]$$

Par le même processus que pour N_φ , on pourra écrire :

$$M_\varphi = - \left[\int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \sigma_\varphi z dz + f(x) \int_{\omega(\varphi)} \sigma_\varphi z \frac{e_\varphi}{d_\varphi} dz \right].$$

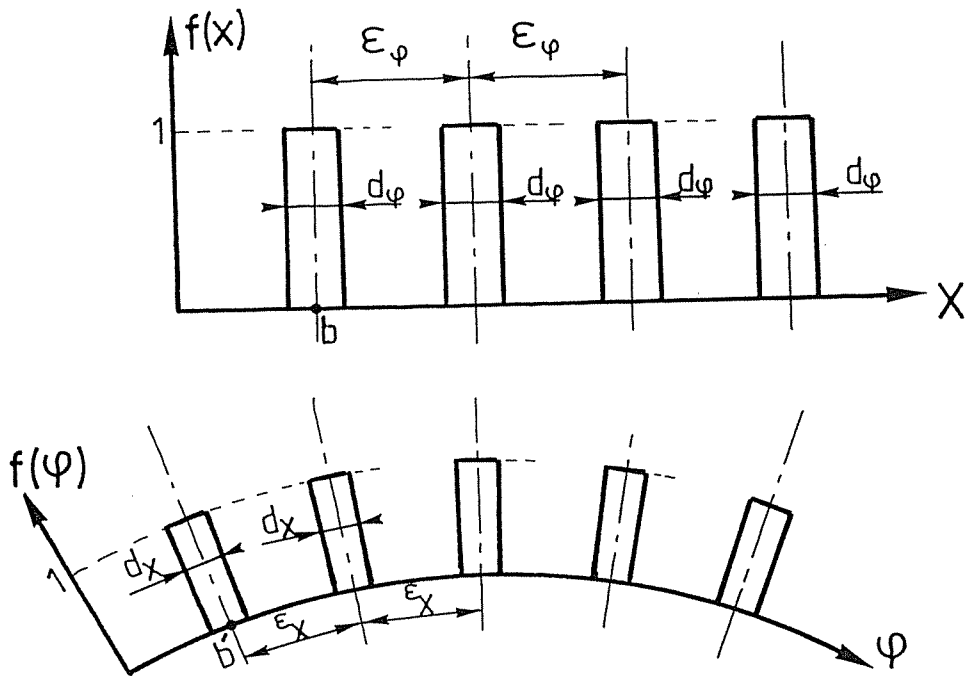


Figure 2.2.11

Un procédé analogue au droit d'un raidisseur longitudinal fournira :

$$N_x = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{q}\right) dz + \int_{\omega_x} \sigma_x \frac{e_x}{d_x} dz$$

en remarquant que e_x est une distance qui n'est plus comptée suivant un arc mais suivant une droite perpendiculairement à l'axe des raidisseurs parce que ceux-ci sont généralement des profilés rapportés. (figure 2.2.10).

D'une manière plus générale, on écrira :

$$N_x = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{q}\right) dz + f(\varphi) \int_{\omega_x} \sigma_x \frac{e_x}{d_x} dz$$

et

$$M_x = - \left[\int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{q}\right) z dz + f(\varphi) \int_{\omega_x} \sigma_x z \frac{e_x}{d_x} dz \right]$$

Ces N_φ , M_φ , N_x et M_x peuvent être exprimés en fonction des déplacements u , v et w par élimination des σ_φ et σ_x .

$$\sigma_{\varphi} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\nu^{\circ}}{q} + \frac{w}{q} - \frac{z}{q^2} w^{\circ\circ} + \nu(u' - zw''') \right] \quad (2.2.8.a)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left[u' - \frac{z}{q}(qw''') + \nu \left(\frac{\nu^{\circ}}{q} + \frac{w}{q} - \frac{z}{q^2} w^{\circ\circ} \right) \right] \quad (2.2.8.b)$$

Il faut cependant remarquer que ces expressions ne sont valables que pour $-\delta/2 < z < +\delta/2$.

Dans les domaines ω_x ou ω_{φ} les termes en ν sont sans signification puisque le gril des raidisseurs est essentiellement discontinu. On trouve ainsi :

$$N_{\varphi} = \frac{E\delta}{(1-\nu^2)q} (\nu^{\circ} + w + \nu qu') + f(x) \frac{E}{d_{\varphi}} \left[\left(\frac{\nu^{\circ}}{q} + \frac{w}{q} \right) \omega_{\varphi} - \frac{w^{\circ\circ}}{q} h_{\varphi} \right] \quad (2.2.15.a)$$

$$M_{\varphi} = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)q^2} (w^{\circ\circ} + \nu q^2 w''') - f(x) \frac{E}{d_{\varphi}} \left[\frac{w + \nu^{\circ}}{q} h_{\varphi} - \frac{w^{\circ\circ}}{q} I_{\varphi} \right] \quad (2.2.15.b)$$

$$N_x = \frac{E\delta}{(1-\nu^2)q} (u'q + \nu w^{\circ} + \nu w) + f(\varphi) \frac{E}{d_x} [u' \omega_x - w'' h_x] \quad (2.2.15.c)$$

$$M_x = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)q^2} (q^2 w'' + \nu w^{\circ\circ}) - f(\varphi) \frac{E}{d_x} [u' h_x - w'' I_x] \quad (2.2.15.d)$$

où ω_{φ} et ω_x représentent la surface de la section des raidisseurs sous la coque;

h_{φ} et h_x sont les moments statiques des ω_{φ} et ω_x calculés par rapport à la surface médiane;

I_{φ} et I_x sont les moments d'inertie des mêmes ω_{φ} et ω_x par rapport à la surface médiane.

Les ω_{φ} , ω_x , I_{φ} et I_x sont toujours positifs. Les h_{φ} et h_x sont positifs lorsque les nervures sont sur la coque et négatifs sous la coque.

II.4.3. Calcul des $N_{x\varphi}$ et $N_{\varphi x}$

Pour déterminer la contribution des nervures au cisaillement selon le feuillet moyen, il convient de retourner aux équations :

$$(2.2.5.a) \quad \dots \quad \bar{u} = u - z w'$$

et

$$(2.2.5.d) \quad \dots \quad \bar{\nu} = \nu - \frac{z}{q} w^{\circ}$$

Ces déplacements sont schématisés à la figure 2.2.12. On constate qu'ils correspondent à un déplacement d'ensemble du feuillet moyen accompagné d'une rotation.

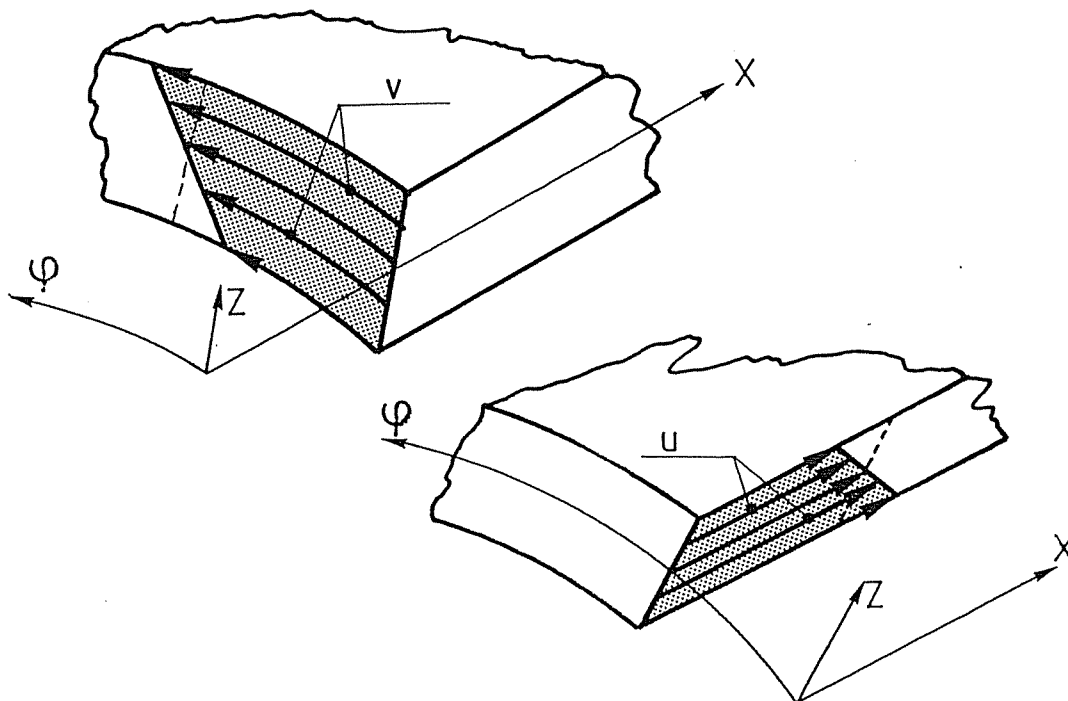


Figure 2.2.12

A partir de ces déplacements du feuillet moyen, on peut retrouver les valeurs des efforts de cisaillement.

Le croquis de la figure 2.2.13 figure un élément infiniment petit de coque avant et après déformation par des efforts de cisaillement.

Les nervures dans les deux sens sont schématisées par des petits rectangles N.N et N'N'. On peut y voir que la réduction de l'angle droit est représentée par

$$\hat{EAD} + \hat{BAC} = v' + \frac{\partial u}{\partial \phi} = v' + \frac{u^0}{q}$$

On peut en déduire, étant donné la continuité dans les deux sens de la coque que

$$N_{x\phi_1} = G \cdot \delta \cdot 1 \cdot \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) = \frac{D}{q} \frac{1-\nu}{2} (u^0 + qv')$$

et l'on retrouve ainsi la valeur de l'effort du cisaillement repris par la coque lisse (2.2.9.c).

La contribution apportée par les nervures à la rigidité de cisaillement est tributaire de conditions technologiques. Si la nervure n'est solidarisée au bordage que par l'intermédiaire de son âme (figure 2.2.14),

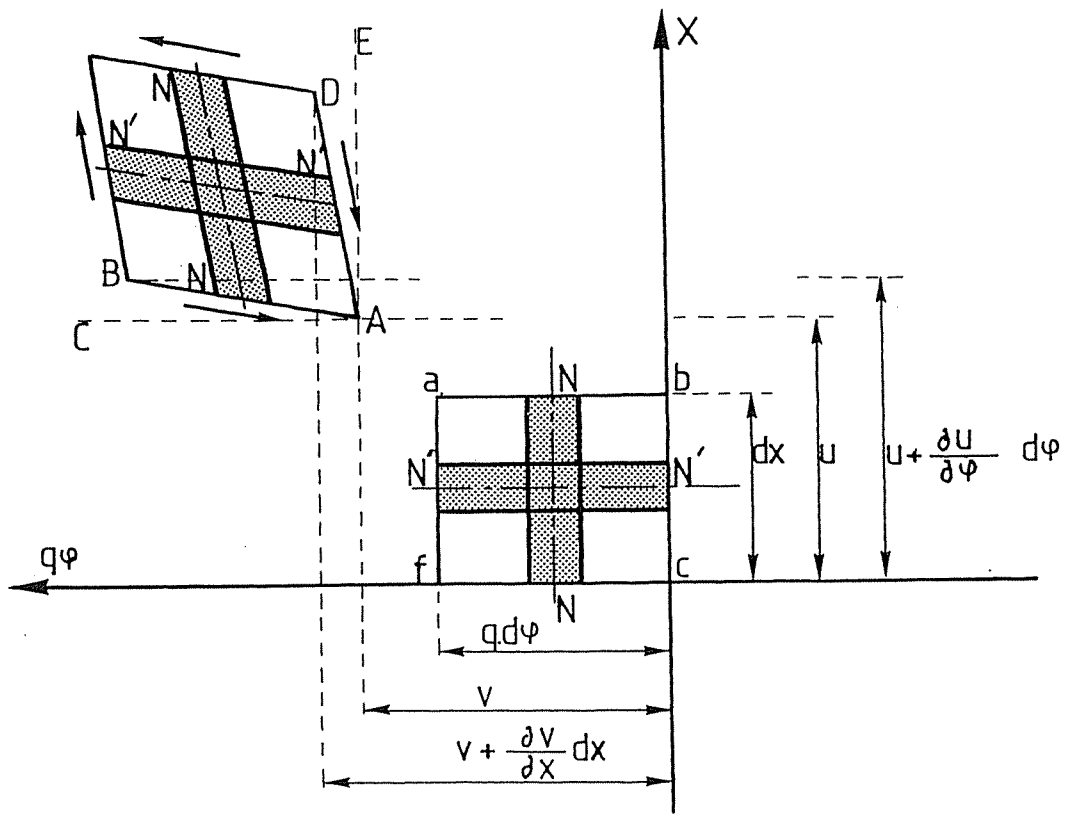


Figure 2.2.13

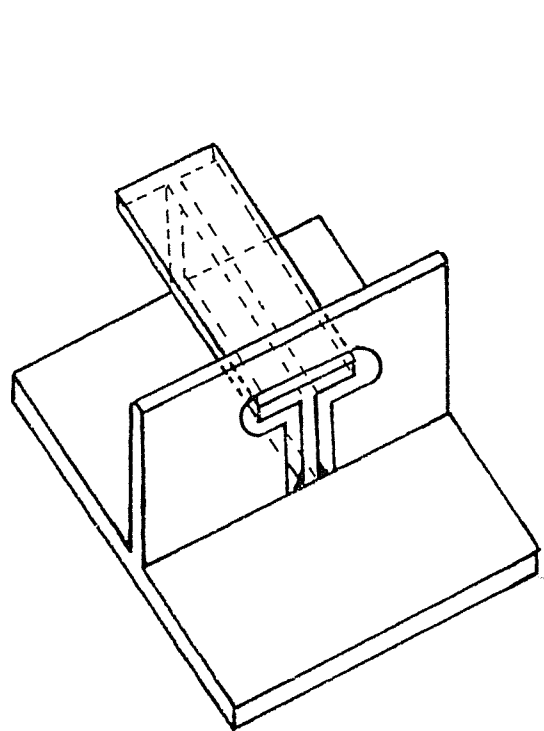


Figure 2.2.14

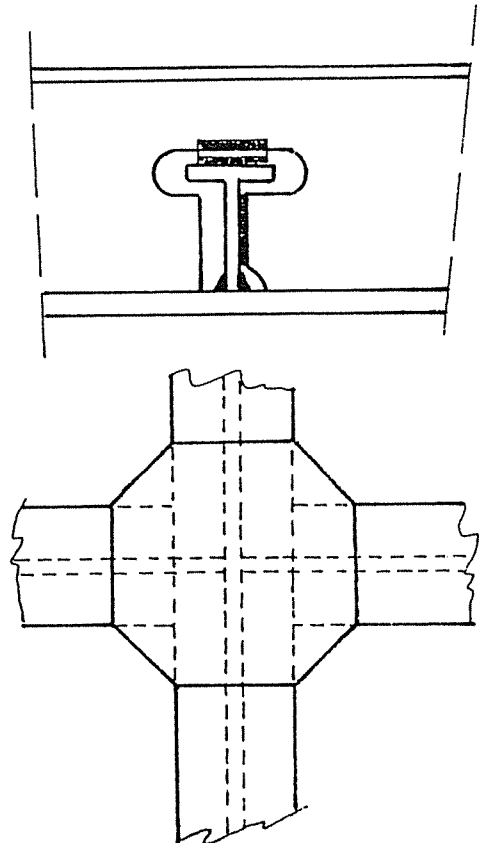


Figure 2.2.15

il est raisonnable d'admettre que seul le bordage participe à la transmission des contraintes de cisaillement. Si au contraire de nombreux renforts fixent la nervure au bordage et si les croisements de nervures sont prévus rigidement, les semelles de ces nervures peuvent contribuer à la reprise des efforts de cisaillement (figure 2.2.15).

Il est vraisemblable que la solution réelle est intermédiaire entre les deux cas limites précités. Dans le cas de rigidité maximum, nous ferons une approximation en supposant que la déformation au cisaillement de la semelle est la même que celle de la coque, soit : $v' + u^0/q$. L'impact de cette dernière approximation est sans influence majeure sur la suite du raisonnement.

Dans ce cas les parties des nervures (les semelles) parallèles à la surface médiane de la coque (le bordage) donneront naissance aux effets de cisaillement suivants :

$$\overline{N_{x\varphi_2}} = G \Omega'_x \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) \quad \text{pour des nervures orientées selon } ox$$

et

$$\overline{N_{\varphi x_2}} = G \Omega'_\varphi \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) \quad \text{pour des nervures orientées selon } o\varphi$$

où les Ω' sont les sections réduites des semelles des nervures.

Dès lors par unité de longueur, d_x et d_φ étant les largeurs des semelles des nervures (figure 2.2.11), on a :

$$N_{x\varphi_2} = \frac{\overline{N_{x\varphi_2}}}{d_x} = \frac{G \Omega'_x}{d_x} \cdot \left(v' + \frac{u^0}{q} \right)$$

et

$$N_{\varphi x_2} = \frac{\overline{N_{\varphi x_2}}}{d_\varphi} = \frac{G \Omega'_\varphi}{d_\varphi} \cdot \left(v' + \frac{u^0}{q} \right)$$

D'une manière plus générale, quel que soit le point de la coque considérée et s'il n'y a qu'un seul cours de nervure dans le sens des x , on a :

$$N_{x\varphi} = N_{x\varphi_1} + N_{x\varphi_2} = D \frac{1-\nu}{2} \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) + f(\varphi) \frac{G \Omega'_x}{d_x} \left(v' + \frac{u^0}{q} \right)$$

et

$$N_{\varphi x} = N_{\varphi x_1} = D \frac{1-\nu}{2} \left(v' + \frac{u^0}{q} \right)$$

Et, s'il n'y a qu'un seul cours de nervure dans le sens des φ , on a :

$$N_{x\varphi} = N_{x\varphi_1} = D \frac{1-\nu}{2} \left(v' + \frac{u^0}{q} \right)$$

et

$$N_{\varphi x} = N_{\varphi x_1} + N_{\varphi x_2} = D \frac{1-\nu}{2} \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) + f(x) \frac{G \Omega'_{\varphi}}{d_{\varphi}} \left(v' + \frac{u^0}{q} \right)$$

Pour une coque comportant les 2 types de nervures, on a :

$$N_{x\varphi} = D \frac{1-\nu}{2} \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) + f(\varphi) \frac{G}{d_x} \Omega'_x \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) \quad (2.2.16)$$

$$N_{\varphi x} = D \frac{1-\nu}{2} \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) + f(x) \frac{G}{d_{\varphi}} \Omega'_{\varphi} \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) \quad (2.2.17)$$

Compte tenu des expressions de $N_{x\varphi}$ et $N_{\varphi x}$ (2.2.16 et 17), vérifions si l'équation (2.2.4.f) est satisfaite.

$$N_{x\varphi} - N_{\varphi x} + \frac{M_{x\varphi}}{q} + \mathcal{M}_z = 0 \quad (2.2.4.f)$$

Pour la coque lisse, nous avons constaté que pour vérifier (2.2.4.f), il fallait admettre $M_{x\varphi}/q = 0$ à cause de la simplification émise sur δ/q .

Plaçons-nous maintenant dans les mêmes conditions, $M_{x\varphi}/q = 0$ et $\mathcal{M}_z = 0$, pour le cas de la coque raidie et vérifions que

$$N_{x\varphi} - N_{\varphi x} = 0. \quad (2.2.18)$$

En tout point de la coque lisse [$f(x) = f(\varphi) = 0$], compte tenu des relations (2.2.16 et 17), l'équation (2.2.18) est vérifiée.

Mais si nous nous plaçons au droit de 2 nervures, une selon $\sigma\varphi$ et une selon ox , par (2.2.16 et 17) on a :

$$f(\varphi) \frac{G}{d_x} \Omega'_x \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) - f(x) \frac{G}{d_{\varphi}} \Omega'_{\varphi} \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) \neq 0$$

On constate donc que l'équilibre moment selon l'axe oz n'est pas vérifié sauf si $f(x) = f(\varphi) = 0$, c'est-à-dire si la coque (plaque) est lisse. Afin de préciser l'incompatibilité entre les expressions des termes concentrés de $N_{x\varphi}$ et $N_{\varphi x}$, vérifions le respect du principe de réciprocité des contraintes tangentielles.

Vérification du principe de réciprocité des contraintes tangentielles.
Le principe de réciprocité des contraintes tangentielles (2.2.8.c) agissant sur deux facettes perpendiculaires, n'est pas discutable.

$$\tau_{x\varphi} = \tau_{\varphi x} = \frac{D}{\delta} \cdot \frac{1-\nu}{2} \left(v' + \frac{u^0}{q} - \frac{2z}{q} w^{\circ 1} \right)$$

De ce fait, par (2.2.3.c et d), il est évident d'écrire au niveau d'une coque lisse l'égalité des efforts unitaires $N_{x\varphi}$ et $N_{\varphi x}$.

$$N_{x\varphi} = N_{\varphi x} = D \frac{1-\nu}{2} \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) \quad (2.2.9.c)$$

Par contre au niveau de la coque raidie (figure 2.2.16), il faut re-

voir la question.

Soit une nervure selon l'axe des x :

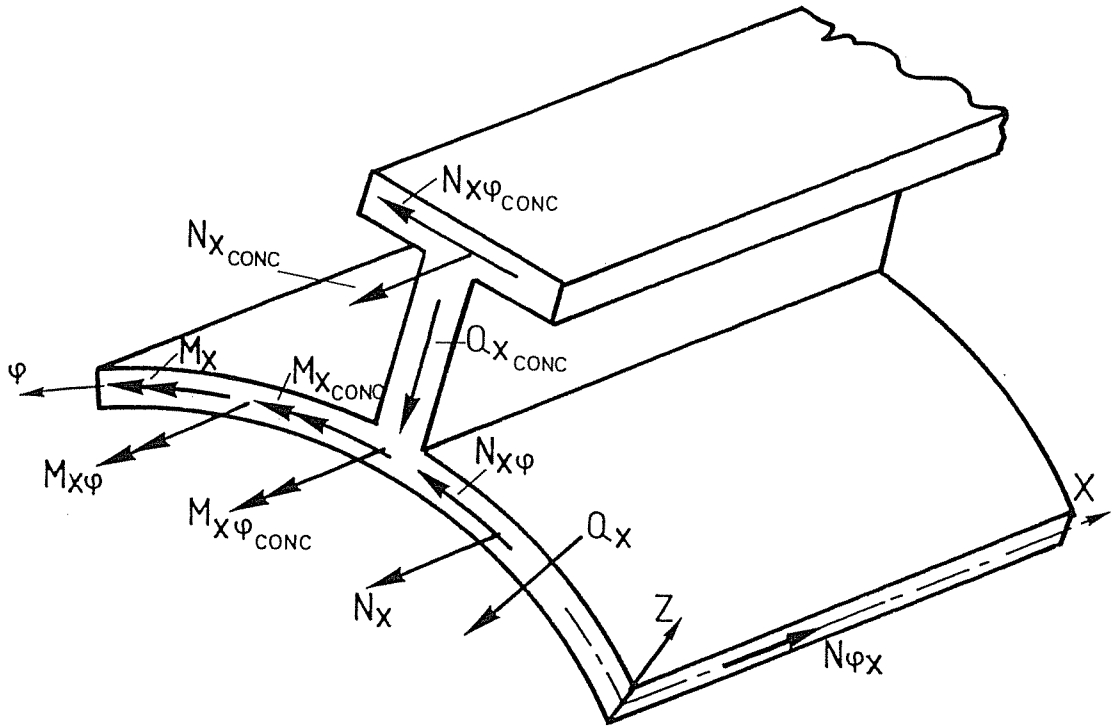


Figure 2.2.16

Dans cette coupe, nous avons défini sur une facette $o\phi z$ perpendiculaire à ox les forces et moments unitaires $N_x, N_{x\phi}, Q_x, M_x, M_{x\phi}$ agissant au niveau du bordage et les $N_{x_{CONC}}, N_{x\phi_{CONC}}, M_{x_{CONC}}, Q_{x_{CONC}}, M_{x\phi_{CONC}}$, agissant uniquement sur des intervalles d_x au droit des nervures.

L'existence d'une force unitaire $N_{x\phi_{CONC}}$ implique l'existence simultanée d'une force unitaire $N_{\phi x_{CONC}}$ agissant également au niveau de la semelle libre, mais cette fois sur une facette $ox\phi$ (figure 2.2.17).

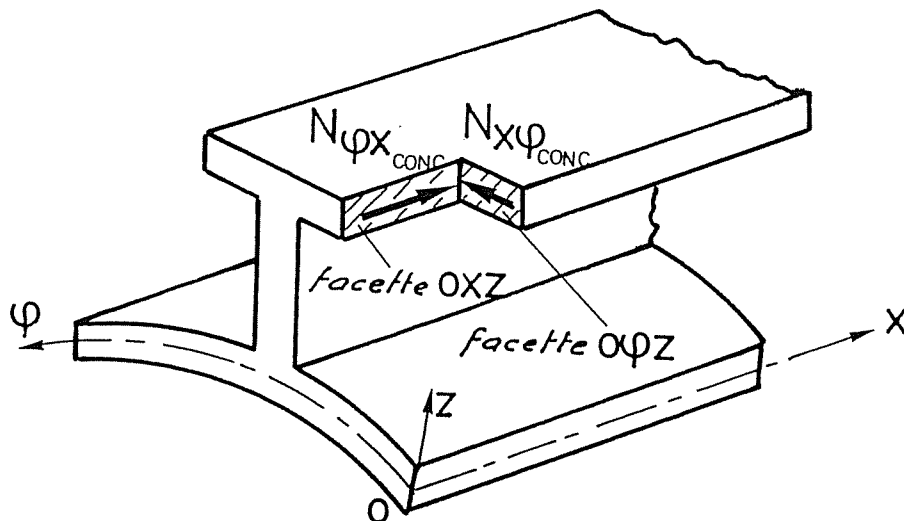


Figure 2.2.17

Le principe de réciprocité nous montre donc qu'il faut ajouter un terme $N_{\varphi x}$ à l'expression de $N_{\varphi x}$ (2.2.9.c); cela nous permet d'écrire maintenant pour une coque raidie par un lit de nervure orientée selon l'axe ox

$$N_{\varphi x} = N_{x\varphi} = D \frac{1-\nu}{2} \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) + f(\varphi) \frac{G\Omega'}{dx} x \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) \quad (2.2.19)$$

De même pour un lit de nervure orientée selon l'axe $o\varphi$,

$$N_{\varphi x} = N_{x\varphi} = D \frac{1-\nu}{2} \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) + f(x) \frac{G\Omega'}{d\varphi} \varphi \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) \quad (2.2.20)$$

Pour une coque comportant les deux types de nervures, on a donc

$$N_{\varphi x} = N_{x\varphi} = D \frac{1-\nu}{2} \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) + f(x) \frac{G}{d\varphi} \Omega'_{\varphi} \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) + f(\varphi) \frac{G}{dx} \Omega'_{x} \left(v' + \frac{u^0}{q} \right)$$

ou encore avec

$$S_x = \frac{G\Omega'}{dx} x \quad \text{et} \quad S_{\varphi} = \frac{G\Omega'}{d\varphi} \varphi$$

$$N_{\varphi x} = N_{x\varphi} = D \frac{1-\nu}{2} \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) + f(x) S_{\varphi} \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) + f(\varphi) S_x \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) = \left[D \frac{1-\nu}{2} + f(\varphi) S_x + f(x) S_{\varphi} \right] \cdot \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) \quad (2.2.21)$$

en lieu et place des relations de $N_{x\varphi}$ (2.2.16) et de $N_{\varphi x}$ (2.2.17).

II.4.4. - Calcul des $M_{x\varphi}$, $M_{\varphi x}$

Il n'est pas possible de calculer directement les moments $M_{x\varphi}$ et $M_{\varphi x}$ à partir des contraintes tangentielles $\tau_{x\varphi}$, $\tau_{\varphi x}$, τ_{xz} et $\tau_{\varphi z}$ car en vertu des hypothèses l'état de contraintes est supposé plan si bien que τ_{xz} et $\tau_{\varphi z}$ sont nulles.

Pour calculer $M_{x\varphi}$ on se rappellera l'expression de $\bar{v} = v - \frac{z}{q} w^0$ (2.2.5.d) et d'après la figure 2.2.12 on constatera que w^0/q représente la rotation d'un rayon de la coque.

La variation de cette rotation dans le sens des x représente une distorsion

$$\left(\frac{w^0}{q} \right)' = \frac{w^0'}{q}$$

à laquelle correspond un moment de torsion.

Pour l'estimer on considère une nervure longitudinale (figure 2.2.18) avec une bande de coque de largeur d_x définie précédemment à la figure 2.2.10.

La distorsion de cet ensemble étant $w^{\circ'}/q$, on sait que le moment de torsion s'exprime par

$$G \cdot k_{x\varphi} \cdot \frac{w^{\circ'}}{q}$$

où $G \cdot k_{x\varphi}$ est la rigidité torsionnelle de l'ensemble.

Considérant cet ensemble comme un profilé et en admettant que toutes les parties constitutives pivotent du même angle $w^{\circ'}/q$ on écrira

$$\frac{w^{\circ'}}{q} = \frac{M_1}{GK_{1x\varphi}} = \frac{M_2}{GK_{2x\varphi}} = \frac{M_3}{GK_{3x\varphi}}$$

où M_1 , M_2 et M_3 sont les parties constituant le moment de torsion global et relatives à la fraction de coque, à la nervure et à la semelle.

et $GK_{1x\varphi}$, $GK_{2x\varphi}$ et $GK_{3x\varphi}$ sont les rigidités torsionnelles correspondantes.

On peut estimer ces rigidités :

a. $GK_{1x\varphi} = Gd_x \cdot \frac{\delta^3}{6}$ car les contraintes tangentielles dans l'élément de coque sont essentiellement parallèles au feuillet moyen.

b. $GK_{2x\varphi}$ et $GK_{3x\varphi}$ sont calculés en supposant que l'aile et la semelle sont des rectangles indépendants soit donc suivant la formule

$$G \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{longueur} \cdot (\text{largeur})^3$$

Le moment de torsion global vaut ainsi :

$$\frac{M_1+M_2+M_3}{d_x} \quad \text{et ainsi} \quad M_{x\varphi} = \frac{K}{q}(1-\nu) w^{\circ'} + \frac{G}{q d_x} (K_{2x\varphi} + K_{3x\varphi}) w^{\circ'}$$

Le premier terme représente le moment unitaire repris par la coque conformément à (2.2.9.f).

Quel que soit le point de la coque, l'expression suivante existera alors :

$$M_{x\varphi_1} = \frac{K}{q} (1-\nu) w^{\circ'} + f(\varphi) \cdot \frac{G}{qd_x} (K_{2x\varphi} + K_{3x\varphi}) w^{\circ'} \quad (2.2.22)$$

Par un raisonnement absolument analogue et en partant de l'expression de $\bar{u} = u - zw'$, on démontre que :

$$M_{\varphi x_1} = \frac{K}{q} (1-\nu) w^{\circ'} + f(x) \cdot \frac{G}{qd_\varphi} (K_{2\varphi x} + K_{3\varphi x}) w^{\circ'} \quad (2.2.23)$$

Ces deux dernières expressions de $M_{x\varphi_1}$ et $M_{\varphi x_1}$ ne représentent cependant

pas complètement le moment de torsion.

En effet, dans le calcul des efforts de cisaillement on a vu que les efforts $\overline{N}_{x\varphi_2}$ et $\overline{N}_{\varphi x_2}$ qui sont repris par les parties des nervures parallèles à la coque, n'agissent pas sur la surface médiane de celle-ci mais bien à une certaine distance qui sera désignée par λ_φ ou λ_x selon la figure 2.2.19.

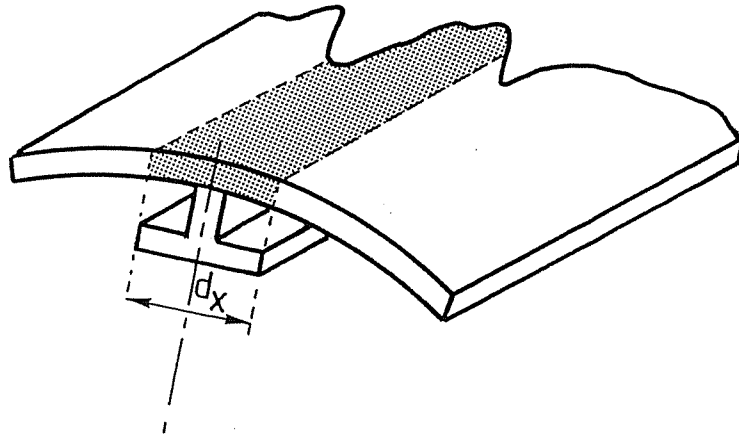


Figure 2.2.18

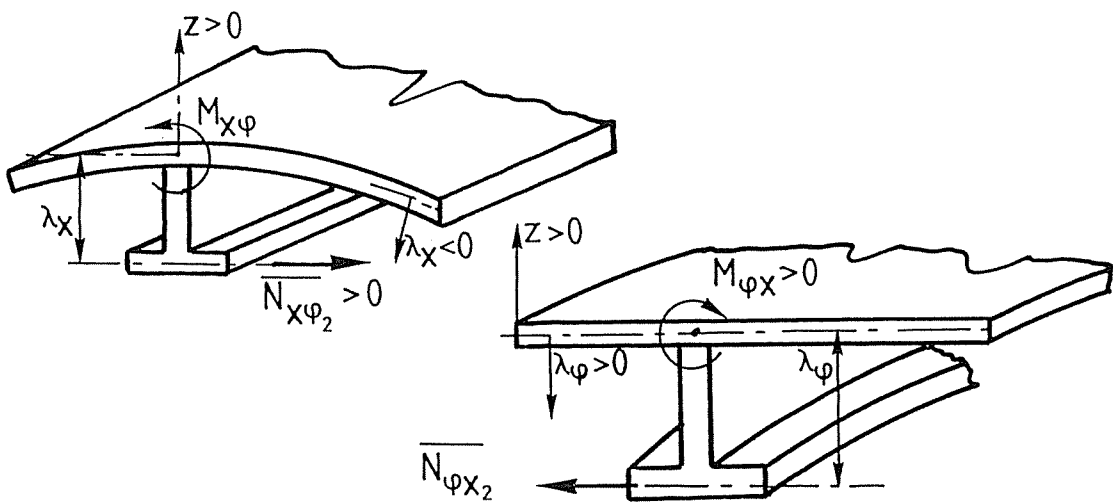


Figure 2.2.19

Etant donné les sens positifs de cisaillement et des moments de torsion, on pourra transporter ces efforts $\overline{N}_{x\varphi_2}$ et $\overline{N}_{\varphi x_2}$ sur la surface moyenne à condition d'introduire deux moments supplémentaires par unités de longueur

$$M_{x\varphi_2} = \lambda_x \overline{N}_{x\varphi_2} = G \frac{\lambda_x}{d_x} \Omega'_x (v' + \frac{u^o}{q})$$

et

$$M_{\varphi x_2} = \lambda_\varphi \overline{N}_{\varphi x_2} = G \frac{\lambda_\varphi}{d_\varphi} \Omega'_\varphi (v' + \frac{u^o}{q}) \quad (\text{cf figure 2.2.19}).$$

En définitive on peut écrire :

$$M_{x\varphi} = M_{x\varphi_1} + M_{x\varphi_2} = \frac{K}{q}(1-\nu)w^{\circ\prime} + f(\varphi) \frac{G}{q d_x} (K_{2x\varphi} + K_{3x\varphi})w^{\circ\prime} + f(\varphi) \frac{G\lambda}{d_x} \Omega'_x \left(\nu' + \frac{u^{\circ}}{q}\right) \quad (2.2.24)$$

$$M_{\varphi x} = M_{\varphi x_1} + M_{\varphi x_2} = \frac{K}{q}(1-\nu)w^{\circ\prime} + f(x) \frac{G}{q d_\varphi} (K_{2\varphi x} + K_{3\varphi x})w^{\circ\prime} + f(x) \frac{G\lambda}{d_\varphi} \Omega'_\varphi \left(\nu' + \frac{u^{\circ}}{q}\right) \quad (2.2.25)$$

II.4.5. - Etablissement des équations différentielles des coques raidies en tenant compte de l'effet discontinu des raidisseurs.

Pour simplifier les écritures on introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{E\omega_\varphi}{d_\varphi} &= \Omega'_\varphi, & \frac{E\omega_x}{d_x} &= \Omega'_{x'}, & \frac{Eh_\varphi}{d_\varphi} &= H'_\varphi, & \frac{Eh_x}{d_x} &= H'_{x'}, \\ \frac{EI_\varphi}{d_\varphi} &= R'_\varphi, & \frac{EI_x}{d_x} &= R'_{x'}, & \frac{\lambda_\varphi}{d_\varphi} G \Omega'_\varphi &= L'_\varphi, & \frac{\lambda_x}{d_x} G \Omega'_{x'} &= L'_{x'}, \\ \frac{G\Omega'_\varphi}{d_\varphi} &= S'_\varphi, & \frac{G\Omega'_x}{d_x} &= S'_{x'}, & \frac{G}{d_\varphi} (K_{2\varphi x} + K_{3\varphi x}) &= T'_\varphi, & \frac{G}{d_x} (K_{2x\varphi} + K_{3x\varphi}) &= T'_{x'}. \end{aligned}$$

Il convient de remarquer que les H'_x et H'_φ possèdent un signe qui n'est pas nécessairement positif. Il en est de même des L'_x et L'_φ .

On peut alors écrire :

$$N_\varphi = \frac{D}{q} (\nu^{\circ} + w + \nu q u') + f(x) \left[\frac{\Omega'_\varphi}{q} (\nu^{\circ} + w) - \frac{H'_\varphi}{2} w^{\circ\circ} \right] \quad (2.2.26.a)$$

$$N_x = \frac{D}{q} (u' q + \nu w + \nu v^{\circ}) + f(\varphi) \left[\Omega'_{x'} u' - H'_{x'} w'' \right] \quad (2.2.26.b)$$

$$N_{\varphi x} = \frac{D}{q} \cdot \frac{1-\nu}{2} (u^{\circ} + q v') + f(x) S'_\varphi \left(\nu' + \frac{u^{\circ}}{q}\right) + f(\varphi) S'_{x'} \left(\nu' + \frac{u^{\circ}}{q}\right) \quad (2.2.26.c)$$

$$N_{x\varphi} = \frac{D}{q} \cdot \frac{1-\nu}{2} (u^{\circ} + q v') + f(\varphi) S'_x \left(\nu' + \frac{u^{\circ}}{q}\right) + f(x) S'_\varphi \left(\nu' + \frac{u^{\circ}}{q}\right) \quad (2.2.26.d)$$

$$M_\varphi = \frac{K}{q^2} (w^{\circ\circ} + \nu q^2 w''') - f(x) \left[\frac{H'_\varphi}{q} (w + \nu^{\circ}) - \frac{R'_\varphi}{q^2} w^{\circ\circ} \right] \quad (2.2.26.e)$$

$$M_x = \frac{K}{q^2} (w''' q^2 + \nu w^{\circ\circ}) - f(\varphi) \left[H'_{x'} u' - R'_{x'} w'' \right] \quad (2.2.26.f)$$

$$M_{\varphi x} = \frac{K}{q} (1-\nu)w^{\circ\prime} + f(x) \left[T'_\varphi \frac{w^{\circ\prime}}{q} + L'_\varphi \left(\nu' + \frac{u^{\circ}}{q}\right) \right] \quad (2.2.26.g)$$

$$M_{x\varphi} = \frac{K}{q} (1-\nu)w^{\circ\prime} + f(\varphi) \left[(T_x \frac{w^{\circ\prime}}{q} + L_x (v' + \frac{u^{\circ}}{q})) \right] \quad (2.2.26.h)$$

Les valeurs de Q_x et Q_φ seront obtenues à partir des équations d'équilibre (2.2.10).

$$Q_\varphi = \frac{K}{q} (1-\nu)w^{\circ\prime\prime} + \frac{K}{3}(w^{\circ\circ\circ} + \nu q^2 w^{\circ\prime\prime}) + f(\varphi) \left[T_x \frac{w^{\circ\prime\prime}}{q} + L_x (v'' + \frac{u^{\circ\prime}}{q}) \right] - f(x) \frac{1}{q} \left[\frac{H_\varphi}{q}(w^{\circ} + \nu^{\circ\circ}) - \frac{R_\varphi}{2} w^{\circ\circ\circ} \right] \quad (2.2.26.i)$$

$$Q_x = \frac{K}{q^2}(w''''q^2 + \nu w^{\circ\circ\prime}) + \frac{K}{2}(1-\nu)w^{\circ\circ\prime} - f(\varphi) [H_x u'' - R_x w'''] + f(x) \frac{1}{q} \left[T_\varphi \frac{w^{\circ\circ\prime}}{q} + L_\varphi (\frac{u^{\circ\circ}}{q} + v^{\circ\prime}) \right] \quad (2.2.26.j)$$

Le remplacement des relations (2.2.26) dans les 3 équations (2.2.11) conduit aux 3 équations différentielles suivante :

$$\frac{D}{q} (u''q + \nu v^{\circ\prime} + \nu w') + \frac{D}{2} \cdot \frac{1-\nu}{2} (u^{\circ\circ} + qv^{\circ\prime}) + f(x) \left[\frac{S_\varphi}{q} (v^{\circ\prime} + \frac{u^{\circ\circ}}{q}) \right] + f^{\circ}(\varphi) \frac{1}{q} [S_x (v' + \frac{u^{\circ}}{q})] + f(\varphi) [\Omega_x u'' - H_x w'''] + \frac{S_x}{q} (v^{\circ\prime} + \frac{u^{\circ\circ}}{q}) + X = 0 \quad (2.2.27.a)$$

$$\frac{D}{2} (v^{\circ\circ} + w^{\circ} + \nu q u^{\circ\prime}) + \frac{D}{q} \cdot \frac{1-\nu}{2} (u^{\circ\prime} + qv''') + f(x) \left[\frac{\Omega_\varphi}{2} (v^{\circ\circ} + w^{\circ}) \right] - \frac{H_\varphi}{3} w^{\circ\circ\circ} + S_\varphi (v'' + \frac{u^{\circ\prime}}{q}) + f'(x) [S_\varphi (v' + \frac{u^{\circ}}{q})] + f(\varphi) [S_x (v'' + \frac{u^{\circ\prime}}{q})] + Y = 0 \quad (2.2.27.b)$$

$$\frac{D}{q^2} (v^{\circ} + w + \nu q u') + \frac{K}{4} w^{\circ\circ\circ\circ} + \frac{2K}{2} w^{\circ\circ\prime\prime} + \frac{K}{2} w''''q^2 + f(x) \left[\frac{\Omega_\varphi}{q} (v^{\circ} + w) - \frac{2H_\varphi}{3} w^{\circ\circ} - \frac{H_\varphi}{3} v^{\circ\circ\circ} + \frac{R_\varphi}{4} w^{\circ\circ\circ\circ} + T_\varphi \frac{w^{\circ\circ\prime\prime}}{2} \right] + L_\varphi \frac{1}{q} (v^{\circ\prime\prime} + \frac{u^{\circ\circ\prime}}{q})$$

$$+ f(\varphi) \left[T_x \frac{w^{\circ\circ\prime\prime}}{q} + L_x \frac{1}{q} (v^{\circ\prime\prime} + \frac{u^{\circ\circ\prime}}{q}) - H_x u^{\prime\prime\prime} + R_x w^{\prime\prime\prime\prime} \right]$$

$$+ f^{\circ}(\varphi) \frac{1}{q} \left[\frac{T_x}{q} w^{\circ\prime\prime} + L_x (v^{\prime\prime} + \frac{u^{\circ\prime}}{q}) \right]$$

$$+ f'(x) \left[\frac{T_{\varphi}}{q} w^{\circ\circ\prime} + \frac{L_{\varphi}}{q} (v^{\circ\prime} + \frac{u^{\circ\circ}}{q}) \right] = -\frac{M^{\circ}}{q} x + M'_{\varphi} + Z \quad (2.2.27.c)$$

CHAPITRE III

ETABLISSEMENT DU SYSTEME D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

III.1. COQUES RAIDIES PAR 3 LITS DE NERVURES

Le système d'équations différentielles (2.2.27.a) à (2.2.27.c) est valable pour 2 types de nervures.

- les raidisseurs, termes en $f(\varphi)$, dirigés selon ox ;
- les aiguilles, termes en $f(x)$, dirigés selon $o\varphi$.

Notre souhait est d'étudier une coque raidie par 3 types de nervures (figure 2.3.1).

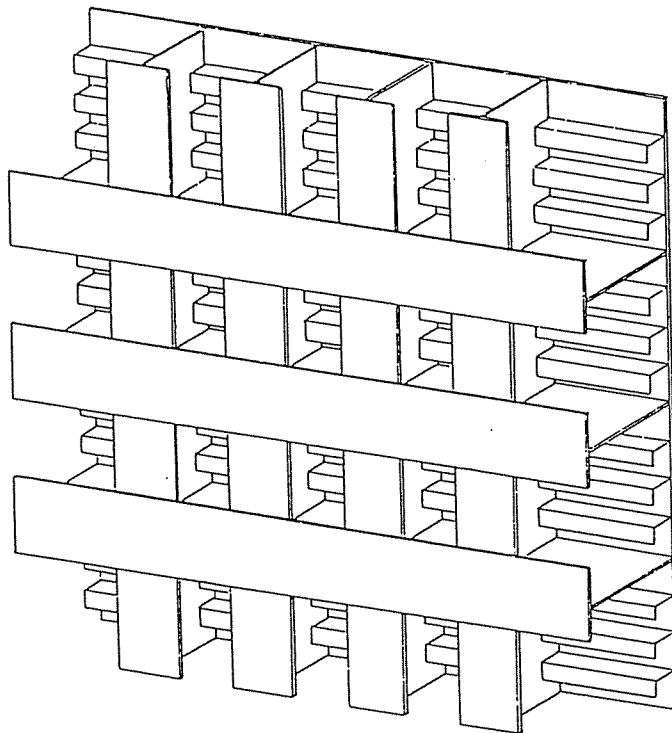


Figure 2.3.1 - Exemple de plaque où sont représentés les raidisseurs, les aiguilles et les traverses (ici 3 traverses).

- des raidisseurs placés selon l'axe ox , et uniformément répartis sur la coque. De plus, les raidisseurs sont tous identiques pour une coque donnée.
- des aiguilles placées selon l'axe $o\varphi$, et uniformément réparties sur la coque. De plus les aiguilles sont toutes identiques pour une coque donnée.
- des traverses placées selon l'axe ox , leurs dimensions ainsi que leurs positions et donc leur nombre peuvent être quelconques.

Pour tenir compte de ce système de raidissage, on transforme les équations (2.2.27) de manière à obtenir :

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{q} (u''q + v \cdot v^{o'} + v w') + \frac{D}{2} \cdot \left(\frac{1-v}{2}\right) \cdot (u^{oo} + q v^{o'}) + f(x)^{aig} \cdot \left[\frac{S}{q} \cdot (v^{o'} + \frac{u^{oo}}{q})\right] \\
 + f(\varphi)^{raid} \frac{1}{q} [S_x^{raid} (v' + \frac{u^o}{q})] + f(\varphi)^{raid} \cdot [\Omega_x^{raid} \cdot u'' - H_x^{raid} \cdot w'' \\
 + \frac{S_x^{raid}}{q} (v^{o'} + \frac{u^{oo}}{q})] + f(\varphi)^{trav} \frac{1}{q} [S_x^{trav} (v' + \frac{u^o}{q})] \\
 + f(\varphi)^{trav} \cdot [\Omega_x^{trav} \cdot u'' - H_x^{trav} \cdot w'' + \frac{S_x^{trav}}{q} (v^{o'} + \frac{u^{oo}}{q})] + X = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.3.1.a}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{q} (v^{oo} + w^o + v \cdot q \cdot u^{o'}) + \frac{D}{q} \cdot \left(\frac{1-v}{2}\right) (u^{o'} + q v'') + f(x)^{aig} \frac{1}{2} [\Omega_\varphi^{aig} (v^{oo} + w^o) \\
 - \frac{H_\varphi^{aig}}{q} w^{ooo} + S_\varphi^{aig} (v'' + \frac{u^{o'}}{q})] + f'(x)^{aig} [S_\varphi^{aig} (v' + \frac{u^o}{q})] \\
 + f(\varphi)^{raid} [S_x^{raid} (v'' + \frac{u^{o'}}{q})] + f(\varphi)^{trav} [S_x^{trav} (v'' + \frac{u^{o'}}{q})] + Y = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.3.1.b}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{q} (v^o + w + v q u') + \frac{K}{4} w^{oooo} + \frac{2K}{2} w^{oooo} + \frac{K}{2} w'''' \cdot q^2 \\
 + f(x)^{aig} \cdot \left[\frac{\Omega_\varphi^{aig}}{q} (v^o + w) - \frac{2H_\varphi^{aig}}{q} w^{oo} - \frac{H_\varphi^{aig}}{q} v^{ooo} + \frac{R_\varphi^{aig}}{q} w^{oooo} \right. \\
 \left. + T_\varphi^{aig} \frac{w^{oooo}}{q} + \frac{L_\varphi^{aig}}{q} (v^{o''} + \frac{u^{oo'}}{q})\right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + f(\varphi)^{\text{raid}} \cdot \left[T_x^{\text{raid}} \frac{w^{\text{ooi}}}{q^2} + \frac{L_x^{\text{raid}}}{q} \left(v^{\text{ooi}} + \frac{u^{\text{ooi}}}{q} \right) - H_x^{\text{raid}} u^{\text{ooi}} + R_x^{\text{raid}} w^{\text{ooi}} \right] \\
& + f(\varphi)^{\text{trav}} \cdot \left[T_x^{\text{trav}} \frac{w^{\text{ooi}}}{q^2} + \frac{L_x^{\text{trav}}}{q} \left(v^{\text{ooi}} + \frac{u^{\text{ooi}}}{q} \right) - H_x^{\text{trav}} u^{\text{ooi}} + R_x^{\text{trav}} w^{\text{ooi}} \right] \\
& + f'(x)^{\text{aig}} \cdot \left[T_\varphi^{\text{aig}} \frac{w^{\text{ooi}}}{q^2} + \frac{L_\varphi^{\text{aig}}}{q} \left(v^{\text{ooi}} + \frac{u^{\text{ooi}}}{q} \right) \right] \\
& + f^{\circ}(\varphi)^{\text{raid}} \cdot \frac{1}{q} \cdot \left[\frac{T_x^{\text{raid}}}{q} w^{\text{ooi}} + L_x^{\text{raid}} \cdot \left(v^{\text{ooi}} + \frac{u^{\text{ooi}}}{q} \right) \right] \\
& + f^{\circ}(\varphi)^{\text{trav}} \cdot \frac{1}{q} \cdot \left[\frac{T_x^{\text{trav}}}{q} w^{\text{ooi}} + L_x^{\text{trav}} \cdot \left(v^{\text{ooi}} + \frac{u^{\text{ooi}}}{q} \right) \right] = -\frac{M^{\circ}x}{q} + M^{\circ}\varphi + Z
\end{aligned}
\tag{2.3.1.c}$$

Comme les aiguilles et les raidisseurs sont tous identiques et ont une entredistance constante, on peut répartir les raideurs de ces nervures de manière uniforme.

Pour cela, et conformément à la figure 2.3.2, on voit qu'il suffit de remplacer :

$f(x)$ par une fonction constante : $\frac{d_\varphi}{\epsilon_\varphi}$

$f(\varphi)$ par une fonction constante : $\frac{d_x}{\epsilon_x}$

et de poser $f'(x) = f^{\circ}(\varphi) = 0$.

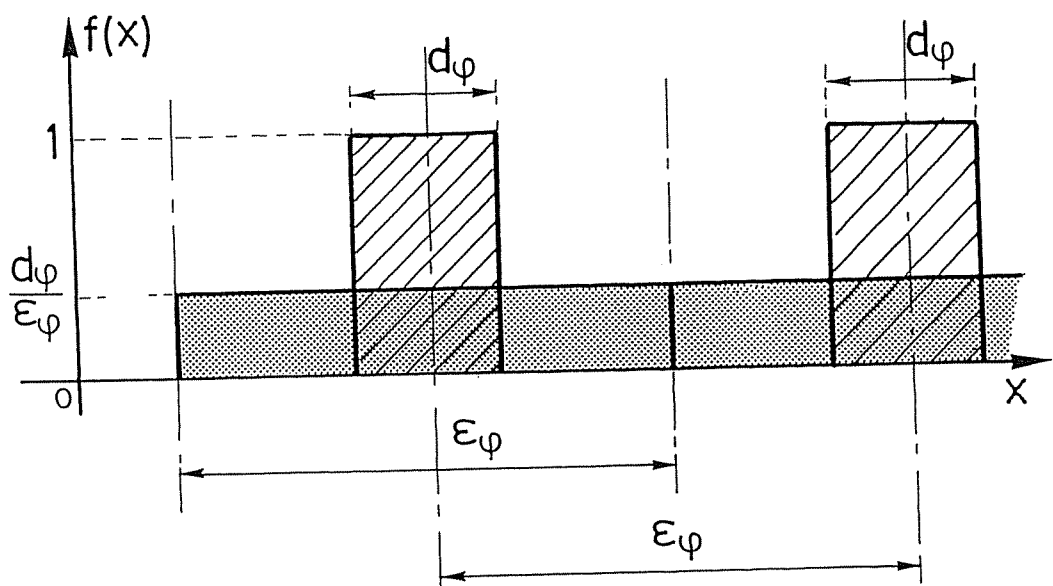


Figure 2.3.2.

On peut ensuite incorporer les facteurs $d_\varphi/\epsilon_\varphi$ et d_x/ϵ_x dans les raidisseurs et écrire :

$$\Omega_\varphi^r = \Omega_\varphi^{\text{aig}} \frac{d_\varphi}{\epsilon_\varphi} = \frac{E\omega_\varphi}{\epsilon_\varphi}$$

$$H_\varphi^r = H_\varphi^{\text{aig}} \frac{d_\varphi}{\epsilon_\varphi} = \frac{Eh_\varphi}{\epsilon_\varphi}$$

$$\Omega_x^r = \Omega_x^{\text{raid}} \frac{d_x}{\epsilon_x} = \frac{E\omega_x}{\epsilon_x}$$

$$H_x^r = H_x^{\text{raid}} \frac{d_x}{\epsilon_x} = \frac{Eh_x}{\epsilon_x}$$

$$R_x^r = R_x^{\text{raid}} \frac{d_x}{\epsilon_x} = \frac{EI_x}{\epsilon_x}$$

$$R_\varphi^r = R_\varphi^{\text{aig}} \frac{d_\varphi}{\epsilon_\varphi} = \frac{EI_\varphi}{\epsilon_\varphi}$$

$$S_x^r = S_x^{\text{raid}} \frac{d_x}{\epsilon_x} = \frac{G\Omega'_x}{\epsilon_x}$$

$$S_\varphi^r = S_\varphi^{\text{aig}} \frac{d_\varphi}{\epsilon_\varphi} = \frac{G\Omega'_\varphi}{\epsilon_\varphi}$$

$$T_x^r = T_x^{\text{raid}} \frac{d_x}{\epsilon_x} = \frac{G}{\epsilon_x} (K_{2x\varphi} + K_{3x\varphi})$$

$$T_\varphi^r = T_\varphi^{\text{aig}} \frac{d_\varphi}{\epsilon_\varphi} = \frac{G}{\epsilon_\varphi} (K_{2\varphi x} + K_{3\varphi x})$$

$$L_x^r = L_x^{\text{raid}} \frac{d_x}{\epsilon_x} = \frac{\lambda_x}{\epsilon_x} G\Omega'_x$$

$$L_\varphi^r = L_\varphi^{\text{aig}} \frac{d_\varphi}{\epsilon_\varphi} = \frac{\lambda_\varphi}{\epsilon_\varphi} G\Omega'_\varphi$$

De ce fait, on peut transformer les termes relatifs aux aiguilles et aux raidisseurs dans les équations (2.3.1.a à c) et obtenir 3 nouvelles équations différentielles à coefficients constants (2.3.2.a à c). Pour rappel, les termes en $f(\varphi)$ et $f^\circ(\varphi)$ sont nuls partout sauf au droit des nervures.

$$\begin{aligned} (D + \Omega_x^r) u'' + \frac{1}{2} (D - \frac{1-\nu}{2}) S_x^r + S_\varphi^r u^{\circ\circ} + \frac{1}{q} [D - \frac{1+\nu}{2}) S_x^r + S_\varphi^r] v^{\circ\circ} \\ - H_x^r w'' + \frac{D\nu}{q} w' + f(\varphi) [\Omega_x^t u'' - H_x^t w'' + \frac{S_x^t}{q} (v^{\circ\circ} + \frac{u^{\circ\circ}}{q})] \\ + f^\circ(\varphi) \frac{1}{q} [S_x^t (v' + \frac{u^\circ}{q})] + X = 0 \end{aligned} \quad (2.3.2.a)$$

$$\frac{1}{q} [D - \frac{1+\nu}{2}) S_x^r + S_\varphi^r] u^{\circ\circ} + \frac{1}{2} (D + \Omega_\varphi^r) v^{\circ\circ} + [D - \frac{1-\nu}{2}) S_x^r + S_\varphi^r] v''$$

$$-\frac{H_\varphi^r}{q} w^{ooo} + \frac{1}{2} (D+\Omega_\varphi^r) w^{o+f(\varphi)} \cdot S_x^t (v^{''} + \frac{u^{o'}}{q}) + Y = 0 \quad (2.3.2.b)$$

$$\begin{aligned} -H_x^r u^{''''} + (L_x^r + L_\varphi^r) \frac{u^{ooo}}{q} + \frac{Dv}{q} u' + \frac{1}{2} (D+\Omega_\varphi^r) \cdot v^o - \frac{H_\varphi^r}{3} \cdot v^{ooo} \\ + (L_x^r + L_\varphi^r) \frac{v^{o''}}{q} + \frac{1}{2} (D+\Omega_\varphi^r) \cdot w + \frac{1}{4} (K+R_\varphi^r) w^{oooo} \\ + \frac{1}{2} (2K+T_\varphi^r + T_x^r) w^{oo''} + (K+R_x^r) w^{''''} - \frac{2H_\varphi^r}{3} w^{oo} \\ + f(\varphi) [T_x^t \frac{w^{oo''}}{q} + \frac{L_x^t}{q} (v^{o''} + \frac{u^{ooo}}{q}) - H_x^t u^{''''} + R_x^t w^{''''}] \\ + f^o(\varphi) \frac{1}{q} [T_x^t \frac{w^{o''}}{q} + L_x^t (v^{''} + \frac{u^{o'}}{q})] = -\frac{M_\varphi^o}{q} + M_\varphi' + Z \end{aligned} \quad (2.3.2.c)$$

En parallèle avec les équations différentielles voici les éléments de réduction :

$$N_\varphi = (\frac{D+\Omega_\varphi^r}{q})(v^o+w) + Dv \cdot u' - \frac{H_\varphi^r}{2} w^{oo} \quad (2.3.3.a)$$

$$N_x = (D+\Omega_x^r) \cdot u' + \frac{Dv}{q}(v^o+w) - H_x^r w^{''} + f(\varphi) [H_x^t u' - H_x^t w^{''}] \quad (2.3.3.b)$$

$$N_{\varphi x} = [D(\frac{1-v}{2}) + S_x^r + S_\varphi^r] \cdot (v' + \frac{u^o}{q}) + f(\varphi) [S_x^t (v' + \frac{u^o}{q})] \quad (2.3.3.c)$$

$$N_{x\varphi} = [D(\frac{1-v}{2}) + S_x^r + S_\varphi^r] \cdot (v' + \frac{u^o}{q}) + f(\varphi) [S_x^t (v' + \frac{u^o}{q})] \quad (2.3.3.d)$$

$$M_\varphi = \frac{1}{2} (K+R_\varphi^r) w^{oo} + Kvw^{''} - \frac{H_\varphi^r}{q} (w+v^o) \quad (2.3.3.e)$$

$$M_x = (K+R_x^r) w^{''} + \frac{Kv}{2} w^{oo} - H_x^r u' - f(\varphi) \cdot [H_x^t u' - R_x^t w^{''}] \quad (2.3.3.f)$$

$$M_{\varphi x} = \frac{1}{q} [K(1-v) + T_\varphi^r] w^{o'} + L_\varphi^r (v' + \frac{u^o}{q}) \quad (2.3.3.g)$$

$$M_{x\varphi} = \frac{1}{q} [K(1-\nu)+T_x^r]w^{\circ\prime}+L_x^r(v'+\frac{u^{\circ}}{q})+f(\varphi)[\frac{T_x^t}{q}w^{\circ\prime}+L_x^t(v'+\frac{u^{\circ}}{q})] \quad (2.3.3.h)$$

$$Q_{\varphi} = \frac{1}{q} (K+T_x^r)w^{\circ\prime\prime}+\frac{1}{3}(K+R_{\varphi}^r)w^{\circ\circ\circ} - \frac{H_{\varphi}^r}{2}(w^{\circ}+v^{\circ\circ})+L_x^r(v'''+\frac{u^{\circ\prime}}{q}) \\ + f(\varphi)[\frac{T_x^t}{q}w^{\circ\prime\prime}+L_x^t(v'''+\frac{u^{\circ\prime}}{q})] \quad (2.3.3.i)$$

$$Q_x = \frac{1}{2} (K+T_{\varphi}^r)w^{\circ\circ\prime}+(K+R_x^r)w'''+H_x^r u'''+\frac{L_{\varphi}^r}{q}(v^{\circ\prime}+\frac{u^{\circ\circ}}{q}) \\ -f(\varphi)[H_x^t u'''+R_x^t w'''] \quad (2.3.3.j)$$

$$R_{\varphi} = \frac{1}{q} [K(2-\nu)+T_x^r+T_{\varphi}^r]w^{\circ\prime\prime}+\frac{1}{3}(K+R_{\varphi}^r)w^{\circ\circ\circ}-\frac{H_{\varphi}^r}{2}(w^{\circ}+v^{\circ\circ})+L_x^r v'''+\frac{L_{\varphi}^r}{q}u^{\circ\prime} \\ +f(\varphi)[\frac{T_x^t}{q}w^{\circ\prime\prime}+L_x^t(v'''+\frac{u^{\circ\prime}}{q})] \quad (2.3.3.k)$$

$$R_x = \frac{1}{2} [K(2-\nu)+T_x^r+T_{\varphi}^r]w^{\circ\circ\prime}+(K+R_x^r)w'''+H_x^r u'''+(L_x^r+L_{\varphi}^r)(\frac{v^{\circ\prime}}{q}+\frac{u^{\circ\circ}}{q}) \\ +f(\varphi)[-H_x^t u'''+R_x^t w'''+\frac{T_x^t}{2}w^{\circ\circ\prime}+\frac{L_x^t}{q}(v^{\circ\prime}+u^{\circ\circ})] \\ +f^{\circ}(\varphi)\frac{1}{q}[\frac{T_x^t}{q}w^{\circ\prime}+L_x^t(v'+\frac{u^{\circ}}{q})] \quad (2.3.3.l)$$

CHAPITRE IV

CONSIDERATIONS SUR LES NERVURES DU TYPE TRAVERSE On ramène le problème à la coque non raidie

Par la suite nous parlerons de coque raidie pour signaler l'existence de traverses et donc de termes discontinus dans les équations $[f(\varphi)$ et $f^0(\varphi)]$.

Au contraire nous parlerons de coque non raidie pour désigner une coque sans traverses mais où les raidisseurs et les aiguilles peuvent néanmoins exister. Ces derniers verront par contre leurs effets répartis uniformément.

Dans les équations (2.3.2.a à c) on découvre trois séries de termes :

a. ceux représentant la charge appliquée

$$X, Y, Z, \frac{M_x}{q} \text{ et } M'_\varphi$$

b. ceux en u, v, w communs aux équations (2.2.12) et aux équations (2.2.27)

c. ceux en $f(\varphi)$ et $f^0(\varphi)$.

La signification en est évidente : la charge appliquée est reprise partiellement par la coque et partiellement par les nervures.

Le rôle des traverses est donc représenté par les termes en $f(\varphi)$ et $f^0(\varphi)$.

Si l'on fait $f(\varphi) = f^0(\varphi) = 0$, on se trouve en présence d'une coque non raidie et si de plus, il n'y a pas d'aiguilles et de raidisseurs, on retrouve les équations de la coque isotrope (2.2.12).

Le rôle des traverses se caractérise par 5 types de forces.

Les 3 premiers types sont les forces correspondant aux termes en $f(\varphi)$:

$$X_0 = \left[\Omega_x u'' - H_x w'' + \frac{S}{q} (v^{\circ\circ} + \frac{u^{\circ\circ}}{q}) \right]_{\text{suivant } x} \quad (2.4.1.a)$$

$$Y_o = [S_x (v'' + \frac{u^{o1}}{q})]_{\text{suivant } x} \quad (2.4.1.b)$$

$$Z_o = [T_x \cdot \frac{w^{oo11}}{2} - H_x u'''' + R_x w'''' + \frac{L_x}{q} (v^{o11} + \frac{u^{oo1}}{q})]_{\text{suivant } x} \quad (2.4.1.c)$$

X_o , Y_o et Z_o sont des pressions (N/m^2) agissant sur la surface médiane de la coque et le long de bandes dont la largeur est d_x suivant x .

Sur la largeur d_x ces pressions restent constantes.

A partir du signe des forces extérieures, on peut dire que :

la pression X_o est positive dans le sens des x positifs,

la pression Y_o est positive dans le sens des φ positifs,

la pression Z_o est positive dans le sens des z négatifs.

La figure 2.4.1. schématise ces résultats.

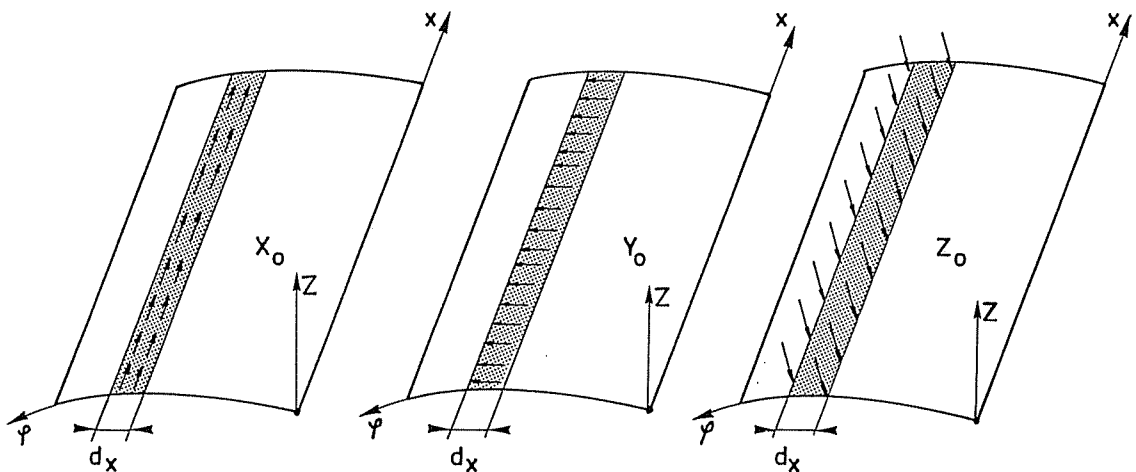


Figure 2.4.1.

Les deux derniers types de forces sont ceux des termes en $f^o(\varphi)$.

De la définition des fonctions $f(\varphi)$ (§II.4.1., partie II) et des notions précédemment rappelées du calcul symbolique, on peut écrire :

$$f^o(\varphi) = \sum_{j=0}^n \{ \delta [q\varphi - (b' + j\epsilon_x - \frac{d_x}{2})] - \delta [q\varphi - (b' + j\epsilon_x + \frac{d_x}{2})] \}$$

Il apparaît donc que les termes en $f^o(\varphi)$ symbolisent des forces concentrées dans un système de forces réparties.

Si l'on observe que les $f^o(\varphi)$ font intervenir une série de fonctions δ agissant en des points distants de d_x , que ces fonctions sont précédées de signes différents (les termes entre crochets étant constants), on constate que ces dernières expressions définissent des séries de forces égales et directement opposées; il s'agit donc de couples.

Le bras de levier de ces couples est d_x .

Leur valeur est alors

$$U_{oz} = \left[S_x \left(v' + \frac{u^o}{q} \right) \right] dx \quad (2.4.1.d)$$

$$U_{ox} = \left[\frac{T}{q} w^{o'''} + L_x \left(v'' + \frac{u^{o'}}{q} \right) \right] dx \quad (2.4.1.e)$$

Les U_{ox} sont positifs dans le sens des dh_x positifs et les U_{oz} dans le sens des dh_z positifs.

La figure 2.4.2. donne un schéma des U_{oz} positifs et la figure 2.4.3. des U_{ox} .

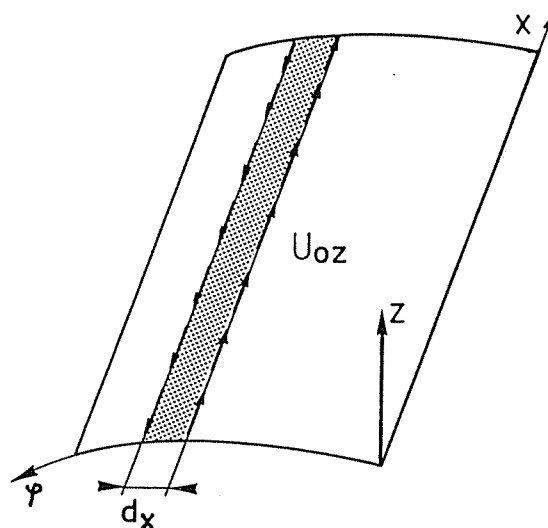


Figure 2.4.2.

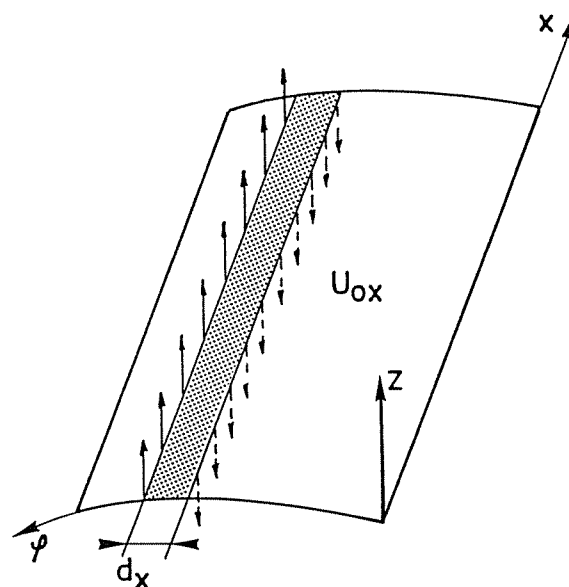


Figure 2.4.3.

Le problème de la coque raidie peut dès lors être ramené à un problème de coque non raidie : la coque non raidie étant chargée des forces extérieures et les X_0 , Y_0 , Z_0 , U_{oz} et U_{ox} adéquats.

Ces efforts agissent sur des bandes de largeur très faible et pour rendre le problème plus abordable, bien qu'il n'y ait aucune impossibilité théorique à opérer autrement, on supposera les pressions réparties, réduites à l'effort correspondant suite à une intégration dans le sens de la largeur.

Ainsi au lieu de parler des X_0 , Y_0 et Z_0 qui sont des efforts par unité de surface on parlera des $X_0 d_x$, $Y_0 d_x$ et $Z_0 d_x$ qui sont des lignes de force dans le sens des x et qui sont des efforts par unité de longueur.

Enfin les moments U_{ox} et U_{oz} constitués de forces distantes de dx seront remplacés par des lignes de moment de même intensité (figure 2.4.4.).

Comme on s'en doute, ce procédé est très correct lorsque les largeurs d_x sont petites ce qui est généralement le cas.

Dès lors, résoudre un problème de coque raidie revient à considérer une coque non raidie sur laquelle agissent la charge extérieure ainsi que des lignes de forces et de moments le long des nervures.

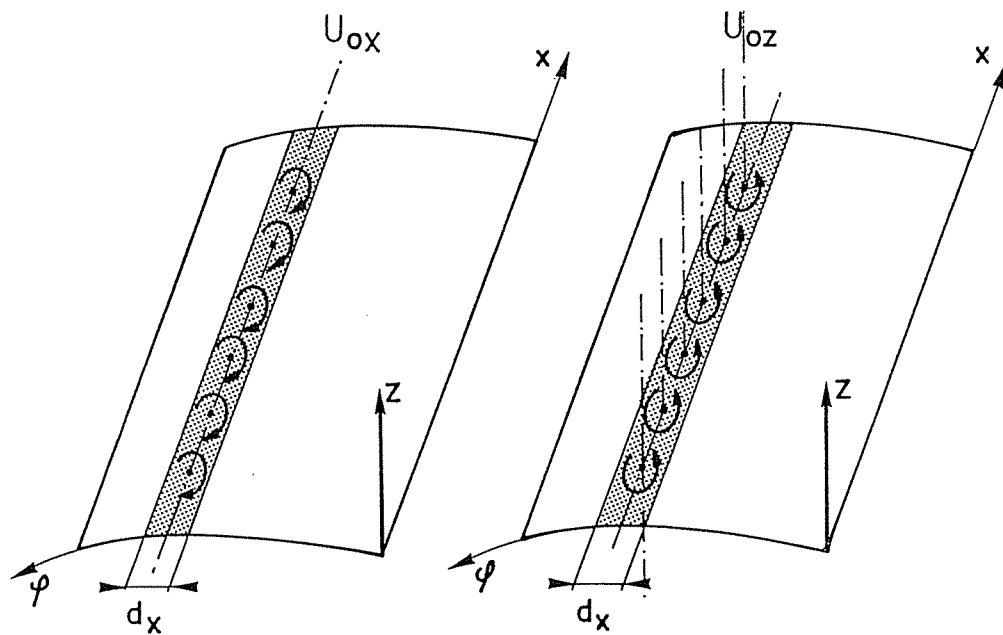


Figure 2.4.4

CHAPITRE V

RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES DE LA COQUE NON RAIDIE ET NON CHARGEE.

ETABLISSEMENT DES EXPRESSIONS ANALYTIQUES DES u, v, w ET DES EFFORTS $N_\varphi, N_x, M_\varphi, \dots$, EN FONCTION DES 4 CONSTANTES D'INTEGRATION

Il s'agit donc de résoudre le problème de la coque non raidie (les aiguilles et les raidisseurs étant uniformisés); coque qui est cylindrique et complète, c'est-à-dire dont l'ouverture est de 360° .

Dans la suite de l'exposé, nous utiliserons le terme "cylindre complet" pour faire référence aux coques à rayon constant dont l'angle d'ouverture est de 360° .

Ce n'est que par la suite que nous étudierons des coques dont l'angle d'ouverture est fini c'est-à-dire inférieur à 360° .

V.1. RESOLUTION DU SYSTEME

Si on suppose la coque non chargée, le système est donc :

$$\begin{aligned} (D+\Omega_x^r)u'''+\frac{1}{q^2}(D(\frac{1-\nu}{2})+S_x^r+S_\varphi^r)u''+\frac{1}{q}[D(\frac{1+\nu}{2})+S_x^r+S_\varphi^r]v''-H_x^r w'''+ \\ +\frac{D\nu}{q}w'=0 \end{aligned} \quad (2.5.1.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{q}[D(\frac{1+\nu}{2})+S_x^r+S_\varphi^r]u''+\frac{1}{q^2}(D+\Omega_\varphi^r)v''+[D(\frac{1-\nu}{2})+S_x^r+S_\varphi^r]v'' \\ -\frac{H_\varphi^r}{q^3}w'''+\frac{1}{q^2}(D+\Omega_\varphi^r)w''=0 \end{aligned} \quad (2.5.1.b)$$

$$\begin{aligned} -H_x^r u'''+(L_x^r+L_\varphi^r)\frac{u''}{q^2}+\frac{D\nu}{q}u''+\frac{1}{q^2}(D+\Omega_\varphi^r)v''-\frac{H_\varphi^r}{q^3}v'' \\ + (L_x^r+L_\varphi^r)\frac{v''}{q}+\frac{1}{q^2}(D+\Omega_\varphi^r)w''+\frac{1}{q^4}(K+R_\varphi^r)w'''' \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} (2K+T_{\varphi}^r + T_x^r) w^{\circ\circ\circ\circ} + (K+R_x^r) w^{\prime\prime\prime\prime} - \frac{2H_{\varphi}^r}{3q} w^{\circ\circ} = 0 \quad (2.5.1.c)$$

On peut également écrire ces équations différentielles sous la forme :

$$a_1 \cdot u + b_1 \cdot v + c_1 \cdot w = 0 \quad (2.5.2.a)$$

$$a_2 \cdot u + b_2 \cdot v + c_2 \cdot w = 0 \quad (2.5.2.b)$$

$$a_3 \cdot u + b_3 \cdot v + c_3 \cdot w = 0 \quad (2.5.2.c)$$

avec les opérateurs de dérivation $a_1, a_2, a_3, \dots, c_1, c_2, c_3$;
[E.3.J.3].

Pour que le système ait une solution différente de $u = v = w = 0$
il faut que le déterminant des coefficients des inconnues soit nul,
ce qui s'écrit :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.5.3.a \text{ à } i)$$

soit encore en développant l'expression du déterminant

$$a_1(b_2 \cdot c_3 - b_3 \cdot c_2) + a_2(b_3 \cdot c_1 - b_1 \cdot c_3) + a_3(b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1) = 0 \quad (2.5.4)$$

En remplaçant les a_i, b_i, c_i par leur expression, on a, après simplifications une expression (2.5.5) reprise dans l'annexe (voir notice §V.5).

Dans cette expression (2.5.5) la fonction f peut représenter aussi bien u, v que w .

Nous supposons qu'il s'agit de w et nous aurons donc l'équation :

$$\begin{aligned} A \cdot w_{80}^{\prime\prime\prime\prime\prime} + B \cdot w_{60}^{\prime\prime\prime\prime} + \frac{C}{q} w_{62}^{\prime\prime\prime\prime\circ\circ} + D \cdot w_{40}^{\prime\prime\prime\prime} + \frac{E}{2} w_{42}^{\prime\prime\prime\prime} \\ + \frac{F}{q} w_{44}^{\prime\prime\prime\prime\circ\circ\circ\circ} + \frac{G}{2} w_{22}^{\prime\prime\prime\circ\circ} + \frac{I}{q} w_{24}^{\prime\prime\prime\circ\circ\circ\circ} + \frac{J}{6} w_{26}^{\prime\prime\prime\circ\circ\circ\circ} \\ + \frac{K}{8} w_{08}^{\circ\circ\circ\circ\circ\circ} = 0 \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

avec A, B, C, \dots, K des constantes dépendant uniquement du matériau et de la géométrie de la coque.

Ces constantes sont donc d'ores et déjà connues.

Remarque : Il est possible de vérifier dès à présent cette expression.
En effet pour un rayon très grand on constate que seuls les

termes en $f_{80}, f_{62}, f_{44}, f_{26}, f_{08}$ subsistent.

En se référant au mémoire CERES [D.2], on constate que les termes y sont identiquement les mêmes.

Il est à noter que l'axe des x selon ce mémoire correspond à notre axe des φ et vice-versa. Nonobstant cela, la concordance des expressions est parfaite.

Si les conditions d'appuis des extrémités $x=0$ et $x=L$ de la coque sont celles d'un appui simple, c'est-à-dire $w=0$ et $M_x=0$, il s'indique de poser la solution [W.3] sous la forme :

$$w = w_m \cdot e^{mq\varphi} \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (2.5.7)$$

Posons $\lambda = \frac{n\pi}{L}$

On constate ainsi que

$$\frac{dw}{d\varphi} = w' = mq \cdot w$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = w'' = -\lambda^2 \cdot w$$

En remplaçant (2.5.7) dans (2.5.6) on obtient l'équation résolvante :

$$K^*m^8 - (J^* \cdot \lambda^2)m^6 + (F^* \cdot \lambda^4 - I^* \cdot \lambda^2)m^4 + (-C^* \lambda^6 + E^* \lambda^4 - G^* \lambda^2)m^2 + (A^* \lambda^8 - B^* \lambda^6 + D^* \lambda^4) = 0 \quad (2.5.8)$$

D'où :

$$w = \sum_{i=1}^8 w_i \cdot e^{m_i q \varphi} \cdot \sin \left(\frac{n\pi}{L} \cdot x \right) \quad (2.5.9)$$

Les w_i étant les 8 constantes d'intégration à fixer par les conditions aux limites en $\varphi=0$ et $\varphi=\varphi_0$.

Soit m_i les 8 solutions de l'équation polynomiale (2.5.9) qui sont du type complexe $(\pm \alpha_i \pm i \cdot \beta_i)$.

On a ainsi :

$$w = [w_1 e^{-\alpha_1 q \varphi} \cdot e^{i \beta_1 q \varphi} + w_2 e^{-\alpha_1 q \varphi} e^{-i \beta_1 q \varphi} + w_3 e^{\alpha_1 q \varphi} e^{i \beta_1 q \varphi} + \dots] \sin \lambda x$$

ou encore

$$w = [w_1 e^{-\alpha_1 q \varphi} (\cos \beta_1 q \varphi + i \sin \beta_1 q \varphi) + w_2 e^{-\alpha_1 q \varphi} (\cos \beta_1 q \varphi - i \sin \beta_1 q \varphi) + w_3 e^{\alpha_1 q \varphi} (\cos \beta_1 q \varphi + i \sin \beta_1 q \varphi) + \dots] \cdot \sin \lambda x$$

Comme w est réel, il faut que w_1, w_2, \dots, w_8 soient des nombres

complexes qui après multiplication annulent tout terme imaginaire.
Afin de ne travailler qu'avec des termes réels, il est plus simple de regrouper toutes les fonctions communes et d'écrire :

$$\begin{aligned}
 w = & e^{-\alpha_1 q \varphi} [A \sin \beta_1 q \varphi + B \cos \beta_1 q \varphi] \\
 & + e^{-\alpha_1 q (\varphi_0 - \varphi)} [C \sin \beta_1 q (\varphi_0 - \varphi) + D \cos \beta_1 q (\varphi_0 - \varphi)] \\
 & + e^{-\alpha_2 q \varphi} [E \sin \beta_2 q \varphi + \dots] + \dots
 \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

Lorsque $\varphi_0 = 2\pi$, suivant que les fonctions u , v , w sont symétriques ou non, on a

$$C = A, \quad D = B, \quad G = E, \quad H = F \quad \text{en cas de symétrie}$$

$$C = -A, \quad D = -B, \quad G = -E, \quad H = -F \quad \text{en cas d'antisymétrie.}$$

En effet $\varphi=0$ et $\varphi=2\pi$ sont les coordonnées curvilignes du même point, d'où pour des fonctions antisymétriques selon le côté que l'on aborde ce point, le signe change.

Pratiquement comme nous le verrons ultérieurement, nous ne traiterons que le cas du cylindre complet ($\varphi_0 = 2\pi$). Cela ne nous empêchera pas d'étudier le cas de coques réelles avec des ouvertures quelconques.

V.2. EXPRESSIONS DES u , v , w

L'examen des 3 équations différentielles nous montre que les fonctions u et v doivent être du même type que w .

A savoir :

$$u = [e^{-\alpha_1 q \varphi} \cdot (A_1 \cos \beta_1 q \varphi + B_1 \sin \beta_1 q \varphi) + \dots] \cos \lambda x \tag{2.5.11.a}$$

$$v = [e^{-\alpha_1 q \varphi} \cdot (A_2 \cos \beta_1 q \varphi + B_2 \sin \beta_1 q \varphi) + \dots] \sin \lambda x \tag{2.5.11.b}$$

$$w = [e^{-\alpha_1 q \varphi} \cdot (A \cos \beta_1 q \varphi + B \sin \beta_1 q \varphi) + \dots] \sin \lambda x \tag{2.5.11.c}$$

En se référant aux 3 équations différentielles écrites sous forme matricielle (2.5.2.a à c), on en déduit que les coefficients A_1 , B_1 , C_1 , D_1 relatifs à u , ainsi que les coefficients A_2 , B_2 , C_2 , D_2 relatifs à v sont des combinaisons linéaires des constantes d'intégration de w , à savoir A , B , C , D .

On obtient :

$$(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot u + (c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1) \cdot w = 0 \quad (2.5.12)$$

et

$$(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot v + (a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_1) \cdot w = 0 \quad (2.5.13)$$

En remplaçant les opérateurs de dérivation ainsi que u , v , w par leur expression (2.5.3 et 2.5.11) puis en identifiant les coefficients de mêmes fonctions $e^{-\alpha_1 q \varphi} \cdot \cos \beta_1 q \varphi$, $e^{-\alpha_1 q \varphi} \cdot \sin \beta_1 q \varphi$, dans chaque terme, on détermine les valeurs des coefficients A_1 , B_1 ,, A_2 , B_2 , en fonction des coefficients de w c'est-à-dire A , B , C , D .

Remarque : L'application des opérateurs de dérivation aux expressions de u , v , w exige le calcul des dérivées successives de u , v , w par rapport à φ jusqu'au cinquième ordre. Ces dérivées seront calculées par la formule de Newton relative aux dérivées multiples de produits de fonctions. Les expressions de ces dérivées (2.5.14a à d) sont détaillées dans l'annexe (voir notice §V.5).

V.3. DETERMINATION DES RELATIONS ENTRE LES COEFFICIENTS DE w ET CEUX DE u et v .

Les dérivées correspondantes (voir notice §V.5) des fonctions u et v ont des expressions identiques à condition toutefois de remplacer les coefficient A et B respectivement par A_1 et B_1 , A_2 et B_2 .

En remplaçant les expressions ci-dessus dans l'équation (2.5.12), on obtient un système de deux équations à deux inconnues A_1 et B_1 en égalisant dans chaque membre les coefficients des fonctions $e^{-\alpha_1 q \varphi} \cos \beta_1 q \varphi$ et $e^{-\alpha_1 q \varphi} \sin \beta_1 q \varphi$.

L'égalité des termes en $\cos \beta_1 q \varphi$ (2.5.15) ainsi que ceux en $\sin \beta_1 q \varphi$ (2.5.16) est développée dans l'annexe (voir notice §V.5).

Le système, après calcul des coefficients, peut s'écrire :

$$m_1 A_1 + n_1 B_1 = p A + q B$$

$$-n_1 A_1 + m_1 B_1 = -q A + p B$$

Et on obtient une solution du type

$$A_1 = \frac{1}{m_1^2 + n_1^2} [(pm_1 + qn_1)A + (qm_1 - pn_1) B]$$

$$B_1 = \frac{1}{m_1^2 + n_1^2} [(pn_1 - qm_1)A + (qn_1 + pm_1)B],$$

ou

$$A_1 = aA + bB \quad \text{et} \quad B_1 = -bA + aB$$

De la même manière en remplaçant dans l'équation (2.5.13) les dérivées de v et w par leurs expressions, on obtient un système de deux équations à deux inconnues A_2 et B_2 .

L'expression due à l'égalité des termes en $\cos \beta_1 q \varphi$ est reprise à l'annexe 1.d (2.5.17) (voir notice §V.5).

L'égalité des termes en $\sin \beta_1 q \varphi$ est superflue car nous constatons que d'une manière générale quelle que soit la variable $u, v, w, N_\varphi, \dots, R_x$ son expression est toujours de la forme :

$$e^{-\alpha_1 q \varphi} \cdot \left[\overbrace{a.A + b.B}^{\text{cos } \beta_1 q \varphi} + \overbrace{(-b.a + a.B)}^{\text{sin } \beta_1 q \varphi} \right]$$

A, B, \dots les constantes à fixer par les conditions limites

a, b, \dots des expressions dépendant uniquement de la géométrie de la structure

Par la suite nous utiliserons régulièrement cette propriété et nous ne développerons plus que les termes en \cos , ceux en \sin s'en déduisant directement. Il s'agira en quelque sorte d'une correspondance entre termes en SINUS et en COSINUS.

Donc, l'expression (2.5.17) nous donne la première équation en A_2, B_2 soit :

$$m_1 \cdot A_2 + n_1 \cdot B_2 = m \cdot A + n \cdot B$$

La propriété de correspondance nous permet d'écrire la seconde équation

$$-n_1 \cdot A_2 + m_1 \cdot B_2 = -n \cdot A + m \cdot B$$

En éliminant B_2 , puis A_2 entre ces deux équations, on obtient :

$$(m_1^2 + n_1^2)A_2 = (mm_1 + nn_1)A + (nm_1 - mn_1)B$$

$$(m_1^2 + n_1^2)B_2 = (mn_1 - nm_1)A + (nn_1 + mm_1)B$$

soit finalement

$$A_2 = a'A + b'B$$

$$B_2 = -b'A + a'B$$

en donnant aux coefficients a' et b' les valeurs adéquates.

V.4. CALCUL DES ELEMENTS DE REDUCTION

Les éléments de réduction peuvent maintenant être calculés en fonction des expressions connues de u , v et w ainsi que de leurs dérivées.

On obtient ainsi les expressions de w^0/q , N_φ , N_x , M_φ , M_x , $N_{\varphi x}$, $N_x \varphi$, $M_{\varphi x}$, $M_x \varphi$, Q_φ , Q_x ainsi que les éléments R_φ , R_x selon le sens de Kirchhoff [S.1] .

$$R_\varphi = Q_\varphi + M'_{\varphi x} \quad (2.5.18)$$

et

$$R_x = Q_x + M^0_{x \varphi} \quad (2.5.19)$$

On obtient également les expressions des lignes de force et de moment correspondant à l'action des traverses sur la coque.

A savoir :

$$X_0 d_x, \quad Y_0 d_x, \quad Z_0 d_x, \quad U_{0x}, \quad U_{0z}$$

Le tableau I (civote §V.5) reprend de manière complète les expressions des déplacements et des efforts correspondant à un cylindre complet raidi non chargé, ce qui correspond à la **solution homogène de l'équation différentielle** (2.5.1).

Les coefficients C_1 , C_2 , C_3 et C_4 sont donc des constantes non encore déterminées.

V.5. REMARQUES

- a. Le tableau a été établi en supposant que les huit racines de l'équation (2.4.9) étaient des racines complexes de la forme $(\pm \alpha_1 \pm \beta_1)$.

Il est cependant possible que l'équation (2.5.8) admette des racines réelles du type $\pm \alpha_1 (\beta_1=0)$

Le tableau I reste néanmoins d'application moyennant la remarque suivante :

une racine réelle peut être considérée comme une racine complexe du type $+\alpha_1 + i.0$, et les fonctions relatives à ces racines seront

donc :

$$e^{-\alpha_1 q \varphi} \cos \theta \quad \text{et} \quad e^{-\alpha_1 q \varphi} \sin \theta$$

soit finalement

$$e^{-\alpha_1 q \varphi} \quad \text{ou en fin de compte} \quad e^{-\alpha_1 q \varphi} \quad \text{et} \quad e^{-\alpha_1 q (\varphi_0 - \varphi)}$$

Les coefficients de $e^{-\alpha_i q \varphi}$ seront ceux de la colonne $e^{-\alpha_1 q \varphi} \cos \beta_1 q \varphi$ à condition d'y faire $\alpha_i = \alpha_1$ et $\beta_i = 0$ et il en sera de même pour les coefficients de $e^{-\alpha_i q(\varphi_0 - \varphi)}$.

- b. Physiquement, il paraît impossible que l'équation (2.5.8) admette des racines purement imaginaires. De telle racines nécessiteraient en effet de considérer des fonctions du type : $\cos \beta_1 q \varphi$ et $\sin \beta_1 q \varphi$ on devrait écrire :

$$w(\varphi) = \dots + M \cos \beta_1 q \varphi + N \sin \beta_1 q \varphi$$

et ces fonctions ne connaîtraient aucun amortissement avec l'éloignement par rapport à la section chargée.

NOTICE

Des contingences matérielles ne nous permettant pas d'accroître le volume de cet ouvrage, les annexes et les tableaux auxquels il est fait référence dans ce texte n'y ont pas été inclus. Néanmoins, ils sont disponibles dans le manuscrit de base présenté à la Faculté des Sciences Appliquées lors de la thèse de doctorat de l'auteur.

CHAPITRE VI

CALCUL DE L'EFFET DES TRAVERSES SUR UN CYLINDRE COMPLET, SCHEMA DE LA METHODE DE RESOLUTION.

Résoudre le problème de la coque raidie revient comme expliqué précédemment à considérer une coque non raidie sur laquelle agit la charge extérieure ainsi que des lignes de forces et de moments au droit des traverses.

Nous venons d'étudier au chapitre V le cylindre complet non raidi, non chargé. Il faut à présent déterminer l'amplitude des lignes de forces et de moments qui agissent comme la charge extérieure sur une coque non raidie.

On conçoit que les lignes de forces exercées par les nervures sur la coque varieront, selon l'axe ox , comme des fonctions sin ou cos.

Ainsi :

$$X_{ox}^d = \left[\Omega_x^t u'' - H_x^t w'' + \frac{S_x^t}{q} (v^o + \frac{u^o}{q}) \right] \quad (2.6.1.a)$$

variera comme $\cos \frac{n\pi}{L} x$

$$Y_{ox}^d = \left[S_x^t (v'' + \frac{u^o}{q}) \right] \quad (2.6.1.b)$$

variera comme $\sin \frac{n\pi}{L} x$

$$Z_{ox}^d = \left[-H_x^t u'' + R_x^t w'' + T_x^t \frac{w^o}{2} + \frac{L_x^t}{q} (v^o + \frac{u^o}{q}) \right] \quad (2.6.1.c)$$

variera comme $\sin \frac{n\pi}{L} \cdot x$

$$U_{ox} = \left[T_x^t \frac{w^o}{q} + L_x^t (v'' + \frac{u^o}{q}) \right] \quad (2.6.1.d)$$

variera comme $\sin \frac{n\pi}{L} \cdot x$

$$U_{oz} = \left[S_x^t (v'' + \frac{u^o}{q}) \right] \quad (2.6.1.e)$$

variera comme $\cos \frac{n\pi}{L} \cdot x$

VI.1. DETERMINATION DE L'AMPLITUDE DES LIGNES DE FORCES

Dans le cylindre complet considéré, supprimons le raidissage dû aux traverses et, sur la coque non raidie ainsi obtenue, faisons agir les lignes d'efforts unitaires selon l'axe de la nervure (voir figure 2.6.1.). Le choix du facteur 10000 qui sera associé aux efforts unitaires repose uniquement sur des considérations numériques.

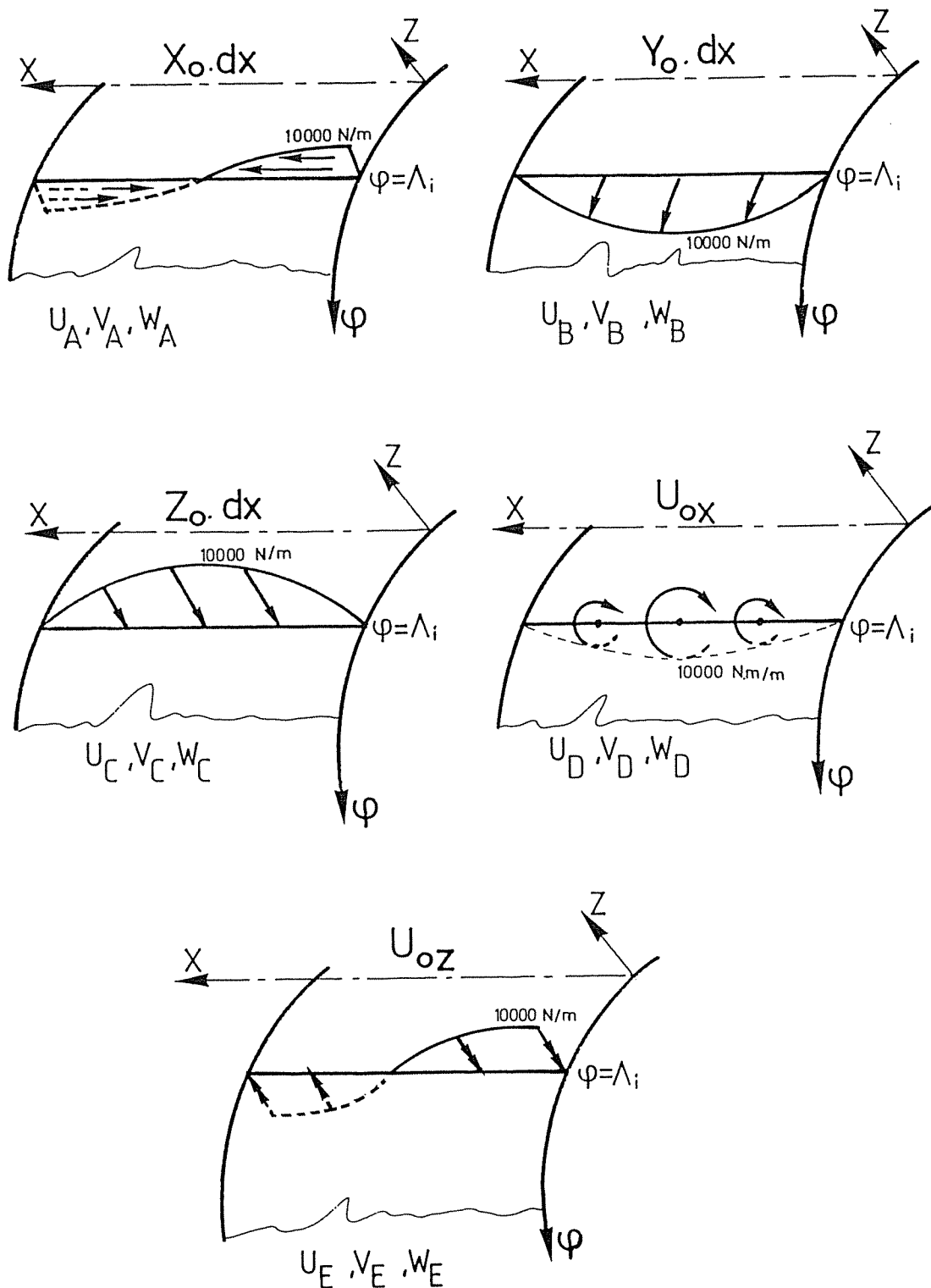


Figure 2.6.1.

Considérons le cylindre complet simplement appuyé en $X=0$ et $X=L$, mais raidi par m nervures parallèles à OX , d'abscisses respectives $\Lambda=K_i$ avec $i=1,m$.

Les amplitudes prises par les lignes d'efforts au droit des différentes nervures sont à déterminer.
Nous désignerons par :

$\Psi(K_1), \dots, \Psi(K_m)$: les amplitudes de $X_o d_x$ au droit des nervures d'abscisse K_1, \dots, K_m

$\Phi(K_1), \dots, \Phi(K_m)$: les amplitudes de $Y_o d_x$

$F(K_1), \dots, F(K_m)$: les amplitudes de $Z_o d_x$

$\Gamma(K_1), \dots, \Gamma(K_m)$: les amplitudes de U_{ox}

$\Upsilon(K_1), \dots, \Upsilon(K_m)$: les amplitudes de U_{oz}

Désignons par $(u_A, v_A, w_A), (u_B, v_B, w_B), (u_C, v_C, w_C), (u_D, v_D, w_D)$ et (u_E, v_E, w_E) les déplacements du cylindre complet non nervuré sous l'action respective des forces linéaires parallèles à $OX, O\varphi, OZ$ et des moments linéaires de la figure 2.6.1.

Sur la coque non raidie obtenue en supprimant les nervures, nous appliquerons des lignes d'efforts identiques à celles de la figure 2.6.1., suivant une droite d'abscisse $\Lambda=K$. Etant donné la "symétrie" du cylindre complet, et la symétrie ou l'antisymétrie de la mise en charge par rapport à cette droite, les déplacements u_A, v_A, \dots, w_E jouiront, eux aussi, de propriétés de symétrie ou d'antisymétrie et, en valeur absolue, seront fonctions de la variable $|\varphi-\Lambda|$.

Remplaçons ensuite les u_A, v_A, \dots, w_E dans les expressions de $X_o d_x, Y_o d_x, Z_o d_x, U_{ox}$ et U_{oz} .

On obtient :

$$(X_o d_x)_{A'} (Y_o d_x)_{A'} (Z_o d_x)_{A'} (U_{ox})_{A'} (U_{oz})_{A'}$$

provenant du remplacement des u_A, v_A, w_A

$$(X_o d_x)_{B'} (Y_o d_x)_{B'} (Z_o d_x)_{B'} (U_{ox})_{B'} (U_{oz})_{B'}$$

provenant du remplacement des u_B, v_B, w_B

$$(X_o d_x)_{C'} (Y_o d_x)_{C'} (Z_o d_x)_{C'} (U_{ox})_{C'} (U_{oz})_{C'}$$

provenant du remplacement des u_C, v_C, w_C

$$(X_o d_x)_{D'} (Y_o d_x)_{D'} (Z_o d_x)_{D'} (U_{ox})_{D'} (U_{oz})_{D'}$$

provenant du remplacement des u_D, v_D, w_D

$$(X_o d_x)_{E'} (Y_o d_x)_{E'} (Z_o d_x)_{E'} (U_{ox})_{E'} (U_{oz})_{E'}$$

provenant du remplacement des u_E, v_E, w_E

Enfin, nous désignerons par $(X_{0x}d)_0$, $(Y_{0x}d)_0$, $(Z_{0x}d)_0$, $(U_{0x})_0$, et $(U_{0z})_0$ les fonctions obtenues en introduisant dans les formules de $X_{0x}d$, $Y_{0x}d$, $Z_{0x}d$, U_{0x} , U_{0z} , les expressions analytiques des déplacements u_0 , v_0 , w_0 pris par le cylindre non raidi complet sous l'action de la pression extérieure.

Nous remplaçons les déplacements u_A , v_A , ... w_E dans les expressions des lignes d'efforts.

On obtient ainsi $(X_{0x}d)_A$, $(Y_{0x}d)_A$, $(U_{0z})_0$, en fonction de la variable $|\varphi - \Lambda|$, ces fonctions jouissant aussi de propriétés de symétrie ou d'antisymétrie, tout comme les déplacements dont elles dérivent.

La signification de ces fonctions est évidente : par exemple $(Z_{0x}d)_A$ représente la loi de variation selon φ , des efforts parallèles à OZ exercés par les nervures, sur une coque raidie dont la déformation serait celle d'une coque non raidie soumise à une sollicitation parallèle à OX, agissant en l'abscisse K selon la loi

$$10000 \sin \frac{n\pi}{L} x \quad \text{N/m}$$

Les efforts $\Psi(\Lambda_i)$, $\Phi(\Lambda_i)$, $F(\Lambda_i)$, $\Gamma(\Lambda_i)$, $\gamma(\Lambda_i)$ s'obtiendront en appliquant le principe de superposition. Ainsi, $\Psi(\Lambda_i)$, ligne d'efforts parallèles à OX, exercés sur la plaque raidie par la nervure "i", sera exprimée sous forme d'une somme de $(X_{0x}d)$ adéquats :

a. $(X_{0x}d)_{0,\varphi=K_i}$ représentant l'action de la pression extérieure sur la coque non raidie

b. $\frac{\Psi(\Lambda_j)}{10000} (X_{0x}d)_A$, $\varphi = K_i$
 $\Lambda = K_j$

représentant l'action de la nervure "j" parallèlement à OX ; le facteur $(X_{0x}d)_A$, $\varphi=K_i$, $\Lambda=K_j$ est la va-

leur de $(X_{0x}d)$ en $\varphi = K_i$ sous l'action d'une force

de $10000 \cos \frac{n\pi}{L} x$ N/m agissant parallèlement à

OX, tandis que le facteur $\Psi/10000$ exprime que la nervure exerce dans cette direction un effort

$$\Psi \cos \frac{n\pi}{L} x \text{ N/m};$$

On doit considérer m termes analogues (j variant de 1 à m)

c. $\frac{\Phi(\Lambda_j)}{10000} (X_{0x}d)_B$, $\varphi = K_i$
 $\Lambda = K_j$

représentant l'action de la nervure "j" parallèlement à O φ

$$d. \frac{F(\Lambda_j)}{10000} (X_{o d_x})_{C'} \quad \begin{array}{l} \varphi = K_i \\ \Lambda = K_j \end{array}$$

représentant l'action de la nervure "j" parallèlement à Oz.

$$e. \frac{\Gamma(\Lambda_j)}{10000} (X_{o d_x})_{D'} \quad \begin{array}{l} \varphi = K_i \\ \Lambda = K_j \end{array}$$

représentant l'action de la ligne des moments et d'axe OX exercés par la nervure "j"

$$f. \frac{\gamma(\Lambda_j)}{10000} (X_{o d_x})_{E'} \quad \begin{array}{l} \varphi = K_i \\ \Lambda = K_j \end{array}$$

représentant l'action de la ligne des moments d'axe OZ exercés par la nervure "j".

On obtient ainsi l'équation :

$$\begin{aligned} \Psi(K_i) = & (X_{o d_x})_{o, \varphi=K_i} + \sum_{j=1}^m \frac{\Psi(K_j)}{10000} [(X_{o d_x})_{A, \varphi=K_i, \Lambda=K_j}] \\ & + \sum_{j=1}^m \frac{\Phi(K_j)}{10000} [(X_{o d_x})_{B, \varphi=K_i, \Lambda=K_j}] + \sum_{j=1}^m \frac{F(K_j)}{10000} [(X_{o d_x})_{C, \varphi=K_i, \Lambda=K_j}] \\ & + \sum_{j=1}^m \frac{\Gamma(K_j)}{10000} [(X_{o d_x})_{D, \varphi=K_i, \Lambda=K_j}] + \sum_{j=1}^m \frac{\gamma(K_j)}{10000} [(X_{o d_x})_{E, \varphi=K_i, \Lambda=K_j}] \end{aligned}$$

(2.6.2.a)

Cette équation peut être écrite pour les m valeurs de K_i .

On peut enfin écrire des équations analogues pour des autres lignes d'efforts :

$$\begin{aligned} \Phi(K_i) = & (Y_{o d_x})_{o, \varphi=K_i} + \sum_{j=1}^m \frac{\Psi(K_j)}{10000} [(Y_{o d_x})_{A, \varphi=K_i, \Lambda=K_j}] \\ & + \sum_{j=1}^m \frac{\Phi(K_j)}{10000} [(Y_{o d_x})_{B, \varphi=K_i, \Lambda=K_j}] + \sum_{j=1}^m \frac{F(K_j)}{10000} [(Y_{o d_x})_{C, \varphi=K_i, \Lambda=K_j}] \\ & + \sum_{j=1}^m \frac{\Gamma(K_j)}{10000} [(Y_{o d_x})_{D, \varphi=K_i, \Lambda=K_j}] + \sum_{j=1}^m \frac{\gamma(K_j)}{10000} [(Y_{o d_x})_{E, \varphi=K_i, \Lambda=K_j}] \end{aligned}$$

(2.6.2.b)

$$F(K_i) = (Z_{o d_x})_{o, \varphi=K_i} + \sum_{j=1}^m \frac{\Psi(K_j)}{10000} [(Z_{o d_x})_{A, \varphi=K_i, \Lambda=K_j}]$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^m \frac{\Phi(K_j)}{10000} [(Z_{ox}^d)_B, \varphi = K_i, \Lambda = K_j^i] + \sum_{j=1}^m \frac{F(K_j)}{10000} [(Z_{ox}^d)_C, \varphi = K_i, \Lambda = K_j^i] \\
& + \sum_{j=1}^m \frac{\Gamma(K_j)}{10000} [(Z_{ox}^d)_D, \varphi = K_i, \Lambda = K_j^i] + \sum_{j=1}^m \frac{\gamma(K_j)}{10000} [(Z_{ox}^d)_E, \varphi = K_i, \Lambda = K_j^i]
\end{aligned}
\tag{2.6.2.c}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(K_i) = & (U_{ox}^d)_o, \varphi = K_i + \sum_{j=1}^m \frac{\Psi(K_j)}{10000} [(U_{ox}^d)_A, \varphi = K_i, \Lambda = K_j^i] \\
& + \sum_{j=1}^m \frac{\Phi(K_j)}{10000} [(U_{ox}^d)_B, \varphi = K_i, \Lambda = K_j^i] + \sum_{j=1}^m \frac{F(K_j)}{10000} [(U_{ox}^d)_C, \varphi = K_i, \Lambda = K_j^i] \\
& + \sum_{j=1}^m \frac{\Gamma(K_j)}{10000} [(U_{ox}^d)_D, \varphi = K_i, \Lambda = K_j^i] + \sum_{j=1}^m \frac{\gamma(K_j)}{10000} [(U_{ox}^d)_E, \varphi = K_i, \Lambda = K_j^i]
\end{aligned}
\tag{2.6.2.d}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(K_i) = & (U_{oz}^d)_o, \varphi = K_i + \sum_{j=1}^m \frac{\Psi(K_j)}{10000} [(U_{oz}^d)_A, \varphi = K_i, \Lambda = K_j^i] \\
& + \sum_{j=1}^m \frac{\Phi(K_j)}{10000} [(U_{oz}^d)_B, \varphi = K_i, \Lambda = K_j^i] + \sum_{j=1}^m \frac{F(K_j)}{10000} [(U_{oz}^d)_C, \varphi = K_i, \Lambda = K_j^i] \\
& + \sum_{j=1}^m \frac{\Gamma(K_j)}{10000} [(U_{oz}^d)_D, \varphi = K_i, \Lambda = K_j^i] + \sum_{j=1}^m \frac{\gamma(K_j)}{10000} [(U_{oz}^d)_E, \varphi = K_i, \Lambda = K_j^i]
\end{aligned}
\tag{2.6.2.e}$$

En écrivant les équations (2.6.2.a) à (2.6.2.e) pour i variant de 1 à m , on obtient un système de 5 m équations à 5 m inconnues, permettant la résolution du cylindre complet raidi dans une seule direction par plusieurs nervures du type traverses.

VI.2. REMARQUES

On peut cependant simplifier le système ci-dessus en remarquant que :

- a. les effets de U_{ox} sont négligeables; on a pu vérifier sur des exemples [D.1] que l'effet des moments linéaires est moins important que celui des efforts parallèles à OX ou à OZ . Il en est de même des moments U_{oz} .

- b. les effets de Y_{0x} , bien que plus importants que ceux de U et U_{0z} peuvent également être négligés, car ils sont beaucoup plus faibles que les effets des forces parallèles à OX ou à OZ [D.1].

On pourra donc admettre que

$$\Phi(K_i) = 0 \quad (2.6.3.a)$$

$$\Gamma(K_i) = 0 \quad (2.6.3.b)$$

$$\dot{\gamma}(K_i) = 0 \quad (2.6.3.c)$$

et on ne devra plus résoudre alors qu'un système de $2m$ équations à $2m$ inconnues.

- c. Comme on le verra on peut aisément déterminer la solution de la coque réelle, à partir du cylindre complet étudié précédemment, en superposant les solutions de cylindre complet judicieusement chargé.

Le premier stade consiste à étudier le cylindre complet chargé de la pression hydrostatique extérieure (figure 2.6.2).

Les 2^e, ... 9^e stade sont définis par la figure 2.6.2. Ils consistent à faire agir sur le même cylindre complet et raidi comme la coque réelle, des lignes d'efforts en $\varphi=0$ et $\varphi = \varphi_0$ ($\varphi_0 q =$ longueur de la coque selon φ).

Il faut remarquer que ces 9 stades (1+2x4) exigent chacun la résolution d'un système d'équations identique au système (2.6.2. a à e); cependant, seuls les termes indépendants changent d'un système à l'autre. On conçoit donc que la résolution de ces neuf systèmes ne soit pas beaucoup plus compliquée que la résolution d'un seul, puisque l'élimination des inconnues ne doit se faire qu'une fois.

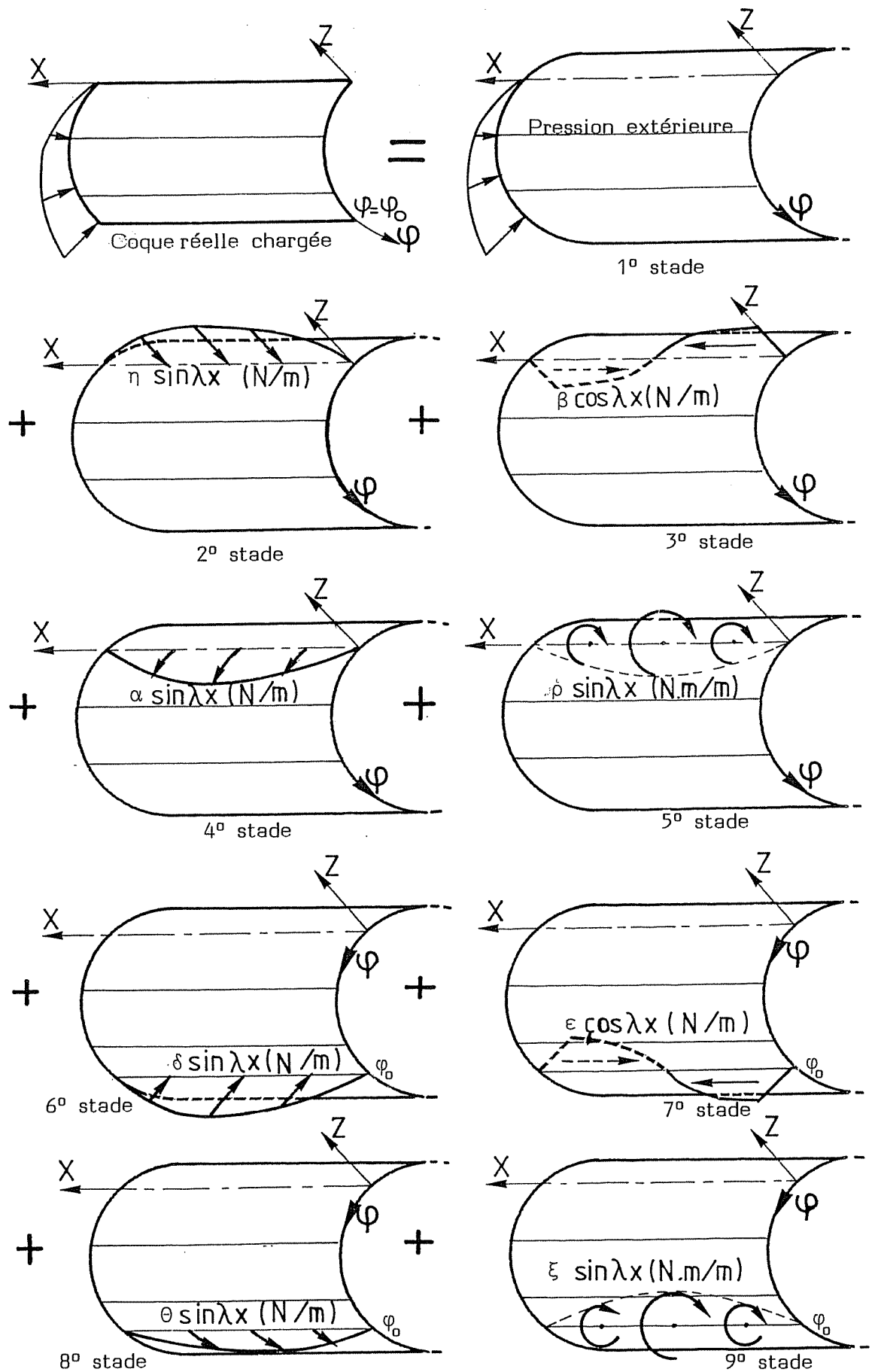


Figure 2.6.2.

CHAPITRE VII

SCHEMA DE LA RESOLUTION COMPLETE DU CALCUL D'UNE STRUCTURE CONSTITUEE DE COQUES RAIDIES.

Avant étudié le principe de la résolution des coques raidies (avec étalement des effets des raidisseurs et des aiguilles) bi-appuyées sur les bords $x=0$ et $x=L$, et non chargées sur leur surface (ce qui n'exclut pas des charges linéaires) nous sommes aptes à aborder le stade suivant. A savoir, le schéma de résolution du problème complet du calcul d'une structure constituée de plusieurs coques réelles. Ces coques étant raidies par deux types de nervures dont leurs effets sont répartis et par un troisième type qui est constitué des traverses. L'ouverture des coques est cette fois bien définie.

Avant de commencer, il convient de remarquer que, conformément aux remarques (2.6.3.a et c), nous ferons l'hypothèse que les effets des Y_{ox} , des U_{ox} et des U_{oz} sont négligeables, et qu'on peut donc écrire :

$$\Phi(\varphi) = 0$$

$$\Gamma(\varphi) = 0$$

$$\gamma(\varphi) = 0$$

Nous signalons d'autre part que la charge extérieure est constituée par la pression hydrostatique Z , à l'exclusion de toute autre charge. D'autres types de charges seront ultérieurement abordés.

La résolution de l'assemblage de coques comportera les opérations suivantes :

VII.1. AU NIVEAU DE CHAQUE COQUE

1. Etablissement de la solution générale de la coque non chargée de forces de pressions, constituée du bordage, des raidisseurs et des aiguilles, en supposant que l'effet de ces derniers est réparti.
2. Etude du cylindre complet appuyé simplement sur les bords $x = 0$ et $x=L$, et chargé en $\varphi = 0$ d'une force linéaire de $- 10000 \sin \frac{n\pi}{L} x$ N/m (figure 2.7.1)

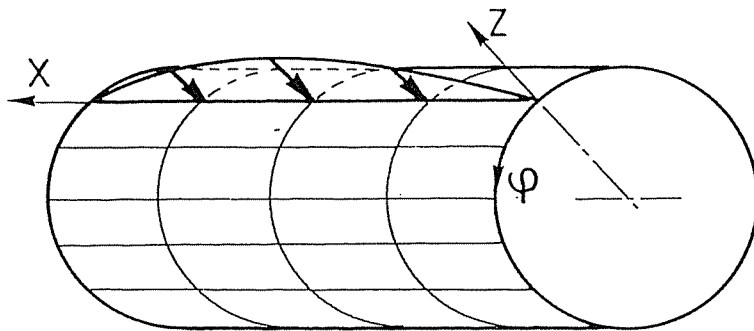


Figure 2.7.1

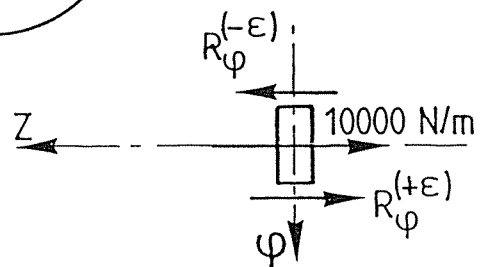


Figure 2.7.2

Cette coque se déforme symétriquement par rapport au plan zox et on n'étudie que le demi-cylindre situé du côté des φ positifs.

A l'aide du tableau I (notice §V.5), on détermine les quatre constantes d'intégration relatives à ce demi-cylindre en exprimant les conditions aux limites qui sont :

$$\begin{aligned} v &= 0 && \text{pour } \varphi = 0 \\ N_{\varphi x} &= 0 && \text{pour } \varphi = 0 \\ w^o &= 0 && \text{pour } \varphi = 0 \\ R_{\varphi} &= -5000 \text{ N/m} && \text{pour } \varphi = +\epsilon \end{aligned}$$

Ces conditions résultent de la symétrie de la mise en charge. La dernière s'obtient en exprimant l'équilibre de la petite tranche d'épaisseur 2ϵ en $\varphi=0$ (figure 2.7.2).

Par suite de la symétrie, on a :

$$\left| R_{\varphi}^{(+\epsilon)} \right| = \left| R_{\varphi}^{(-\epsilon)} \right| \quad \text{ou} \quad R_{\varphi}^{(+\epsilon)} = -R_{\varphi}^{(-\epsilon)}$$

L'équilibre exige :

$$-10000 + R_{\varphi}^{(-\epsilon)} = R_{\varphi}^{(+\epsilon)}$$

ou

$$R_{\varphi}^{(+\epsilon)} = -5000 \text{ N/m}$$

on détermine ainsi les déplacements u_C, v_C, w_C .

- Détermination des déplacements u, v, w créés dans la coque étudiée ci-dessus, par la charge extérieure. Cette détermination se fait par intégration des u_C, v_C, w_C trouvés au 2. selon la loi de pression hydrostatique en fonction de φ .

On détermine ainsi les déplacements u_0, v_0, w_0 .

- Détermination des $(X_{0d_x})_0$ et $(Z_{0d_x})_0$ dus à la charge extérieure, en remplaçant u, v et w par leurs valeurs u_0, v_0, w_0 , dans les expressions

$$X_{0d_x} = \left[\Omega_x u'' - H_x w'' + \frac{S_x}{q} (v^{\circ\circ} + \frac{u^{\circ\circ}}{q}) \right]$$

$$Z_{0d_x} = \left[-H_x u'' + R_x w'' + T_x \frac{w^{\circ\circ}}{2} + \frac{L_x}{q} (v^{\circ\circ} + \frac{u^{\circ\circ}}{q}) \right]$$

- Détermination des $(X_{0d_x})_C$ et $(Z_{0d_x})_C$ dus à la charge parallèle à OZ et égale à $-10000 \sin(n\pi/L)x$ N/m, en remplaçant u, v, w par u_C, v_C, w_C calculés au 2. ci-dessus dans les relations ci-dessus.

On les obtient en fonction de $|\varphi| q$ ou plutôt de $|\varphi - \Lambda| q$, si Λq est l'abscisse de la ligne d'efforts.

- Etude de la coque considérée en 2. sous l'action d'une force linéaire parallèle à OX, et égale à $10000 \cos(n\pi/L)x$ N/m (figure 2.7.3).

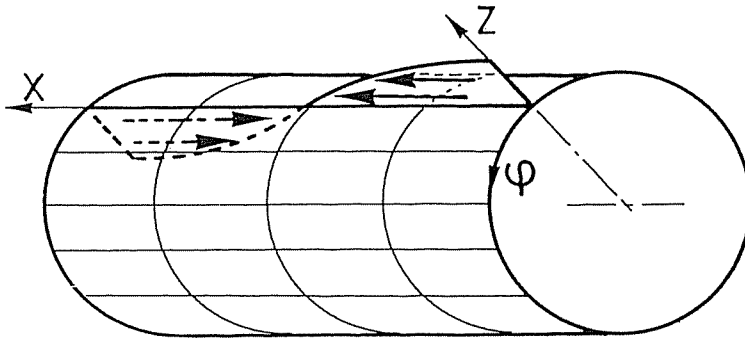


Figure 2.7.3

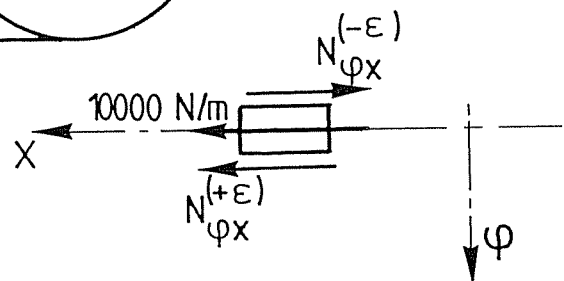


Figure 2.7.4

L'étude est exactement la même que celle faite en 2. avec cette fois les quatre conditions aux limites :

$$\begin{array}{ll}
 v = 0 & \text{pour } \varphi = 0 \\
 w^o = 0 & \text{pour } \varphi = 0 \\
 R = 0 & \text{pour } \varphi = 0 \\
 N_{\varphi x}^{\varphi} = -5000 \text{ N/m} & \text{pour } \varphi = +\epsilon
 \end{array}$$

Les quatre conditions résultent de la symétrie de la mise en charge; la dernière résulte en plus de la condition d'équilibre de la bande de largeur 2ϵ , à l'abscisse $\varphi = 0$ (figure 2.7.4), qui donne

$$10000 + N_{\varphi x}^{(+\epsilon)} = N_{\varphi x}^{(-\epsilon)}$$

ou, puisque $\left| N_{\varphi x}^{(+\epsilon)} \right| = \left| N_{\varphi x}^{(-\epsilon)} \right|$ à cause de la symétrie :

$$N_{\varphi x}^{(+\epsilon)} = -5000 \text{ N/m.}$$

On détermine ainsi les déplacements u_A , v_A et w_A .

7. Détermination des $(Z_{o x}^d)_A$ et $(X_{o x}^d)_A$ dus à la charge unitaire ci-dessus, en introduisant u_A , v_A , w_A dans les expressions de $Z_{o x}^d$ et $X_{o x}^d$. On les exprime en fonction de $|\varphi - \Lambda| q$, où Λq est l'abscisse de la ligne d'efforts.

8. Etude de la coque considérée en 2. sous l'action d'une force linéaire parallèle à $O\varphi$ égale à $10000 \sin(n\pi/L)x$ N/m (figure 2.7.5) agissant en $\varphi = 0$.

Les conditions aux limites sont ici :

$$\begin{array}{ll}
 w = 0 & \text{pour } \varphi = 0 \\
 u = 0 & \text{pour } \varphi = 0 \\
 M_{\varphi} = 0 & \text{pour } \varphi = 0 \\
 N_{\varphi}^{\varphi} = -5000 \text{ N/m} & \text{pour } \varphi = +\epsilon
 \end{array}$$

Les quatre conditions résultent de l'antisymétrie de la mise en charge; la dernière résulte en outre de la condition d'équilibre de la bande de longueur 2ϵ , à l'abscisse $\varphi = 0$ (figure 2.7.5) qui donne :

$$10000 + N_{\varphi}^{(+\epsilon)} = N_{\varphi}^{(-\epsilon)}$$

ou puisque $N_{\varphi}^{(+\epsilon)} = -N_{\varphi}^{(-\epsilon)}$ à cause de l'antisymétrie, on a

$$N_{\varphi}^{(+\epsilon)} = -5000 \text{ N/m.}$$

On détermine ainsi les déplacements u_B , v_B , w_B .

9. Détermination des $(Z_{o x}^d)_B$ et $(X_{o x}^d)_B$ dus à la charge unitaire ci-dessus, en introduisant u_B , v_B et w_B dans les expressions de $(Z_{o x}^d)$ et $(X_{o x}^d)$.
10. Etude de la coque considérée en 2. sous l'action d'un moment linéaire d'axe parallèle à OX , égal à $10000 \sin(n\pi/L)x$ N.m/m, agissant en $\varphi = 0$ (figure 2.7.7).

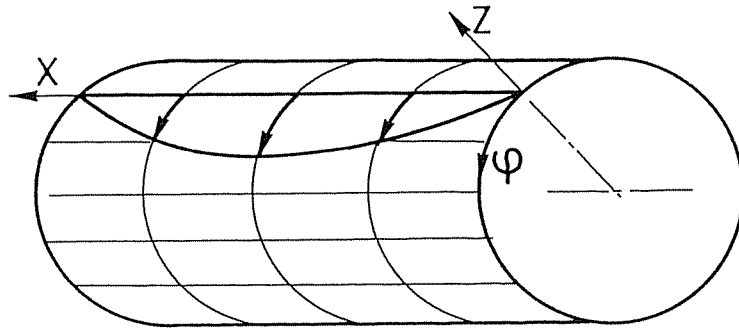


Figure 2.7.5

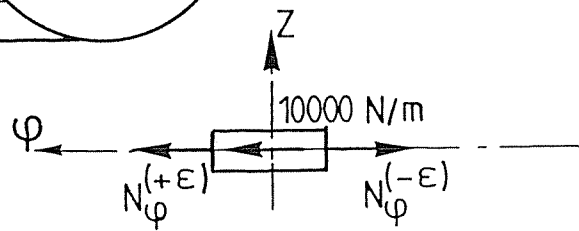


Figure 2.7.6

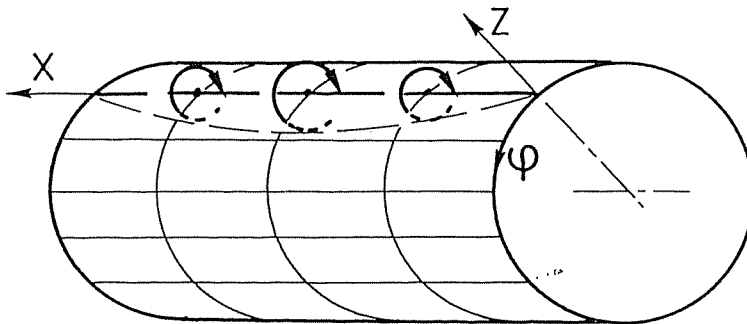


Figure 2.7.7

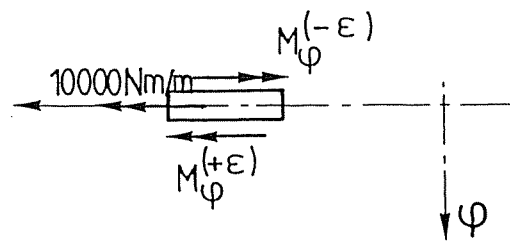


Figure 2.7.8

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned}
 w &= 0 && \text{pour } \varphi = 0 \\
 u &= 0 && \text{pour } \varphi = 0 \\
 N &= 0 && \text{pour } \varphi = 0 \\
 M_{\varphi}^{\varphi} &= -5000 \text{ N/m} && \text{pour } \varphi = +\epsilon
 \end{aligned}$$

Ces quatre conditions résultent de l'antisymétrie de la mise en

charge; la dernière résulte en outre de la condition d'équilibre de la bande de largeur 2ϵ , à l'abscisse $\varphi = 0$ (figure 2.7.8) qui donne :

$$10000 + M_{\varphi}^{(+\epsilon)} = M_{\varphi}^{(-\epsilon)}$$

Or puisque $M_{\varphi}^{(+\epsilon)} = -M_{\varphi}^{(-\epsilon)}$ à cause de l'antisymétrie, on a

$$M_{\varphi}^{(+\epsilon)} = -5000 \text{ N/m.}$$

On détermine ainsi les déplacements u_D, v_D, w_D .

11. Détermination des $(Z_{O X}^d)_D$ et $(X_{O X}^d)_D$ dus aux moments unitaires ci-dessus, en introduisant u_D, v_D et w_D dans les expressions de $(Z_{O X}^d)$ et $(X_{O X}^d)$.
12. Détermination et résolution des systèmes (2.6.2.a) à (2.6.2.d), mais ne comprenant plus que les fonctions $\Psi(\varphi)$ et $F(\varphi)$, puisqu'on suppose $\Phi(\varphi), \Gamma(\varphi)$ et $\gamma(\varphi) = 0$.

S'il y a m traverses, on obtient un système de $2m$ équations à $2m$ inconnues.

Quant aux termes indépendants ce sont ceux correspondant aux neuf cas de charge suivants :

- a. pression hydrostatique extérieure (figure 2.7.9)
- b. charge linéaire, parallèle à OZ de $-10000 \sin(n\pi/L)x$ N/m, agissant en $\varphi = 0$ (figure 2.7.10) - cas de charge de base C.
- c. Moment linéaire, d'axe parallèle à OX, de $10000 \sin(n\pi/L)x$ N.m/m agissant en $\varphi = 0$ (figure 2.7.11) - cas de charge de base D.
- d. Charge linéaire, parallèle à O φ , de $10000 \sin(n\pi/L)x$ N/m, agissant en $\varphi = 0$ (figure 2.7.12) - cas de charge de base B
- e. Charge linéaire, parallèle à OX, de $10000 \cos(n\pi/L)x$ N/m, agissant en $\varphi = 0$, (figure 2.7.13) - cas de charge de base A
- f.
- g. Les mêmes charges, mais agissant en $\varphi = \varphi_0$ (figures 2.7.14 à
- h. 2.7.17).
- i.

Après résolution de ces neuf systèmes de $2m$ équations à $2m$ inconnues, on obtient les valeurs des efforts linéaires créés par les traverses dans le cylindre complet considéré, pour les différents cas de charge étudiés.

13. On peut ainsi déterminer les déplacements u, v, w créés dans le cylindre complet, raidi par les m traverses, sous l'action de la pression extérieure et des huit cas de charge auxiliaires, et en déduire notamment les valeurs de $u, v, w, M_{\varphi}, \dots, N_{\varphi}, N_{\varphi x}, \dots$ aux points $\varphi = 0$ et $\varphi = \varphi_0$.

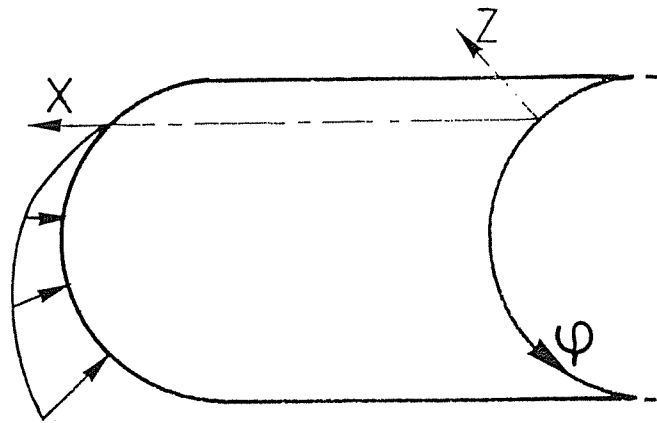


Figure 2.7.9

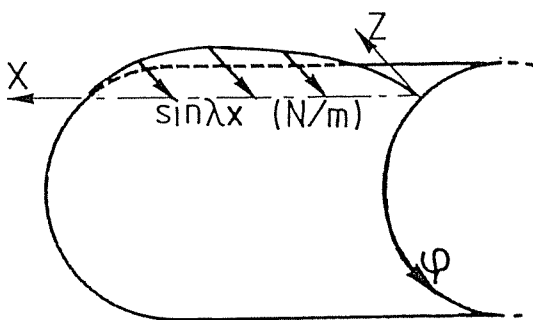


Figure 2.7.10

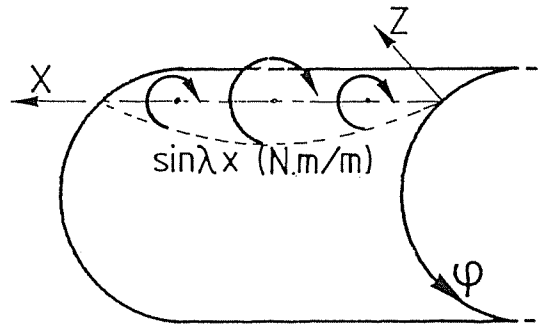


Figure 2.7.11

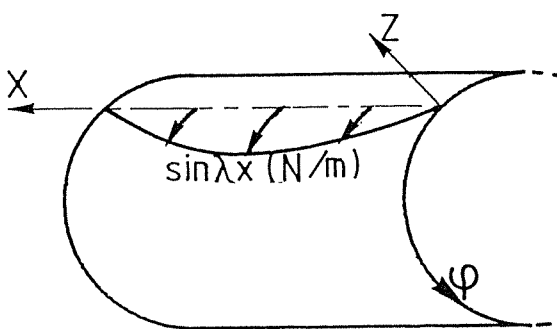


Figure 2.7.12

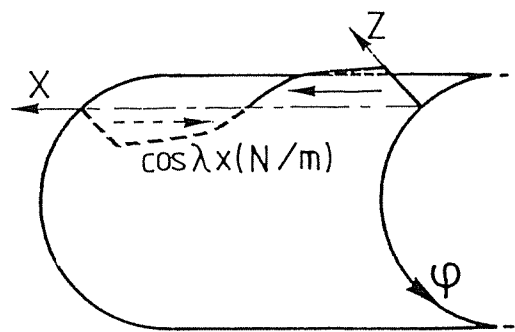


Figure 2.7.13

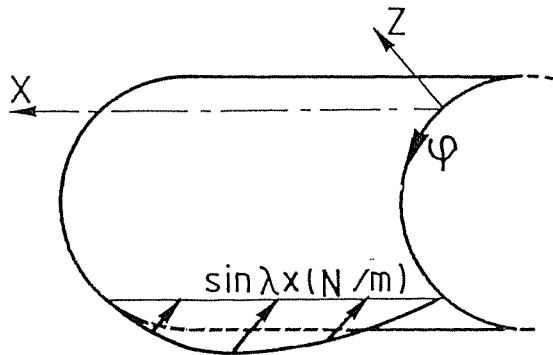


Figure 2.7.14

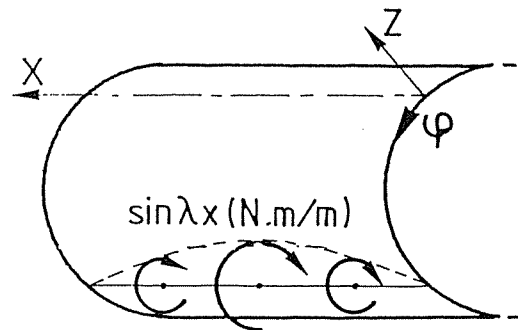


Figure 2.7.15

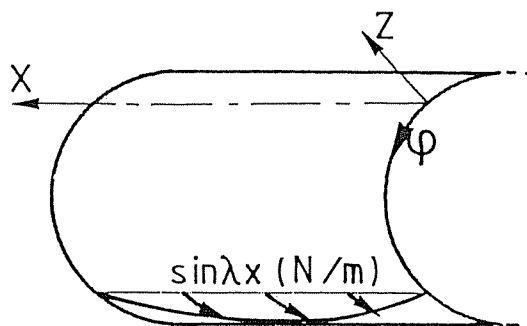


Figure 2.7.16

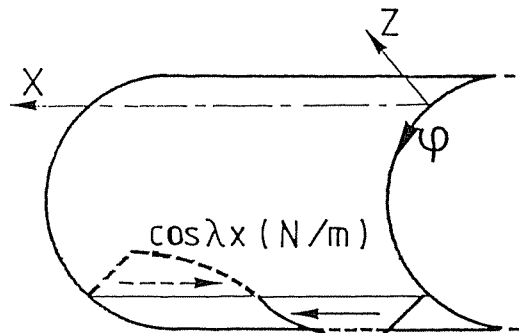


Figure 2.7.17

Il convient de remarquer que les coques considérées jusqu'à présent ne sont pas encore des coques réelles puisqu'elles sont toujours du type cylindre complet.

VII.2. AU NIVEAU DE LA STRUCTURE COMPLETE

1. On peut aisément définir la solution de la coque finie, à partir du cylindre complet étudié précédemment, en superposant les solutions des cylindres complets judicieusement chargés. Pour imposer que l'ensemble des cylindres complets se comporte comme une coque finie, il suffit de leur imposer aux points $\varphi = 0$ et $\varphi = \varphi_0$ les mêmes déplacements et efforts que ceux existant dans une coque finie.

Exemple : Si les 2 bords $\varphi = 0$ et $\varphi = \varphi_0$ sont respectivement libre et encastré il faut imposer :

en $\varphi = 0$, $M_\varphi = 0$, $N_{\varphi x} = 0$, $N_\varphi = 0$, $R_\varphi = 0$ bord libre

en $\varphi = \varphi_0$, $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $w^\circ = 0$ bord encastré

Si le cylindre complet global respecte ces conditions, alors tout point compris dans l'intervalle $(0, \varphi_0)$ se trouvera dans le même état de tension et de déformation que son homologue dans la coque réelle c'est-à-dire finie.

2. Pour ce faire nous allons superposer à la charge extérieure, α fois la charge unitaire A, β fois la charge unitaire B, ..., γ fois la charge unitaire D en $\varphi = 0$ et aussi θ fois la charge unitaire A, ϵ fois la charge unitaire B, ξ fois la charge unitaire D en $\varphi = \varphi_0$.

Nous avons ainsi 8 inconnues à déterminer qui sont les intensités des charges unitaires. Ces inconnues seront déterminées par les 8 conditions de bords qu'il est possible de fixer par coque (4 conditions par bord).

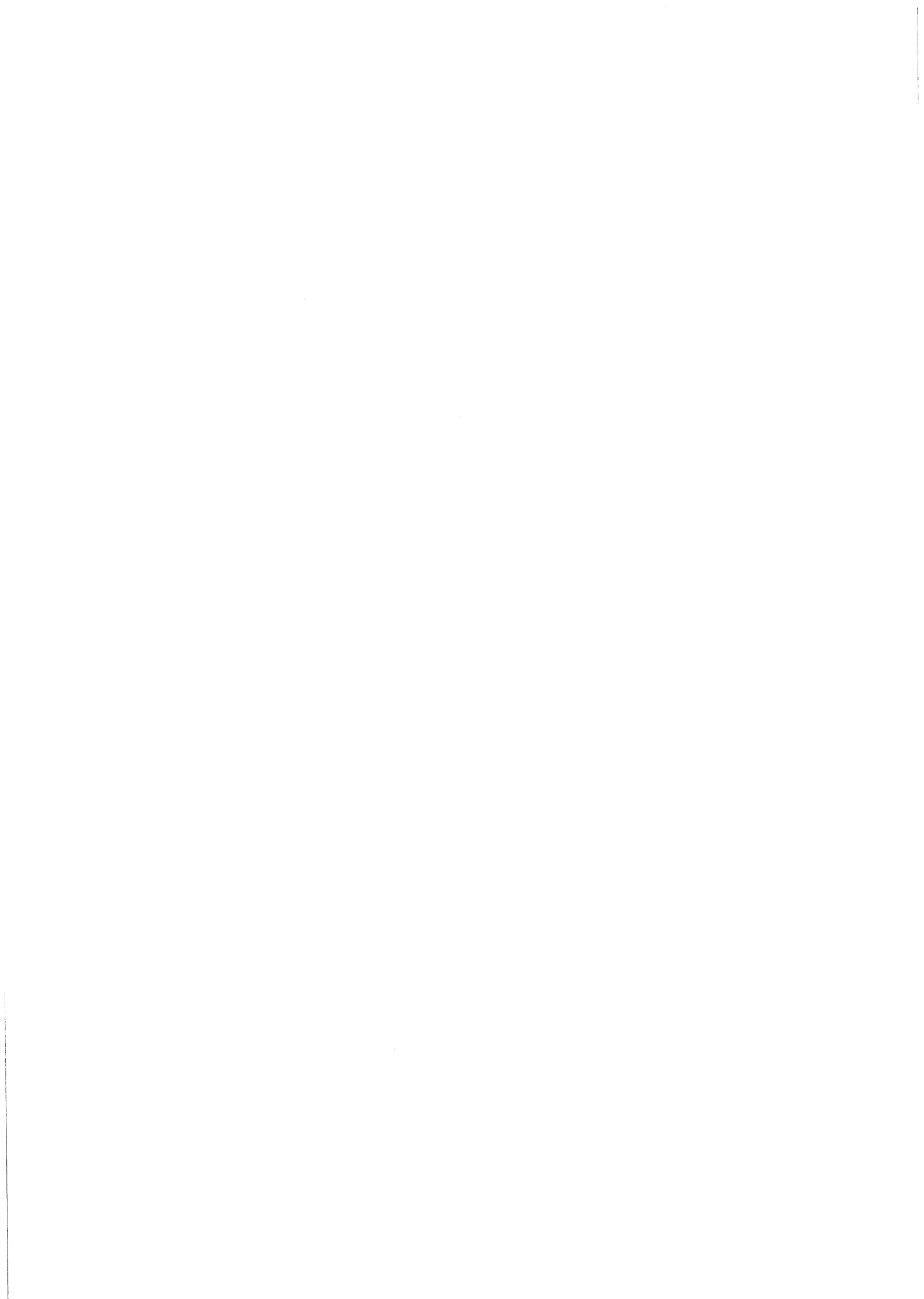
Pour un assemblage de k coques, nous aurons donc 8.k effets de bord à déterminer en vérifiant les 8.k conditions de bord sur les cylindres complets qui se comportent comme les k coques réelles (finies)

3. La solution finale s'obtient par superposition des valeurs u , v , w , du cylindre complet raidi par les traverses, sous l'action de la pression extérieure, de α fois la charge en A en $\varphi = 0$, de β fois la charge B en $\varphi = 0$, de ξ fois la charge D en $\varphi = \varphi_0$.

Le problème se termine par le calcul des N_φ , N_x , M_φ ,, à partir des fonctions u , v , w ainsi calculées.

4. Connaissant tous les éléments de réduction on peut alors calculer les contraintes et vérifier si la structure est correctement dimensionnée.

Nous sommes maintenant en possession de tous les éléments pour aborder les développements mathématiques nécessaires au calcul de la structure entière.



CHAPITRE VIII

DEVELOPPEMENT ANALYTIQUE NECESSAIRE A LA RESOLUTION D'UN ASSEMBLAGE DE COQUES RAIDIES

Les premiers développements ont été menés au chapitre V pour la résolution d'un cylindre complet non chargé (ceci n'exclut pas l'application de lignes de forces et de moments). Il restait 4 constantes d'intégration à fixer selon les conditions aux limites.

VIII.1. DETERMINATION DES 4 CONSTANTES D'INTEGRATION POUR LES 4 CAS DE CHARGE DE BASE.

Les expressions suivantes sont données pour la première racine complexe ($\alpha_1 + \beta_1$). Quelles que soient les racines, tous les cas se déduisent de celui-ci (§ V.5. - partie II).

VIII.1.1. Détermination des déplacements U_C , V_C , W_C créés dans le cylindre complet chargé en $\varphi = 0$ d'une force linéaire de $- 10000 \sin \lambda x$ N/m parallèle à OZ.

Etant donné la symétrie de la déformation par rapport au plan XOZ, on peut n'étudier que les points situés du côté des coordonnées φ positives (figure 2.8.1).

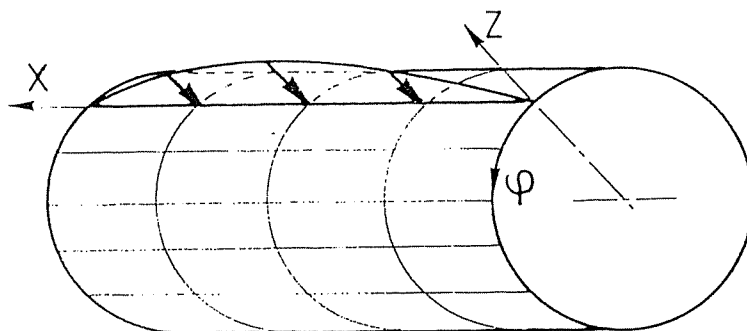


Figure 2.8.1

Comme signalé précédemment les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} v &= 0 && \text{en } \varphi = 0 \\ N_{\varphi x} &= 0 && \text{en } \varphi = 0 \\ w^{\circ} &= 0 && \text{en } \varphi = 0 \\ R_{\varphi} &= - 5000 \text{ N/m} && \text{en } \varphi = + \epsilon \end{aligned}$$

Les conditions en $\varphi = 2\pi$ sont automatiquement satisfaites vu qu'il s'agit du même point, mais cela à condition de poser, vu la symétrie :

$$E = A, \quad F = B, \quad G = C, \quad H = D$$

Ces 4 conditions se traduisent analytiquement à l'aide du tableau I par 4 équations du type :

$$\begin{aligned} (C_1.A + C_2.B) + e^{-2\pi\alpha_1 q} [(C_3A + C_4B) \cos 2\pi\beta_1 q + (-C_4A + C_3B) \sin 2\pi\beta_1 q] \\ + (C_5.C + C_6.D) + e^{-2\pi\alpha_2 q} [(C_7C + C_8D) \cos 2\pi\beta_2 q \\ + (-C_8C + C_7D) \sin 2\pi\beta_2 q] \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} [C_1 + (C_3 \cos 2\pi\beta_1 q - C_4 \sin 2\pi\beta_1 q) e^{-2\pi\alpha_1 q}] . A \\ + [C_2 + (C_4 \cos 2\pi\beta_1 q + C_3 \sin 2\pi\beta_1 q) e^{-2\pi\alpha_1 q}] . B \\ + [C_5 + (C_7 \cos 2\pi\beta_2 q - C_8 \sin 2\pi\beta_2 q) e^{-2\pi\alpha_2 q}] . C \\ + [C_6 + (C_8 \cos 2\pi\beta_2 q + C_7 \sin 2\pi\beta_2 q) e^{-2\pi\alpha_2 q}] . D \end{aligned} \quad (2.8.1)$$

$$\begin{aligned} &= 0 && \text{pour les 3 premières conditions} \\ &= - 5000 \text{ N/m} && \text{pour la condition sur } R_{\varphi}. \end{aligned}$$

C_1, C_2, \dots, C_8 sont à tirer du tableau I et A, B, C, D sont les inconnues.

Une fois ce système résolu, on remplace dans le tableau I les A, B, C, D par leur valeur et on obtient les expressions analytiques des déplacements u, v, w et des efforts N_{φ}, N_x, \dots , dans le cylindre complet soumis à une force linéaire parallèle à OZ de $- 10000 \sin \lambda x$.

On obtient aussi les fonctions $(X_o d_x)_C$ et $(Z_o d_x)_C$ utiles pour déterminer les forces linéaires que les traverses exercent sur la coque non raidie.

VIII.1.2 Détermination des déplacements U_A, V_A, W_A créés dans le cylindre complet, chargé en $\varphi = 0$ d'une force linéaire de 10000 $\cos \lambda x$. N/m parallèle à OX.

Comme au paragraphe précédent la déformation est symétrique par rapport au plan ZOZ (figure 2.8.2).

L'étude est exactement la même que celle faite en VIII.1.1., avec cette fois les 4 conditions aux limites :

$$\begin{aligned} v &= 0 && \text{en } \varphi = 0 \\ w^\circ &= 0 && \text{en } \varphi = 0 \\ R_\varphi &= 0 && \text{en } \varphi = 0 \\ N_{\varphi x} &= - 5000 \text{ N/m} && \text{en } \varphi = + \epsilon \end{aligned}$$

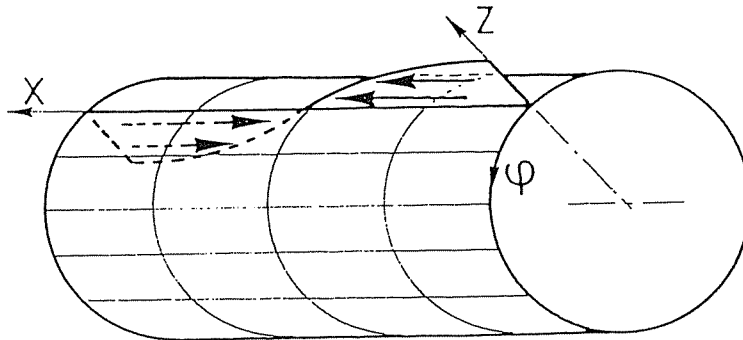


Figure 2.8.2

Les conditions en $\varphi = 2.\pi$ sont aussi satisfaites en posant vu la symétrie $E=A, F=B, G=C, H=D$.

Le système de 4 équations est le même qu'en VIII.1.1., seuls les termes indépendants changent.

On connaît les expressions analytiques des déplacements, des efforts et des fonctions $(X_o d_x)_A$ et $(Z_o d_x)_A$ utiles pour déterminer l'état d'un cylindre complet soumis à une force linéaire parallèle à OX de $- 10000 \cos \lambda x$.

VIII.1.3. Détermination des déplacements U_B, V_B, W_B créés dans le cylindre complet chargé en $\varphi = 0$ d'une force linéaire de 10000 $\sin \lambda x$ N/m, parallèle à O φ .

Contrairement aux 2 paragraphes précédents la déformation est antisymétrique par rapport au plan ZOZ (figure 2.8.3).

L'étude est néanmoins presque la même que celle faite en VIII.1.1 avec cette fois les 4 conditions aux limites :

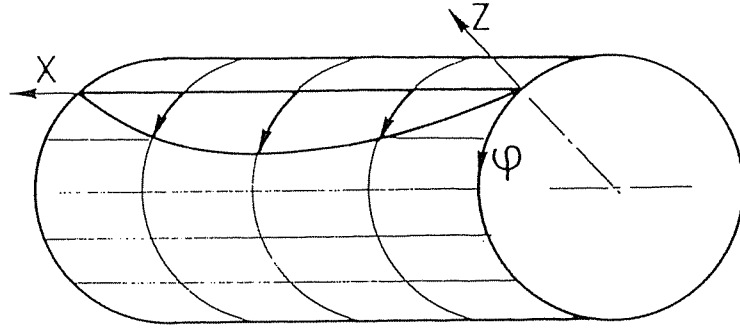


Figure 2.8.3

$$\begin{aligned}
 w &= 0 && \text{en } \varphi = 0 \\
 u &= 0 && \text{en } \varphi = 0 \\
 M_{\varphi} &= 0 && \text{en } \varphi = 0 \\
 N_{\varphi} &= -5000 \text{ N/m} && \text{en } \varphi = +\epsilon
 \end{aligned}$$

Les conditions en $\varphi = 2\pi$ sont aussi satisfaites en posant cette fois vu l'antisymétrie $E=-A$, $F=-B$, $G=-C$, $H=-D$.

Le système de 4 équations est du même type qu'en VIII.1.1. à savoir

$$\begin{aligned}
 & [C_1 - (C_3 \cos 2\pi\beta_1 q - C_4 \sin 2\pi\beta_1 q) \cdot e^{-2\pi\alpha_1 q}] . A \\
 & + [C_2 - (C_4 \cos 2\pi\beta_1 q + C_3 \sin 2\pi\beta_1 q) \cdot e^{-2\pi\alpha_1 q}] . B \\
 & + [C_5 - (C_7 \cos 2\pi\beta_2 q - C_8 \sin 2\pi\beta_2 q) \cdot e^{-2\pi\alpha_2 q}] . C \\
 & + [C_6 - (C_8 \cos 2\pi\beta_2 q + C_7 \sin 2\pi\beta_2 q) \cdot e^{-2\pi\alpha_2 q}] . D
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = 0 && \text{pour les 3 premières équations} \\
 & = -5000 \text{ N/m} && \text{pour l'équation en } N_{\varphi}.
 \end{aligned}$$

On connaît à présent les expressions analytiques des déplacements, efforts et des fonctions $(X_o d_x)_B$ et $(Z_o d_x)_B$ utiles pour déterminer l'état d'un cylindre complet soumis à une force linéaire parallèle à $O\varphi$ de $10000 \sin \lambda x$.

VIII.1.4. Détermination des déplacements U_D , V_D , W_D créés dans le cylindre complet chargé en $\varphi=0$ d'une ligne de moments de $10000 \sin \lambda x$ N.m/m agissant selon l'axe OX .

Comme au paragraphe VIII.1.3 la déformation est antisymétrique par

rapport au plan ZOY (figure 2.8.4).

L'étude est exactement la même que celle faite en VIII.1.3, avec cette fois les 4 conditions aux limites

$$\begin{aligned} w &= 0 && \text{en } \varphi = 0 \\ u &= 0 && \text{en } \varphi = 0 \\ N_{\varphi} &= 0 && \text{en } \varphi = 0 \\ M_{\varphi} &= -5000 \text{ N m/m} && \text{en } \varphi = +\epsilon \end{aligned}$$

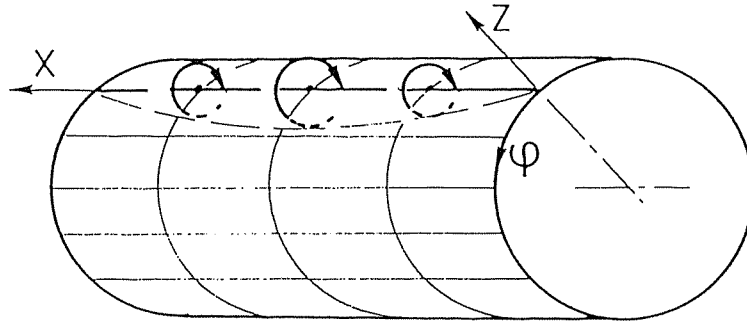


Figure 2.8.4

Les conditions en $\varphi = 2.\pi$ sont aussi satisfaites en posant vu l'antisymétrie $E=-A$, $F=-B$, $G=-C$, $H=-D$.

Le système de 4 équations est le même qu'en VIII.1.3, seuls les termes indépendants changent.

On connaît les expressions analytiques des déplacements, des efforts et des fonctions $(X, d)_D$ et $(Z, d)_D$ utiles pour déterminer l'état d'un cylindre complet soumis à un moment d'axe OX de $-10000 \sin \lambda x$ (N.m/m).

VIII.2. TYPES DE CHARGE EXTERIEURE A ENVISAGER DANS LA RESOLUTION D'UN CAS CONCRET

En examinant le processus de résolution, on a vu qu'il n'était applicable que pour une coque appuyée sur deux bords opposés, et pour laquelle les nervures dont on considère l'effet concentré agissent perpendiculairement à ces deux bords. Dans ce cas, il est en effet possible d'envisager l'action de forces linéaires agissant selon une parallèle aux nervures et variant, dans le sens de celles-ci, selon la loi $\sin(n\pi/L)x$ ou $\cos(n\pi/L)x$.

Comme nous l'avons vu, ceci impose que, dans le sens des nervures, la charge extérieure soit développée en série de Fourier et que chacun des termes soit étudié séparément.

Dans le sens perpendiculaire aux nervures, il n'y a aucune restriction à la variation de la charge extérieure (figure 2.8.5).

La coque étudiée étant simplement appuyée sur les 2 bords $x=0$ et $x=L$ et les nervures principales (traverses) étant parallèles à l'axe des x , la charge extérieure Z sera donc développée en série de Fourier selon OX.

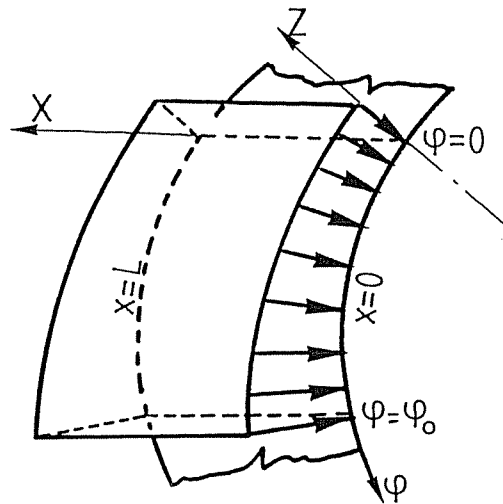


Figure 2.8.5

VIII.2.1. Posons $P(\varphi)$ la variation de la charge en mètre d'eau selon l'axe $O\varphi$

Sachant que le développement d'une charge unitaire uniforme est [F.4] :

$$1 = \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{L} + \dots \right)$$

on a pour $P(\varphi)$:

$$Z(x, \varphi) = -9810 P(\varphi) \left[\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{2n-1}{L}\pi x\right) \right] \text{ N/m}^2 \quad (2.8.2)$$

nous avons envisagé deux types de variation de $P(\varphi)$.

VIII.2.1.1. Variation hydrostatique

de la pression avec la profondeur du point envisagé entre A et B (figure 2.8.6).

$$P(\varphi) = q [\sin(\theta+\varphi) - \sin\theta] + \Delta h \quad (2.8.3)$$

avec Δh la pression au point origine A ($\varphi = 0$).

D'où on a :

$$Z = -9810 [q \sin(\theta+\varphi) + (\Delta h - q \sin\theta)] \cdot \left[\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin\lambda x \right] \quad (2.8.4)$$

avec $\lambda = 2n-1 \cdot \frac{\pi}{L}$

VIII.2.1.2 Variation linéaire

de la pression selon la circonférence entre les points A et B (figure 2.8.7)

XI et XF les pressions respectivement en A et B.

$$P(\varphi) = XI + \frac{XF-XI}{\varphi_0} \cdot \quad (2.8.5)$$

D'où

$$Z = -9810 \left[XI + \frac{XF - XI}{\varphi_0} \cdot \right] \cdot \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \lambda x$$

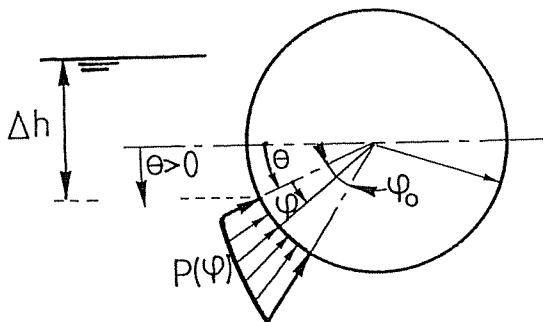


Figure 2.8.6

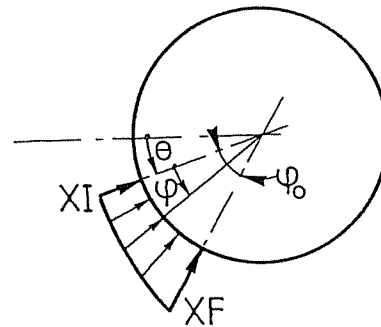


Figure 2.8.7.

VIII.2.1.3.

Dans ce qui suit, nous ne considérerons que le premier terme du développement; la détermination de la solution relative aux autres termes se fait d'une manière absolument analogue. On étudiera donc l'effet de la charge

$$Z = -9810 \cdot P(\varphi) \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi}{L} \cdot x \text{ N/m}^2$$

On pose :

$$\lambda = \frac{\pi}{L} (\text{m}^{-1})$$

Remarque : Le premier terme du développement en série est suffisant pour la détermination des contraintes maxima.

En effet, de nombreux exemples ont montré que les résultats correspondants sont très proches des résultats exacts.

La figure 2.8.8. montre d'ailleurs clairement l'importance relative des différents termes.

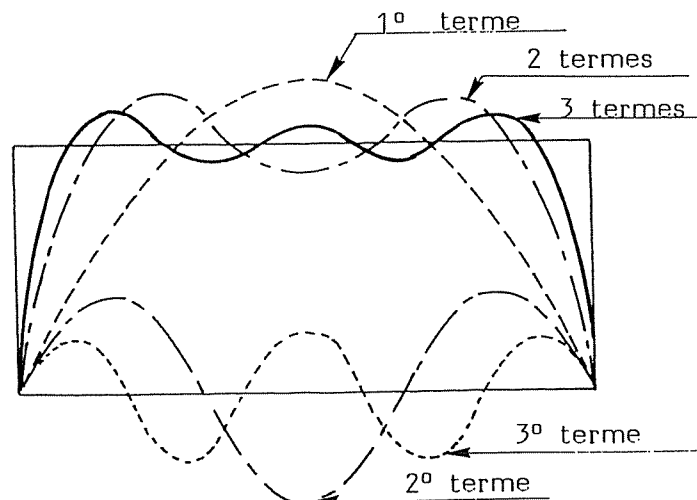


Figure 2.8.8

VIII.2.2. Détermination des déplacements U_o , V_o , W_o créés dans le cylindre complet chargé par la sollicitation extérieure $P(\varphi)$.

Les déplacements en tous points du cylindre complet sont connus pour une charge linéaire Z de $-10000 \sin \lambda x$ N/m. En fait, cette charge linéaire peut être considérée comme agissant sur une plage élémentaire $q \cdot d\varphi$. En faisant varier cette charge élémentaire selon φ , on peut représenter la charge extérieure $P(\varphi)$.

Plaçons-nous en un point quelconque de coordonnée φ sur le cylindre complet, celui-ci étant chargé en $\varphi = \Lambda$ par une charge élémentaire. On a donc :

$$dW_o = 0,981 \cdot \frac{4}{\pi} \cdot P(|\Lambda|) \cdot W_C \cdot q \cdot d\Lambda \quad (2.8.6)$$

avec W_C les déplacements correspondant au cas de charge de base C (§ VIII.1.1).

$$W_o = 0,981 \cdot \frac{4}{\pi} \cdot q \int_0^{\varphi_o} P(|\Lambda|) \cdot W_C \cdot d\Lambda$$

avec φ_o l'angle d'ouverture de la coque réelle et

$$W_C = [A \cdot e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \cos \beta_1 q |\varphi - \Lambda| + B \cdot e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \sin \beta_1 q |\varphi - \Lambda| + C \dots$$

$$+ D \dots + A \cdot e^{-\alpha_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|)} \cos \beta_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|) + B \dots]$$

$$\cdot \frac{1}{2n-1} \cdot \sin \lambda x \quad (2.8.7)$$

si A, B, C, D déterminé pour le cas de base C (§ VIII.1.1).

VIII.2.2.1 Cas de la pression hydrostatique

Connaissant $P(\varphi)$ (2.8.3) on aboutit à l'expression suivante de W_o :

$$W_o = 0,981 \frac{4}{\pi} \cdot q \cdot \sin \lambda x.$$

$$[q \cdot A \int_0^{\varphi_o} e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \cos \beta_1 q |\varphi - \Lambda| \cdot \sin(\Theta + \Lambda) d\Lambda \quad (I_{1a})$$

$$+ q \cdot B \int_0^{\varphi_o} e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \sin \beta_1 q |\varphi - \Lambda| \cdot \sin(\Theta + \Lambda) d\Lambda \quad (I_{1b})$$

$$+ q \cdot A \int_0^{\varphi_o} e^{-\alpha_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|)} \cos \beta_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|) \cdot \sin(\Theta + \Lambda) d\Lambda \quad (I_{1c})$$

$$+ q \cdot B \int_0^{\varphi_o} e^{-\alpha_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|)} \sin \beta_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|) \cdot \sin(\Theta + \Lambda) d\Lambda \quad (I_{1d})$$

$$\begin{aligned}
& + (\Delta h - q \sin\theta) \cdot \int_0^{\varphi_0} e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \cos \beta_1 q |\varphi - \Lambda| d\Lambda \quad (I_{1e}) \\
& + (\Delta h - q \sin\theta) \cdot \int_0^{\varphi_0} e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \sin \beta_1 q |\varphi - \Lambda| d\Lambda \quad (I_{1f}) \\
& + (\Delta h - q \sin\theta) \cdot \int_0^{\varphi_0} e^{-\alpha_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|)} \cos \beta_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|) d\Lambda \quad (I_{1g}) \\
& + (\Delta h - q \sin\theta) \cdot \int_0^{\varphi_0} e^{-\alpha_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|)} \sin \beta_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|) d\Lambda \quad (I_{1h}) \\
& + \dots \text{idem avec } \alpha_2, \beta_2 \dots [I_{2a} \text{ à } I_{2h} \dots] \quad (2.8.8)
\end{aligned}$$

avec I_{1a} à I_{1h} repérant les 8 intégrales contenant les paramètres α_1, β_1 et I_{2a} à I_{2h} repérant les 8 intégrales contenant les paramètres α_2, β_2 .

L'intégration des différents termes de l'expression de W_0 (2.8.8.) est détaillée à l'annexe 2.a (voir notice §V.5).

Le procédé est le même pour calculer U_0 en tous points de la coque.

Les expressions de W_0 et U_0 sont identiques à l'exception des coefficients A, B, C, D pour W_0 qui deviennent A_1, B_1, C_1, D_1 pour U_0 .

De plus, W_0 est une fonction en $\sin \lambda x$ et U_0 en $\cos \lambda x$.

Le tableau II repris à l'annexe 2.b donne les coefficients des expressions analytiques de W_0 et U_0 (voir notice §V.5).

Détermination de V_0

Le calcul de V_0 est plus ardu du fait du caractère antisymétrique de la fonction v par rapport à l'axe OX .

Ainsi :

$$V_0 = 0,981 \cdot \frac{4}{\pi} \cdot q \cdot \int_0^{\varphi_0} p(\Lambda) \cdot V_C \cdot d\Lambda \quad (2.8.10)$$

avec

$$\begin{aligned}
V_C = & [\pm (A_2) e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \cos \beta_1 q |\varphi - \Lambda| \pm (B_2) e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \sin \beta_1 q |\varphi - \Lambda| \\
& \pm (C_2) \dots \pm (-A_2) e^{-\alpha_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|)} \cos \beta_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|) \\
& \pm (-B_2) e^{-\alpha_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|)} \sin \beta_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|) \pm (-C_2) \dots \pm (-D_2) \dots] \\
& \cdot \frac{1}{2n-1} \cdot \sin \lambda x \quad (2.8.11)
\end{aligned}$$

Convention de signe (figure 2.8.9)

$(-A_2)$ du fait de l'antisymétrie de la fonction v .

$\pm \rightarrow +$ si $\varphi - \Lambda > 0$ c'est-à-dire $\Lambda < \varphi$
 $\rightarrow -$ si $\varphi - \Lambda < 0$ c'est-à-dire $\Lambda > \varphi$

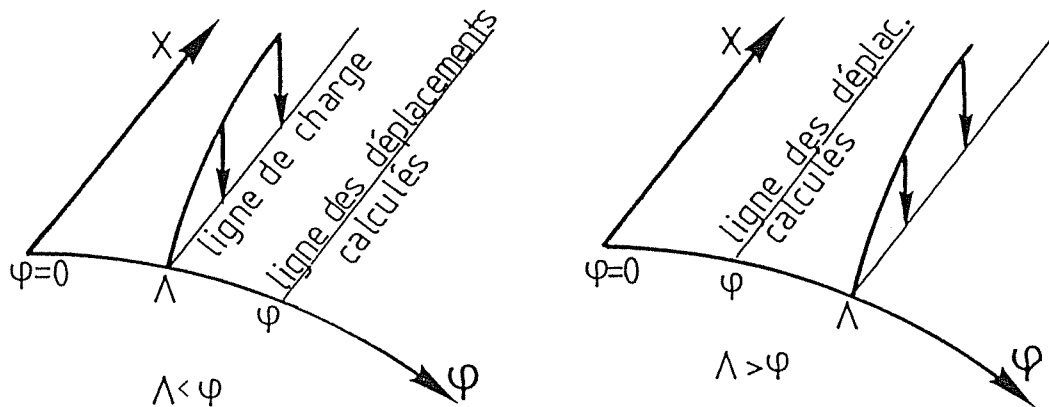


Figure 2.8.9

Les expressions analytiques nécessaires au calcul de V_0 sont reprises au tableau III de l'annexe 2.c (voir notice §V.5).

VIII.2.2.2. Cas de la variation linéaire de la charge avec la coordonnée curviligne .

Ainsi,

$$Z = -\frac{4}{\pi} \cdot 9810 \cdot \left[\frac{XF-XI}{\varphi_0} \cdot \Lambda + XI \right] \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot n - 1} \cdot \sin \lambda x$$

d'où pour le terme numéro n, on a :

$$dW_0 = \frac{4}{\pi} \cdot 0,981 \cdot \frac{1}{2n-1} \cdot \sin \lambda x \cdot \left[\frac{XI-XI}{\varphi_0} \cdot \Lambda + XI \right] \cdot W_C \cdot q d\Lambda \quad (2.8.12)$$

avec W_C étant l'expression (2.8.7) déjà utilisée précédemment.

L'expression de W_0 devient ainsi :

$$\begin{aligned}
 W_0 = \frac{4q}{\pi} \cdot \frac{0,981}{(2n-1)} \cdot \sin \lambda \cdot x & \\
 \left(\frac{XF-XI}{\varphi_0} \right) \cdot A \int_0^{\varphi_0} \Lambda e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \cdot \cos \beta_1 q |\varphi - \Lambda| d\Lambda & \\
 + B \int_0^{\varphi_0} \Lambda e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \sin \beta_1 q |\varphi - \Lambda| d\Lambda & \\
 + A \int_0^{\varphi_0} \Lambda e^{-\alpha_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|)} \cos \beta_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|) \cdot d\Lambda & \\
 + B \int_0^{\varphi_0} \Lambda e^{-\alpha_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|)} \sin \beta_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|) \cdot d\Lambda &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+ \text{XI} \quad & A \int_0^{\varphi_0} e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \cdot \cos \beta_1 q |\varphi - \Lambda| \, d\Lambda \\
& + B \int_0^{\varphi_0} e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \sin \beta_1 q |\varphi - \Lambda| \, d\Lambda \\
& + A \int_0^{\varphi_0} e^{-\alpha_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|)} \cos \beta_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|) \, d\Lambda \\
& + B \int_0^{\varphi_0} e^{-\alpha_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|)} \sin \beta_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|) \, d\Lambda
\end{aligned}
\tag{2.8.13}$$

La méthode de calcul de ces intégrales est explicitée à l'annexe 2.a.

Les expressions de W_0 , U_0 sont données dans le tableau IV et celle de V_0 dans le tableau V, ces tableaux étant repris à l'annexe (voir notice §V.5).

VIII.2.2.3. Remarques

- Quelle que soit la fonction $P(\varphi)$ choisie, une fois U_0 , V_0 , W_0 calculés, on peut, en remplaçant ces fonctions dans les expressions de $X_0 d_x$, $Y_0 d_x$, $Z_0 d_x$, U_{ox} , U_{oz} obtenir les expressions des $(X_0 d_x)_o$, $(Y_0 d_x)_o$, $(Z_0 d_x)_o$, $(U_{ox})_o$, et $(U_{oz})_o$ (2.8.14 a à e). Ces expressions sont utiles pour déterminer les effets des traverses sur la coque non raidie.
- Dans les tableaux II à V, les coefficients A, B, C, D sont les constantes d'intégration qui ont été déterminées pour obtenir les déplacements U_C , V_C , W_C correspondant au cas de charge de base C.

VIII.3. DETERMINATION DES EFFORTS TRANSMIS PAR LES TRAVERSEES SUR LE CYLINDRE COMPLET NON RAIDI

Les premières considérations théoriques ont été élaborées au chapitre IV et le schéma de résolution au chapitre VI.

Toutes les variables nécessaires sont connues sous forme analytique en fonction des seules coordonnées x et φ .

Ainsi $(X_0 d_x)_A$, $(Z_0 d_x)_A$, $(Z_0 d_x)_D$, $(Z_0 d_x)_o$, $(U_{oz})_o$ définis au § VIII.1 et VIII.2 permettent d'obtenir directement la matrice des coefficients des inconnues ainsi que les termes indépendants pour les 9 cas de sollicitation (la charge extérieure, les 4 cas de base en $\varphi = 0$ et puis en $\varphi = \varphi_0$).

VIII.3.1. Détermination des neuf systèmes

Le système à résoudre est le système (2.6.2.a) à (2.6.2.e), qui se réduit aux deux seules équations (2.6.2.a) et (2.6.2.c), puisqu'on suppose que $\phi(K_i)$, $\Gamma(K_i)$ et $\gamma(K_i)$ sont nuls.

En attribuant aux traverses des indices 1, 2, ... m dans l'ordre croissant de leurs abscisses, et après tous les regroupements nécessaires, ce système pourra se mettre sous la forme matricielle

$$|A| \cdot (x) = (C) \quad (2.8.15)$$

où $|A|$ est la matrice des coefficients des inconnues (voir ci-après)

(x) est le vecteur des inconnues :
 $(x) = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m, F_1, F_2, \dots, F_m)$

(C) représente le vecteur des termes indépendants, pour chacun des neuf cas de charge considérés :

$$(C) = [(X_{o,x})^{\varphi=K_1}, (X_{o,x})^{\varphi=K_2}, \dots, (X_{o,x})^{\varphi=K_m}, \\ (Z_{o,x})^{\varphi=K_1}, (Z_{o,x})^{\varphi=K_2}, \dots, (Z_{o,x})^{\varphi=K_m}]$$

Si on remarque que les positions des traverses correspondent à des abscisses K_1, K_2, \dots, K_m , l'examen de la matrice A montre que les seuls arguments $|\varphi - K_i|$ à considérer dans le calcul de ses termes sont $|\varphi - K_i|$ avec $i = 1, m$

Quant aux vecteurs des termes indépendants (C), ils sont de trois types :

- ceux dus à la pression hydrostatique extérieure, exprimés par les relations (2.8.14.a) et (2.8.14.c), dans lesquelles on fait successivement $\varphi = K_i$ à K_m
- ceux dus aux forces linéaires agissant en l'abscisse $\varphi = 0$. Les arguments $|\varphi - K_i|$ à considérer sont donc ici $|\varphi - K_i|$ avec $i = 1, m$
- ceux dus aux forces linéaires agissant en l'abscisse $\varphi = \varphi_0$. Les arguments à considérer ici sont donc : $|\varphi - K_i|$ avec $i = 1, m$

Voici l'exemple de la matrice des coefficients des inconnues pour le cas d'une coque raidie par 3 traverses.

$1 - \frac{1}{10000} (X_o^d)_B, \varphi = K_1, K = K_1$	$-\frac{1}{10000} (X_o^d)_B, \varphi = K_1, K = K_2$	$-\frac{1}{10000} (X_o^d)_B, \varphi = K_1, K = K_3$	$-\frac{1}{10000} (X_o^d)_C, \varphi = K_1, K = K_1$	$-\frac{1}{10000} (X_o^d)_C, \varphi = K_1, K = K_2$	$-\frac{1}{10000} (X_o^d)_C, \varphi = K_1, K = K_3$
$-\frac{1}{10000} (X_o^d)_B, \varphi = K_2, K = K_1$	$1 - \frac{1}{10000} (X_o^d)_B, \varphi = K_2, K = K_2$	$-\frac{1}{10000} (X_o^d)_B, \varphi = K_2, K = K_3$	$-\frac{1}{10000} (X_o^d)_C, \varphi = K_2, K = K_1$	$-\frac{1}{10000} (X_o^d)_C, \varphi = K_2, K = K_2$	$-\frac{1}{10000} (X_o^d)_C, \varphi = K_2, K = K_3$
$-\frac{1}{10000} (X_o^d)_B, \varphi = K_3, K = K_1$	$-\frac{1}{10000} (X_o^d)_B, \varphi = K_3, K = K_2$	$1 - \frac{1}{10000} (X_o^d)_B, \varphi = K_3, K = K_3$	$-\frac{1}{10000} (X_o^d)_C, \varphi = K_3, K = K_1$	$-\frac{1}{10000} (X_o^d)_C, \varphi = K_3, K = K_2$	$-\frac{1}{10000} (X_o^d)_C, \varphi = K_3, K = K_3$
$-\frac{1}{10000} (Z_o^d)_B, \varphi = K_1, K = K_1$	$-\frac{1}{10000} (Z_o^d)_B, \varphi = K_1, K = K_2$	$-\frac{1}{10000} (Z_o^d)_B, \varphi = K_1, K = K_3$	$1 - \frac{1}{10000} (Z_o^d)_C, \varphi = K_1, K = K_1$	$-\frac{1}{10000} (Z_o^d)_C, \varphi = K_1, K = K_2$	$-\frac{1}{10000} (Z_o^d)_C, \varphi = K_1, K = K_3$
$-\frac{1}{10000} (Z_o^d)_B, \varphi = K_2, K = K_1$	$-\frac{1}{10000} (Z_o^d)_B, \varphi = K_2, K = K_2$	$-\frac{1}{10000} (Z_o^d)_B, \varphi = K_2, K = K_3$	$-\frac{1}{10000} (Z_o^d)_C, \varphi = K_2, K = K_1$	$1 - \frac{1}{10000} (Z_o^d)_C, \varphi = K_2, K = K_2$	$-\frac{1}{10000} (Z_o^d)_C, \varphi = K_2, K = K_3$
$-\frac{1}{10000} (Z_o^d)_B, \varphi = K_3, K = K_1$	$-\frac{1}{10000} (Z_o^d)_B, \varphi = K_3, K = K_2$	$-\frac{1}{10000} (Z_o^d)_B, \varphi = K_3, K = K_3$	$-\frac{1}{10000} (Z_o^d)_C, \varphi = K_3, K = K_1$	$-\frac{1}{10000} (Z_o^d)_C, \varphi = K_3, K = K_2$	$1 - \frac{1}{10000} (Z_o^d)_C, \varphi = K_3, K = K_3$

VIII. 4. EXPRESSION DES CONDITIONS AUX LIMITES, MATRICE D'ASSEMBLAGE DES DIFFERENTS PANNEAUX.

A ce stade du calcul, nous sommes en mesure de déterminer les expressions analytiques des déplacements u , v , w , ainsi que des divers éléments de réduction, dans le cylindre complet, avec raidisseurs et aiguilles répartis, raidi par les traverses, pour les neuf cas de charge considérés.

Nous pouvons donc déterminer les neuf valeurs de w en $\varphi = 0$ pour chacun de ces cas de charge, en calculant l'expression générale :

$$w_{\varphi=0} = w_0 + \frac{1}{10000} (\psi_1 w_B^{K_1} + \psi_2 w_B^{K_2} + \psi_3 w_B^{K_3} + \dots + \psi_m w_B^{K_m} + F_1 w_C^{K_1} + F_2 w_C^{K_2} + F_3 w_C^{K_3} + \dots + F_m w_C^{K_m}) \quad (2.8.16)$$

où w_0 est le déplacement w dans le cylindre complet non raidi par les traverses, sous l'action de la force extérieure considérée, et ψ_1, \dots, F_m les valeurs des lignes d'efforts dus aux traverses, pour cette même charge.

Soient $u_0, v_0, w_0, M_{\varphi 0}, N_{\varphi 0}, \dots$ les grandeurs correspondant au cas de charge hydrostatique.

Soient $u_i, v_i, w_i, M_{\varphi i}, N_{\varphi i}$ les grandeurs correspondant au cas de charge linéaire i (figures 2.7.10 à 2.7.17).

Pour passer du cylindre complet à la coque finie, on va superposer à la charge hydrostatique, α fois la charge A, β fois le charge B, ... , ξ fois la charge D.

De cette manière, on peut réaliser les conditions aux limites sur les bords $\varphi = 0$ et $\varphi = \varphi_0$.

Les expressions des éléments de réduction et des déplacements du cylindre complet seront :

$$u = v_0 + \alpha v_1 + \beta v_2 + \dots + \xi u_8$$

$$v = v_0 + \alpha v_1 + \beta v_2 + \dots + \xi v_8$$

$$w = w_0 + \alpha w_1 + \beta w_2 + \dots + \xi w_8$$

$$M_{\varphi} = M_{\varphi 0} + \alpha M_{\varphi 1} + \beta M_{\varphi 2} + \dots + \xi M_{\varphi 8} \quad (2.8.17 .a \text{ à } e)$$

$$N_{\varphi} = N_{\varphi 0} + \dots$$

·
·
·
·

Imposer des conditions sur les bords $\varphi = 0$ et $\varphi = \varphi_0$ revient à imposer des valeurs à certaines des grandeurs ci-dessus.

Exemple :

Si la coque est - appuyée en $\varphi = 0$, ($M_\varphi, N_\varphi, u, w = 0$)
 - encastrée en $\varphi = \varphi_0$, ($u, v, w, dw/d\varphi = 0$)

Pour satisfaire à ces huit conditions, il faudra résoudre le système suivant :

$$M_{\varphi_0}(\varphi=0)^+ + \alpha M_{\varphi_1}(\varphi=0)^+ + \dots + \xi M_{\varphi_8}(\varphi=0) = 0$$

$$N_{\varphi_0}(\varphi=0)^+ + \alpha N_{\varphi_1}(\varphi=0)^+ + \dots + \xi N_{\varphi_8}(\varphi=0) = 0$$

$$v_{\varphi_0}(\varphi=0)^+ + \alpha v_{\varphi_1}(\varphi=0)^+ + \dots + \xi v_{\varphi_8}(\varphi=0) = 0$$

$$w_{\varphi_0}(\varphi=0)^+ + \alpha w_{\varphi_1}(\varphi=0)^+ + \dots + \xi w_{\varphi_8}(\varphi=0) = 0$$

$$u_{\varphi_0}(\varphi=\varphi_0)^+ + \alpha u_{\varphi_1}(\varphi=\varphi_0)^+ + \dots + \xi u_{\varphi_8}(\varphi=\varphi_0) = 0$$

$$v_{\varphi_0}(\varphi=\varphi_0)^+ + \alpha v_{\varphi_1}(\varphi=\varphi_0)^+ + \dots + \xi v_{\varphi_8}(\varphi=\varphi_0) = 0$$

$$w_{\varphi_0}(\varphi=\varphi_0)^+ + \alpha w_{\varphi_1}(\varphi=\varphi_0)^+ + \dots + \xi w_{\varphi_8}(\varphi=\varphi_0) = 0$$

$$\left(\frac{dw}{d\varphi}\right)_{\varphi_0}(\varphi=\varphi_0)^+ + \alpha \left(\frac{dw}{d\varphi}\right)_{\varphi_1}(\varphi=\varphi_0)^+ + \dots + \xi \left(\frac{dw}{d\varphi}\right)_{\varphi_8}(\varphi=\varphi_0) = 0 \quad (2.8.18.a \text{ à } h)$$

La résolution de ce système de 8 équations à 8 inconnues fournit les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \xi$. Ces valeurs injectées dans les formules (2.8.17) fournissent à leur tour, les éléments de réduction. On peut alors calculer les contraintes et vérifier si le panneau est bien dimensionné.

Remarque : Nous utiliserons couramment par la suite le vocable "panneau" pour désigner une plaque ou une coque réelle (figure 2.8.10).

VIII.4.1. Conditions d'appui

L'étude du panneau réalisée précédemment nous a permis d'établir la forme générale des éléments de réduction et des déplacements (2.8.16). Elle a pour expression :

$$E = E_0 + \alpha E_1 + \beta E_2 + \gamma E_3 + \dots + \xi E_8 \quad (2.8.19)$$

Les 8 coefficients multiplicateurs $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ sont fixés par les conditions d'appui en $\varphi = 0$ et $\varphi = \varphi_0$. Chaque type d'appui est défini par certaines relations. En effet, pour

un appui libre on a : $R_\varphi = 0, \quad N_\varphi = 0, \quad N_{\varphi x} = 0, \quad M_\varphi = 0$

un appui simple on a : $N_\varphi = 0, \quad M_\varphi = 0, \quad u = 0, \quad w = 0$

un appui encastré on a : $u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{dw}{d\varphi} = 0$

VIII.4.2. Assemblage de plusieurs panneaux

Des conditions d'appui aux extrémités du panneau, nous allons passer à des conditions de continuité entre panneaux.

Considérons l'assemblage ci-dessous comportant 9 panneaux.

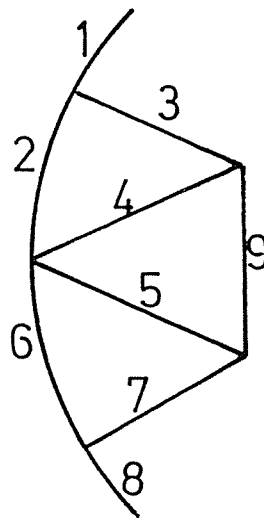


Figure 2.8.10

La jonction de 2 panneaux en un noeud (par exemple les panneaux n° 7 et 8) se traduit par :

- la compatibilité des déplacements $u, v, w, \frac{dw}{d\varphi}$ (8 équations)
- l'équilibre des forces aux noeuds en projection suivant les 3 axes $OX, O\varphi, OZ$ et des moments autour de l'axe OX (4 équations)

La compatibilité et l'équilibre s'expriment donc par 12 équations.

Or sur chacun des 3 bords de la jonction, on peut imposer 4 conditions, donc 12 au total. Par conséquent, le nombre de conditions à imposer et le nombre de conditions imposables sont égaux. Le problème est donc parfaitement déterminé.

Il en est de même pour une jonction de n panneaux : dans ce cas, il y a $4(n-1)$ équations de compatibilité et 4 équations d'équilibre. Il y a donc $4n$ équations à imposer et le nombre de conditions imposables est égal à $4n$.

Considérons un assemblage constitué de n panneaux tel que celui représenté à la figure 2.8.10. A raison de 8 inconnues par panneau, il y a $8n$ inconnues au total. En exprimant la continuité à tous les noeuds et les conditions d'appui éventuelles, on aboutit à un système linéaire de $8n$ coefficients multiplicateurs.

Nous reviendrons dans les paragraphes qui suivent au programme qui engendre automatiquement l'écriture de ce système quel que soit l'assemblage considéré.

VIII.4.3. Quelques conventions

VIII.4.3.1. Départ et arrivée d'un panneau

Le départ D d'un panneau correspond à la ligne d'abscisse $\varphi = 0$ et l'arrivée A correspond à la ligne d'abscisse $\varphi = \varphi_0$.

Sens de parcours d'un panneau : il est défini en allant de D vers A (figure 2.8.11).

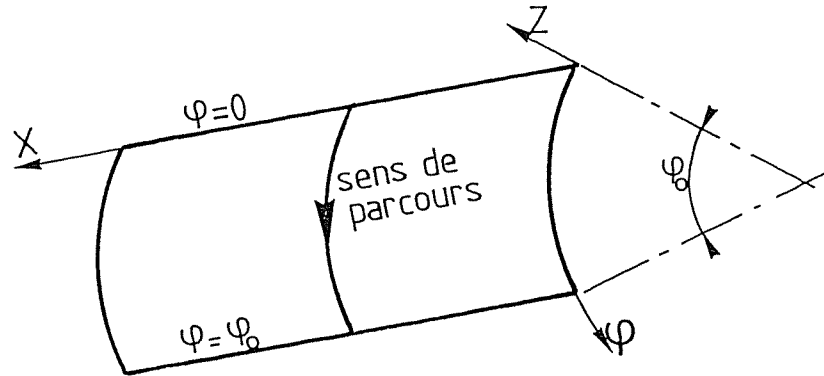


Figure 2.8.11

VIII.4.3.2. Face positive et face négative d'un panneau

Pour définir ces faces, on se place au départ du panneau.

L'axe OX est dirigé suivant la largeur, l'axe Oφ est dirigé suivant la circonférence (de D vers A) et l'axe OZ, formant un repère dextrorsum avec les 2 axes précédents, est dirigé de la face négative vers la face positive (figure 2.8.12).

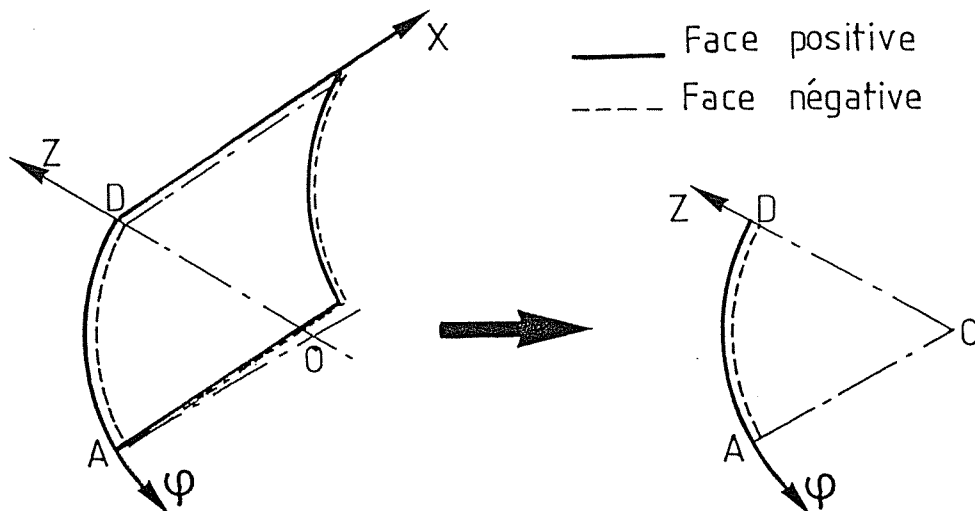


Figure 2.8.12

VIII.4.3.3 Angle de positionnement d'un panneau

C'est l'angle γ de sommet D, qui a pour côtés l'horizontale d'une part et la tangente au panneau d'autre part. Il est compté positivement dans le sens horlogique (figure 2.8.13).

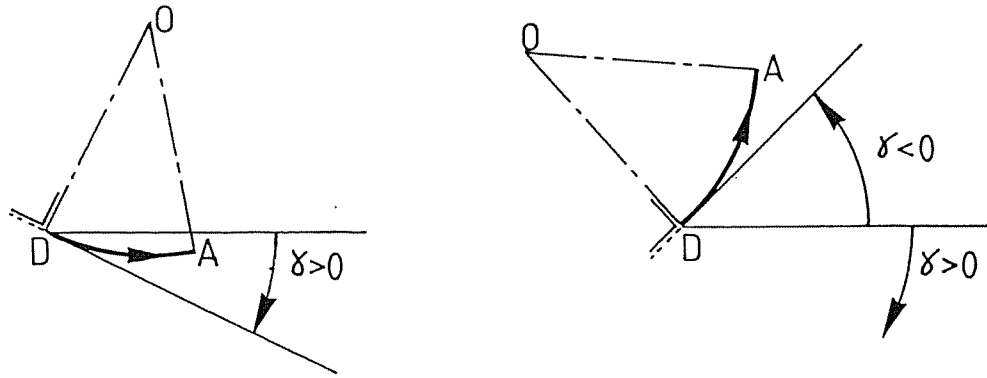


Figure 2.8.13

VIII.4.3.4 L'angle d'ouverture d'un panneau

On le notera φ_o et sera compté positivement dans le sens horlogique (figure 2.8.14).

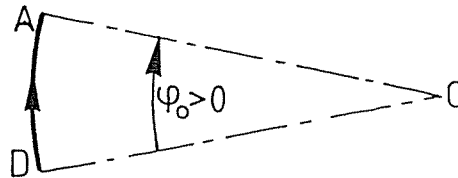


Figure 2.8.14

VIII.4.3.5. Noeud normal et noeud "borgne"

Un noeud normal est le point, ou plutôt la droite de jonction entre plusieurs panneaux. Il existe également des noeuds borgnes : ce sont des extrémités de panneaux isolés où il faudra imposer ces conditions d'appui. Sur la figure 2.8.15 les noeuds 1 et 6 sont borgnes tandis que les noeuds 2, 3, 4, 5, 7 et 8 sont "normaux".

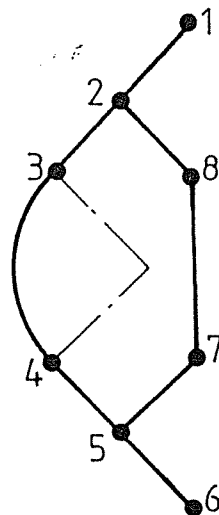


Figure 2.8.15

VIII.4.3.6 Panneau d'arrivée et panneau de départ

On appelle **panneau d'arrivée** en un noeud, un panneau dont l'extrémité A aboutit en ce noeud (exemple : panneau 1 de la figure 2.8.16).

On appelle **panneau de départ** en un noeud, un panneau dont l'extrémité D part de ce noeud (exemple : panneaux 2 et 3 de la figure 2.8.16).

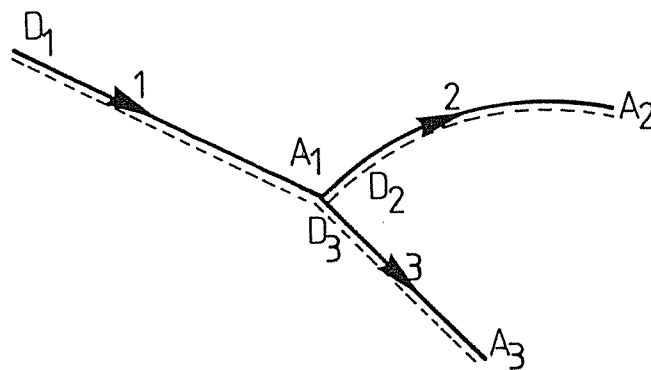


Figure 2.8.16

VIII.4.4 Définition d'un sens de parcours de l'assemblage

Pour faciliter la formation des équations d'équilibre et de compatibilité que nous établirons plus loin, on a intérêt à fournir adéquatement les données relatives à l'assemblage, d'où la nécessité de définir un sens de parcours. Celui-ci devra satisfaire à une exigence : en un noeud normal, il doit toujours y avoir au moins un panneau qui arrive et un panneau qui part.

Considérons l'assemblage représenté à la figure 2.8.17.

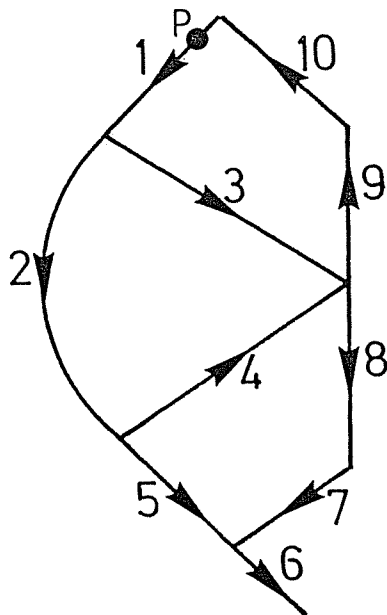


Figure 2.8.17

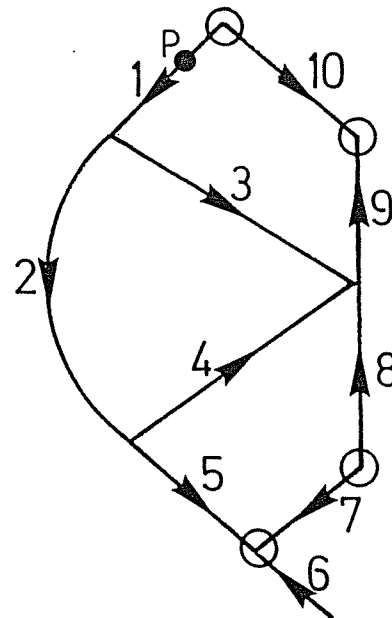


Figure 2.8.18

Pour remplir la condition imposée ci-dessus, on imagine que l'assemblage constitue un réseau hydraulique. En un point P quelconque de celui-ci on suppose l'existence d'une pompe qui injecte de l'eau dans un sens. Le trajet

suit par l'eau procure immédiatement un sens de parcours acceptable. Cette analogie hydraulique fournit, pour l'exemple considéré, l'écoulement représenté à la figure 2.8.17.

La figure 2.8.18 présente, quant à elle, un cas pathologique qui transgresse, aux noeuds pointés \odot la règle énoncée ci-dessus.

VIII.4.5. CHANGEMENT DE REPERE

VIII.4.5.1. Projections

Pour faciliter par la suite l'écriture des équations de compatibilité et d'équilibre, il est nécessaire d'effectuer un changement de repère. On possède pour chaque panneau les éléments de réduction et les déplacements. Ces grandeurs sont exprimées dans le repère lié au panneau (figure 2.8.20). Nous allons les projeter dans un même repère général, panneau où φ_0 est négatif (figure 2.8.19).

Il faut cependant remarquer que seuls v , w , R_φ et N_φ sont influencés par cette projection, les autres grandeurs étant indépendantes du repère choisi.

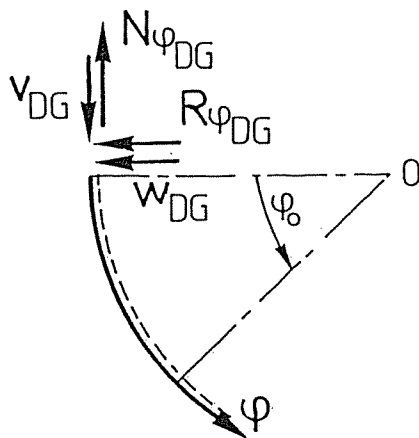


Figure 2.8.19

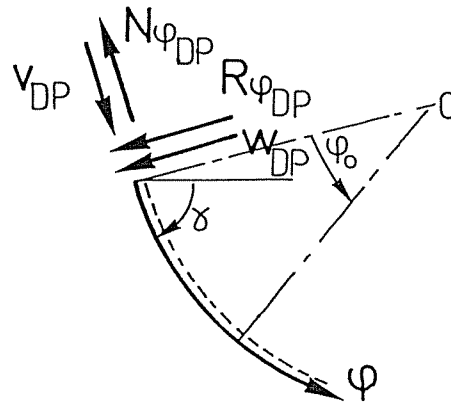


Figure 2.8.20

De plus le changement de repère est différent selon qu'on considère φ_0 positif ou négatif. Prenons le cas d'un panneau quelconque où φ_0 est négatif (le cas de φ_0 positif s'en déduit directement).

En considérant les figures 2.8.19 et 2.8.20, on aboutit aux relations suivantes entre les grandeurs de départ du panneau :

$$\begin{aligned}
 N_{\varphi DG} &= + N_{\varphi DP} \sin \gamma - R_{\varphi DP} \cos \gamma \\
 R_{\varphi DG} &= + N_{\varphi DP} \cos \gamma + R_{\varphi DP} \sin \gamma \\
 W_{DG} &= + W_{DP} \sin \gamma - V_{DP} \cos \gamma \\
 V_{DG} &= + W_{DP} \sin \gamma + V_{DP} \cos \gamma
 \end{aligned}
 \tag{2.8.19.a à d}$$

On obtient identiquement les mêmes relations entre les grandeurs d'arrivée du panneau :

$$\begin{aligned}
N_{\varphi AG} &= + N_{\varphi AP} \sin \gamma - R_{\varphi AP} \cos \gamma \\
R_{\varphi AG} &= + N_{\varphi AP} \cos \gamma + R_{\varphi AP} \sin \gamma \\
W_{AG} &= + W_{AP} \sin \gamma - V_{AP} \cos \gamma \\
U_{AG} &= + V_{AP} \sin \gamma + W_{AP} \cos \gamma
\end{aligned}
\tag{2.8.20.a à d}$$

Développons par exemple l'équation (2.8.19.a)

$$\begin{aligned}
N_{\varphi DG} &= N_{\varphi DP} \sin \gamma - R_{\varphi DP} \cos \gamma \\
N_{\varphi DG} &= (N_{\varphi DP_0} \sin \gamma - R_{\varphi DP_0} \cos \gamma) + (N_{\varphi DP_1} \sin \gamma - R_{\varphi DP_1} \cos \gamma) \alpha \\
&\quad + \dots + (N_{\varphi DP_8} \sin \gamma - R_{\varphi DP_8} \cos \gamma) \cdot \xi
\end{aligned}
\tag{2.8.19.a}$$

En posant :

$$\begin{aligned}
N_{\varphi DG_0} &= N_{\varphi DP_0} \sin \gamma - R_{\varphi DP_0} \cos \gamma \\
N_{\varphi DG_1} &= N_{\varphi DP_1} \sin \gamma - R_{\varphi DP_1} \cos \gamma \\
&\cdot \\
&\cdot \\
N_{\varphi DG_8} &= N_{\varphi DP_8} \sin \gamma - R_{\varphi DP_8} \cos \gamma
\end{aligned}
\tag{2.8.21.a à i}$$

On obtient :

$$N_{\varphi DG} = N_{\varphi DG_0} + \alpha N_{\varphi DG_1} + \beta N_{\varphi DG_2} + \dots + \xi N_{\varphi DG_8}
\tag{2.8.22}$$

Cette expression (2.8.22) est semblable à l'expression (2.8.19).

Toutes les grandeurs, projetées ou non projetées conserveront donc la même forme.

Remarque : Pour les déplacements et les éléments de réduction se rapportant à un noeud borgne, on ne peut effectuer le changement de repère.

L'exemple suivant nous aidera à justifier cette affirmation. Considérons l'assemblage de la figure 2.8.21.

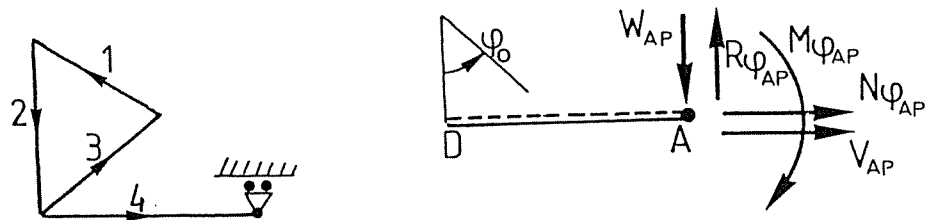


Figure 2.8.21

Le panneau n° 4 étant simplement appuyé à son extrémité A, les conditions d'appui sont les suivantes :

$$U_{AP} = 0, \quad W_{AP} = 0, \quad N_{\varphi AP} = 0, \quad M_{\varphi AP} = 0$$

Si on effectue le changement de repère (2.8.20), on a :

$$\begin{aligned} U_{AG} &= + U_{AP} & N_{\varphi AG} &= - R_{\varphi AP} \\ W_{AG} &= - V_{AP} & M_{\varphi AG} &= M_{\varphi AP} \end{aligned}$$

Les conditions d'appui exprimées au niveau de la matrice de rangement portent sur les termes ayant subi le changement de repère.

On connaît donc :

$$W_{AG} = 0, \quad U_{AG} = 0, \quad N_{\varphi AG} = 0, \quad M_{\varphi AG} = 0$$

or si $N_{\varphi AG} = 0$ on a $R_{\varphi AP} = 0$ et

cela représente une condition d'appui totalement fausse.

VIII.4.6. Formation des équations d'équilibre et de compatibilité

VIII.4.6.1.

Nous allons d'abord établir les équations relatives à la jonction de 2 panneaux.

Si on respecte la règle du sens de parcours énoncée au paragraphe VIII.4.4., les 2 panneaux se suivent. De plus, suite au changement de repère effectué, ils sont tous les deux du même type (figure 2.8.19).

Donc, la jonction étudiée sera celle représentée à la figure 2.8.22.

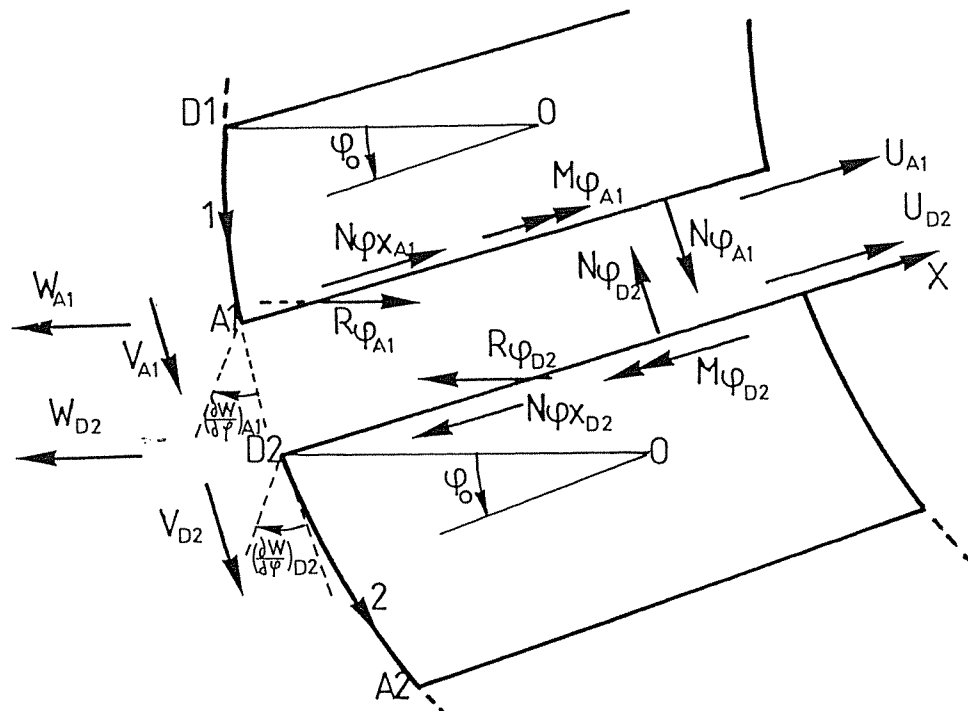


Figure 2.8.22

Les équations d'équilibre de ce noeud sont :

$$\begin{aligned}
 M_{\varphi A_1} - M_{\varphi D_2} &= 0 \\
 N_{\varphi A_1} - M_{\varphi D_2} &= 0 \\
 N_{\varphi x A_1} - N_{\varphi x D_2} &= 0 \\
 R_{\varphi A_1} - R_{\varphi D_2} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.8.23.a à d}$$

Les équations de compatibilité sont :

$$w_{A_1} = w_{D_2}, \quad v_{A_1} = v_{D_2}, \quad u_{A_1} = u_{D_2}, \quad \left(\frac{dw}{d\varphi}\right)_{A_1} = \left(\frac{dw}{d\varphi}\right)_{D_2}
 \tag{2.8.24.a à d}$$

VIII.4.6.2.

Ajoutons un panneau supplémentaire à l'extrémité du premier panneau (figure 2.8.23).

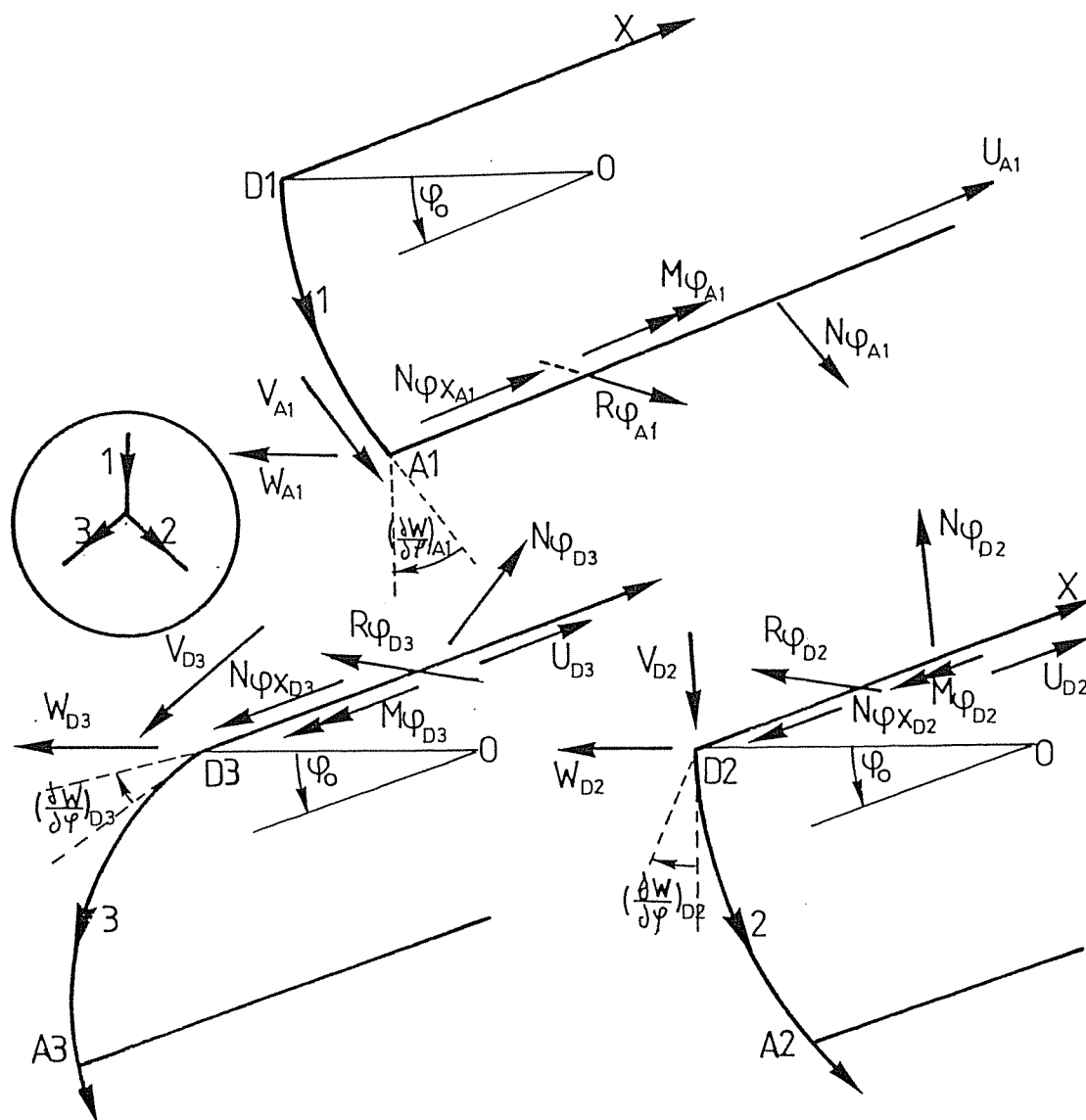


Figure 2.8.23

Les équations d'équilibre deviennent :

$$M_{\varphi A_1} - M_{\varphi D_2} - M_{\varphi D_3} = 0$$

$$N_{\varphi A_1} - N_{\varphi D_2} - N_{\varphi D_3} = 0$$

$$N_{\varphi x A_1} - N_{\varphi x D_2} - N_{\varphi x D_3} = 0$$

$$R_{\varphi A_1} - R_{\varphi D_2} - R_{\varphi D_3} = 0$$

Les équations de compatibilité sont :

$$w_{A_1} = w_{D_2} = w_{D_3}$$

$$v_{A_1} = v_{D_2} = v_{D_3}$$

$$u_{A_1} = u_{D_2} = u_{D_3}$$

$$\left(\frac{dw}{d\varphi}\right)_{A_1} = \left(\frac{dw}{d\varphi}\right)_{D_2} = \left(\frac{dw}{d\varphi}\right)_{D_3} \quad (2.8.26 .a \text{ à } h)$$

VIII.4.6.3.

Si par contre au noeud de la figure 2.8.22 on ajoute un panneau arri-
vant, on obtient la figure 2.8.24.

Dès lors les équations d'équilibre s'écrivent comme suit :

$$M_{\varphi A_1} + M_{\varphi A_3} - M_{\varphi D_2} = 0$$

$$N_{\varphi A_1} + N_{\varphi A_3} - N_{\varphi D_2} = 0$$

$$N_{\varphi x A_1} + N_{\varphi x A_3} - N_{\varphi x D_2} = 0$$

$$R_{\varphi A_1} + R_{\varphi A_3} - R_{\varphi D_2} = 0 \quad (2.8.27 .a \text{ à } d)$$

Les équations de compatibilité deviennent :

$$w_{A_1} = w_{A_3} = w_{D_2}$$

$$v_{A_1} = v_{A_3} = v_{D_2}$$

$$u_{A_1} = u_{A_3} = u_{D_2}$$

$$\left(\frac{dw}{d\varphi}\right)_{A_1} = \left(\frac{dw}{d\varphi}\right)_{A_3} = \left(\frac{dw}{d\varphi}\right)_{D_2} \quad (2.8.28 .a \text{ à } h)$$

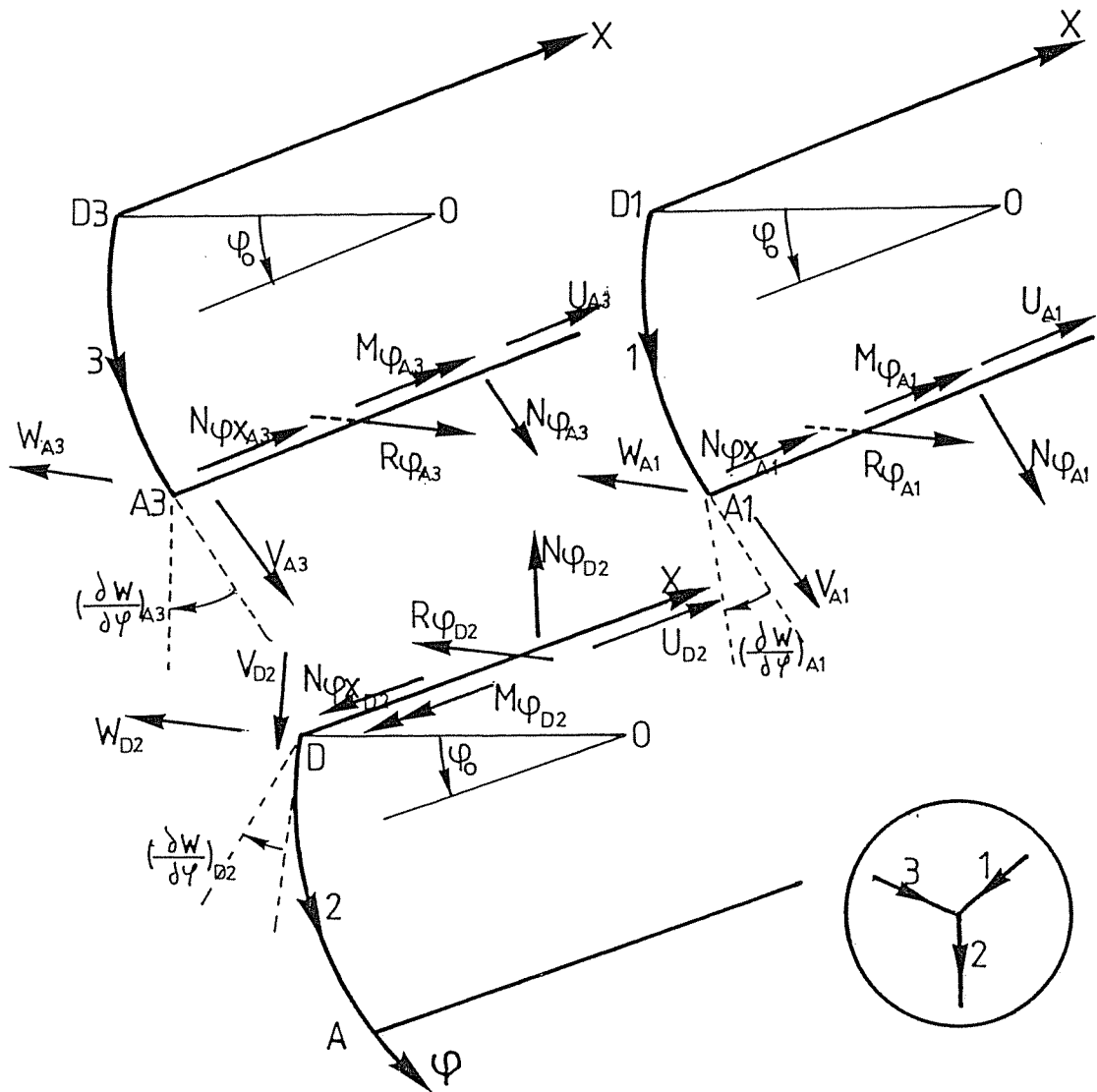


Figure 2.8.24

VIII.4.6.4. Conclusion

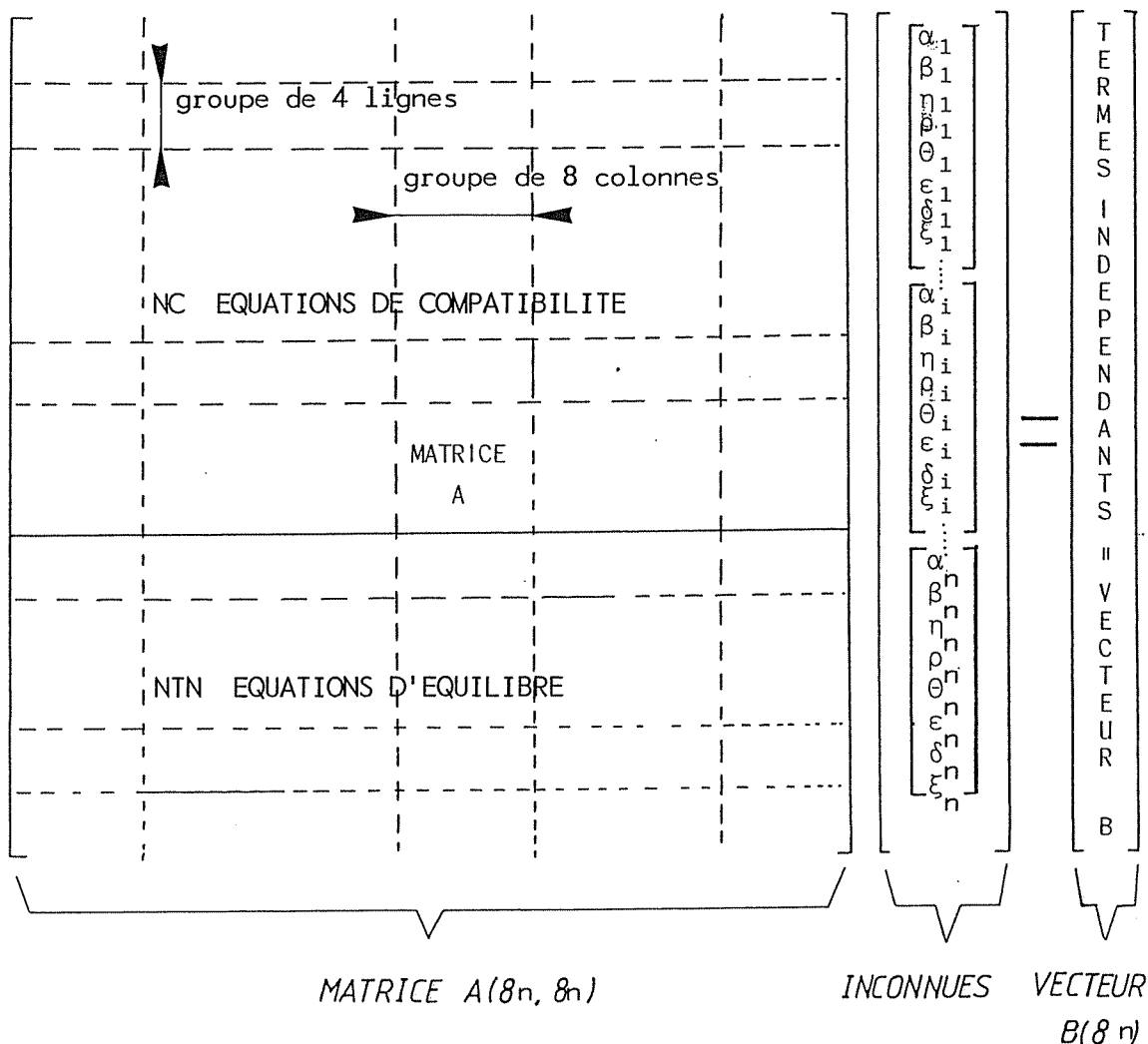
On note donc le caractère systématique et répétitif qui existe dans la formulation des équations d'équilibre et de compatibilité. Ces propriétés sont particulièrement intéressantes pour l'élaboration d'un algorithme aussi simple que possible.

VIII.4.7 Rangement des coefficients dans la matrice A de manière à former le système de 8 N équations à 8 N inconnues

Le système se présente de la manière suivante :

La disposition des inconnues α , β , ..., ξ conduit obligatoirement au positionnement dans les colonnes numérotées de $8(i-1) + 1$ à $8i$ des coefficients E_1, \dots, E_8 relatifs au panneau I. De là découle un premier découpage vertical de la matrice A en bande de 8 colonnes.

Lors de l'équilibre en un noeud, les conditions d'appui aux bords ainsi que la compatibilité des déplacements s'expriment par 4 équations. Dès lors



on découpe également la matrice A en bandes horizontales de 4 lignes. Les NC (NC = nombre d'équation de compatibilité) premières bandes seront réservées aux équations de compatibilité et les NTN (NTN = 4 fois le nombre de noeud) dernières aux équations d'équilibres et aux conditions d'appui sur les bords.

VIII.5. EXPRESSIONS ANALYTIQUES DES DEPLACEMENTS ET DES ELEMENTS DE REDUCTION VIA LES DERIVEES EN u, v, w.

Nous déterminerons tout d'abord les expressions analytiques des déplacements u, v et w des coques réelles. Celle-ci s'obtiendront par superposition des expressions des déplacements dans le cylindre complet étudié au chapitre VIII; ainsi, pour w, on aura :

$$\begin{aligned}
 w(\varphi) = & w_{p.H}(\varphi) + \eta w \text{ (fig. 2.7.10)}(\varphi) + \rho w \text{ (fig. 2.7.11)}(\varphi) \\
 & + \beta w \text{ (fig. 2.7.12)}(\varphi) + \alpha w \text{ (fig. 2.7.13)}(\varphi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta w \text{ (fig. 2.7.14) } (\varphi) + \xi w \text{ (fig. 2.7.15) } (\varphi) \\
& + \varepsilon w \text{ (fig. 2.7.16) } (\varphi) + \theta w \text{ (fig. 2.7.17) } (\varphi) \quad (2.8.17.c)
\end{aligned}$$

Après avoir déterminé les expressions analytiques de $u(\varphi)$, $v(\varphi)$, $w(\varphi)$, on peut alors, par dérivations successives, calculer les fonctions $u^o(\varphi)$, $v^o(\varphi)$, $w^o(\varphi)$, puis $u^{oo}(\varphi)$, $v^{oo}(\varphi)$, $w^{oo}(\varphi)$ et enfin $w^{ooo}(\varphi)$.

En dernier lieu il suffira de combiner linéairement les expressions ci-dessus pour obtenir les éléments de réduction $N_\varphi, \dots, R_\varphi$.

On appliquera pour cela les formules développées en (2.3.3.a à l).

Les expressions de u , v , w s'obtiennent ainsi sans difficulté, il en est de même de leurs dérivées v^o , v^{oo} , w^o , w^{oo} , w^{ooo} ; par contre la dérivation de la fonction u pose quelques problèmes.

La fonction u est une fonction continue mais sa dérivée première u^o ne l'est pas.

En effet, au droit des traverses on a $u^o(k-\varepsilon) \neq u^o(k+\varepsilon)$ si ε tend vers 0.

Cela pose le problème de la détermination de u^{oo} qui est aussi nécessaire.

Analytiquement, cette fonction pourra se mettre sous la forme (en employant les notations du calcul symbolique) :

$$\begin{aligned}
u^o(\varphi) = & [1-H(\varphi-K_1)] u^o_1(\varphi) + [H(\varphi-K_1)-H(\varphi-K_2)] u^o_2(\varphi) + \dots \\
& + [H(\varphi-K_{m-1}) - H(\varphi-K_m)] u^o_m(\varphi) + H(\varphi-K_m) u^o_{m+1}(\varphi) \quad (2.8.29)
\end{aligned}$$

où $u^o_1(\varphi)$, $u^o_2(\varphi)$, $u^o_3(\varphi)$... et $u^o_{m+1}(\varphi)$ représentent les expressions analytiques de $u^o(\varphi)$ dans les plages 1, 2, 3, ... $m+1$ de la coque comportant m traverses.

En dérivant l'expression ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned}
u^{oo}(\varphi) = & [1-H(\varphi-K_1)] u^{oo}_1(\varphi) + u^o_1(\varphi) \cdot [-H^o(\varphi-K_1)] \\
& + [H(\varphi-K_1)-H(\varphi-K_2)] u^{oo}_2(\varphi) + u^o_2(\varphi) [H^o(\varphi-K_1) - H^o(\varphi-K_2)] + \dots \\
& + [H(\varphi-K_{m-1})-H(\varphi-K_m)] u^{oo}_m(\varphi) + u^o_m(\varphi) [H^o(\varphi-K_{m-1})-H^o(\varphi-K_m)] \\
& + H(\varphi-K_m) u^{oo}_{m+1}(\varphi) + u^o_{m+1}(\varphi) \cdot H^o(\varphi-K_m) \quad (2.8.30)
\end{aligned}$$

Si on se rappelle que $H^o(\varphi) = \delta(\varphi)$, on se rend compte que les termes de rang impair dans l'expression ci-dessus représentent la partie continue de l'expression $u^{oo}(\varphi)$, tandis que les termes de rang pair représentent des termes concentrés. Après groupements, ceux-ci peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
u^{oo}_{conc} = & \delta(\varphi-K_1)[u^o_2(K_1)-u^o_1(K_1)] + \delta(\varphi-K_2)[u^o_3(K_2)-u^o_2(K_2)] + \dots \\
& + \delta(\varphi-K_m)[u^o_{m+1}(K_m)-u^o_m(K_m)],
\end{aligned}$$

ou encore

$$u^{\circ\circ}_{\text{conc}} = \delta(\varphi - K_1) [u^\circ(K_1 + \epsilon) - u^\circ(K_1 - \epsilon)] + \delta(\varphi - K_2) [u^\circ(K_2 + \epsilon) - u^\circ(K_2 - \epsilon)] + \dots \\ + \delta(\varphi - K_m) [u^\circ(K_m + \epsilon) - u^\circ(K_m - \epsilon)] \quad (2.8.31)$$

Expression des termes concentrés

Les termes concentrés sont ceux qui, dans les formules (2.3.3.a à l) sont multipliés par la fonction $f(\varphi)$, et dans lesquels les coefficients relatifs aux traverses sont multipliés par d_x .

Dans ces expressions, les valeurs des u , v , w et de leurs dérivées sont celles correspondant à l'abscisse de la traverse envisagée. Les formules obtenues seront donc du type :

$$N_{x_{\text{conc}}} (K_i) = -\lambda \cdot \Omega_x^t d_x u(K_i) + \lambda^2 \cdot H_x^t d_x w(K_i) \quad (2.8.32)$$

Remarques : a. Le terme concentré de la fonction Q_φ a même expression que la ligne de moments U_{ox} , qui fut négligée dans le calcul. Nous en ferons de même ici, et admettrons que l'effort tranchant Q_φ ne comprend pas de termes concentrés. Il en sera de même pour R_φ .

b. L'expression de Q_x comprendra, en plus des termes concentrés $f(\varphi) [R_x^t w^{\circ\circ\circ} - H_x^t u^{\circ\circ}]$, un terme supplémentaire égal à $L_\varphi^r u^{\circ\circ}_{\text{conc}}$ (2.3.3.j, 2.8.30 et 31)

Un terme supplémentaire, $(L_x^r + L_\varphi^r) \cdot u^{\circ\circ}_{\text{conc}}$ s'ajoutera également à R_x .

VIII.6. CALCUL DES CONTRAINTES

VIII.6.1. Contraintes normales σ_x ,

Les expressions générales des contraintes σ_x , σ_φ sont données par les formules

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left[u' + \frac{\nu}{q} (v^\circ + w) - z \left(w'' + \frac{\nu}{2} w^{\circ\circ} \right) \right] \quad (2.8.33.a)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2} \left[(v^\circ + w) + \nu u' - z \left(\frac{w^{\circ\circ}}{2} + \nu w'' \right) \right] \quad (2.8.33.b)$$

VIII.6.1.1

Dans les éléments raidisseurs, quels qu'ils soient, les termes en ν sont sans signification et les contraintes s'y expriment par :

$$\sigma_x = E(u' - zw'') \quad (2.8.34.a)$$

$$\sigma_\varphi = E \left[\frac{1}{q} (v^\circ + w) - z \frac{w^{\circ\circ}}{2} \right] \quad (2.8.34.b)$$

Nous voyons donc que, aux points de jonction des âmes des éléments raidisseurs avec le bordage, il y a théoriquement une discontinuité dans les contraintes normales, à cause du passage de l'état de contrainte de plaque à l'état de contrainte de poutre. Autrement dit, si on représente le diagramme des contraintes normales dans une section quelconque, on obtiendra le diagramme de la figure 2.8.25. Cette discontinuité n'est pas surprenante car c'est en fait ϵ qui est le même à la jonction.

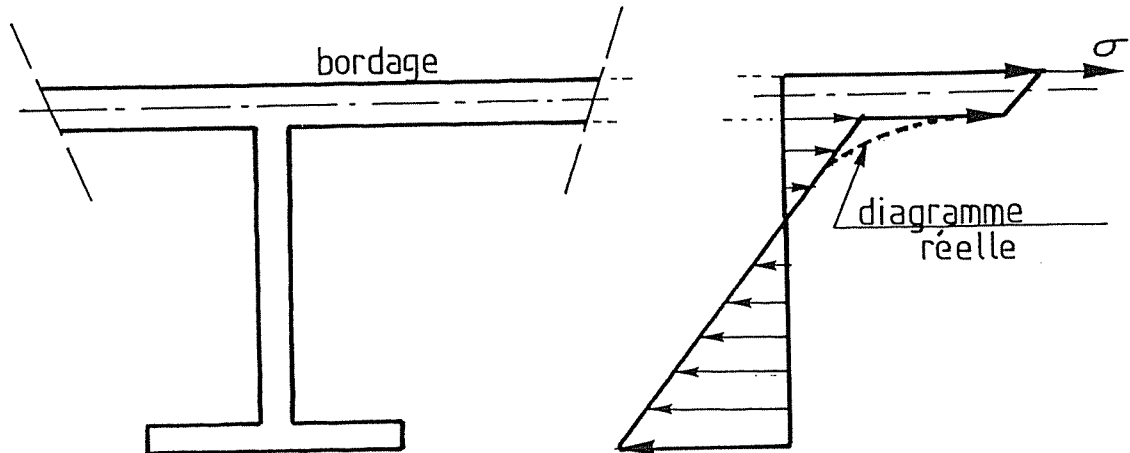


Figure 2.8.25

Le calcul de ces contraintes s'effectue à l'aide des expressions des dérivées de u , v et w .

VIII.6.1.2. Dans le bordage les contraintes sont données pour $z=0$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (u' + \frac{\nu}{q} (v^0 + w)) \quad (2.8.35.a)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2} (\frac{1}{q} (v^0 + w) + \nu u') \quad (2.8.35.b)$$

VIII.6.1.3.

Avec les expressions (2.8.34) et (2.8.35) on peut connaître les contraintes σ_x et σ_φ en tous points de la structure.

Abordons à présent la détermination des contraintes tangentielles.

VIII.6.2. Contraintes tangentielles $\tau_{x\varphi}$, τ_{xz} , $\tau_{\varphi z}$

VIII.6.2.1. Dans le bordage $\tau_{x\varphi}$, $\tau_{\varphi x}$

Dans le bordage, $\tau_{x\varphi}$, $\tau_{\varphi x}$ seront calculés par :

$$\tau_{x\varphi} = G(\frac{u^0}{q} + v' - z(\frac{2}{q} w^0')) \quad (2.8.36)$$

A mi-épaisseur ($z=0$), c'est-à-dire où les σ_x , σ_φ ont été calculés, on a :

$$\tau_{x\varphi} = G(\frac{u^0}{q} + v') \quad (2.8.37)$$

VIII.6.2.2. Dans les raidisseurs et dans les traverses

Nous parlerons dans la suite des traverses mais tout ce qui sera dit sera aussi valable pour les raidisseurs. Il n'y a en fait à ce niveau plus aucune différence entre traverses et raidisseurs.

VIII.6.2.2.1. Effet de R_x

Il s'agit de déterminer les contraintes tangentielles engendrées dans l'âme et les semelles des nervures par les efforts R_x .

On calculera τ en se servant de la théorie générale de l'effort rasant.

Etudions par exemple l'effet de Q_x sur les traverses.

Dans une traverse, considérons deux sections S et S' infiniment voisines et distantes de dx (figure 2.8.26).

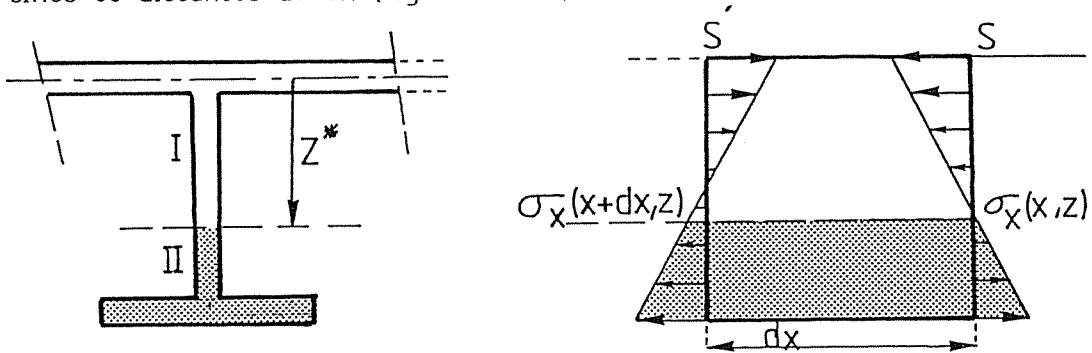


Figure 2.8.26

Découpons cette tranche en deux morceaux I et II, par un plan parallèle au bordage, d'abscisse z^* quelconque.

La résultante des efforts élémentaires $\sigma d\Omega$ sur la face verticale droite du morceau II est une force :

$$N = \int_{\Omega_{II}} \sigma_x(x, z) d\Omega$$

Dans la section $(x+dx)$ limitant le tronçon à gauche, les tensions valent

$$\sigma_x(x+dx, z) = \sigma_x(x, z) + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

La résultante des efforts élémentaires sur la face verticale gauche du morceau II vaut :

$$N + dN = \int_{\Omega_{II}} \sigma_x(x+dx, z) d\Omega = \int_{\Omega_{II}} \left(\sigma_x(x, z) + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) d\Omega$$

et la différence de ces deux efforts est une force

$$dN = \int_{\Omega_{II}} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx d\Omega$$

Etant donné l'expression de σ_x :

$$\sigma_x = E(u' - z w''), \text{ on a : } \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = E(u'' - z w''')$$

et

$$dN = E \int_{\Omega_{II}} [(u'' - z w''')] dx d\Omega$$

ou encore :

$$dN = E(u'' \omega_{II} - w''' h_{II}) dx$$

où ω_{II} représente l'aire de la section Ω_{II} et h_{II} son moment statique par rapport au feuillet moyen du bordage.

L'équilibre du morceau II doit être assuré par un effort dR appliqué au niveau z^* sur la surface de séparation des morceaux I et II.

$$dR = E dx (u'' \omega_{II} - w''' h_{II})$$

Cet effort engendre des contraintes tangentielles uniformément réparties égales à :

$$\tau = \frac{dR}{e dx}$$

soit

$$\tau_{xz} = \frac{E}{e} (u'' \omega_{II} - w''' h_{II}) \quad (2.8.38)$$

dans l'âme.

On a aussi :

$$\tau_{x\varphi} = \frac{E}{e} (u'' \omega_{II} - w''' h_{II}) \quad (2.8.39)$$

dans les semelles.

Remarques : a. Il est bien connu que τ_{xz} est maximum au niveau de l'axe neutre, là où σ_x est nul.
Déterminons la position de l'axe neutre, c'est-à-dire la valeur de z^* pour laquelle $\sigma_x = 0$.

$$u' - z^* w'' = 0 \quad \text{d'où} \quad z^* = \frac{u'}{w''} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{u}{w}$$

On connaît ainsi en tous points (x, φ) la position de l'axe neutre,

$$z^* = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{u(x, \varphi)}{w(x, \varphi)}$$

b. Dans les structures composées de plusieurs panneaux, il est fréquent que l'axe neutre ne coupe en aucun point certains panneaux, ainsi en est-il des panneaux 1 et 3 de la figure 2.8.27.

Dans ce cas pour ces panneaux, calculer une tension en $z = z^*$ perd tout sens physique.

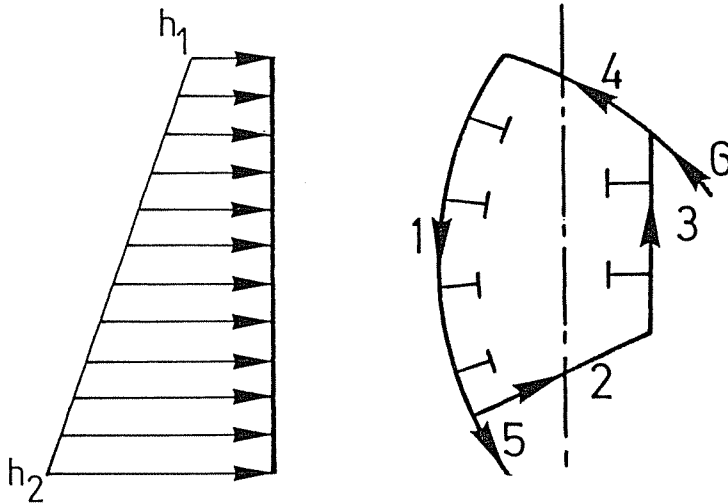


Figure 2.8.27

VIII.6.2.2.2. Effet de $N_{x\varphi}$

La partie de $N_{x\varphi}$ reprise par les semelles des traverses est exprimée

$$\text{par } N_{x\varphi, \text{sem}} = f(\varphi) S_x \left(v' + \frac{u^0}{q} \right)$$

La contrainte $\tau_{x\varphi}$ s'obtient par la formule classique :

$$\tau_{x\varphi} = \frac{N_{x\varphi, \text{sem}}}{\Omega_{\text{sem}}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{G\Omega'}{\Omega_{\text{sem}}} x \cdot \frac{3}{2} \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) = G \cdot 1,25 \cdot \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) \quad (2.8.40)$$

VIII.6.2.2.3. Effet de $M_{x\varphi}$

La partie de $M_{x\varphi}$ reprise par les traverses est exprimée par :

$$M_{x\varphi, \text{traverse}} = f(\varphi) \left(T_x w^{0'} + L_x \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) \right)$$

Cependant, le terme $f(\varphi) L_x \left(v' + \frac{u^0}{q} \right)$ représente le moment, par rapport au feuillet moyen du bordage, des tensions $\tau_{x\varphi}$ produites par l'effort $N_{x\varphi}$. Ce terme, représentant un effet global sur le bordage, ne doit donc pas être considéré lors du calcul des contraintes de torsion.

L'angle unitaire de torsion valant $\theta = \frac{w^{0'}}{q}$, on pourra calculer la contrainte tangentielle maximale dans la semelle par la formule :

$$\tau_{x\varphi} = G\theta b \quad \text{et} \quad \tau_{xz} = G\theta b (N/m^2) \quad (2.8.41)$$

b étant l'épaisseur de l'âme ou de la semelle à l'endroit considéré (figure 2.8.28).

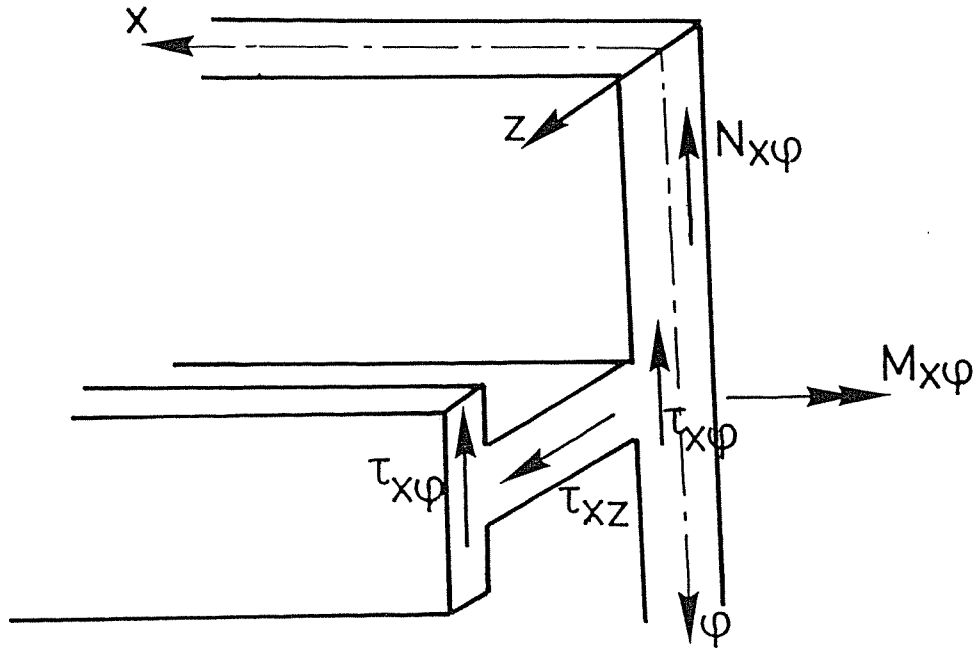


Figure 2.8.28

VIII.6.2.3. Combinaison des contraintes tangentielles

En remarquant que, quel que soit le signe des efforts $N_{x\varphi}$, $M_{x\varphi}$ et R_x , il existera toujours un point de la semelle où les contraintes calculées ci-dessus s'ajouteront (figure 2.8.29).

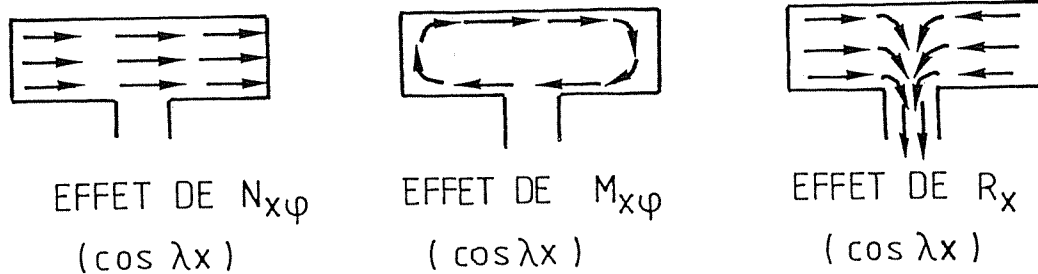


Figure 2.8.29

On constate que ces 3 fonctions $N_{x\varphi}$, $M_{x\varphi}$, R_x sont toutes des fonctions en $\cos \lambda x$ et par conséquent maximales aux appuis en $x=0$ et $x=L$ mais par contre nulles en $x = L/2$.

VIII.6.2.4 Contraintes dans les aiguilles

Il est possible de développer pour les aiguilles un raisonnement identique à celui qui vient de se terminer pour les traverses (VIII.6.2.2. et VIII.6.2.3.).

Nous allons le résumer comme suit :

Effet de R_φ

R_φ est une fonction en $\sin \lambda x$

$$\tau_{\varphi z} = \frac{E}{e} \left[(v^{\circ\circ\circ} + w^{\circ\circ}) \frac{\omega_{II}}{2} - \frac{w^{\circ\circ\circ}}{3} h_{II} \right] \quad (2.8.42)$$

$\tau_{\varphi z}$ est maximum en $z=z^*$.

$$\text{avec } z^* = \left(\frac{u^0 + w}{w^0 \sigma^0} \right) \cdot q$$

Effet de $N_{\varphi x}$

$N_{\varphi x}$ est une fonction en $\cos \lambda x$

$$N_{\varphi x} = f(x) \cdot S_{\varphi} \left(v' + \frac{u^0}{q} \right)$$

d'où

$$\tau_{\varphi x} = G \frac{\Omega'}{\Omega_{\text{sem}}} \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{3}{2} \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) = G \cdot 1.25 \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) \quad (2.8.43)$$

Cet effet n'existe qu'au niveau des semelles.

Effet de $M_{\varphi x}$

$M_{\varphi x}$ est une fonction en $\cos \lambda x$

$$\tau_{\varphi x} \text{ et } \tau_{\varphi z} = G \cdot \theta \cdot b \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{w^0}{q} \quad (2.8.44)$$

Combinaison des contraintes tangentielles

Il faut combiner les contraintes tangentielles dues à 3 effets pour en déduire la valeur maximale.

On constate l'existence de 2 extremums.

En effet $M_{\varphi x}$ et $N_{\varphi x}$ sont des fonctions en $\cos \lambda x$, d'où leur effet maximum sera en $x=0$ et $x=L$.

Par contre R_{φ} varie selon la loi $\sin \lambda x$, d'où la présence d'un second maximum en $x=L/2$.

VIII.7. VERIFICATION

VIII.7.1. Introduction

Il est évident que la résolution d'un assemblage de coque par la méthode exposée aux chapitres précédents entraîne des calculs très compliqués et, par conséquent, multiplie d'autant les risques d'erreurs.

Il convient donc de procéder, aussi souvent qu'il est possible, à des vérifications, afin d'aborder chaque étape du calcul avec le maximum d'assurance quant à l'exactitude de ce qui précède.

A présent que la solution finale est obtenue, il importe de s'assurer de sa validité. Cette vérification serait absolument complète si, à partir des éléments de réduction, on vérifiait les six équations d'équilibre de l'ensemble de la coque sous l'action des forces extérieures. Néanmoins, les équations d'équilibre moment selon OX et $O\varphi$ (2.2.4.d et e) étant implicitement prises en compte puisque ayant été réinjectées dans les 3 équations de translation (2.2.4.a à c), on ne vérifiera que ces 3 dernières équations.

Soit O, X, φ, Z le trièdre local correspondant à un point de coordonnées (x, φ) et soit O, X^*, Y^*, Z^* le trièdre général pris comme référence pour

effectuer les projections (figure 2.8.30).

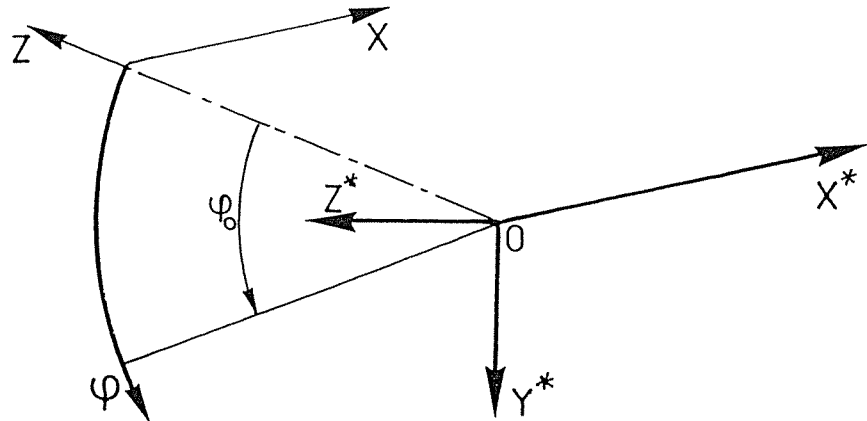


Figure 2.8.30

VIII.7.2. Vérification des équilibres de translation selon les axes OX^* , OY^* , OZ^*

Les efforts $N_{\varphi x_{conc}}$, dus à l'action des m traverses sur la coque, ne doivent pas être considérés dans la vérification des équations d'équilibre de translation. En effet, lors de la résolution, nous avons négligé l'effort $(Y_0 dx)$ exercé par les traverses parallèlement à $O\varphi$. Ce terme, égal à $Y_0 dx = S_x^{trav} (v'' + \frac{u^0}{q})$ provient, dans les équations d'équilibre de l'élément de coque $dx d\varphi$, du terme $N'_{x\varphi_{conc}}$. Sa suppression revient donc à supposer $N'_{x\varphi_{conc}} = 0$, ou encore $N_{x\varphi_{conc}} = 0$.

Le schéma de base pour effectuer les projections est (figure 2.8.31)

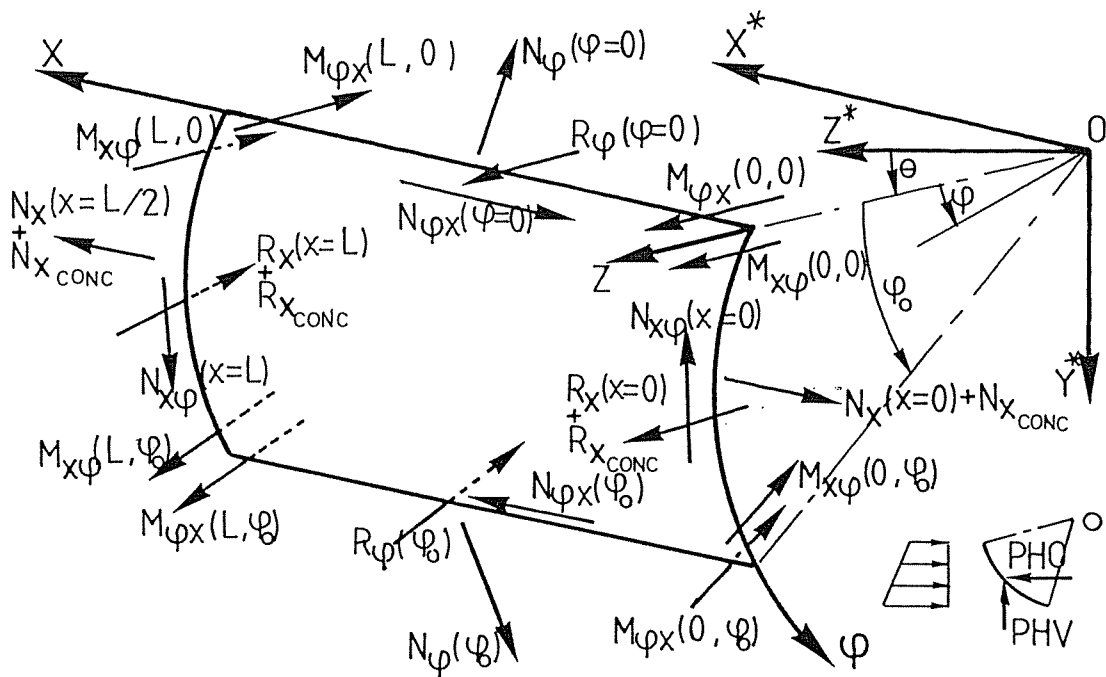


Figure 2.8.31

VIII.7.2.1. Equilibre selon l'axe OX*

Soit le sens positif de projection selon l'axe OX*.

Considérons la demi-coque comprise entre les plans de coordonnées $x=0$ et $x = L/2$. Elle est soumise aux forces reprises sur la figure 2.8.31, en remarquant que les forces extérieures sont nulles selon OX*. Au sujet de ces forces, il faut remarquer que :

- $N_x(x=0) = 0$ (fonction de $\sin \lambda x$)
- $N_{\varphi x}(\varphi=0) = N_{\varphi x}(x=0, \varphi=0) \cdot \cos \lambda x$
 $N_{\varphi x}(\varphi=\varphi_0) = N_{\varphi x}(x=0, \varphi=\varphi_0) \cdot \cos \lambda x$
- $N_x(x=L/2) = N_x(\varphi)$ car $\sin \lambda \frac{L}{2} = 1$

L'équation d'équilibre de la demi-coque s'écrit donc :

$$\int_0^{\varphi_0} N_x(\varphi) q d\varphi + \sum_{i=1}^m N_x \text{ conc}(\Lambda=K_i) + (N_{\varphi x}^{\varphi=\varphi_0} - N_{\varphi x}^{\varphi=0}) \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} \cos \lambda x dx = 0 \quad (2.8.45)$$

VIII.7.2.2. Equilibre vertical selon OY*

Sens positif de projection selon OY*.

Soit PHV, la projection verticale de la résultante de la charge extérieure.

$$\begin{aligned} & - \int_0^L (N_{\varphi}^{\varphi=0} \cos \theta - N_{\varphi}^{\varphi=\varphi_0} \cos(\theta+\varphi_0)) \sin \lambda x dx \\ & - \int_0^{\varphi_0} (N_{x\varphi}^{x=0} - N_{x\varphi}^{x=L}) q \cos(\theta+\varphi) d\varphi + \int_0^L (R_{\varphi}^{\varphi=0} \sin \theta - R_{\varphi}^{\varphi=\varphi_0} \sin(\theta+\varphi_0)) \sin \lambda x dx \\ & + \int_0^{\varphi_0} (R_x^{x=0} - R_x^{x=L}) \cdot q \sin(\theta+\varphi) d\varphi + 2 \sum_{x=0} R_x \text{ conc} \sin(\theta+\varphi) \\ & + 2 [(M_{\varphi x}^{\varphi=0} + M_{x\varphi}^{\varphi=0}) \sin \theta - (M_{x\varphi}^{\varphi=\varphi_0} + M_{\varphi x}^{\varphi=\varphi_0}) \sin(\theta+\varphi_0)] - PHV = 0 \end{aligned} \quad (2.8.46)$$

VIII.7.2.3. Equilibre horizontal selon OZ*

Sens positif de projection selon l'axe OZ*.

$$\begin{aligned} & \int_0^L [N_{\varphi}^{\varphi=0} \sin \theta - N_{\varphi}^{\varphi=\varphi_0} \sin(\theta+\varphi_0)] \sin \lambda x dx \\ & + \int_0^L [R_{\varphi}^{\varphi=0} \cos \theta - R_{\varphi}^{\varphi=\varphi_0} \cos(\theta+\varphi_0)] \sin \lambda x dx \\ & + \int_0^{\varphi_0} (N_{x\varphi}^{x=0} - N_{x\varphi}^{x=L}) q \sin(\theta+\varphi) d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\varphi_0} (R_x^{x=0} - R_x^{x=L}) q \cos(\theta + \varphi) d\varphi + 2 \sum_{x=0} R_x \cos(\theta + \varphi) \\
& + 2 [(M_{\varphi x}^{\varphi=0} + M_{x\varphi}^{\varphi=0}) \cos \theta - (M_{x\varphi}^{\varphi=\varphi_0} + M_{\varphi x}^{\varphi=\varphi_0}) \cos(\theta + \varphi_0)] - PHO = 0
\end{aligned}
\tag{2.8.47}$$

avec PHO la projection horizontale de la résultante de la charge extérieure.

CHAPITRE IX

PRINCIPE DU LOGICIEL DE BASE

Dans ce chapitre, nous expliquons l'organisation pratique du programme de base sans entrer dans les explications particulières des diverses sous-routines. Ce logiciel est relatif aux calculs des structures appuyées en $x=0$ et $x=L$, structures composées de coques cylindriques raidies par 3 lits de nervures (figure 2.3.1).

IX.1. ORGANIGRAMME DU LOGICIEL DE BASE

L'organigramme est présenté à la figure 2.9.1.

IX.2. DESCRIPTION DES DIVERS BLOCS DE L'ORGANIGRAMME

IX.2.1. Le bloc d'entrée

On débute par la lecture des données suivie du calcul des caractéristiques mécaniques des diverses coques (§ II.4., partie II). Ensuite, vient le calcul des inerties, centres de gravité et des coordonnées des extrémités des panneaux, ces calculs étant réalisés dans les repères locaux des coques et dans le repère général de la structure.

IX.2.2. Le bloc de base

Pour chaque terme de la série de Fourier ainsi que pour chaque panneau, on détermine les expressions analytiques de U , V , W et des efforts N_x , N_φ , M_x , M_φ , ... relatives aux coques cylindriques raidies, complètes ($\varphi=\varphi_0$) et bi-appuyées ($x=0$ et $x=L$) pour les 9 cas de charge (figure 2.6.2.).

IX.2.3. Le bloc de résolution

On écrit le système d'équations exprimant les conditions aux limites de chaque panneau en $\varphi=0$ et $\varphi=\varphi_0$ (§ VIII.4 - part II). Ces conditions sont soit du type équilibre de forces, soit du type compatibilité des déplacements (§ VIII.4.6 - part II). On résout ce système pour déterminer les inconnues hyperstatiques; à savoir : les multiplicateurs des forces linéaires de base à appliquer aux extrémités de chaque coque ($\varphi=0$ et $\varphi=\varphi_0$).

LE LOGICIEL DE BASE.

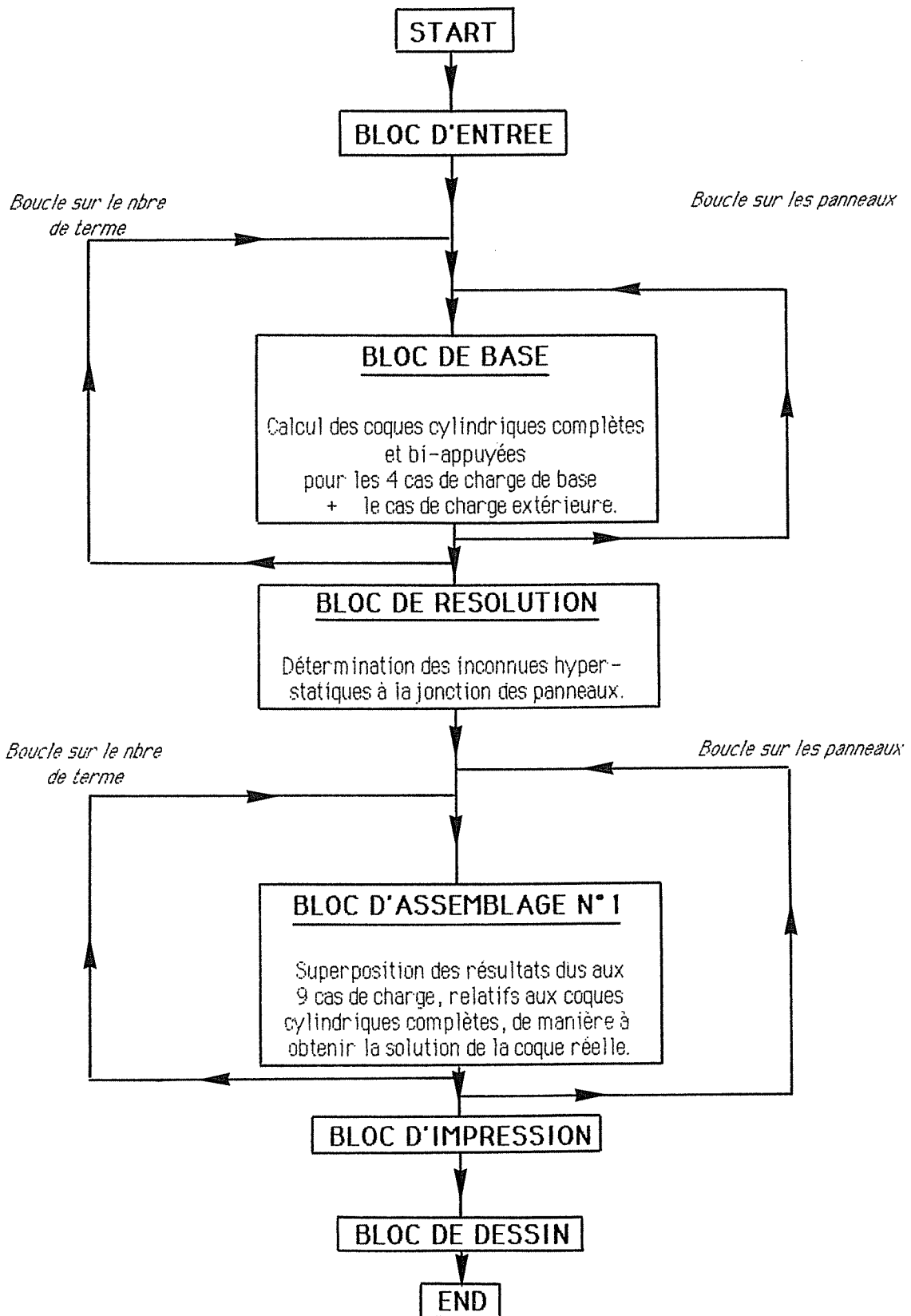


Figure 2.9.1.

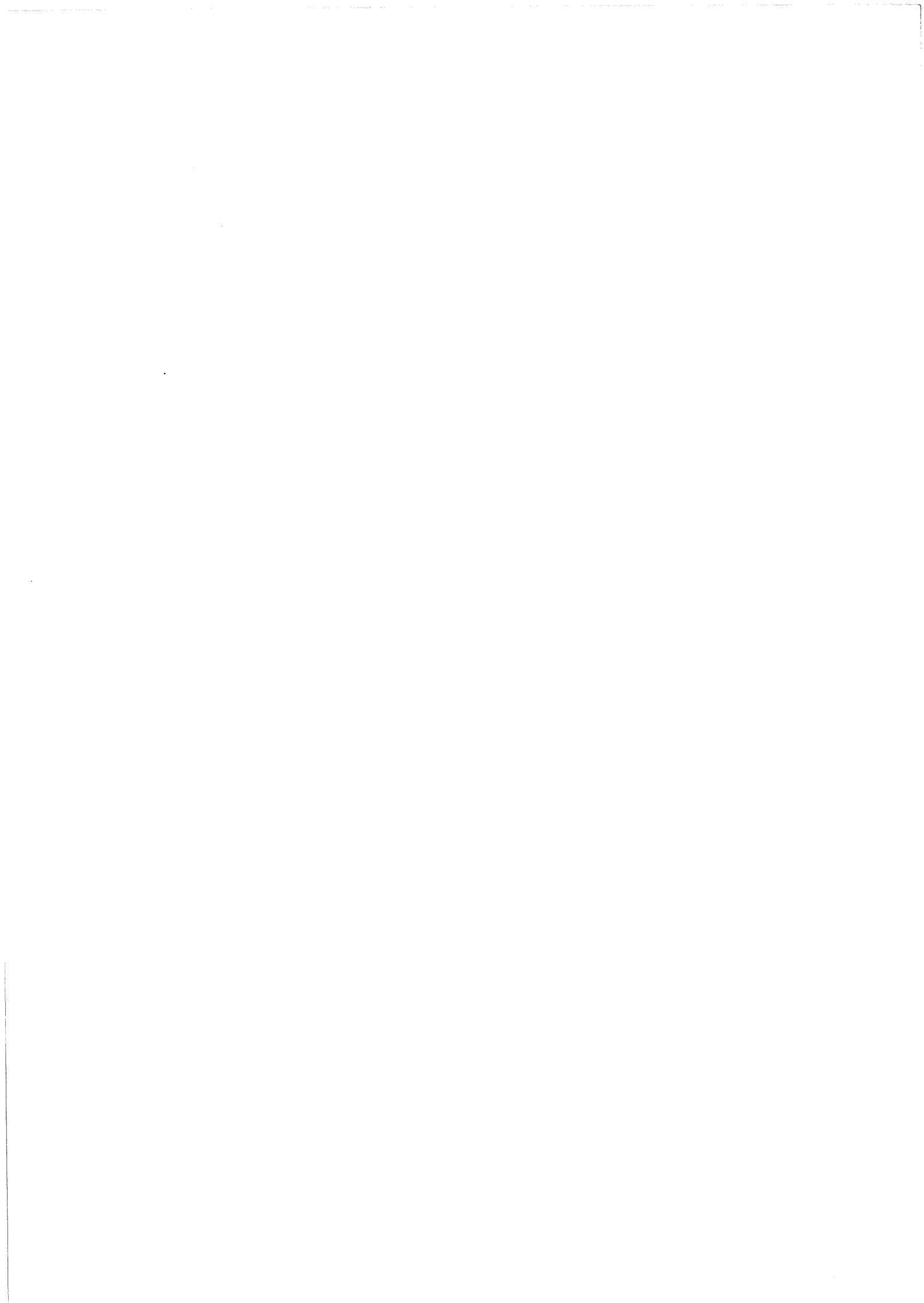
IX. 2.4. Le bloc d'assemblage n° 1

On superpose au cylindre complet soumis à la sollicitation extérieure, les 8 cas de charge unitaire auxquels on applique les coefficients multiplicateurs obtenus dans le bloc de résolution.

IX.2.5. Les blocs d'impression et de dessin

Le bloc de dessin n'est en réalité qu'un sauvetage des résultats tels qu'ils sont imprimés à l'aide du bloc d'impression.

Ces résultats sont ensuite relus et reconditionnés en vue des tracés de déformées et d'efforts. Nous avons utilisé, pour réaliser ces graphiques, les logiciels SAS [S.6] et DI 3000 [D.10].



TROISIEME PARTIE

EXTENSION DU LOGICIEL DES BORDAGES RAIDIS A DES STRUCTURES
AYANT DES CONDITIONS D'APPUI PARTICULIERES



CHAPITRE I

INTRODUCTION

Nous venons de développer le logiciel de base relatif aux structures composées de bordages raidis courbes et/ou plans. A ce stade, le logiciel n'est encore applicable qu'aux structures ayant des conditions d'appui simples ($w = v = M_x = N_x = 0$).

C'est dans cette troisième partie, que nous allons étendre le champ d'application du logiciel. En effet, une large gamme de conditions aux limites seront maintenant acceptées; pour autant qu'elles soient les mêmes des deux côtés de la structure. Ainsi, le problème des appuis élastiques que sont les bras d'une vanne segment, pourra-t-il être traité sans difficulté.

Dans le chapitre II nous expliquerons, via un exemple concret, les fondements et les bases des développements utilisés pour tenir compte d'efforts N_{bord} (N_b) et de moments M_{bord} (M_b) appliqués aux extrémités.

Les développements analytiques font l'objet du chapitre III.

Le chapitre IV est consacré aux relations existant entre les déplacements des sections d'extrémité et les forces et moments de bord.

Dans le chapitre V, nous définirons le type de conditions de bord à imposer en vue de respecter au mieux les conditions d'appui.

Enfin, le chapitre VI présente le logiciel des bordages raidis dans sa forme définitive.



CHAPITRE II

GENERALITES

II.1. LES CONDITIONS AUX LIMITES

Les conditions aux limites autorisées jusqu'à présent sont à la fois souples et très restrictives.

Souples pour les deux bords rectilignes $\varphi = 0$ et $\varphi = \varphi_0$, pour lesquels toutes les conditions de bord sont possibles; libre, appuyée, encastrée, continuité avec une autre coque, axe de symétrie,

Restrictives pour les bords curvilignes $x = 0$ et $x = L$, pour lesquels seules les conditions d'appuis simples sont admissibles ($w = 0, v = 0, M_x = 0, N_x = 0$).

En effet, si l'on se reporte aux équations différentielles d'équilibre de la coque raidie (2.3.2 et 2.5.6), on voit qu'une solution du type

$$w(x, \varphi) = w(\varphi) \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$v(x, \varphi) = v(\varphi) \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$u(x, \varphi) = u(\varphi) \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (3.2.1)$$

satisfait d'office aux trois équations susmentionnées à condition d'avoir développé également la charge extérieure Z en série de Fourier de sinus :

$$Z(x, \varphi) = Z(\varphi) \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (3.2.2)$$

La vérification est instantanée, vu que seuls les termes w, w', \dots, w'''' , v, v', \dots, v'''' et z apparaissent dans ces équations différentielles et que toutes ces fonctions sont des fonctions sinusoïdales.

II.2. CHARGES EXTERIEURES

Dans les équations différentielles d'équilibre (2.2.4) apparaissent

6 types de charges possibles agissant toutes dans le plan moyen de la coque. Il y a les 3 forces de pression X, Y, Z respectivement dirigées selon les 3 axes x, φ, z et les moments spécifiques, M_x, M_φ, M_z .

Jusqu'à présent, seule la charge Z représentant la pression hydrostatique était apparue, les autres charges n'ayant pas été considérées. En effet, en construction hydraulique la force la plus importante est celle due aux pressions de type Z.

Néanmoins, ce n'est pas toujours le cas, ainsi dans un avant-projet de vanne segment, le problème de l'interaction "bras-vanne" s'avère particulièrement important car il requiert des HYPOTHESES sur cette liaison bras-vanne. S'agit-il d'un appui simple (solution d'autant plus acceptable que l'inertie des bras est faible vis-à-vis de celle de la vanne), d'un encastrement ou d'une solution intermédiaire ?

La troisième proposition est la bonne mais aussi la plus difficile à définir (figure 3.2.1).

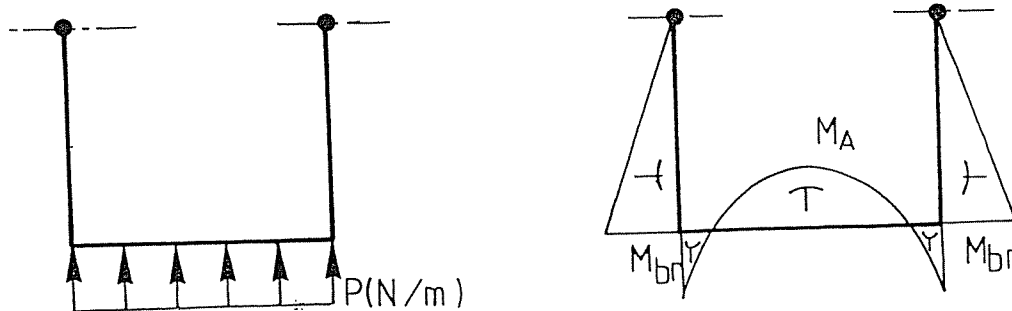


Figure 3.2.1

Le diagramme des moments ne s'annule donc pas à la jonction vanne-bras. Cela conduit à décomposer les sollicitations appliquées à la vanne en 2 catégories (figures 3.2.2 et 3.2.3).

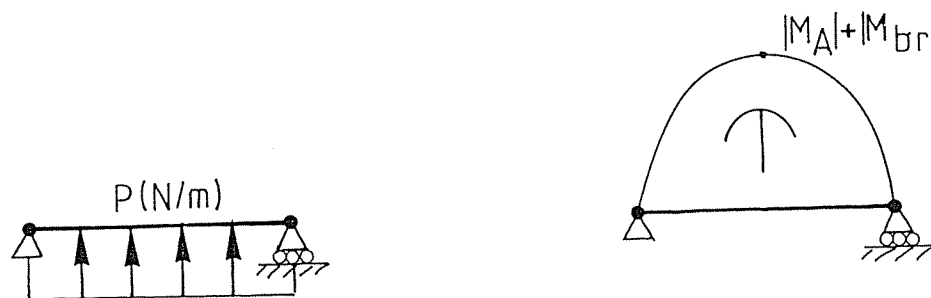


Figure 3.2.2.

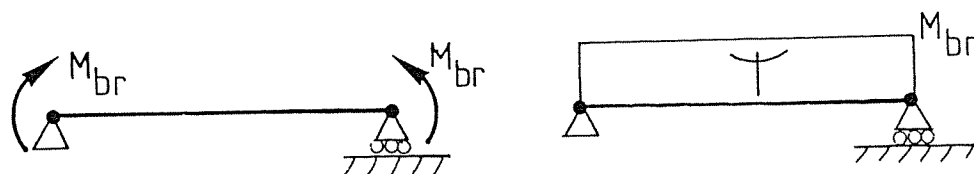


Figure 3.2.3

La première est celle d'une vanne sur deux appuis sollicitée par la seule charge extérieure qui classiquement est la poussée hydrostatique (figure 3.2.2).

Les diaphragmes et les bras permettent de considérer que la section d'extrémité est indéformable dans son plan; donc en tous points, v et w (les déplacements circonférentiels et radiaux) sont nuls.

Il peut néanmoins y avoir un déplacement d'ensemble par suite de la déformation du bras (nous y reviendrons).

Les déplacements longitudinaux u et la rotation dw/dx sont libres.

La solution obtenue est celle d'une structure sur deux appuis à laquelle la seconde partie de ce travail était consacrée.

La seconde, figure 3.2.3, concerne également une vanne sur deux appuis mais cette fois sollicitée à ses extrémités par un moment M_{br} correspondant à celui transmis par la vanne aux bras lorsque l'on considère la structure complète (figure 3.2.3). Les conditions de bord restent les mêmes que pour la première catégorie de sollicitation.

Ce moment M_{br} appliqué à la vanne (figure 3.2.4.a) résulte en fait d'une répartition d'efforts normaux N_b (figure 3.2.4.b) dont l'équilibre moment donne M_1 , couplée avec une répartition de moments M_b (figure 3.2.4.c) agissant dans le plan du bordage selon l'axe local $O\phi$, dont la somme vaut M_2 .

L'addition du moment M_1 dû aux efforts N_b avec le moment résultant M_2 dû aux moments M_b donne le moment M_{br} existant à la jonction vanne-bras (figure 3.2.4.a).

Les développements ultérieurs (§ V.3. - Partie III) montreront l'utilité de scinder en deux le moment résultant M_{br} .

Disons à présent que la seule répartition d'efforts N_b suffit à représenter un moment M_{br} ; mais localement d'autres impératifs doivent être

respectés, ainsi des conditions sur des rotations dw/dx ne seront vérifiées qu'à l'aide d'efforts N_b couplés avec des moments M_b .

Il est en effet, aisé de comprendre qu'avec les seuls efforts N_b , il est impossible d'induire une rotation dw/dx aux extrémités d'une coque lisse puisque ces efforts agissent dans le feuillet moyen qui est aussi, dans ce cas, la fibre neutre.

La sommation des efforts N_b sur les différents bords d'une section d'extrémité donne l'effort résultant axial, N_{br} (figure 3.2.4.b).

L'existence théorique de cet effort axial dépend du type d'articulation employé pour lier les bras aux piles; pratiquement, cet effort existera pour tous les types d'articulation vu les forces de frottement en présence (§ V.3.1., - partie IV).

La pression hydrostatique étant uniforme le long de l'axe ox , cela facilite son développement en série de Fourier; mais ce n'est plus le cas des efforts N_b et des moments M_b agissant tous les deux uniquement dans la zone de contact d^* entre le bras et la vanne. La figure 3.2.5 reprend ces efforts répartis sur un intervalle d^* et la figure 3.2.6 schématise la variation longitudinale des N_b et M_b .

Pour que la solution (3.2.1) satisfasse encore au système d'équations différentielles (2.3.1), cela nous oblige à développer en série de Fourier les sollicitations N_b et M_b réparties sur l'intervalle d^* correspondant à la largeur des bras.

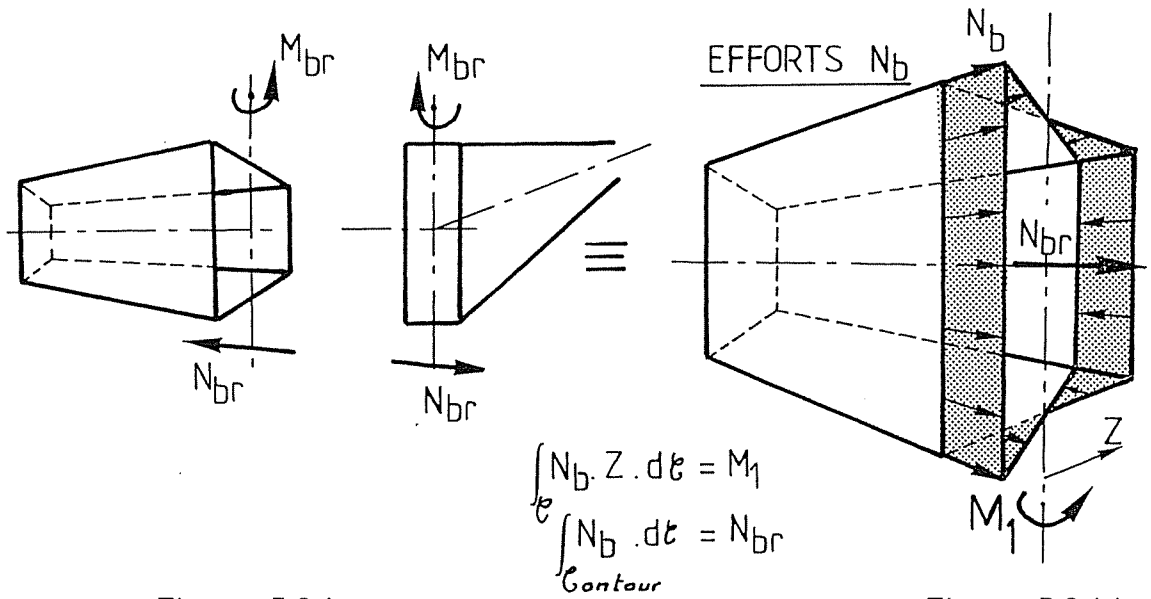


Figure 3.2.4.a

Figure 3.2.4.b

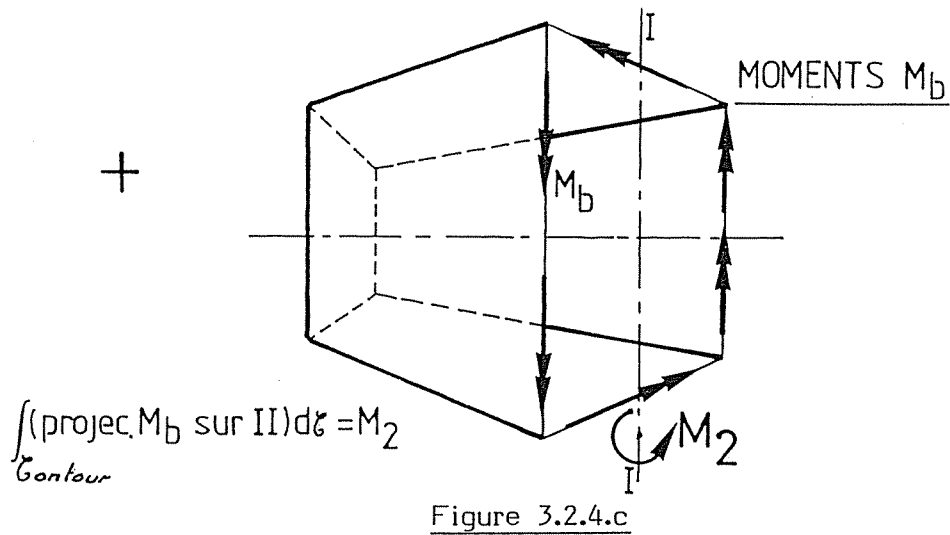


Figure 3.2.4.c

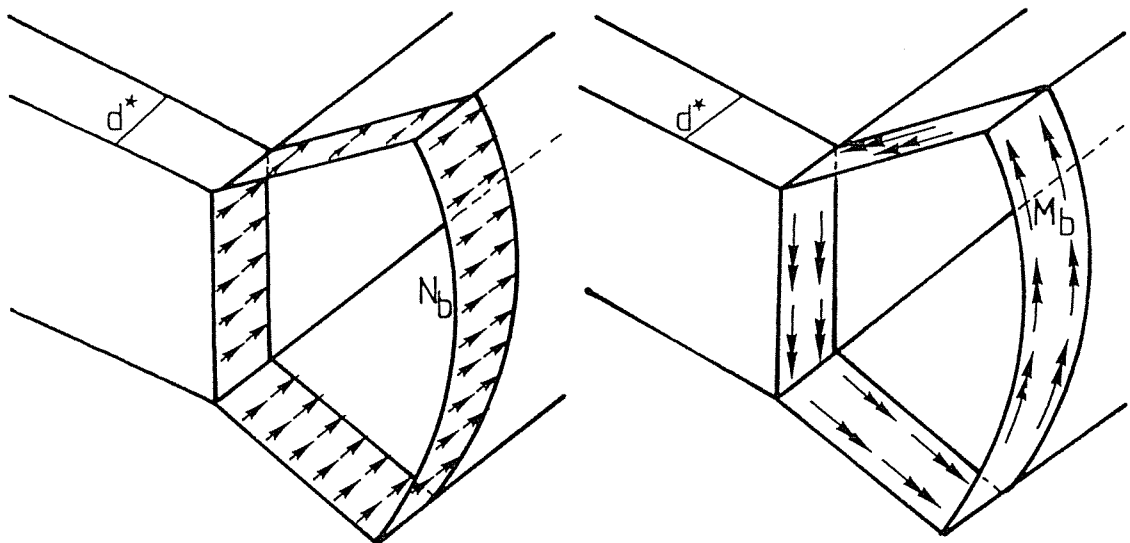


Figure 3.2.5

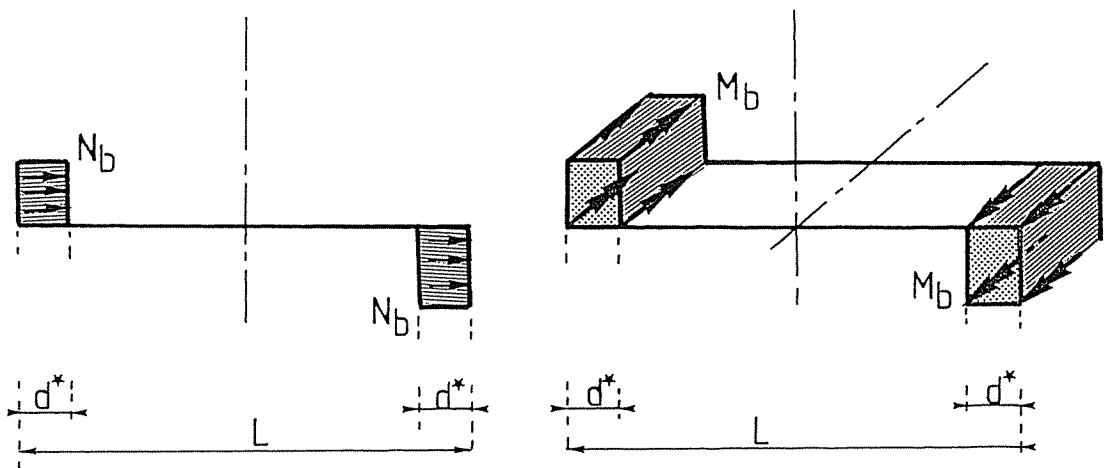


Figure 3.2.6

Déterminons le type de série à utiliser : sinus ou cosinus ?

Remarque : Les bras ayant une épaisseur finie non nulle, cela justifie notre procédé de répartition des forces N_b et des moments M_b sur un intervalle d^* .

II.2.1. Effort N_b

L'effort N_b agissant dans le plan de la coque selon l'axe ox est répertorié sous le symbole X dans la première équation différentielle du système (2.3.1.a).

Dans cette équation apparaissent les fonctions, w' , w''' , v' , u , u'' et X . Toutes ces fonctions étant des expressions en cosinus, c'est donc aussi en cosinus que doit être développé N_b .

$$\text{On aura donc, } N_b(x, \varphi) = N_b(\varphi) \cdot \cos \frac{\pi x}{L} \quad (3.2.3)$$

II.2.2. Moment M_b

Le moment M_b est, comme signalé ci-avant, un moment du type $d\phi_\varphi$, moment spécifique appliqué à la surface médiane de la coque autour d'un axe local $o\varphi$ (figure 3.2.7).

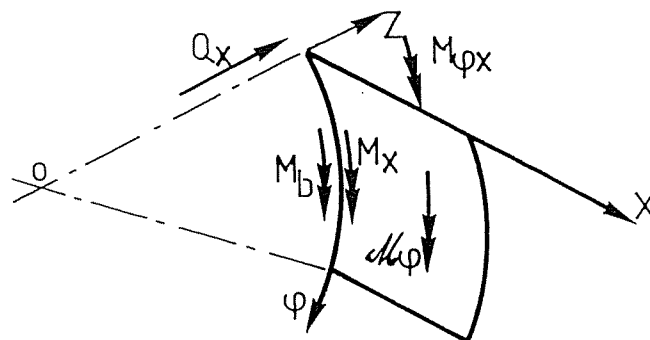


Figure 3.2.7

Comme expliqué précédemment, l'équilibre moment selon o donne

$$M_x' + \frac{M^o \varphi x}{q} - Q_x - \frac{dM}{d\varphi} = 0 \quad (2.2.4.e)$$

On peut aussi écrire :

$$Q_x = M_x' + \frac{M^o \varphi x}{q} - \frac{dM}{d\varphi}$$

La troisième équation du système de base est (2.3.1.c)

$$\frac{D}{q} (\dots) + \frac{K}{q^4} w^{oooo} + \frac{2K}{q^2} w'''' + K w'''' + \frac{dM_x^o}{q} - \frac{dM}{d\varphi} = Z$$

$\frac{dM}{d\varphi}$ apparaît donc dans cette troisième équation du système, mais uniquement sous forme de la dérivée première selon x .

On voit ainsi que la prise en compte de ce moment $\frac{dM}{d\varphi}$ dans les équations est réalisée par l'intermédiaire d'une fonction de forces $\frac{dM}{d\varphi}$ qui agit comme la force extérieure Z .

$\frac{dM_x}{dx}$ étant nul ici, on peut écrire :

$$\frac{D}{q} (\dots) + \frac{K}{q^4} w^{oooo} + \frac{2K}{q^2} w'''' + K w'''' = (Z + \frac{dM}{d\varphi})$$

On a donc bien $Z + \frac{dM}{d\varphi}$, ce qui signifie que $\frac{dM}{d\varphi}$ correspond à une force de pression du type Z développable en série de sinus dont l'expression est

$$\frac{dM}{d\varphi}(x, \varphi) = \frac{dM}{d\varphi}^*(\varphi) \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \frac{dM}{d\varphi}(x, \varphi) &= \underbrace{\frac{dM}{d\varphi}^*(\varphi) \cdot \left(-\frac{L}{n\pi}\right)}_{\frac{dM}{d\varphi}(\varphi)} \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} \\ &= \frac{dM}{d\varphi}(\varphi) \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Il s'agira donc de développer le moment M_D en série de cosinus.

II.3. DEVELOPPEMENT EN SERIE DE FOURIER DE FONCTIONS DISCONTINUES [C.7]

Soit la fonction Q_x , représentée ci-dessous (figure 3.2.8)

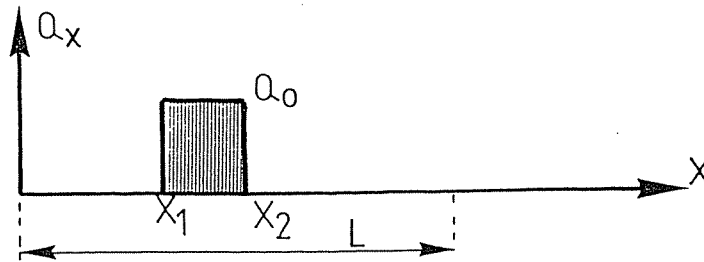


Figure 3.2.8

La fonction Q_x est nulle partout sauf dans l'intervalle (x_1, x_2) où elle vaut Q_0 .

Le développement en série de SINUS donne

$$Q_x = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}$$

et en série COSINUS

$$Q_x = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Il faut respectivement pour chaque terme k que

$$\int_{x_1}^{x_2} Q_0 \cdot \sin \frac{k\pi x}{L} \cdot dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L Q_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} \cdot \sin \frac{k\pi x}{L} \cdot dx$$

et

$$\int_{x_1}^{x_2} Q_0 \cdot \cos \frac{k\pi x}{L} \cdot dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L Q_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot \cos \frac{k\pi x}{L} \cdot dx$$

or

$$\int_{x_1}^{x_2} \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot \cos \frac{k\pi x}{L} = \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cdot \sin \frac{k\pi x}{L} = 0 \quad \sin n \neq k$$

$$= \frac{L}{2} \quad \sin n = k$$

d'où

$$Q_n = \frac{2Q_0}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi x_2}{L} - \cos \frac{n\pi x_1}{L} \right) \text{ pour la série en sinus}$$

et

$$Q_n = \frac{2Q_0}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi x_2}{L} - \sin \frac{n\pi x_1}{L} \right) \text{ pour la série en cosinus.}$$

On obtient ainsi :

$$Q_x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4Q_0}{n\pi} \sin \left[\frac{n\pi}{2L} (x_1 + x_2) \right] \cdot \sin \left[\frac{n\pi}{2L} (x_2 - x_1) \right] \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (3.2.6)$$

$$Q_x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4Q_0}{n\pi} \cos \left[\frac{n\pi}{2L} (x_1 + x_2) \right] \cdot \sin \left[\frac{n\pi}{2L} (x_2 - x_1) \right] \right) \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (3.2.7)$$

Remarque : Ces expressions montrent qu'il est impossible de représenter théoriquement une charge ponctuelle.

Ainsi si $(x_2 - x_1)$ tend vers 0, les coefficients de la série tendent eux aussi vers 0. Ceci montre que la charge répartie sera d'autant mieux représentée par un nombre raisonnable de termes que le rapport $(x_2 - x_1)/L$ sera grand.

II.4. APPLICATION DU DEVELOPPEMENT EN SERIE AUX CHARGES USUELLES

II.4.1. Charge uniforme (figure 3.2.9)

Dans ce cas, on a : $x_1 = 0$ et $x_2 = L$ pour un développement en série de sinus, on trouve :

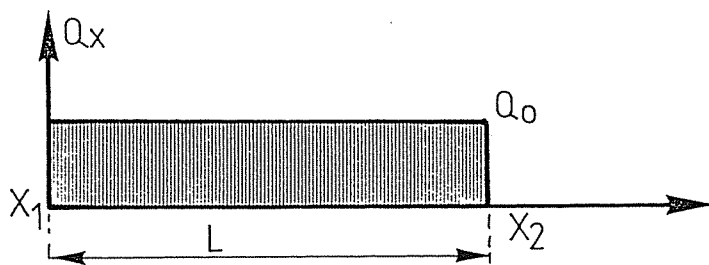


Figure 3.2.9

$$Q_x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi} \cdot \frac{Q_0}{2n-1} \right) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{L} \quad (3.2.8)$$

le facteur $2n-1$ est préféré au facteur n vu que seuls les termes impairs subsistent.

Cette expression (3.2.8) est celle utilisée pour représenter la pression hydrostatique (§ VIII.2.1. - partie II).

II.4.2. Charge répartie sur un intervalle d^* centré (figure 3.2.10)

Dans ce cas, on écrira : $x_1 = \frac{L}{2} - \frac{d^*}{2}$ et $x_2 = \frac{L}{2} + \frac{d^*}{2}$ et le développement en série de sinus sera

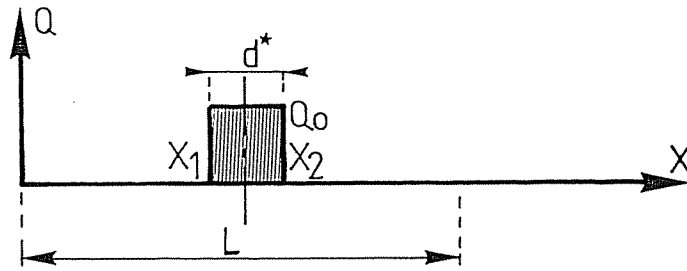


Figure 3.2.10

$$Q_x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi} \cdot \frac{Q_0}{2n-1} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \sin \frac{(2n-1)\pi d^*}{2L} \right) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{L} \quad (3.2.9)$$

Cette expression est utilisée pour représenter une charge répartie centrée au milieu de la travée (impact d'un navire par exemple).

II.4.3. Deux charges réparties antisymétriques (figure 3.2.11)

Cette situation est géométriquement définie par :

- la première charge : $x_1 = 0$, $x_2 = d^*$
- la seconde charge : $x_1 = L-d^*$, $x_2 = L$

Le développement en série de cosinus s'écrit :

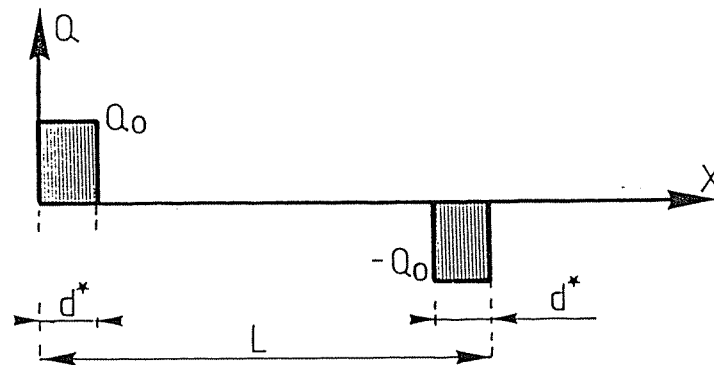


Figure 3.2.11

$$Q_n = \frac{2Q_0}{n\pi} \left[\left(\sin \frac{n\pi d^*}{L} - \sin 0 \right) - \left(\sin n\pi - \sin \frac{n\pi(L-d^*)}{L} \right) \right]$$

$$= \frac{2Q_0}{n\pi} \left[\sin \frac{n\pi d^*}{L} + \sin \frac{n\pi(L-d^*)}{L} \right]$$

D'où

$$Q_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{Q_0}{2n-1} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \cos \frac{(2n-1)\pi(L-2d^*)}{2L} \cdot \cos \frac{(2n-1)\pi x}{L} \quad (3.2.10)$$

Cette expression sera utilisée pour représenter les efforts N_b et les moments M_b qui seront appliqués aux extrémités de la coque pour simuler des conditions d'appuis autres que l'appui simple.

CHAPITRE III

EXPRESSIONS ANALYTIQUES RELATIVES AUX FORCES ET AUX MOMENTS DE BORD (SECTIONS $x=0$ et $x=L$).

III.1. INTRODUCTION

Ce chapitre est un exposé en toute généralité, des développements analytiques nécessaires à l'introduction de forces et de moments de bord, permettant de simuler des conditions autres que l'appui simple, telles que l'encastrement ou l'appui élastique.

Ce n'est qu'à titre d'exemple que nous ferons référence aux appuis élastiques que sont les bras de la vanne segment. Nous aurions, en effet, pu traiter le cas d'une structure encastrée, cette structure pouvant avoir la forme d'un caisson mais aussi toute autre forme, tel que celle en U d'un pont canal, par exemple [C.5].

Remarque : Pour étayer les développements mathématiques, nous ferons appel à des exemples de structures se composant de panneaux plans ou plaques (figure 3.3.1.).

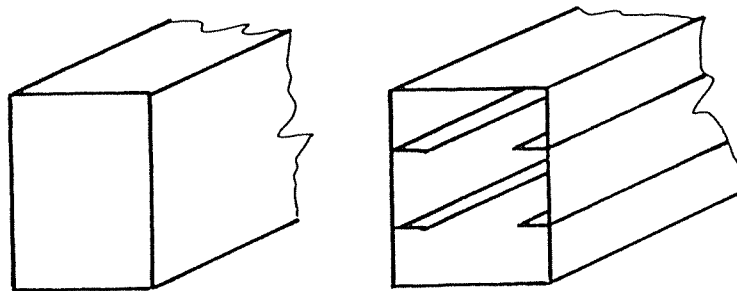


Figure 3.3.1.

III.2. CHOIX DES FONCTIONS DE FORME A DONNER AUX FORCES ET AUX MOMENTS DE BORD.

Lorsque les appuis sont autres que simples, existent des forces N_b et des moments M_b le long des bords de la coque (figure 3.3.2). L'intensité de ces efforts et moments répond à des diagrammes tels que $F(\varphi)$ pour N_b et $G(\varphi)$ pour M_b .

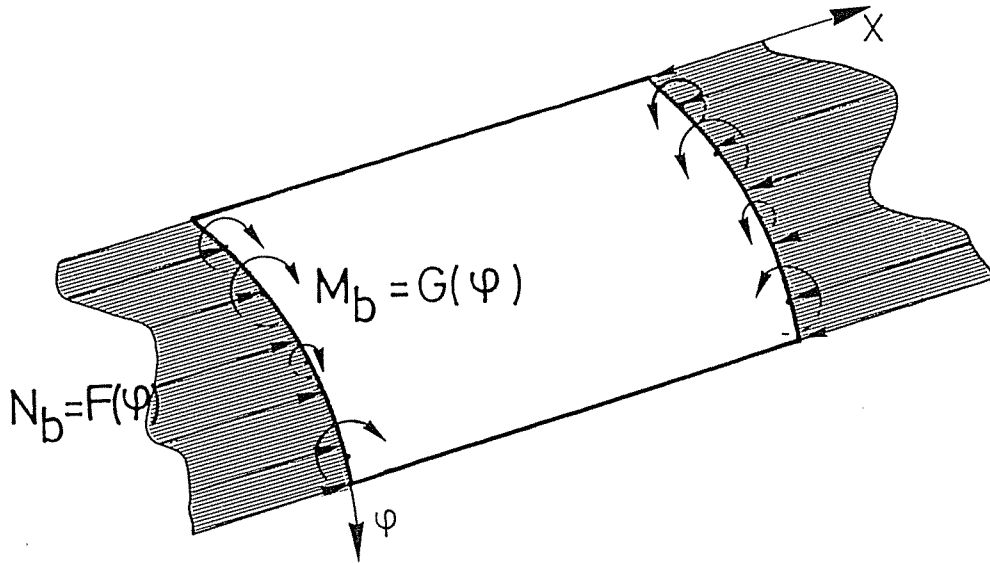


Figure 3.3.2.

Ces fonctions seront par la suite les inconnues de connexion entre les appuis et la vanne.

Pour les définir, il faut d'abord choisir le type de fonctions qui convient et ensuite le nombre de paramètres inconnus qui y interviennent.

Plus les fonctions seront nombreuses et variées, plus il sera possible de représenter n'importe quelle variation d'effort N_b ou de moment M_b , mais plus les calculs seront lourds; il en est de même pour le nombre de paramètres.

Le choix est grand, ainsi voici quelques fonctions :

$F(\varphi) = a \cos(b+c\varphi)$ est une fonction à 3 paramètres a , b , c et de forme trigonométrique,

$F(\varphi) = a \operatorname{ch}(b\varphi) + c \operatorname{sh}(d\varphi)$ est une fonction à 4 paramètres a , b , c , d et de forme hyperbolique,

$F(\varphi) = a_{n+1} \varphi^n + a_n \varphi^{n-1} + \dots + a_2 \varphi + a_1$
est un polynôme de degré n avec $n+1$ paramètres.

Il est bien sûr loisible d'imaginer d'autres fonctions, telles que les fonctions logarithmiques ou exponentielles.

Pour guider notre choix, il serait bon de connaître l'allure des N_b et M_b . En anticipant sur la suite de l'exposé, on peut dire que les forces N_b et les moments M_b utiles seront du type des déplacements permis aux bord $x=0$ et $x=L$ de la coque.

Or ces déplacements sont de la forme :

$$[a_i \cos(\beta_i q \varphi) + b_i \sin(\beta_i q \varphi)] e^{-\alpha_i q \varphi} + [c_i \cos(\beta_i q (\varphi_0 - \varphi)) + \dots] e^{-\alpha_i q (\dots)} +$$

$$[e_i \cos(\beta_i q (2\pi - \varphi)) + \dots] e^{-\alpha_i q (\dots)} + [g_i \cos(\beta_i q (2\pi - (\varphi_0 - \varphi))) + \dots] e^{-\alpha_i q (\dots)} + \text{idem}$$

pour chaque couple de α_i et β_i , i variant de 1 à 2, 3, ou 4 selon le cas et avec $a_i, b_i, \dots, e_i, \dots, h_i$ les paramètres.

Les forces étant les dérivées des déplacements, on peut penser qu'il s'agit là de la forme à adopter pour les fonctions de N_b et M_b . Il y a cependant des inconvénients majeurs qui sont liés à la lourdeur des développements analytiques nécessaires compte tenu de la forme de ces fonctions.

On comprend aisément qu'il ne s'agit pas là d'une voie raisonnable pour une méthode se voulant aisée à l'emploi.

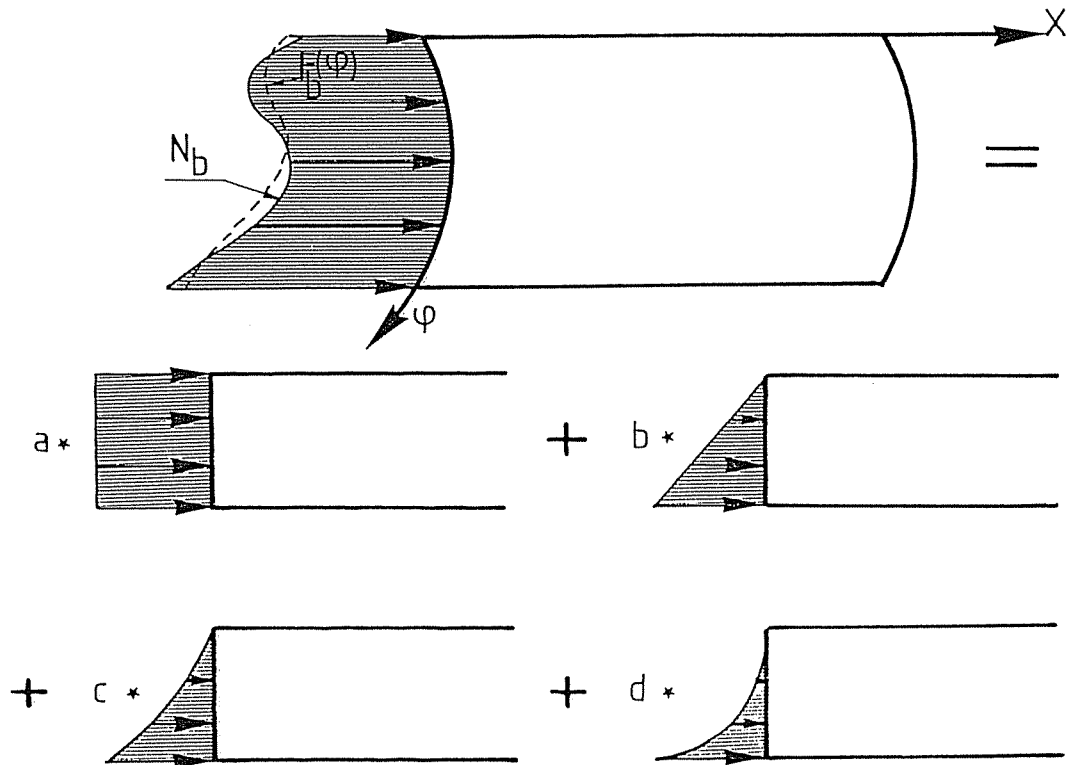


Figure 3.3.3.

A des fins de simplicité et de rationalisation, nous avons opté pour un développement de ces fonctions en séries polynomiales.

Les fonctions $F(\varphi)$ et $G(\varphi)$ prenant les formes classiques suivantes :

$$F(\varphi) = \sum_i^{\infty} s_i (q\varphi)^i \quad (3.3.1)$$

$$G(\varphi) = \sum_i^{\infty} r_i (q\varphi)^i \quad (3.3.2)$$

avec s_i, r_i les constantes des polynômes.

En pratique il s'agira de se limiter à un nombre de terme fini, prenons ainsi des fonctions de degré k .

$$F(\varphi) = s_k (q\varphi)^k + s_{k-1} (q\varphi)^{k-1} + \dots + s_1 (q\varphi) + s_0 \quad (3.3.3)$$

$$G(\varphi) = r_k (q\varphi)^k + r_{k-1} (q\varphi)^{k-1} + \dots + r_1 (q\varphi) + r_0 \quad (3.3.4)$$

Par la suite, nous montrerons que des développements limités au 3ème degré suffisent amplement pour les ajustements demandés (figure 3.3.3.).

Soit :

$$F(\varphi) = a(q\varphi)^3 + b(q\varphi)^2 + c(q\varphi) + d \quad (\text{N/m}) \quad (3.3.5)$$

avec a, b, c, d les 4 paramètres fixant la répartition de N_b et

$$G(\varphi) = e(q\varphi)^3 + f(q\varphi)^2 + g(q\varphi) + h \quad (\text{N.m/m}) \quad (3.3.6)$$

avec e, f, g, h les 4 paramètres fixant la répartition de M_b .

III.3. EXPRESSIONS ANALYTIQUES RELATIVES A LA FORCE DE BORD N_b

III.3.1. Développement de la charge N_b de bord en série de Fourier.

Précédemment (§ VIII.1.2., partie II), nous avons obtenu la solution analytique d'un cylindre complet avec effets répartis des aiguilles et des raidisseurs chargée par une ligne de forces de $10000 \cos \lambda x$ (N/m) dirigée selon l'axe OX (figure 3.3.4). Ce cas de charge est connu sous le vocable "cas de charge de base A". La solution est notée U_A, V_A, W_A .

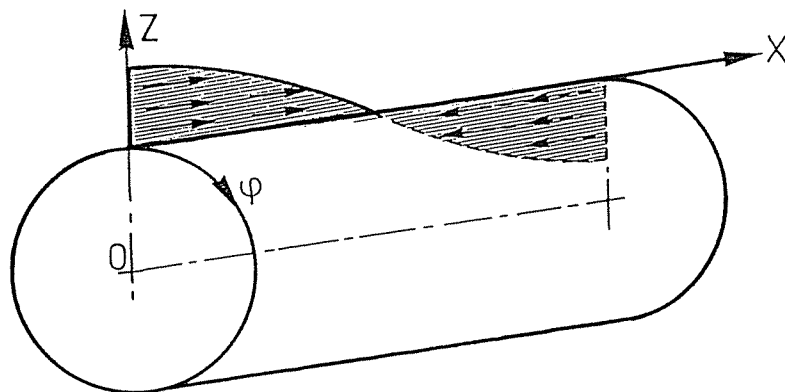


Figure 3.3.4.

De ce fait, on connaît aussi la solution analytique pour une charge de $10000 \cos \lambda x$ (N/m) agissant sur un intervalle $q.d\lambda$ le long d'une droite OX qui est $\varphi = \Lambda$ (figure 3.3.5). Les solutions sont dU_A, dV_A, dW_A .

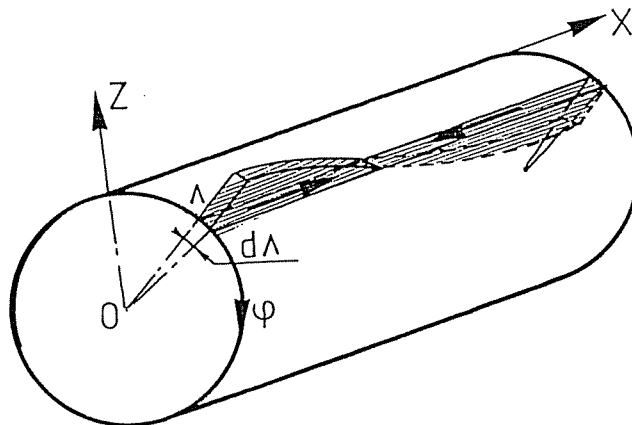


Figure 3.3.5.

Voici l'expression de dW_A :

$$dW_A = q \sin \lambda x \cdot d\Lambda [A e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \cdot \cos \beta_1 q |\varphi - \Lambda| + B e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \cdot \sin \beta_1 q |\varphi - \Lambda| + C \dots + D \dots + A e^{-\alpha_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|)} \cdot \cos \beta_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|) + B e^{-\alpha_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|)} \sin (2\pi - |\varphi - \Lambda|) + C \dots + D \dots] \quad (3.3.7)$$

avec A, B, C, D les constantes d'intégration déterminées pour le cas de base A (§ VIII.1.2., partie II).

Pour le développement polynomial limité au 3ème degré, la charge de bord varie comme la fonction (3.3.5), figure 3.3.3. :

$$F(\varphi) = a(q\varphi)^3 + b(q\varphi)^2 + c(q\varphi) + d \quad (\text{N/m}) \quad (3.3.5)$$

Cette charge est appliquée aux deux bords $X=0$ et $X=L$ de manière antisymétrique de façon à représenter au mieux un effort concentré de bord.

Mais, comme nous l'avons vu (§ II.2.1., partie III), il faut néanmoins répartir cette charge sur un intervalle d^* ; nous aurons donc des efforts répartis de bord (figure 3.3.6).

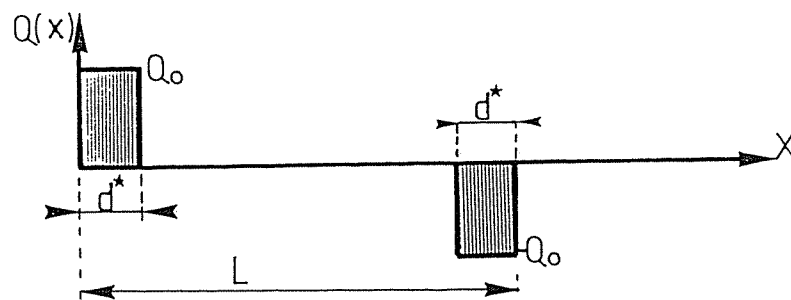


Figure 3.3.6.

donc

$$Q_0 = \frac{a(q\varphi)^3 + b(q\varphi)^2 + c(q\varphi) + d}{d^*} \quad (\text{N/m}^2)$$

En développant en série (3.2.10), on obtient :

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{\pi} [a(q\varphi)^3 + b(q\varphi)^2 + c(q\varphi) + d] \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)d^*} \cdot \frac{\cos(2n-1)\pi(L-2d^*)}{2L} \right] \cdot \cos \frac{(2n-1)\pi x}{L}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_F [a(q\varphi)^3 + b(q\varphi)^2 + c(q\varphi) + d] \cdot \cos \frac{(2n-1)\pi x}{L} \quad (\text{N/m}^2) \quad (3.3.8)$$

$$\text{avec } \gamma_F = \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n-1)d^*} \cdot \cos \left[\frac{(2n-1)\pi(L-2d^*)}{2L} \right]$$

Sur l'intervalle $q d \Lambda$, on a une force $F \cdot q d \Lambda$ qui s'écrit

$$F \cdot q d \Lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_F \cdot F(\Lambda) \cdot q d \Lambda \cdot \cos \frac{(2n-1)\pi x}{L} \quad (\text{N/m}) \quad (3.3.9)$$

III.3.2. Expressions analytiques des déplacements U_a , V_a , W_a , d'un cylindre complet chargé par des forces de bord N_b .

III.3.2.1. Détermination de W_a

En relation avec dW_A obtenu pour une charge en $\varphi = \Lambda$ de $10000 \cdot q d \Lambda \cdot \cos \lambda x$ (N/m) (3.3.7), on obtient :

$$dW_a = \gamma_F \cdot \frac{[a(q\Lambda)^3 + b(q\Lambda)^2 + c(q\Lambda) + d]}{10000} q d \Lambda \cdot \sin \lambda x$$

$$\cdot [A e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \cos \beta_1 q |\varphi - \Lambda| + \dots$$

$$+ B e^{-\alpha_1 q \dots} \sin \beta_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|) + \dots] \quad (3.3.10)$$

La figure 3.3.7 représente le cylindre complet chargé dans la zone $(0, \varphi_0)$ par des forces de bord N_b .

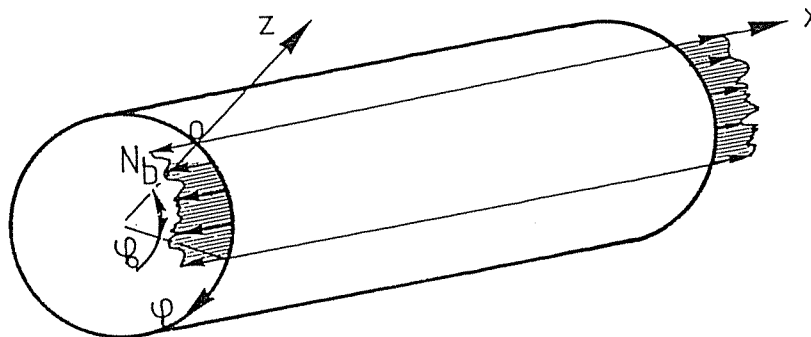


Figure 3.3.7.

En intégrant dW sur le domaine de la charge, c'est-à-dire l'intervalle $(0, \varphi_0)$ avec φ_0 l'angle d'ouverture de la coque réelle, on obtient :

$$W_a = \frac{\gamma_F q \cdot \sin \lambda x}{10000} \cdot \int_0^{\varphi_0} [A \cdot e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \cos \beta_1 q |\varphi - \Lambda| + B \dots +$$

$$+ B e^{-\alpha_1 q \varphi(\dots)} \sin \beta_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|)] \cdot [a(q\Lambda)^3 + b(q\Lambda)^2 + c(q\Lambda) + d] d \Lambda$$

$$\begin{aligned}
W_a = \frac{\gamma_{Fq} \sin \lambda x}{10000} \cdot & \left[aAq^3 \int_0^{\varphi_0} e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \cos \beta_1 q |\varphi - \Lambda| \cdot \Lambda^3 d\Lambda \right. \\
& + aBq^3 \int_0^{\varphi_0} e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \sin \beta_1 q |\varphi - \Lambda| \cdot \Lambda^3 d\Lambda \\
& + aAq^3 \int_0^{\varphi_0} e^{-\alpha_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|)} \cos \beta_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|) \cdot \Lambda^3 d\Lambda \\
& + aBq^3 \int_0^{\varphi_0} e^{-\alpha_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|)} \sin \beta_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|) \cdot \Lambda^3 d\Lambda \\
& + bAq^2 \int_0^{\varphi_0} e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \cos \beta_1 q |\varphi - \Lambda| \cdot \Lambda^2 d\Lambda \\
& + bBq^2 \int_0^{\varphi_0} e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \sin \beta_1 q |\varphi - \Lambda| \cdot \Lambda^2 d\Lambda \\
& + bAq^2 \int_0^{\varphi_0} e^{-\alpha_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|)} \cos \beta_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|) \cdot \Lambda^2 d\Lambda \\
& + bBq^2 \int_0^{\varphi_0} e^{-\alpha_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|)} \sin \beta_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|) \cdot \Lambda^2 d\Lambda \\
& + cAq \int_0^{\varphi_0} e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \cos \beta_1 q |\varphi - \Lambda| \cdot d\Lambda \\
& + cBq \int_0^{\varphi_0} e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \sin \beta_1 q |\varphi - \Lambda| \cdot d\Lambda \\
& + cAq \int_0^{\varphi_0} e^{-\alpha_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|)} \cos \beta_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|) \cdot d\Lambda \\
& + cBq \int_0^{\varphi_0} e^{-\alpha_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|)} \sin \beta_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|) \cdot d\Lambda \\
& + dA \int_0^{\varphi_0} e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \cos \beta_1 q |\varphi - \Lambda| \cdot d\Lambda \\
& + dB \int_0^{\varphi_0} e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \sin \beta_1 q |\varphi - \Lambda| \cdot d\Lambda \\
& + dA \int_0^{\varphi_0} e^{-\alpha_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|)} \cos \beta_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|) \cdot d\Lambda \\
& + dB \int_0^{\varphi_0} e^{-\alpha_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|)} \sin \beta_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|) \cdot d\Lambda \left. \right]
\end{aligned}$$

La méthode de résolution des intégrales intervenant dans W_a est détaillée dans l'annexe 3.a et les expressions finales de W_a et U_a sont reprises dans l'annexe 3.b du tableau VI. (voir note §V.5, partie II).

III.3.2.2. Détermination de U_a

La détermination de U_a est immédiate une fois celle de W_a obtenue. En effet, les déplacements U_a et W_a ont même expression car ils possèdent des propriétés de symétrie identiques par rapport à une ligne de charge $\varphi = \Lambda$. Il suffit donc de remplacer dans le tableau VI, les coefficients A, B, C, D relatifs à W_a par les coefficients A_1, B_1, C_1, D_1 relatifs à U_a .

III.3.2.3. Détermination de V_a

La détermination de V_a est semblable mais les intégrales diffèrent par la présence de la fonction v qui est antisymétrique.

Ainsi on obtient :

$$V_a = \frac{\gamma_F q \sin \lambda x}{10000} \cdot \int_0^{\phi_0} [\pm A_2 e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \cos \beta_1 q |\varphi - \Lambda| \pm B_2 \dots \pm (-B_2) e^{-\alpha_1 q (\dots)} \sin \beta_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|)] \cdot [\alpha(q\Lambda)^3 + b(q\Lambda)^2 + c(q\Lambda) + d] d\Lambda \quad (3.3.13)$$

On remarque dans l'expression de V_a (3.3.13), l'alternance des paramètres (A_2) et ($-A_2$) ainsi que l'existence de signes \pm provenant de l'antisymétrie de la fonction v (figure 3.3.8).

La convention relative aux signes \pm est la suivante :

- + si $\varphi - \Lambda > 0$ c'est-à-dire $\Lambda < \varphi$
- si $\varphi - \Lambda < 0$ c'est-à-dire $\Lambda > \varphi$

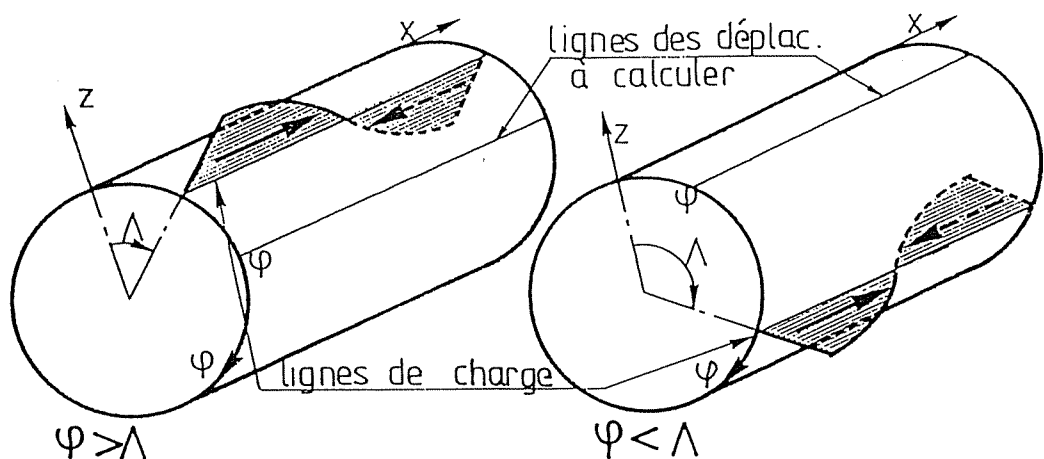


Figure 3.3.8

La résolution de ces intégrales s'effectue de la même manière que précédemment en passant par les nombres complexes. Seules les bornes d'intégration changent vis-à-vis du calcul de W_a .

Le tableau VII de l'annexe 3.c donne l'expression analytique de V_a .

Remarques : - Dans les tableaux II à VII, les coefficients A, B, \dots, C_2, D_2 sont les constantes d'intégration qui ont été déterminées pour obtenir les déplacements U_a, V_a, W_a correspondant au cas de charge de base A.

- Dans ces mêmes tableaux les coefficients a, b, c, d sont les coefficients du polynôme de la charge de bord (3.3.5) (pour les tableaux, voir notice §V.5, partie II).

III.4. EXPRESSIONS ANALYTIQUES RELATIVES AUX MOMENTS DE BORD M_b

III.4.1. Développement du moment de bord M_b en série de Fourier

Pour les mêmes raisons que pour les forces de bord (§ II.3., partie III), on est amené à répartir les moments de bord sur un intervalle d^* (figure 3.3.9).

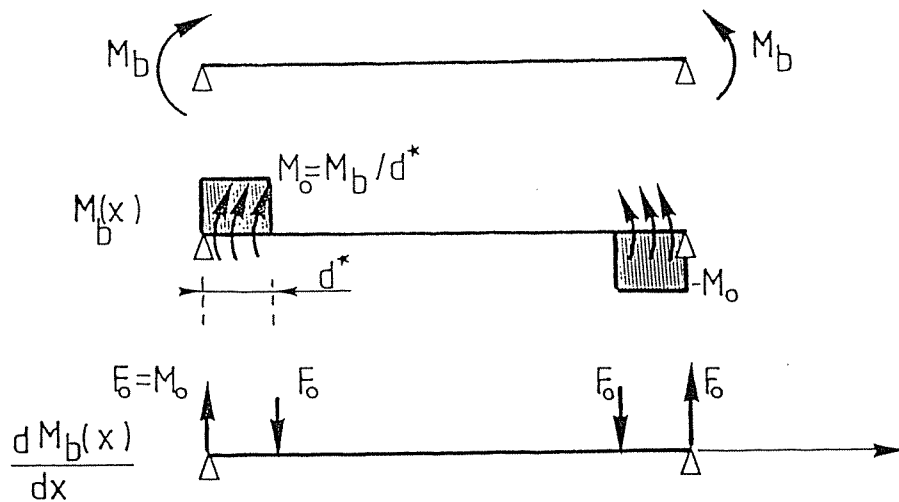


Figure 3.3.9.

Les forces F_0 extrêmes (sur les appuis) ne créent pas d'effets dans la coque car elles sont directement reprises par ces appuis. Il reste donc (figure 3.3.10) à étudier la configuration suivante :

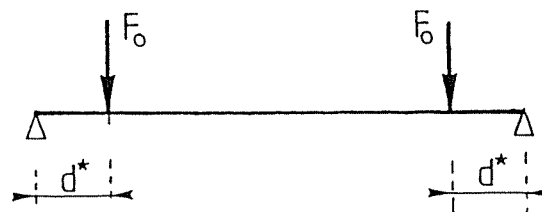


Figure 3.3.10.

Soit un moment M_b réparti qui développé en série de Fourier s'écrit :

$$M_b(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4M_b}{(2n-1)\pi d^*} (-1)^{n+1} \cdot \cos \frac{(2n-1)\pi(L-2d^*)}{L} \cdot \cos \frac{(2n-1)\pi x}{L} \right]$$

Sa dérivée est donc $d M_b(x)/dx =$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-4}{(2n-1)\pi d^*} (M_b \frac{(2n-1)\pi}{L}) (-1)^{n+1} \cdot \cos \frac{(2n-1)\pi(L-2d^*)}{L} \cdot \sin \frac{(2n-1)\pi x}{L} \right] \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{(2n-1)\pi d^*} \cdot H \cdot (-1)^{n+1} \cdot \cos \frac{(2n-1)\pi(L-2d^*)}{L} \cdot \sin \frac{(2n-1)\pi x}{L} \right] \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

$$\text{avec } H = \frac{-(2n-1)\pi}{L} \cdot M_b \quad (3.3.15)$$

Conclusions :

Vouloir appliquer un moment M_b positif réparti aux bords $x=0$ et $x=L$ d'une coque revient au niveau des équations différentielles (2.3.12.c) à appliquer une force F_0 concentrée négative.

Pratiquement, l'expression à utiliser est celle obtenue en développant en série de Fourier 2 forces réparties dont la valeur, pour le terme n de la série est $H = M_b \cdot [-(2n-1)\pi/L]$.

III.4.2. Expressions analytiques des déplacements W_c , V_c , U_c d'un cylindre complet soumis à des moments de bord M_b .

La figure 3.3.11 représente le cylindre complet soumis sur l'intervalle $(0, \varphi_0)$ correspondant à la coque réelle, à des moments de bord M_b .

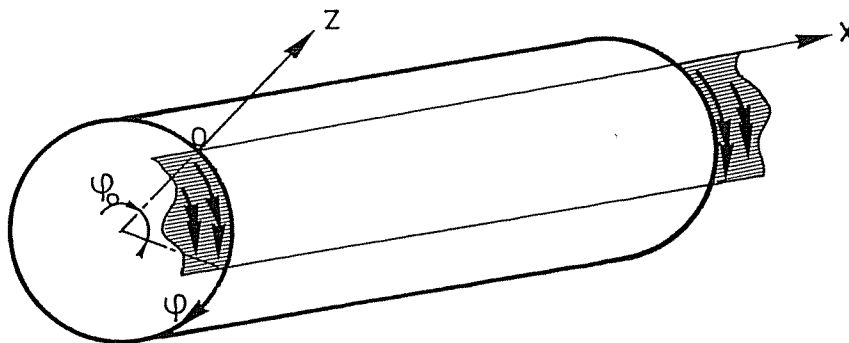


Figure 3.3.11.

Admettons donc une variation de la fonction M_b selon une fonction polynomiale du 3^{ème} degré en (3.3.6).

$$M_b = e(q\varphi)^3 + f(q\varphi)^2 + g(q\varphi) + h \quad \text{N.m/m}$$

Sur l'intervalle $q d\varphi$ on a donc un moment $dM_b = M_b \cdot q d\varphi$

$$dM_b = [e(q\varphi)^3 + f(q\varphi)^2 + g(q\varphi) + h] q d\varphi \quad \text{N.m}$$

Développons ce moment en série de Fourier dont chaque terme a le même effet qu'une force dF .

$$dF = \gamma_m \cdot [e(q\varphi)^3 + f(q\varphi)^2 + g(q\varphi) + h] q d\varphi \cdot \sin \frac{(2n-1)\pi x}{L} \quad (3.3.16)$$

avec

$$\gamma_m = -\frac{4}{Ld^*} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \cos \left(\frac{(2n-1)\pi(L-2d^*)}{L} \right)$$

En se référant à dW_c , dV_c , dU_c , les déplacements en tous points d'un cylindre complet soumis à une charge de base C en $\varphi = \Lambda$ de $10000 q d\Lambda \sin \lambda x$ N/m (§ VIII.1.1., partie II), on obtient pour dW_c :

$$dW_c = \gamma_m \cdot [e(q\Lambda)^3 + f(q\Lambda)^2 + g(q\Lambda) + h] q d\Lambda \cdot \sin \frac{(2n-1)\pi x}{L} \cdot [A e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \cos \beta_1 q |\varphi - \Lambda| + \dots + B e^{-\alpha_1 q (\dots)} \sin \beta_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|) + \dots] \quad (3.3.17)$$

En intégrant dW_c sur le domaine où est appliqué le moment M_b c'est-à-dire dans l'intervalle $^c(0, \varphi_0)$ avec, pour rappel, φ_0 l'angle d'ouverture de la coque réelle, on obtient :

$$W_c = \frac{\gamma_m q \cdot \sin \lambda x}{10000} \cdot \int_0^{\varphi_0} [A \cdot e^{-\alpha_1 q |\varphi - \Lambda|} \cos \beta_1 q |\varphi - \Lambda| + B \dots + B \cdot e^{-\alpha_1 q (\dots)} \sin \beta_1 q (2\pi - |\varphi - \Lambda|)] \cdot [e(q\Lambda)^3 + f(q\Lambda)^2 + g(q\Lambda) + h] d\Lambda \quad (3.3.18)$$

On constate que cette expression est identique à celle utilisée pour les forces de bord (3.3.11), avec comme seules modifications

- la valeur de la constante

$$\gamma_m = \gamma_{\text{moment}} = \gamma_F \cdot \left[\frac{(2n-1)\pi}{L} \right] \quad (3.3.19)$$

- les coefficients A, B, C, D sont ceux correspondant au cas de charge de base C et non plus de base B

- les variables de bord a, b, c, d deviennent e, f, g, h.

Les expressions de W_c , V_c , U_c sont identiques à celles de W_a , V_a , U_a , à ces mêmes différences près et leurs expressions sont données dans les tableaux VI et VII (voir notice §V.5, partie II).

Remarque : le signe - existant dans l'expression (3.3.15)

$$H = \frac{-(2n-1)\pi}{L} \cdot M_b$$

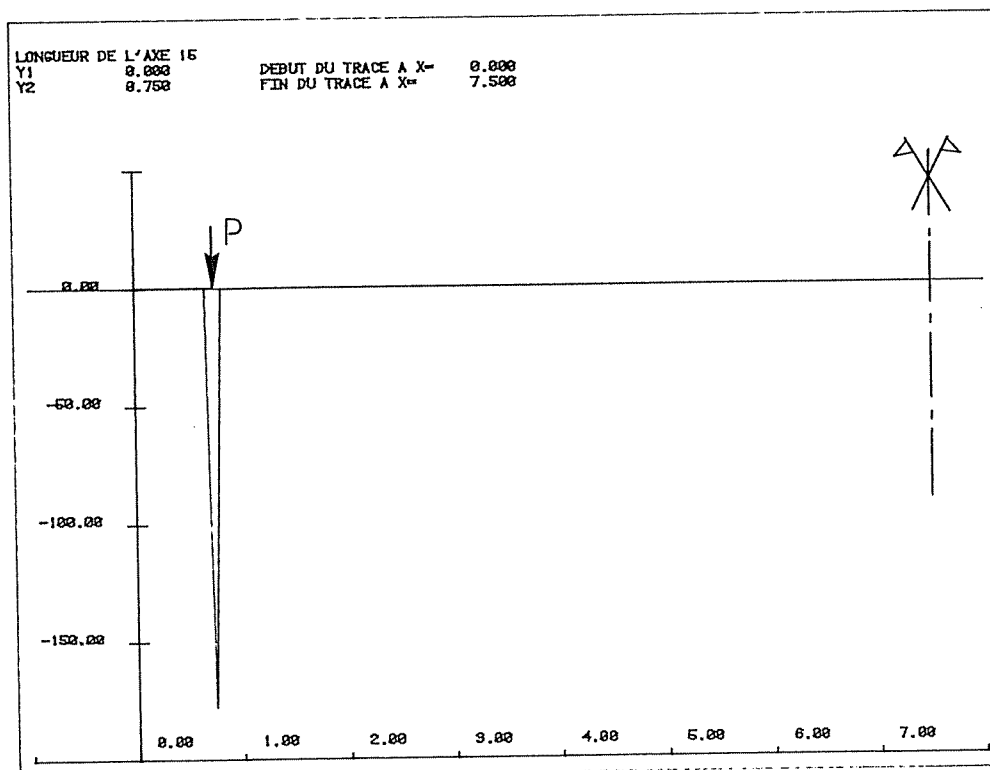


Figure 3.3.12.
Représentation d'une charge concentrée avec 100 termes de la série de Fourier.

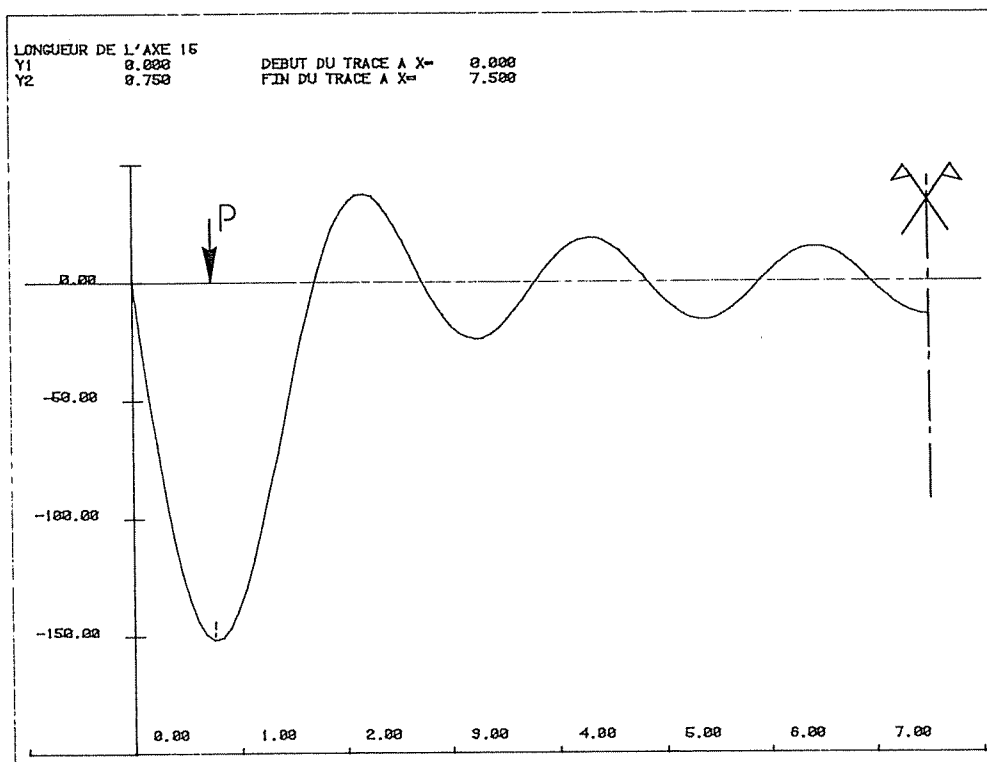


Figure 3.3.13.
Représentation d'une charge concentrée avec 7 termes de la série de Fourier.

devient un signe + dans l'expression (3.3.19)

$$\gamma_{\text{moment}} = \gamma_F \cdot \left(\frac{(2n-1)\pi}{L} \right)$$

En effet, pour un moment M_b positif, la force F est négative, c'est-à-dire, dirigée vers les z négatifs. Or, la charge de base C est elle aussi dirigée vers les z négatifs, d'où le fait que la constante par laquelle il faut multiplier les valeurs obtenues pour le cas de base C est bien positive.

III.4.3. Remarques sur le développement en série de Fourier d'un moment de bord

Sur la figure (3.3.13), on peut observer l'allure du diagramme des forces appliquées pratiquement pour représenter un moment réparti de bord. On observe qu'avec 7 termes l'allure est déjà fort acceptable quoique encore éloignée du diagramme théorique (figure 3.3.12).

L'analyse de ces diagrammes montre que l'accroissement de précision donné par les termes supérieurs à 7, n'en justifie pas l'utilisation. De plus, en pratique utiliser 100 termes est irréaliste (figure 3.3.12); d'où il faut être conscient que la représentation d'un moment réparti ne sera jamais parfaitement exacte.

III.5. VERIFICATIONS A L'AIDE DE QUELQUES EXEMPLES DU COMPORTEMENT DES DEVELOPPEMENTS EN SERIE DES EFFETS DE BORD.

Notre but n'est pas ici de tester le programme dans son ensemble, mais uniquement de vérifier l'exactitude des expressions établies analytiquement à l'aide de quelques exemples simples et ensuite d'estimer la vitesse de convergence de la série de Fourier.

Prenons comme structure de référence un caisson de 15 m de long, de 3m x 1 m comme section transversale et les panneaux lisses ont une épaisseur constante de 0,01 m (figure 3.3.14).

III.5.1. Exemple 1

A titre didactique, imaginons une sollicitation de bord uniquement composée d'effort N_b , les moments M_b étant nuls (figure 3.3.14) et étudions comment cette sollicitation est représentée par une série de Fourier.

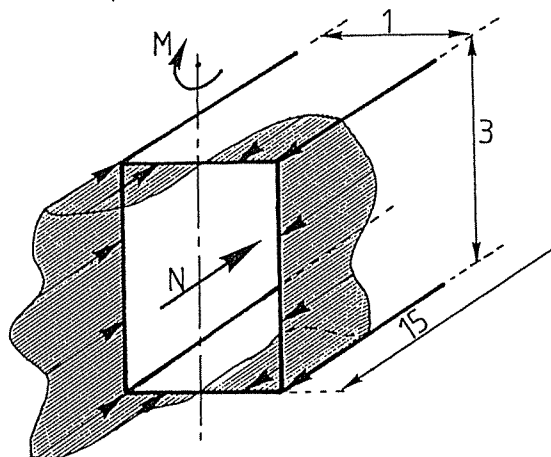


Figure 3.3.14

Prenons $d^* = 1$ m, avec d^* la distance sur laquelle la force est répartie (figure 3.3.15)

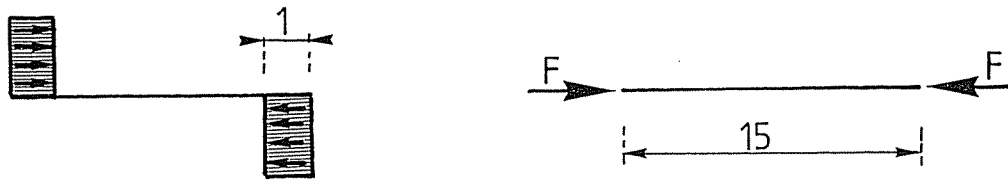


Figure 3.3.15

Un terme quelconque de la série de Fourier s'écrit :

$$Q(x) = \frac{4 \cdot F}{(2n-1) \cdot d^*} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \cos\left(\frac{(2n-1)\pi(L-2d^*)}{2L}\right) \cdot \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)$$

Si l'on intègre $Q(x)$ de 0 à $L/2$ on obtient pour chaque terme un effort F_n qui est l'effort agissant dû au terme n de la série

$$\text{on a : } F_n = \int_0^{L/2} Q(x) dx \quad \text{et} \quad F = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$$

Ainsi obtient-on pour une force F unitaire :

Terme n	$F_n = \int_0^{L/2} Q(x) dx$	$\sum_{i=1}^n F_n$
1	1,264	1,264
2	-0,397	0,867
3	0,210	1,077
5	0,071	1,025
7	0,015	1,002

III.5.2. Exemple 2

Appliquons le diagramme des efforts de bord N_b suivant (figure 3.3.16)

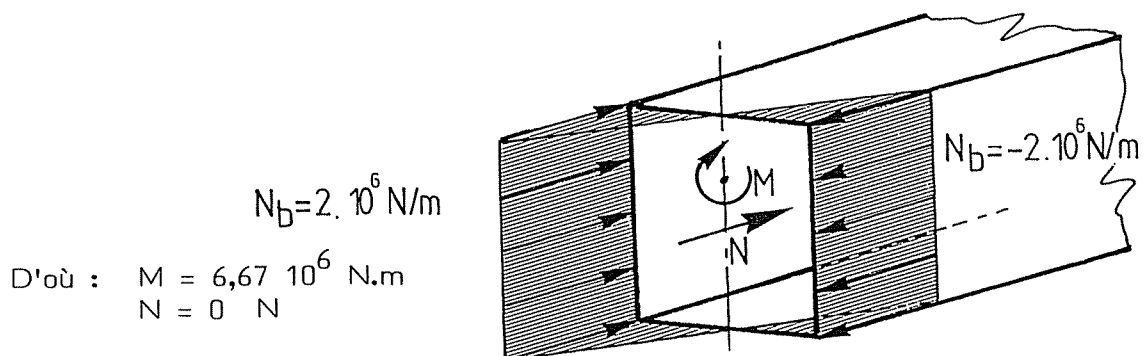


Figure 3.3.16

Les concepts classiques de la Résistance des Matériaux pour une poutre donneraient :

$$|\sigma_{\max}| = |\sigma_{\min}| = 200 \text{ N/mm}^2, \forall x \in (0, L)$$

$$w(x=L/2) = M L^2 / 8 EI = 0,05357 \text{ m}$$

La résolution avec ces données pour 1 terme de la série donne comme résultat :

$$\text{en } x = L/2, |\sigma_{\max}| = |\sigma_{\min}| = 252,5 \text{ N/mm}^2$$

$$w(x=L/2) = 0,0543 \text{ m}$$

De même avec 7 termes de la série,

$$\text{en } x=L/2, |\sigma_{\max}| = |\sigma_{\min}| = 200 \text{ N/mm}^2$$

$$w(x=L/2) = 0,0528 \text{ m}$$

Regardons l'allure des contraintes sur le long de la poutre (figure 3.3.17).

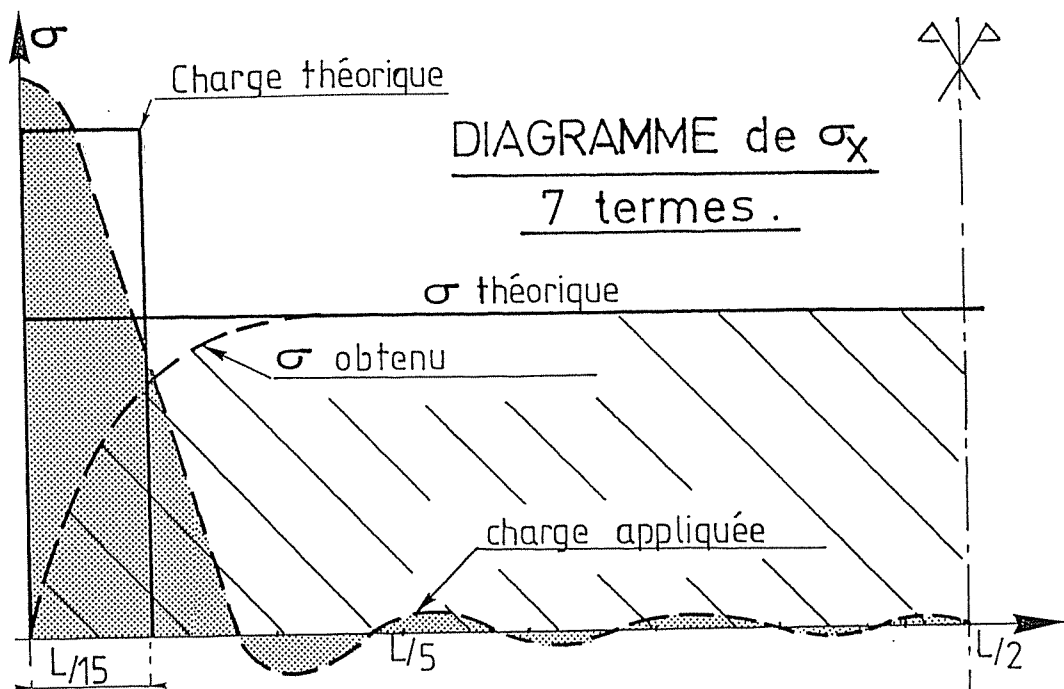


Figure 3.3.17

On peut être très satisfait des résultats avec 7 termes de la série. Et cela aussi bien au niveau déplacement $w(x=L/2)$ qu'au niveau de la contrainte maximale ainsi que de son évolution le long de l'axe X.

En effet en $x=L/10$ on a déjà $\sigma_{\text{Fourier}} = 95 \%$ de σ Théorique.
Avec 1 terme, les résultats sont moins bons, mais il s'agit là cependant

d'être très satisfait.

En effet :

- la flèche à mi-portée est déjà excellente (1 % d'écart)
- la contrainte quoique bien supérieure à la valeur réelle permet de se faire une excellente idée de celle-ci.

$$\frac{\sigma_{\max}}{F_{n=1}} = \frac{252,5}{1,264} = 200 \text{ N/mm}^2$$

III.5.3. Exemple 3

Appliquons cette fois le diagramme des efforts suivant (figure 3.3.18)

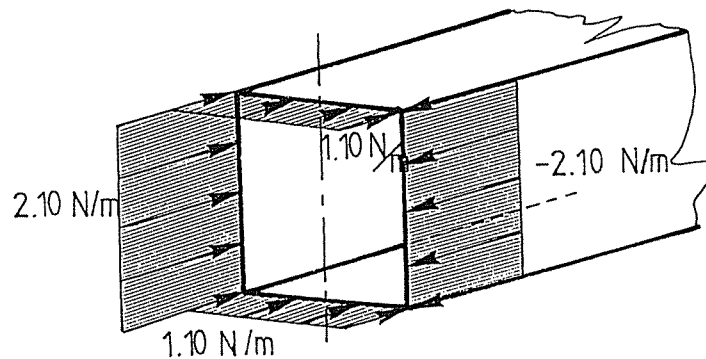


Figure 3.3.18

$$\text{Soit : } M = 6 \cdot 10^6 \text{ N.m}$$

$$N = 2 \cdot 10^6 \text{ N}$$

La Résistance des Matériaux donne $\sigma_{\min} = - 205 \text{ N/mm}^2$

$$\sigma_{\max} = 155 \text{ N/mm}^2$$

$$w = 0,0483 \text{ m}$$

La résolution avec 1 terme donne :

$$\text{en } x = L/2 \quad \sigma_{\min} = - 259 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{\max} = 196 \text{ N/mm}^2$$

$$w = 0,0485 \text{ m}$$

Ces résultats peuvent sembler s'écarter de la réalité, mais il suffirait de recommencer le calcul avec 7 termes pour améliorer les résultats. Néanmoins une bonne approche peut déjà être faite avec les résultats obtenus pour 1 terme

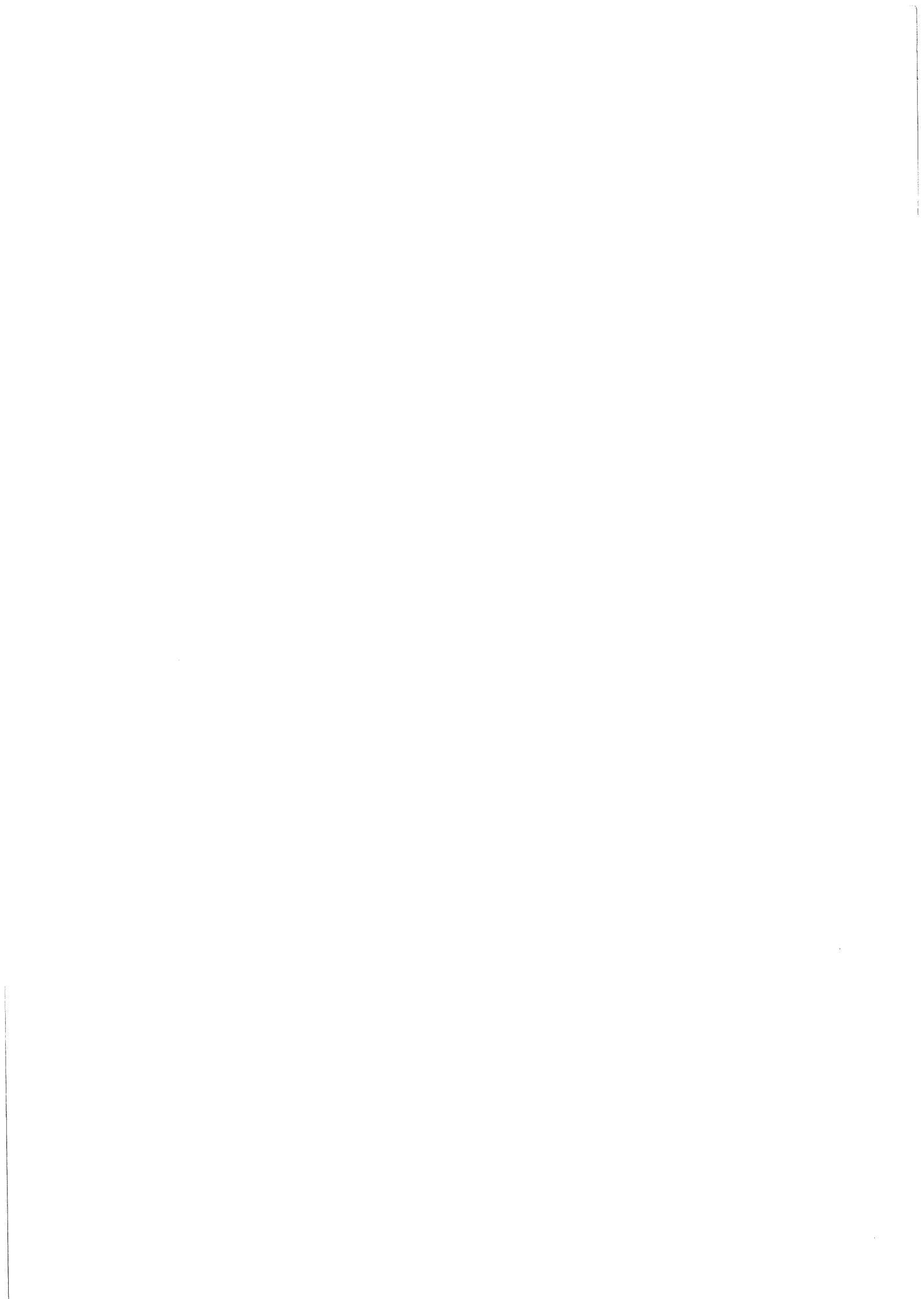
$$\frac{\sigma_{\min}^{(n=1)}}{F(n=1)} = \frac{-259}{1,264} = - 205 \text{ N/mm}^2$$

$$\frac{\sigma_{\max}^{(n=1)}}{F(n=1)} = \frac{196}{1,264} = + 155 \text{ N/mm}^2$$

Remarque :

Malgré les très bons résultats obtenus, il n'est pas dans nos intentions de vouloir généraliser à toutes les structures les propriétés observées.

Il est notoire que la flèche à mi-portée est presque toujours bien approximée avec un seul terme. Mais cette propriété n'est pas valable pour d'autres déplacements, contraintes ou éléments de réduction. De plus l'apparition des nervures (raidisseurs, aiguilles et traverses) compliquant fortement le problème, il n'est plus raisonnable de vouloir tirer des résultats fiables avec un terme unique de la série. Toutefois, ces quelques exemples montrent déjà la rapidité de convergence et l'exactitude des résultats obtenus à l'aide des expressions analytiques développées précédemment.



CHAPITRE IV
RELATION "DEPLACEMENT - FORCES DE BORD - MOMENTS DE BORD"

Notre but étant d'étudier la vanne reliée à son bras, il est devenu indispensable de pouvoir, non plus calculer les déplacements à partir de forces et moments de bord imposés mais au contraire de déterminer les forces et moments correspondant à un déplacement imposé, à savoir : la rotation du bras.

IV.1. CONSERVATION DES SECTIONS PLANES D'EXTREMITE

La liaison au sein d'une vanne-segment entre le bras et le corps de la vanne étant réalisée de manière très rigide, on peut supposer que la section transversale d'extrémité reste plane (figure 3.4.1.).

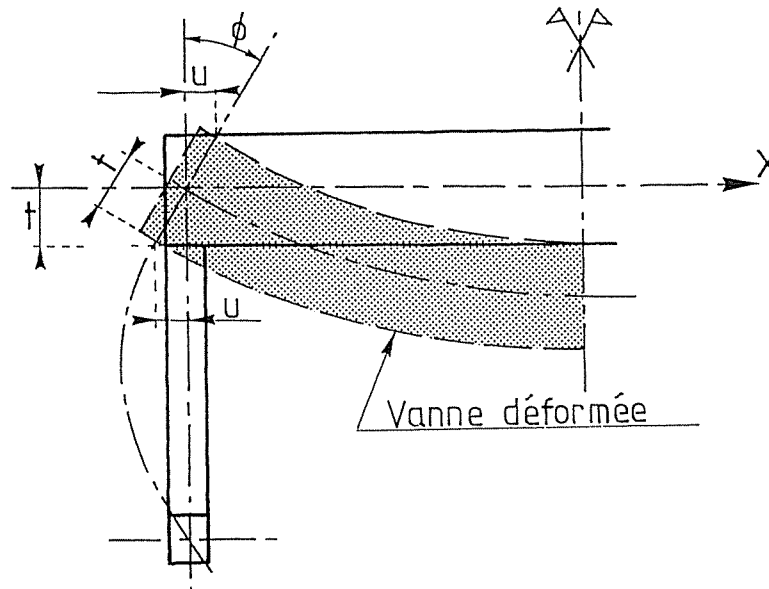


Figure 3.4.1.

Il en serait de même si la vanne était encastrée à ses extrémités en $x=0$ et $x=L$.

Si nous désignons par ϕ la rotation de la section d'extrémité, nous pouvons en tous points de cette section au niveau de la fibre moyenne, connaître les déplacements u de la coque à ses extrémités (3.4.1) (figure 3.4.1.).

$$u = \sin \phi \cdot t \quad (3.4.1)$$

Avec t , l'excentrement du point envisagé par rapport à l'axe de rotation de la vanne (figure 3.4.1.).

Soit \bar{u} le déplacement d'un point de même coordonnée (x, φ) mais pour lequel z est non nul donc non situé sur la surface de référence (figure 3.4.2), on a ainsi

$$\bar{u} = u - z \cdot \frac{dw}{dx}$$

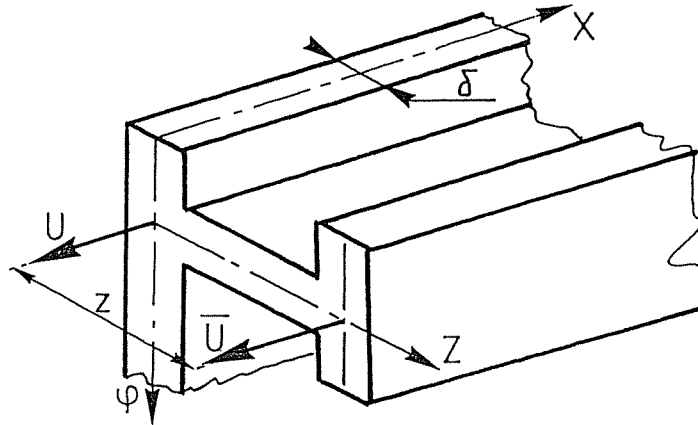


Figure 3.4.2.

De plus, la rotation dw/dx est imposée puisque la section d'extrémité reste plane.

Ainsi, prenons l'exemple de la Figure 3.4.3.

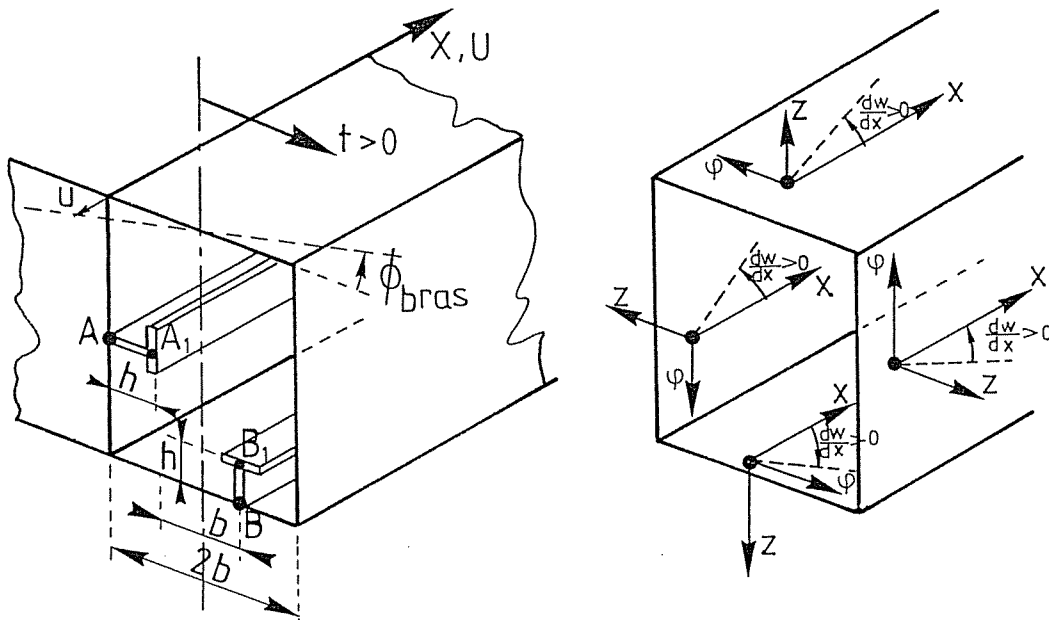


Figure 3.4.3.

Soit les deux points A et B situés au droit des raidisseurs en $z=0$, (figure 3.4.3.).

Soit A_1 et B_1 les 2 mêmes points, mais avec $z = -h$, h étant la hauteur des raidisseurs.

Entre ces points, on a les relations générales suivantes :

$$\bar{u}_{A_1} = u_A + h \left(\frac{dw}{dx} \right)_A \quad (3.4.2.a)$$

$$\bar{u}_{B_1} = u_B + h \left(\frac{dw}{dx} \right)_B \quad (3.4.2.b)$$

Soit une rotation d'ensemble ϕ de la section d'extrémité, on a alors par les expressions (3.4.1 et 3.4.2) :

$$\text{en A : } u_A = -b \cdot \sin \phi$$

$$\text{en B : } u_B = \left(\frac{b}{2} \right) \cdot \sin \phi$$

$$\text{en } A_1 : \bar{u}_{A_1} = -b \cdot \sin \phi + h \sin \phi$$

$$\text{en } B_1 : \bar{u}_{B_1} = \left(\frac{b}{2} \right) \cdot \sin \phi$$

Pour que les points A_1 et B_1 restent dans le plan défini par la rotation ϕ , il faut que :

$$\text{en A : } \left(\frac{dw}{dx} \right)_A = \sin \phi$$

$$\text{en B : } \left(\frac{dw}{dx} \right)_B = 0$$

Donc, pour une rotation donnée de la section d'extrémité, correspond en chaque point de la surface moyenne, un déplacement u et une rotation dw/dx déterminée.

IV.2. CAS DE LA POUTRE BI-APPUYÉE - DEPLACEMENTS D'EXTREMITES

Si l'on étudie cette vanne dans les conditions décrites dans la première partie de ce travail, à savoir des appuis simples aux extrémités $x=0$ et $x=L$, les conditions sont :

$$w = 0$$

$$v = 0$$

$$M_x = 0$$

$$N_x = 0$$

mais avec u et dw/dx libres.

En effet, aucune condition n'a été faite sur les déplacements u et sur les rotations dw/dx .

L'étude de cette poutre soumise à une pression hydrostatique montre que les sections ne restent pas planes ainsi que le schématise la figure 3.4.4 représentant les déplacements et les rotations en $x=0$.

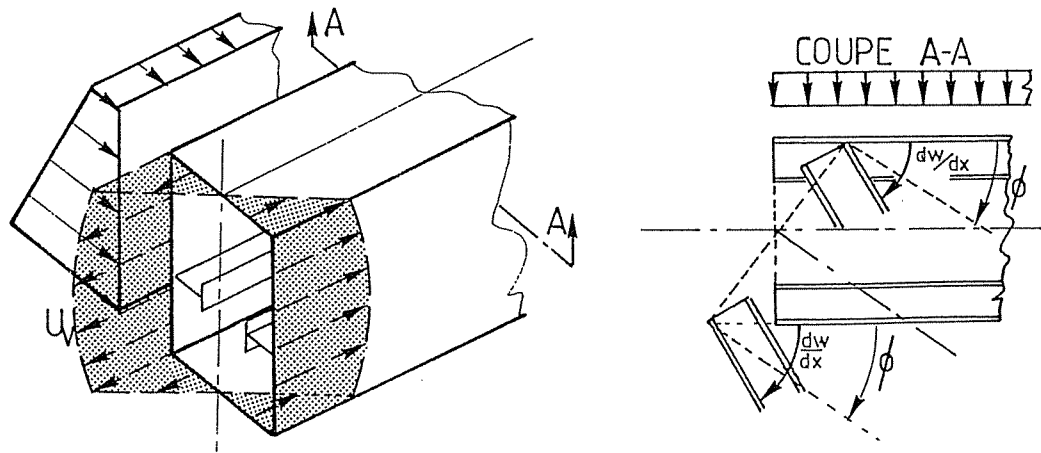


Figure 3.4.4.

IV.3. CAS D'UNE VANNE-SEGMENT

Comme expliqué précédemment pour la vanne-segment ainsi que pour beaucoup de structures en caisson, les sections d'extrémités sont fortement raidies et il est raisonnable d'admettre que ces sections restent planes. Les bras n'étant pas infiniment rigides, on a toujours une rotation des extrémités et par continuité, l'extrémité de la vanne subit la même rotation et donc un déplacement d'ensemble.

Nous noterons les déplacements dus à cette rotation par U_{bras} ou U_{br} et les rotations $(dw/dx)_{bras}$ ou plus simplement w'_{br} (figure 3.4.5.).

La différence entre U_v et U_{br} est la réduction de déplacement provoquée par la présence des bras par rapport au cas de la vanne sur appuis simples (figure 3.4.5.).

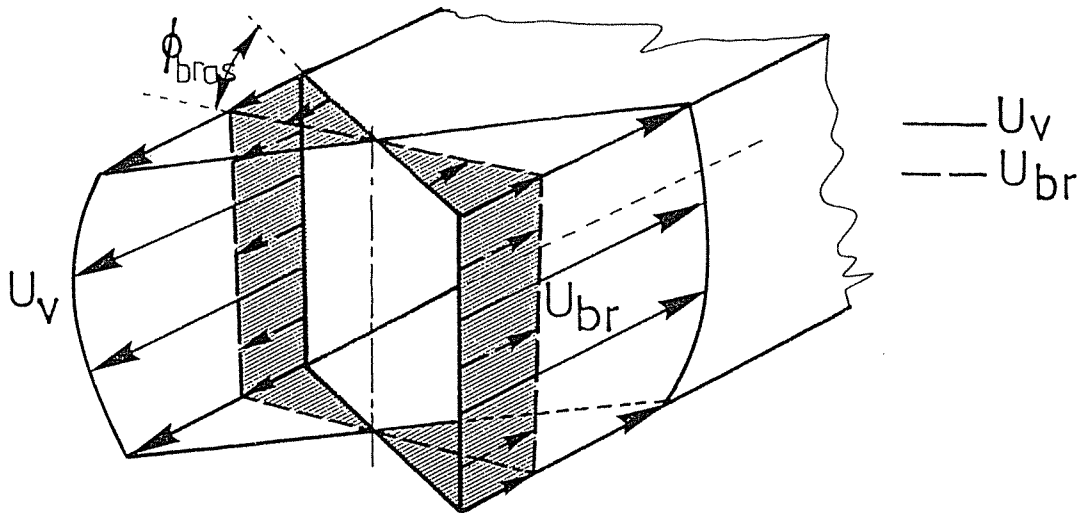


Figure 3.4.5.

Le problème se pose dès lors de déterminer les forces de bord $a(q\phi)^3 + b(q\phi)^2 + c(q\phi) + d$ (N/m)

et les moments de bord

$e(q\phi)^3 + f(q\phi)^2 + g(q\phi) + h$ (N.m/m)

de chaque panneau de manière à avoir des déplacements équivalant à $U_v - U_{br}$ et des rotations équivalant à $w'_v - w'_{br}$.

Soit $U_{E-B} = U_{\text{EFFETS DE BORD}}$, les déplacements créés par les forces et moments de bord qu'il faut comparer aux déplacements $U_v - U_{br}$ et soit $w'_{E-B} = w'_{\text{EFFETS DE BORD}}$, les rotations créées par ces mêmes forces et moments de bord qu'il faut comparer aux rotations $w'_v - w'_{br}$.

Il s'agit donc d'assurer **une continuité de déplacements** (u et w').

Remarque :

Il n'est pas possible de dissocier les effets des forces de bord de ceux créés par les moments de bord car un couplage existe entre ces deux effets. Il ne serait pas correct de vouloir annuler uniquement les déplacements u dus aux forces $F(\varphi)$, sans tenir compte des déplacements u engendrés par les moments de bord $G(\varphi)$. De même, les forces de bord $F(\varphi)$ créent des rotations w' , qu'il convient d'ajouter à celles produites par les moments $G(\varphi)$. On n'aura donc pas affaire à 2 systèmes distincts mais à un seul englobant tous les paramètres (a, b, c, \dots, q, h) de $F(\varphi)$ et $G(\varphi)$.

IV.4. MISE EN EQUATION DU PROBLEME

Pour chaque panneau, nous devons déterminer les 8 inconnues a, b, c, d, e, f, g, h des expressions de $F(\varphi)$ et $G(\varphi)$ (3.3.5 et 3.3.6). Pour une structure de n panneaux, il s'agit d'exprimer $8n$ conditions pour former un système de $8n$ équations à $8n$ inconnues. Nous sommes donc astreints à vérifier la continuité des déplacements u et des rotations w' de manière ponctuelle et non d'une manière continue. Par la suite, nous appellerons ces points où sont vérifiées ces conditions, des NOEUDS.

Il reste à savoir quelles conditions imposer et où les imposer, pour assurer le plus fiablement, la continuité aux noeuds mais aussi, entre les noeuds.

Nous avons 3 types de conditions possibles.

1. Imposer en un point (x, φ) que

$$U_{E-B}(x, \varphi) = U_V(x, \varphi) - U_{Br}(x, \varphi) \quad (\text{condition n}^\circ \text{ I}) \quad (3.4.3)$$

Il s'agit d'une **condition sur les déplacements u** .

2. Imposer en un point (x, φ) que

$$w'_{E-B}(x, \varphi) = w'_V(x, \varphi) - w'_{Br}(x, \varphi) \quad (\text{condition n}^\circ \text{ II}) \quad (3.4.4)$$

Il s'agit d'une **condition sur les rotations w'** .

3. Imposer qu'à la jonction entre deux panneaux adjacents, les efforts de bord soient les mêmes (figure 3.4.6.)

$$F_1(\varphi = (\varphi_0)_1) = F_2(\varphi = 0) \quad (\text{condition n}^\circ \text{ III}) \quad (3.4.5)$$

ce qui s'écrit aussi :

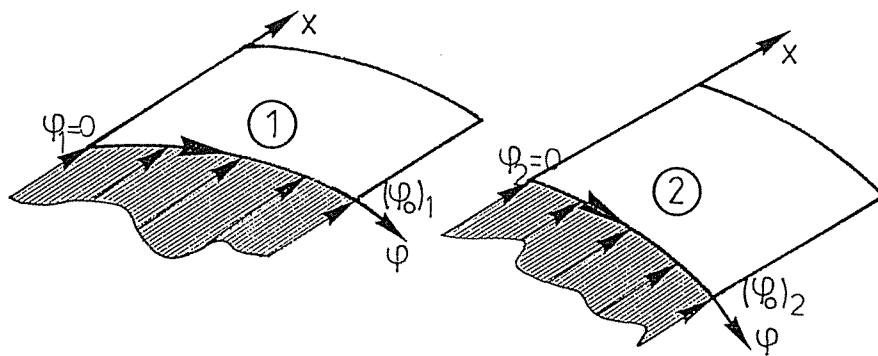


Figure 3.4.6.

$$a_1(q(\varphi_0)_1)^3 + b_1(q(\varphi_0)_1)^2 + c_1(q(\varphi_0)_1) + d_1 = d_2$$

Il s'agit d'une condition de continuité sur les forces.

Théoriquement, nous pouvons donc étudier une structure en imposant :
 - soit uniquement des conditions du type I et II,
 - soit des conditions des 3 types I, II et III.

Les conditions type III ne peuvent suffire car elles ne permettent d'écrire qu'une seule équation par panneau alors que 8 sont nécessaires. Les conditions type III doivent donc toujours être couplées au moins avec des conditions type I, l'inverse n'étant pas vrai.

Rappelons que les conditions déplacements (3.4.3) et rotations (3.4.4) indispensables mathématiquement pour la résolution des équations se traduisent physiquement par une rotation ϕ des sections d'extrémités, celles-ci devant rester des sections planes.

Il est par contre plus difficile de justifier l'emploi des conditions de continuité des efforts de bord $F(\varphi)$, cette continuité n'étant pas indispensable mathématiquement. Physiquement, leur justification est évidente car il existe un lien étroit entre les forces extérieures de bord $F(\varphi)$ et les efforts normaux N_x agissant au sein de la structure. L'exemple n° 1 (§ III.5.1., partie III) montre clairement ce lien entre $F(\varphi)$ et les N_x au sein de la structure.

Théoriquement, la continuité des forces de bord N_D (3.4.3) est imposée implicitement vu que la transmission des efforts de la vanne aux bras se fait au sein de la matière où la continuité des forces internes est garantie. Pour que cette continuité soit vérifiée, il nous suffit donc de garantir parfaitement la continuité des déplacements (3.4.3 et 3.4.4).

Pratiquement, la continuité des déplacements n'est imposée que ponctuellement, globalement la continuité est respectée mais localement des écarts subsistent. De ce fait, on observera que la continuité des forces n'est également respectée qu'approximativement. Compte tenu de cela, il nous paraît donc utile d'envisager la possibilité d'imposer une variation continue entre les forces de bord de deux panneaux adjacents (3.4.5).

Nous reviendrons plus tard sur le choix des conditions à imposer, ainsi que sur les conséquences de ce choix.

IV.5. PROCESSUS DE RESOLUTION

Comment résout-on concrètement le cas d'une vanne-segment ?

IV.5.1.

Soit une vanne caisson constituée par n panneaux (figure 3.4.7.). On détermine les U_v^i , $i = (1, 4.n)$ et les W_v^i , $i = (1, 4.n)$ lorsque la vanne bi-appuyée est soumise à la charge extérieure (figure 3.4.7.).

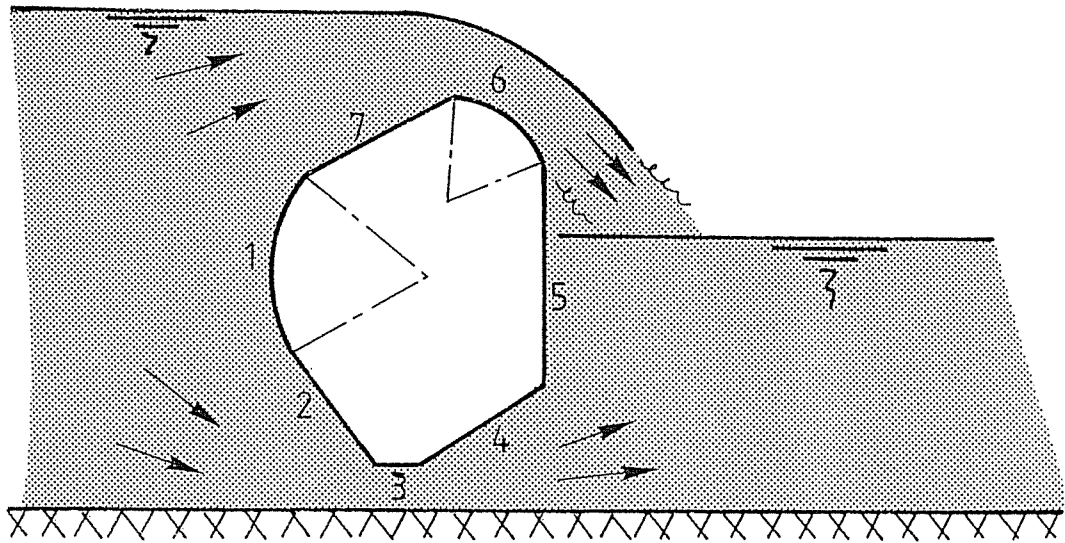


Figure 3.4.7.

IV.5.2.

On détermine, en parallèle avec le paragraphe IV.5.1. dont beaucoup d'opérations sont identiques, les U_{E-B} et W_{E-B} correspondant aux $4.n$ cas de charge unitaire de forces de bord possibles (figure 3.3.3.) et aux $4.n$ cas de charge unitaire de moments de bord.

Par panneau, les 8 cas de charge unitaire de bord, 4 pour N_b et 4 pour M_b sont :

<u>Forces de bord</u>		<u>Moments de bord</u>	
$F_1 = 1000$	N/m (3.4.6.a)	$G_1 = 1000$	N.m/m (3.4.7.a)
$F_2 = 1000 \cdot q\varphi$	N/m (3.4.6.b)	$G_2 = 1000 \cdot q\varphi$	N.m/m (3.4.7.b)
$F_3 = 1000 \cdot (q\varphi)^2$	N/m (3.4.6.c)	$G_3 = 1000 \cdot (q\varphi)^2$	N.m/m (3.4.7.c)
$F_4 = 1000 \cdot (q\varphi)^3$	N/m (3.4.6.d)	$G_4 = 1000 \cdot (q\varphi)^3$	N.m/m (3.4.7.d)

On a donc :

les $U^a/j, U^b/j, U^c/j, U^d/j, U^e/j, U^f/j, U^g/j, U^h/j$ avec $j = (1, n)$
 $E-B \quad E-B \quad E-B \quad E-B \quad E-B \quad E-B \quad E-B \quad E-B$

et les $W^{a/j}, W^{b/j}, W^{c/j}, W^{d/j}, W^{e/j}, W^{f/j}, W^{g/j}, W^{h/j}$ avec $j = (1, n)$
 $E-B \quad E-B \quad E-B \quad E-B \quad E-B \quad E-B \quad E-B \quad E-B$

les indices a, b, c, d, e, f, g, h font référence aux types de cas de charges unitaire F_1, F_2, F_3, F_4 (3.4.6) et G_1, G_2, G_3, G_4 (3.4.7).

Et soit j l'indice de panneau $j = (1, n)$.

IV.5.3.

Pour une valeur de la rotation d'extrémité ϕ connue, correspond en un point du panneau j, le déplacement U_{br}^j et la rotation W_{br}^j ; ces valeurs sont à déterminer comme expliqué paragraphe IV.1.

IV.5.4.

Pour rester en toute généralité, nous imposerons pour le panneau j, t_j conditions; ce nombre est variable d'un panneau à l'autre, il faut simplement que $\sum_{j=1}^n t_j$ soit égal aux 8.n conditions possibles.

Pour le panneau j, nous répartirons les t_j conditions en k_j conditions déplacements (3.4.3), l_j conditions sur les rotations (3.4.4) et une condition de continuité des forces de bord (3.4.5); on aura ainsi :

$$t_j = k_j + l_j + 1$$

Le choix des points auxquels va être assurée la condition déplacement sur u ne doit pas obligatoirement être identique à celui des points pour lesquels la continuité de la rotation w' sera imposée.

De plus, la position et le nombre de ces points peut varier d'un panneau à l'autre. La seule obligation est : **de ne jamais exprimer deux fois la même condition** (nous y reviendrons) et **avoir un nombre total de conditions** (3.4.3 à 3.4.5) **égal à 8.n**, avec n le nombre de panneaux.

$$\text{Il faut donc } \sum_{j=1}^n (k_j + l_j + 1) = 8.n \quad (3.4.8)$$

Le choix de ces points est d'ailleurs fondamental pour la qualité des résultats et fera l'objet du chapitre suivant (Chapitre V).

Ecrivons à présent le système d'équations permettant d'obtenir les forces et les moments de bord pour une rotation ϕ donnée.

$$\underline{\text{Les équations sur les déplacements } u} \quad (3.4.9)$$

Panneau 1, k_1 conditions en $\phi_i, i=1, k_1$

$$\frac{1}{1000} [a_1 U_{E-B}^{a/1}(\varphi_1) + b_1 U_{E-B}^{b/1}(\varphi_1) + \dots + g_1 U_{E-B}^{g/1}(\varphi_1) + h_1 U_{E-B}^{h/1}(\varphi_1)]$$

$$= U_v^1(\varphi_1) - U_{br}^1(\Phi, \varphi_1)$$

·
·
·

$$\frac{1}{1000} [a_1 U_{E-B}^{a/1}(\varphi_i) + b_1 U_{E-B}^{b/1}(\varphi_i) + \dots + g_1 U_{E-B}^{g/1}(\varphi_i) + h_1 U_{E-B}^{h/1}(\varphi_i)]$$

$$= U_v^1(\varphi_i) - U_{br}^1(\Phi, \varphi_i)$$

·
·
·

Panneau 2
k₂ conditions en φ_i , i=1, k₂

·
·
·

Panneau j
k_j conditions en φ_i , i=1, k_j

·
·
·
·

$$\frac{1}{1000} [a_j U_{E-B}^{a/j}(\varphi_i) + b_j U_{E-B}^{b/j}(\varphi_i) + \dots + g_j U_{E-B}^{g/j}(\varphi_i) + h_j U_{E-B}^{h/j}(\varphi_i)]$$

$$= U_v^j(\varphi_i) - U_{br}^j(\Phi, \varphi_i)$$

·
·
·

Panneau n,
k_n conditions en φ_i , i=1, k_n

·

$$\frac{1}{1000} [a_n U_{E-B}^{a/n}(\varphi_{k_n}) + b_n U_{E-B}^{b/n}(\varphi_{k_n}) + \dots + g_n U_{E-B}^{g/n}(\varphi_{k_n}) + h_n U_{E-B}^{h/n}(\varphi_{k_n})]$$

$$= U_v^n(\varphi_{k_n}) - U_{br}^n(\Phi, \varphi_{k_n})$$

avec j l'indice relatif au numéro de panneau
 i l'indice relatif au numéro du point envisagé sur le panneau j , $i=1, k_j$

Soit donc n_1 conditions sur $u = \sum_{j=1}^n k_j$

Les équations sur les rotations w' (3.4.10)

Panneau 1

l_1 conditions en φ_i , $i=1, l_1$

·
·
·

$$\frac{1}{1000} [a_1 W'_{E-B}{}^{a/1}(\varphi_1) + b_1 W'_{E-B}{}^{b/1}(\varphi_1) + \dots + g_1 W'_{E-B}{}^{g/1}(\varphi_1) + h_1 W'_{E-B}{}^{h/1}(\varphi_1)]$$

$$= W'_v{}^1(\varphi_1) - W'_{br}{}^1(\Phi, \varphi_1)$$

Panneau 2

l_2 conditions en φ_i , $i=1, l_2$

·
·
·

Panneau j

l_j conditions en φ_i , $i=1, l_j$

·
·
·

$$\frac{1}{1000} [a_j W'_{E-B}{}^{a/j}(\varphi_i) + b_j W'_{E-B}{}^{b/j}(\varphi_i) + \dots + g_j W'_{E-B}{}^{g/j}(\varphi_i) + h_j W'_{E-B}{}^{h/j}(\varphi_i)]$$

$$= W'_v{}^j(\varphi_i) - W'_{br}{}^j(\Phi, \varphi_i)$$

·
·
·

Panneau n

l_n conditions en φ_i , $i=1, l_n$

·
·
·

$$\frac{1}{1000} [a_n W_{E-B}^{a/n} (\varphi_{1_n}) + b_n W_{E-B}^{b/n} (\varphi_{1_n}) + \dots + g_n W_{E-B}^{g/n} (\varphi_{1_n}) + h_n W_{E-B}^{h/n} (\varphi_{1_n})]$$

$$= W_v^n (\varphi_{1_n}) - W_{br}^n (\Phi, \varphi_{1_n})$$

avec j l'indice relatif au numéro de panneau
i l'indice relatif au numéro du point envisagé sur le panneau j, i=1, l_j

Soit donc n₂ conditions rotations = $\sum_{j=1}^n l_j$

Les équations dues à la continuité des forces (3.4.11)

$$a_1 \cdot (q \varphi_0^1)^3 + b_1 \cdot (q \varphi_0^1)^2 + c_1 \cdot (q \varphi_0^1) + d_1 = d_2$$

⋮

$$a_i \cdot (q \varphi_0^i)^3 + b_i \cdot (q \varphi_0^i)^2 + c_i \cdot (q \varphi_0^i) + d_i = d_{i+1}$$

⋮

$$a_n \cdot (q \varphi_0^n)^3 + b_n \cdot (q \varphi_0^n)^2 + c_n \cdot (q \varphi_0^n) + d_n = d_1$$

avec i l'indice relatif au numéro de panneau.

Ayant résolu ce système dans l'hypothèse où Φ est connu, on possède les répartitions de bord $F(\varphi)$ et $G(\varphi)$ correspondant à la rotation de bord.

Soit M_v le moment résultant de ces répartitions.

IV.5.5.

Il est nécessaire de connaître la relation entre Φ et M_{br} le moment à appliquer à l'extrémité du bras pour que cette extrémité subisse cette rotation Φ .

$$M_{br} = f(\Phi) \tag{3.4.13}$$

Ainsi, en première approximation, on peut retenir

$$\Phi = M_{br} \cdot L/3 \cdot EI$$

avec I = inertie du bras
L = longueur du bras

Cette loi $M = f(\Phi)$ est valable si le bras est à inertie constante et est articulé à son autre point d'attache (figure 3.4.8).

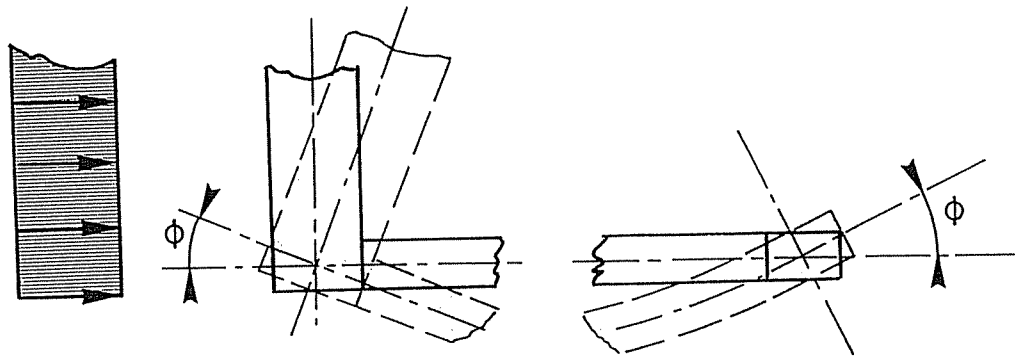


Figure 3.4.8

Si cette dernière rotation était bloquée, il s'agirait de prendre :

$$\Phi = M_{br} \cdot L/4 \cdot EI$$

IV.5.6.

Pour deux valeurs de Φ , nous allons procéder à la détermination des inconnues de bord.

Prenons :

$$\Phi = \Phi_E^1 \quad (3.4.14.a)$$

$$\Phi = \Phi_E^2 \quad (3.4.14.b)$$

La première valeur de Φ est en général par souci de facilité, $\Phi = 0$ (bras infiniment rigide).

La seconde est à fixer par le concepteur, celui-ci prend une valeur quelconque ayant juste l'ordre de grandeur correct. Il peut pour cela s'aider des résultats obtenus au paragraphe IV.5.1.

Soit M_V^1 et M_V^2 (3.4.15.a et b) les moments résultants des répartitions de bord correspondant aux 2 valeurs de Φ choisies (3.4.14.a et b).

IV.5.7.

Il s'agit maintenant de déterminer la valeur de $\Phi = \Phi_E^*$ qui assure la compatibilité des rotations du bras et de la vanne. A cette valeur de Φ_E^* est associé un moment résultant M_{br}^* .

- à Φ_E^1 correspondent deux moments, M_{br}^1 par la relation $M_{br} = f(\Phi)$ et M_V^1 moment résultant des répartitions de bord obtenues.

- à Φ_E^2 correspondent de la même manière M_{br}^2 et M_V^2

Nous sommes donc en présence de deux fonctions (figure 3.4.9)

$$M_{br} = f(\Phi) \quad (3.4.13) \quad \text{et} \quad M_V = g(\Phi) \quad (3.4.15)$$

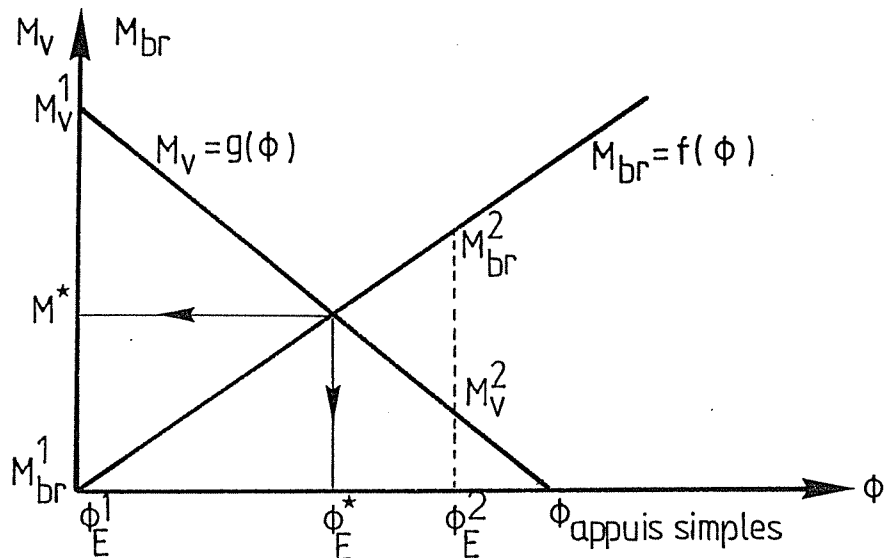


Figure 3.4.9.

Physiquement, on sait que la fonction M_{br} est croissante à l'opposé de la fonction M_V qui est décroissante. De plus, ces fonctions sont linéaires puisque nous travaillons en régime parfaitement élastique où le principe de la superposition est applicable.

D'où, on détermine la valeur finale de ϕ_E^* comme suit :

$$M_{br} = M_{br}^{(2)} + \left(\frac{M_{br}^{(1)} - M_{br}^{(2)}}{\phi_E^{(1)} - \phi_E^{(2)}} \right) (\phi - \phi_E^{(2)})$$

$$M_V = M_V^{(2)} + \left(\frac{M_V^{(1)} - M_V^{(2)}}{\phi_E^{(1)} - \phi_E^{(2)}} \right) (\phi - \phi_E^{(2)})$$

D'où :

$$\phi_E^* = \phi_E^{(2)} + \frac{(M_{br}^{(2)} - M_V^{(1)})}{(M_V^{(2)} - M_V^{(1)}) - (M_{br}^{(2)} - M_{br}^{(1)})} (\phi_E^{(2)} - \phi_E^{(1)}) \quad (3.4.16)$$

Ayant ϕ_E^* , on détermine comme au paragraphe IV.5.6. le moment résultant cherché M_V^* (3.4.15). A ϕ_E^* correspond aussi M_{br}^* (3.4.13) et l'on peut vérifier que $M_V^* = M_{br}^*$.

Cette vérification faite, on poursuit les développements analytiques de manière identique à la seconde partie de cette thèse (chapitre VIII) en vue d'obtenir les déplacements et les éléments de réduction au sein de toute la structure. Il faudra cependant additionner cette fois aux termes dus à la charge extérieure, les effets de bord correspondant au cas

$$\phi = \phi_E^* \text{ (figure 3.4.10).}$$

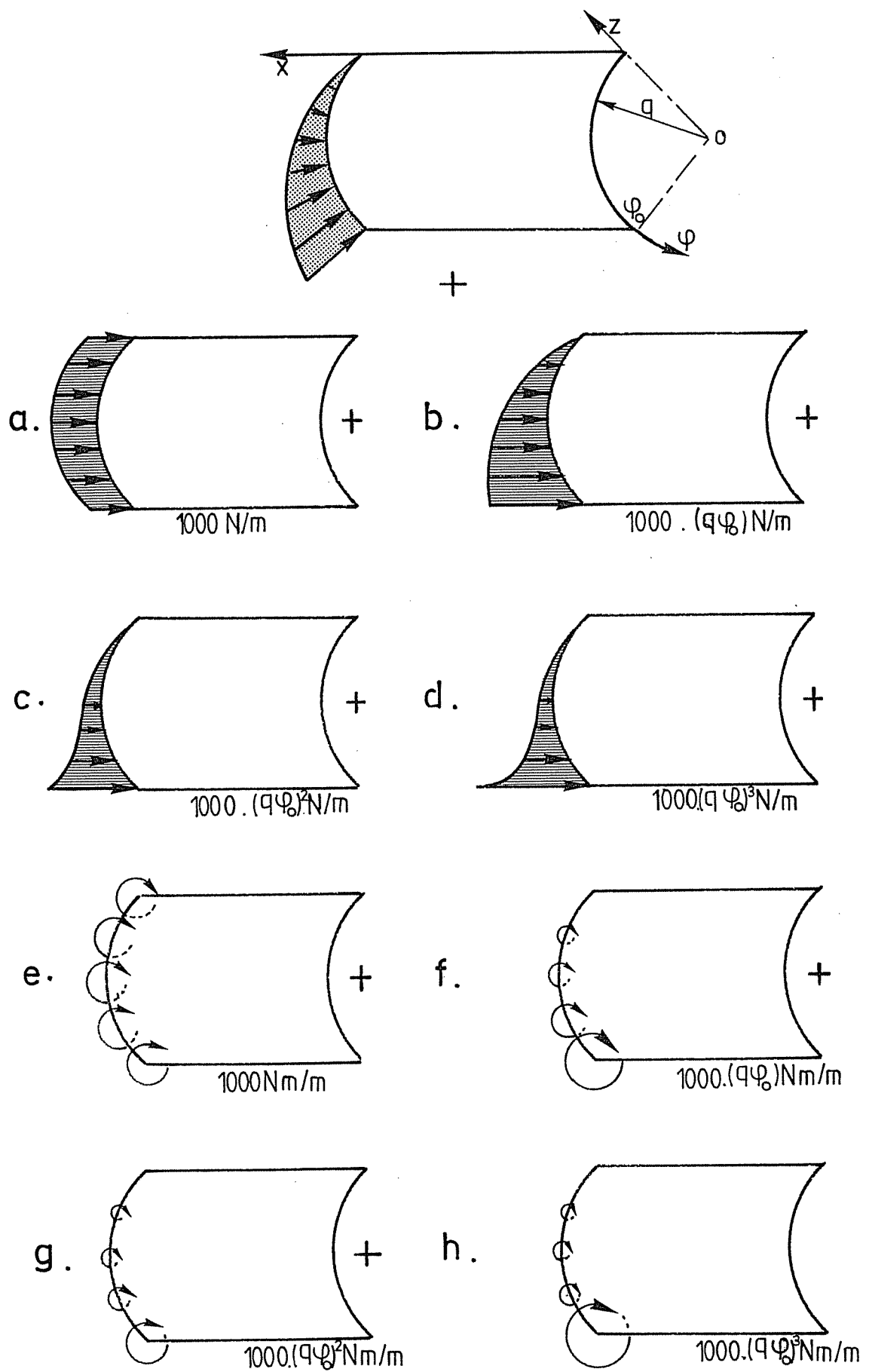


Figure 3.4.10.

CHAPITRE V CHOIX DES CONDITIONS DE BORD

Notre but est de définir une règle pour le choix des conditions de bord, règle qui répond aux critères suivants :

- être **systématique**, car comme nous le verrons par la suite trop de paramètres interviennent pour qu'un utilisateur puisse réaliser "le choix optimum" sans être amené à faire de nombreux tests préliminaires.
- être **efficace**, c'est-à-dire, conduire automatiquement vers des résultats donnant entière satisfaction.

Pour ce faire, nous allons envisager les différentes possibilités qui se présentent à nous et nous réaliserons les choix adéquats de manière à répondre au mieux aux deux critères mentionnés ci-dessus.

Ainsi, allons-nous envisager (§ V.1) l'opportunité d'utiliser des conditions du type (3.4.5) qui imposent la continuité des forces de bord à la jonction de divers panneaux.

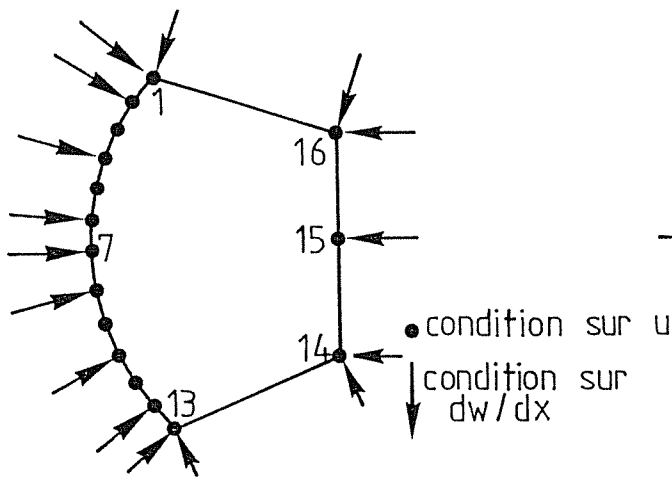
Cette analyse faite, nous aborderons (§ V.2.) le problème du positionnement des points où seront vérifiées les égalités des déplacements et des rotations. A priori, pour une structure à n panneaux, les $8n$ conditions peuvent être réparties d'une manière quelconque entre la condition I sur u (3.4.3) et la condition II sur w' (3.4.4). Cette répartition choisie, le choix des points $P(x, \varphi)$ est lui aussi tout-à-fait libre. Les points peuvent être regroupés sur certains panneaux (figure 3.5.1) et ne doivent pas forcément être les mêmes pour les conditions sur u et sur w' (figure 3.5.2). Seules des considérations d'efficacité et de facilité pourront guider notre choix.

Nous montrerons également (§ V.3.) que les forces de bord $F(\varphi)$ ne peuvent suffire pour imposer efficacement à la fois des conditions sur u et sur w' . Ainsi la combinaison "forces $F(\varphi)$ - moments $G(\varphi)$ " sera une condition sine qua non à l'obtention de résultats performants.

Remarques :

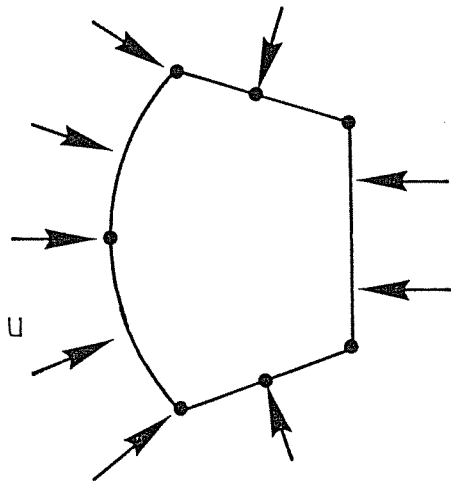
Si les forces ou les moments unitaires (3.4.6 et 3.4.7), formant les champs de bord (3.3.5 et 3.3.6) sont directement liés à un panneau, il n'en est pas de même des noeuds auxquels vont être imposées les conditions (3.4.3 et 3.4.4).

Les noeuds sont des points particuliers de la structure globale, ils n'ont pas de relation privilégiée avec le panneau sur lequel ils sont situés. Il n'y a donc pas de lien entre le nombre de paramètres relatifs au panneau i et le nombre de conditions imposées en des noeuds de ce panneau. Pour un panneau j quelconque (§ IV.5.4.), nous avons toujours 8 paramètres de forces et moments de bord, mais par contre un nombre quelconque de conditions t_j imposées en des noeuds de ce panneau. Il n'est en effet pas nécessaire que $t_j = k_{j+1, j+1} = 8$ car il suffit uniquement de vérifier la relation (3.4.8), à



- . 16 conditions u dont 13 sur le même panneau
- . 16 conditions w' dont 9 sur le même panneau

Figure 3.5.1



- . 7 conditions u
- . 9 conditions w'
- . un noeud est soumis à une condition sur u et/ou sur w'

Figure 3.5.2.

$$\text{savoir } \sum_{j=1}^n t_j = 8.n$$

Prenons l'exemple de la figure 3.5.1., une structure constituée de 4 panneaux ($4 \times 8 = 32$ paramètres) pour laquelle 22 des 36 conditions nécessaires sont imposées en des points du même panneau.

De plus, les noeuds placés à la jonction de 2 panneaux (ex : les noeuds 1 et 13 de la figure 3.5.1), bien que par définition situés sur 2 panneaux, ne doivent être considérés qu'une seule fois comme pour un point quelconque de la structure (ex : noeud 7). En effet, la continuité des déplacements, ainsi que celle des éléments de réduction, est déjà assurée par le principe même de la méthode; ces continuités étant déjà imposées par les équations (2.8.25 et 26).

Ces équations permettent, en effet, l'assemblage des divers cylindres complets en vue de reconstituer la structure composée de coques cylindriques réelles (figure 2.6.2).

V.1. AVANTAGES ET INCONVENIENTS DU CHOIX DES CONDITIONS DE CONTINUITÉ DES FORCES DE BORD.

La continuité des déplacements et des rotations entre les bras et la vanne n'étant imposée que ponctuellement, la continuité des forces de bord n'est aussi vérifiée qu'approximativement (figure 3.5.9). La question est donc de voir si un meilleur respect de ces conditions de continuité des forces de bord influencerait positivement le résultat final. De telles conditions se justifieront donc si nous montrons que leur emploi conduit toujours, d'une manière significative, vers de meilleurs résultats.

Prenons quelques exemples au travers desquels nous examinerons d'abord l'influence positive ou négative de la condition III (3.4.5) sur les déplacements u et sur les rotations w'.

V.1.1. Exemple n°1

Soit un caisson de 15 m de long et de 3 m x 1 m x 0,01 m de section (figure 3.5.3) dont les parois sont raidies par 2 lits de traverses, des aiguilles formant des cadres rigides et des raidisseurs (figure 3.5.4).

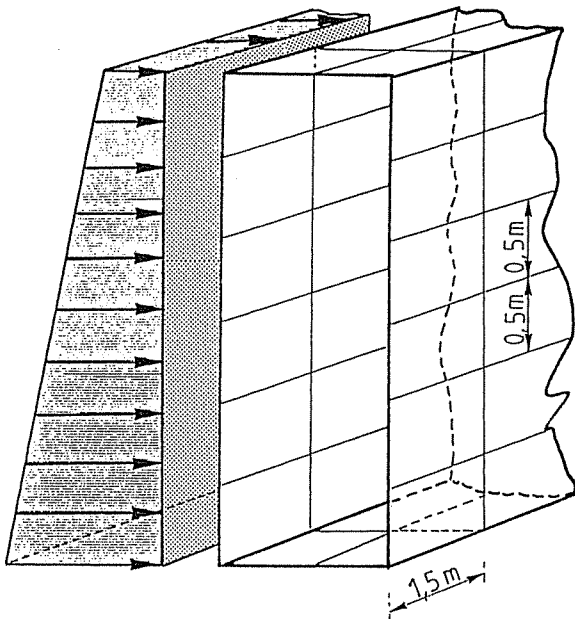


Figure 3.5.3.

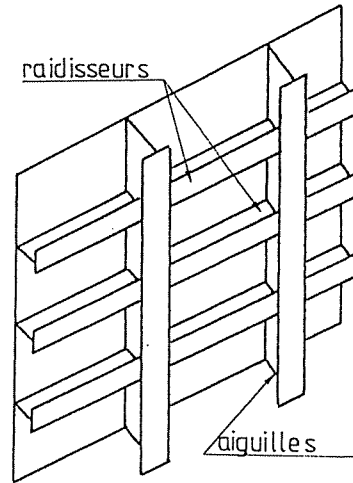


Figure 3.5.4.

La structure est soumise à une charge hydraulique définie figure 3.5.3. et dont les extrémités seront fixées de manière telle que nous les assimilerons à des encastremements parfaits.

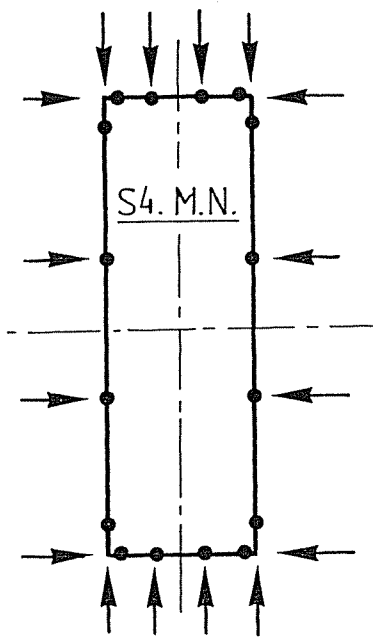
Discretisons cette structure en 4 panneaux et étudions la sous la charge extérieure à laquelle s'ajoutent les forces et moments de bord, $F(\varphi)$ et $G(\varphi)$, nécessaires pour imposer aux sections d'extrémités de rester fixes et planes.

Comparons les résultats pour 4 variantes définies par des combinaisons différentes entre les conditions I, II et III.

A savoir, le cas S4.M.N (figure 3.5.5.), le cas S4.M.N.C. (figure 3.5.6), le cas S4.N (figure 3.5.7), le cas S4.N.C. (figure 3.5.8).

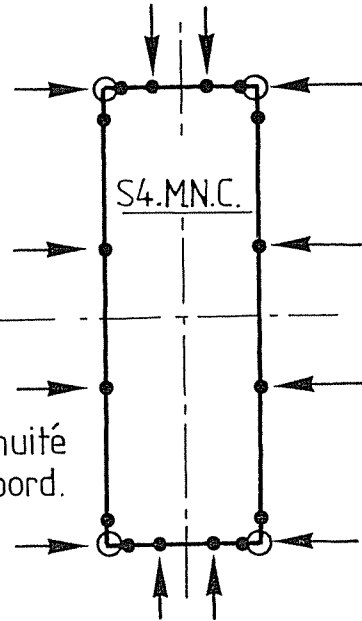
Les abréviations S4.M.N., S4.M.N.C., ... définissent la structure (S4, structure à 4 panneaux), les effets de bord utilisés (M pour les moments $G(\varphi)$ et N pour les forces $F(\varphi)$), les conditions imposées (C comme continuité entre forces de bord). L'absence d'un symbole (M, N ou C) signifie que cet effet n'est pas utilisé ou que cette condition n'est pas imposée.

Attachons-nous plus particulièrement à la comparaison de S4.M.N avec S4.M.N.C et de S4.N avec S4.N.C. Dans les deux cas de comparaison, la différence se situe au niveau de l'utilisation des conditions de continuité des forces de bord.



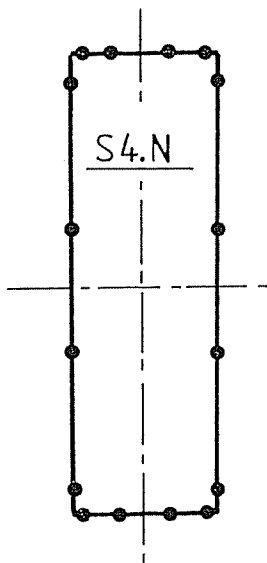
- . 16 conditions sur u
- . 16 conditions sur w'

Figure 3.5.5.



- . 16 conditions sur u
- . 12 conditions sur w'
- . 4 conditions de continuité des forces de bord

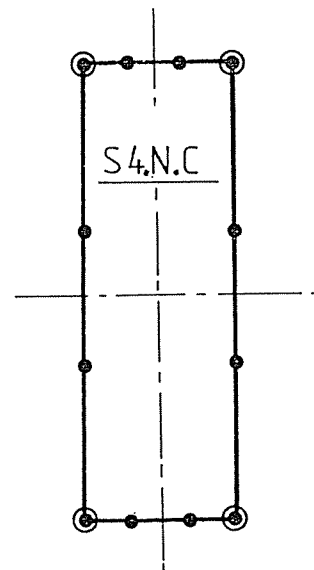
Figure 3.5.6.



- . 16 conditions sur u

Figure 3.5.7.

- condition sur u .
- continuité des forces de bord.



- . 12 conditions sur u
- . 4 conditions de continuité des forces de bord

Figure 3.5.8.

V.1.1.1. Comparaison entre S4.M.N et S4.M.N.C

Les diagrammes des forces de bord $F(\varphi)$ sont représentés figure 3.5.9 et ceux des moments $G(\varphi)$ figure 3.5.10.

Définissons par résiduelle, la différence entre le résultat théorique et le résultat obtenu; il s'agit, bien sûr, d'obtenir les valeurs résiduelles les plus faibles possibles.

L'allure des déplacements résiduels u dans les sections d'extrémités de la structure chargée et encastree est donnée figure 3.5.11.

La figure 3.5.12 donne les rotations résiduelles.

Dans ces deux dernières figures 3.5.11 et 3.5.12 on trouve également les déplacements u et les rotations w' des sections d'extrémités si les déformations avaient été libres dans ces sections d'extrémités.

C'est en rapport avec ces déplacements qu'il convient de comparer les valeurs résiduelles pour connaître la précision avec laquelle nous avons obtenu des sections d'extrémités planes.

Un résumé des valeurs résiduelles absolues et relatives obtenues est constitué par le tableau 3.5.1.

Observations

Figure 3.5.9.

Pour les deux variantes, les allures des diagrammes de forces de bord sont fort semblables et on note de faibles écarts entre les forces de bord des panneaux jointifs. La condition de continuité des forces de bord est donc automatiquement satisfaite dans la variante S4.M.N, sans avoir dû imposer cette condition (3.4.5) comme dans la variante S4.M.N.C. La valeur du moment résultant autour de l'axe vertical est d'ailleurs la même pour les deux variantes, $M_{F(\varphi)} = 2,80 \cdot 10^6$ N.m, cela confirme la similitude des résultats.

De plus, l'allure de ces diagrammes des forces extérieures est fort semblable aux diagrammes des contraintes qui existent à l'extrémité d'une poutre fléchie encastree. Ceci confirme le lien étroit qui existe entre les forces internes à la structure N_x et les forces de bord $F(\varphi)$.

Figure 3.5.10

Les diagrammes des moments de bord pour les panneaux verticaux sont identiques pour les 2 variantes. Ainsi, obtient-on un moment résultant de $M_{G(\varphi)} = 0,85 \cdot 10^6$ N.m. La différence au niveau des panneaux horizontaux s'explique par les conditions plus nombreuses en w' exprimées dans la variante S4.M.N (figure 3.5.5). Globalement le moment résultant d'axe horizontal est nul pour les 2 variantes.

Figure 3.5.9. et Figure 3.5.10

Connaissant la charge, le moment d'encastrement théorique d'une poutre encastree est $PL^2/12 = 3,66 \cdot 10^6$ N.m.

L'addition des 2 moments $M_{F(\varphi)}$ et $M_{G(\varphi)}$ donne dans les 2 cas envisagés $3,75 \cdot 10^6$ N.m.

Ce moment résultant n'est, en fait, que le moment appliqué à l'extrémité libre pour simuler l'encastrement. L'écart de 2 % enregistré est tout à fait acceptable vu le développement en série de Fourier limité à 7 termes.

Figure 3.5.11 et Figure 3.5.12

On constate que les valeurs résiduelles sont faibles et relativement homogènes dans toute la structure, bien que les résultats soient bien plus satisfaisants concernant u (figure 3.5.11) que w' (figure 3.5.12).

Remarque : Les diagrammes de u et w' pour la structure bi-appuyée ne sont pas à la même échelle que les u et w' résiduels.

$F(\varphi) - N_b$

Forces de bord.

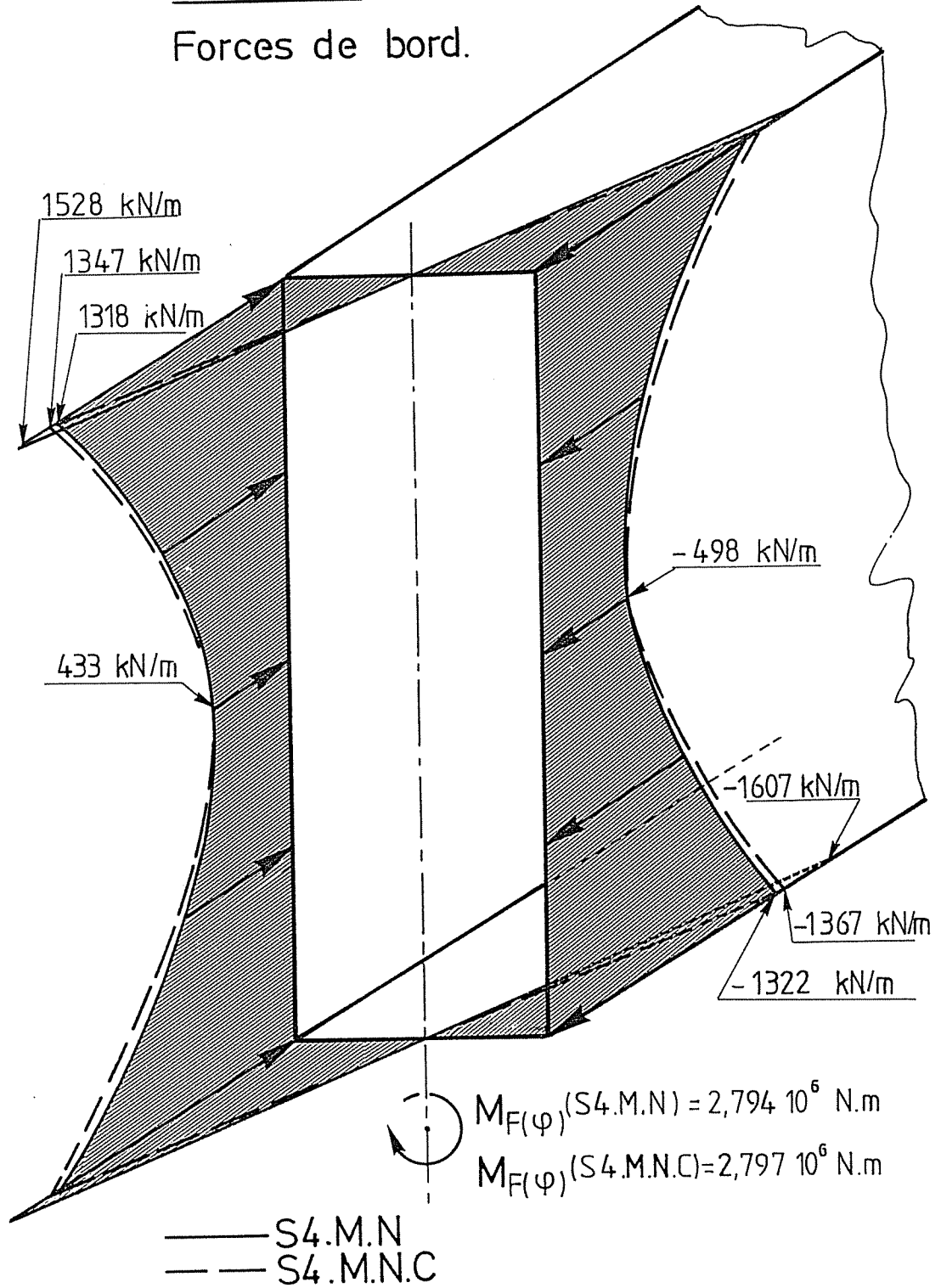


Figure 3.5.9.

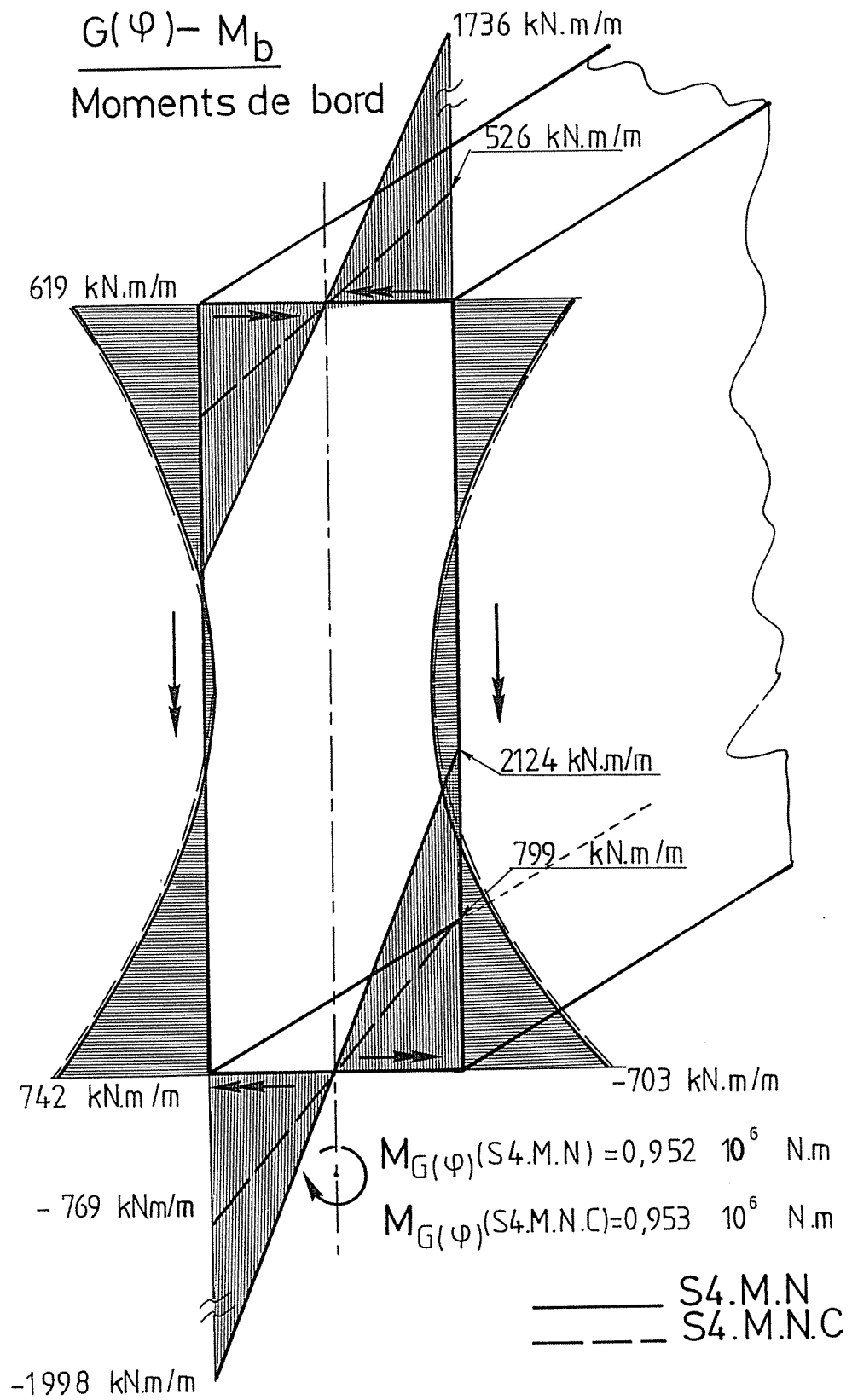
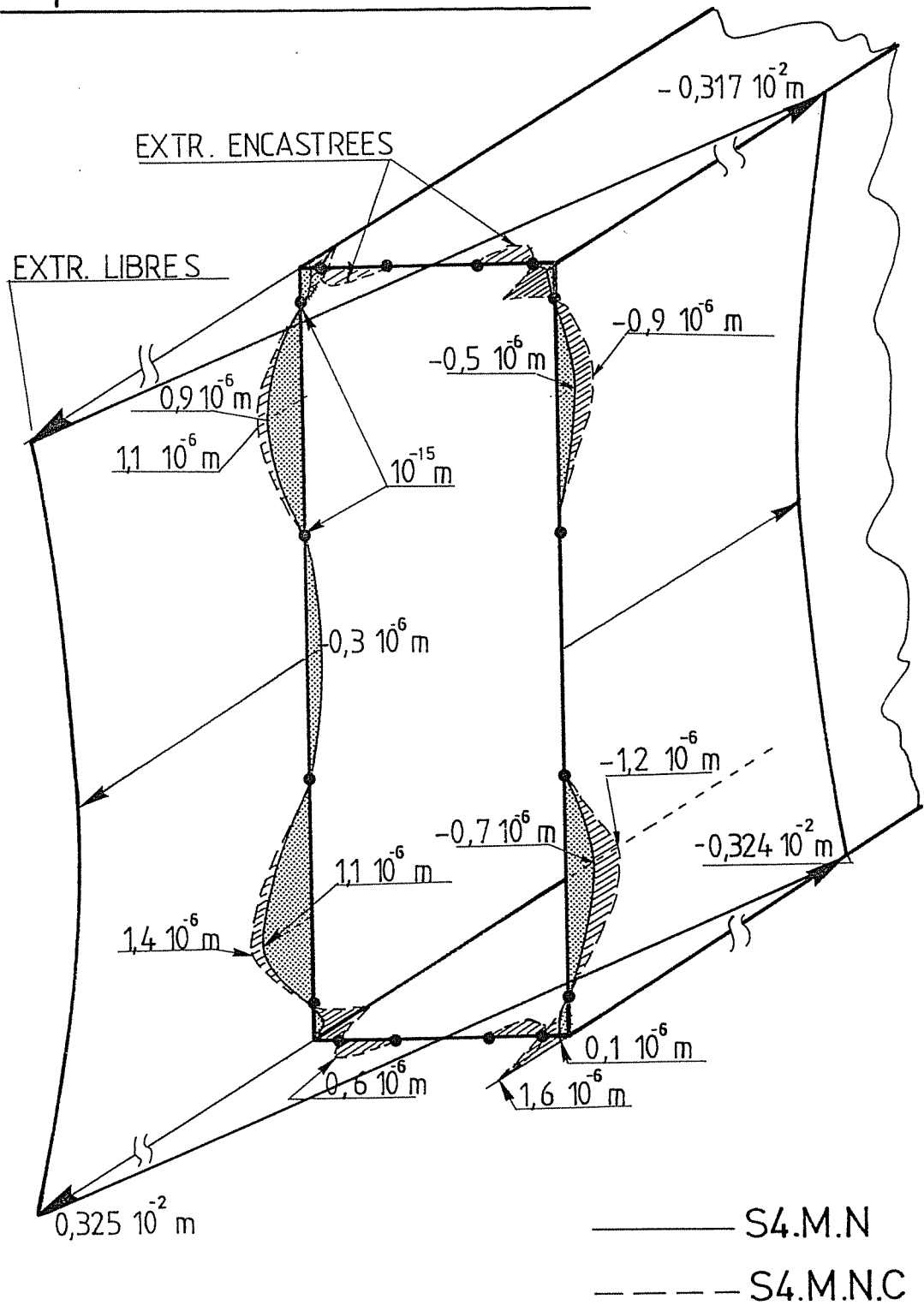


Figure 3.5.10.

Déplacements U Résiduels.



• CONDITION AU NOEUD : $U=0$

Figure 3.5.11.

ROTATIONS dw/dx RESIDUELLES.

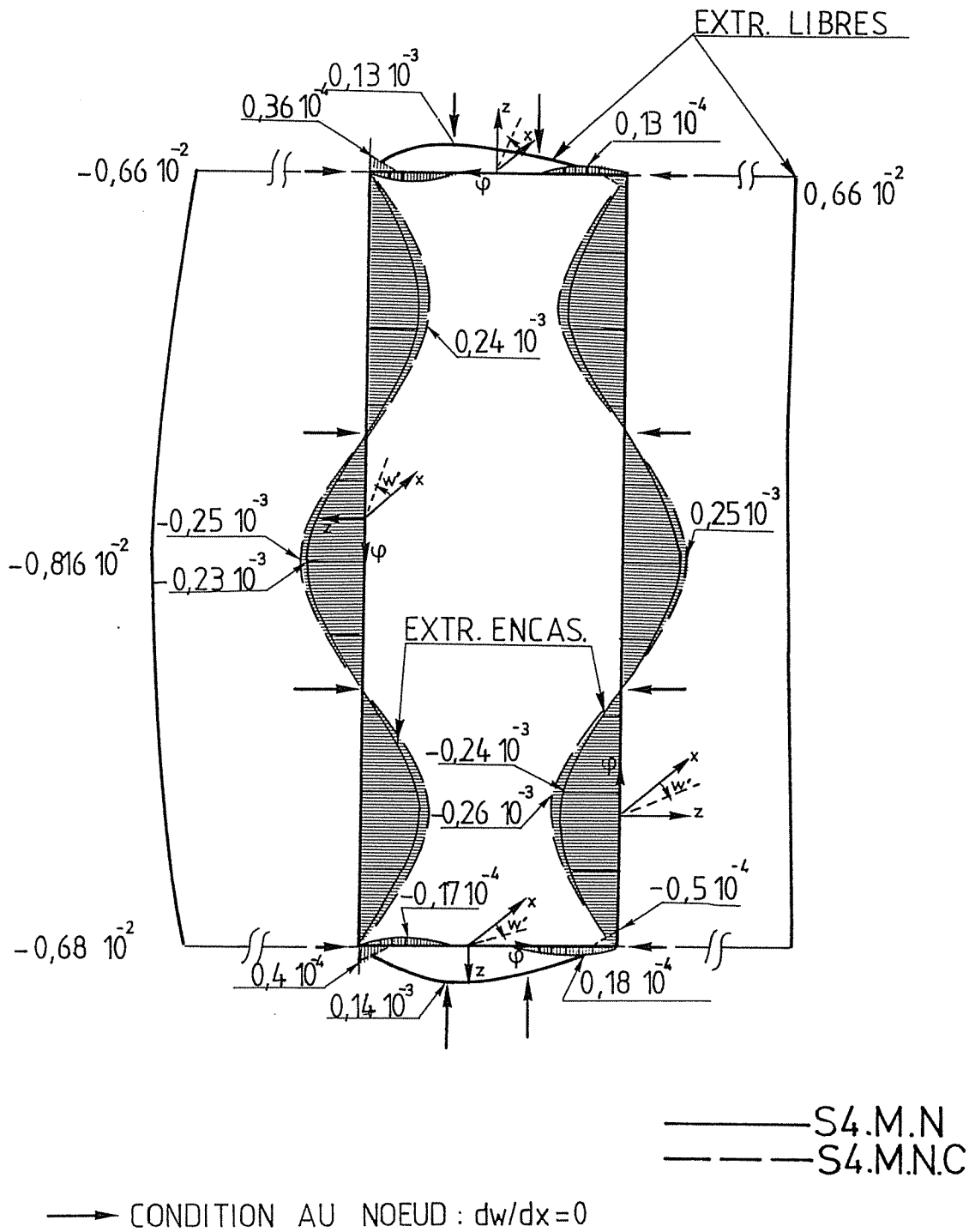


Figure 3.5.12.

Tableau 3.5.1

Ce tableau résumé montre que les différences entre les 2 variantes S4.M.N et S4.M.N.C sont faibles mais toujours à l'avantage de la variante S4.M.N., cette variante n'imposant pas la continuité des forces de bord. Les résultats au niveau des noeuds sont parfaits aussi bien pour u que pour w'. Ils sont très satisfaisants au niveau des déplacements u résiduels; les écarts oscillent entre +0,03 % et - 0,03 % et sont en moyenne nuls. Pour w', les écarts pour les panneaux verticaux sont de l'ordre de 3 %, cela est acceptable. Pour les panneaux horizontaux, l'écart relatif semble important mais c'est uniquement dû à la valeur de référence de ces panneaux horizontaux qui est 50 fois inférieure à la rotation de référence des panneaux verticaux. Ainsi en valeur absolue, la rotation résiduelle maximale des panneaux horizontaux est encore 10 fois inférieure à celle des panneaux verticaux. Les résultats sont donc très bons.

PANNEAU N°	VARIABLE	LIEUX	VALEUR THEORIQUE A OBTENIR	S4.M.N.		S4.M.N.C.		REFERENCE STRUCTURE Bi-APPUYEE
				VALEUR OBTENUE	ECART EN % PAR RAPPORT A LA VALEUR DE REFERENCE	VALEUR OBTENUE	ECART EN % PAR RAPPORT A LA VALEUR DE REFERENCE	
1	dw/dx	aux noeuds	0 rad	$\approx 10^{-14}$ rad	≈ 0	$\approx 10^{-14}$ rad	≈ 0	$\approx 0,8 \cdot 10^{-2}$ rad
		entre noeuds	0 rad	$-0,24 \cdot 10^{-3}$ rad	$\approx 3,0$	$-0,26 \cdot 10^{-3}$ rad	$\approx 3,3$	
	U	aux noeuds	0 m	$\approx 10^{-15}$ m	≈ 0	$\approx 10^{-15}$ m	$= 0$	$\approx 0,3 \cdot 10^{-2}$ m
		entre noeuds	0 m	$1,1 \cdot 10^{-6}$ m	$\approx 0,037$	$1,4 \cdot 10^{-6}$ m	$0,047$	
2	dw/dx	aux noeuds	0 rad	$\approx 10^{-11}$ rad	≈ 0	$\approx 10^{-11}$ rad	≈ 0	$\approx 0,14 \cdot 10^{-3}$ rad
		entre noeuds	0 rad	$0,18 \cdot 10^{-4}$ rad	$\approx 12,8$	$-0,5 \cdot 10^{-4}$ rad (1)	$35,7$ (1)	
	U	aux noeuds	0 m	$\approx 10^{-12}$ m	≈ 0	$\approx 10^{-13}$ m	≈ 0	$\approx 0,3 \cdot 10^{-2}$ m
		entre noeuds	0 m	$-0,16 \cdot 10^{-6}$ m	$\approx 0,005$	$+1,6 \cdot 10^{-6}$ m	$0,053$	

(1) Cette valeur ne doit pas être comparée à celle obtenue pour la variante S4.M.N. vu que dans la variante S4.M.N.C le nombre de conditions dw/dx sur les panneaux horizontaux est plus faible

Tableau 3.5.1.

V.1.1.2. Comparaison entre S4.N (Figure 3.5.7) et S4.N.C (figure 3.5.8)

Pour ces deux variantes, seul l'effort normal est envisagé et uniquement des conditions déplacements u sont imposées. On va ainsi mettre en évidence l'influence du facteur C (continuité des forces de bord) sur les déplacements résiduels u .

La figure 3.5.13 donne les diagrammes des forces de bord, la figure 3.5.14 les déplacements résiduels u et le tableau 3.5.2. reprend les valeurs essentielles et fournit les déplacements résiduels relatifs.

Observations :

Figure 3.5.13

Les allures des diagrammes sont encore semblables bien que la continuité des forces de bord n'est plus satisfaite automatiquement (S4.N). les moments résultants sont bons, avec de nouveau, une meilleure précision pour la variante n'imposant pas la continuité (les écarts sont de 2,8 % pour la variante S4.N contre 3,7 % pour la variante S4.N.C).

Figure 3.5.14 et tableau 3.5.2

Les valeurs résiduelles sont toujours faibles, mais sont plus homogènes pour la variante S4.N (écart maximal de 0,8 % dans chaque panneau) que pour la variante S4.N.C (écart maximal variant de 0,26 % à 3,3 %).

La condition de continuité semble donc défavorable à l'homogénéité des résultats.

Panneau N°	Variable	Lieux	Valeur théorique à obtenir	S4.N.		S4.N.C.		Référence structure BI-Appuyée
				Valeur obtenue	Ecart en % par rapport à la valeur de référence	Valeur obtenue	Ecart en % par rapport à la valeur de référence	
1	$\frac{dw}{dx}$	$0 < \varphi < \varphi_0$	-(1)	$-0,18 \cdot 10^{-2}$ rad	—	$-0,18 \cdot 10^{-2}$ rad	—	$\approx 0,8 \cdot 10^{-2}$ rad
	U	aux noeuds	0	$\approx 10^{-16}$ m	≈ 0	$\approx 10^{-15}$ m	≈ 0	$\approx 0,3 \cdot 10^{-2}$ m
		entre noeuds	0	$0,24 \cdot 10^{-4}$ m	<u>0,8</u>	$-1,0 \cdot 10^{-4}$ m	<u>3,3</u>	
2	$\frac{dw}{dx}$	$0 < \varphi < \varphi_0$	-(1)	$0,13 \cdot 10^{-3}$ rad	—	$0,13 \cdot 10^{-3}$ rad	—	$\approx 0,14 \cdot 10^{-3}$ rad
	U	aux noeuds	0	$\approx 10^{-13}$ m	≈ 0 %	$\approx 10^{-14}$ m	≈ 0	$\approx 0,3 \cdot 10^{-2}$ m
		entre noeuds	0	$0,24 \cdot 10^{-4}$ m	<u>0,8</u>	$-0,078 \cdot 10^{-4}$ m	<u>0,26</u>	

(1) Aucune condition sur dw/dx n'a été posée, cela signifie que les rotations sont restées libres.

Tableau 3.5.2.

$F(\varphi) - N_b$

Forces de bord.

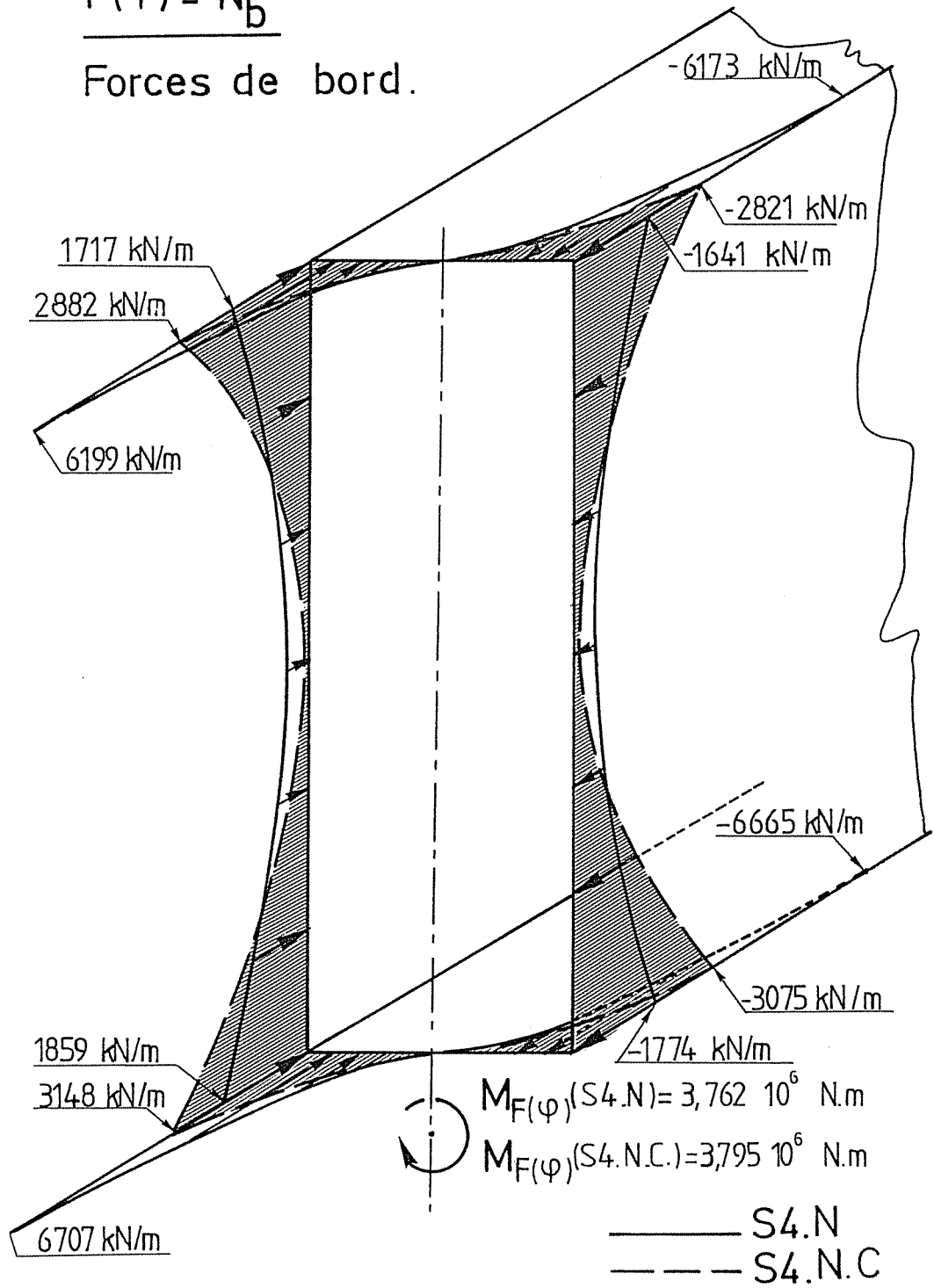


Figure 3.5.13.

Déplacements U Résiduels.

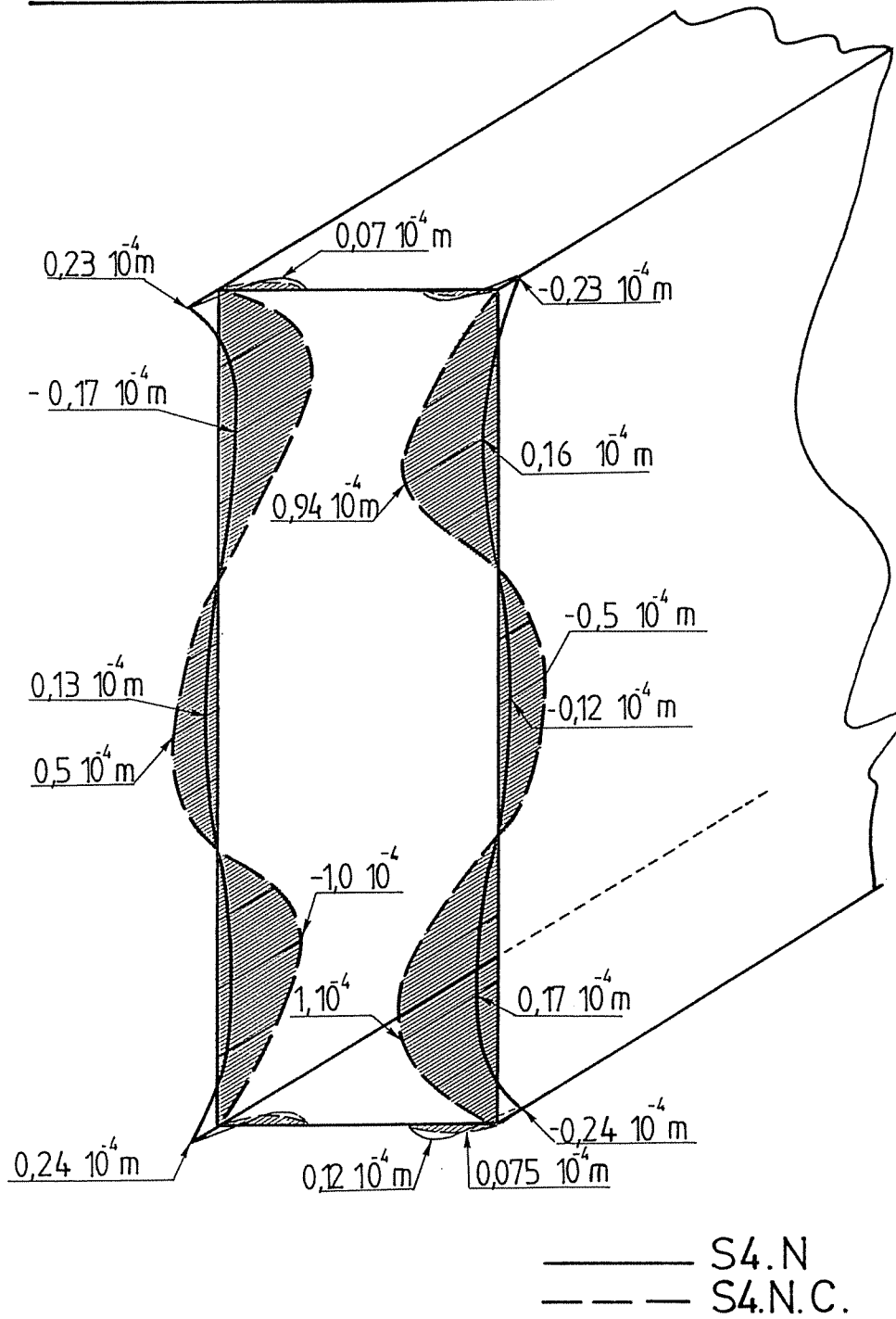


Figure 3.5.14.

V.1.2. Exemple n° 2

Gardons la même structure (figures 3.5.3. et 3.5.4.), à laquelle nous ajoutons 4 panneaux rigidifiant la structure (figure 3.5.15).

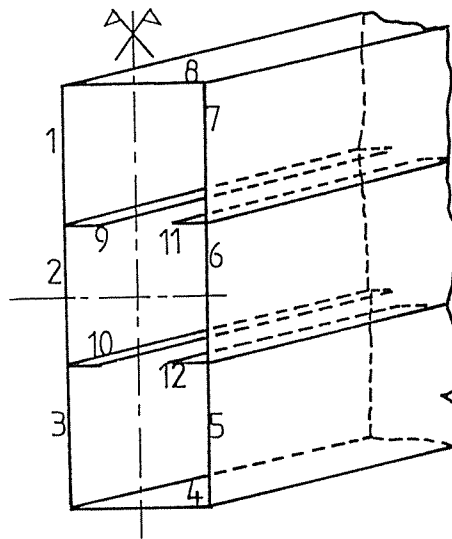


Figure 3.5.15

Nous sommes donc en présence d'une structure de 12 panneaux, encastrée aux 2 extrémités et sollicitée par la pression hydrostatique définie figure 3.5.3.

Déterminons les forces $F(\varphi)$ et les moments $G(\varphi)$ de bord pour 2 gammes de conditions (3.4.3 à 3.4.5). Soit la variante S12.M.N. (figure 3.5.16) et la variante S12.M.N.C (figure 3.5.17) se distinguant de la précédente par les conditions de continuité des forces de bord (3.4.5).

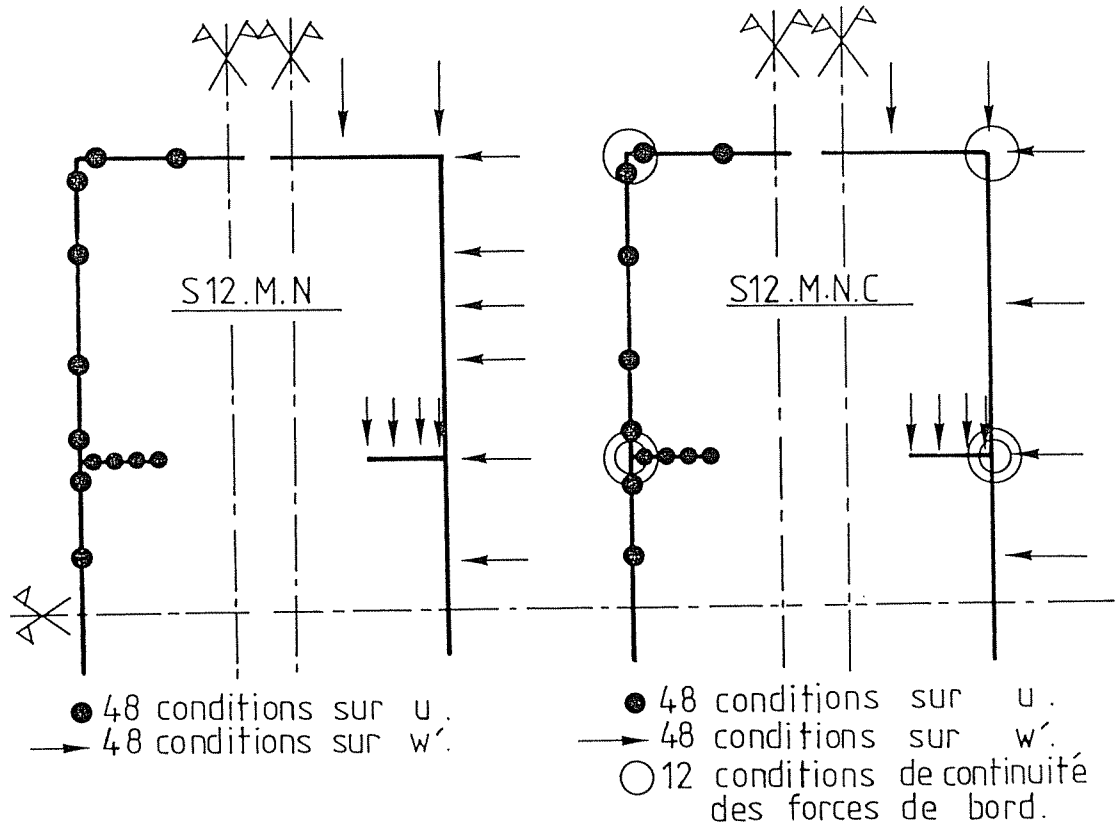


Figure 3.5.16

Figure 3.5.17

Comparons les 2 variantes au niveau des forces de bord (figure 3.5.18), des déplacements résiduels (figure 3.5.19) et des rotations résiduelles (tableau 3.5.3).

Observations

Figure 3.5.18

En moyenne, les forces de bord sont identiques. En effet, le moment résultant $M_{F(\varphi)}$ vaut respectivement pour les 2 variantes S12.M.N et S12.M.N.C

$2,77 \cdot 10^6$ N.m et $2,887 \cdot 10^6$ N.m. Mais localement, pour la variante S12.M.N.C, on observe de grandes fluctuations qui auront au niveau des valeurs résiduelles un effet des plus néfastes (figure 3.5.19). Ainsi, lorsque la courbe des forces de bord de la version S12.M.N.C (figure 3.5.18) s'écarte de celle de la variante S12.M.N., il y correspond un pic au niveau des valeurs résiduelles (figure 3.5.19). Il est donc clair que ces fluctuations proviennent de la condition de continuité des forces de bord.

Le moment résultant d'axe vertical $M_{G(\varphi)}$, dû aux moments de bord vaut respectivement pour les 2 variantes : $0,93 \cdot 10^6$ et $0,90 \cdot 10^6$ N.m.

Additionné à $M_{F(\varphi)}$, on obtient respectivement $M_{\text{extrémité}} = 3,7 \cdot 10^6$ N.m. et $3,787 \cdot 10^6$ N.m; valeurs approchées du moment d'encastrement valant $\rho L^2/12 = 3,66 \cdot 10^6$ N.m.

Tableau 3.5.3

La concordance entre les valeurs obtenues et les valeurs théoriques est excellente pour la variante S12.M.N; les écarts sont de l'ordre du centième de pour-cent pour les déplacements résiduels u et du dixième de pour-cent pour les rotations dw/dx .

Nous n'analyserons pas les résultats de la variante S12.M.N.C, quoique repris dans le tableau 3.5.3, car ils sont globalement moins bons que ceux de la variante S12.M.N.

Conclusion

Cet exemple ainsi que ceux du paragraphe V.1.1 sont suffisamment démonstratifs pour amener à **rejeter définitivement l'emploi de la condition de continuité de bord** (3.4.5).

V.1.3. Conclusions

De cette expérimentation numérique, nous en concluons qu'imposer la continuité des forces de bord va à l'encontre du but poursuivi, à savoir, obtenir des champs de déplacements u et w' aussi proches que possible des champs théoriques correspondant à des sections d'extrémités planes. Ceci s'explique comme suit : en général, la continuité des forces va de pair avec la continuité des déplacements (u et w'); or cette continuité des déplacements ne peut être respectée aux extrémités que ponctuellement, d'où il s'ensuit que la continuité des forces ne sera elle aussi vérifiée qu'approximativement.

Il est donc préférable de transgresser légèrement la continuité des forces de bord afin de mieux vérifier la continuité des déplacements. Une continuité ponctuelle des champs u et w' couplée avec une continuité rigoureuse des forces est donc à rejeter.

$$F(\varphi) - N_b$$

Forces de bord.

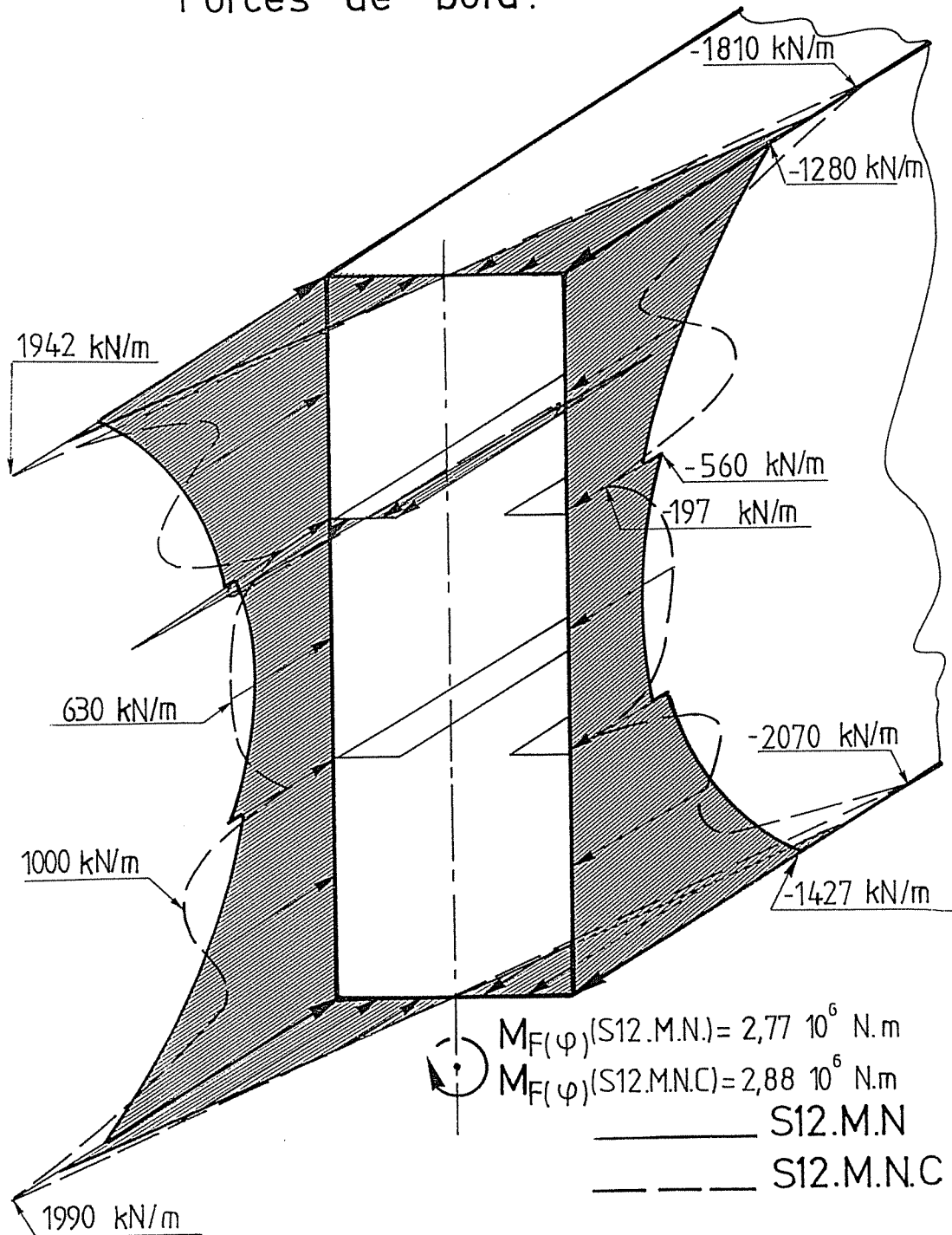


Figure 3.5.18.

Déplacements U Résiduels.

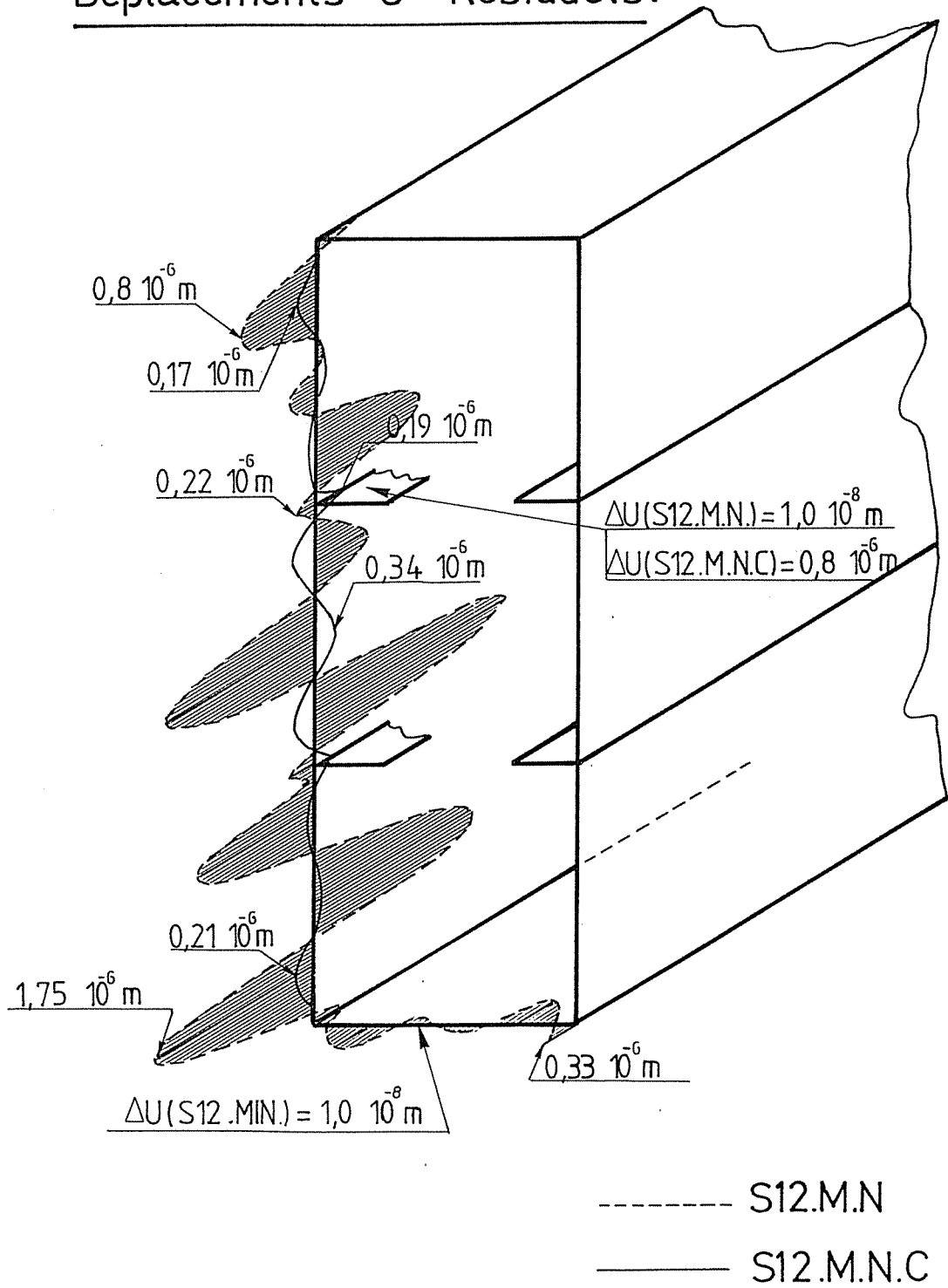


Figure 3.5.19.

PANNEAU N°	VARIABLE	LIEUX	VALEUR THEORIQUE A OBTENIR	S12.M.N.		S12.M.N.C.		REFERENCE STRUCTURE BI-APPUYEE
				VALEUR OBTENUE	ECART EN % PAR RAPPORT A LA VALEUR DE REFERENCE	VALEUR OBTENUE	ECART EN % PAR RAPPORT A LA VALEUR DE REFERENCE	
1	w'	aux noeuds	0 rad	10^{-8} rad	0	10^{-8} rad	0	$-0,65 \cdot 10^{-2}$ rad
		entre noeuds	0 rad	$-0,55 \cdot 10^{-5}$ rad	<u>0,085</u>	$0,22 \cdot 10^{-3}$ rad	<u>3,3</u>	
	U	aux noeuds	0 m	10^{-13} m	0	10^{-11} m	0	$0,26 \cdot 10^{-2}$ m
		entre noeuds	0 m	$0,19 \cdot 10^{-6}$ m	<u>0,007</u>	$0,11 \cdot 10^{-5}$ m	<u>0,042</u>	
2	w'	aux noeuds	0 rad	10^{-12} rad	0	10^{-11} rad	0	$-0,7 \cdot 10^{-2}$ rad
		entre noeuds	0 rad	$0,98 \cdot 10^{-5}$ rad	<u>0,14</u>	$-0,87 \cdot 10^{-4}$ rad	<u>1,2</u>	
	U	aux noeuds	0 m	10^{-13} m	0	10^{-11} m	0	$0,24 \cdot 10^{-2}$ m
		entre noeuds	0 m	$0,34 \cdot 10^{-6}$ m	<u>0,014</u>	$-0,22 \cdot 10^{-5}$ m	<u>0,092</u>	
4	w'	aux noeuds	0 rad	10^{-12} rad	0	10^{-11} rad	0	$0,1 \cdot 10^{-3}$ rad
		entre noeuds	0 rad	$-0,1 \cdot 10^{-5}$ rad	<u>1</u>	$-0,41 \cdot 10^{-4}$ rad	<u>41</u> (1)	
	U	aux noeuds	0 m	10^{-13} m	0	10^{-12} m	0	$0,29 \cdot 10^{-2}$ m
		entre noeuds	0 m	$-0,65 \cdot 10^{-7}$ m	<u>0,002</u>	$-0,47 \cdot 10^{-6}$ m	<u>0,016</u>	
9	w'	aux noeuds	0 rad	$-0,33 \cdot 10^{-6}$ rad	<u>0,11</u>	$-0,6 \cdot 10^{-4}$ rad	<u>20</u> (1)	$-0,3 \cdot 10^{-3}$ rad
		entre noeuds	0 rad	$-0,47 \cdot 10^{-5}$ rad	<u>1,57</u>	$0,23 \cdot 10^{-2}$ rad	<u>760</u> (1)	
	U	aux noeuds	0 m	10^{-8} m	<u>0,0004</u>	10^{-7} m	<u>0,0042</u>	$0,24 \cdot 10^{-2}$ m
		entre noeuds	0 m	$-0,65 \cdot 10^{-7}$ m	<u>0,003</u>	$0,83 \cdot 10^{-6}$ m	<u>0,034</u>	

(1) On observe des écarts très importants entre la valeur souhaitée et la valeur obtenue. Cela confirme l'effet défavorable de la condition de continuité de bord (3.3.5)

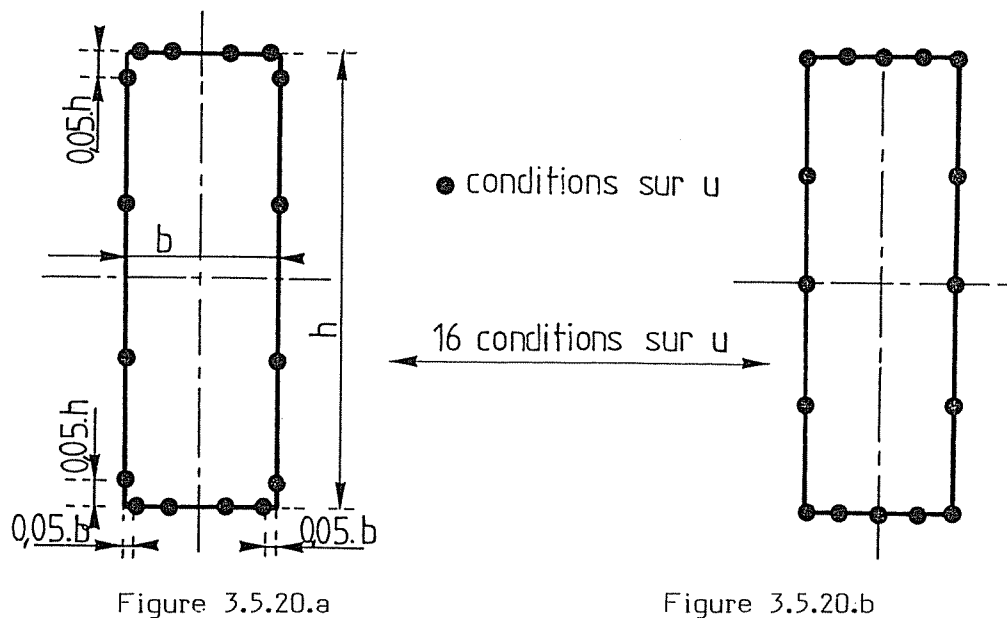
Tableau 3.5.3.

V.2. CHOIX DE L'EMPLACEMENT DES POINTS SOUMIS AUX CONDITIONS SUR u ET SUR dw/dx .

Nous allons montrer au paragraphe V.2.1. l'importance du choix de l'emplacement de ces points, car un mauvais choix peut déboucher sur un système indéterminé (pivot nul). Ensuite, (§ V.2.2.), on montrera combien il est capital de répartir de manière uniforme les conditions sur toute la section d'extrémité. Enfin, nous énoncerons au § V.2.3. des règles simples permettant de déterminer l'emplacement et le type de conditions à émettre.

V.2.1. Cause d'indétermination du système

Le lecteur s'est peut-être déjà demandé pourquoi dans l'exemple n° 1 (§ V.1.1.), nous avons adopté la disposition des points de la figure 3.5.20.a et non pas une disposition, a priori, plus logique qu'est celle de la figure 3.5.20.b. Nous allons y répondre en signalant que pour les conditions de la figure 3.5.20.b, on aboutit à une indétermination. En effet, vu la double symétrie de la structure ainsi que celle de la disposition des noeuds, certaines des conditions imposées sont surabondantes c'est-à-dire qu'elles sont combinaisons linéaires des autres. On obtient ainsi un système dont la matrice est singulière (pivot nul).



Pratiquement, nous avons dû, en vue de remédier à cela, trouver quelles étaient ces combinaisons linéaires? Nous les avons obtenues grâce à la méthode de Gauss-Jordan. Dans notre cas il s'agit de faire un parallèle avec les modes rigides.

Rappel de la Méthode de Gauss-Jordan

$$|A| \cdot \underline{x} = \underline{u} \text{ ou encore } |A| \cdot \underline{x} = |S| \cdot \underline{u} \quad (3.5.1)$$

avec :

- $|A|$ la matrice de rigidité
- $|S|$ la matrice unitaire
- \underline{u} le vecteur des déplacements
- \underline{x} le vecteur des forces (inconnues)

En faisant les permutations adéquates, on transforme la matrice $|A|$ de manière à la rendre diagonale et unitaire. On obtient ainsi, dans le cas d'un

système indéterminé, la situation suivante :

$$\begin{pmatrix} |I| & \underline{M} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |S_1| \\ |S_2| \end{pmatrix} \cdot \underline{u} \quad (3.5.2)$$

avec $|I|$, la matrice unitaire.

Alors, $|S_2| \cdot \underline{u} = 0$ donne la (les) combinaison(s) linéaire(s) existante(s) entre les déplacements u_i .

Montrons ceci au travers de quelques exemples simples.

V.2.1.1. Structures doublement symétriques
Conditions sur les déplacements u (figure 3.5.21).

Prenons des champs de forces de bord de degré 0.

On a ainsi :

panneau I	$F_I = d_1$
panneau II	$F_{II} = d_2$
panneau III	$F_{III} = d_3$
panneau IV	$F_{IV} = d_4$

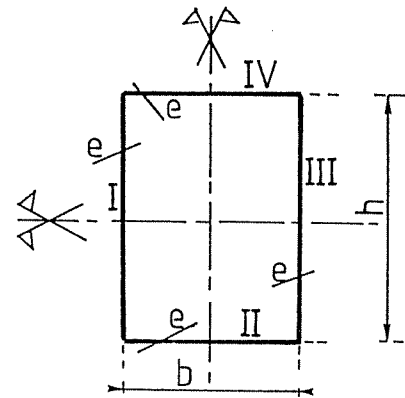


Figure 3.5.21

Déterminons par la méthode des forces, les paramètres d_1, d_2, d_3, d_4 en imposant les déplacements aux quatre coins de la structure (figure 3.5.22).

Imposons :

$u = u^*_1$	au point 1
$u = u^*_2$	au point 2
$u = u^*_3$	au point 3
$u = u^*_4$	au point 4

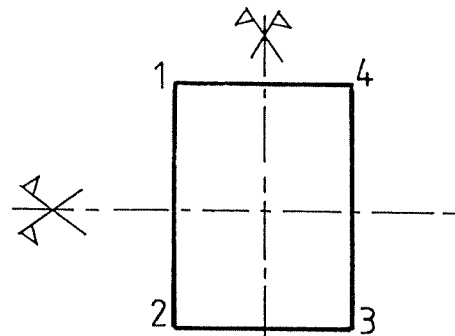


Figure 3.5.22

Pour ce faire, on calcule les déplacements aux points 1, 2, 3 et 4 pour les 4 cas de charge unitaire de bord $F_I, F_{II}, F_{III}, F_{IV}$.

Pour le cas de charge I, figure 3.5.23 : F_I

On obtient :

au point 1 : $u_1^I = a$

au point 2 : $u_2^I = a$

au point 3 : $u_3^I = b$

au point 4 : $u_4^I = b$

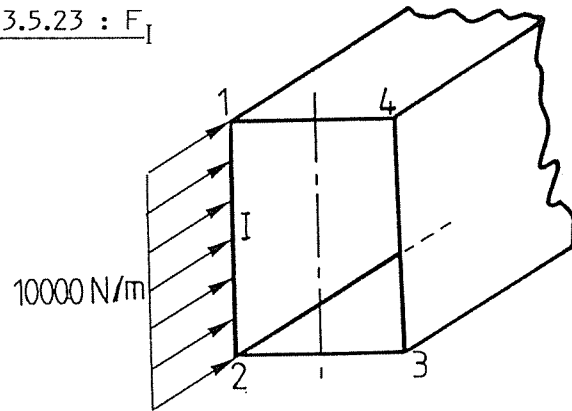


Figure 3.5.23

Pour le cas de charge II, figure 3.5.24 : F_{II}

On obtient :

au point 1 : $u_1^{II} = c$

au point 2 : $u_2^{II} = d$

au point 3 : $u_3^{II} = d$

au point 4 : $u_4^{II} = c$

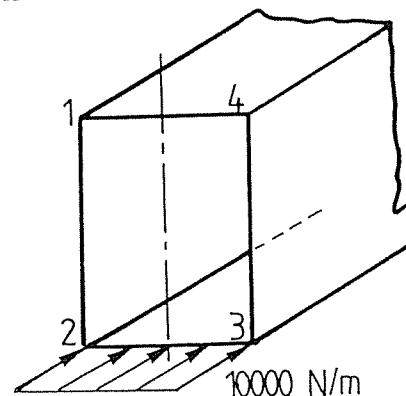


Figure 3.5.24

Pour le cas de charge III : F_{III}

cas inverse au cas I

on obtient : $u_1^{III} = b, u_2^{III} = b, u_3^{III} = a, u_4^{III} = a$

Pour le cas de charge IV : F_{IV}

cas inverse au cas II

on obtient : $u_1^{IV} = d, u_2^{IV} = c, u_3^{IV} = c, u_4^{IV} = d$

Le système s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{vmatrix} a & c & b & d \\ a & d & b & c \\ b & d & a & c \\ b & c & a & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u^*_1 \\ u^*_2 \\ u^*_3 \\ u^*_4 \end{vmatrix}$$

La combinaison linéaire étant fort simple, il ne s'avère pas utile de recourir à l'algorithme de Gauss-Jordan, on observe directement que :

ligne 1 - ligne 2 = ligne 4 - ligne 3

D'où le déterminant de la matrice est nul.

Physiquement cela signifie que le déplacement au point 4 est parfaitement défini, uniquement à partir des déplacements aux points 1, 2, 3.

Ecrire l'équation au point 4 équivaut donc à imposer un déplacement U^*_4 arbitraire alors que celui-ci a déjà une valeur définie,

$$U^*_4 = U^*_3 + (U^*_1 - U^*_2)$$

Faisons de même pour une autre disposition de noeuds, figure 3.5.25.

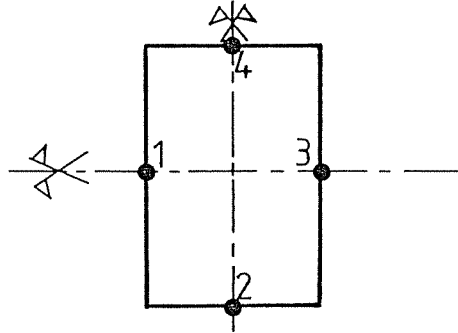


Figure 3.5.25

On obtient la matrice suivante dont le déterminant est non nul.

$$\text{dtm} \begin{vmatrix} a & d & c & d \\ b & e & b & f \\ c & d & a & d \\ b & f & b & e \end{vmatrix} \neq 0$$

Il existe donc pour la disposition de la figure 3.5.25 une solution unique.

Il en serait de même pour des dispositions de noeuds 1, 2, 3 et 4 disposés de manière non symétrique (figure 3.5.26.a et b). A savoir :

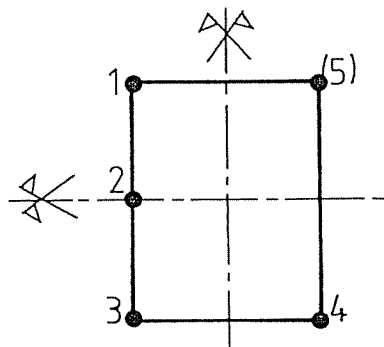


Figure 3.5.26.a

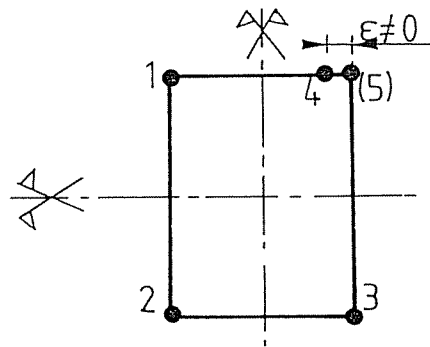


Figure 3.5.26.b

Remarques : Dans ces 2 derniers exemples (figures 3.5.26.a et b), le déplacement au point 5 est automatiquement vérifié puisque sa valeur est parfaitement déterminée en fonction des déplacements aux noeuds 1, 2 et 3.

A la figure 3.5.25, bien que les conditions soient imposées à l'intersection des axes de symétrie avec les panneaux, le système est déterminé. Il s'agit en fait d'une exception causée par le choix de forces de bord de degré 0. Il n'en est plus de même pour les dispositions des figures 3.5.27 et 28, dont les champs de forces sont du 3^o degré. Dans ces cas, un tel choix de noeuds cause l'indétermination du système.

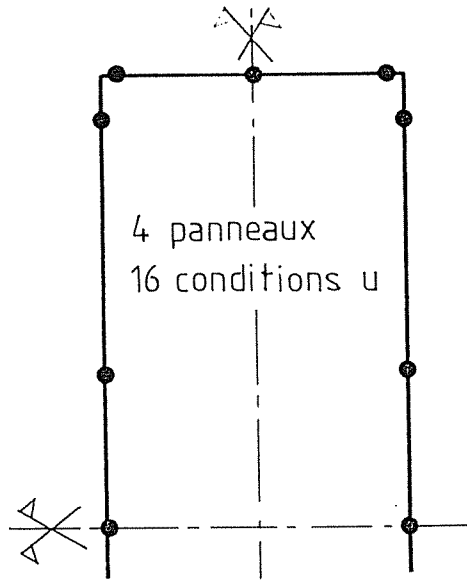


Figure 3.5.27

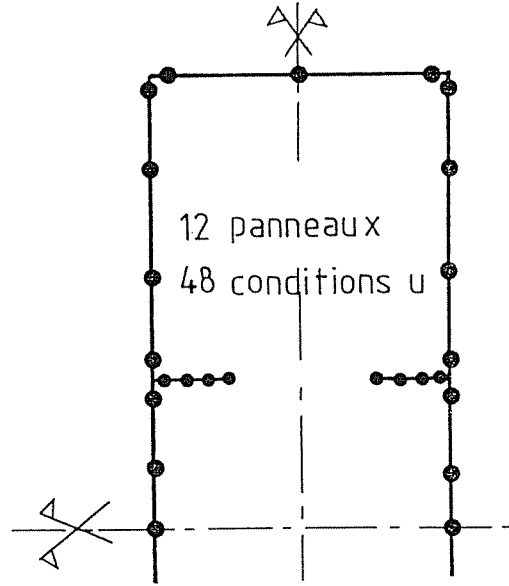


Figure 3.5.28

Conclusions

Lorsque la structure est symétrique, il est conseillé de n'imposer les conditions déplacement u , ni aux extrémités, ni aux intersections des panneaux avec les axes de symétrie.

V.2.1.2. Structures simplement symétriques - conditions sur les déplacements u .

Prenons des champs de force de bord de degré 0.
On a ainsi :

$$\text{panneau I} \quad F_I = d_1$$

$$\text{panneau II} \quad F_{II} = d_2$$

$$\text{panneau III} \quad F_{III} = d_3$$

$$\text{panneau IV} \quad F_{IV} = d_4$$

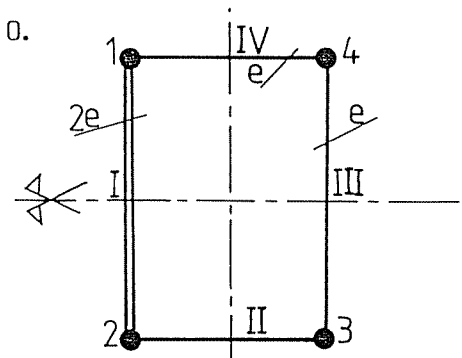


Figure 3.5.29

Si l'on remplace les noeuds aux 4 coins de la structure, on obtient également : $\det |A| = 0$
En utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan, on constate que si l'on impose U^*_1, U^*_2, U^*_3 , nous ne sommes pas libres d'imposer une valeur à U^*_4 car U^*_4 est déjà connu par la relation

$$U^*_4 = (U^*_1 - U^*_2) \cdot \left(\frac{U^{II}_{34} - U^{II}_{12}}{U^{II}_{12} - U^{II}_{34}} \right) \cdot U^*_3$$

avec $U_1^{\text{II}}, U_2^{\text{II}}, U_3^{\text{II}}, U_4^{\text{II}}$ les déplacements en 1, 2, 3, 4 dus au second cas de charge unitaire F_{II} .

Par contre si l'on place les noeuds différemment, figure 3.5.30.a ou 3.5.30.b, le système admet une solution unique.

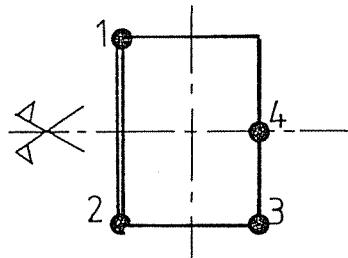


Figure 3.5.30.a

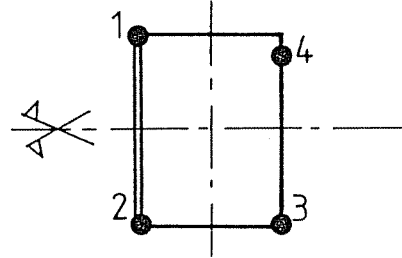


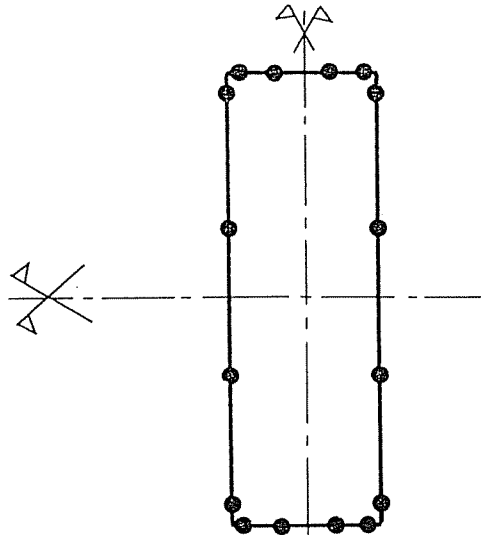
Figure 3.5.30.b

La conclusion relative aux structures simplement symétriques est donc identique à celle relative aux structures doublement symétriques (§ V.2.1.1.).

V.2.1.3. Structures symétriques - conditions sur les déplacements u et sur les rotations dw/dx .

Maintenant que nous connaissons les causes d'indétermination relatives à u , choisissons une disposition adéquate pour u , figure 3.5.31 et regardons comment y ajouter les conditions sur dw/dx .

Cas particulier :



Cas général :

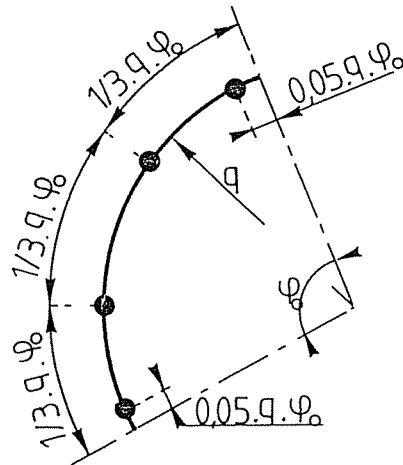
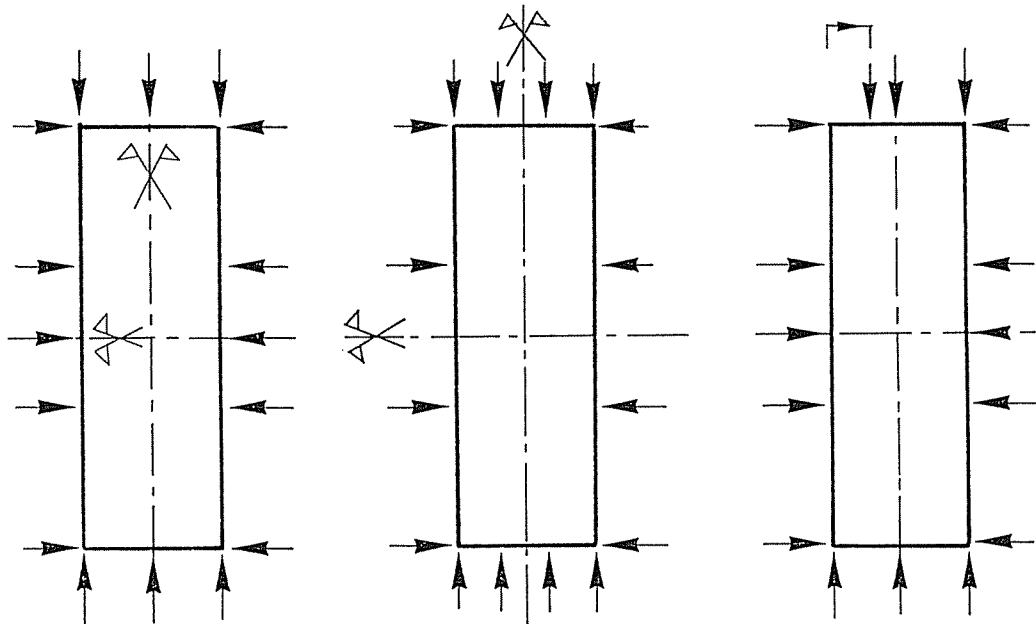


Figure 3.5.31

Envisageons les 3 dispositions suivantes relatives à w' (figures 3.5.32.a. à c).

Couplées aux conditions sur u (figure 3.5.31), les conditions sur w' de la figure 3.5.32.a engendrent un système indéterminé; par contre le système admet une solution unique avec les conditions sur w' de la figure 3.5.32.b. Cela signifie que pour une structure symétrique couplée avec une disposition symétrique des conditions sur u et w' , il

ne faut pas placer les conditions sur w' au niveau des axes de symétrie (figure 3.5.32.a); par contre aux jonctions de panneaux, il n'y a pas de problème.



* Condition sur w'
 - aux coins
 - au droit des axes de symétrie

* Disposition des noeuds symétrique

Figure 3.5.32.a

*Condition sur w'
 - aux coins

* Disposition des noeuds symétrique

Figure 3.5.32.b

* Condition sur w'
 - au droit des axes de symétrie

* Disposition non symétrique

Figure 3.5.32.c

Avec les conditions de la figure 3.5.32.c, le système est aussi déterminé car on constate que la disposition des points n'est plus symétrique au contraire de celle des figures 3.5.32.a et b. Dans ce cas, le fait de placer les conditions sur u et w' au niveau des axes de symétrie n'est plus un problème.

V.2.1.4. Structures non symétriques - conditions sur les déplacements u et sur les rotations dw/dx

Dans ce cas (figure 3.5.33.a), quel que soit l'emplacement des noeuds (figures 3.5.33.b et c), le système admet une solution unique. Cette constatation est rassurante pour l'utilisateur du logiciel, vu que la majeure partie des structures est non symétrique.

V.2.1.5. Conclusions

Sans pouvoir garantir la généralité absolue, on peut dire que le danger d'obtenir un système indéterminé augmente au fur et à mesure que la symétrie grandit, surtout si l'on combine symétrie de la structure et symétrie dans le choix de l'emplacement des noeuds. Pratiquement, on peut être sûr que le système admettra une solution si l'on respecte, au moins, une des règles suivantes.

La structure n'est pas symétrique (ce qui est le cas le plus courant)

Les dispositions des noeuds relative a u et celle à w' ne sont pas

symétriques

Aucune des 2 conditions, u (3.3.3.) et w' (3.3.4) n'est imposée aux intersections de la structure avec les axes de symétrie et les conditions sur les déplacements u (3.3.3.) ne sont pas non plus imposées à la jonction entre panneaux. (3.5.5.)

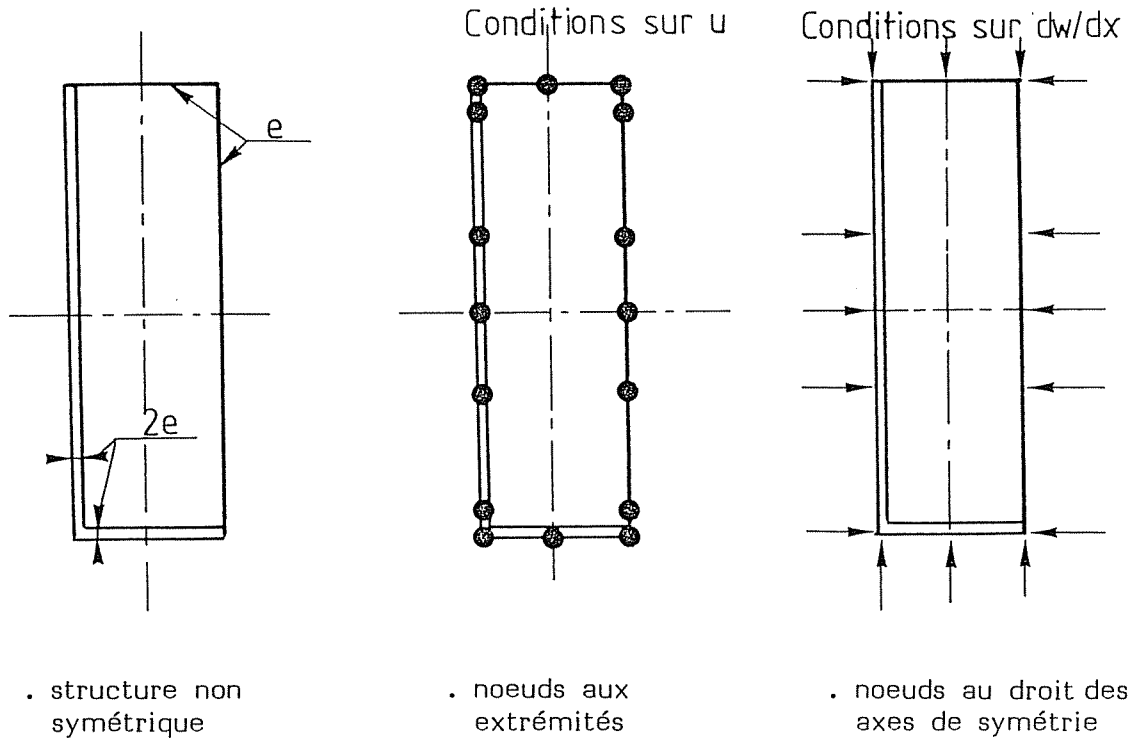


Figure 3.5.33.a

Figure 3.5.33.b

Figure 3.5.33.c

Remarque :

Il existe quelques rares cas pour lesquels ces 3 règles sont transgressées simultanément mais, néanmoins le système n'est pas singulier. Au niveau de cette étude seul le cas particulier de la figure 3.5.25 a été détecté; il s'agit d'un cas exceptionnel vu le type de forces de bord imposées (fonction de degré 0).

V.2.2. L'uniformité dans la répartition des conditions de bord

Nous connaissons par le paragraphe 2.1.5., partie III, la disposition adéquate des noeuds, auxquels les conditions de bord sont imposées, sous peine d'obtenir un système indéterminé. Mais nous n'avons pas encore de critère de sélection entre les diverses dispositions de noeuds possibles pour distinguer celle qui donnera les meilleurs résultats.

La certitude d'obtenir la disposition optimum pour une structure donnée, ne pourra être atteinte qu'après de très nombreux essais sur plusieurs dispositions et une fois obtenue, elle ne sera valable que pour le cas particulier envisagé.

Notre but est différent, il s'agit de définir une disposition de noeuds, s'adaptant à tous les types de structures et donnant l'assurance d'obtenir des résultats excellents, mais toutefois, sans garan-

tir qu'ils seront les meilleurs.

Ainsi nous proposons comme disposition, relative aux conditions sur u (3.4.3) sur un panneau quelconque, la disposition de la figure 3.5.34.

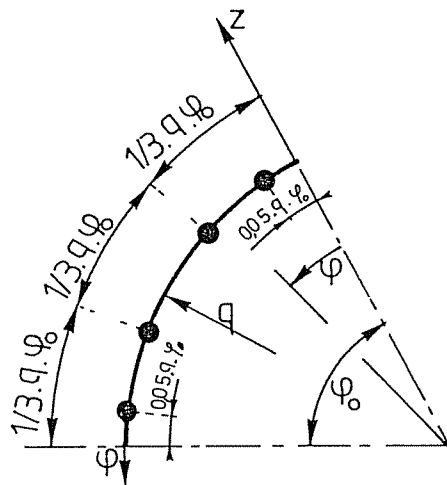


Figure 3.5.34

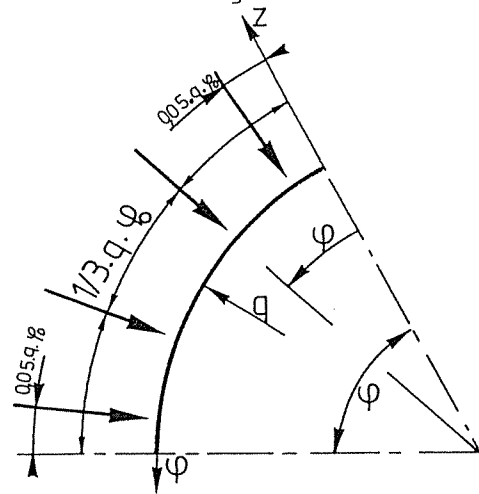


Figure 3.5.35

De manière semblable, nous proposons pour les conditions sur w' (3.4.4), la disposition suivante (figure 3.5.35).

V.2.2.1. Vérification de l'efficacité des dispositions proposées

Afin de montrer l'utilité de l'uniformisation proposée dans la répartition des conditions de bord, mettons en évidence l'accroissement des valeurs résiduelles causé par une rupture dans l'uniformité. Soit la structure de référence (figures 3.5.3 et 3.5.4) à laquelle correspond une répartition de noeuds non uniforme S8.N (figure 3.5.36), aucune condition n'ayant été fixée dans les régions centrales des panneaux verticaux.

Comparons cette disposition non uniforme de 32 noeuds, avec la disposition uniforme de 16 noeuds de la variante S4.N (figure 3.5.37) déjà utilisée au paragraphe V.1.1.2. Les noeuds de la variante S4.N sont communs aux 2 variantes et celles-ci possèdent les mêmes zones dites "pauvres en noeuds" entre les points 2 et 3 et entre points 10 et 11. La disposition S8.N est donc plus "riche en noeuds" mais ceux-ci sont placés de façon non homogène.

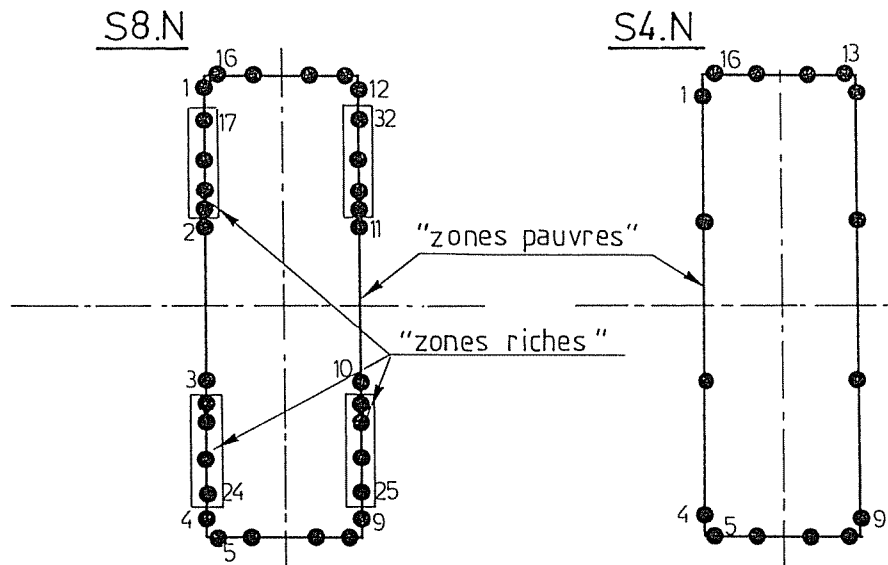


Figure 3.5.36

Figure 3.5.37

L'analyse des résultats est basée sur le tableau 3.5.4., celui-ci montre combien les déplacements résiduels augmentent dans les régions "pauvres en noeuds" si la répartition de ces noeuds n'est pas uniforme.

Observations

Tableau 3.5.4

La variante S4.N correspond à une répartition plus "pauvre" globalement mais bien plus uniforme, et donne des résultats plus satisfaisants que la disposition S8.N, plus "riches en noeuds" mais de manière non uniforme.

Ainsi, pour la disposition S8.N (figure 3.5.36), les résultats dans les régions "riches en noeuds" sont très bons, mais par contre, dans les régions "pauvres" les résultats sont tout à fait inadmissibles.

Panneau N°	Variable	Lieux	Valeur théorique à obtenir	S.4.N. (rép. unif.)		S.8.N. (rép. non unif.)		Référence structure bi-appuyée
				Valeur obtenue	Écart en % par rapport à la valeur de référence	Valeur obtenue	Écart en % par rapport à la valeur de référence	
1	U	entre noeuds 1 et 2	0	$-0,17 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	0,57	$0,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}$	0,027	$\approx 0,3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
2	U	entre noeuds 2 et 3	0	$0,13 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	0,47	$0,36 \cdot 10^{-1} \text{ m}$	1000 (1)	$\approx 0,275 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
4	U	entre noeuds 5 et 6	0	$-0,12 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	0,4	$0,9 \cdot 10^{-6} \text{ m}$	0,030	$\approx 0,3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

(1) Ce pourcentage ne représente plus rien, il indique seulement que la valeur obtenue s'écarte tout à fait du domaine admissible.

Tableau 3.5.4.

Conclusions

Le critère de l'uniformisation dans la répartition des noeuds doit être respecté le plus scrupuleusement possible afin d'obtenir des écarts résiduels réduits et homogènes.

V.2.2.2. Remarques

Une alternative à la disposition proposée relative à dw/dx (figure 3.5.35) est celle de la figure 3.5.38, mais son emploi n'est pas aussi aisé. En effet, si les dispositions proposées relatives à u et à dw/dx (figures 3.5.34 et 3.5.35) sont utilisables pour toutes les structures, il n'en est pas de même pour la disposition alternative relative à dw/dx de la figure 3.5.38. Avec celle-ci, lorsque deux panneaux

jointifs possèdent la même tangente, cela conduit à imposer 2 fois la même condition et ainsi à aboutir à l'obtention d'un système indéterminé. Prenons un exemple, pour la structure de la figure 3.5.39.a, la disposition alternative de la figure 3.5.38 est applicable, mais elle ne l'est plus pour la structure de la figure 3.5.39.b.

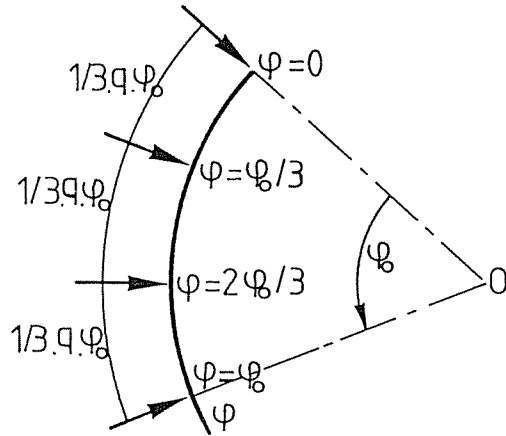


Figure 3.5.38

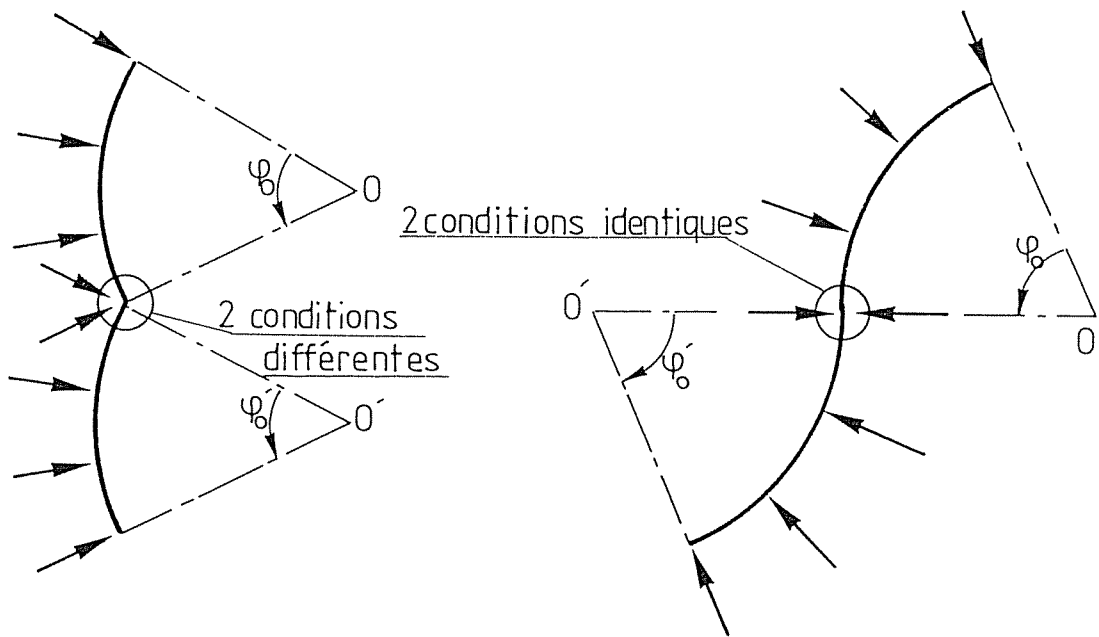
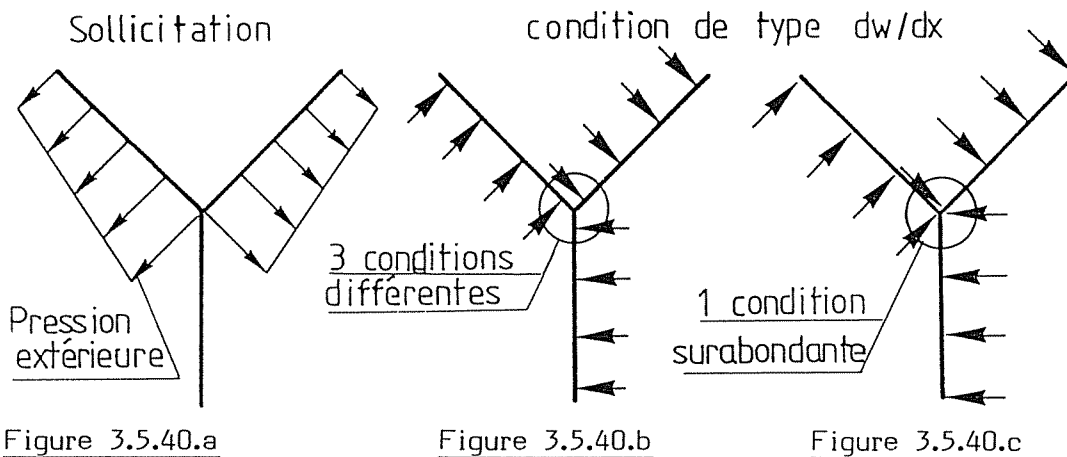


Figure 3.5.39.a

Figure 3.5.39.b

Il est de plus interdit d'imposer en un noeud plus de 2 rotations nulles. En effet, si en un point du plan, on impose deux rotations nulles autour de 2 axes quelconques de ce plan, on peut dire que la rotation en ce point est nulle autour de tout axe de ce plan.

Ainsi le cas de la structure (figure 3.5.40.a) peut être résolu à l'aide de la disposition de la figure 3.5.40.b, mais pas en utilisant la disposition alternative, figure 3.5.40.c, où 3 conditions sont imposées au même noeud.



Un autre inconvénient de la disposition alternative (figure 3.5.38), est qu'elle n'est pas utilisable lorsqu'une (ou les deux) extrémité(s) du panneau est (sont) appuyée(s) ou encastrée(s), figure 3.5.41. Au point A ou B, imposer la condition $dw/dx = 0$, correspond à imposer une condition surabondante puisque la rotation en ce point, y est déjà nulle vu que u et w sont nuls en tous points des bords.

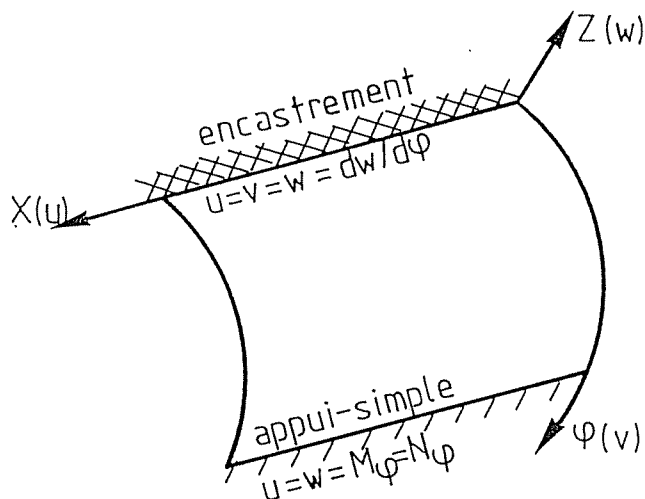


Figure 3.5.41

On constate donc que la disposition de la figure 3.5.35 permet d'échapper à tous ces problèmes et est, ainsi, utilisable en toutes circonstances.

V.2.3. Conclusions

Nous sommes maintenant capables de définir les emplacements adéquats des points soumis aux conditions sur u et sur w .

En pratique, nous conseillerons d'utiliser la disposition des figures 3.5.34 et 3.5.35, elle a comme avantage d'être systématique et efficace, pour tous les types de structures. Son utilisation garantit de plus, un haut niveau de précision et une bonne homogénéité au niveau des résultats.

Il est toutefois loisible à l'utilisateur d'imposer lui-même les conditions aux endroits qu'il juge opportun; pour ce faire des règles de bonne pratique ont été définies (conclusion § V.2.1.5, partie III); il pourra alors, avec un peu d'habitude, augmenter la précision des résultats.

V.3. LA COMPLEMENTARITE DES FORCES ET DES MOMENTS DE BORD

Dans les exemples précédents, nous avons parfois utilisé le logiciel avec uniquement des forces de bord $F(\varphi)$ (S4.N - figure 3.5.37).

En principe, ces seuls efforts de bord $F(\varphi)$ devraient suffire à vérifier les conditions sur u et sur dw/dx . Prenons l'exemple de la figure 3.5.42, où agissent les seules forces de bord $F(\varphi)$.

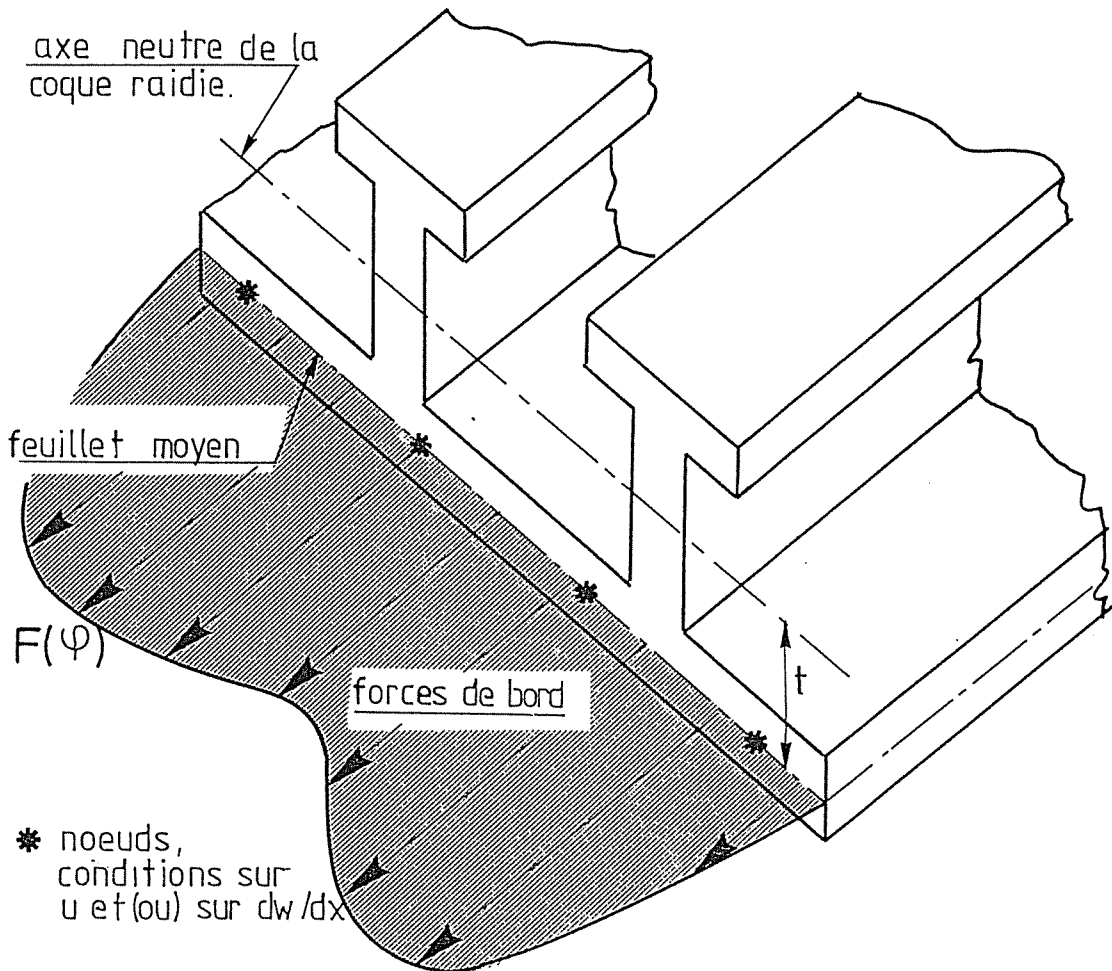


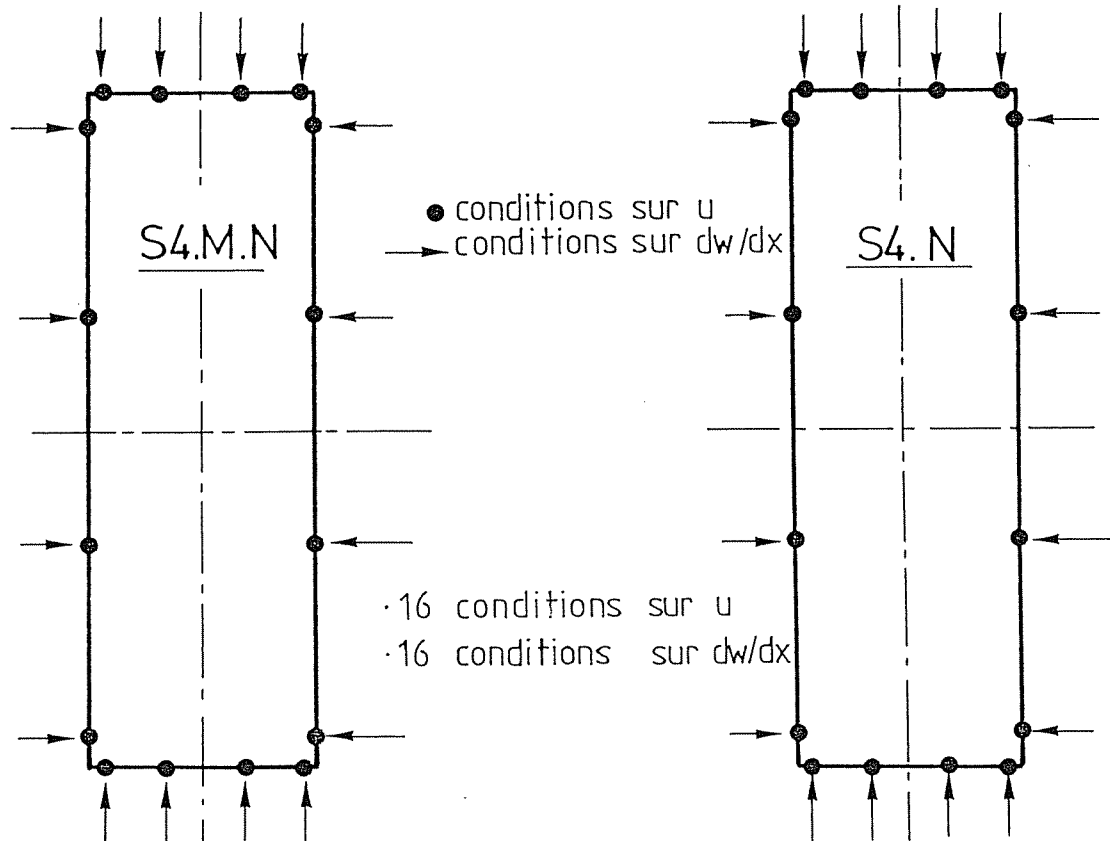
Figure 3.5.42

Les forces agissent dans le plan moyen du bordage, qui diffère de l'axe neutre sauf si le bordage est lisse; il existe donc un moment de bord valant $F(\varphi).t$, t étant l'écart entre le plan moyen et celui de l'axe neutre.

En pratique, il s'agit de voir s'il est possible d'imposer avec les seules forces $F(\varphi)$, des conditions sur u et sur w' , respectant aussi bien ces conditions aux nœuds qu'entre ceux-ci.

Classiquement, par panneau, correspondent les champs $F(\varphi)$ et $G(\varphi)$ définis par 4 paramètres chacun; exemple : figure 3.5.43 - S4.M.N.

Comparons cela avec une discrétisation équivalente contenant le seul champ de force $F(\varphi)$, défini par 8 paramètres (exemple : figure 3.5.44 - S4.N); chaque panneau étant subdivisé en deux de manière à obtenir également 8 paramètres par panneaux.



$F(\varphi)$ et $G(\varphi)$

par panneau
 - 4 paramètres relatifs à $F(\varphi)$
 - 4 paramètres relatifs à $G(\varphi)$

● 16 conditions sur u
 → 16 conditions sur dw/dx

$F(\varphi)$, ($G(\varphi) = 0$)

par panneau
 - 8 paramètres relatifs à $F(\varphi)$

Figure 3.5.43

Figure 3.5.44

Les conditions sont donc exactement les mêmes dans les 2 variantes, ainsi que le nombre de paramètres. Voyons à l'aide du tableau 3.5.5 les différences de précision observées au niveau des écarts résiduels.

Observations

Tableau 3.5.5

Comme le raisonnement théorique nous permettait de le penser, les forces de bord agissant seules suffisent à imposer aux noeuds les diverses conditions sur u et w ; il suffit pour s'en convaincre de regarder les valeurs résiduelles aux noeuds.

Mais pratiquement, la solution obtenue est inadmissible vu les distorsions observées entre les noeuds. Le champ de force n'est donc pas assez riche pour stabiliser les déformations entre ces noeuds.

Remarques

Divers essais ont montré que les forces de bord suffisent uniquement lorsque l'on n'impose que des déplacements u , c'est-à-dire que l'on autorise localement, que les sections subissent des rotations autour de l'axe neutre et ainsi dérogent à l'hypothèse de la conservation des

sections d'extrémité planes.

Il faut aussi signaler que des conditions sur w' ne sont acceptables dans les cas de coques lisses que si l'on emploie les moments de bord $G(\varphi)$. En effet, les forces $F(\varphi)$ agissant à l'axe neutre ne peuvent créer de rotations autour de cet axe (figure 3.5.42).

PANNEAU N°	VARIABLE	LIEUX	VALEUR THEORIQUE A OBTENIR	S4.M.N.		S4.M.N.C.		REFERENCE STRUCTURE BI-APPLIEE
				VALEUR OBTENUE	ECART EN % PAR RAPPORT A LA VALEUR DE REFERENCE	VALEUR OBTENUE	ECART EN % PAR RAPPORT A LA VALEUR DE REFERENCE	
1	$\frac{dw}{dx}$	aux noeuds	0	$\approx 10^{-14}$ rad	≈ 0	$\approx 10^{-11}$ rad	≈ 0	$\approx 0,8 \cdot 10^{-2}$ rad
		entre noeuds	0	$-0,18 \cdot 10^{-3}$ rad	2,25	$-0,22 \cdot 10^{-2}$ rad	275 ₍₁₎	
	U	aux noeuds	0	$\approx 10^{-15}$ m	≈ 0	$\approx 10^{-9}$ m	0	$\approx 0,3 \cdot 10^{-2}$ m
		entre noeuds	0	$-2,110^{-6}$ m	0,07	$-0,2810^{-1}$ m	≈ 900 (1)	
2	$\frac{dw}{dx}$	aux noeuds	0	$\approx 10^{-11}$ rad	≈ 0	$\approx 10^{-11}$ rad	≈ 0	$\approx 0,14 \cdot 10^{-3}$ rad
		entre noeuds	0	$0,15 \cdot 10^{-4}$ rad	10,7	$-0,43 \cdot 10^{-5}$ rad	≈ 3	
	U	aux noeuds	0	$\approx 10^{-12}$ m	≈ 0	$\approx 10^{-12}$ m	≈ 0	$\approx 0,3 \cdot 10^{-2}$ m
		entre noeuds	0	$-2,1 \cdot 10^{-6}$ m	0,07	$0,39 \cdot 10^{-3}$ m	13 %	

(1) De tels pourcentages ne représentent plus rien, ils indiquent seulement que la valeur obtenue s'écarte tout-à-fait du domaine admissible.

Tableau 3.5.5.

Conclusions

Si théoriquement, les seules forces de bord peuvent suffire, on constate que pratiquement la complémentarité entre les forces et les moments est indispensable à l'obtention de résultats satisfaisants et homogènes.



CHAPITRE VI SCHEMA DU LOGICIEL DES BORDAGES RAIDIS DANS SA PHASE DEFINITIVE

Compte tenu du logiciel de base (§ IX.1, partie II), nous présentons maintenant, à son stade final, le logiciel de calcul des structures cylindriques raidies mis au point, dans le cadre de cette thèse, pour tenir compte d'appui élastique en $x=0$ et $x=L$.

VI.1. PRESENTATION DE L'ORGANIGRAMME FINAL DU LOGICIEL

Cette organigramme (figure 3.6.1.) a été conçu de manière à garder le logiciel de base intact (figure 2.9.1). Seuls, des blocs complémentaires ont été adjoints à l'organigramme de base pour former celui du logiciel complet.

VI.2. DESCRIPTION DES BLOCS DU LOGICIEL DANS SA PHASE FINALE

Décrivons succinctement les divers blocs complémentaires (figure 3.6.1) ajoutés au logiciel de base (figure 2.9.1).

VI.2.1. Complément n° 1 au bloc de base

On détermine les expressions analytiques de u , v , w et des efforts N_x , N_φ , M_x , M_φ , ... relatives aux coques cylindriques raidies, complètes ($\varphi = \varphi_0$) et bi-appuyées ($x=0$ et $x=L$) pour les 8 cas de charge unitaire de bord (figure 3.3.3).

VI.2.2. Complément n° 2 au bloc de résolution

Pour les divers cas de charge envisagés (la charge extérieure et les 8 cas de charge unitaire de bord existant par panneau), seul le terme indépendant du système change. Pour une structure à n panneaux, on aura donc $1 + 8n$ termes indépendants. De ce fait, la matrice des coefficients des inconnues ne doit être inversée qu'une seule fois pour obtenir directement les solutions aux $1+8n$ problèmes.

LE LOGICIEL DES BORDAGES RAIDIS

(appuis élastiques en $x=0$ et $x=L$).

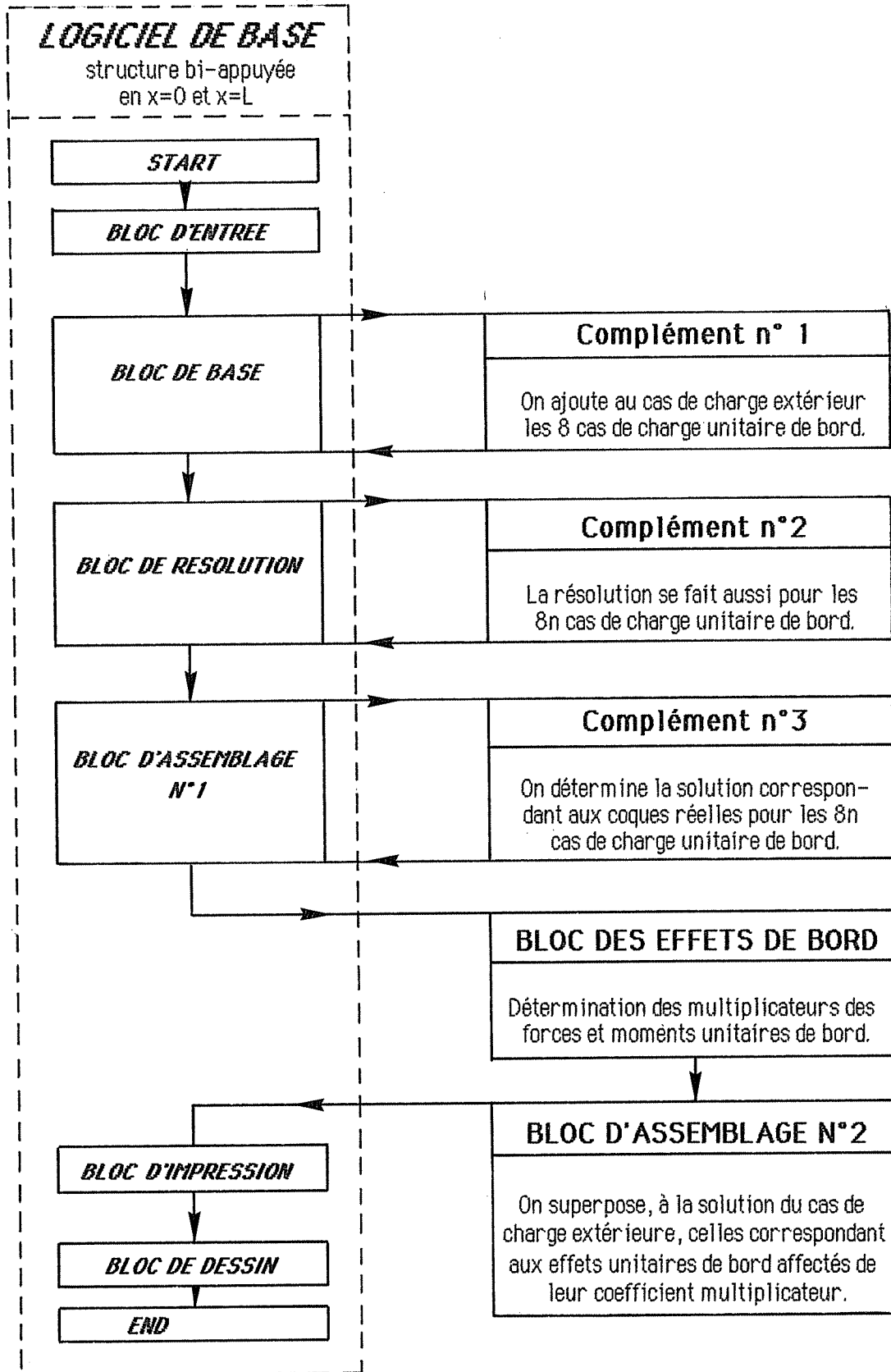


Figure 3.6.1

VI.2.3. Complément n° 3 au bloc d'assemblage n° 1.

On détermine la solution correspondant aux coques réelles bi-appuyées pour les $8n$ cas de charge unitaire de bord.

VI.2.4. Bloc des effets de bord.

Il s'agit de déterminer les coefficients multiplicatifs des forces $F(\varphi)$ et moments $G(\varphi)$ unitaires de bord de manière à vérifier le respect des conditions d'appuis réelles en $x=0$ et $x=L$ (§ IV.5, partie III).

VI.2.5. Bloc d'assemblage n° 2

Le principe de ce bloc est identique au bloc d'assemblage n° 1. On y combine cette fois la solution de la coque réelle bi-appuyée due à la charge extérieure avec les $8n$ solutions de cette même coque soumise aux forces et moments de bord déterminés dans le bloc des effets de bord.

Il est à remarquer que la solution finale de la coque réelle sur appuis élastiques est obtenue par superposition de coques sur appuis simples en $x=0$ et $x=L$.

CHAPITRE VII CONCLUSIONS

Reprenant les enseignements des chapitre I à VI nous pouvons conclure cette troisième partie. Nous avons donc développé un logiciel apte à prendre en compte des forces et des moments agissant aux extrémités de la structure, ces forces et moments inconnus, sont déterminés d'après les conditions d'appui de cette structure, encastrement, déplacement d'ensemble, appuis élastiques, ...

En vue de résoudre le système déterminant forces et moments de bord, nous avons défini des conditions types qu'il faut imposer à ces bords de manière à éviter des systèmes singuliers et à obtenir dans tous les cas des résultats satisfaisants et homogènes.

Nous avons, enfin, montré l'utilité d'utiliser, ensemble, les moments et les forces de bord, les forces ne pouvant suffire à donner des résultats acceptables.

Le logiciel de calcul étant maintenant apte à la résolution des cas concrets, nous allons, dans la quatrième partie, étudier des cas de structures réelles révélatrices de la puissance du logiciel mis à la disposition du concepteur.

QUATRIEME PARTIE

LES APPLICATIONS

CHAPITRE I INTRODUCTION

Dans cette quatrième partie, nous présentons quelques-uns des exemples traités à l'aide du logiciel des bordages raidis. Nous avons abordé différentes catégories d'application, les premières (chapitre II) sont des **applications comparatives**, les résultats obtenus à l'aide du logiciel des bordages raidis étant comparés avec ceux provenant d'autres méthodes. Cela a permis de valider et de confirmer la qualité du logiciel établi.

Ensuite, nous utilisons le logiciel pour le calcul d'un **pont canal** sur appuis multiples (chapitre III) et d'une **porte marée tempête** de 390 m de longueur (chapitre IV). Nous montrons à travers ces 2 applications combien l'exploitation du logiciel est aisée et donne des résultats précis, complets et directement utilisables. On aborde également l'influence du nombre de termes de la série de Fourier sur la précision des résultats.

Dans le chapitre V nous abordons en détail l'étude d'un **barrage mobile constitué de vannes segments**. Nous débutons par la phase de conception (§ V.1) puis de prédimensionnement (§ V.2) et nous terminons par le calcul de l'ensemble vanne-bras grâce aux effets de bords que nous avons développés au sein du logiciel des bordages raidis (§ V.3). Cette étude étant mise au service d'un nouveau type de barrage mobile dont nous avons montré tout l'intérêt au chapitre II, partie I.

Enfin le chapitre VI présente deux applications particulières montrant combien est vaste le champ d'application du logiciel.

CHAPITRE II EXPERIMENTATION NUMERIQUE

Dans ce chapitre, les résultats relatifs aux exemples traités à l'aide du logiciel des bordages raidis seront désignés par la notation L.B.R.

II.1. LE CYLINDRE COMPLET SOUS PRESSION UNIFORME

Soit un cylindre complet de grande longueur dont les extrémités se comportent comme des flasques rigides dans leur plan tout en permettant le déplacement longitudinal u selon OX .

Si le cylindre de la figure 4.2.1. est soumis à une pression interne uniforme P et répond aux caractéristiques suivantes :

$$\begin{aligned} E &= 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \\ \nu &= 0 \\ \delta &= 0,018686 \text{ m} \\ P &= 2,5 \text{ bar} \\ q &= 4 \text{ m} \\ L &= 50 \text{ m} \end{aligned}$$

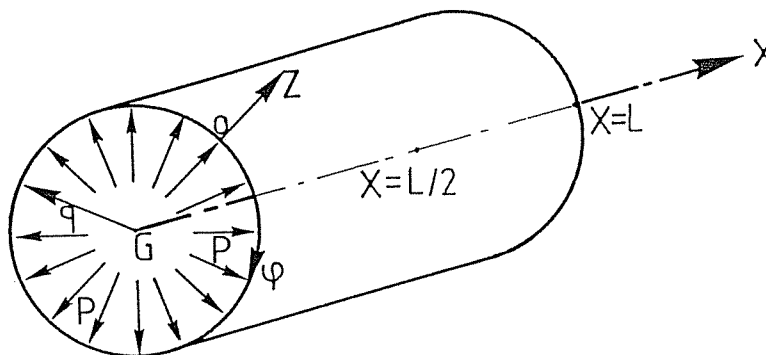


Figure 4.2.1.

La déformation et les contraintes dans la section médiane ($x=L/2$) se réduisent à un déplacement radial constant et à des efforts membranaires [M.3].

$$w = \frac{P \cdot q^2}{E \cdot e} = 1,000 \text{ mm} \quad \text{et} \quad N = P \cdot q = 9,81 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

En raison de la symétrie, seul un secteur angulaire de 45° a été analysé. Les résultats sont conformes à la solution théorique.

$$\begin{aligned} w &= 1,002 \text{ mm} & N_\varphi &= 9,813 \cdot 10^5 \text{ N/m} \\ N_{x\varphi} &= 10^{-4} \text{ N/m} & M_\varphi &= 10^{-2} \text{ N.m/m} & Q_\varphi &= 10^{-6} \text{ N/m} \end{aligned}$$

II.2. LE CYLINDRE COMPLET FERME SOUS UNE LIGNE DE CHARGES

Il nous a semblé intéressant de confronter nos résultats à ceux obtenus analytiquement par N.M. Dehousse [D.1] alors que ce logiciel n'existait pas.

Soit un cylindre répondant aux caractéristiques suivantes :

$$\begin{aligned}
 E &= 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2, & q &= 3 \text{ m} \\
 \nu &= 0 & L_{\text{portée}} &= 10 \text{ m} \\
 \delta &= 0,01 \text{ m} & \alpha &= 360^\circ
 \end{aligned}$$

$$P_{\text{radial}} = 1000 \text{ N/m}$$

Les extrémités sont, comme dans l'exemple précédent, bi-appuyées, $w = v = N_x = M_x = 0$ avec u et dw/dx libres.

La variation des déplacements w obtenus, est représentée figure 4.2.2 et ce déplacement sous la charge vaut $-1,2650 \text{ cm}$, valeur correspondant parfaitement à celle obtenue analytiquement $-1,2656 \text{ cm}$ [D.1].

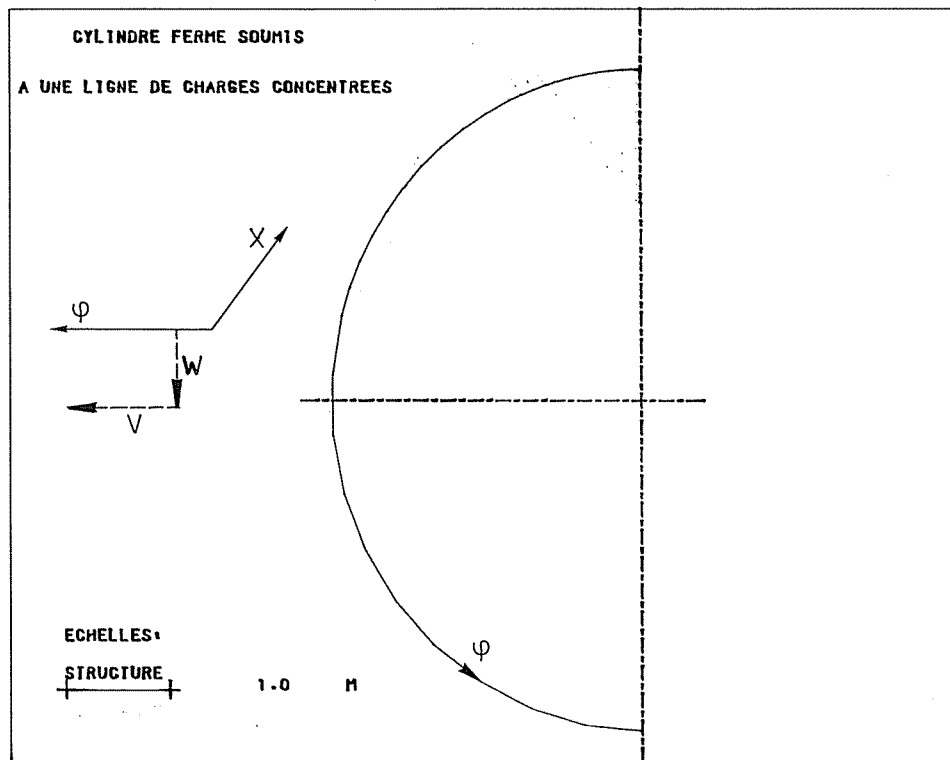


Figure 4.2.2.

Déplacement w et v combinés, dans la section transversale $x = L/2$

II.3. LE CYLINDRE COMPLET FENDU LE LONG D'UNE GENERATRICE

Dans l'exemple précédent, figure 4.2.2., le centre de torsion et celui de gravité étant confondus, nous avons uniquement de la flexion. Si par contre, on fend le cylindre selon une génératrice (figure 4.2.3), on peut observer une torsion importante du cylindre. En effet, le centre de torsion se déplace et vient se situer à une distance $d(=2q)$ du centre de gravité (figure 4.2.3). Appliquons une charge passant par le centre de gravité et observons figure 4.2.4. la torsion gauche qui y apparaît. Les conditions d'appuis étant identiques aux 2 exemples précédents, à savoir : des flasques rigides dans leur plan mais permettant les déplacements u .

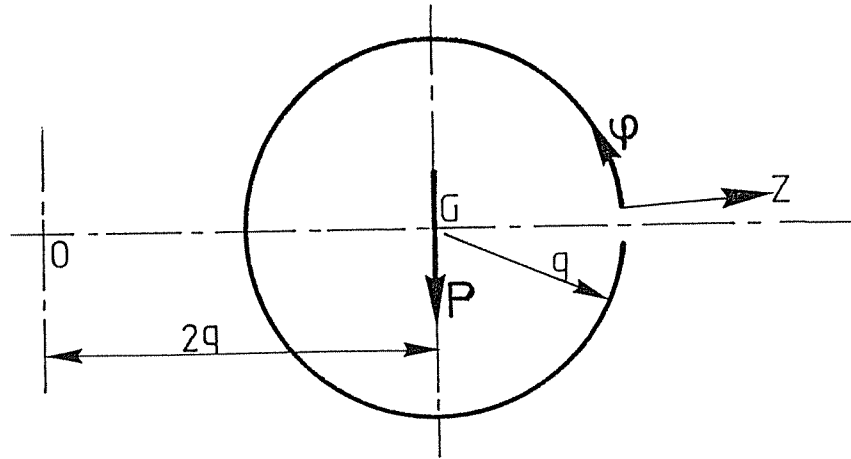


Figure 4.2.3.

Il est bien connu (H.2, T.3) que la torsion gauche entraîne des allongements supplémentaires des fibres longitudinales et, par conséquent l'apparition de contraintes. La combinaison de ces contraintes avec celles dues à la flexion sont représentées figure 4.2.4. et on constate que ce diagramme est identique à celui relevé dans la littérature [V.2]

L'analyse de la figure 4.2.4. montre que la section transversale possède 3 points où les contraintes sont nulles. Ces 3 points n'étant pas sur la même droite, cela prouve le gauchissement de la section.

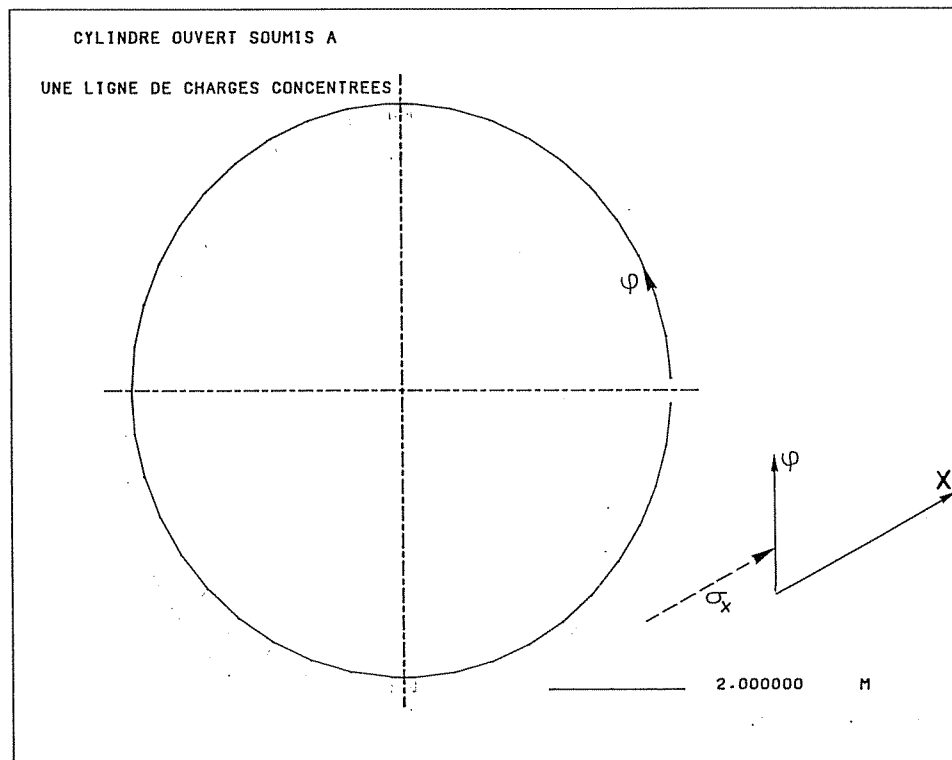


Figure 4.2.4.

Contraintes longitudinales dans un cylindre ouvert sous une ligne de charge passant par le centre de gravité.

II.4. COQUE CYLINDRIQUE SOUS PRESSION UNIFORME

Dans cet exemple, on analyse la coque cylindrique supportée, comme dans les exemples précédents, par deux diaphragmes rigides dans son plan et soumise à une pression uniforme de 10 cm d'eau (figure 4.2.5).

$$\begin{aligned}
 E &= 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \\
 \nu &= 0,3 \\
 \delta &= 0,014 \text{ m} \\
 P &= 0,01 \text{ bar} \\
 q &= 4 \text{ m} \\
 L &= 23,3 \text{ m} \\
 \alpha &= 45^\circ
 \end{aligned}$$

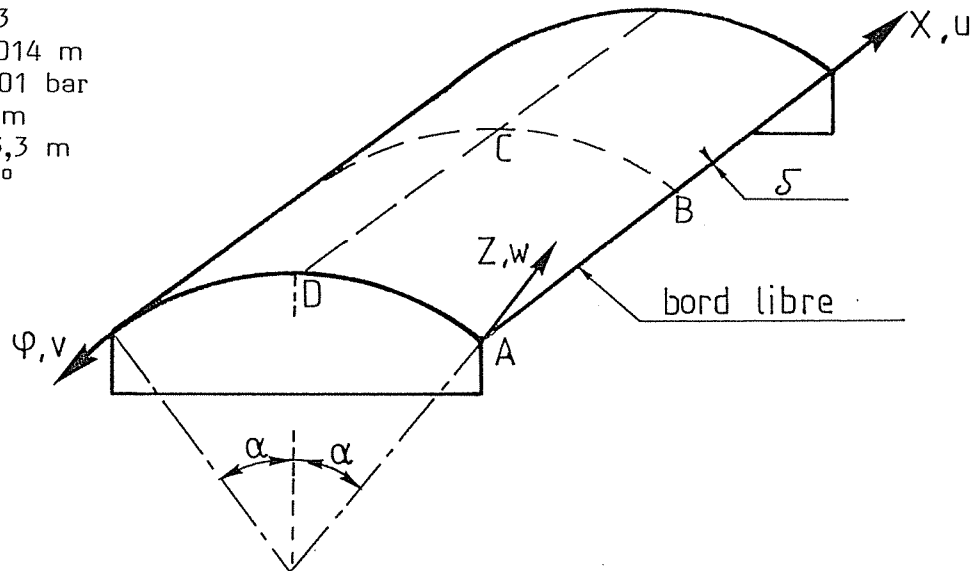


Figure 4.2.5

Le tableau 4.2.1. donne la valeur des déplacements aux points B et C.

Déplacement (m)		Logiciel des bordages raidis	Eléments finis (1)	Eléments finis (2)
en B	Vert.	0,0922	0,0862	0,0908
	Hor.	0,0554	0,0512	0,0537
en C	Vert.	0,0109	0,0114	0,0116
	Hor.	0,0000	0,0000	0,0000

- (1) éléments "shell" de la bibliothèque Sapli [F.2], coque mince à 4 noeuds.
 (2) éléments "T56" de la bibliothèque Samcef [S.3], coque plane quadrangulaire hybride

Tableau 4.2.1.

La figure 4.2.6. montre l'allure des déplacements dans la section médiane BC pour les 3 approches.

D'une manière similaire, nous avons étudié cette même coque soumise à son poids propre. Il s'agit d'un cas d'école très utilisé pour tester des éléments finis; ce cas est connu pour sa sensibilité à la qualité de représentation des modes de déformation flexionnelle. La solution analytique est donnée par Scordelis [S.4, W.3.].

Au tableau 4.2.2 nous comparons la flèche W au point B situé au milieu du bord libre (figure 4.2.5) pour différentes analyses du problème [L.3,

T.2].

Les données sont :

$P = 90,0 \text{ Lb/sq ft}$
 $\nu = 0$
 $\delta = 3 \text{ in}$
 $q = 25 \text{ ft}$

$E = 3 \cdot 10^6 \text{ Lb/sq in}$
 $L = 50 \text{ ft}$
 $\alpha = 40^\circ$

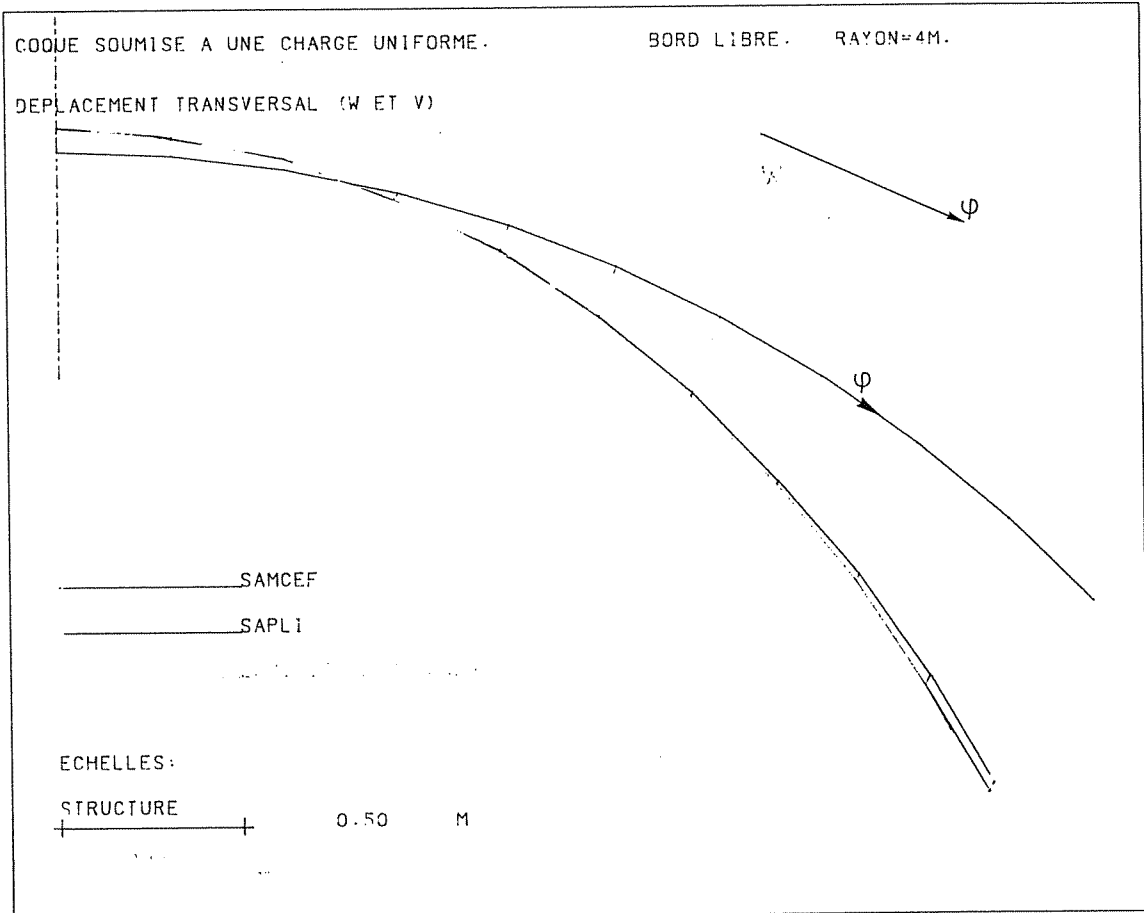


Figure 4.2.6

Déplacement w et v combinés dans la section transversale $x = L/2$ pour les 3 approches de calcul

Approche	Déplacement vertical du point B en cm	
<u>Eléments finis</u>		
Nadisor (8x9 E.F.)	- 9,1684 cm	(-0,3008 ft)
SAP (4x4 E.F.)	- 8,3881 cm	(-0,2752 ft)
DAWSEY (4x4 E.F.)	- 7,7998 cm	(-0,2559 ft)
T.S.D. (4x4 E.F.)	- 9,1480 cm	(-0,299 ft)
Logiciel des bordages raidis (3 termes)	- 8,9540 cm	(-0,294 ft)
Solution de Scordelis	- 9,1683 cm	(-0,3006 ft)

Tableau 4.2.2.

II.5. LA CONTRIBUTION DES SEMELLES A LA REPRISE DE L'EFFORT DE CISAILLEMENT

Comme expliqué § II.4.3., partie II, si la nervure est solidarifiée au bordage par l'intermédiaire de nombreux renforts (figure 4.2.7), il est logique de tenir compte de la contribution des semelles à la reprise et à la transmission des efforts de cisaillement.

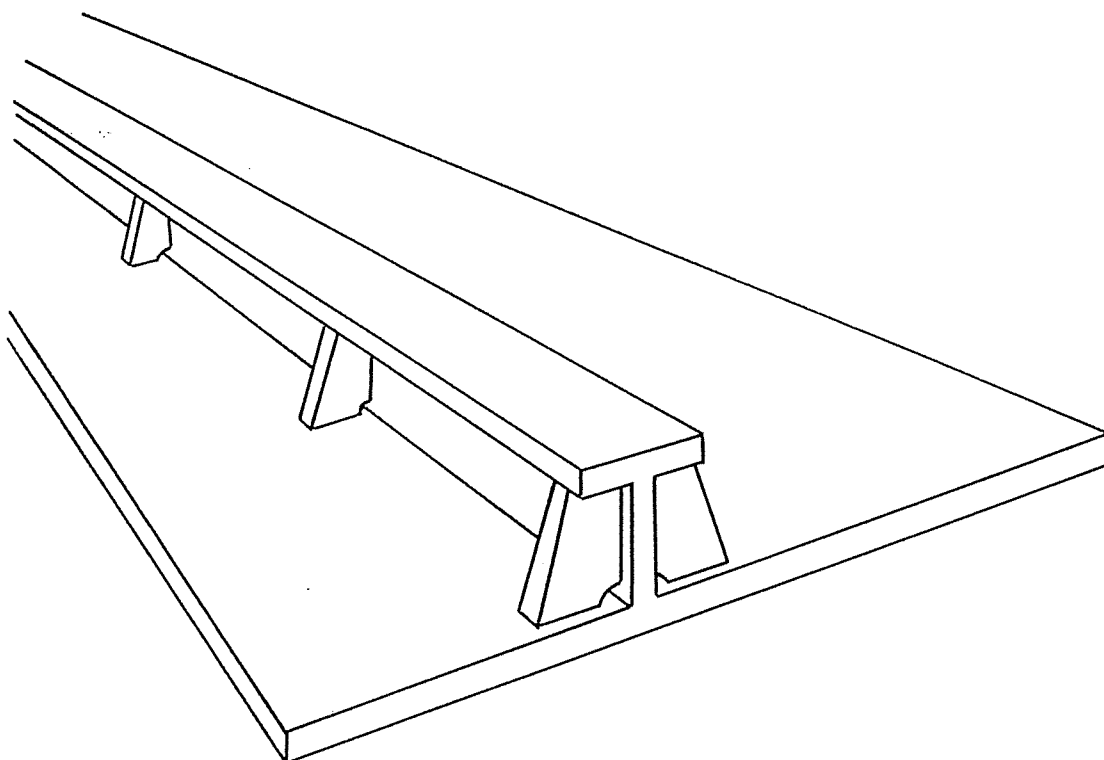


Figure 4.2.7

II.5.1. Sans transmission du cisaillement aux semelles

Nous avons étudié l'effet d'une charge agissant dans le plan d'une plaque raidie par 6 nervures longitudinales (figure 2.4.8). Ces nervures étant choisies particulièrement importantes vis-à-vis du bordage, de manière à souligner leur influence.

Les bords $x=0$ et $x=L$ correspondent à des appuis simples et les bords $\varphi=0$ et $\varphi=\varphi_0$ sont des bords libres; ces conditions limites sont reprises à la figure 4.2.8.

L'étude de cette structure a également été réalisée par éléments finis [S.3] de manière à confirmer nos propres résultats. Pour ce faire, nous avons utilisé l'élément plaque T 56 de la bibliothèque Samcef. Vu la symétrie de la structure, la décomposition a été la suivante : 24x5 éléments pour le bordage et 3x5 éléments par nervure, soit un total de 210 éléments comptant 32 DDL chacun, c'est-à-dire, compte tenu des fixations 2854 degrés de liberté.

En ce qui concerne notre méthode, nous présentons les résultats de 3 discrétisations différentes de cette même structure.

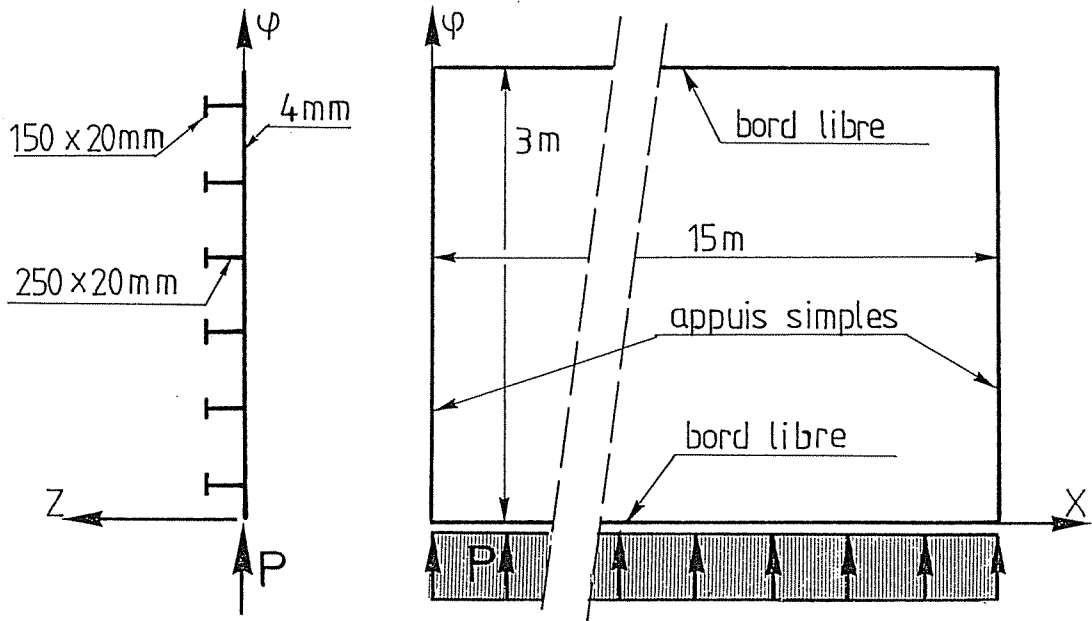


Figure 4.2.8

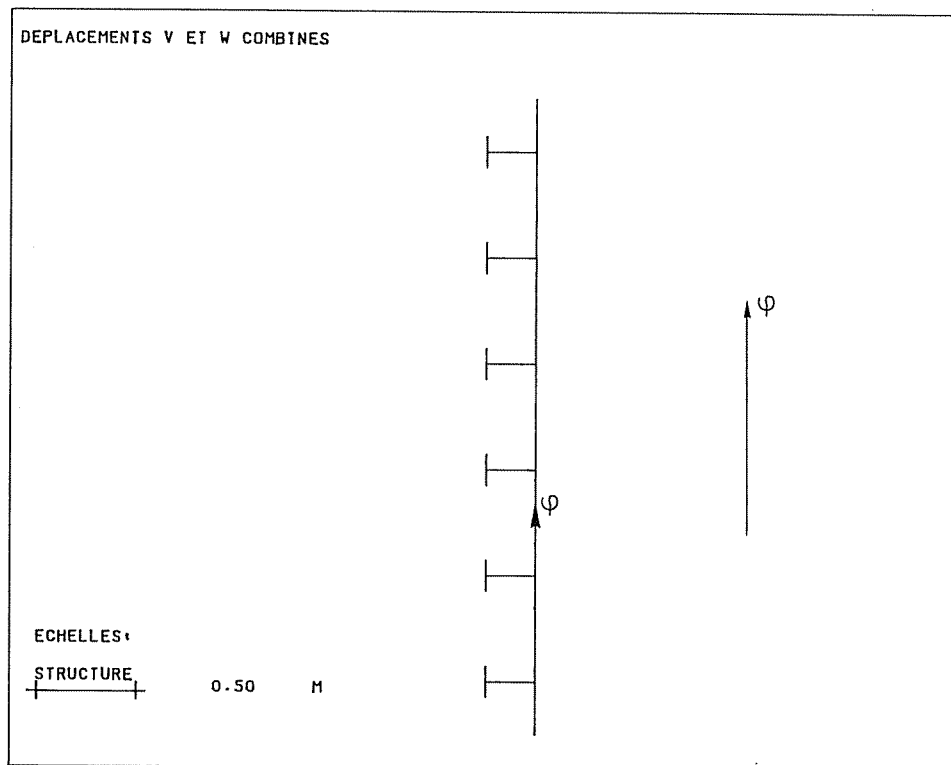


Figure 4.2.9

La première (L.B.R.1), figure 4.2.9, ne comporte qu'un seul panneau (système de 8 équations) et les nervures sont considérées comme des raidisseurs; on uniformise donc leurs effets sur toute la structure (Chap. III, partie II). On admet $S_x^{\text{raid}} = L_x^{\text{raid}} = 0$ (§ II.4.3., partie II), ce qui correspond à des raidisseurs dont les semelles ne contribuent pas à la transmission de

l'effort $N_{x\phi}$.

La seconde (L.B.R.2), semblable à la seconde discrétisation, assimile les nervures à des traverses (chap. V, partie II); on admet de même $S_x^{trav} = L_x^{trav} = 0$.

La troisième (L.B.R.3), la plus détaillée mais aussi la plus coûteuse, comporte 7 panneaux pour le bordage et 3 panneaux par nervure, soit un total de 25 panneaux; ce qui correspond à un système de 200 inconnues (§ VIII.4.7 partie II).

Cette discrétisation est originale dans le sens qu'elle assimile les âmes et les semelles à des plaques lisses. Les traverses sont dès lors constituées de 3 plaques et sont reliées par des tronçons de bordage eux-mêmes discrétisés comme des plaques distinctes. Cette manière d'agir est d'ailleurs une pratique courante dans la méthode des bandes finies.

Un avantage de cette technique de discrétisation est de permettre aux nervures de se déformer indépendamment du bordage; le principe de la conservation des sections planes n'étant plus une imposition restrictive. De plus la transmission des efforts entre les nervures et le bordage est cette fois assurée de manière totalement exacte, car les Y_{ox} , U_{ox} et U_{oz} y sont implicitement pris en compte.

Les déplacements v et u à mi-portée relatifs aux 4 approches envisagées sont repris au tableau 4.2.3.

	Déplacement selon OY V (cm)	Déplacement selon OX U (cm)
Eléments finis SAMCEF (210 éléments)	18,1	5,14
L.B.R. 1 - 1 panneau (8 inc.) 6 raid. ($S_x=L_x=0$) 7 termes	20,17	5,81
L.B.R.2 - 1 panneau (8 inc.) 6 trav. ($S_x=L_x=0$) 7 termes	20,71	6,02
L.B.R.3, 25 panneaux (200 inc.) 7 termes	19,50	5,57

Tableau 4.2.3.

On constate un bon accord entre la solution "L.B.R.3" et celle due aux éléments finis. La solution "L.B.R.1." est fort proche des 2 précédentes et vu la simplicité de la discrétisation qui la caractérise, elle doit être considérée comme optimum. Les résultats dus à l'approche "L.B.R.2" sont un peu moins convaincants; l'écart enregistré vient des hypothèses faites sur le comportement des traverses au § VI.2, partie II ($\phi(K_i) = 0$); hypothèses qui sont transgressées pour un tel type de chargement.

La cause de l'écart enregistré entre les discrétisations L.B.R.1 et L.B.R.2 et les approches L.B.R.3 et éléments finis est logique. En effet, dans ces 2 dernières discrétisations, la collaboration des semelles à la reprise du cisaillement est faible mais pas inexistante. Or, dans les approches L.B.R.1 et L.B.R.2 les effets des semelles sont par hypothèses annulés ($S_x =$

$L_x = 0$). La collaboration des semelles, aussi faible soit elle, justifie à notre avis cette différence de résultat.

II.5.2. Avec transmission du cisaillement aux semelles

Dans le cas de nervures rigidement fixées au bordage par l'intermédiaire de nervures transversales ou par des goussets, nous avons réétudié la version L.B.R.1 avec S_x et L_x non nuls.

Les résultats sont donnés au tableau 4.2.4 où ils sont comparés avec ceux de la Résistance des Matériaux (M.3).

	V (cm)	U (cm)
Discrétisation L.B.R.1. 1 panneau, 6 raid (S_x et L_x)	7,31 (7 termes)	2,11 (7 termes)
	7,70 (1 terme)	2,05 (1 terme)
R.D.M.	7,1	2,25

Tableau 4.2.4

La comparaison est excellente et montre combien il est aisé de tenir compte de la présence de multiples renforts qui solidarissent les semelles avec le bordage sans avoir besoin de les discrétiser comme ce serait le cas avec les éléments finis.

II.6. APPLICATIONS AUX VOILES LONG SOUMIS A L'ACTION DE FORCES AXIALES APPLIQUEES AUX 2 EXTREMITES.

Le non-respect de la loi des sections planes est également mis en évidence dans le cas suivant (figure 4.2.10).

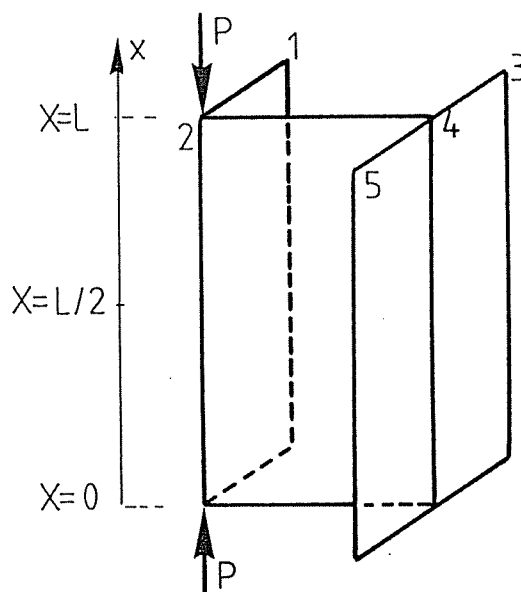


Figure 4.2.10

La figure 4.2.11 montre pour la section transversale $x=L/2$ le diagramme des contraintes longitudinales compte tenu du gauchissement des sections transversales. Ce gauchissement entraîne une rotation et un déplacement d'ensemble de la section transversale (figure 4.2.12).

Le tableau 4.2.5 contient les contraintes dans les sections $x=0$ et $x=L/2$ obtenues à l'aide de notre logiciel, ainsi que celles mentionnées par Vlassov [V.2]. A titre de comparaison, ce tableau donne aussi les contraintes calculées selon la théorie classique de la Résistance des Matériaux, ces contraintes étant cette fois les mêmes quelle que soit la section transversale ($x=0$ à $x=L$).

On constate que les contraintes supplémentaires dues au gauchissement sont très importantes et varient suivant la section envisagée.

CONTRAINTES LONGITUDINALES EN N/cm ²					
Point (Fig. 4.2.9)	Approche classique de la R.D.M.	Logiciel des bordages raidis		Vlassov	
		$x = 0$	$x = L/2$	$x = 0$	$x = L/2$
1	- 3211	780	5300	570	5401
2	- 6425	- 8540	- 10500	- 8747	- 10801
3	+ 3866	2540	1150	2650	1103
4	+ 652	830	1130	849	1099
5	- 2559	- 920	1150	- 950	1105

Tableau 4.2.5

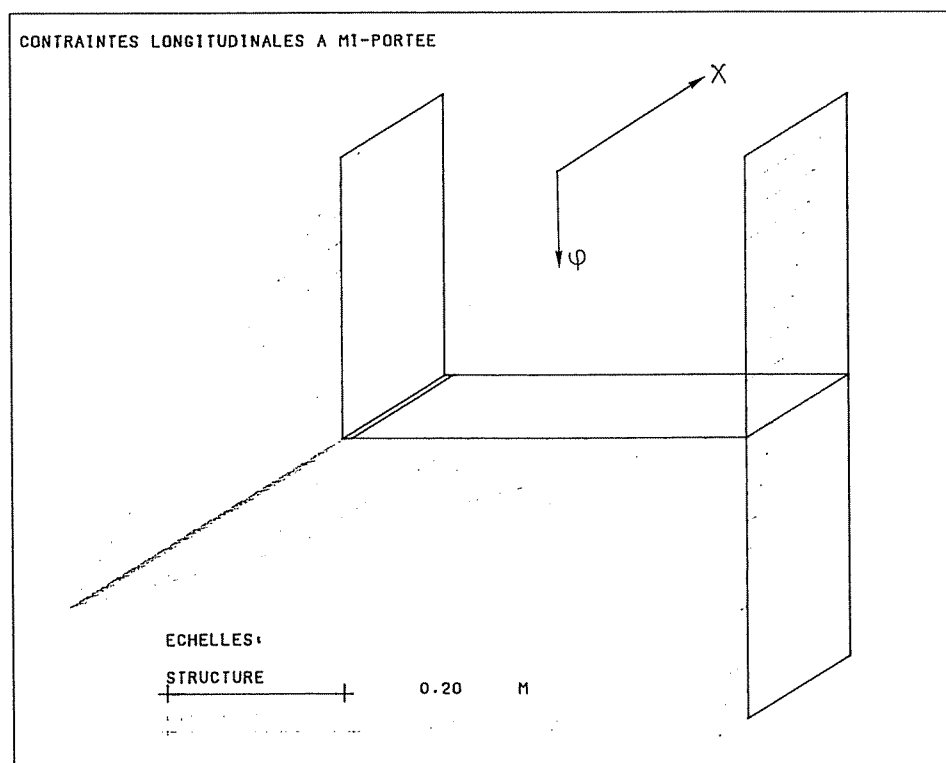


Figure 4.2.11

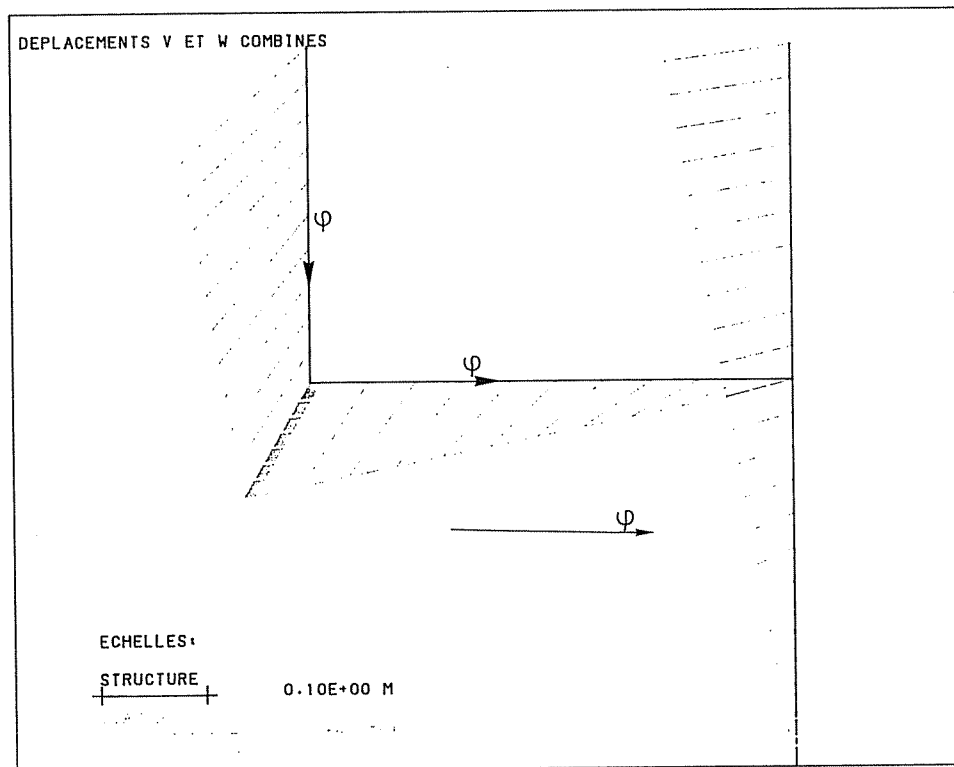


Figure 4.2.12
Déplacements v et w combinés de la section transversale en $x=L/2$ montrant une rotation et un déplacement d'ensemble.

II.7. VERIFICATION DU PRINCIPE DE SAINT-VENANT

Selon le principe de Saint-Venant [C.3], les charges agissant sur la poutre creuse rectangulaire de la figure 4.2.13 ne provoquent pas de contraintes dans les sections suffisamment éloignées du lieu d'application des charges. En général, on parle d'une distance égale à trois fois la plus grande dimension de la section transversale.

Montrons que, si le principe est vérifié, l'amortissement se fait bien plus lentement dans le cas de structures composées de voiles minces [V.2].

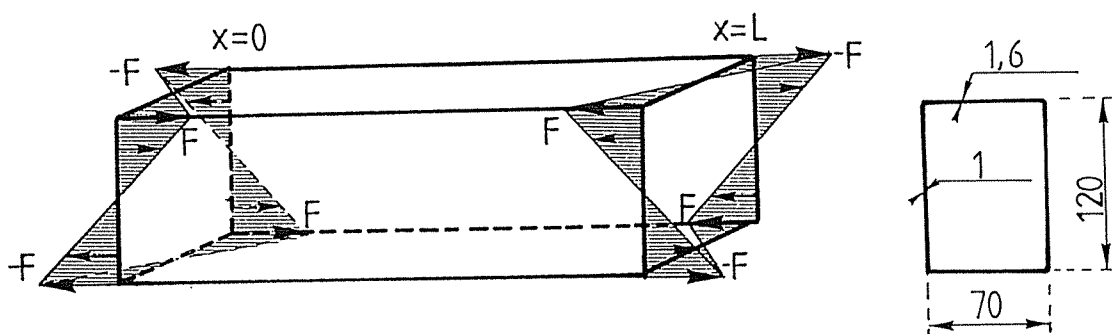


Figure 4.2.13

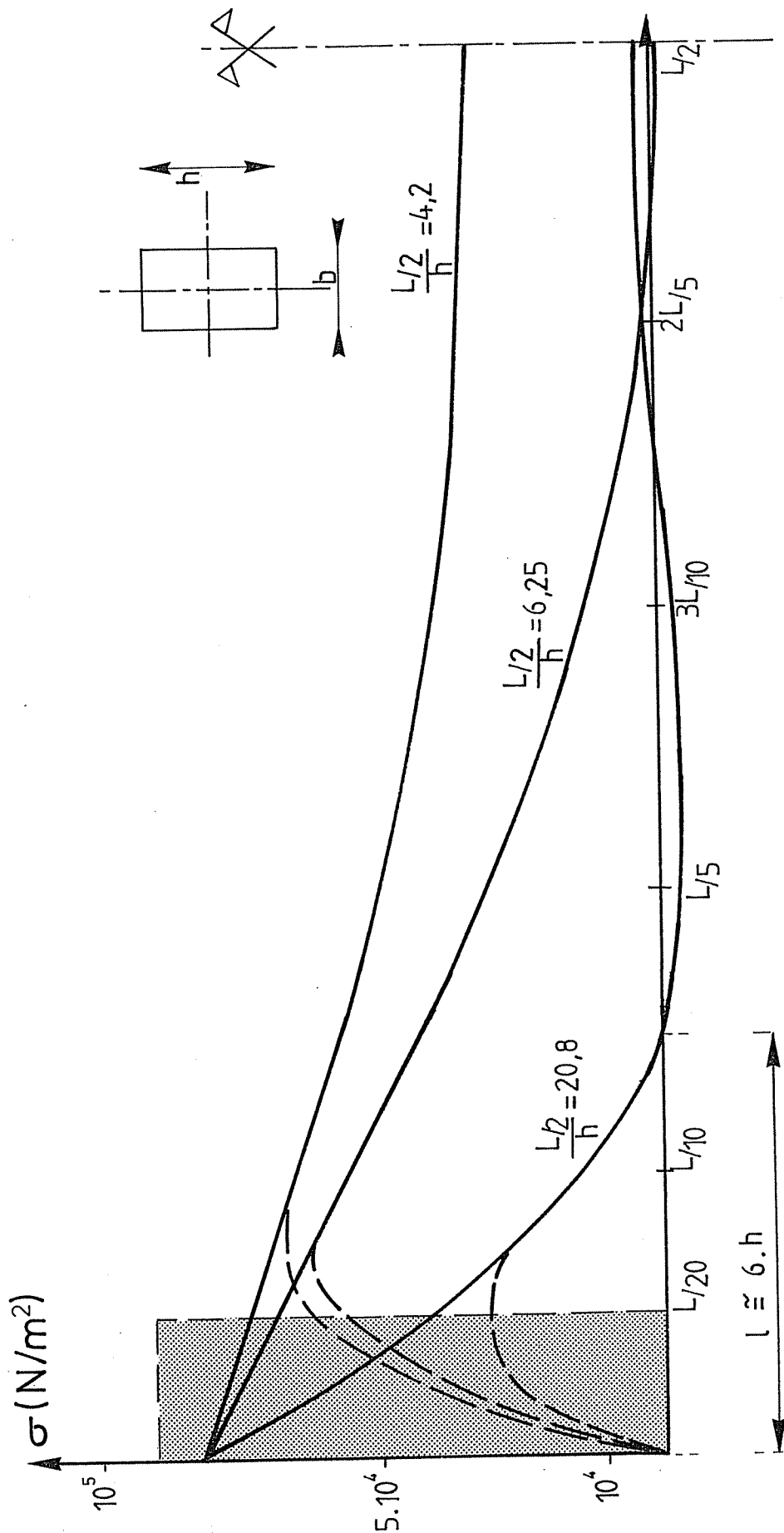
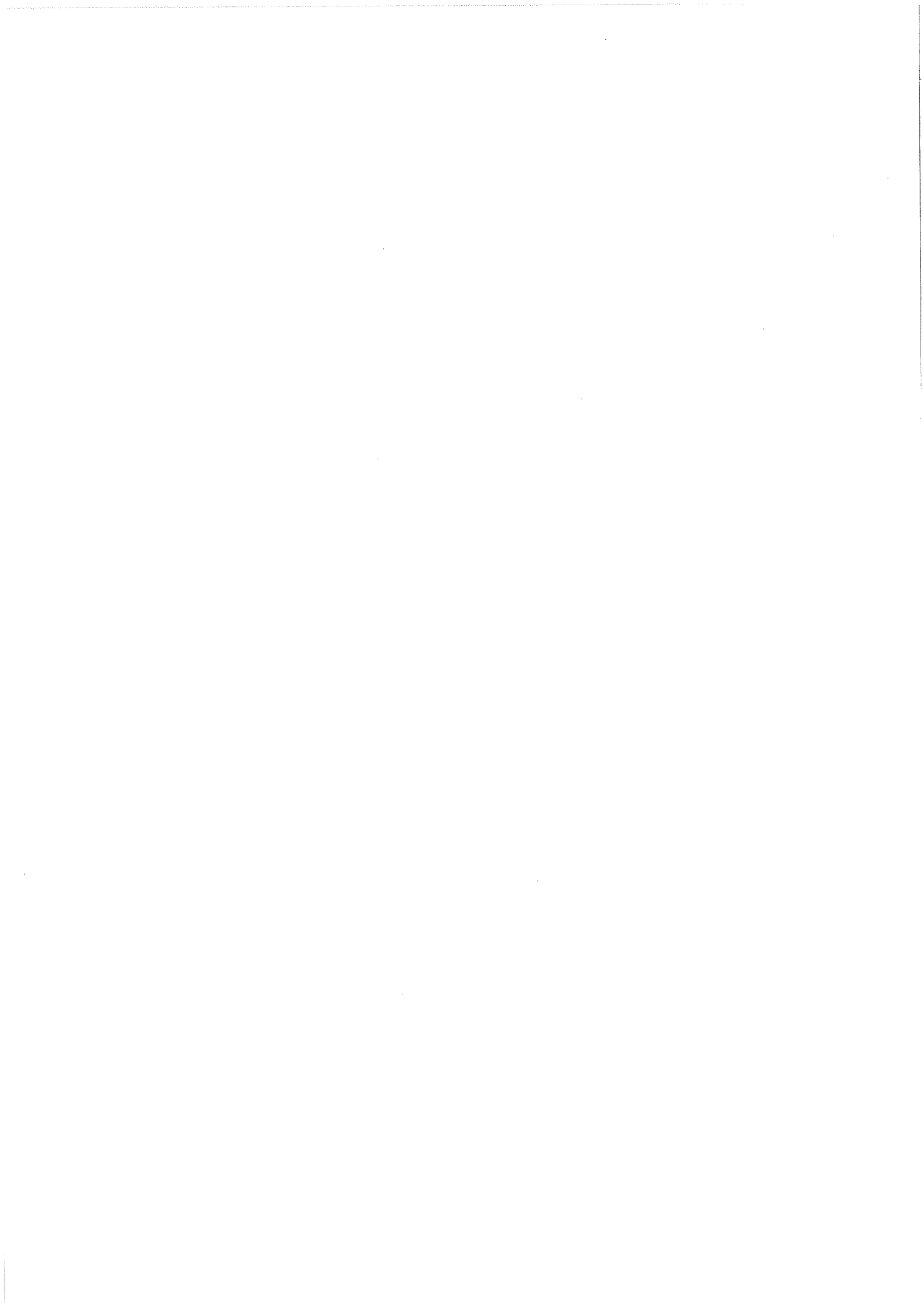


Figure 4.2.14

Nous avons envisagé (figure 4.2.13) différentes portées, $L=10$ m, 15 m et 50 m, dont les contraintes à mi-portée sont respectivement de 39 %; 1 % et 0 % de la contrainte d'extrémité. La figure 4.2.14 donne la variation de la contrainte longitudinale pour divers rapports de $(L/2)/h$, avec L la portée et h la plus grande dimension de la section transversale.

On constate que l'amortissement complet de l'effet local est atteint après une distance égale à environ 6 fois la plus grande dimension de la section (h).



CHAPITRE III ETUDE D'UN PONT CANAL

Les travaux de mise au gabarit de 1350 t du canal du Centre nécessitent la construction d'un pont canal à Houdeng-Aimeries de 360 m de long (travée de 20 m), 50,85 m de large et de 4,5 m de tirant d'eau (C.4).

Divers projets et alternatives ont été proposés. Notre but n'est pas de choisir le meilleur, mais simplement de montrer au travers du calcul d'un pont canal en béton précontraint, combien l'usage du logiciel des bordages raidis peut aider au calcul de l'ouvrage.

Une étude de la variante du pont canal précontraint a été présentée par L.G. Cajot [C.5] mais se limitait au calcul des travées bi-appuyées.

Pour notre part, à partir des dimensions établies par L.G. Cajot, nous présentons le calcul de la travée bi-appuyée § III.1 ainsi que le calcul du pont sur appuis multiples (§ III.2). Il faut signaler que parmi les diverses variantes proposées, nous avons retenu celle de la poutre chevêtre s'étendant sur toute la largeur du pont, y compris sous les bajoyers.

Nous étudierons également l'influence du nombre de termes de la série de Fourier sur la précision des résultats (§ III.3).

III.1. ETUDE DE LA TRAVÉE BI-APPUYÉE

La portée, compte tenu du joint et de l'épaisseur des chevêtres, est de 18,5 m et la section transversale est représentée figure 4.3.1. La charge principale est celle due à la poussée de l'eau $h = 4,5$ m.

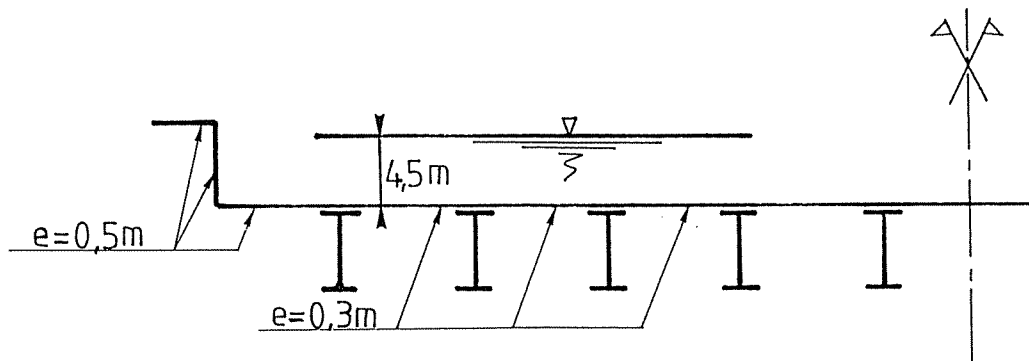


Figure 4.3.1.

Vu la symétrie du pont canal ainsi que de la charge, nous n'avons étudié que la moitié de la structure. Sans entrer dans trop de détails, nous signalons que les armatures ont été prises en compte dans le logiciel par l'intermédiaire de surfaces équivalentes. Le poids propre a également été inséré dans le cas de charge.

La discrétisation effectuée en vue du calcul de cette demi-structure est la suivante : 2 panneaux de type plaque lisse pour représenter le bajoyer, 1 panneau de même type pour représenter la partie du tablier d'épaisseur 50 cm et 1 panneau du type plaque raidie par 5 traverses pour représenter le reste du tablier. La discrétisation est donc extrêmement simple et aisée à réaliser, 4 panneaux dont un seul raidi ; la résolution de ce problème à l'aide du logiciel est de ce fait extrêmement rapide, 43 lignes de données et seulement 7,2 secondes CPU sur l'IBM 4381 du Centre de Calcul de l'Université de Liège.

Les contraintes, efforts et déplacements que nous allons présenter sont relatifs à la structure non précontrainte, les effets des efforts de précontrainte devant y être ajoutés. Bien que des efforts longitudinaux, comme ceux de la précontrainte peuvent être envisagés [D.9], nous n'avons pas voulu étendre davantage cette application en vue de garder toute sa simplicité et ainsi permettre la comparaison avec la travée bi-encastree. La précontrainte dans une travée bi-appuyée étant fondamentalement différente de celle nécessaire dans une travée bi-encastree [M.4].

Les figures 4.3.2 à 8 donnent les déplacements, efforts et contraintes dans les sections transversales de bord ($x=0$) et centrale ($x=L/2$).

On y décèle parfaitement l'effet dû à chaque traverse. La précision et la densité des résultats fournis permettent au concepteur de juger rapidement des modifications à apporter en vue d'améliorer le comportement de la structure.

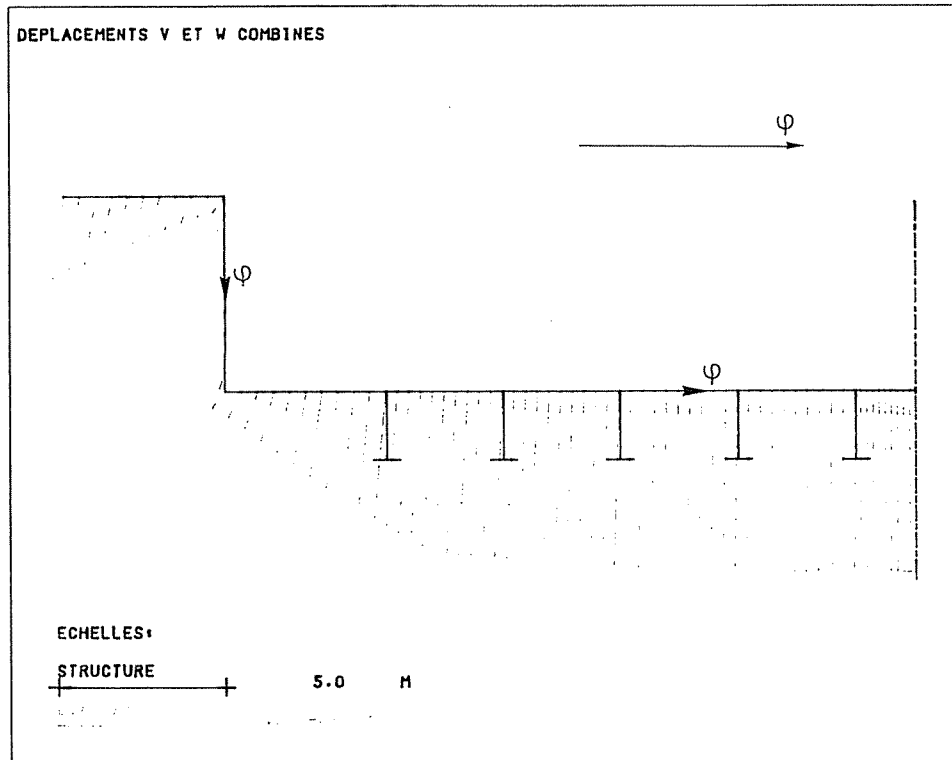


Figure 4.3.2.
Travée sur appuis simples.
Déplacements w et v combinés dans la section transversale à mi-portée ($x=L/2$)

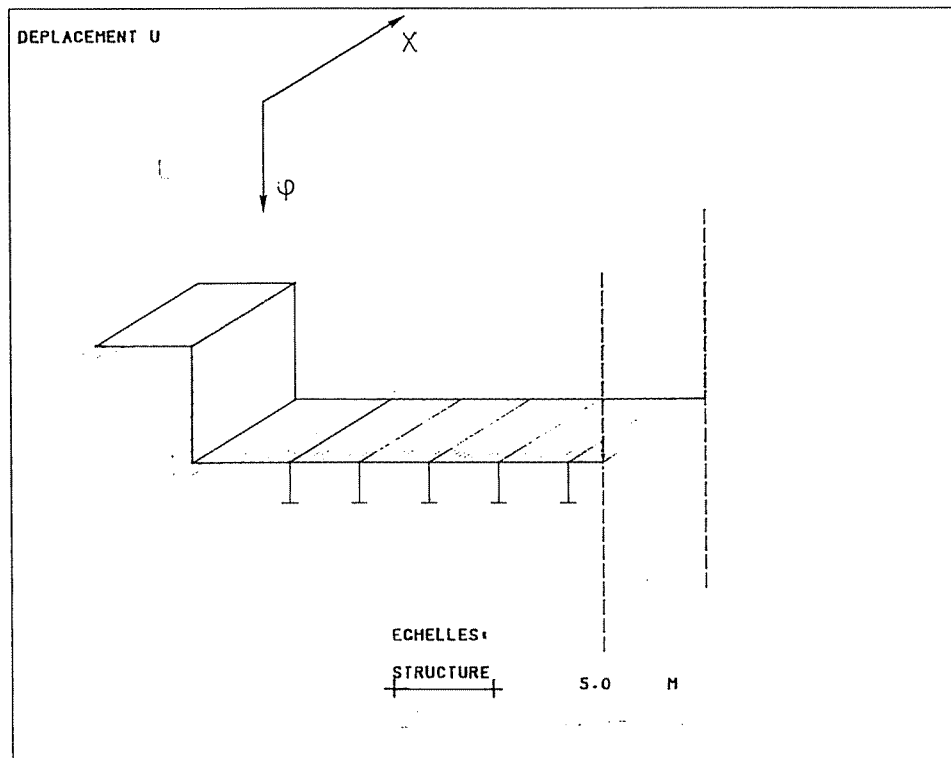


Figure 4.3.3.
Travée sur appuis simples
Déplacements longitudinaux u au niveau de la section d'extrémité ($x=0$)

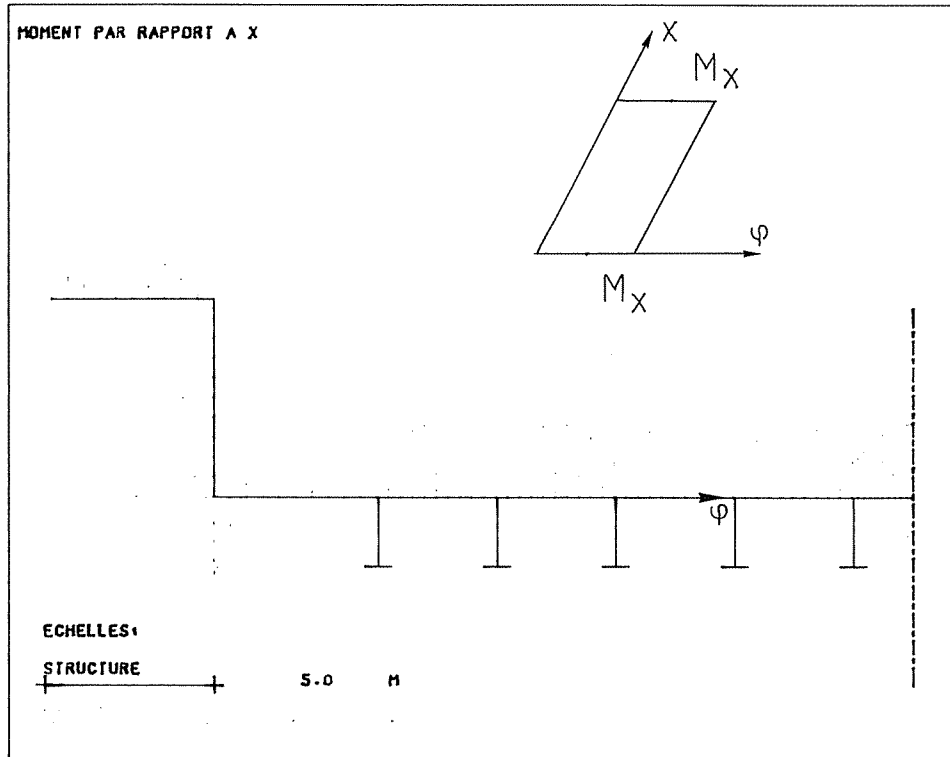


Figure 4.3.4.
Travée sur appuis simples
Moment M_x à mi-portée ($x=L/2$)

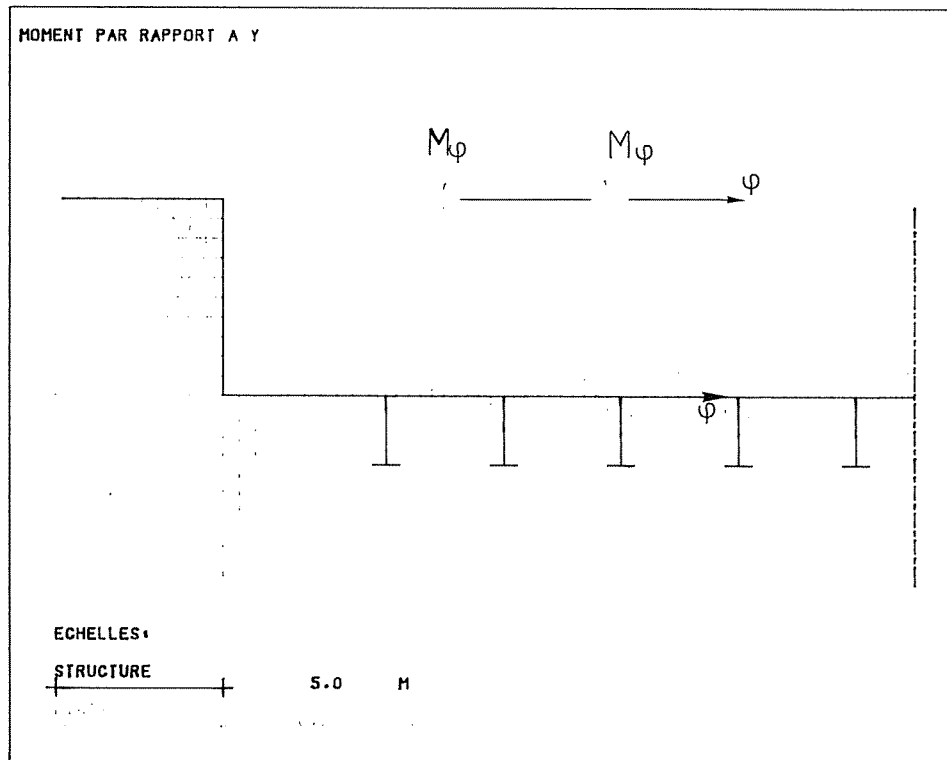


Figure 4.3.5
Travée sur appuis simples
Moment M_φ à mi-portée ($x=L/2$)

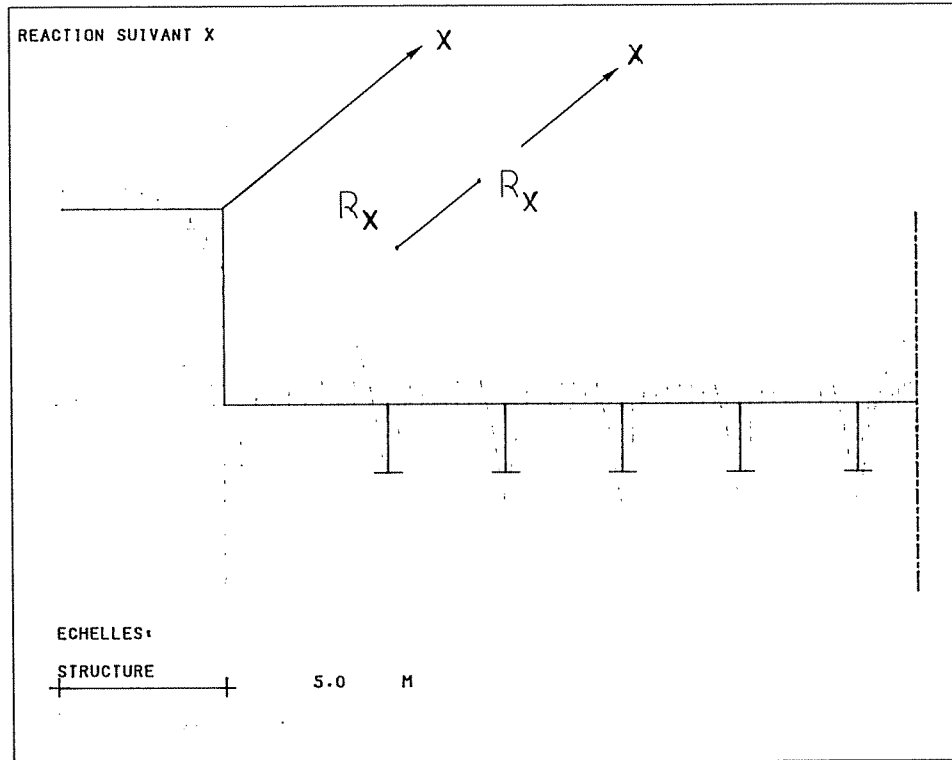


Figure 4.3.6
Travée sur appuis simples
Efforts tranchant R_x dans la section d'extrémité ($x=0$)

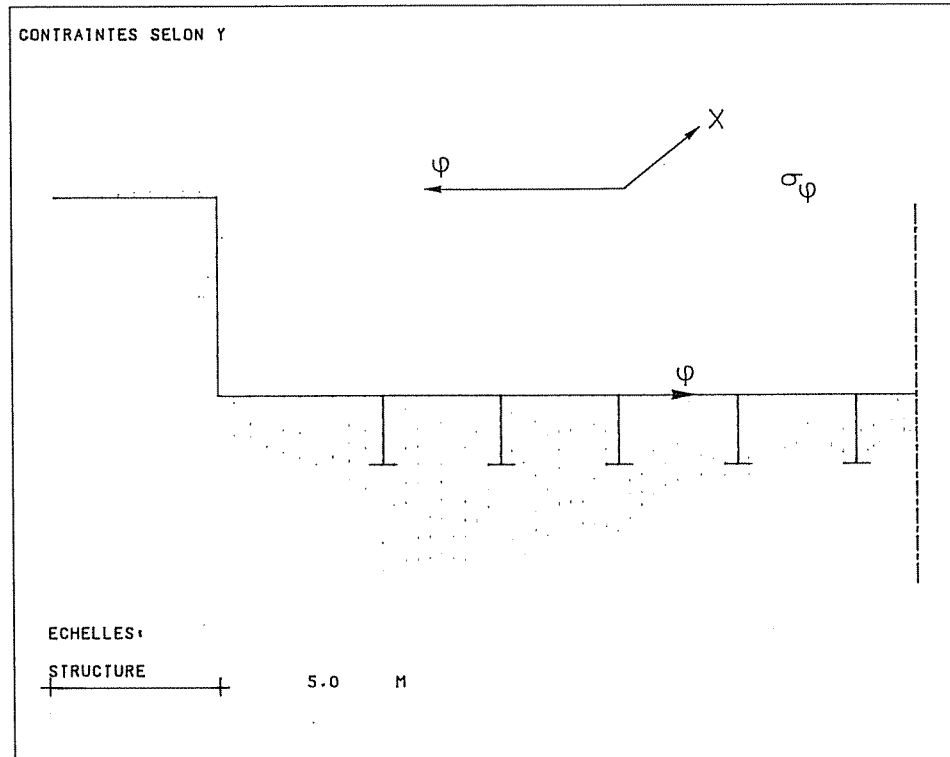


Figure 4.3.7
Travée sur appuis simples
Contraintes transversales σ_ϕ dans le tablier au niveau de la section centrale ($x=L/2$)

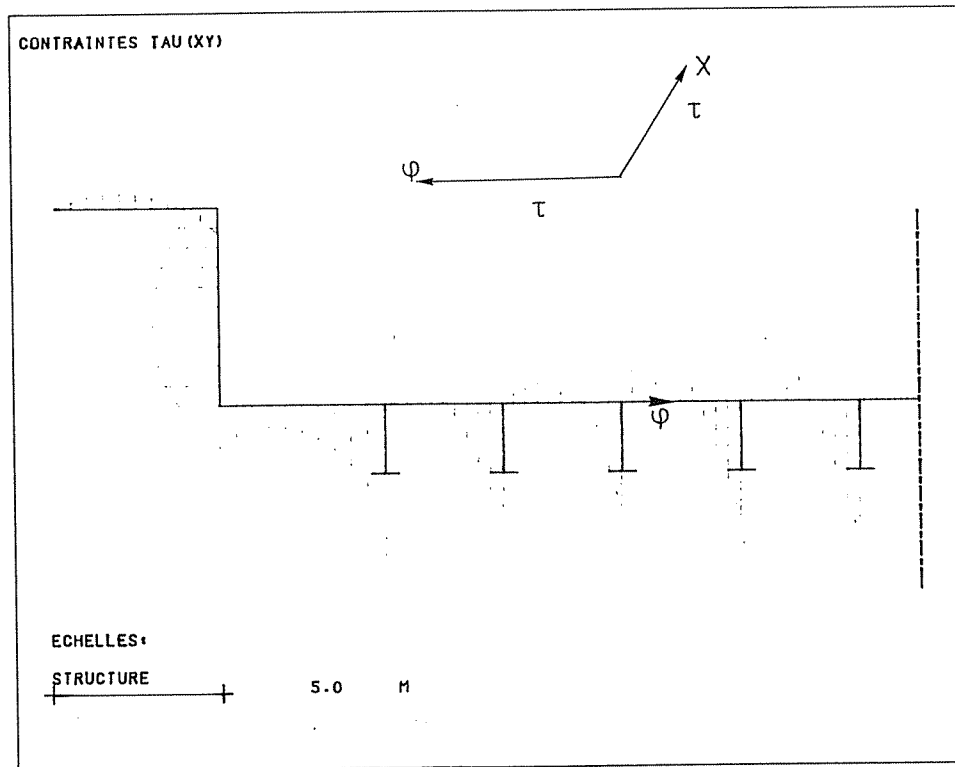


Figure 4.3.8
Travée sur appuis simples
Contraintes tangentielles τ_{xy} dans le tablier pour la section de bord ($x=0$)

III.2. ETUDE DU PONT SUR APPUIS MULTIPLES

Nous limiterons notre étude aux travées centrales qui peuvent être assimilées à des travées bi-encastées. De plus, dans le souci de comparer avec la travée sur appuis simples, nous garderons une portée de 18,5 m.

Les figures 4.3.9 à 11 présentent les diagrammes des déplacements, efforts et contraintes les plus significatifs, des modifications apparaissant lorsque l'on applique les forces et moments de bords à la structure pour simuler l'encastrement des sections de bord $x=0$ et $x=L$.

A la figure 4.3.10 le diagramme des déplacements longitudinaux u aux appuis donne des résidus de déplacements u non nuls. En théorie, on a $u=0$ de manière uniforme, mais pratiquement, vu que les fonctions de bord sont du 3ème degré, il subsiste des résidus. Un résidu maximum de $0,1 \cdot 10^{-3}$ m alors que les déplacements à annuler étaient de l'ordre de $0,3 \cdot 10^{-2}$ m, soit 30 fois plus, est très acceptable. Il faut en effet comparer le diagramme de la figure 4.3.10 à celui de la figure 4.3.3. pour se rendre compte que l'on a bien globalement $u=0$.

Les efforts de bord N_b et M_b nécessaires pour annuler ces déplacements u et rotations dw/dx d'extrémités sont repris respectivement aux figures 4.3.12 et 13. Ces champs de forces et moments de bords étant du 3ème degré (3.2.5 et 6), il est impossible d'assurer correctement les

conditions aux limites $u=0$ et $dw/dx = 0$ sur l'entièreté du tablier si celui-ci est discrétisé comme un seul panneau, raidi par 5 nervures. Nous avons discrétisé le tablier en 6 tronçons, ce qui porte à 8 le nombre total de panneaux nécessaires. Ce procédé de subdivision d'un panneau en sous-panneaux a permis d'obtenir des champs de forces et moments de bord (figure 4.3.12 et 13) suffisamment riches pour annuler des déplacements u (figure 4.3.3) comportant de si brusques variations.

Une conséquence de cette subdivision est l'accroissement du temps CPU de calcul qui reste néanmoins très faible. Pour un calcul avec effets de bord et 3 termes de la série de Fourier, le temps CPU est de l'ordre de 250 s.

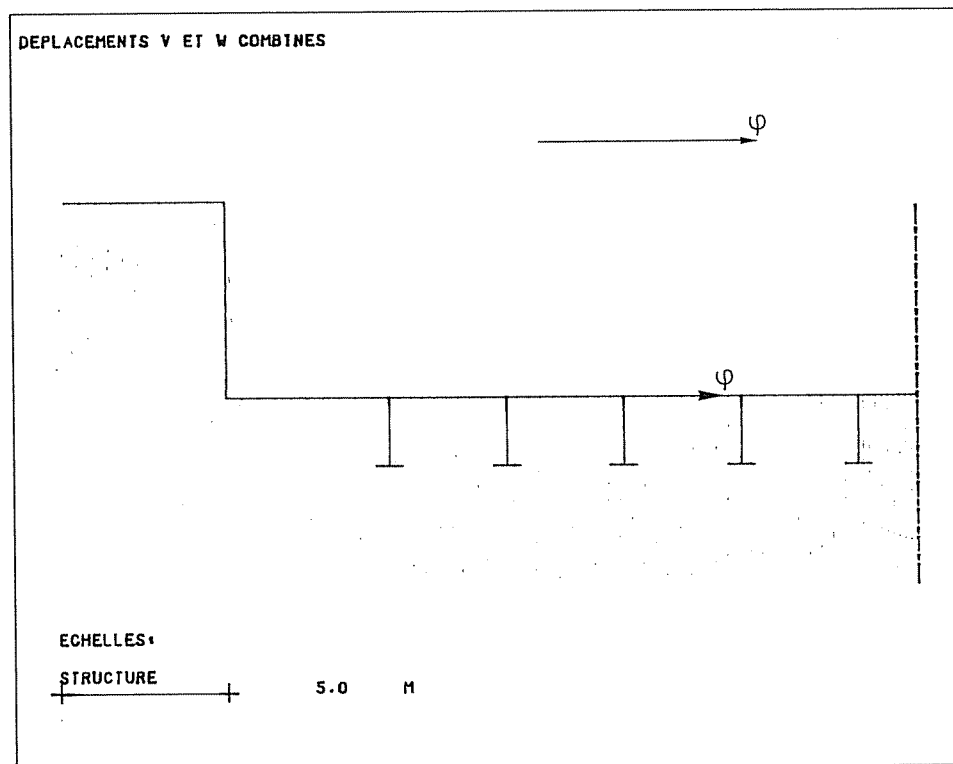


Figure 4.3.9
Travée bi-encastrée
Déplacements w et v combinés, dans la section transversale à mi-portée
($x=L/2$)

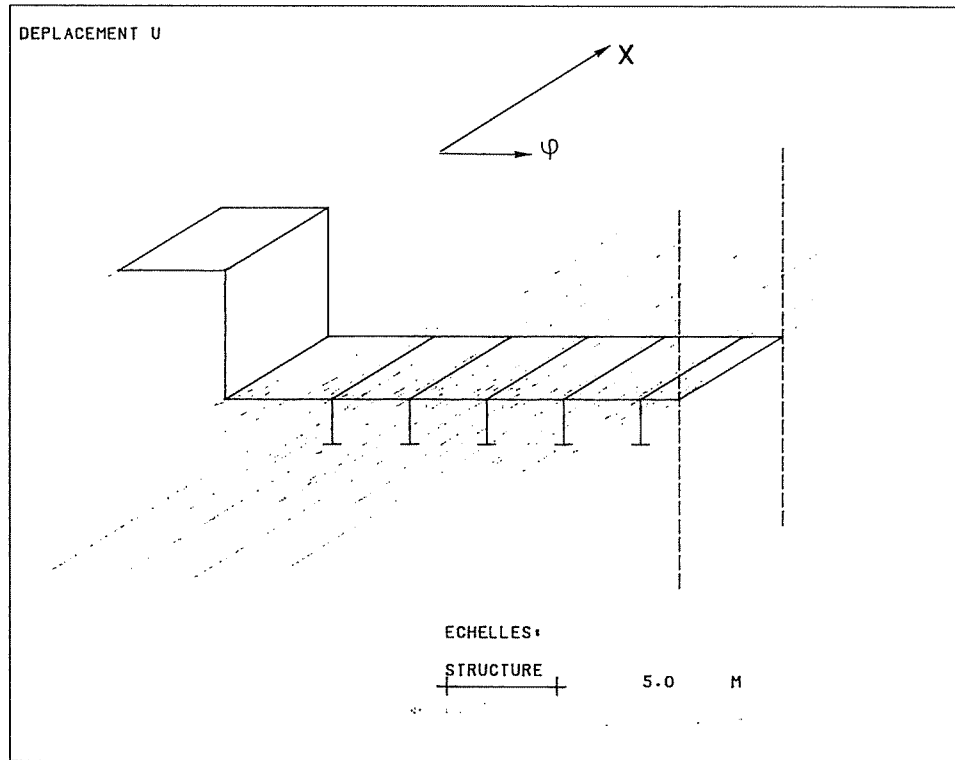


Figure 4.3.10
Travée bi-encastée
Déplacements longitudinaux résiduels u dans les sections de bord ($x=0$)

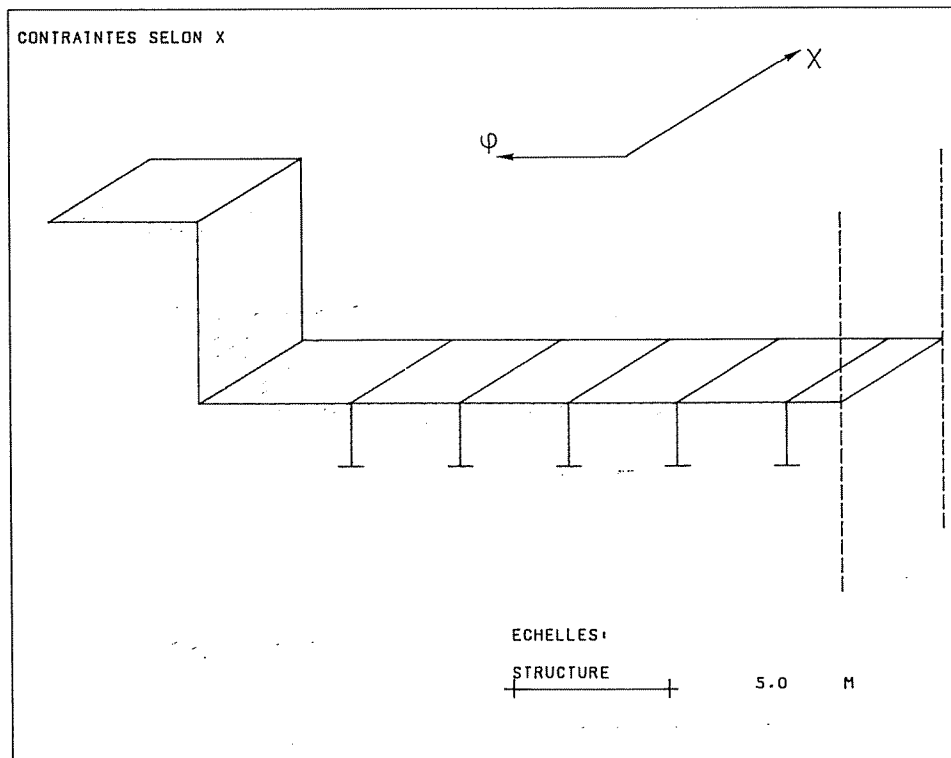


Figure 4.3.11
Travée bi-encastée
Contraintes longitudinales σ_x à mi-portée

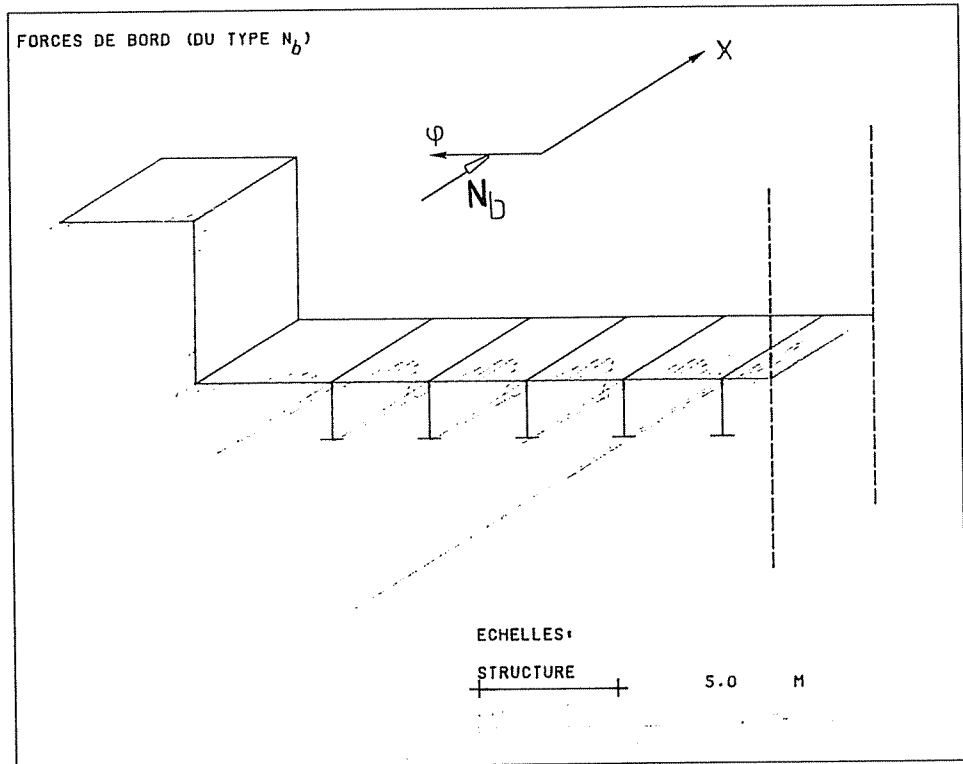


Figure 4.3.12
Forces de bord N_b nécessaires pour annuler les déplacements u
et rotations dw/dx dans les sections d'extrémités

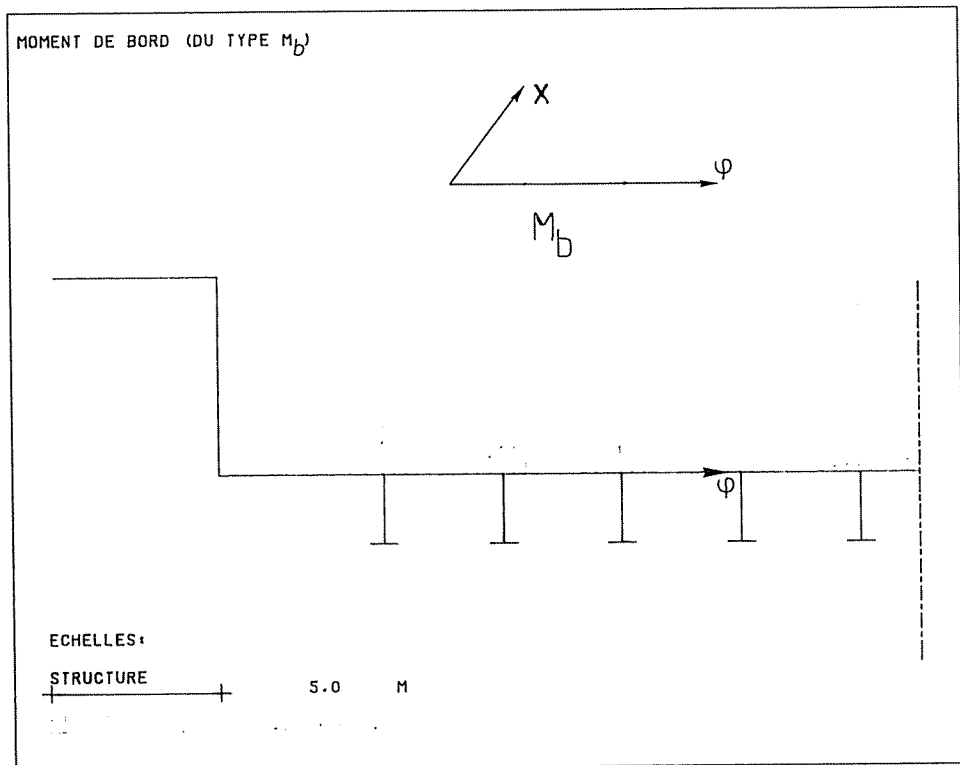


Figure 4.3.13
Moments de bord M_b nécessaires pour annuler les déplacements u
et rotations dw/dx dans les sections d'extrémités

III.3. INFLUENCE DU NOMBRE DE TERMES DE LA SERIE DE FOURIER

Afin de comparer la solution de la travée bi-appuyée avec celle bi-encastrée, nous avons reporté sur les figures 4.3.16 et 17 **les variations transversales dans la section à mi-portée ($x=L/2$) des déplacements verticaux et contraintes longitudinales**. Nous avons de plus, reporté ces valeurs pour différents nombres de termes.

Pour la travée sur appuis simples, les résultats obtenus à l'aide d'un seul terme sont excellents; les variations observées après 7 termes n'étant que de 2 % au maximum.

Pour la variante encastrée, les variations sont plus sensibles et les écarts atteignent 20 à 30 %, ce qui confirme l'intérêt d'utiliser 7 termes pour obtenir un niveau de précision acceptable.

On a également reporté (figures 4.3.18 et 19) les **variations longitudinales du déplacement vertical w et de la contrainte σ_x dans la section médiane du pont**.

A la figure 4.3.18, on constate que l'influence du nombre de termes est plus sensible dans la zone proche des appuis. Cela confirme la propriété des séries de Fourier qui donnent des déplacements excellents à mi-portée dès le premier terme. Pour la travée encastrée, on observe que la déformée vérifie bien les conditions $w=0$ et $dw/dx = 0$.

La figure 4.3.19 montre le très bon comportement du logiciel lors du calcul de structures encastrées. Les résultats concernant les 5 à 10 % de la structure près des appuis demandent bien sûr une extrapolation; mais il s'agit heureusement d'une extrapolation fort aisée à entreprendre et qui ne laisse aucun doute quant à son exactitude.

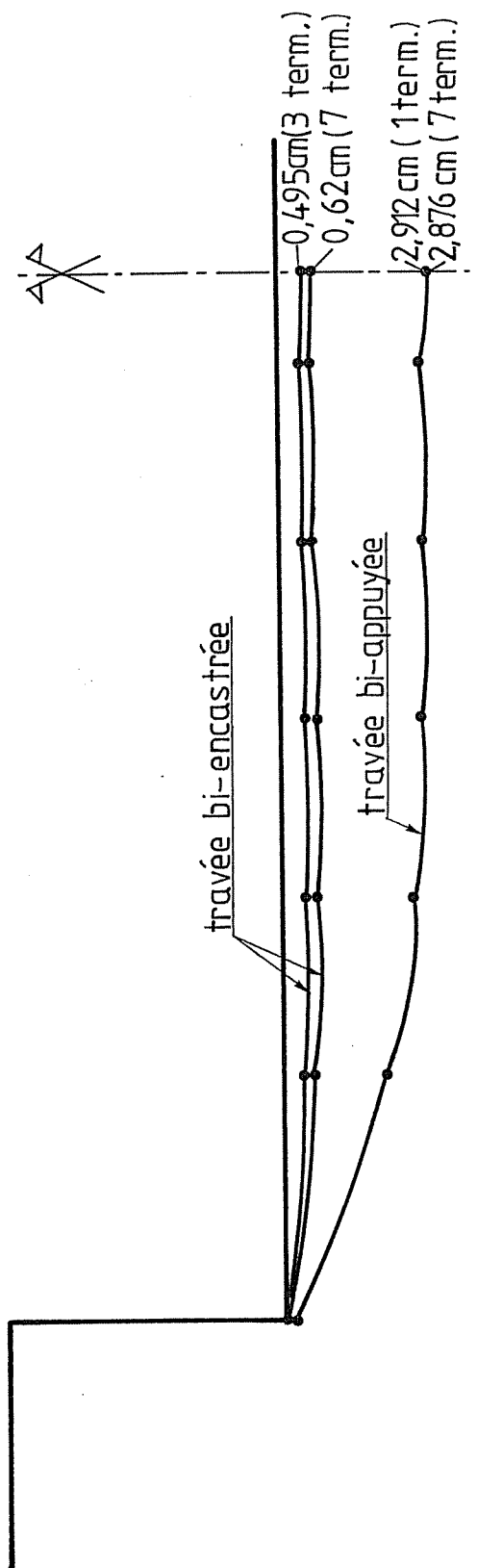


Figure 4.3.14

Déplacement vertical w de la section transversale médiane.

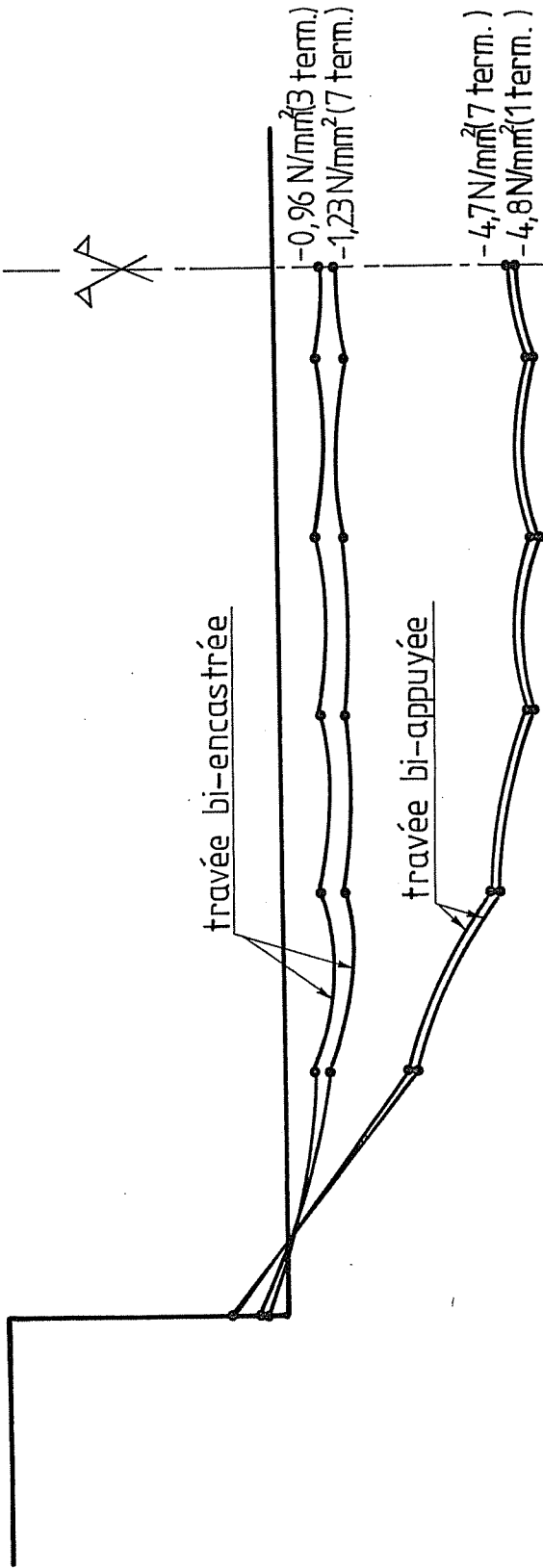


Figure 4.3.15

Contrainte longitudinale σ_x dans la section transversale médiane

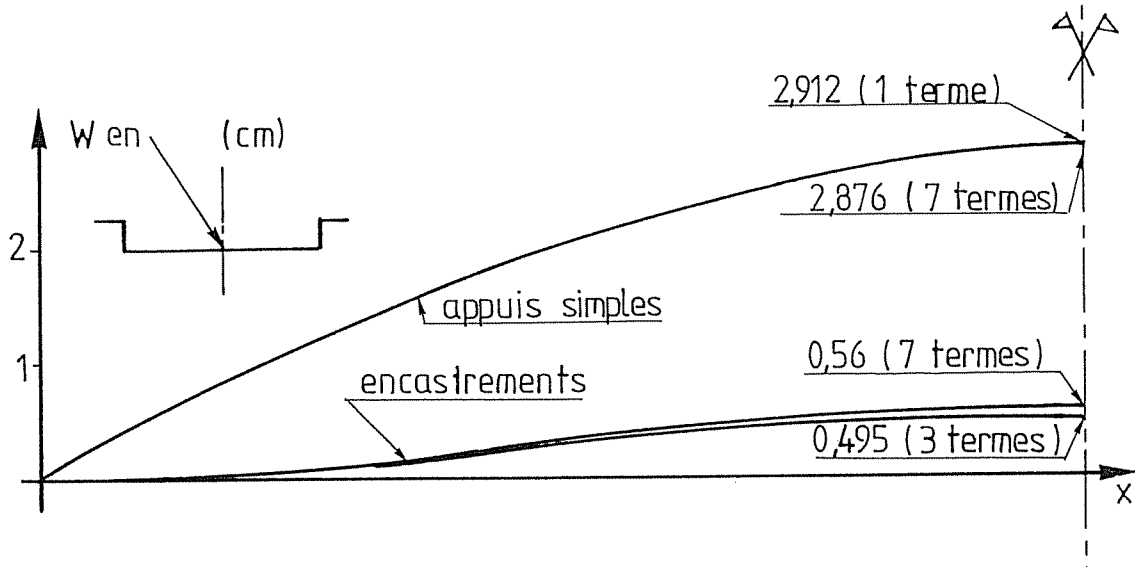


Figure 4.3.16
Déplacement vertical w au niveau de l'axe central d'une travée

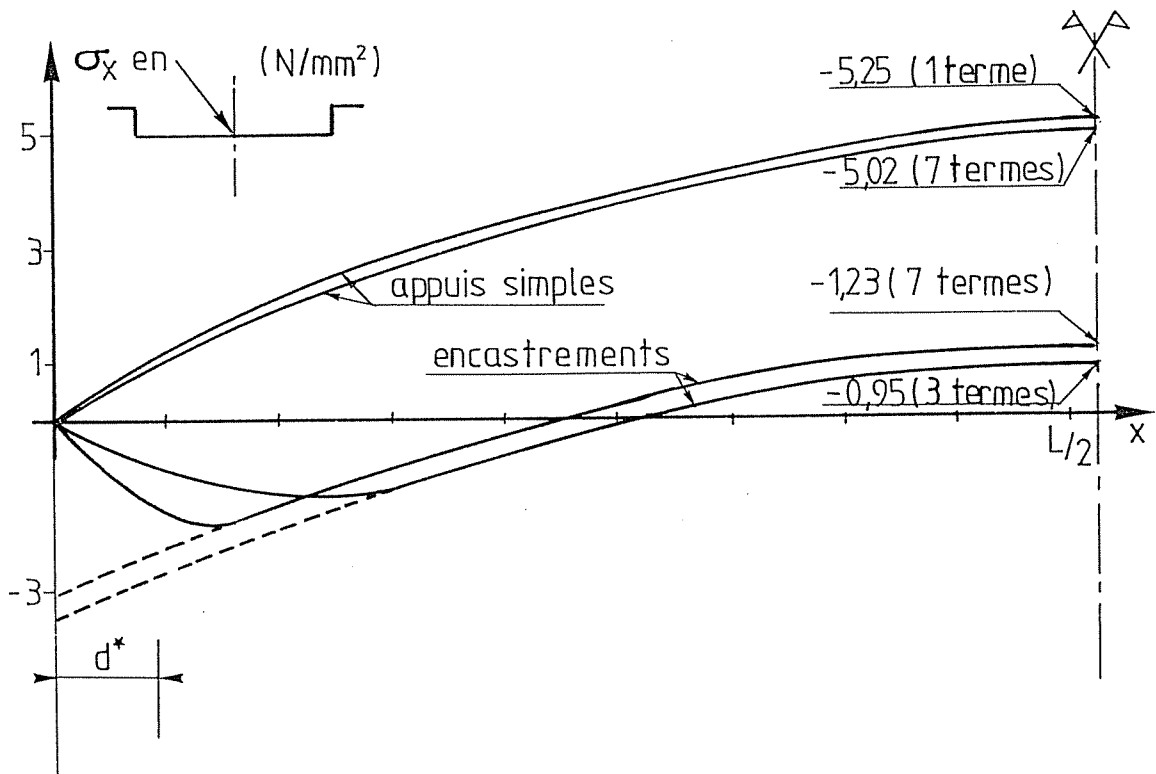


Figure 4.3.17
Contrainte longitudinale au niveau de l'axe central d'une travée

CHAPITRE IV ETUDE D'UNE PORTE MAREE-TEMPETE

Nous nous sommes intéressés au dimensionnement d'une porte marée-tempête destinée à protéger le port de Rotterdam [L.4]. Le but de l'ouvrage étant de mettre le port à l'abri de l'incidence des tempêtes, houles, variation de niveaux et courants.

Il convient d'abord de souligner le gigantisme de cette porte par quelques ordres de grandeur hors du commun : portée utile 360 m, hauteur de passe 22 m, largeur 54 m et poids propre 55 000 t.

L'intérêt de cette application réside, non pas dans des difficultés de principe ou des hypothèses particulières, mais simplement dans l'extrême **facilité d'utilisation du logiciel des bordages raidis.**

La structure est à la fois simple et très complexe, simple par ses conditions d'appuis (appuis simples) et par les charges appliquées (action de l'eau), complexe par son principe de fonctionnement à l'aide de caissons étanches.

D'une manière simplifiée, décrivons son fonctionnement.

Il s'agit d'une porte flottante, articulée d'un côté, elle pivote donc autour d'un axe pour s'ouvrir ou se fermer. Ces manoeuvres ne se font que lorsque la porte est en position haute de manière à réduire la résistance à l'avancement. La fermeture de la passe se fait à l'aide de propulseurs placés à la partie basse de la porte, du côté opposé à l'articulation, un système de câbles assure une fermeture en douceur. Une fois la porte sur ses appuis, on réduit la pression dans les caissons pressurisés et ainsi l'eau s'y engouffre en entraînant la porte vers le bas jusqu'à ce qu'elle repose sur ses appuis inférieurs.

Au niveau de la schématisation de calcul, nous avons donc une poutre sur appuis simples.

Décrivons brièvement les caissons et leur rôle.

Un caisson inférieur équilibre le poids propre de la structure, un autre à la partie supérieure soulage la porte lorsqu'une succion importante apparaît à la partie inférieure du fait de l'accroissement des vitesses; on a donc une composante hydrodynamique importante. Il y a de plus 4 caissons de ballastage placés aux extrémités de cette porte de manière à assurer à tout moment la stabilité d'ensemble.

L'utilisation de notre logiciel au calcul de cette porte fut un choix très heureux. En effet, **les facilités de discrétisation, la rapidité d'exécution et la clarté des résultats du logiciel ont permis d'effectuer un calcul complet en 8 heures** (1 heure pour la discrétisation, 1 heure pour l'entrée des données et de leur vérification, 15 à 20 minutes de temps CPU sur l'IBM 4381 et 2 heures pour l'impression et le dépouillement des résultats).

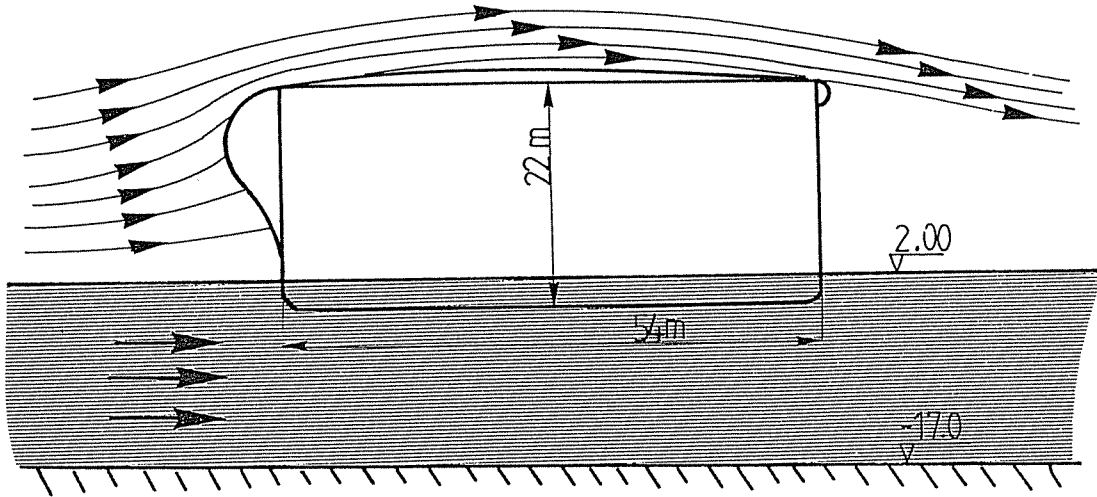


Figure 4.4.1

La figure 4.4.2. montre dans une coupe de la structure le raidissage important des panneaux ainsi que le réseau d'épontilles (ϕ 508x30) servant d'appuis intermédiaires aux cloisons.

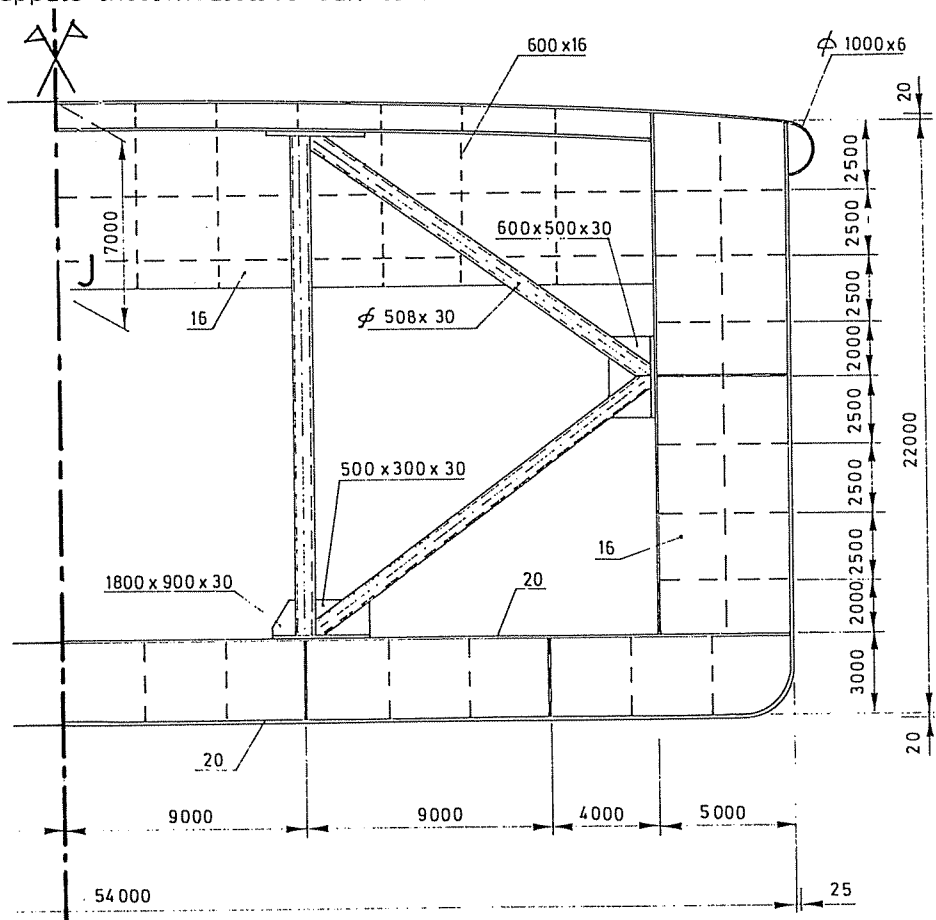


Figure 4.4.2

IV.1. LA DISCRETISATION DE LA STRUCTURE

La discrétisation est représentée figure 4.4.3 et l'on y dénombre 30 panneaux dont 24 panneaux raidis et 6 panneaux représentant les épontilles (panneaux 17 à 22).

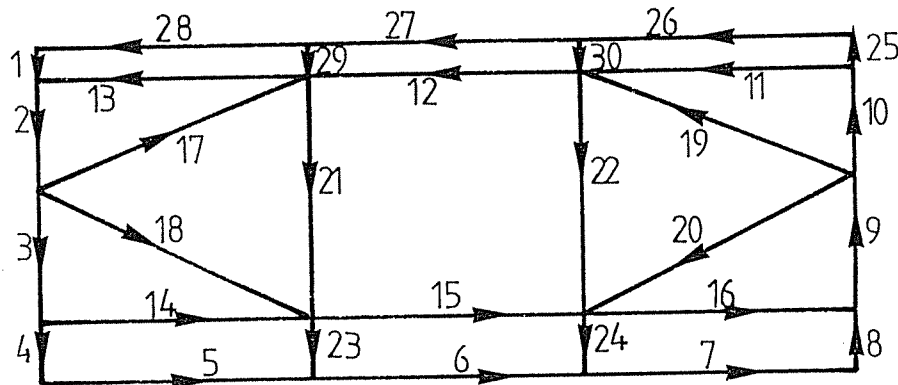


Figure 4.4.3

L'importance du raidissage met encore plus en évidence les facilités d'utilisation de notre logiciel; et notamment vis-à-vis d'une discrétisation équivalente par la méthode des éléments finis [A.6].

Prenons l'exemple du panneau n° 3, figure 4.4.3, et reprenons ces caractéristiques : une dimension totale de 9,5 x 390 m subdivisée en 1463 petits panneaux de 0,5 x 5 m, 3 traverses de 390 m, 79 aiguilles de 9,5 m et la présence de 5850 m de raidisseurs.

L'utilisation de logiciel des bordages raidis ne nécessite pour la discrétisation de ce panneau n° 3 que 11 lignes de données; on comprend donc aisément l'intérêt que représente son utilisation.

IV.2. LE CALCUL ET LES RESULTATS

Nous présentons d'abord l'étude relative à la sollicitation normale (figure 4.4.4).

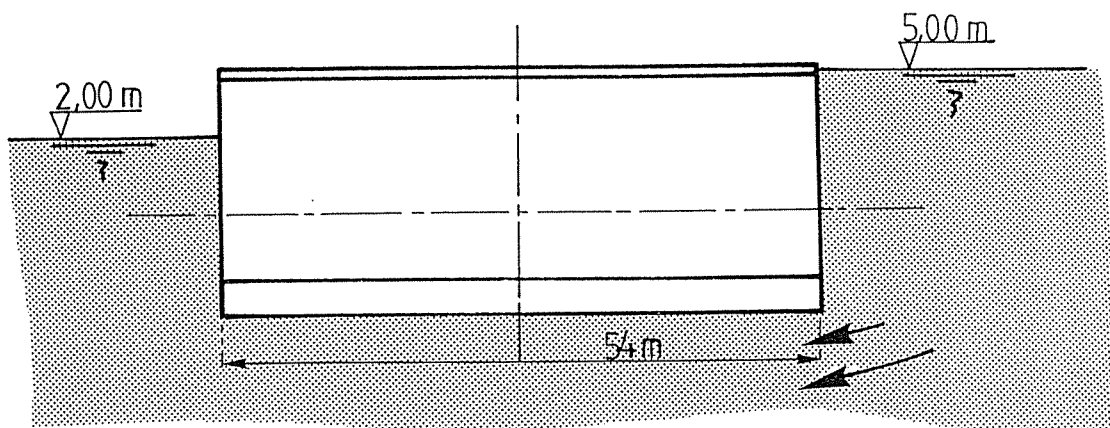


Figure 4.4.4.

Les contraintes longitudinales à mi-portée ainsi que les contraintes tangentielles aux appuis sont reprises à la figure 4.4.5.

Les figures 4.4.7 et 8 sont relatives aux cas de charge exceptionnelle (figure 4.4.6) et montre en détail les déformations et les contraintes agissant au sein de la structure.

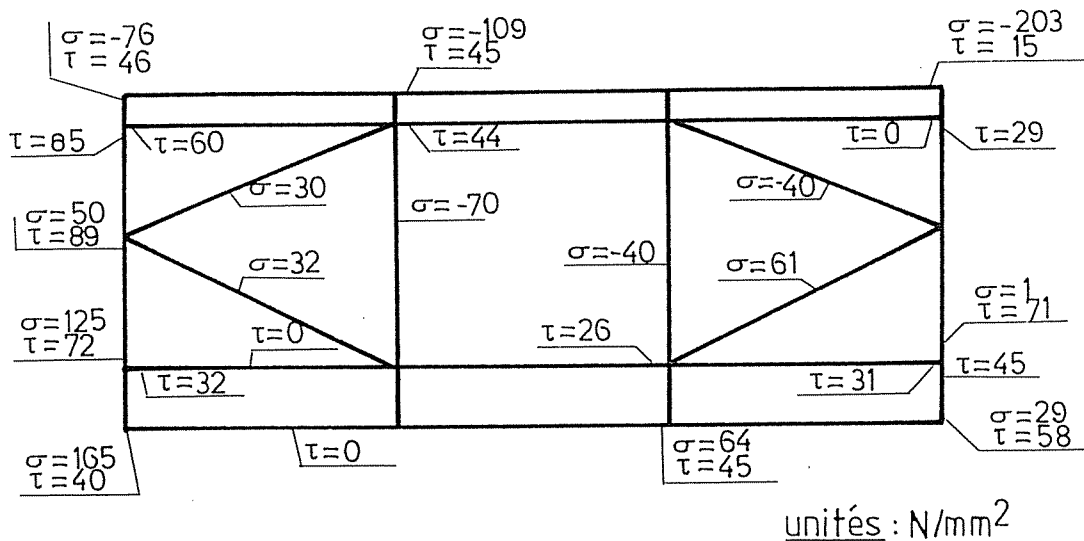


Figure 4.4.5

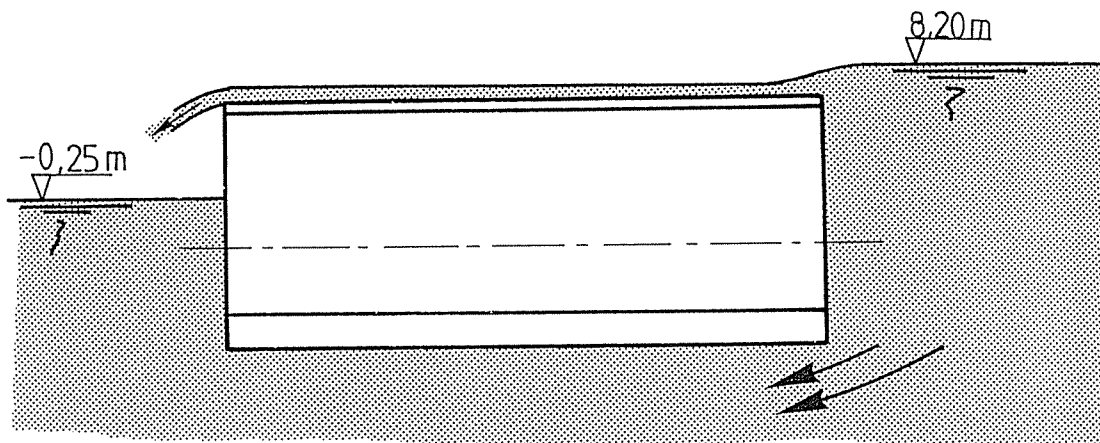


Figure 4.4.6

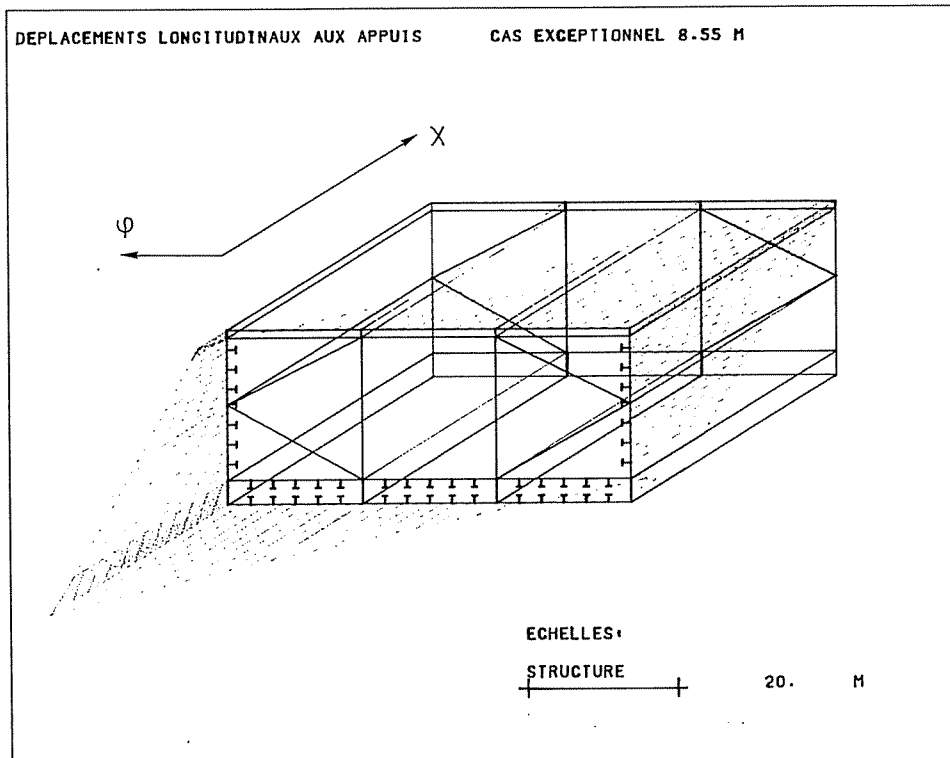


Figure 4.4.7
Déplacements longitudinaux u aux appuis

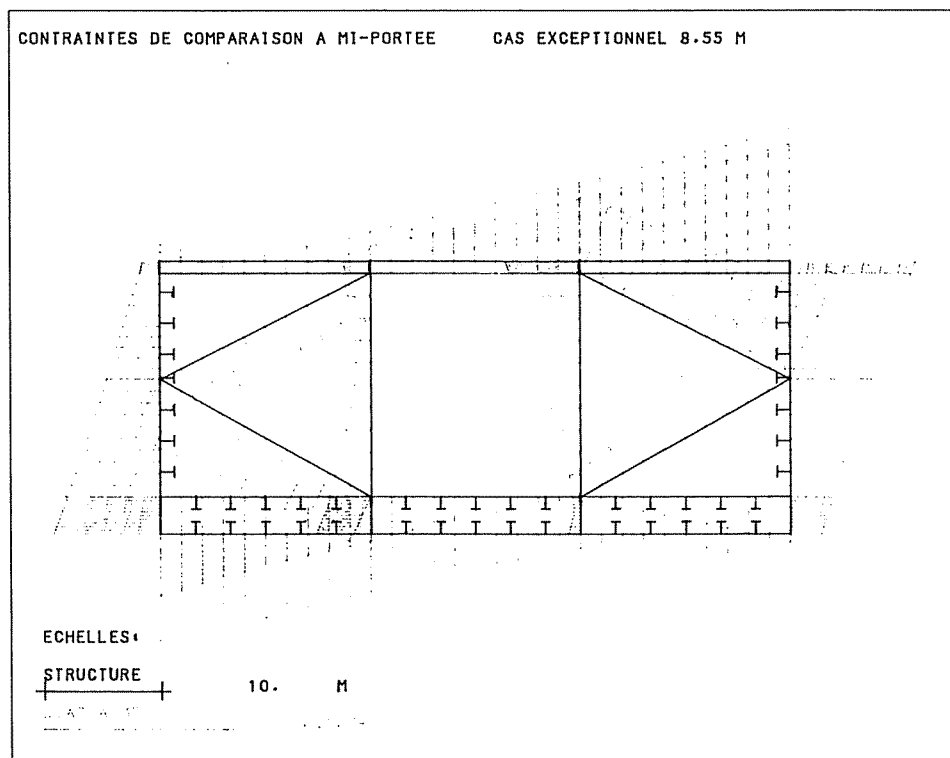
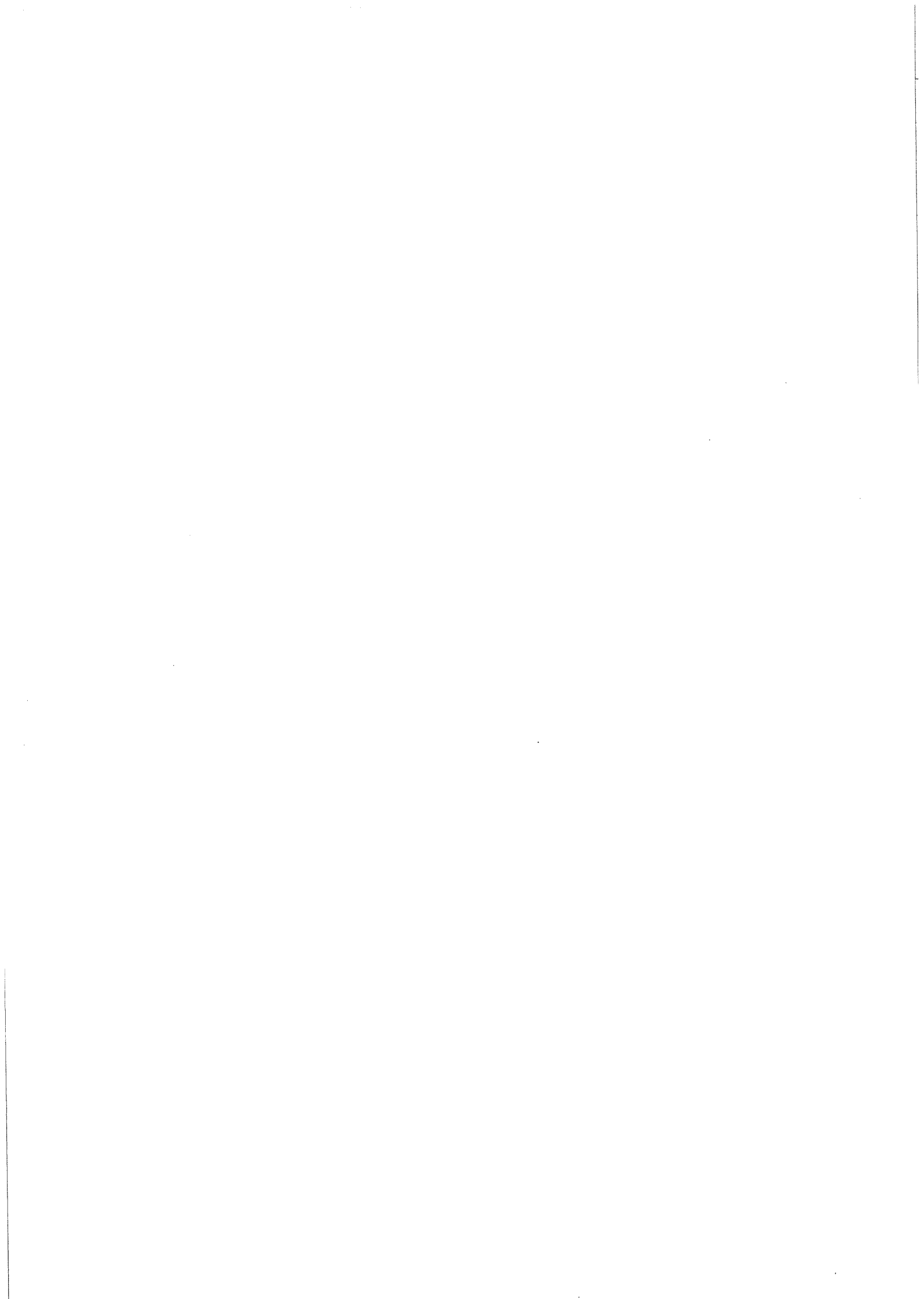


Figure 4.4.8
Contraintes de comparaison de Von-Mises à mi-portée



CHAPITRE V ETUDE D'UN BARRAGE MOBILE MUNI DE VANNES SEGMENTS

Quoique débutant par des principes de conception générale, cette étude est centrée sur le calcul d'un nouveau type de barrage mobile à vanne segment (§II.3, partie I).

Après une présentation générale des facteurs permettant de donner la forme aux vannes (§ V.1), on présente (§ V.2) une **méthode de prédimensionnement** de la vanne segment (**première approche**). Ensuite (§ V.3) nous calculons en détail la **vanne compte tenu de ses liaisons avec ses bras (deuxième approche)**.

V.1. ETUDE DES DIMENSIONS ET DES FORMES A DONNER AUX VANNES DES BARRAGES MOBILES

En citant les impératifs intervenant dans le choix d'un barrage mobile (§ V.1.1), nous rappellerons quelles sont leurs influences sur ce choix ainsi que sur la forme à donner aux vannes constituant ce barrage (§ V.1.2). Ensuite, nous envisagerons le cas d'un site particulier (§ V.1.3).

V.1.1. Enumération des facteurs de choix relatifs à la forme à donner aux vannes des barrages mobiles

Les premières données sont bien sûr **la largeur** de la voie d'eau ainsi que la **hauteur** de la retenue. Ensuite, il y a la courbe des débits classés (figure 1.2.3), grâce à laquelle, on dispose des données que sont Q_{\max} et Q_{\min} ainsi que des fréquences d'apparitions des débits.

Joignons-y les impératifs constructifs relatifs aux piles, celles-ci intervenant dans la détermination de la largeur effective des différents pertuis [R.1]; les piles entravant plus ou moins l'écoulement selon **leur largeur et leur profil**.

Connaissant la largeur de la voie navigable, la retenue souhaitée, Q_{\max} , Q_{\min} ainsi que leur fréquence, on peut calculer les lignes d'eau et notamment le débit à partir duquel les barrages devront être complètement relevés. On précise ainsi le débit limite au-delà duquel le danger d'inondation en amont du barrage apparaît.

Pour définir la loi de manoeuvre du barrage mobile, qui caractérise l'ouverture (soit la hauteur de la lame d'eau déversante, soit la hauteur de la lame de fond) en fonction du débit évacuable, il faut connaître les **coefficients de débit**. Bien que rien ne vaille un essai sur modèle pour les définir [D.5], une abondante littérature permet de les estimer à partir du profil en coupe de la vanne [E.4, L.5]. Voici donc la nécessité de fixer le **profil extérieur** de la vanne afin de préciser l'ouverture du barrage mobile correspondant à un débit donné.

Cette loi connue, il faut fixer la **largeur des passes**. En fait, ce paramètre est déjà intervenu implicitement dans la détermination du profil de la vanne; en effet, la section transversale doit être en proportion avec la portée choisie. Aux petites portées, pourront être associées des vannes minces, mais aux grandes portées, devront correspondre des vannes très rigides [E.5]

D'autres facteurs interviennent aussi dans la conception : l'importance du charriage, l'existence d'un bassin d'amortissement aval et la nature du sol, la poussée des glaces et leur fréquence, la possibilité d'avoir de nombreux corps flottants, l'importance de réduire les mécanismes sous eaux, ... Bien que ces facteurs aient une influence capitale dans les choix à effectuer par le concepteur, nous ne reviendrons pas en détail sur chacun d'eux, vu leurs caractères très spécifiques.

V.1.2. Influence des facteurs de choix

L'objectif est de réaliser un ouvrage aussi économique que possible, remplissant de manière simple toutes les fonctions d'un barrage mobile; à savoir : évacuer les débits de crues, conserver le niveau du plan d'eau amont lors de l'étiage, permettre le passage des embâcles, ...

V.1.2.1. La forme des piles

Le choix de la forme des piles est déterminant pour l'obtention du coefficient de concentration latérale. Pour un profil parfait, le profil est dit de Kutta-Joukowski [P.3] et le coefficient vaut 1, la contraction latérale est donc nulle; un tel profil est malheureusement peu économique et ne se prête pas à la construction en béton armé vu notamment les difficultés de coffrage. En pratique, le coefficient est de l'ordre de 0,9 pour des piles arrondies et des pertuis de 30 m.

La largeur des piles dépend également des mécanismes qu'on doit y loger. La conception de mécanismes simples, peu nombreux et surtout peu encombrants est donc toujours souhaitable.

V.1.2.2. La portée et le nombre de piles

Un choix très important est celui de la largeur de passe des divers pertuis, définissant par la même la portée des vannes et le nombre de piles. Ce choix est, en effet, capital pour l'estimation de la capacité d'évacuation du barrage projeté. La largeur réelle de la voie navigable, réduite par la présence des piles ainsi que par les contractions latérales, donne la largeur effective par laquelle l'écoulement s'effectuera.

La portée est aussi un facteur prédominant au niveau structurel, la retenue étant connue, il n'est pas loisible d'augmenter outre mesure la portée car la rigidité d'ensemble ne le permet pas. Une portée trop grande vis-à-vis de la retenue conduit à une conception non économique, l'acier étant mal utilisé. Au contraire, réduire excessivement les portées, revient à multiplier le nombre de piles et aussi de vannes. La solution est donc tout aussi peu économique. Le choix judicieux n'est donc pas aisé et ne pourra être réalisé qu'après la comparaison de divers avant-projets prédimensionnant la vanne pour différentes portées.

V.1.2.3. La forme transversale de la vanne

L'ossature principale étant déjà imposée pour des raisons de rigidité abordées lors du choix de la portée, il faut à présent profiler la vanne de manière à éviter l'apparition de pertes de charges excessives.

Pour l'écoulement de surface, qu'il corresponde à un déversoir à seuil mince où à seuil épais, il faut veiller à l'aération de la nappe déversante pour éviter des oscillations de celle-ci qui induisent des vibrations [N.1].

Pour l'écoulement de fond, il faut veiller à avoir un bon décollement du pied de la vanne de manière à réduire la perte de charge. La détermination des coefficients de débit se fait, soit à l'aide d'abaques résultant d'essais sur modèle [E.4], soit directement par un essai [D.4]. Ces coefficients connus, on peut définir la loi du mouvement de la vanne en fonction du débit à évacuer.

V.1.2.4. Les embâcles et les glaces

Si ceux-ci sont importants, il est conseillé de prévoir un écoulement de surface, une vanne levante unique est à déconseiller dans ce cas.

V.1.2.5. Le charriage

Quoique les mécanismes sous eau soient toujours à déconseiller, ils sont à éviter à tout prix lorsque le charriage (sable, gravier,) devient trop important.

V.1.3. Un cas précis à titre d'exemple

Précisons nos explications à l'aide d'un exemple précis. Soit une voie navigable de 100 m de large, d'une profondeur minimale de 3 m afin d'assurer un tirant d'eau suffisant en tout point du bief; imposons une retenue de 5 m à l'amont du barrage et de ce fait une chute au droit du barrage de l'ordre de 2 m.

La tendance étant aux grandes largeurs de passe, si la rivière charrie beaucoup d'agrégats, la retenue étant faible, il est tout à fait conseillé d'utiliser, soit des vannes segment, soit des vannes clapet [R.2]; ces dernières ayant l'inconvénient d'avoir les articulations en permanence sous eau alors que le charriage est important.

Compte tenu de l'intérêt des portées élevées et vu la faible retenue, nous optons pour des vannes segment à corps unique, levantes et baissantes (figure 4.5.1) dont les avantages sont exposés au chapitre I, partie I. Les vannes segment ne demandent que peu de mécanisme, il est ainsi possible de limiter l'encombrement des piles à 3 m d'épaisseur. Le choix final de la portée ainsi que celui de la forme transversale ne peut être résolu que lors du dimensionnement de la vanne. Ainsi, faut-il envisager le cas de 4 passes de 22,5 m et le cas de 3 passes de 30 m (figure 4.5.2). Afin de sortir de l'indécision, un prédimensionnement est nécessaire.

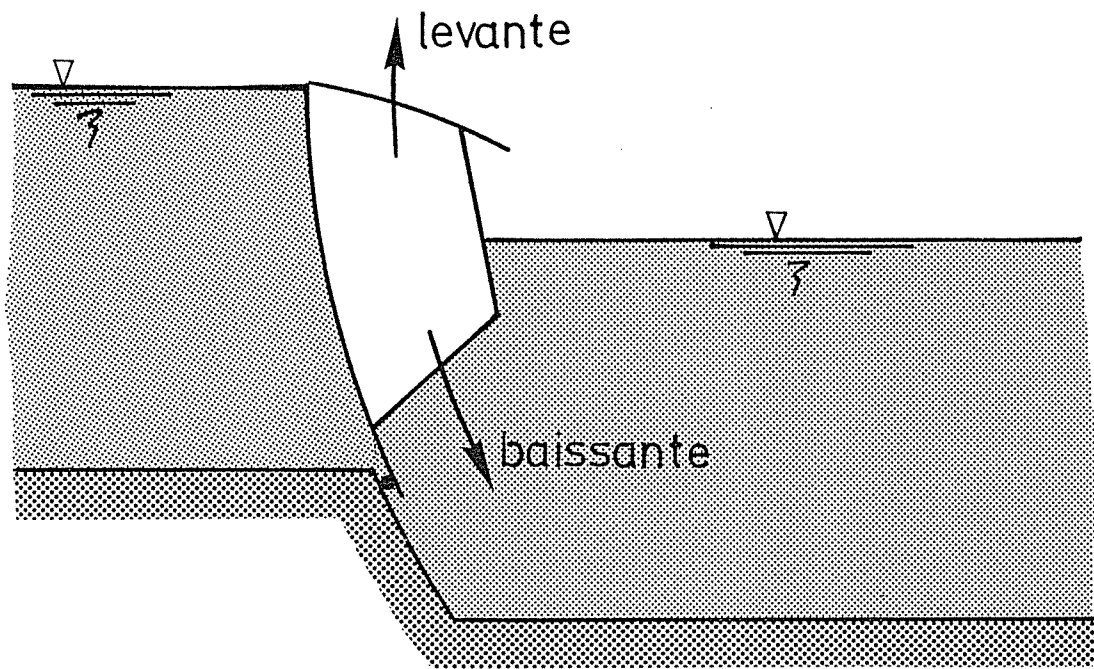


Figure 4.5.1

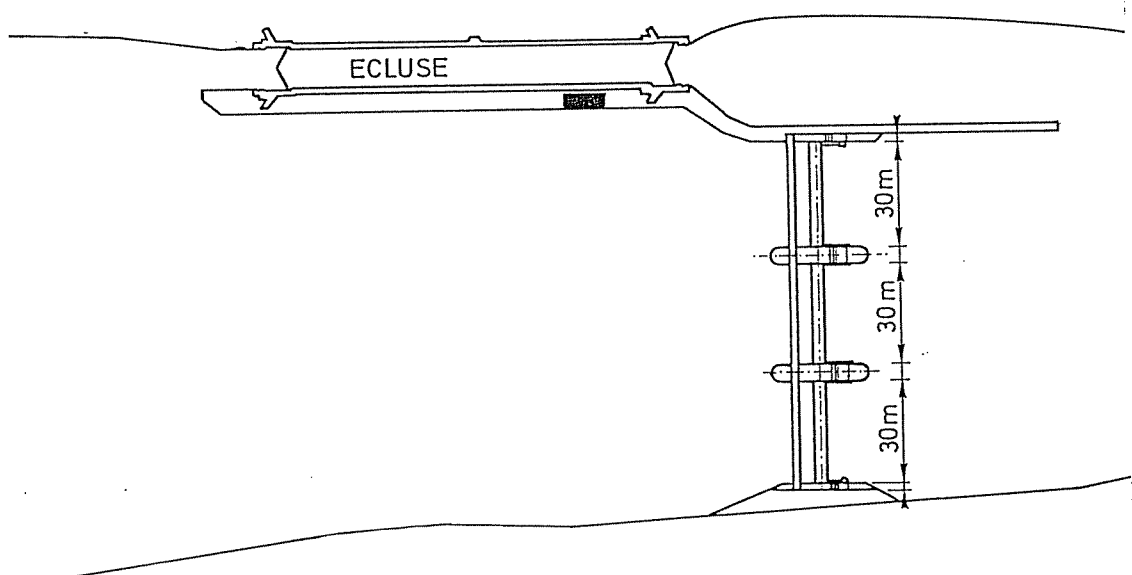


Figure 4.5.2
 Implantation d'un barrage mobile comportant 3 pertuis de 30 m,
 la retenue étant de 5 m.

V.2. LE PREDIMENSIONNEMENT (première approche).

La méthode de prédimensionnement développée, consiste en une simplification du calcul d'une structure complexe par la résolution de calculs simples de structures élémentaires (poutres, barres, plaques lisses rectangulaires).

Cette technique est particulièrement adaptée pour les ouvrages hydrauliques tels que les corps de vannes et notamment des vannes à segment.

En effet, de tels ouvrages doivent avoir une rigidité d'ensemble fort élevée et l'utilisation de méthodes simplificatrices calculant chaque élément distinctement conduit généralement à une forte rigidité globale.

Avant de commencer le calcul proprement dit, il est opportun d'expliquer et d'énumérer les options qui ont été prises, à savoir, les hypothèses relatives aux conditions aux limites, le choix des contraintes admissibles et des cas de sollicitations, ainsi que la schématisation géométrique de la structure.

Soit donc à calculer, l'ouvrage décrit par la figure 4.5.1.

V.2.1. Choix de l'acier

Une vanne devant être un élément très rigide, il n'est pas opportun de prendre de l'acier AE 355 N/mm² qui nous conduirait selon les critères de résistance à une vanne plus légère mais sûrement moins rigide. Afin de réduire la déformabilité de la vanne, nous serions alors conduits à la raidir, d'où une augmentation du poids par des éléments annexes (diaphragmes, raidisseurs, ...).

Tous les codes évoluant vers la philosophie des états limites ultimes, il peut paraître rétrograde d'utiliser le concept des contraintes admissibles de la NBN-B51-001 [N.2]. Mais dans le domaine des ouvrages hydrauliques, les critères de résistance sont souvent supplantés par ceux relatifs aux déformations. De plus, le logiciel que nous développons n'étant conçu que pour le régime élastique, son utilisation va de pair avec le principe des contraintes admissibles. Il semble dès lors judicieux de conserver, même au stade du prédimensionnement le concept traditionnel des contraintes admissibles.

Nous avons choisi de prendre de l'acier

AE 255-D ($R_e = 255 \text{ N/mm}^2$) si $e < 16 \text{ mm}$
($R_e = 245 \text{ N/mm}^2$) si $16 < e < 36 \text{ mm}$.

V.2.2. Les contraintes admissibles

Nous adopterons le critère état plan de contraintes de Von Mises :

$$\sigma_c = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_x \sigma_\varphi + 3\tau^2}$$

Nous admettrons qu'il n'y a pas lieu de considérer les sollicitations comme alternées vu que la vanne est toujours soumise au même type de sollicitation.

Les changements de position ne se font que lentement et ne se traduisent pas par de grandes variations de sollicitations.

Le danger peut, par contre, provenir des vibrations induites par l'écoulement. Mais en pratique, pour de faibles chutes (5 m), ces problèmes sont

bien connus et des dispositions pratiques permettent d'y parer. Ainsi place-t-on à la partie supérieure de la vanne (ou sur la vannette des diviseurs de jet, ceux-ci coupant la lame déversante permettent son aération [N.1]. A la partie basse de la vanne, on adopte des dispositions permettant de réduire le risque de vibration [G.6, K.4, S.5].

V.2.3. Les sollicitations

Définissons figure 4.5.3 toutes les sollicitations usuelles entrant en ligne de compte dans le calcul de telles structures.

Le poids propre (P.P) s'exerce suivant la verticale, et est une charge permanente due à la gravité dont l'effet n'est pas négligeable. La pression hydrostatique (Pr. HS) est, par contre, une charge variable dont l'effet est souvent le plus important; elle doit être définie, pour les plus hautes eaux (P.H.E) et pour les positions caractéristiques de la vanne, vanne abaissée et relevée, partiellement ou totalement. La pression hydrodynamique (Pr.HD) s'ajoute à la pression hydrostatique; elle est, selon l'endroit et le moment, une force de surpression ou de dépression [L.5]. Ce sont précisément ces variations de pression qui la rendent dangereuse pour les structures; de trop fortes dépressions peuvent aussi créer de la cavitation [G.6].

La poussée des glaces (P.GI), quoique peu fréquente car les barrages sont normalement levés aux époques de grands froids, doit être envisagée vu les forces internes élevées qu'elle peut induire au cas où une vanne n'aurait pu être relevée.

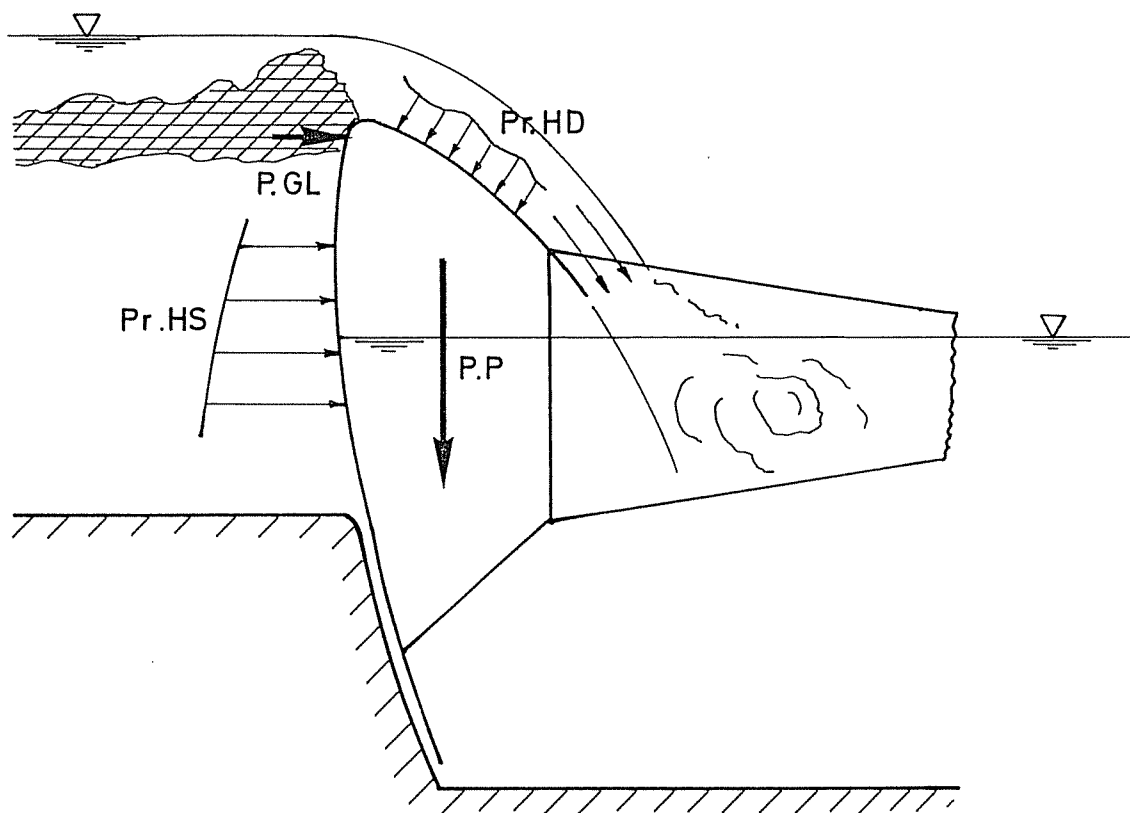


Figure 4.5.3

A côté de ces sollicitations classiques, viennent aussi, les sollicitations exceptionnelles (effets des séismes), les sollicitations parasites (contraintes résiduelles et défauts de forme), les sollicitations thermiques,
La NBN B51 décrit les cas de sollicitation auxquels sont associés des coefficients de sécurité qui permettent de déduire R , la contrainte admissible.

Cas 1 - Cas de sollicitation normale

Ce cas comprend le poids propre (actions permanentes) et les pressions statiques et dynamiques (actions variables).
D'où $R = 2/3 Re = 170 \text{ N/mm}^2$.

Il faut envisager la vanne en position basse (figure 4.5.3) et en position dite de fermeture ($Q = 0 \text{ m}^3/\text{s}$) figure 4.5.1

Cas 2 - Cas de sollicitation exceptionnelle a.

Envisageons le cas très défavorable correspondant à la figure 4.5.4; un batardeau aval ayant été placé, la vanne reprend toute la poussée amont.
Dans cette hypothèse, la contrainte admissible est de $3/4 Re=R=191 \text{ N/mm}^2$.

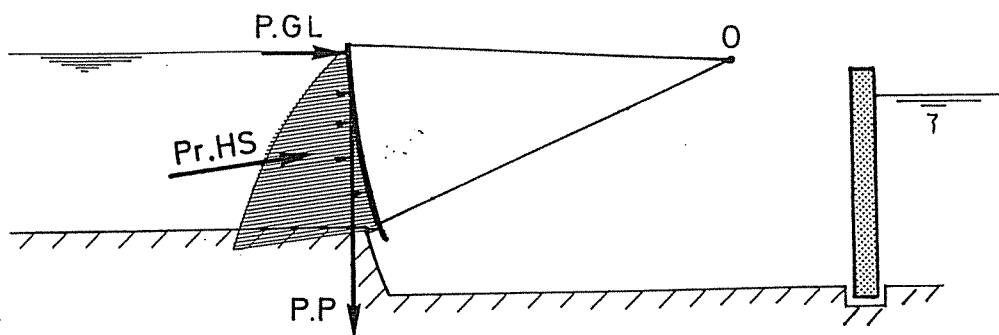


Figure 4.5.4

Cas 3 - Cas de sollicitation exceptionnelle b.

On supposera que $R=Re=255 \text{ N/mm}^2$, dans les mêmes hypothèses que le cas de sollicitation 1, mais avec cette fois un seul vérin en état de marche.

V.2.4. Schématisation de la structure

Pour le bon fonctionnement hydraulique du barrage, son profil a été défini figure 4.5.5 de manière à assurer un écoulement stable et de bons coefficients de débit. Pour ce faire, nous avons consulté la littérature relative aux essais sur modèles et aux coefficients de débit [D.3, R.1, E.4, L.5].

Soit le repère OXYZ centré au centre de gravité et dont l'axe OZ est aussi l'axe du bras.

En vue du prédimensionnement, il faut définir les caractéristiques de la section transversale de la vanne, inertie, moment statique, centre de gravité, La structure ainsi définie, est un caisson totalement dissymétrique, d'où l'existence de moments de flexion M_x et M_z et d'un moment de torsion M_φ , les résultantes des efforts ne passant pas par le centre de torsion. On aura de plus des efforts tranchants selon OX et OZ ainsi qu'un effort normal selon OY dont l'existence dépendra des conditions de liaison des bras avec les piles.

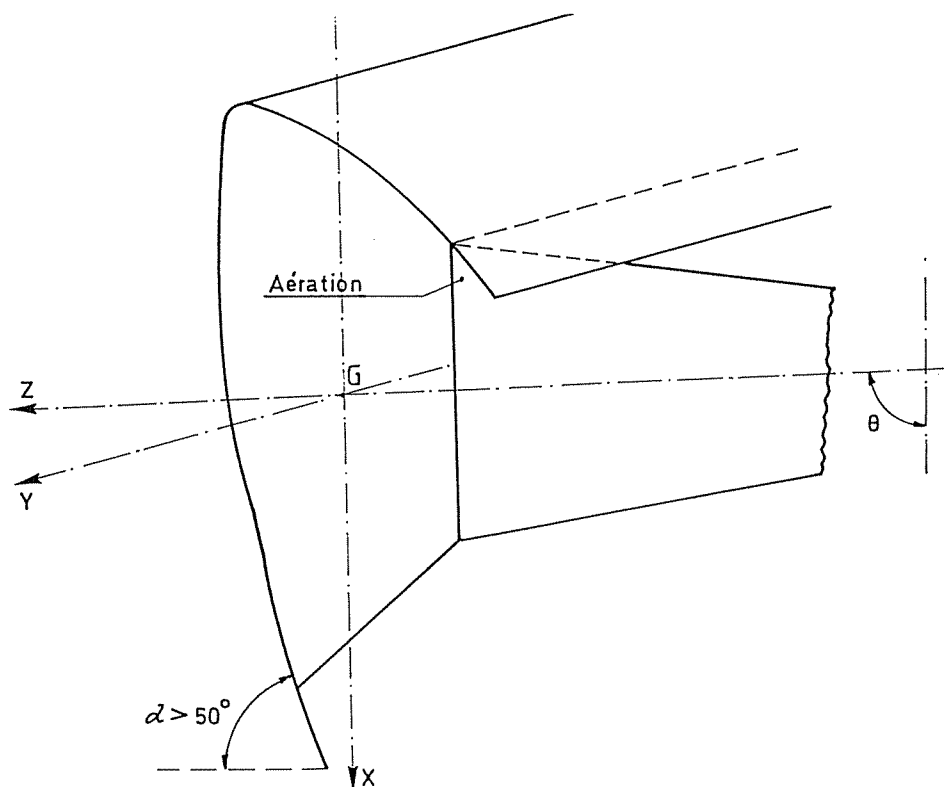


Figure 4.5.5.

Pour le calcul d'une telle structure, la théorie des poutres tubulaires fermées est applicable [M.3]. Seule la sollicitation de torsion peut entraîner quelques difficultés si les extrémités ne sont pas libres de gauchir, ce qui sera probablement le cas eu égard aux liaisons rigides de la vanne sur les bras.

On sait que, dans ce cas, naissent des contraintes normales parallèlement à la fibre neutre [H.2, T.3, V.2].

Dans cette première étape de calcul, il n'en sera pas tenu compte, les seuls effets de torsion uniforme seront retenus.

La figure 4.5.6.a reprend les sollicitations ainsi que les résultantes des différents effets envisagés. Il convient de projeter ces forces sur les axes et d'en déduire les composantes selon ces directions. Les valeurs des projections varient évidemment avec θ .

La figure 4.5.6.b reprend de manière simplifiée les efforts sollicitants, leur expression a été ramenée aux éléments de réduction T_x , T_z , M_φ calculés au centre de gravité G.

Remarque : A ce niveau des explications, nous avons évoqué le poids propre mais il est entendu que celui-ci n'apparaîtra d'une manière exacte qu'à un stade ultérieur lorsque le prédimensionnement sera terminé (2ème approche); au stade de la première approche, une valeur approximative est choisie.

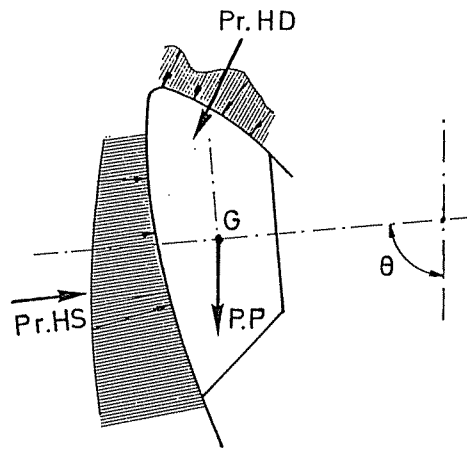


Figure 4.5.6.a

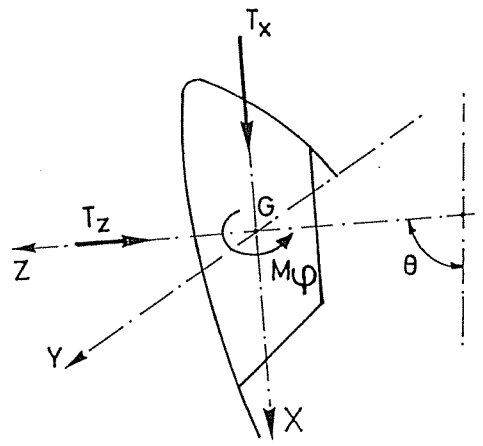


Figure 4.5.6.b

V.2.5. Résultats du prédimensionnement

Pour le cas concret qui nous intéresse (figure 4.5.1 et 4.5.2), le prédimensionnement nous a mené au profil de la figure 4.5.7 dont les caractéristiques géométriques sont définies comme suit :

Panneau amont :

aiguilles	300 x 150 x 10	(tous les 1,8 m)
raidisseurs	130 x 65 x 8	(tous les 0,6 m)

Panneaux supérieur et inférieur :

aiguilles	300 x 150 x 10	(tous les 1,8 m)
raidisseurs	95 x 65 x 6	(tous les 0,6 m)

Panneau aval :

aiguilles	300 x 150 x 10	(tous les 1,8 m)
raidisseurs	95 x 65 x 6	(tous les 0,6 m)

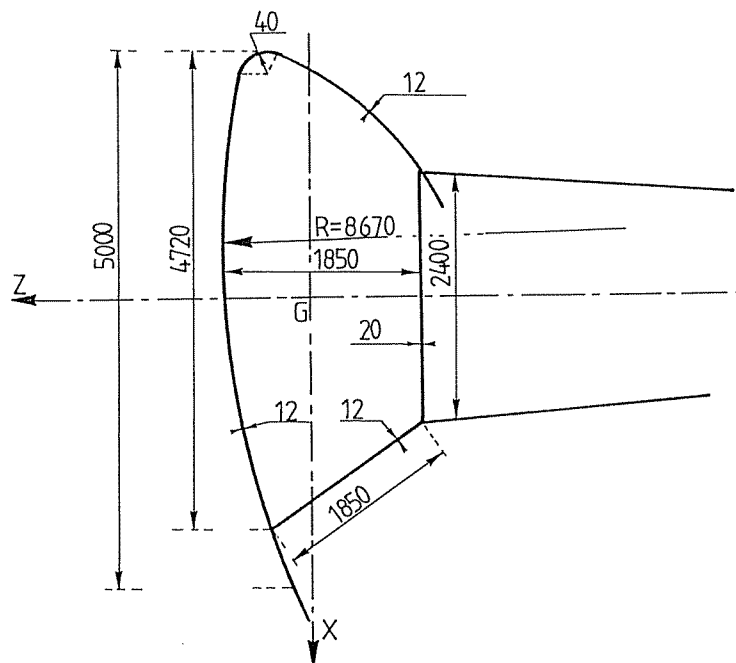


Figure 4.5.7

Vue en coupe transversale de la vanne après le prédimensionnement
(1ère approche)

V.3. ETUDE DE L'ARTICULATION RELIANT LES BRAS AUX PILES

En ce qui concerne les bras, la section la plus adaptée pour résister aux sollicitations multiples est le caisson. En effet, il faut une section ayant si possible $I_{xx} = I_{yy}$, vu que le bras est fortement comprimé, fléchi et tordu.

Pour permettre l'entrée ou la sortie de l'eau, dans les compartiments des bras lors de la manoeuvre de la vanne, on prévoira des orifices dans la paroi inférieure du caisson et dans les parois entre les compartiments (figure 4.5.8).

Les résultats obtenus suite à une première approximation des épaisseurs sont repris à la figure 4.5.8.

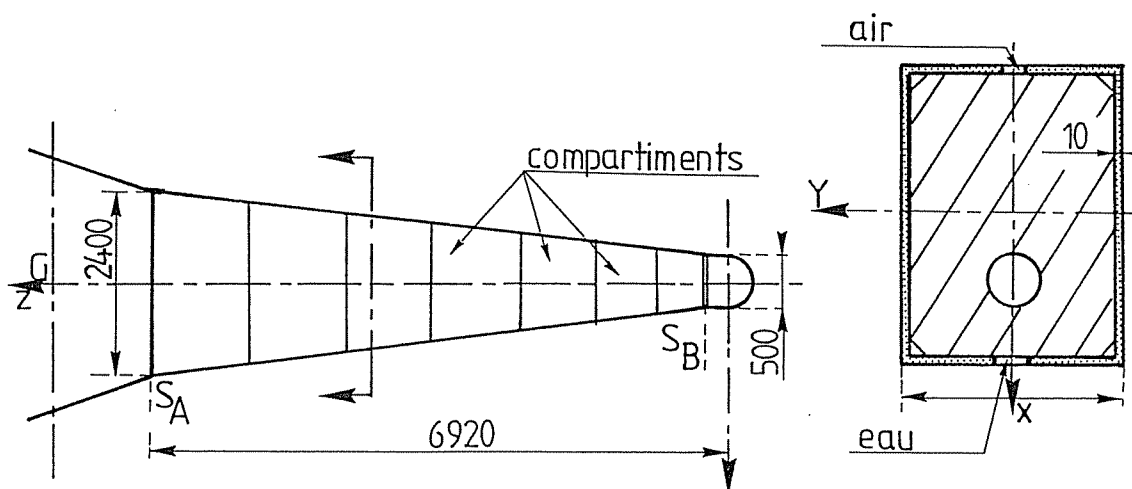


Figure 4.5.8

Dans la section S_A , on a :

$$I_{yy} = 367,50 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{xx} = 30,60 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\Omega = 5,76 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$C = 7,86 \cdot 10^8 \text{ N.m}^2$$

Dans la section S_b , on a :

$$I_{yy} = I_{xx} = 7,84 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\Omega = 1,96 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$C = 0,98 \cdot 10^8 \text{ N.m}^2$$

V.3.1. Les articulations des bras

L'ensemble de la structure vanne-bras, se comporte comme un portique qui serait chargé dans son plan par la pression hydrostatique, mais aussi perpendiculairement à ce plan par l'action du poids propre et des vérins (figure 4.5.9.a).

Quoique ce problème soit classique (les inerties étant connues en première approximation), il reste néanmoins à discuter des conditions d'appui des

bras avec les piles.

Par définition de la vanne segment, il s'agit d'articulations permettant la rotation dans un plan vertical (OXZ), les deux déplacements selon OX et OZ dans ce plan étant bloqués. C'est en relation avec les autres degrés de liberté que des choix existent; la rotation dans le plan du portique (figure 4.5.9.b) doit-elle rester libre et est-il intéressant de bloquer le déplacement selon OY (figure 4.5.9.c) ?

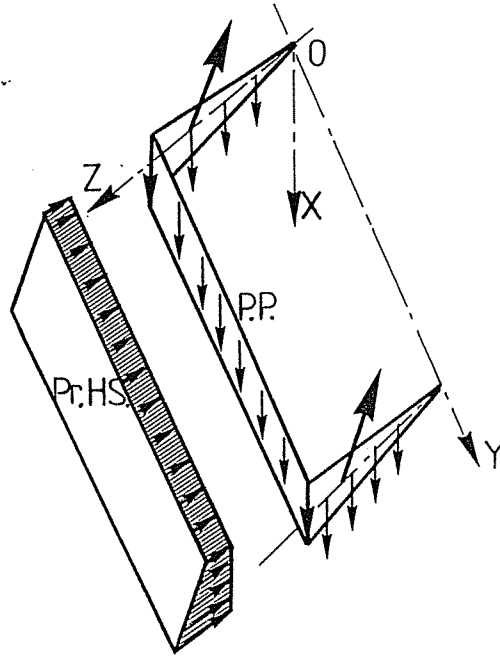


Figure 4.5.9.a

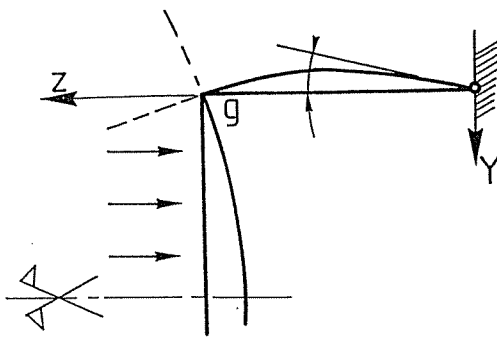


Figure 4.5.9.b

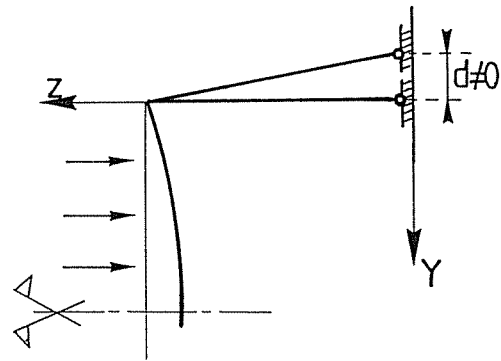


Figure 4.5.9.c

Le cas de la butée nulle ($T=0$) figure 4.5.9.c, quoique intéressant théoriquement puisqu'il annule toute flexion dans les bras, n'est pas envisageable pratiquement car les réactions normales aux appuis sont si élevées qu'elles engendrent des forces de frottement telles que tout déplacement latéral est partiellement ou totalement empêché.

Pratiquement nous avons étudié 2 cas de principe : φ libre et $d=0$ (figure 4.5.10.a) et $\varphi=d=0$ (figure 4.5.10.b). La comparaison de ces deux cas, calculé à l'aide du logiciel des bordages raidis donne, comme nous le verrons au niveau des moments induits dans la structure, les diagrammes suivants (figure 4.5.11).

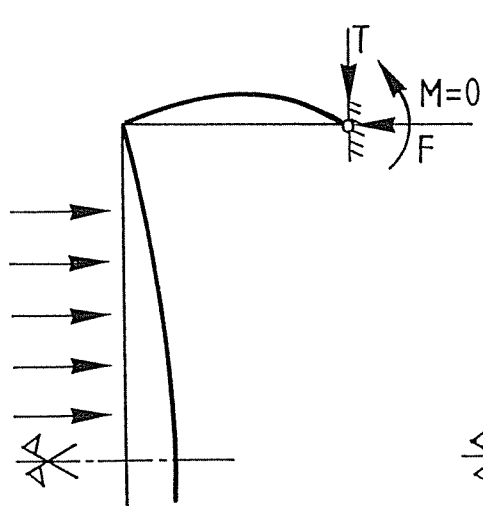


Figure 4.5.10.a

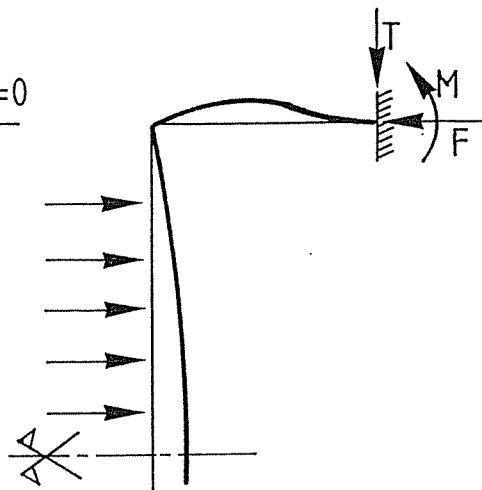


Figure 4.5.10.b

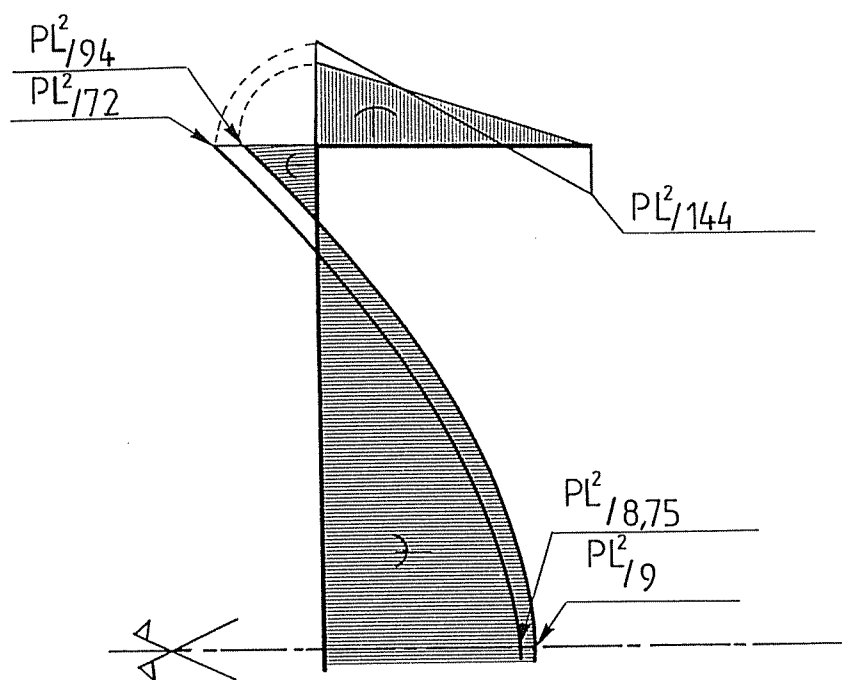


Figure 4.5.11

V.3.2 Conclusions

Pour soulager le bras, on constate qu'il est préférable que le système liant le bras à la pile, permette une rotation se rapprochant le plus possible de la rotation libre.

En effet, bien que l'encastrement soit bénéfique au niveau de la vanne, ce gain est négligeable face aux inconvénients qui apparaissent dans le bras dus à l'existence d'un moment important.

Ce moment crée aux abords de l'articulation du bras avec la pile, c'est-à-dire dans sa section la plus faible, des contraintes de flexion intolérables. De plus, la réalisation d'un encastrement parfait est difficile ce qui signifie que l'on ne pourra pas compter pleinement sur son effet favorable au niveau de la vanne. On choisit donc de réaliser **une double articulation** : autour de X et autour de φ (figure 4.5.12).

Les articulations [C.6] existant maintenant sur le marché permettent des rotations latérales d'environ 3° ce qui est largement suffisant puisque la rotation sera de l'ordre de $0,5^{\circ}$.

A cause du frottement dans les articulations, la rotation ne se fera pas complètement, d'où l'existence d'un moment non nul à l'articulation. Par sécurité, nous admettrons à la jonction bras-pile, un moment

$$M_{\text{bras-pile}} = \frac{1}{10} M_{\text{bras-vanne}}$$

Ainsi, on aura donc figure 4.5.13

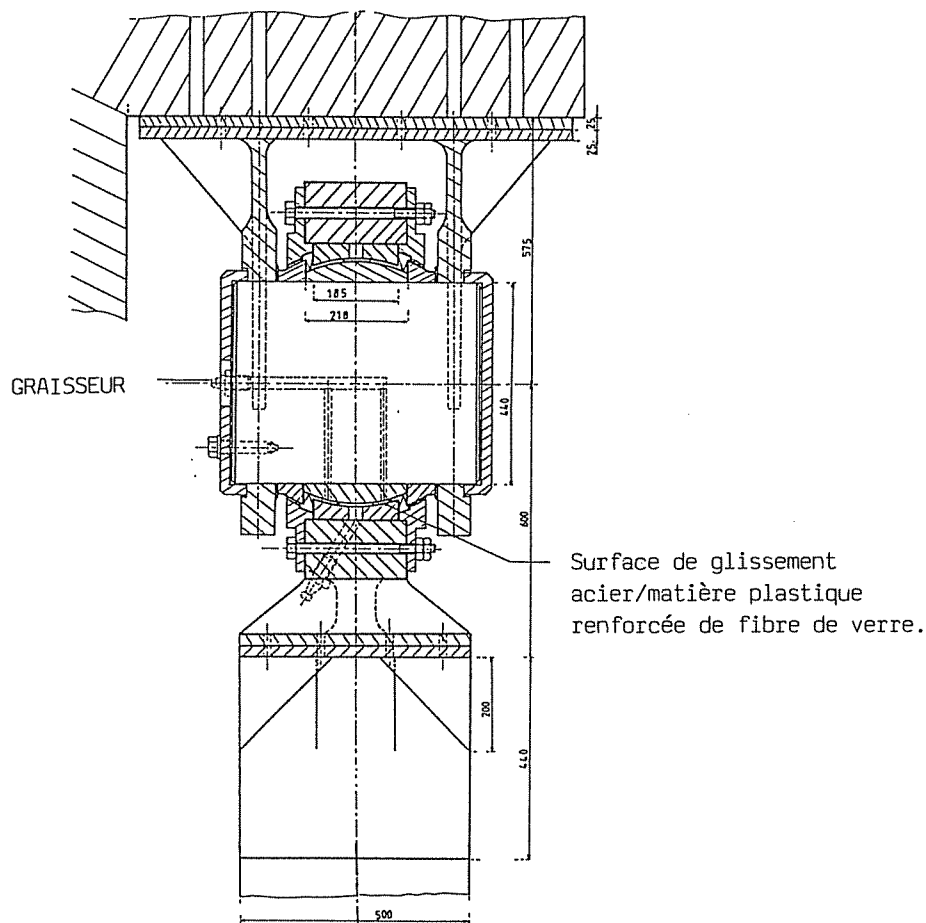


Figure 4.5.12
Vue des articulations

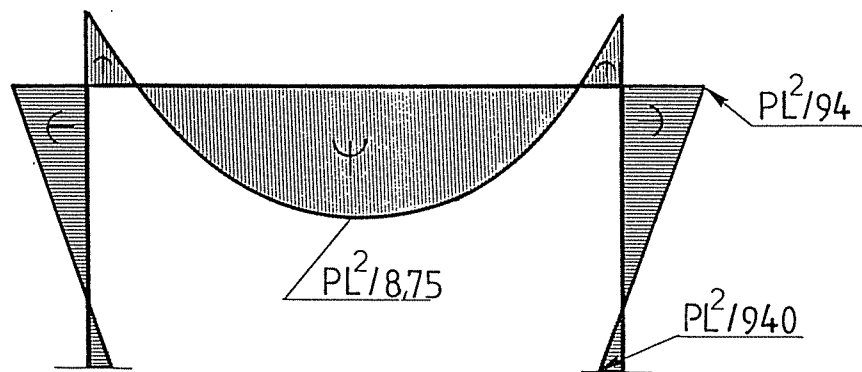


Figure 4.5.13

V.4. CALCUL DE LA VANNE (seconde approche)

Au stade actuel, nous considérerons comme première approximation les dimensions principales précédemment obtenues (figure 4.5.7). L'exposé qui suit permettra d'établir avec beaucoup plus de rigueur le champ des contraintes et des déplacements. Le logiciel utilisé permettra d'assurer une modification rationnelle des épaisseurs initialement retenues compte tenu de la liaison vanne-bras qui soulage la vanne et en y incluant le poids propre exact des divers éléments constitutifs.

On évaluera les flèches et rotations à mi-portée de la vanne ainsi qu'à la jonction vanne-bras; on déterminera de ce fait, si la vanne est suffisamment rigide ou non. Des flèches trop importantes risquent, en effet, de créer des problèmes d'étanchéité ainsi que des désordres dans la structure lors des manoeuvres de la vanne.

L'opportunité d'une construction avec une flèche initiale peut également être abordée.

Les figures 4.5.14, 4.5.15 et 4.5.16. a et b correspondent à la solution retenue et donnent un aperçu des détails de la structure et notamment des 2 compartiments étanches placés pour soulager les vérins lorsque la vanne est en position basse.

La vérification au voilement des divers panneaux [K.5, M.5] et le contrôle des bras au flambement ...[N.2] font bien sûr partie intégrante de cette seconde approche.

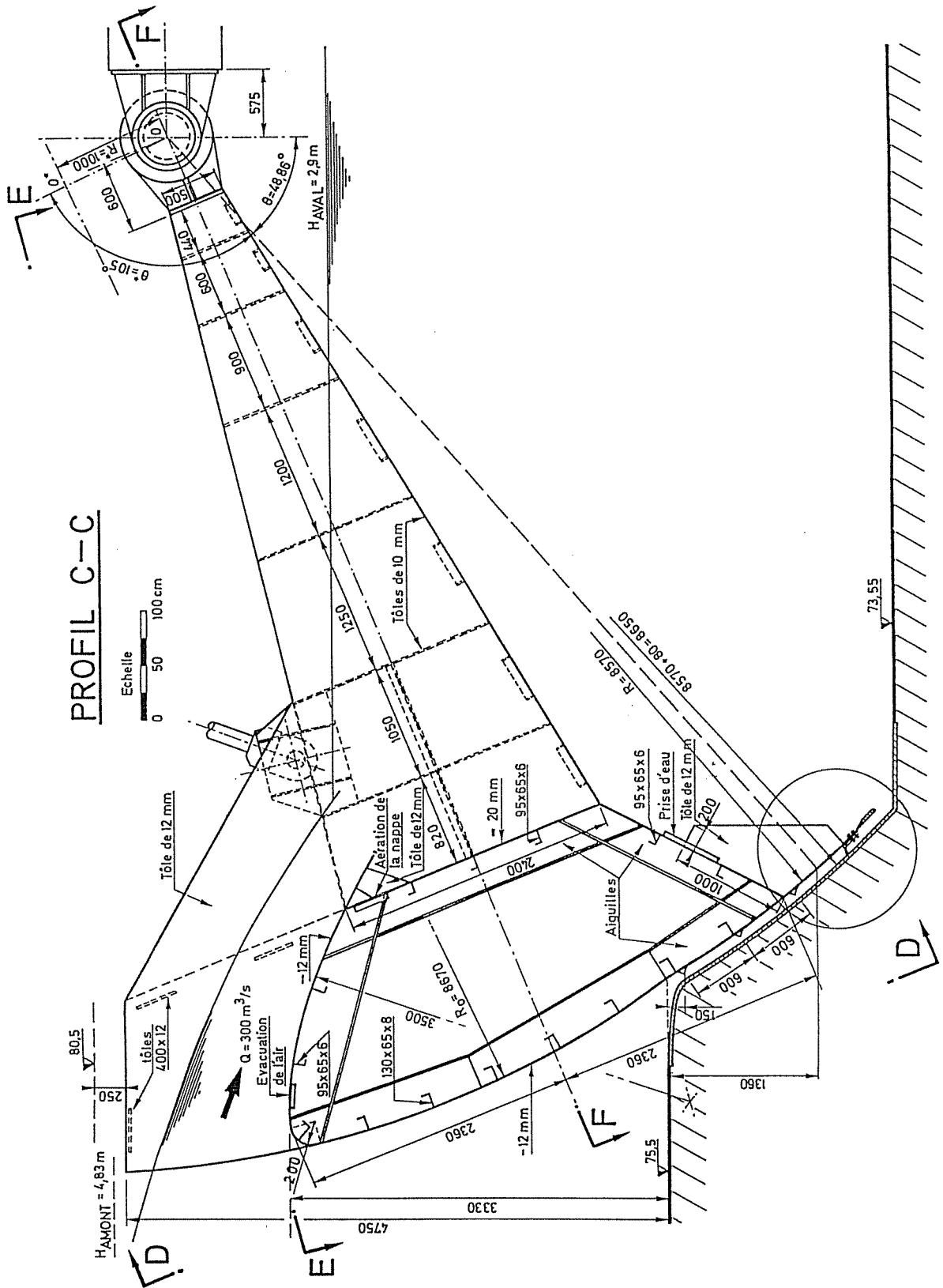


Figure 4.5.14
Coupe transversale de la vanne segment en une seule pièce

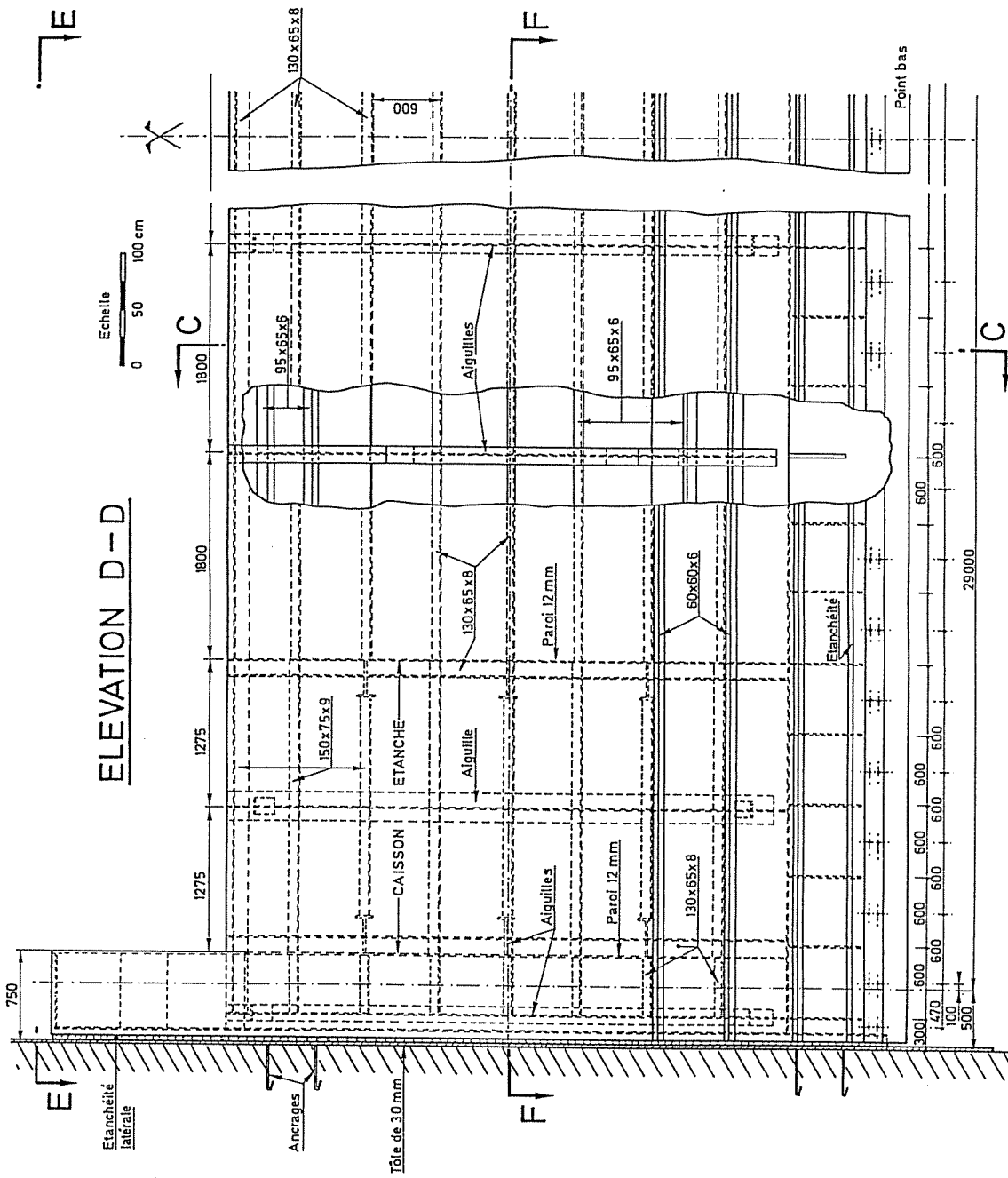


Figure 4.5.15
 Vue en élévation de la vanne segment en une seule pièce

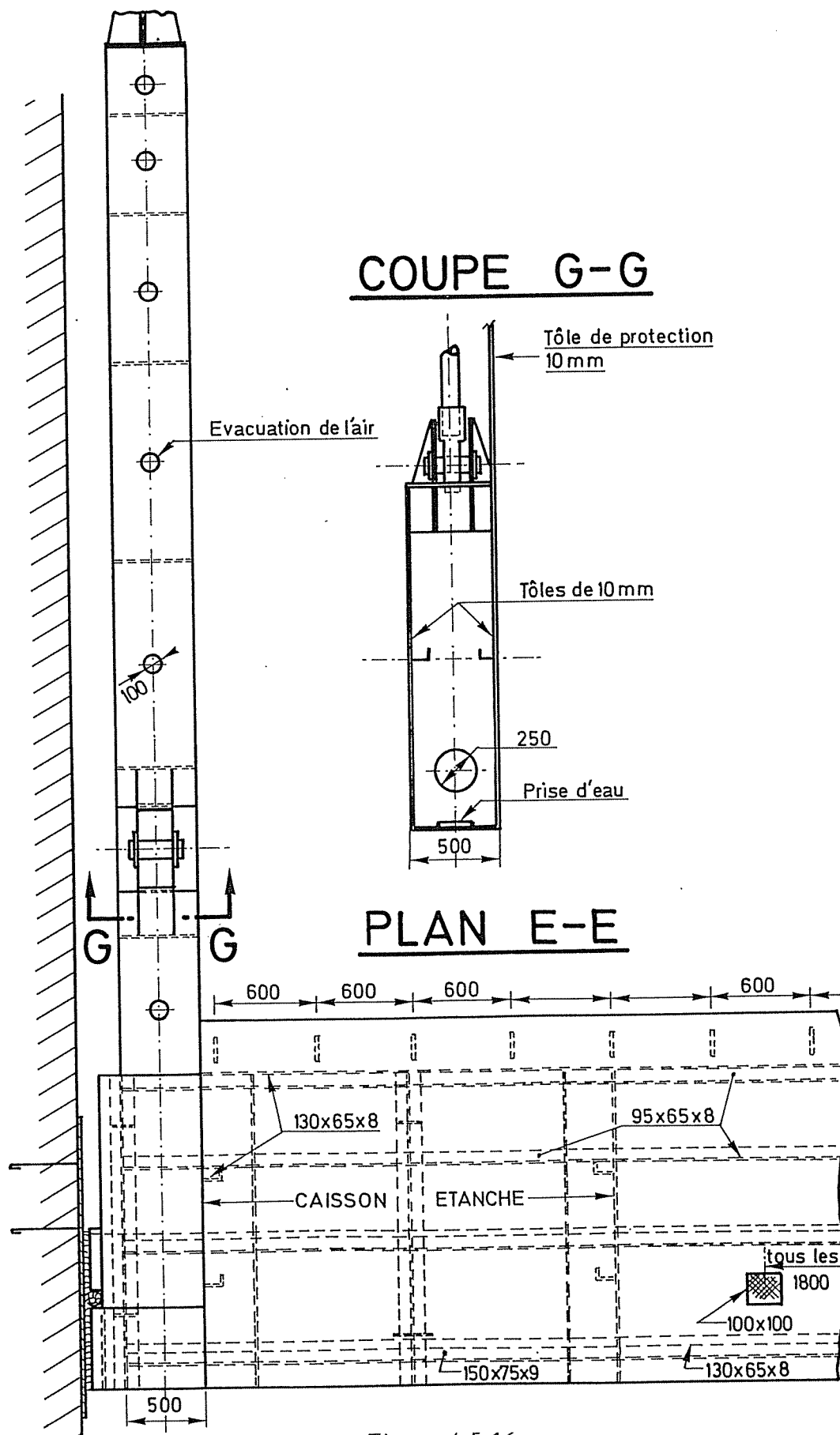


Figure 4.5.16.a

Vue en plan de la vane segment en une seule pièce

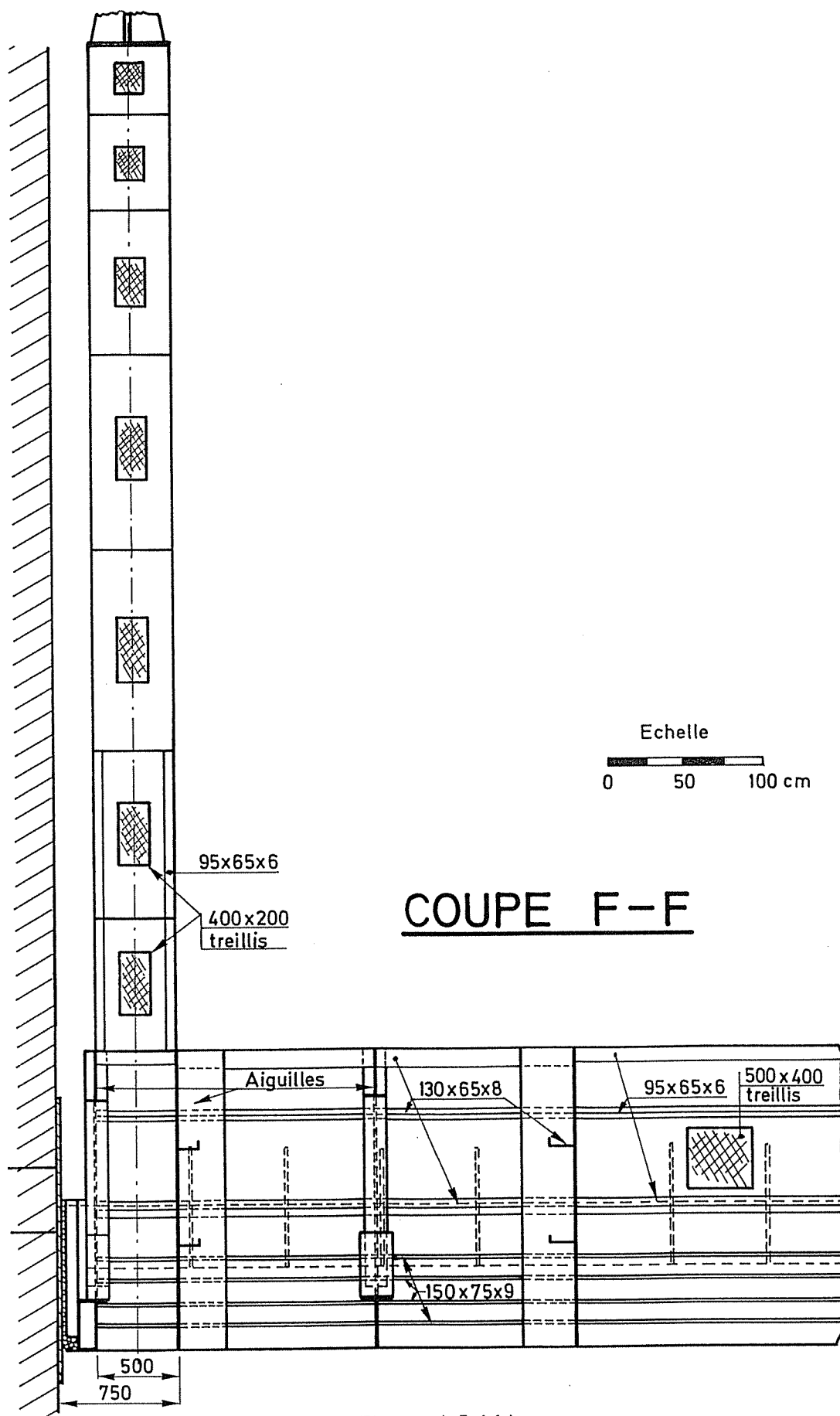


Figure 4.5.16.b
Coupe longitudinale de la vanne segment en une seule pièce

V.4.1 Présentation des résultats.

Les cas de sollicitation envisagés sont les suivants (§ V.2.3, partie IV):

Cas de sollicitation normale n°1, vanne en position de fermeture
 $Q = 0 \text{ m}^3/\text{s}$ (figure 4.5.17)

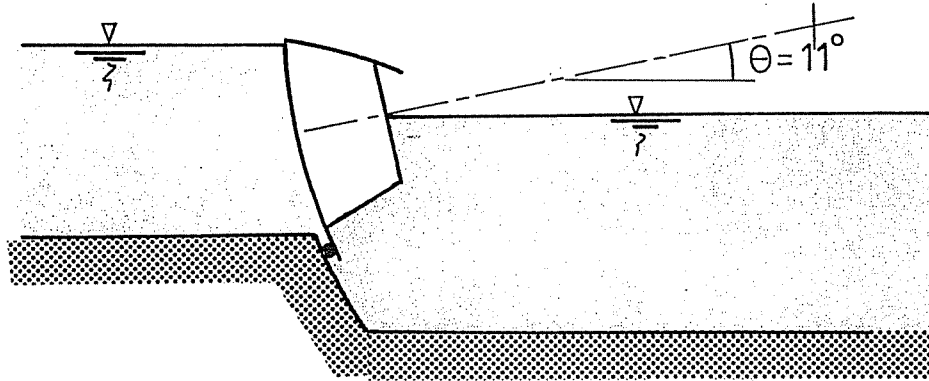


Figure 4.5.17

Cas de sollicitation normale n°2, vanne en position basse, débit de surface
 $Q = 300 \text{ m}^3/\text{s}$ (figure 4.5.18).

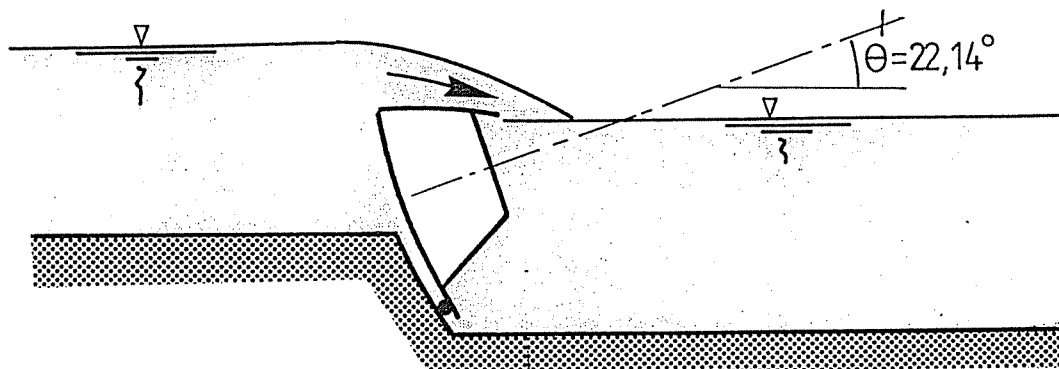


Figure 4.5.18

Compte tenu des pressions hydrodynamiques importantes agissant à la partie supérieure de la vanne, le diagramme des pressions résultantes est celui de la figure 4.5.19.

Cas de sollicitation exceptionnelle, la vanne en position de fermeture reprend toute la poussée amont (figure 4.5.4); la figure 4.5.20 donne le diagramme des pressions correspondant.

Remarque :

le schéma de résolution du cas correspondant à une sollicitation non symétrique causée par la défaillance d'un bras est abordé au chap VI partie III.

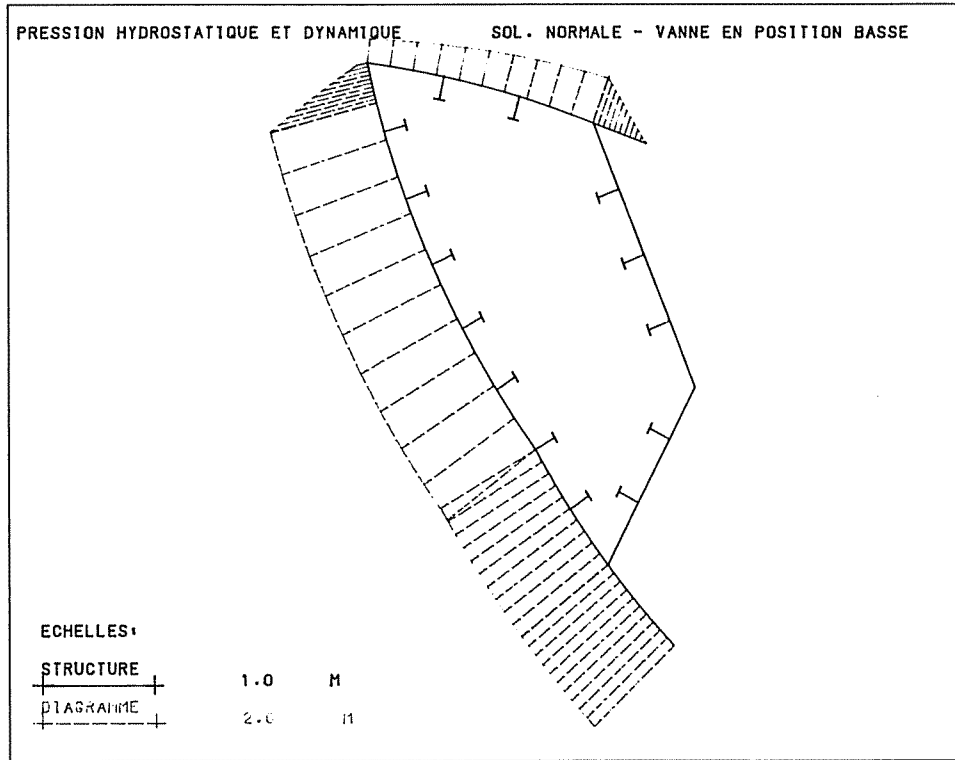


Figure 4.5.19

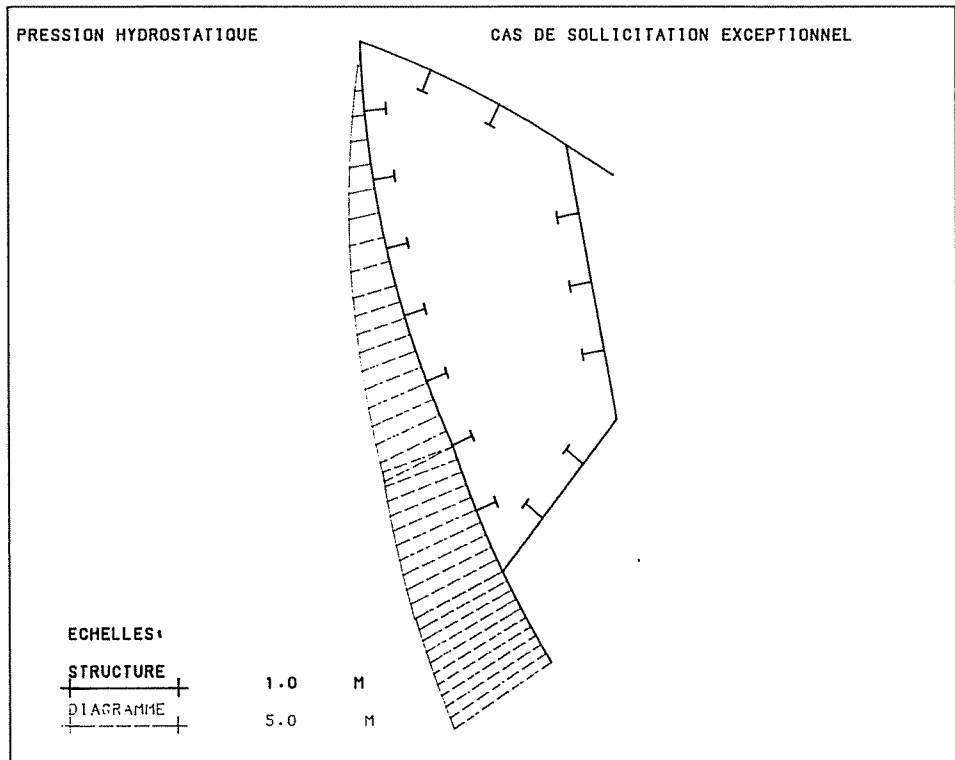


Figure 4.5.20

La discrétisation choisie en vue du calcul de la vanne segment est schématisée à la figure 4.5.21.a pour la vanne en position de fermeture et à la figure 4.5.21.b pour la vanne en position basse.

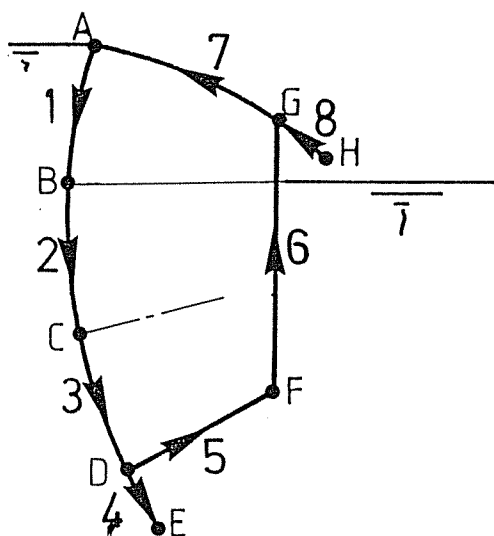


Figure 4.5.21.a

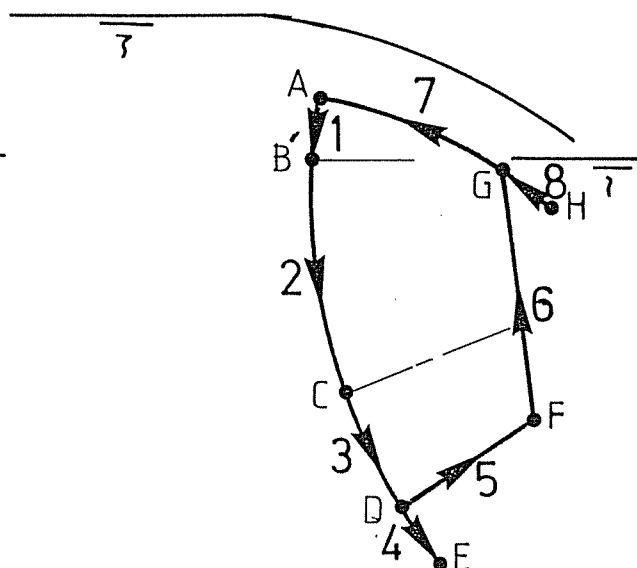


Figure 4.5.21.b

Chaque discrétisation comporte 8 panneaux dont 5 coques (panneaux 1, 2, 3, 4 et 7) et 3 plaques (panneaux 5, 6 et 8). Tous ces panneaux sont raidis par un double lit de nervures, des aiguilles formant des cadres rigides régulièrement espacés (1,8 m) et des raidisseurs placés dans le sens longitudinal eux aussi régulièrement espacés (0,6 m).

Le tronçon de coque AC a dû être scindé en deux de manière à tenir compte de la cassure dans la variation de la pression hydrostatique en B (figure 4.5.21.a) et en B' (figure 4.5.21.b).

Les premiers calculs effectués à l'aide du logiciel ont permis de contrôler le prédimensionnement. Ces passages effectués avec 1 terme et sans les effets de bord (vanne considérée comme simplement appuyée sur ses bras) ne nécessitent que 72 lignes de données et 20 s CPU; avec 7 termes le temps CPU n'est que de 105 s.

Les derniers passages effectués avec 7 termes et des effets de bord (N_b et M_b) ne nécessitent que 4 lignes de données supplémentaires et demandent 411 s CPU.

Ces données extrêmement réduites et ces faibles temps de calcul (CPU) renforcent l'intérêt qu'il y a d'utiliser le logiciel des bordages raidis pour le calcul de telles structures, surtout que le logiciel fournit des résultats nombreux, diversifiés et fiables.

Compte tenu des caractéristiques des bras décrit à la figure 4.5.8 les figures 4.5.22 à 27 donnent l'allure des déplacements, contraintes et efforts agissant au sein de la vanne pour le cas de sollicitation normale n° 2 (vanne en position basse).

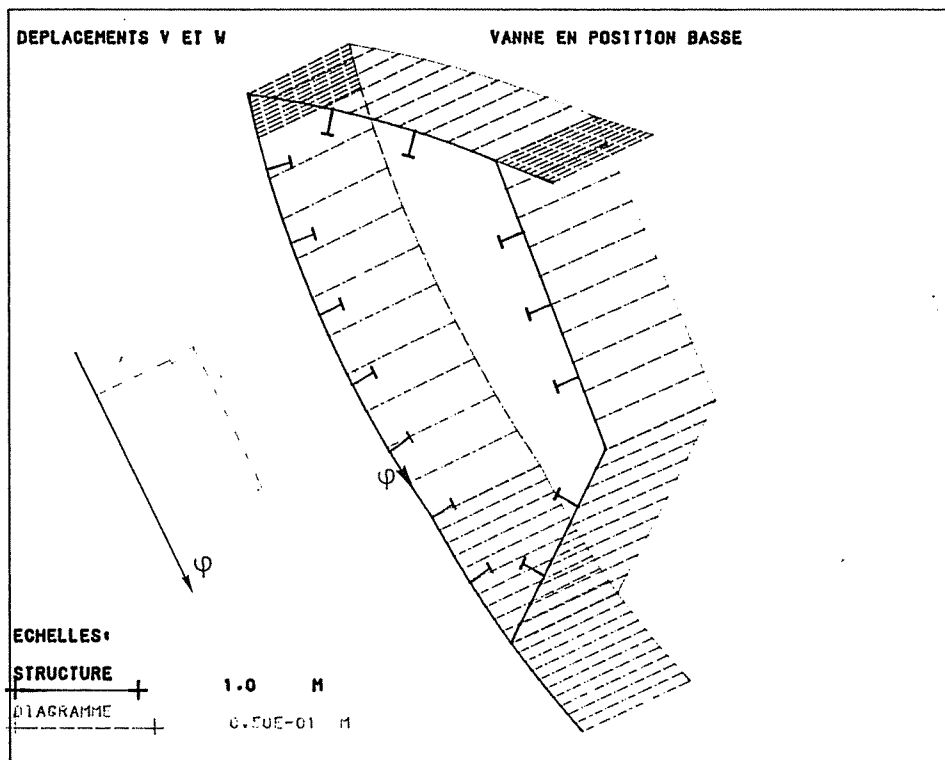


Figure 4.5.22
Vanne en position basse, déplacements à mi-portée ($x = L/2$)

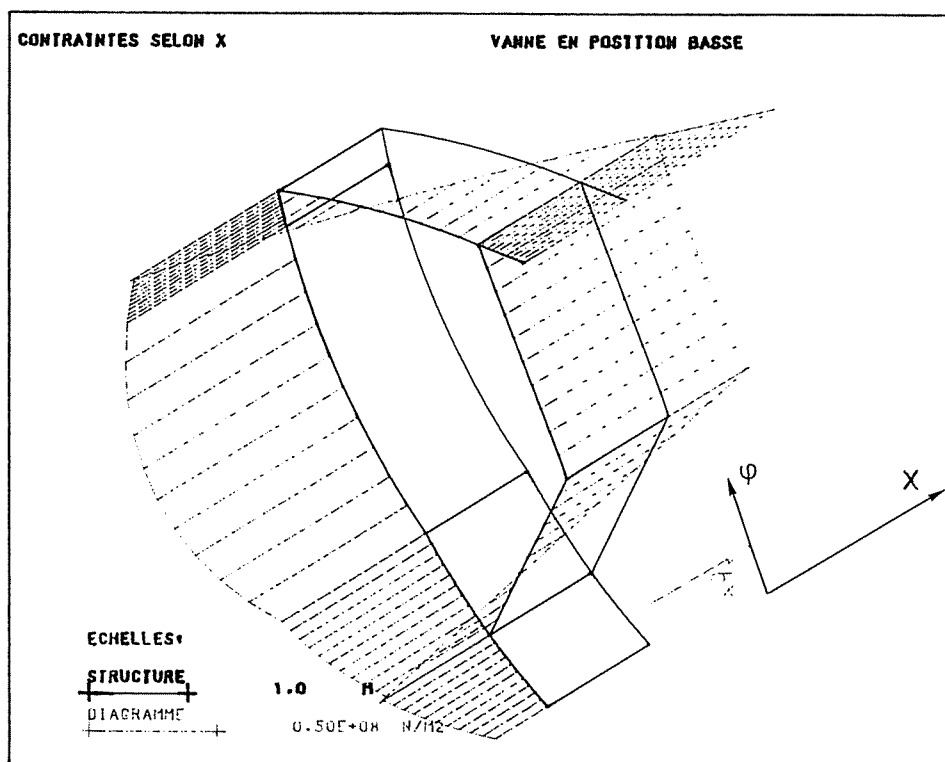


Figure 4.5.23
Vanne en position basse, contraintes σ_x à mi-portée ($x = L/2$)

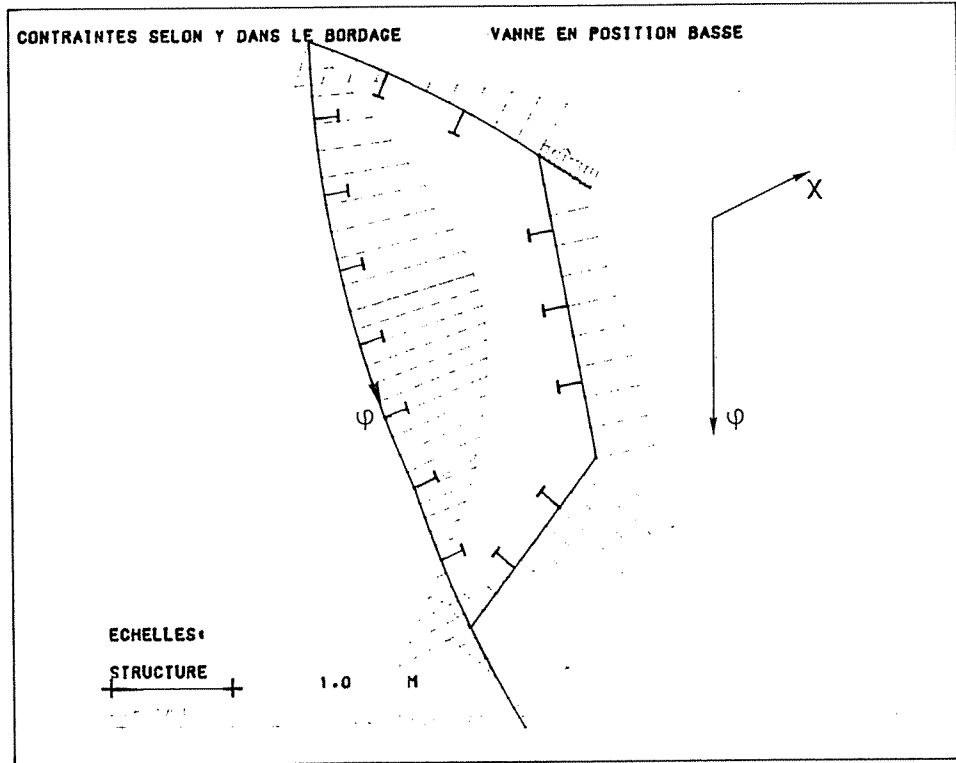


Figure 4.5.24
Vanne en position basse, contrainte σ_φ dans le bordage à mi-portée ($x=L/2$)

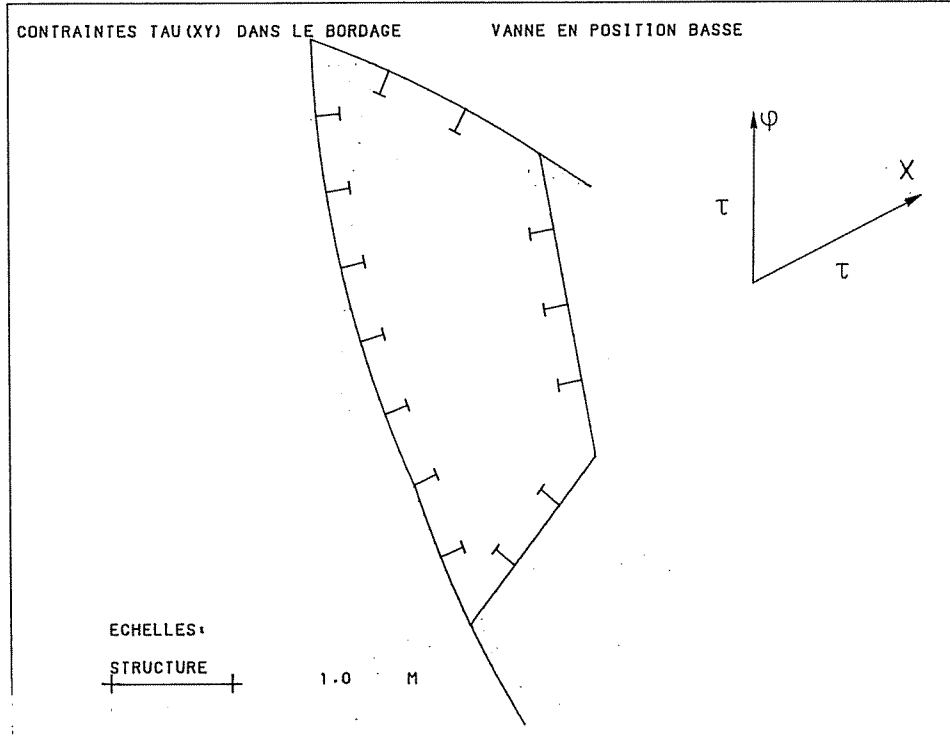


Figure 4.5.25
Vanne en position basse, contraintes $\tau_{x\varphi}$ dans le bordage aux extrémités de la vanne ($x=0$ et $x=L$).

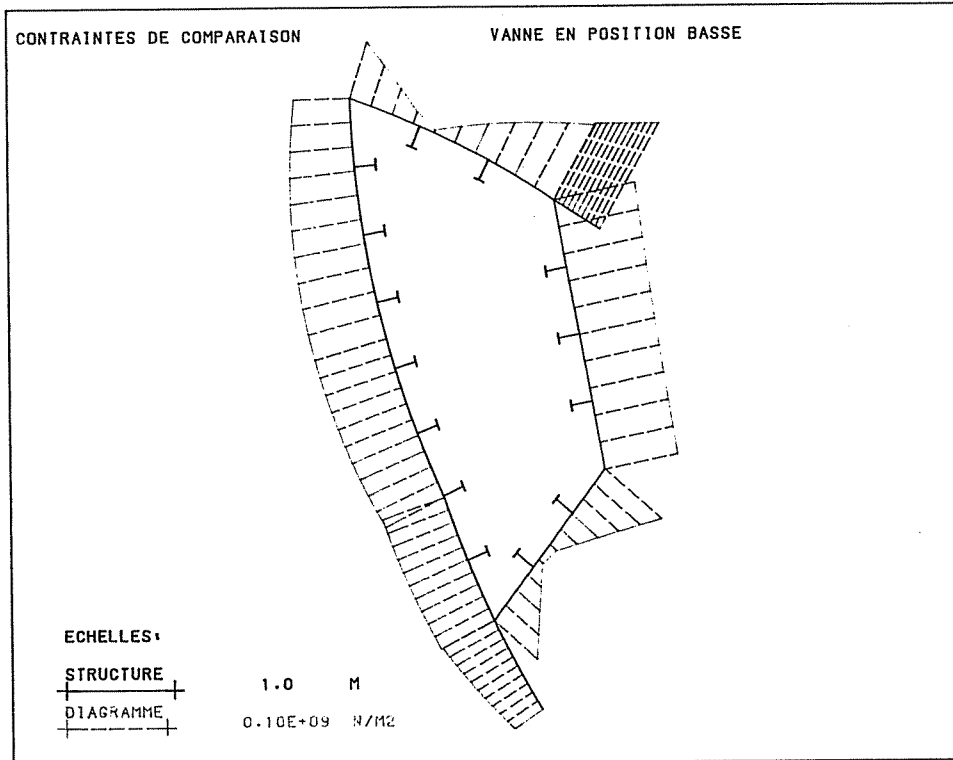


Figure 4.5.26
 Vanne en position basse, contraintes de comparaison dans le bordage à mi-portée ($x=L/2$).

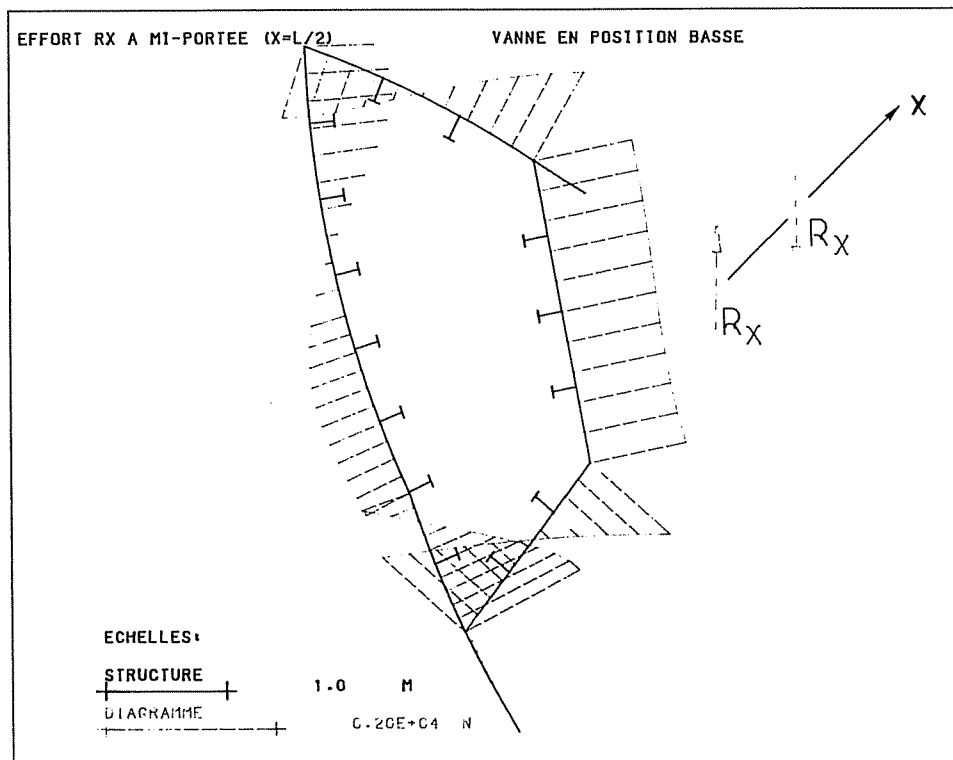


Figure 4.5.27
 Vanne en position basse, effort R_x à mi-portée ($x=L/2$)

Le tableau 4.5.1 reprend les résultats principaux relatifs à la structure pour les différentes sollicitations. On y compare également les valeurs obtenues en tenant compte de l'effet des bras à celles correspondant à la vanne supposée bi-appuyée.

	Cas de sollicitation normale				Cas de sollicitation exceptionnelle	
	Cas 1		Cas 2		Batardeau aval et Vanne en position de fermeture Q = 0 m ³ /s	
	Vanne en position de fermeture Q = 0 m ³ /s		Vanne en position basse Q = 300 m ³ /s			
	Avec les bras	Sans les bras	Avec les bras	Sans les bras	Avec les bras	Sans les bras
Déplacement transversal maximum à mi-portée (cm)	3,73	4,30	3,75	4,30	5,93	6,83
Déplacement longitudinal maximum aux extrémités (cm)	0,43	0,53	0,44	0,52	0,72	0,85
Contraintes longitudinales maximale σ_x (N/mm ²)	94	116	100	114	166	186
Contrainte transversale maximale σ_{SEM} (aig) (N/mm ²)	100	111	103	115	142	159
Moment de flexion aux extrémités des bras (N.m)	0,68 10 ⁶	1,14 10 ⁶	0,71 10 ⁶	1,16 10 ⁶	1,07 10 ⁶	1,75 10 ⁶
Moment de torsion aux extrémités des bras (N.m)	0,40 10 ⁴	0,9 10 ⁴	0,23 10 ⁴	0,05 10 ⁴	0,72 10 ⁴	1,5 10 ⁴

Tableau 4.5.1.

On constate que la prise en compte des bras, tels que définis à la figure 4.5.8, au niveau du calcul de la vanne conduit à des réductions de contraintes et de déplacements de 10 à 20 % au sein de la vanne.

L'utilisation du logiciel fournit donc de manière précise les efforts agissant aux extrémités des bras et permet un dimensionnement plus rationnel de ces bras. En effet, on constate au niveau du moment sollicitant les bras, une réduction de 40 %.

V.4.2. Influence de la rigidité des bras sur l'état de contrainte dans la vanne

Afin de juger de l'importance de l'effet favorable que jouent les bras lors du calcul d'ensemble de la vanne segment, nous avons étudié l'influence de l'inertie flexionnelle et torsionnelle des bras sur les contraintes et déplacements au sein de la vanne. Ainsi, nous avons envisagé différents types de bras, des bras à inertie négligeable, à inertie I, 2I, 4I, et 10I. La figure 4.5.28 donne pour ces différents bras le déplacement horizontal et la contrainte longitudinale σ_x maximale à mi-portée de la vanne. On y note

une asymptote horizontale correspondant au cas d'une vanne bi-encastrée. L'allure de la courbe $w = f$ (inertie), montre que l'incidence positive des bras est d'autant plus importante que les bras sont rigides. Mais engendrer une réduction des contraintes au niveau de la vanne en augmentant l'inertie des bras est d'autant moins rentable que la rigidité des bras est déjà importante. **Il existe donc une rigidité optimum à donner aux bras** de manière à allier à une réduction importante des contraintes et des déplacements au niveau de la vanne, des bras n'augmentant pas excessivement le coût de l'ouvrage.

On observe, de plus, que l'effet positif des bras est principalement conditionné par son inertie I_{xx} dans la zone de liaison vanne-bras. Il est dès lors conseillé d'augmenter cette inertie dans cette zone plutôt que de manière uniforme dans tout le bras. Ainsi, les bras de la figure 4.5.8 dont l'inertie I_{xx} varie linéairement de $30,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$ à $7,84 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$ engendrent un effet réducteur au sein de la vanne équivalent à des bras à inertie constante de $24,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$. On voit donc l'économie potentielle que l'on peut réaliser en augmentant l'inertie des bras à leur jonction avec la vanne. Un moyen aisé est donc de concevoir un bras dont la largeur serait également variable (figure 4.5.29).

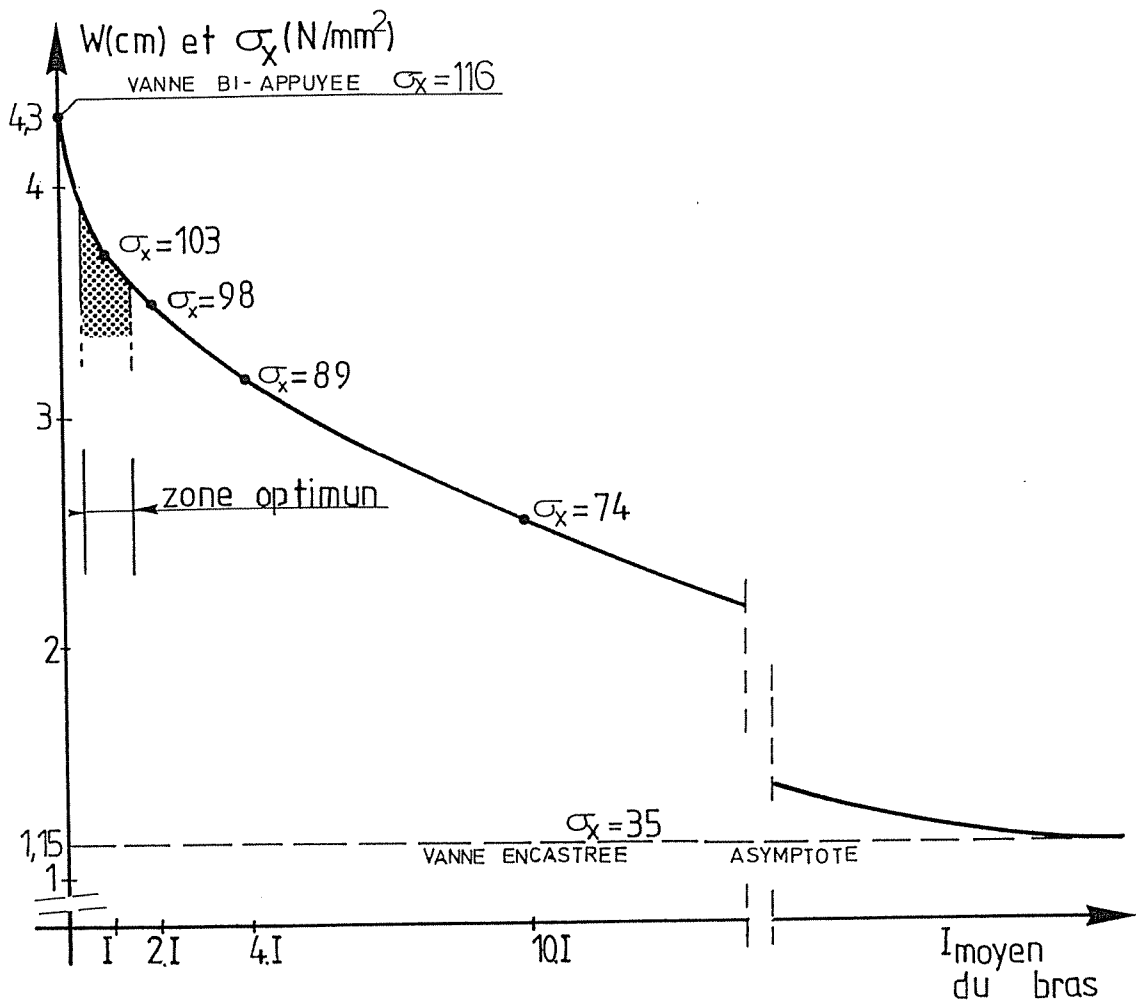


Figure 4.5.28

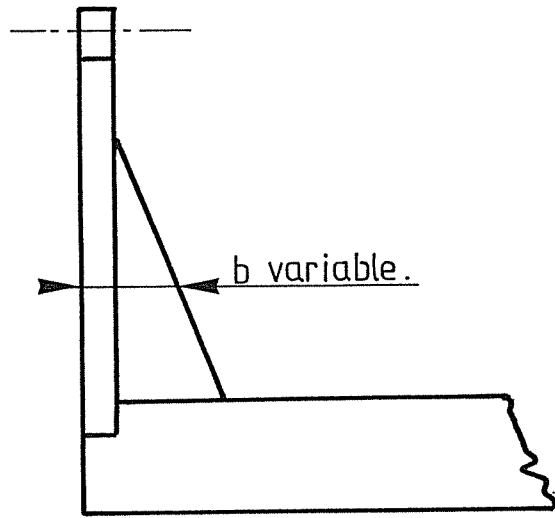


Figure 4.5.29

CHAPITRE VI AUTRES APPLICATIONS DU LOGICIEL DES BORDAGES RAIDIS

Nous donnons ci-après deux applications supplémentaires en vue de prouver la souplesse de la méthode.

VI.1. LES SOLLICITATIONS ANTISYMETRIQUES

Jusqu'à présent, toutes les sollicitations envisagées ainsi que les structures elles-mêmes sont symétriques. Ainsi, les forces de pression Z (§ II.3, partie II), les forces de bord N_b et les moments de bords M_b (§ II.2, partie III), sont des sollicitations symétriques.

Dans certains cas, les forces agissantes peuvent être dissymétriques. Ainsi, prenons le cas de la vanne segment manoeuvrée d'un seul côté. Ce type de sollicitation (figure 4.6.1.a) peut être décomposé en une sollicitation symétrique (figure 4.6.1.b) et une antisymétrique (figure 4.6.1.c).

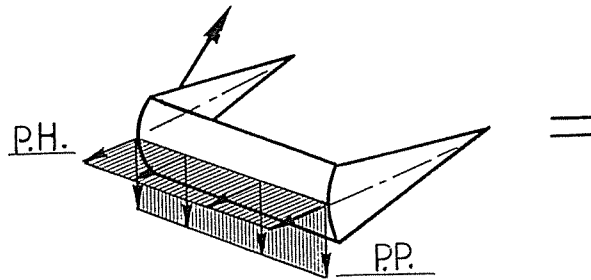


Figure 4.6.1.a

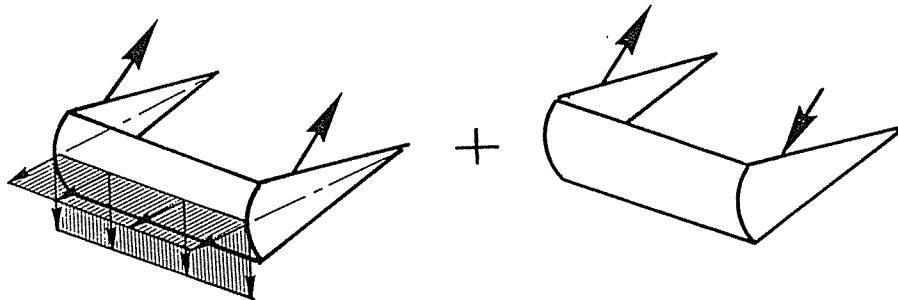


Figure 4.6.1.b

Figure 4.6.1.c

Les contraintes et déplacements de la vanne (figure 4.6.1.a) peuvent donc être calculés en additionnant ceux relatifs à la vanne soumise aux cas de charge symétrique (figure 4.6.1.b) puis antisymétrique (figure 4.6.1.c). Le logiciel des bordages raidis permet, comme nous venons de le voir, un calcul aisé du cas de la sollicitation symétrique. Par contre, pour le cas antisymétrique, il faudra développer un **nouveau type de force de bord** et résoudre le système des 3 équations différentielles de base (2.3.1.a à c) à l'aide d'un **développement du déplacement w en série de cosinus** et non plus de sinus (§ V.1, partie II).

La sollicitation antisymétrique, figure 4.6.2.a peut être décomposée en une sollicitation agissant dans le plan de la vanne segment (figure 4.6.2.b) et une sollicitation perpendiculaire à ce plan (figure 4.6.2.c).

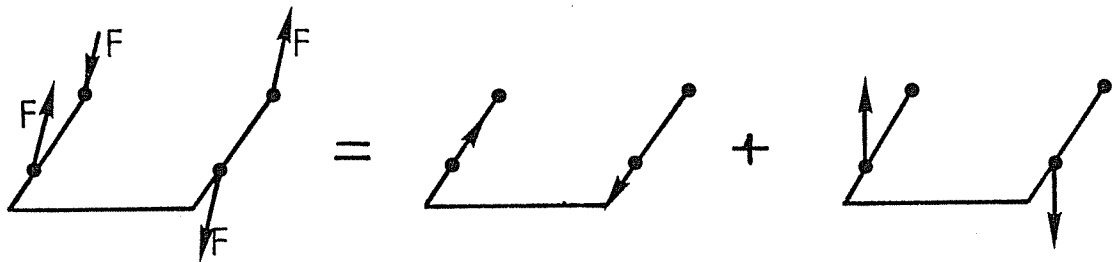


Figure 4.6.2.a

Figure 4.6.2.b

Figure 4.6.2.c

La sollicitation de la figure 4.6.2.b engendre le raccourcissement d'un bras et l'allongement de l'autre. Pour la vanne, cela conduit à des déplacements et rotations de ses extrémités (figure 4.6.3); il y correspond un effort normal N_b de compression uniforme ainsi qu'un moment de flexion constant M_b (figure 4.6.4). La vanne soumise à ces M_b et N_b peut être calculée par logiciel tel qu'il a été présenté dans la troisième partie. En pratique, les bras étant fort peu compressibles, cette sollicitation (figure 4.6.2.b et 4.6.4) n'induit que des contraintes faibles dans la vanne.

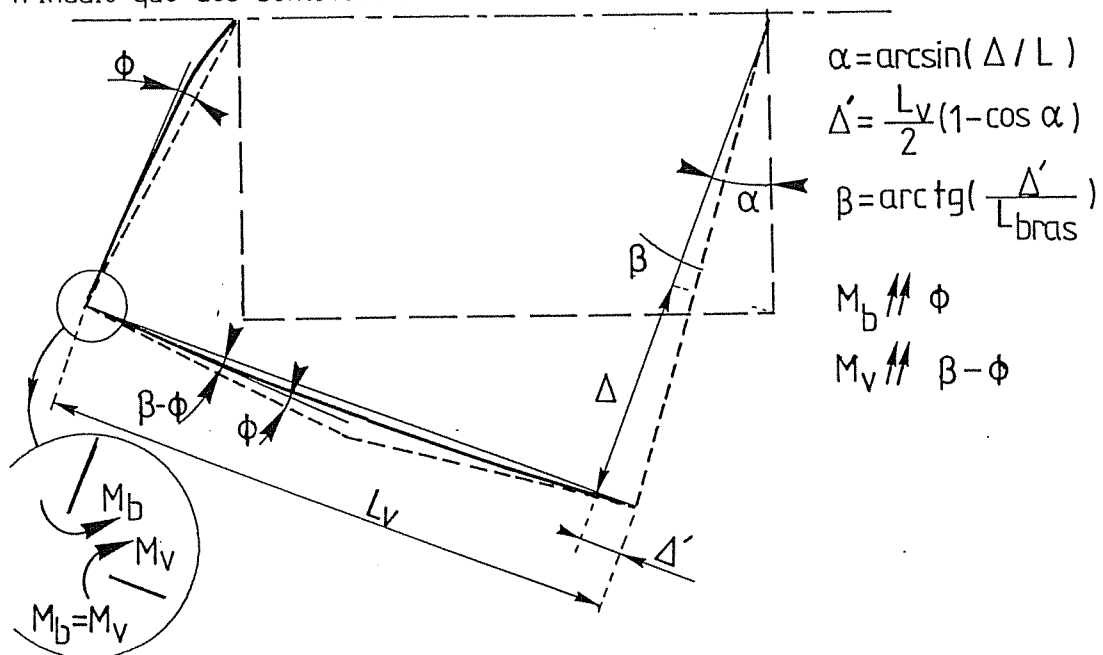


Figure 4.6.3



Figure 4.6.4

Dans le cas de la sollicitation antisymétrique agissant perpendiculairement au plan de la structure "vanne-bras" (figure 4.6.2.c) la déformation de la structure est due à un équilibre entre la torsion de la vanne et la flexion des bras (figure 4.6.5). Le déplacement d des extrémités de la vanne étant :

$$d = (\phi^* + \theta) \cdot L(\text{bras}) \quad \text{avec} \quad M_{\text{torsion}}(\text{vanne}) = M_{\text{flexion}}(\text{bras})$$

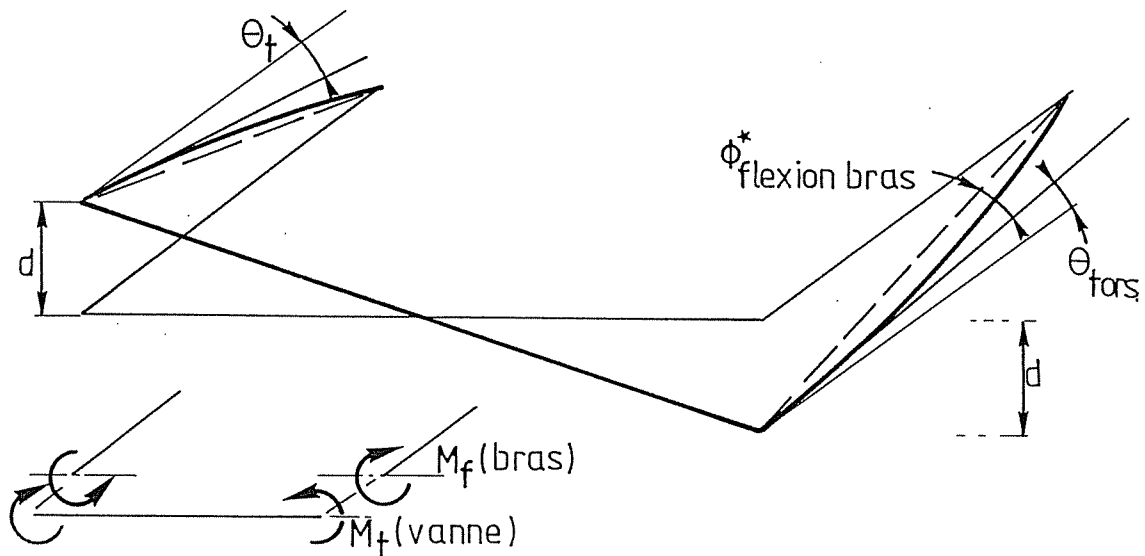


Figure 4.6.5

Le calcul de la vanne soumise à une torsion nécessite une nouvelle approche de la résolution du système des 3 équations différentielles de base (2.3.1.a à c). En effet, les conditions aux limites sont cette fois (figure 4.6.6) :

$$w = 0, \quad v = 0, \quad u' = 0 \quad \text{en} \quad x = L/2 \quad \text{et} \quad u = 0 \quad \text{en} \quad x = 0 \quad (\text{ou} \quad x = L).$$

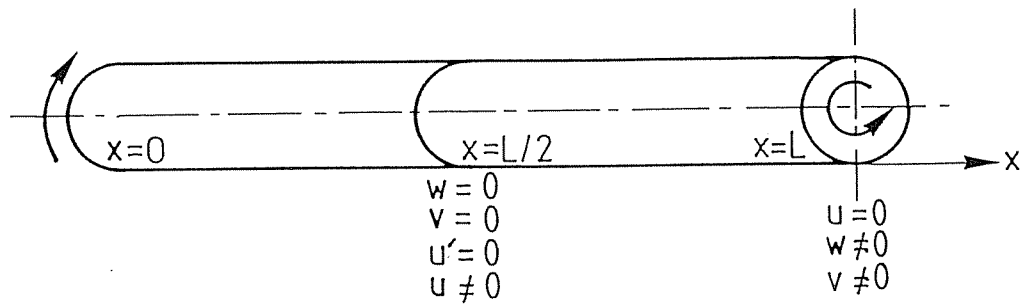


Figure 4.6.6

et pour les satisfaire impérativement, il nous faut donc imposer

$$w = w(x, \varphi) = w(\varphi) \cdot \cos(n\pi x/L) \quad (4.6.1)$$

$$v = v(x, \varphi) = v(\varphi) \cdot \cos(n\pi x/L) \quad (4.6.2)$$

$$u = u(x, \varphi) = u(\varphi) \cdot \sin(n\pi x/L) \quad (4.6.3)$$

Tous les développements faits précédemment avec $w = w(\varphi) \cdot \sin(n\pi x/L)$ restent à 100 % valables et il ne faut y apporter aucune modification. Il suffira donc de remplacer les termes en $\sin(\lambda x)$ par $\cos(\lambda x)$ et inversement.

Ainsi, le cas de charge de base B, qui correspond à une ligne de force de $10000 \sin \lambda x$ appliquée en $\varphi = 0$ dans la direction de $c\varphi$ (§ VIII.1.3, partie II), devient une ligne de charge de même type mais valant cette fois $10000 \cos \lambda x$ (figure 4.6.7).

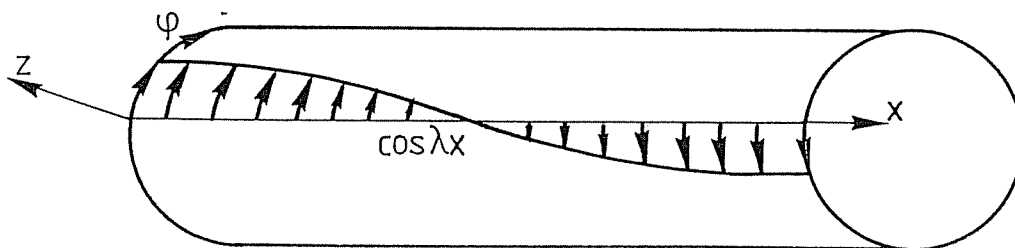


Figure 4.6.7

Il est aisé de comprendre que, comme nous l'avons fait pour engendrer des forces de bord N_b avec le cas de charge de base A et des moments de bord M_b à l'aide du cas de base C, nous utiliserons (figure 4.6.8 et figure 4.6.9) le cas de charge de base B ($10000 \cos \lambda x$) pour définir l'effet de bord de torsion $(M_t)_b$.

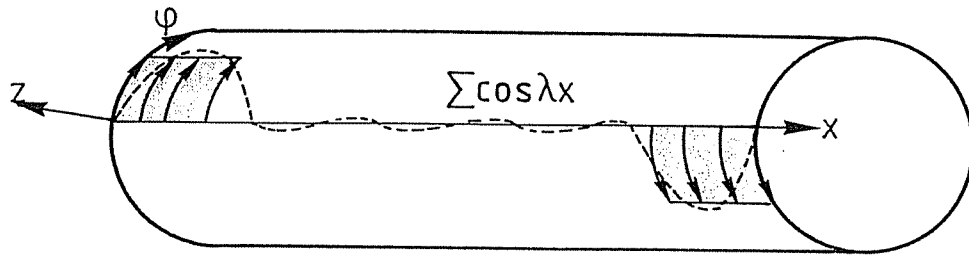


Figure 4.6.8

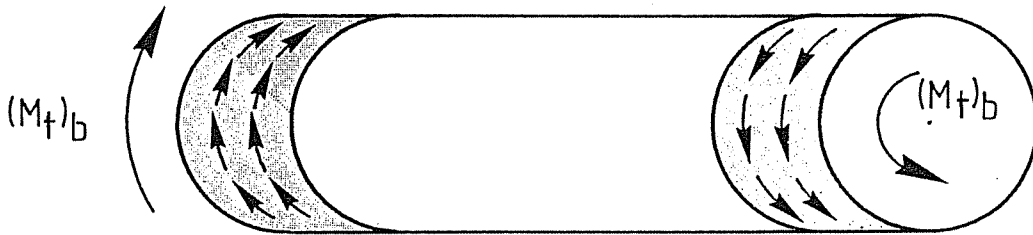


Figure 4.6.9

VI.2. LA PRECONTRAINTE DES COQUES EN BETON

Les développements analytiques présentés précédemment ne font référence qu'à des forces Z variant uniformément selon OX (§ VIII.2, partie II), des forces Y et des moments M_φ agissant localement aux extrémités des coques en $x=0$ et $x=L$ (§ II.2, partie III). Mais nous pourrions facilement développer les expressions analytiques pour des forces X , Y et Z variant selon des fonctions quelconques selon OX et $O\varphi$ pour autant que l'on puisse représenter correctement ces fonctions à l'aide des séries de Fourier [D.9].

La précontrainte pouvant toujours être décomposée en des forces X , Y et Z (figure 4.6.10), il n'y a donc aucune difficulté théorique à envisager ce type de sollicitation au sein du logiciel des bordages raidis.

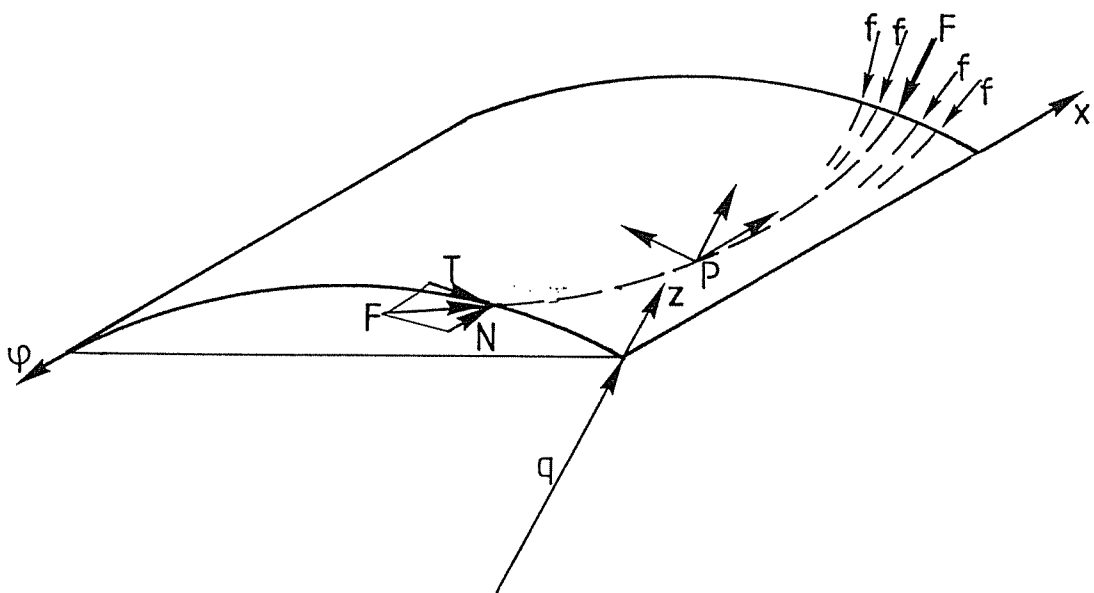


Figure 4.6.10

CINQUIEME PARTIE

ETUDE DES LIENS ENTRE LES METHODES DE CALCUL



CHAPITRE I

ANALYSE DES LIENS ENTRE LES DIVERSES METHODES DE CALCUL ET ETUDE DE LEURS INTERCONNEXIONS

Depuis longtemps, les constructeurs se sont attachés à l'analyse des coques prismatiques, raidies ou non. Nous définirons par coque prismatique, un assemblage de plaques rectangulaires et de tronçons de coques cylindriques, rigidement liées le long de leurs arêtes communes et appuyées à leurs extrémités sur des diaphragmes rigides.

Ces coques prismatiques sont d'un emploi très fréquent, aussi bien dans la construction métallique que dans celle en béton armé, ou précontraint. Parmi leurs utilisations les plus fréquentes, on peut citer :

- Les ponts métalliques ou en béton, qu'ils soient constitués de poutres réunies par une dalle, ou en forme de caisson.
- les ouvrages hydrauliques tels que porte d'écluse ou barrage mobile dont les divers éléments qui sont toujours fortement raidis, constituent, par excellence, le champ d'application de la méthode des bordages raidis.
- Les toitures des bâtiments industriels (par exemple les toitures en sheds).
- Les profils réalisés en tôle mince pliée, à section ouverte ou fermée, et qui sont eux-mêmes utilisés dans les constructions de charpente.

Les coques prismatiques possèdent des particularités géométriques qui rendent leur calcul difficile, surtout lorsque ces coques sont raidies.

Plusieurs méthodes ont été proposées dans ce but.

La plus simple est **la méthode de la poutre**, qui néglige la déformation de la section transversale, et qui applique la théorie de Navier. Ce mode de calcul s'avère souvent être trop grossier et il peut donner des erreurs très importantes. Il permet néanmoins d'obtenir un ordre de grandeur des contraintes et peut être utilisé dans le cadre d'un avant-projet (§V.2, partie IV).

La méthode la plus compliquée est celle qui analyse chaque élément constitutif de la coque par la **théorie de l'Elasticité**. Elle fournit des résultats très précis, mais l'analyse de la structure est très longue et difficile, ce qui fait qu'elle n'est pratiquement pas utilisée, si ce n'est à l'aide des différences finies [A.5, S.7]

Entre ces deux extrêmes, beaucoup de théories ont été développées [S.7] leur complexité allant en général de pair avec leur degré d'exactitude.

Parmi ces méthodes, on peut ranger celles qui s'attachent au calcul des ponts à poutres multiples, en déterminant a priori la part des charges extérieures qui est reprise par chaque poutre. Certaines d'entre elles tiennent compte d'éléments de raidissage transversaux (entretoises) et donnent des résultats qui s'approchent très fort de la réalité. La plus connue et la plus employée est la **méthode de Guyon-Massonnet** [B.4].

Dans le courant des trente dernières années, le développement de l'ordinateur a été tel que les méthodes de calcul des structures se sont modifiées peu à peu. Les constructeurs, n'ayant plus l'obligation d'effectuer les calculs numériques à la main, n'ont pas craint d'en augmenter le volume, en utilisant des théories se rapprochant de plus en plus des solutions exactes. C'est ainsi que la méthode **des élément finis** a connu un développement énorme et continue encore à se développer actuellement. Grâce à ce nouvel outil d'analyse des structures, les constructions les plus compliquées peuvent être calculées avec un degré d'exactitude suffisant.

Pour les coques prismatiques, les méthodes les plus performantes sont celles qui utilisent des décompositions en série des charges et des déplacements, suivant une direction privilégiée. On peut les regrouper sous l'appellation générale d'**analyse harmonique des structures**.

I.1 CLASSEMENT DES METHODES D'ANALYSE HARMONIQUE DES STRUCTURES

Notre but n'est pas de développer de manière exhaustive toutes les méthodes de calculs en vue d'expliquer les mécanismes, mais plutôt de déterminer la filiation existant entre les grandes méthodes d'analyse harmonique des structures.

La figure 5.1.1 reprend ces méthodes ainsi que leurs liens tels qu'ils nous apparaissent aujourd'hui. Il ne faut pas y avoir un classement par ordre d'importance ou une généalogie entre ces diverses techniques mais seulement un essai de classement de méthodes semblables autour de leurs points communs.

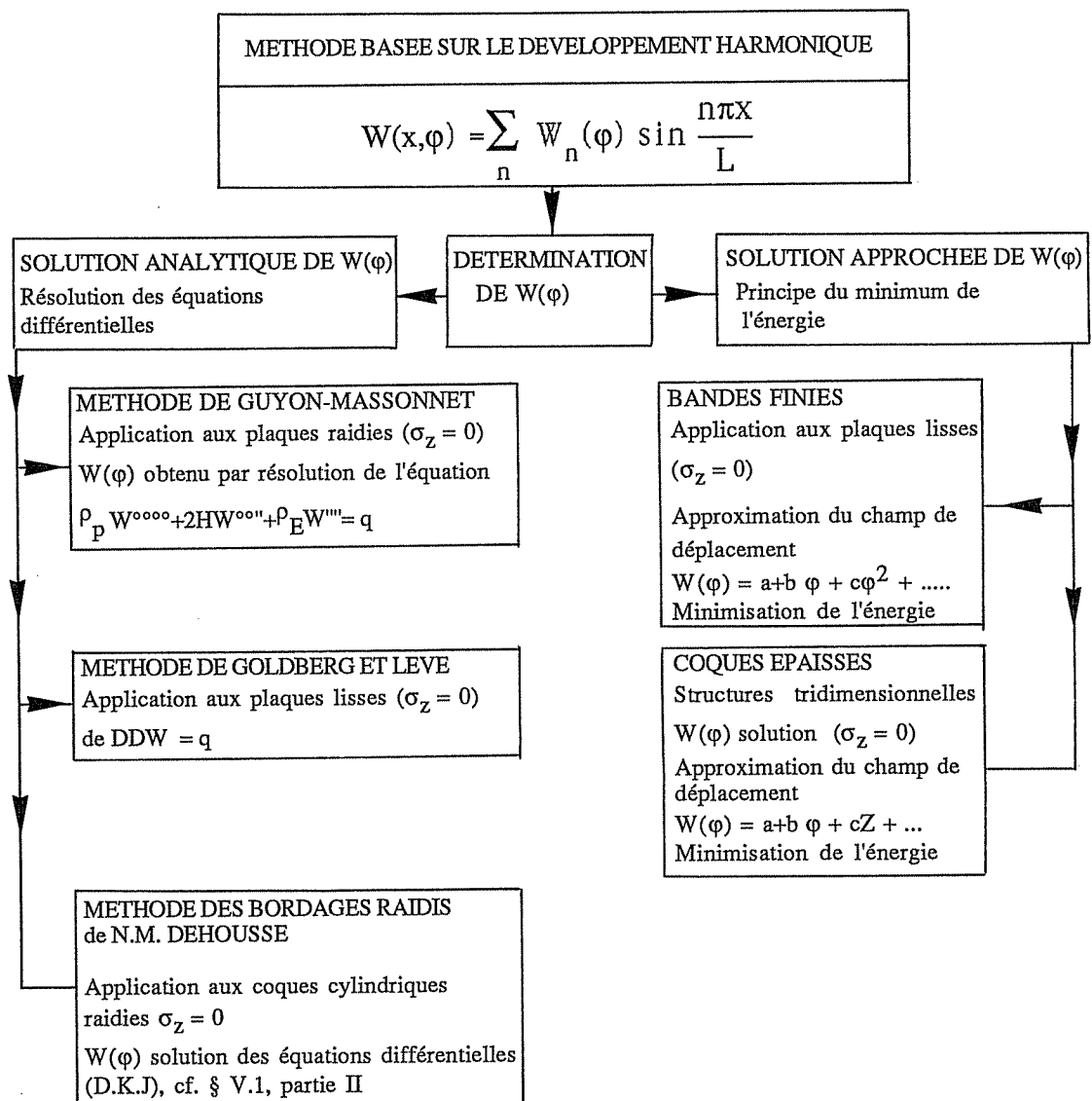


Figure 5.1.1

Reprenons maintenant ces diverses approches pour en rappeler les hypothèses fondamentales ainsi que leur domaine d'investigation, propre ou commun aux autres méthodes.

I.1.1. La solution de Goldberg et Leve pour les coques prismatiques simplement appuyées à leurs extrémités

La méthode de calcul de Goldberg et Leve [G.1] ainsi que celle des bandes finies, se basent sur la théorie des plaques élastiques. Cette théorie ne peut être appliquée avec succès que si ces hypothèses sont respectées :

1. l'épaisseur est faible vis-à-vis des autres dimensions,
2. les pentes du champ de déplacement sont faibles,
3. les déplacements sont faibles par rapport à l'épaisseur,
4. les contraintes σ_z normales au feuillet moyen sont négligeables en comparaison des contraintes $\sigma_x, \sigma_\varphi, \tau_{x\varphi}$ dans le plan de la plaque,
5. des points qui se trouvaient avant déformation sur une normale au plan moyen de la plaque se trouvent après déformation sur une normale au feuillet moyen déformé (Hypothèse de Kirchhoff);
6. on reste dans le domaine élastique.

Dans le cas des structures métalliques à parois minces, ces hypothèses correspondent assez bien à la réalité.

Comme dans la méthode des bordages raidis développée dans cette thèse, l'analyse du problème montre que des efforts correspondant à un harmonique donné produisent des déplacements du même type. Cette propriété permet d'étudier la structure sous l'action des charges et des déplacements correspondant à chaque terme du développement en série puis de sommer les résultats, en appliquant le principe de superposition.

En ce qui concerne les déplacements, la solution consiste à adopter des champs de déplacements représentés par des séries infinies de sinus et de cosinus (5.1.1 à 5.1.3).

$$w(x, \varphi) = \sum_n w_n(\varphi) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (5.1.1.)$$

$$u(x, \varphi) = \sum_n u_n(\varphi) \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (5.1.2.)$$

$$v(x, \varphi) = \sum_n v_n(\varphi) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (5.1.3.)$$

Comme on désire que W_n satisfasse à l'équation différentielle des plaques lisses (5.1.4), [G.7].

$$\Delta \Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 (\partial \varphi)^2} + \frac{\partial^4 w}{(\partial \varphi)^4} = g \quad (5.1.4)$$

et que U_n et V_n vérifient les équations d'équilibres (5.1.5 et 6) :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{x\varphi}}{\partial \varphi} = 0 \quad (5.1.5)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi}}{q \partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{x\varphi}}{\partial x} = 0 \quad (5.1.6)$$

il s'ensuit que U_n , V_n et W_n sont de la forme (5.1.7) :

$$A \operatorname{ch} \frac{n\pi\varphi}{L} + B \operatorname{sh} \frac{n\pi\varphi}{L} + C \frac{n\pi\varphi}{L} + D \frac{n\pi\varphi}{L} \operatorname{sh} \frac{n\pi\varphi}{L} \quad (5.1.7)$$

avec A,B,C,D des constantes.

Les inconnues le long de chaque arête, jonction entre 2 éléments, sont au nombre de quatre; deux composantes de translation et une composante de rotation dans le plan de la section transversale, et la translation dans la direction du joint.

A chaque intersection de deux éléments, il faut, comme dans la méthode des bordages raidis (2.8.23), écrire les quatre équations d'équilibre. Si la structure possède n joints, on doit donc résoudre pour chaque terme du développement en série un système de 4n équations à 4n inconnues.

Les déplacements étant ainsi obtenus, on peut calculer les efforts intérieurs en n'importe quel point de la coque prismatique.

En conclusion, on constate donc la grande similitude de raisonnement entre la méthode proposée dans cette thèse et celle élaborée par **Goldberg et Leve**. La distinction essentielle réside dans le choix de l'équation différentielle; le choix de l'équation des plaques lisses fait par Goldberg et Leve simplifie quelque peu les expressions analytiques par rapport à ce qu'elles sont dans la méthode des bordages raidis.

Par contre le domaine d'investigation de la méthode des bordages raidis est bien plus vaste et englobe totalement celui correspondant à Goldberg et Leve.

I.1.2. Les bandes finies

Certains expérimentateurs (C.1, G.7] ont utilisé dans leurs calculs un champ de déplacement qui est approximé par des polynômes. Les éléments de ce type ont reçu le nom de bandes finies (FINITE STRIPS). Ainsi par exemple, prendra-t-on :

$$W_n(\varphi) = a_{1n} + a_{2n} \varphi + a_{3n} \varphi^2 + a_{4n} \varphi^3 \quad (5.1.8)$$

$$\text{avec } W = \sum_n w_n(\varphi) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Ce champ de déplacement est plus simple à calculer que le champ réel. Il ne contient pas de fonctions hyperboliques, pour lesquelles l'ordinateur exige un temps de calcul appréciable. A ce point de vue, les bandes finies offrent un avantage sur la méthode de Goldberg et Leve.

D'autre part, le champ de déplacements et les contraintes ne correspondent pas exactement à la réalité. Comme pour les éléments finis, la précision des résultats dépend en outre de la discrétisation de la structure analysée. Pour obtenir des résultats satisfaisants, on doit donc multiplier le nombre des bandes.

Au total, il est difficile de prévoir a priori laquelle des deux méthodes donne les résultats les plus intéressants.

I.1.3 Extension de la méthode des bandes finies.

I.1.3.1. Considération au niveau des types d'appui

Jusqu'à présent, nous avons toujours considéré des structures qui sont simplement appuyées à leurs extrémités. Il serait intéressant que le champ de déplacement utilisé puisse satisfaire à des conditions d'appui quelconques. Pour ce faire, on utilise des séries de fonctions propres, et non plus des séries de sinus. Ce type de fonctions a été étudié notamment par Kantorovitch et Krylov [K.6].

Mais dans le cas général des conditions d'appui quelconque, la matrice de rigidité (K) est complète et on doit résoudre l'entièreté du système d'équations en une seule fois. Cette résolution nécessite un temps de calcul considérable, car la largeur de bande est égale à la dimension de la matrice. La méthode ne convient donc que si on ne retient qu'un très petit nombre de termes du développement en série [G.7].

Pour cette raison, il est préférable d'étudier la structure comme si elle était simplement appuyée à ses extrémités et d'appliquer des forces hyperstatiques de bord permettant de réaliser les déplacements imposés.

Il est à remarquer que c'est également la solution que nous avons choisie dans la méthode des bordages raidis (Ch. II et III, partie III).

I.1.3.2. Bandes finies courbes

La décomposition en série se fait alors suivant les coordonnées angulaires au lieu de se faire suivant des coordonnées rectilignes. Les ponts courbes se prêtent particulièrement à l'utilisation de ce type de bandes finies [M.6].

I.1.3.3. Appuis intermédiaires, diaphragmes, variation d'épaisseur

Ces trois problèmes trouvent leur solution théorique en employant la méthode des forces [L.6].

Les inconnues hyperstatiques sont les forces d'interaction entre la coque prismatique et le support intermédiaire (ou diaphragme).

Néanmoins, aussi bien par la méthode de Goldberg et Leve que celle des bandes finies, il faut constater que, pratiquement, de tels procédés alourdissent considérablement les méthodes au point d'en perdre tous leurs avantages. En effet, les forces d'interaction sont des charges concentrées qui sont caractérisées par une difficulté de représentation à l'aide des séries utilisées [D.11].

Les problèmes posés sont également, du point de vue théorique, abordables dans la méthode des bordages raidis, mais n'ont pas encore fait l'objet de développement.

I.1.3.4. Le domaine du non-linéaire

Les bandes finies, de même que les éléments finis, sont susceptibles d'être développées dans le domaine du non-linéaire, de la dynamique et donc du calcul de stabilité [G.8].

Ce n'est, par contre, pas le cas des autres méthodes, ni celle de Goldberg et Leve, ni celle des bordages raidis, celles-ci utilisant des équations différentielles valables uniquement dans le domaine élastique.

Cela n'est toutefois pas une limitation grave pour la méthode des bordages raidis car son domaine d'application ne se situe pas là où les phénomènes d'instabilité sont les plus dangereux, il faudra néanmoins vérifier la stabilité au voilement des panneaux comprimés situés entre les membrures de la structure.

I.1.4. Les éléments tridimensionnels de coque épaisse adaptés à l'analyse harmonique des structures

En ce qui concerne les structures à parois épaisses (par exemple la

construction en béton armé ou précontraint), l'hypothèse d'une épaisseur faible vis-à-vis des autres dimensions ne représente pas bien la réalité. Les hypothèses concernant la conservation des sections planes et la contrainte σ_z ($\sigma_z=0$) ne sont pas du tout respectées, notamment à la jonction de plusieurs éléments, cf figure 5.1.2.

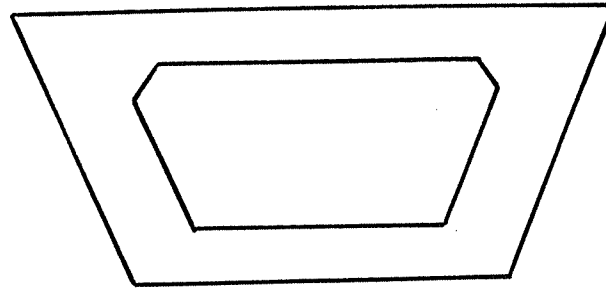


Figure 5.1.2.

Pour obtenir des résultats plus conformes à la réalité, on doit abandonner l'idéalisation de la structure par des éléments bidimensionnels et revenir au problème d'élasticité tridimensionnelle (figure 5.1.3). Dans le sens longitudinal, les charges extérieures et les champs des déplacements peuvent être exprimés, comme précédemment, par des développements en série de Fourier. Par contre transversalement, contrairement à la méthode de Goldberg et Leve ou à celle des bordages raidis, il n'est plus possible d'utiliser les équations de l'élasticité pour déterminer la forme générale des fonctions $U_n(x,\varphi)$, $V_n(x,\varphi)$ et $W_n(x,\varphi)$.

Alors le champ de déplacement transversal est par exemple représenté par des polynômes.

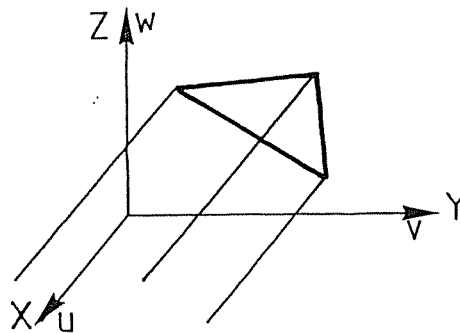


Figure 5.1.3

I.1.5. La méthode des bordages raidis

La méthode développée par Goldberg et Leve pour le calcul des structures prismatiques ainsi que celle des **bordages raidis** donnent de très bons résultats. Ces méthodes demandent la résolution de matrices de faibles dimensions et, pour cette raison, elles donnent un gain de temps très appréciable. La taille des matrices est, de plus, réduite du fait du découplage total entre les groupes d'équations correspondant aux différents termes de la série.

Pour chaque terme du développement, le champ de déplacement est obtenu par la résolution des équations de l'élasticité des coques raidies. **Le champ de déplacement est donc le champ réel**, du moins si la structure considérée répond aux hypothèses de la théorie des coques.

L'exactitude des résultats obtenus ne dépend pas des dimensions des éléments, comme c'est le cas pour les éléments finis. **Le nombre d'éléments que l'on doit utiliser pour idéaliser la structure ne dépend donc que de la forme de la section transversale de l'ouvrage.**

I.1.6 Méthode de F. del Pozo

Une méthode de calcul des voûtes cylindriques formées par des mailles triangulaires de profils métalliques fut proposée par F. del Pozo [D.12]. Il utilise également le développement en série de Fourier et l'intégration des équations différentielles régissant le comportement de la structure.

I.1.7 Méthode de Guyon - Massonnet

Cette méthode universellement connue a comme principal champ d'application le calcul des ponts à poutres multiples et ces hypothèses sont identiques à celles admises dans les autres méthodes [B.4]. Cette méthode a débouché sur l'élaboration de tables très aisées à utiliser et permettant aux concepteurs de réaliser un dimensionnement précis sans devoir recourir à de lourds calculs.

Vis-à-vis des bandes finies et surtout de la méthode des bordages raidis cette méthode demande de nombreuses hypothèses et simplifications supplémentaires. Ainsi, toutes les poutres doivent être identiques et régulièrement espacées; on ne peut rien conclure concernant l'effet localisé des poutres; l'excentrement des poutres et des entretoises vis-à-vis de la dalle de pont est négligé. De plus, la rigidité torsionnelle n'est qu'approximativement prise en compte au-travers d'un coefficient variant entre zéro et l'unité; la charge n'est souvent représentée que via le premier terme de la série de Fourier et la prise en compte des nervures de bord ne peut être qu'approximative.

Malgré toutes ces restrictions, cette méthode reste toujours d'application et fournit des résultats suffisamment précis au stade d'un avant-projet.

I.2. METHODE DE YITZHAKI

Le principe de la méthode consiste à considérer la structure comme composée d'une juxtaposition de dalles continues, appuyées le long d'arêtes, et d'un ensemble de voiles chargés aux arêtes par les réactions des dalles continues [Y.1].

Le schéma de calcul est le suivant :

On étudie d'abord une tranche de dalle continue (étape 1), les arêtes étant considérées comme appuis fixes. Cette technique permet de déterminer des réactions et des moments transversaux qui varient longitudinalement comme les charges elles-mêmes.

On analyse ensuite l'ensemble des voiles, chargés aux arêtes par les charges extérieures, c'est-à-dire les réactions des dalles continues. Cet ensemble constituant un système hyperstatique, on le rend isostatique en plaçant des charnières le long de chacune des arêtes (étape 2).

L'ensemble des dalles est ensuite chargé de paires de moments transversaux agissant successivement en chaque charnière (les étapes 3). Le résultat final s'obtient en superposant les résultats des étapes 1 et 2 aux diverses étapes 3, celles-ci étant affectées d'un coefficient obtenu lors de la détermination des inconnues hyperstatiques. Pour résoudre ce système, on impose que les rotations relatives entre 2 dalles adjacentes soient nulles.

Cette méthode se prête à la programmation et un algorithme détaillé a été mis au point par Gh. Fonder [F.5].

L'avantage de cette méthode vis-à-vis des méthodes harmoniques est qu'elle ne nécessite pas de développement en série; on peut cependant lui reprocher d'être approximative car elle néglige la rigidité torsionnelle de la structure ainsi que les déformations à l'effort tranchant. De plus, cette méthode n'autorise aucun raidissage des éléments.

I.3. METHODE DES DIFFERENCES FINIES

La méthode des différences finies n'est en réalité qu'un moyen de résoudre les équations différentielles quelles qu'en soient les origines. Dans la méthode des bordages raidis, on résout analytiquement le système d'équation pour obtenir la solution exacte; une variante à ce procédé eut été l'utilisation des différences finies.

On peut théoriquement aborder tous les problèmes à l'aide de cette méthode. Ainsi, la seule utilisation pratique des équations différentielles tridimensionnelles des coques épaisses s'est faite, à notre connaissance, lors du dimensionnement d'un barrage vôte par différences finies [A.5].

Au niveau des coques métalliques, Radkowski [R.3] employa la méthode des différences finies pour le calcul de coques de révolution soumises à des charges axisymétriques [S.7]. Mais l'extension de la méthode aux problèmes plus complexes posa beaucoup de difficultés.

Le gros problème de cette méthode est d'ordre numérique, la précision étant fort variable en fonction des pas (dx) choisis et la convergence n'étant pas systématiquement assurée [V.4]. De plus, la prise en compte des conditions aux limites est particulièrement délicate surtout lorsque ces limites sont courbes et les expressions des conditions aux limites complexes.

En pratique, cette technique de résolution conserve un grand champ d'applications (coup de bélier, oscillations, écoulement dans les estuaires, mécanique des fluides, aérodynamisme, ...) mais les éléments finis les ont souvent avantageusement remplacés. Néanmoins, des développements récents alliant la méthode des différences finies à la formulation énergétique du problème [B.5] rendent de nouveau cette méthode attractive.

I.4. COMPARAISON ENTRE LES METHODES D'ANALYSE HARMONIQUE ET LES ELEMENTS FINIS CLASSIQUES.

Bien que la démarche soit tentante, axer la comparaison de deux méthodes au niveau du temps de calcul pris par l'ordinateur est généralement une erreur. Les progrès sont tels, avec notamment l'apparition d'ordinateurs tels que le CRAY et l'interconnexion des réseaux, que tout problème soumis à l'ordinateur à sa solution endéans les 24 voire les 48 heures. De plus

l'économie de temps ne se solde pas toujours par une économie d'argent pour qui dispose de son propre ordinateur. Laissons donc au second plan cet avantage indéniable des méthodes harmoniques qu'est la réduction du temps de calcul; le rapport vis-à-vis des éléments finis pouvant aller de 1 à 100.

Insistons par contre beaucoup sur le **temps de discrétisation** de la structure. En effet, avant la soumission du problème à l'ordinateur, le temps pour créer le fichier de données et l'encoder peut varier de quelques minutes, à des heures, voire des jours. De plus, le risque d'erreurs d'encodage et leurs conséquences sont proportionnelles à la taille des données. C'est pour ces raisons, qu'il convient de choisir la méthode adéquate en fonction de la structure, du niveau de précision demandé, du type d'analyse requis, du temps et de l'argent dont on dispose.

Il n'échappe à personne que toute méthode d'analyse harmonique ne nécessite qu'une discrétisation transversale au contraire des éléments finis. A ce niveau, **l'économie financière potentielle est bien réelle et non négligeable**. Le découplage total entre les équations des différents termes de la série peut permettre d'implanter de telles méthodes sur des ordinateurs de plus petites dimensions et notamment sur des micro-ordinateurs pour ce qui concerne la méthode des bordages raidis.

Une facilité des méthodes de Goldberg et Leve et des bordages raidis par rapports aux éléments finis et bandes finies, est **la clarté et la souplesse** des résultats. Les déplacements et les contraintes étant connus en tous points de manière exacte et non pas moyenne. En effet, dans les éléments finis dits cinématiquement admissibles, on ne dispose que d'une connaissance faible des contraintes, et inversement pour les éléments statiquement admissibles, on ne dispose que d'une connaissance faible des déplacements.

Il ne faudrait pourtant pas croire, suite à cette comparaison, que les éléments finis riment avec lourdeur, imprécision et coût excessif. Ce n'est, en effet, que dans certains cas, que ceux-ci sont victimes de leur puissance et de leur souplesse, et **peuvent être avantageusement remplacés par les méthodes d'analyse harmonique dont fait partie la méthode des bordages raidis**.

I.5. SIMILITUDES, FACE AUX DIVERSES CONDITIONS D'APPUI, DE LA METHODE DES BORDAGES RAIDIS ET DES BANDES FINIES

Dans la méthode des bandes finies (§ I.1.2), il y a théoriquement deux approches possibles pour résoudre le problème posé par des conditions d'appui autres que celles des appuis simples, il en est de même dans la méthode des bordages raidis.

Les deux approches sont :

- considérer des **forces de bord** agissant en lieu et place des **inconnues hyperstatiques** résultant par exemple d'un encastrement parfait. On utilise pour déterminer ces inconnues, la méthode des forces (§ I.1.3.1. pour les bandes finies et chap. III, partie IV, pour les bordages raidis).
- utiliser des **séries de fonctions propres** au lieu des séries de sinus et cosinus de Fourier. En effet, les séries de Fourier, qui servent à développer les charges et à exprimer les efforts et les déformations, ne peuvent convenir que pour des coques bi-appuyées; mais ces séries ne constituent qu'un cas particulier d'un type plus général de fonc-

tions introduites pour la première fois dans l'étude des vibrations de barres prismatiques.

Ces fonctions propres sont de la forme (5.1.9) :

$$w(x) = A \sin kx + B \cos kx + C \operatorname{sh} kx + D \operatorname{ch} kx \quad (5.1.9)$$

Comme $w(x)$ ne se reproduit qu'après quatre dérivations, il faudrait, dans la méthode des bordages raidis, nécessairement utiliser l'équation de Schorer comme équation fondamentale des coques si on veut mettre en évidence $w(x)$ pour chaque terme du développement de w et se ramener ainsi à une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

L'équation de Schorer a néanmoins le grand inconvénient de n'être valable, vu les hypothèses émises que pour les coques ou plaques longues et larges. De plus, cette équation n'est valable que pour des matériaux dont le coefficient de Poisson est nul.

Conclusion Face à ce choix, c'est pour des raisons numériques que l'on a choisi pour les bandes finies la méthode des forces (§ I.1.3.1); le choix est le même dans la méthode des bordages raidis, mais cette fois pour éviter les restrictions dues aux hypothèses de l'équation de Schorer.

I.6. CLASSIFICATION DES MODELES DE CALCUL SELON LE TYPE D'HYPOTHESES : CONTRAINTES (S.A.) OU DEPLACEMENTS (C.A.)

On a rassemblé dans ce paragraphe les méthodes de calcul les plus éprouvées pour les types courants de coques. Il est capital que l'ingénieur connaisse les hypothèses sur lesquelles elles sont basées, soit conscient de leurs limitations et ne dissocie pas de son calcul la conception et l'exécution de la structure. Il doit savoir que les meilleurs calculs ne rachèteront jamais une conception défectueuse et que, de l'exécution peut dépendre la validité des hypothèses sur lesquelles il a basé son dimensionnement.

La classification utilisée ici (figure 5.1.4) est celle des éléments finis [F.6], elle consiste à classer les théories ou éléments, en fonction des hypothèses émises. Soit elles concernent les déplacements, ce qui conduit à un modèle **cinématiquement admissible (C.A.)**, soit elles sont relatives aux forces ou contraintes, ce qui signifie qu'il s'agit d'un modèle **statiquement admissible (S.A.)**. Si les deux types d'hypothèses sont émises, on parle de **modèle hybride**.

I.7. CONCLUSIONS

Les fondements des diverses méthodes envisagées sont semblables, c'est dans leur développement que les différences apparaissent.

Chaque méthode ayant ses propres spécificités, elles conviennent particulièrement pour un domaine précis d'application.

Ainsi, à notre niveau, le but est de présenter une méthode originale, adaptée aux exigences des constructions hydrauliques, économiques à l'usage, d'utilisation aisée et rapide et donnant des résultats clairs; ces derniers étant d'ailleurs précis, nombreux et détaillés aussi bien au niveau des déplacements que des contraintes.



CHAPITRE II

ACCESSIBILITE A LA METHODE DES BORDAGES RAIDIS

Pour le familier à une méthode de calcul quelle qu'elle soit, le domaine d'utilisation, les avantages, les restrictions, la discrétisation optimum, ... sont des données de base avec lesquelles il est habitué de travailler.

Mais pour que cette méthode soit, en pratique également, accessible à un utilisateur néophyte en ce domaine, il faut qu'une formation très réduite suffise pour lui permettre de tirer le meilleur parti de cette méthode.

Nous définirons ce problème comme étant celui de l'**accessibilité** à la méthode.
Les méthodes les plus accessibles seront donc celles qui nécessiteront le moins d'apprentissage de la part de l'utilisateur non initié.

On peut sans doute classer la méthode des bordages raidis dans la catégorie des méthodes ayant la meilleure accessibilité. En effet, les données nécessaires étant peu nombreuses, simples à déterminer et, de plus, fort systématiques, l'accessibilité au logiciel est très aisée.

En ce qui concerne la discrétisation qui constitue souvent le point nécessitant le plus de formation de la part de l'utilisateur, elle est, pour la méthode des bordages raidis, fort simple et de plus évidente car elle se fait naturellement en fonction de l'unique géométrie de la structure.

Dans la méthode des éléments finis se pose par contre le choix de l'élément à utiliser et ensuite celui de la discrétisation; un maillage plus fin n'étant pas forcément synonyme de résultats meilleurs.

Au niveau de la méthode proposée dans cette thèse, la solution provenant de la résolution des équations différentielles étant exacte, subdiviser un élément en deux n'est d'aucune utilité. En effet, la solution restera la même et seul le temps de calcul sera inutilement accru. Pratiquement, il suffit donc de discrétiser la structure comme un ensemble de plaques et de coques cylindriques dont les dimensions relatives n'ont pas d'importance. Seul le paramètre fixant le nombre de termes de la série de Fourier nécessite un peu d'expérience de manière à pouvoir fixer le niveau de précision souhaité pour les résultats. Plus ce nombre croît, plus la précision augmente mais aussi le coût ; de plus, un accroissement exagéré du nombre de termes n'apporte pratiquement plus aucune amélioration et risque au contraire de poser des problèmes numériques. Un choix similaire existe au niveau des éléments finis lorsque l'utilisateur doit fixer le degré des champs

relatifs à l'élément choisi; ce choix nécessite aussi une expérience si l'on veut opter pour une solution économique. Il est toujours possible, pour les 2 méthodes précitées, de choisir un degré de champ ou un nombre de termes très élevé, cela conduit à la solution mais à un prix injustifiable.

II.1. EN PRATIQUE

Ce qu'il faut connaître en pratique pour utiliser la Méthode des bordages raidis est résumé dans ce paragraphe.

Pour les **charges uniformes** selon OX comme la pression hydrostatique, un seul terme constitue une bonne approximation au point de vue des déplacements; pour les contraintes, 7 termes sont un idéal mais 3 termes peuvent être considérés comme un optimum [D.11].

Lorsque les **efforts de bord** interviennent, 3 termes sont un minimum et il est préférable de choisir 7 comme optimum. Pour que la précision soit significativement meilleure, il faut dépasser 25 termes, ce qui n'est pas économiquement souhaitable.

Les **résultats** sont exacts compte tenu du développement en série utilisé; de ce fait, lorsque les forces de bord interviennent, les résultats près des appuis, sur $\pm 10\%$ de la portée, doivent subir une correction basée sur les résultats obtenus à la partie centrale de la travée qui sont eux parfaitement exacts. Ce phénomène doit son explication au nombre réduit de termes utilisés (7 termes).

En conclusion, si ce n'est le choix du nombre de termes de la série, les données sont simples et il ne se pose aucun problème pour discrétiser la structure. Les résultats sont clairs, nombreux, précis et directement utilisables.

SIXIEME PARTIE

CONCLUSIONS



Les développements proposés dans le cadre de cette thèse s'étant articulés autour de deux pôles principaux nous scinderons également nos conclusions.

LA VANNE SEGMENT EN UNE PIÈCE

Les barrages mobiles à vannes segments étant des structures fort complexes, nous les avons étudiés en détail afin de mieux cerner l'influence qu'exercent les bras sur le comportement général de l'ensemble "vanne-bras". Nous nous sommes plus particulièrement occupé du calcul de la vanne segment à vanne unique couvrant toute la hauteur de la retenue mais en permettant néanmoins l'écoulement de surface pour les faibles débits et l'écoulement de fond pour les crues.

Pour les faibles retenues, ce système de barrage mobile en une pièce allie à une simplicité évidente, une forte rigidité d'ensemble et une économie financière certaine.

LE LOGICIEL DES BORDAGES RAIDIS

Le logiciel des bordages raidis mis au point suite aux développements réalisés dans cette thèse permet l'étude complète de nombre de structures métalliques et en béton dont notamment les constructions hydrauliques telles que : pont-canal, écluse, barrage mobile, ... Les conditions essentielles pour qu'une structure puisse être calculée par ce logiciel sont : d'avoir un axe privilégié selon lequel elle est développée, de se limiter au domaine élastique et de se prêter à une discrétisation en tronçons de coques cylindriques (à rayon et épaisseur constants) raidies par 3 types de nervures (raidisseurs, aiguilles et traverses).

L'INTERET DU LOGICIEL DES BORDAGES RAIDIS

Les avantages offerts par le logiciel sont multiples :

Il se prête aussi bien au **prédimensionnement** qu'aux **calculs de vérification** d'une structure existante.

Il est **particulièrement performant lorsque le raidissage est important** car, tout en tenant compte des effets locaux des nervures, il intègre les nervures au sein du système d'équations différentielles de base sans alourdir sa résolution. Ainsi, l'étude complète d'une structure complexe comme une porte marée-tempête ou une vanne segment peut, grâce à ce logiciel, être réalisée en moins de 12 heures. Ce faible laps de temps est particulièrement important pour le concepteur qui peut ainsi obtenir rapidement une confirmation du bon ou du mauvais comportement d'une structure qu'il projette.

Le principe de la méthode, reposant sur une résolution analytique des équations différentielles, **garantit l'obtention d'une solution pouvant être qualifiée d'exacte**. La solution sera d'autant plus exacte que les hypothèses de la méthode dite de D.K.J. seront mieux respectées.

Le logiciel est, de plus, **très aisé d'accès** car il n'exige pas une formation importante de la part d'un nouvel utilisateur. Les **données nécessaires sont fort réduites** et très simples à exprimer. **Les résultats sont eux par contre, très détaillés**; la résolution analytique permet en effet d'obtenir avec la même précision, les contraintes, efforts et déplacements en tout point de la structure, coques ou nervures.

Le logiciel permet, au stade actuel de son développement, la prise en compte de **pression du type Z**, celle-ci étant uniforme selon OX ou agissant de manière localisée, ainsi que de **forces longitudinales N_b et de moments M_b** concentrés aux extrémités des coques. Ces effets de bord permettent en pratique de tenir compte de forces et moments d'extrémités pouvant agir aux extrémités de la structure et ainsi permettre de simuler toutes sortes de conditions d'appuis (appui simple, encastrement, appui élastique,).

Le logiciel permet en outre **l'étude des sollicitations telles que des forces de surface X, Y, Z** variant selon X suivant des fonctions données; cela permet par exemple de superposer un effet de précontrainte aux charges extérieures classiques.

Il autorise en outre **l'introduction d'un moment de torsion aux extrémités de la structure**; ce qui assure le calcul de la vanne segment manoeuvrée d'un seul côté.

La rapidité de calcul que permet ce logiciel ainsi que sa souplesse d'utilisation nous fait penser que des développements spécifiques pour des structures particulières doivent faire partie de nos projets futurs.

BIBLIOGRAPHIE

A

- A.1 R. ARNOULD*, "*Calcul des assemblages formés de panneaux orthotrope raidis*", Faculté des Sciences Appliquées, ULg, T.F.E, 1984-85.
- A.2 S. ANGELIN, "*A Submergible Type of Tainter Gate*", IAHR, 6° assemblée, 1955.
- A.3 J. AUBERT*, "*Aménagement des nouvelles voies navigables*", AIPCN n°6, 1970.
- A.4 J. AUBERT*, "*Barrage et canalisation*", DUNOD, Paris, 1949.
- A.5 D. ALLEN, "*The Experimental and Mathematical Analysis of Arch Dams, with Special Reference to Dokan*", P.I.C.E., vol. 5, May 1956.
- A.6 P. ARISTAGHES, P. LEBRETON, F. VANSTEENKISTE*, "*Calcul des portes d'écluses maritimes*", AIPCN, bul. n° 52, 1986 .

B

- B.1 Ph. BEGUIN, "*Calcul et optimisation de portes d'écluses de grandes dimensions à double bordage*", Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées, 1982.
- B.2 M. BOUVARD*, "*Barrages mobiles et prises d'eau en rivière*", Eyrolles, Paris, 1958.
- B.3 A. L. BOUMA*, "*De berekening van de spanningsverdeling in cirkelcilindrische schaaldaken volgens de D.K.J. methode*" I.B.C. Medelingen, Avril 1956.
- B.4 R. BARES, Ch. MASSONNET*, "*Le calcul des grillages de poutres et dalles orthotropes*", DUNOD, Paris, 1966.
- B.5 D. BUSHNELL "*Computerized Analysis of Shells-Governing Equations*", Computers and Structures, Vol 18, n°3, 1984.

C

- C.1 Y. K. CHEUNG*, "*Finite Strip Method Analysis of Elastic Slabs*", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol 94, n°EM6, December 1968.
- C.2 P. CHENIN, M. COSNARD, Y. GARDON, F. ROBERT, Y. ROBERT, P. WITOMSKI, "*Mathématiques et CAO*", Hermes Publishing, 1985.
- C.3 J. COURBON*, "*Résistance des matériaux*", DUNOD, Paris, 1964.
- C.4 CAHIER DES CHARGES n° H4/83623, "*Modernisation du canal du Centre ; pont-canal à Houdeng-Aimeries*", Ministère des Travaux Publics, 1983.
- C.5 L. G. CAJOT*, "*Avant projet d'un pont-canal en béton précontraint*", Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées, TFE, 1985-86.
- C.6 CATALOGUE des rotules de grandes dimensions, S.K.F. , 1982.
- C.7 V. CHURCHILL*, "*Fourier Series and Boundary Value Problems*", Mc. Graw-Hill, New-York, 1941.

D

- D.1 N. M. DEHOUSSE, "*Les bordages raidis en construction hydraulique*", Mémoires (Nouvelle série) du centre d'Etudes, de Recherche et d'Essais Scientifiques du Génie Civil, Vol n°1, Liège, Septembre 1961.
- D.2 N. M. DEHOUSSE, J. DEPREZ*, "*Les bordages orthotropes plans, Calcul d'une porte d'écluse*", Mémoires du CERES (Nouvelle série) n°22, Juin 1967.
- D.3 N. M. DEHOUSSE, Ph. RIGO*, "*Le réglage des niveaux par barrages mobiles pour des ouvrages à faibles retenues*", Bulletin n°57 de l'AIPCN, 1987.
- D.4 N. M. DEHOUSSE*, "*Les barrages mobiles*", Université de Liège, LHCH, notes de cours, 1984.
- D.5 N. M. DEHOUSSE, J. M. VERBRUGGE, "*Au sujet du débit de la Meuse Liégeoise au droit des barrages mobiles*", Revue universelle des mines, n°7, 1967.
- D.6 L. H. DONNELL, "*The Stability of Thin Walled Tubes under Torsion*", Washington D.C. : National Advisory Committee for Aeronautics, n°479, S.1, 1933
- D.7 P. DIRAC, "*The Principles of Quantum Mechanics*", Calderon Press, Oxford, 4eme édition, 1959.
- D.9 N. M. DEHOUSSE, "*Discussion at 2d Symposium on Concrete Shell Roof Construction*", Teknisk Ukeblad Oslo, Juillet 1957.
- D.10 DI-3000, "*DI-3000, User's Guide*", Precision Visuals INC., Colorado USA, 1984.
- D.11 J.DOZO*, "*Conversion et application d'un programme ordinateur pour le calcul des ponts courbes par la méthode des bandes finies*", Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées, TFE, 1973-74.
- D.12 F. DEL POZO, "*Cubiertas laminares cilindricas formadas por una malla triangular de perfiles metalicos*", Consejo superior de investigaciones científicas, Instituto tecnico de la construccion y del cemento, n° 176, Madrid.

E

- E.1 **G. EIFFEL**, "*La tour de trois cent mètres*", Paris, Société des Imprimeries Lemercier, 1900.
- E.2 **E. ESTANA VE**, "*Thèses*", Paris, 1900.
- E.3 **S. EGGWERTZ***, "*Theory of Elasticity for Thin Circular Cylindrical Shells*", Transactions of Stockholm, n° 9, 1947.
- E.4 **M. ESCANDE***, "*Etude théorique et expérimentale de l'écoulement par vanne de fond*", Revue Générale d'Hydraulique, n°19, 20, 21, 25, 26, 27, 1938-39.
- E.5 **P. C. ERBISTE**, "*Hydraulic Gates : the State of the Art*", Water Power and Dam Constructions, April 1981.

F

- F.1 **B. FRIEDMAN, J. WILEY***, "*Principles and Techniques of Applied Mathematics*", New-York, 1956.
- F.2 **G. A. FONDER**, "*Programme Sapli 5 ; utilisation*", Service de Résistance des Matériaux, ULg, 1979.
- F.3 **W. FLÜGGE***, "*Statique et dynamique des coques*", Eyrolles, Paris, 1960.
- F.5 **G. A. FONDER**, "*Calcul des couvertures plissées et application des ordinateurs à la méthode de Yitzhaki*", Bulletin du Ceres, Vol 14, 1966.
- F.6 **G. A. FONDER**, "*Application des ordinateurs au calcul des structures*", Faculté des Sciences appliquées, U.Lg, Notes de cours, 1976.

G

- G.1 **J. E. GOLDBERG, H.L. LEVE***, "*Theory of Prismatic Folded Plate Structures*", Mémoires AIPC, Vol. 17, 1957.
- G.2 **J. L. GOMEZ NAVARRO***, "*Saltos de agua y presas de embalse*", Tome 1, 3ème édition, Madrid, 1958.
- G.3 **R. GUIAUX***, "*Vanne segment double*", Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées, TFE, 1959-60.
- G.4 **P. GABRIEL***, "*Technical and Economic Aspects of the Upgraded Utilization of the Lobe-Vltava Waterway*", 26ème congrès AIPCN, 1985.
- G.5 **E. GELISSEN, P. LOHEST, J. J. PETERS, C. ROTHILDE, N. SCHIEPERS***, "*Innovations dans la conception des nouveaux barrages de la Meuse*", 26ème congrès AIPCN, 1985.
- G.6 **B. GENTILINI***, "*Écoulement sous les vannes de fond inclinées ou à secteur*", La Houille Blanche, Mars-Avril, 1947.
- G.7 **A. GODINAS***, "*Calcul de ponts en caisson par la méthode des coques prismatiques*", Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées, TFE, 1972-73.
- G.8 **N. GUENNON**, "*Méthode de semi-discrétisation pour l'étude de la stabilité des coques*", Doctorat en Sciences Appliquées, U.lg, 1985-86.

H

- H.1 **HYDROPNEUMA**, Revue Périodique Technique Trimestrielle, n° 71, Mars 87.
- H.2 **R. HEILIG**, " *Beitrag zur Theorie der Kastenträger beleiger Querschnittsform*", Stahlbau, vol. 11, 1961.

I

- I.1 **Institut Royal Météorologique de Belgique**, " *Les Annaires Hydrologiques de Belgique*"

J

- J.1 **FR. JERMAR***, " *Barrages mobiles et automatiques*", Bulletin n° 45, AIPCN, 1957.
- J.2 **R. JENKINS**, " *Théorie et calcul des structures cylindriques circulaires*", Modern Building Techniques, Bull.1 Londres, 1947.
- J.3 **A. JAKOBSEN***, " *Die Berechnung der Zylinderschalen*", Springer-Berlin, 1958.

K

- K.1 **C. KOLLBRUNNER, S. MILOSAVLJEVIC**, " *Mitteilungen über Forschung und Konstruktion im Stahlbau*", Verschlussarten beim Stahlwasserbau, septembre 1967.
- K.2 **Th. von KARMANN***, " *Les méthodes mathématiques de l'ingénieur*", Librairie Béranger, Liège, 1949.
- K.3 **G. KIRCHHOFF***, " *Statik der Bauwerke*", Vol 1 et 2, Berlin, 1921.
- K.4 **P. A. KOLKMAN**, " *Flow-induced Gate Vibrations, Prevention of Self-excitation*", Waterlopkundig laboratorium Delft Hydraulics Laboratory, n° 164, 1976.
- K.5 **K. KLOPPEL, J. SCHEER***, " *Beulwerte*", Berlin, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, 1960.
- K.6 **L. W. KANTOROVITCH, V. I. KRYLOV**, " *Approximate Method of Higher Analysis*", P. Noordhoff LTD, Groningen, 1958.

L

- L.1 **M. N. LEVY**, " *Journal de mathématiques pures et appliquées*", Paris, 1877.
- L.2 **A. LOVE***, " *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*", Cambridge, 1944.
- L.3 **R. LAGARD***, " *Comparaison de 3 éléments finis pour coques*", Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées, TFE, 1972-73.
- L.4 **L.H.C.H.**, " *Stormvloedkering, Nieuwe Waterweg*", Rapport interne du L.H.C.H., 1987.

- L.5 A. LEJEUNE, "*Elément d'Hydro et Aéro-dynamique*", Faculté des Sciences Appliquées, U.Lg, notes de cours, 1982.
- L.6 C. S. LIN, A. C. SCRODELIS, "*Computer Program for Bridges on Flexible Bents*", U.C. SESM Report n° 71-24, University of California Berkeley, 1971.

M

- M.1 MATRA DATA VISION S.A., "*Logiciel Euclid*", France.
- M.2 Ch. MASSONNET, "*Contribution au calcul des ponts à poutres multiples*", Ann. Trav. Publ. de Belgique, 103ème année, n° 3, 5, 6, 1950.
- M.3 Ch. MASSONNET, "*Resistance des Matériaux*", Tome I et II, Sciences et Lettres, Liège, 2ème édition, 1967.
- M.4 R. MAQUOI, "*Béton Précontraint*", Faculté des Sciences Appliquées, ULg, notes de cours, 1979.
- M.5 R. MAQUOI, "*Eléments de constructions métalliques*", Faculté des Sciences Appliquées, U.Lg, notes de cours, 1985.
- M.6 C. MEYER, "*Analysis and Design of Curved Box Girder Bridges*", U.C. SESM Report n° 70-22, University of California Berkeley, 1970.

N

- N.1 E. NAUDASCHER*, "*Vibration of Gates during Overflow and Underflow*", Transactions, ASCE, Vol. 127, Part I, 1962.
- N.2 NBN-B51-001, "*Norme Belge des charpentes en acier*", Institut Belge de la Normalisation, 1977.

P

- P.1 M. A. PETITJEAN*, "*Evolution technologique des barrages mobiles sur les voies navigables*", La Houille Blanche n° 2 et 3, 1981.
- P.2 H. PRESS*, "*Stauanlagen und Wasserkraftwerke*", Berlin, 1954.
- P.3 L. PRANDTL*, "*Applied Hydro and Aeromechanics*", Dover Publications, INC. , New-York, 1957.

R

- R.1 Ph. RIGO*, "*Avant-projet d'un barrage muni de vannes à segment*", Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées, TFE, 1981-82.
- R.2 C. ROTHILDE, E. GELISSEN, "*Remplacement des barrages de la Haute-Meuse*", Rapport interne du Ministère des Travaux Publics, 1981.
- R.3 P. RADKOWSKI, "*Numerical Analysis of Equations of thin Shells of Revolution*", ARS Journal, 1962.

S

- S.1 **G. SANDER**, "*Applications de la méthode des éléments finis à la flexion des plaques*", Collection des publications des Sciences Appliquées, U.Lg, n° 15, 1969.
- S.2 **L. SCHWARTZ***, "*Théorie des distributions*", 2 vol. , Coll. Actualités Scientifiques et Industrielles, 1245, Paris, Hermann & Cie, 1966.
- S.3 **SAMCEF**, "*Système d'Analyse des Milieux Continus par Eléments Finis*", Laboratoires des Techniques Aéronautiques et Spatiales, U.Lg.
- S.4 **A. C. SCORDELIS, K. S. LO***, "*Computer Analysis of Cylindrical Shells*", Journal of A.C.I., Proc. vol. 61, n°5, 1964.
- S.5 **H.R. SHARMA***, "*Problems at High Head Gates in outlet Conduits*", 13ème congrès des grands barrages, New Delhi, Q50, R47, 1979.
- S.6 **Statical Analysis System**, "*SAS/Graph User's Guide*", SAS Institute INC. , North Carolina, USA, version 5.8, 1986.
- S.7 **W.C. SCHNOBRICH**, "*Different Methods of Numerical Analysis of Shells*", IASS, bulletin n° 94 , 1987.

T

- T.1 **S. TIMOSHENKO***, "*Théorie des plaques et des coques*", Paris et Liège, Librairie Polytechnique Ch. Béranger, 1951.
- T.2 **A. TALEB**, "*Conception d'un barrage en vue de réduire l'envasement de la retenue*", Collection des Publications de la Faculté des Sciences appliquées de l'ULg, n° 107, 1987.
- T.3 **S. TIMOSHENKO***, "*Théorie de la flexion, torsion et flambage des barres à parois minces et à section ouverte*", L'ossature Métallique, n° 7-8, 1947.

V

- V.1 **A. VIERENDEEL***, "*Cours de stabilité des constructions*", 7 tomes, Louvain-Paris, DUNOD, 1907.
- V.2 **B.Z. VLASSOV***, "*Pièces longues en voiles minces*", Eyrolles, Paris, 1962.
- V.3 **J. VERBRUGGE***, "*Etude hydraulique des barrages mobiles de la Meuse*", Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées, TFE, 1965-66.
- V.4 **E. VERSTRAETEN***, "*Etude des conditions de fonctionnement d'un réseau d'irrigation*", Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées, TFE, 1985-86.

W

- W.1 **G. WICKERT, G. SCHUMAUER***, "*Stahlwasserbau*", Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New-York, 1971.
- W.2 **R. WÜTRICH**, "*Projet d'aménagement hydro-électrique du Rhône*", Revue des Ingénieurs et architectes Suisses n° 13, Juin 1984.

- W.3 C.S. WHITNEY*, *"The Design of Cylindrical Concrete Shell Roof"*, ASCE, Manual of engineering practice, New-York, 1952.

Y

- Y.1 D. YITZHAKI, *"Prismatic and Cylindrical Sheel Roofs"*, Haïffa, Science Publishers Haïffa, 1958.

Z

- Z.1 O. C. ZIENKIEWICZ, *"La méthode des éléments finis appliquée à l'art de l'ingénieur"*, Mc Graw Hill Book Compagny, 1973.

* Ces livres, articles et documents sont disponibles à l'Unité de Documentation Ferdinand Campus de l'Université de Liège, Institut du Génie Civil.