

Hétérogénéité des échelles spatio-temporelles d'écoulements hydrosédimentaires et modélisation numérique

Handling very different space- and time-scales in numerical modelling of flows with sediment transport

BENJAMIN J. DEWALS*, SÉBASTIEN ERPICUM, PIERRE ARCHAMBEAU, SYLVAIN DETREMBLEUR ET MICHEL PIROTON

Université de Liège (Département ArGenCo) - Chemin des Chevreuils, 1 - Bat B52/3+1, 4000 Liège, Belgique
Tél : +32 (0)4 3669283, Fax : +32 (0)4 3669558, e-mail : B.Dewals@ulg.ac.be, Michel.Pirotton@ulg.ac.be

* Fonds de la Recherche Scientifique F.R.S.-FNRS

Les modèles numériques hydrosédimentaires doivent être aptes à prendre en compte la très grande hétérogénéité des échelles spatiales et surtout temporelles affectant les divers phénomènes à simuler. Pour ce faire, différents niveaux de couplage entre sous-modèles doivent être prévus (calcul hydrodynamique stationnaire, quasi stationnaire ou instationnaire complet). Outre une discussion du formalisme mathématique sous-jacent, la présente communication décrit le système de modélisation WOLF, développé à l'Université de Liège et permettant de couvrir la majorité des échelles de temps pertinentes au moyen d'approches numériques spécifiquement adaptées. L'applicabilité du système de modélisation est illustrée sur base de plusieurs exemples de simulations relatives à la conception et aux modes de gestion d'un grand ouvrage hydroélectrique en Inde.

The numerical models for flow and sediment transport must be able to handle properly the wide range of space- and time-scales relevant for the processes to be modelled. For this purpose different levels of numerical coupling between the flow solver and the sediment transport model must be considered. Besides a short review of the mathematical background, the present paper describes the modelling system WOLF, developed at the University of Liege and enabling to handle the vast majority of time scales characterizing practical applications of flows with sediment transport, by means of specific numerical techniques. The applicability of the modelling system is demonstrated based on several examples of simulations related to the design and the operation of a large hydroelectric project in India.

I ■ INTRODUCTION

La problématique de la gestion des sédiments revêt une importance croissante dans nombre de projets de construction de barrages et de complexes hydroélectriques. L'impact des apports en matériaux solides se manifeste tant par des effets à long terme (réduction de la capacité du réservoir) que par des conséquences à plus court terme (usure prématurée des turbines). C'est pourquoi, l'étude détaillée des effets sédimentaires s'impose de plus en plus tôt dans la conception de nouveaux aménagements et demeure également une préoccupation tout au long de l'exploitation des ouvrages dans une perspective de gestion sécuritaire et durable.

Dans un tel contexte, il convient de disposer d'outils d'analyse prédictifs, sous la forme notamment de modèles numériques, à même de fournir des éléments quantitatifs et rationnels d'aide à la décision en la matière. En particulier, les modèles numériques à considérer doivent se montrer aptes à relever le défi de la prise en compte efficace et fiable de la très grande hétérogénéité des échelles spatiales et surtout temporelles affectant les divers phénomènes à simuler, qu'il s'agisse, par exemple, de l'alluvionnement d'une

retenue endéans plusieurs décennies ou des remaniements topographiques intenses au cours d'une opération de chasse programmée sur quelques heures. De plus, le type d'écoulements à reproduire, en particulier d'éventuels changements de régime, n'est pas sans conséquences sur la nature du couplage à assurer entre la résolution des sous-modèles hydrodynamique et sédimentaire, ainsi que sur les schémas numériques de résolution à mettre en œuvre pour produire une solution stable et précise en un temps CPU réaliste.

Outre une brève discussion du formalisme mathématique adapté à la description d'écoulements avec transport solide, la présente communication décrit le système de modélisation WOLF, développé à l'Université de Liège, notamment dans l'optique d'apporter une réponse aussi complète que possible aux besoins de modélisation hydrosédimentaire à différentes échelles temporelles. Ce système de modélisation offre une grande flexibilité dans les niveaux de couplage entre sous-modèles et les schémas d'intégration temporelle implémentés (stationnaire, quasi stationnaire ou instationnaire complet), permettant in fine de couvrir la majorité des échelles de temps pertinentes au moyen d'approches numériques adaptées.

II ■ MODÈLE MATHÉMATIQUE

● II.1 EQUATIONS DE BILAN POUR L'ÉCOULEMENT

Pour bon nombre d'applications réelles, une approche bidimensionnelle offre encore le meilleur compromis entre réalisme et coût de mise en œuvre. La modélisation hydrodynamique repose dès lors sur les équations de continuité et de conservation de la quantité de mouvement intégrées sur la hauteur d'eau, dont la forme conservative s'écrit comme suit [1, 2] :

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{f}_d}{\partial x} + \frac{\partial \bar{g}_d}{\partial y} = \bar{S}_0 - \bar{S}_f \quad (1)$$

avec $\bar{s} = [h \quad hu \quad hv]^T$, le vecteur des inconnus conservatives. \bar{f} et \bar{g} représentent les flux advectifs et de pression dans les directions x et y , alors que \bar{f}_d et \bar{g}_d sont les flux diffusifs :

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{pmatrix}, \quad \bar{g} = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix},$$

$$\bar{f}_d = -\frac{h}{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}, \quad \bar{g}_d = -\frac{h}{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{pmatrix}. \quad (2)$$

\bar{S}_0 et \bar{S}_f désignent respectivement le terme de pente de fond et celui de frottement :

$$\bar{S}_0 = -gh \begin{bmatrix} 0 & \partial z_b / \partial x & \partial z_b / \partial y \end{bmatrix}^T,$$

$$\bar{S}_f = \Delta \Sigma \begin{bmatrix} 0 & \tau_{b,x} / \rho & \tau_{b,y} / \rho \end{bmatrix}^T. \quad (3)$$

Les notations suivantes ont été employées : t représente le temps, x et y les coordonnées spatiales, h la profondeur d'écoulement, u et v les composantes de vitesse, z_b l'altitude du fond, g l'accélération de la gravité, ρ la densité de l'eau, $\tau_{b,x}$ et $\tau_{b,y}$ les composantes de la tension de cisaillement au fond, σ_x et σ_y les tensions turbulentes normales, et τ_{xy} la tension turbulente de cisaillement. Comme le montre Hervouet (2003, p. 57) [2], $\Delta \Sigma = \sqrt{1 + (\partial z_b / \partial x)^2 + (\partial z_b / \partial y)^2}$ rend compte de l'accroissement de la surface de frottement sur une topographie irrégulière [3].

● II.2 EQUATION DE BILAN POUR LE TRANSPORT SOLIDE

Afin de modéliser l'évolution d'un fond mobile, il convient de compléter le modèle hydrodynamique par une équation de continuité pour les matériaux solides (équation d'Exner), qui traduit l'équilibre entre l'évolution temporelle du niveau du lit et les débits solides [4] :

$$(1-p) \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial q_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{by}}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

où z_b représente le niveau du fond, p désigne la porosité du lit, tandis que q_{bx} et q_{by} sont les composantes du débit solide. Ce modèle demeure très général, puisqu'il permet de représenter à la fois du charriage et du transport total, selon la relation de fermeture utilisée pour évaluer le débit solide (granulométrie uniforme).

En revanche, la plupart des relations de fermeture utilisées pour calculer q_{bx} et q_{by} consistent à évaluer le débit solide par une loi de capacité de transport (simple relation algébrique) appliquée aux caractéristiques locales et instantanées de l'écoulement. Dans de telles conditions, le modèle n'est pas à même de rendre compte d'un éventuel délai d'adaptation (ni d'une distance d'adaptation) entre une variation des conditions hydrodynamiques et la variation correspondante du débit solide, lequel est donc supposé s'adapter instantanément. Cette hypothèse est généralement plus appropriée pour modéliser le transport par charriage que celui par suspension. Ce dernier peut être valablement représenté au moyen d'une équation d'advection-diffusion additionnelle, mais cet aspect de la modélisation ne sera pas détaillé par la suite.

En fonction des temps caractéristiques des processus hydrosédimentaires à simuler, il appartient au modélisateur de sélectionner le mode le plus adapté de couplage numérique pour la résolution des équations (1) et (4). La section suivante, ainsi que le Tableau 1, comparent les principales approches possibles.

III ■ NIVEAUX DE COUPLAGE POUR LA RÉOLUTION NUMÉRIQUE

● III.1 APPROCHE N° 1 : MODÈLE TOTALEMENT COUPLÉ ET INSTATIONNAIRE

L'approche la plus générale pour la résolution du système constitué par les équations (1) et (4) revient à intégrer dans le temps les quatre équations de manière couplée (Tableau 1). A chaque pas de temps, les champs hydrodynamiques sont calculés, puis une loi de capacité de transport empirique permet d'obtenir la valeur du débit solide en chaque nœud. Le niveau du lit est ensuite mis à jour localement grâce à l'équation d'Exner et, seulement au terme de cette remise à jour du niveau du lit, le pas de temps suivant est initié. Un couplage maximum est dès lors assuré entre l'évolution des champs hydrodynamiques et sédimentaires.

Ce couplage étroit au sein de la résolution numérique influence par ailleurs le mode de discrétisation des équations afin d'assurer la stabilité numérique du système complet. Le schéma de discrétisation spatiale des équations hydrodynamiques doit le cas échéant être modifié. De plus, en raison du critère de stabilité restreignant le pas de temps pour une intégration temporelle explicite, le coût de calcul d'une telle approche s'avère très élevé, ce qui ne la rend applicable que pour des simulations à relativement court terme.

● III.2 APPROCHE N° 2 : HYDRODYNAMIQUE QUASI STATIONNAIRE ET ÉVOLUTION TOPOGRAPHIQUE INSTATIONNAIRE

Les modélisations hydrosédimentaires à très long terme et à grande échelle (ex. alluvionnement d'un réservoir) requièrent des ressources informatiques d'une telle ampleur qu'il n'est guère envisageable aujourd'hui d'exploiter à cette fin une résolution numérique totalement couplée. C'est pourquoi, l'approche communément privilégiée pour ce type d'étude à long terme consiste à décrire l'hydrodynamique par une succession d'écoulements stationnaires, tandis que seules les évolutions topographiques sont résolues de manière instationnaire (Tableau 1). Cette fois, les célérités hydrodynamiques n'influencent plus la détermination du pas de temps, ce qui évite de pénaliser le temps de calcul de façon exagérée par rapport aux échelles temporelles sédimentaires à modéliser. En effet, dans de telles applications, les échelles de temps caractérisant l'hydrodynamique ne présentent généralement pas un intérêt direct et sont donc utilement filtrées par une approche quasi stationnaire. Le coût du calcul se

voit de ce fait drastiquement réduit et, moyennant certaines restrictions précisées ci-après, la qualité du résultat n'est pas mise en péril.

D'un point de vue physique, le bien-fondé de cette approche provient de la différence significative entre la vitesse de propagation des perturbations hydrodynamiques et celle des perturbations de nature sédimentaire. La première étant en règle générale nettement supérieure à la seconde, les modifications du niveau du fond s'établissent au terme d'un laps de temps beaucoup plus long que celui nécessaire à l'écoulement pour s'adapter à une nouvelle morphologie du lit. Il est donc permis d'admettre une adaptation quasi instantanée de l'écoulement aux remaniements topographiques. Sur le plan mathématique, ces vitesses de propagation sont fournies par les valeurs propres de la matrice convective associée au système d'équations considéré. Selon l'approche n° 2, seule la célérité de l'équation d'Exner intervient. Elle peut être aisément évaluée, moyennant une hypothèse simple sur la loi de capacité de transport (ex. loi dépendant uniquement de la vitesse : $q_b = q_b(u)$) [4] :

$$\frac{c_b}{\sqrt{gh}} = \frac{1}{1-p} \frac{1}{h} \frac{dq_b}{du} \frac{Fr}{1-Fr^2} \quad (5)$$

Comme le montre la Figure 1, cette célérité approchée ne fournit une approximation valable de la célérité exacte (correspondant à l'approche n° 1) qu'en dehors de la plage d'écoulement transcritique (environ $0.7 < Fr < 1.3$). Pour ce dernier type d'écoulement, seule l'approche n° 1 demeure valable.

Tableau 1 : Descriptif des trois principales approches pour la résolution de modèles hydrosédimentaires, du processus décisif dans l'évaluation du pas de temps et des conditions de validité de chaque approche.

	Hydrodynamique	Equation d'Exner	Pas de temps ...	Validité
Approche n° 1	Résolution instationnaire et totalement couplée		... conditionné par l'hydrodynamique	Sans restriction
Approche n° 2	Succession de solutions stationnaires	Résolution instationnaire	... conditionné par le sédimentaire	Pas d'écoulement transcritique
Approche n° 3	Succession de solutions stationnaires	Résolution stationnaire itérative	—	

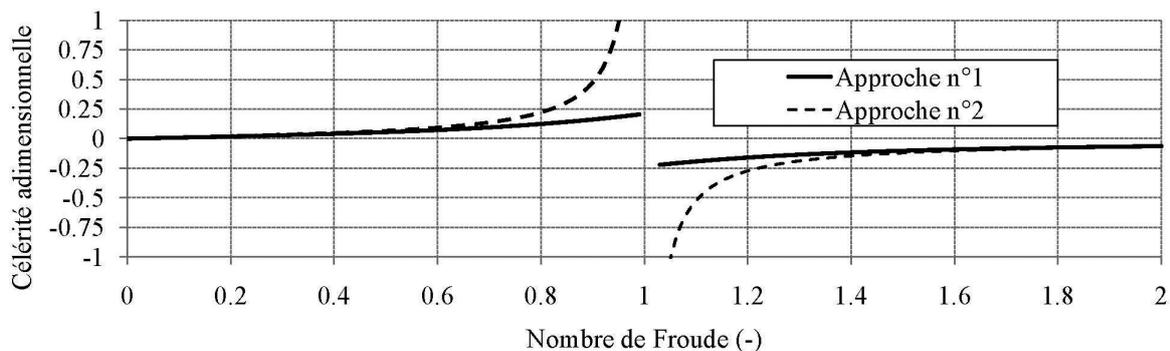


Figure 1 : Comparaison de la célérité < sédimentaire > du modèle découplé (approche n° 2) et du modèle complet (approche n° 1) en fonction du nombre de Froude.

● III.3 APPROCHE N° 3 : RECHERCHE ITÉRATIVE DU PROFIL D'ÉQUILIBRE

Qu'il s'agisse de l'approche n° 1 ou n° 2, la résolution instationnaire de l'équation d'Exner donne accès à l'évolution temporelle de l'élévation du lit. Toutefois, pour certaines applications, cette information transitoire ne s'avère pas indispensable et seule la topographie finale est recherchée (profil d'équilibre). Dans ce cas, un gain en temps de calcul supplémentaire peut être engrangé grâce à la mise en œuvre d'un calcul itératif de la solution stationnaire de l'équation d'Exner. Ce processus itératif repose sur l'analogie formelle existant entre les formes stationnaires de l'équation d'Exner et de l'équation de continuité hydrodynamique :

$$\frac{\partial q_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{by}}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) = 0. \quad (6)$$

Une fois que les champs hydrodynamiques hu et hv sont connus, une solution de l'équation d'Exner est donnée par : $q_{bx} = \alpha hu$ et $q_{by} = \alpha hv$, où α désigne un coefficient de proportionnalité constant déterminé par les conditions limites (concentration en apports solides). Dès lors, le débit solide vaut :

$$q_b = \alpha h \sqrt{u^2 + v^2} = \phi(h, u, v) \quad (7)$$

où ϕ représente la loi algébrique de capacité de transport de l'écoulement, fournissant le débit solide en fonction des champs hydrodynamiques. Supposant ensuite que le niveau de surface libre z_s demeure inchangé, la hauteur h peut s'écrire $h = z_s - z_b$, de sorte que la relation (7) devienne une équation algébrique ayant pour seule inconnue le niveau z_b du fond à l'équilibre. Elle permet donc de mettre à jour localement le niveau du fond pour vérifier la condition d'équilibre (7). Vu qu'en réalité le niveau de surface libre est affecté par la modification topographique, le processus consiste à itérer sur les deux étapes (calcul de l'hydrodynamique stationnaire et résolution de l'équation (7)) jusqu'à stabilisation du niveau du fond.

IV ■ LE SYSTÈME DE MODÉLISATION WOLF

Le système de modélisation WOLF repose sur une technique volumes finis pour résoudre les équations hydrodynamiques et sédimentaires, assurant une précision spatiale et temporelle du second ordre sur base d'un maillage cartésien (éventuellement multi-blocs [5]). Un schéma numérique décentré de type « Flux Vector Splitting » est utilisé pour la résolution du sous-modèle hydrodynamique ainsi que pour le modèle hydrosédimentaire complet (approche n° 1). La stabilité de cette discrétisation a été démontrée par une étude théorique de type von Neumann [3]. L'adéquation entre l'évaluation numérique du terme de pente de fond et celui de pression est assurée, tandis que les transitions entre mailles immergées et émergées sont modélisées sans création ni perte de volume [5].

Les pertes par frottement sur le fond et sur les parois latérales sont prises en compte de manière distribuée dans l'espace. En outre, plusieurs modèles de turbulence sont implémentés, depuis de simples relations de fermeture algébriques, jusqu'à un modèle k - distinguant deux échelles spatiales de fluctuations, associées aux effets de diffusion turbulente dans les plans vertical et horizontal [5]. Plusieurs lois de capacité de transport sont disponibles, reproduisant aussi bien du transport par charriage que du transport total. Un processus itératif spécifique permet la gestion de transitions entre zones de topographie érodable et non érodable. De plus, les débits solides considérés au sein des modèles hydrosédimentaires (approches n° 1 et n° 2) tiennent également compte du transport induit par la gravité (instabilités de pente). Pour simple qu'il soit, ce modèle d'instabilités de pentes rend compte des effondrements soudains de berges qui se produisent notamment dans le cas d'opérations de chasse. De nombreux exemples de validation du système de modélisation attestent de son applicabilité, sa fiabilité et sa précision [3, 5-7].

V ■ APPLICATION

Au cours de cette section, l'applicabilité du système de modélisation est illustrée par le biais de plusieurs exemples réels relatifs à la fois au dimensionnement et à l'optimisation des modes de gestion d'un important aménagement hydroélectrique en Inde. Le projet considéré comporte la construction d'un grand barrage en enrochement (hauteur : 163 m ; longueur de crête : 500 m) créant une retenue de plus de 40 km de long. Une usine hydroélectrique sera installée au pied du barrage (équipement : 800 MW ; 784 m³/s) et un dessableur est prévu pour limiter l'abrasion des turbines par les matériaux solides. Etant donné le caractère montagneux du bassin versant, des quantités importantes d'apports solides seront piégées dans la retenue pendant les saisons de mousson. C'est pourquoi, dans un premier temps, le système de modélisation est exploité afin de caractériser la dynamique d'alluvionnement du réservoir (volume déposé, délai). Dans un second temps, la possibilité de récupérer de la capacité de stockage par ouverture des organes de vidange (chasse) a été étudiée en vue d'évaluer l'efficacité de telles opérations. La plupart des modélisations numériques décrites ci-après font partie d'une étude confiée à l'Université de Liège par EDF-CIH.

L'approche n° 2 s'impose pour la simulation à très long terme de la dynamique d'alluvionnement du réservoir. L'hydrologie du site révèle des variations saisonnières fortes, caractérisées notamment par un débit en période de mousson dix fois supérieur à celui du reste de l'année et des apports solides près de 200 fois plus importants en période de mousson [8]. La modélisation a donc été menée en simulant uniquement la juxtaposition de saisons de mousson, seule période de l'année générant des apports solides significatifs. Comme le met en évidence la *Figure 2*, l'évolution instationnaire du front de dépôts (caractéristique des classes granulométriques les plus grossières) est fortement influencée par la géométrie bidimensionnelle du réservoir, ce qui confirme l'utilité de recourir à une modélisation 2D.

Au terme de la simulation, un profil d'équilibre de la retenue est atteint. Ce dernier résultat pouvait également être obtenu directement par le biais de l'approche n° 3, mais sans que celle-ci ne donne accès à l'évolution temporelle des dépôts. Néanmoins, par cubage du volume final de dépôts et moyennant une hypothèse sur les apports annuels, le temps total d'alluvionnement aurait pu être déduit. En l'occurrence, le temps d'envasement est évalué à environ 1660 jours de crue, c.à.d. au terme d'environ 18 ans.

Au cours de l'opération de chasse, exécutée endéans une période de quelques jours, des écoulements transcritiques sont susceptibles de se développer localement. Ce calcul doit donc garantir un couplage serré entre la partie hydrodynamique du modèle et la simulation de transport des sédiments, si bien que seule l'approche n° 1 s'applique ici. A la frontière amont du réservoir, un hydrogramme typique d'une période

de chasse est imposé, correspondant à une phase de décrue, ainsi que des débits solides en équilibre avec l'hydrodynamique. A l'aval, une consigne d'évolution temporelle du niveau des vannes (abaissées de 14 m pendant environ 150 h) est prescrite comme condition limite. La condition initiale topographique correspond à la bathymétrie finale atteinte après la simulation d'alluvionnement du réservoir.

La Figure 3 montre l'évolution temporelle de la topographie du réservoir. Le taux maximum d'évacuation des volumes de sédiments est atteint entre le quatrième et le cinquième jour de chasse. La capacité totale de stockage pépérée est estimée à environ cinq millions de mètres cubes. Les dépôts sur le chenal d'approche ne sont cependant pas complètement effacés parce que l'effet érosif intense induit par l'accélération de l'écoulement demeure concentré dans un nouveau chenal créé à proximité du mur de barrage.

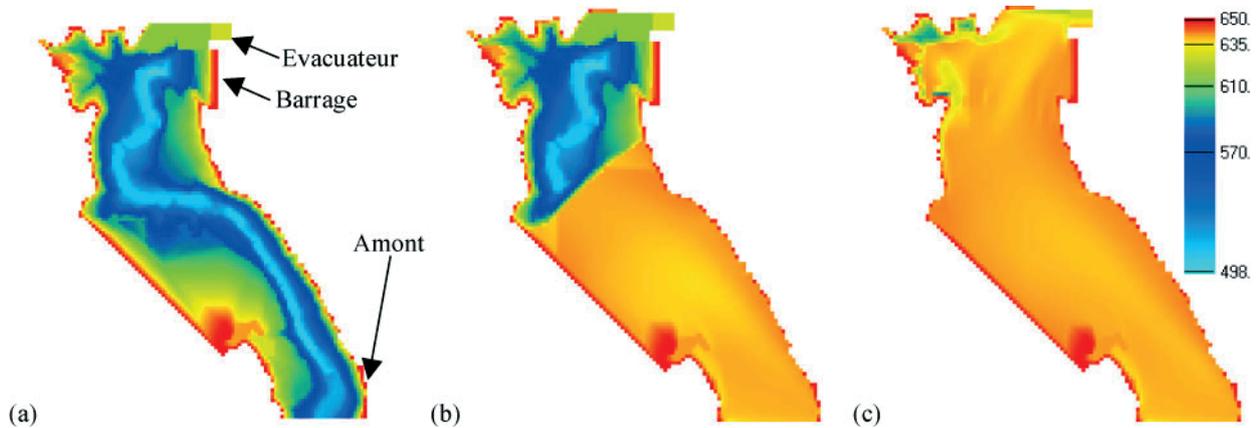


Figure 2 : Vue en plan de la topographie aval de la retenue (m) - (a) avant que l'alluvionnement ne l'atteigne, i.e. avant l'équivalent de 1100 jours de crue ; (b) après l'équivalent de 1400 jours de crue ; (c) au terme de 1660 jours de crue.

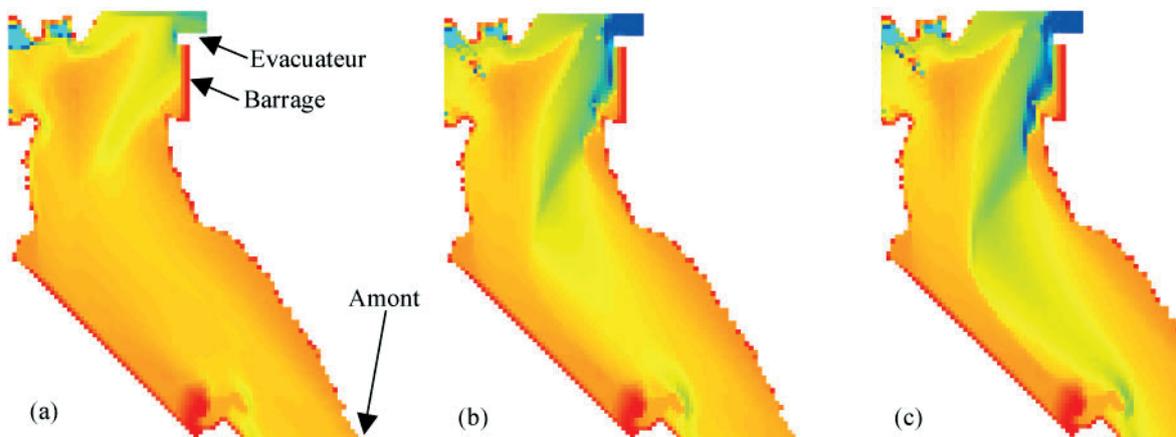


Figure 3 : Topographie (m) du réservoir à l'issue de (a) trois jours, (b) six jours et (c) neuf jours de chasse.

VI ■ CONCLUSION

Le système de modélisation WOLF offre trois approches distinctes pour la simulation numérique d'écoulements avec transport solide, donnant ainsi accès à la technique de résolution la plus appropriée et la plus efficace pour chaque application en fonction des échelles de temps pertinentes dans le cas considéré. L'applicabilité du système de modélisation a été montrée sur base de plusieurs exemples de simulations relatives à un grand projet hydroélectrique. Typiquement, les trois volets suivants du comportement hydrosédimentaire d'un réservoir peuvent être modélisés adéquatement :

- la prédiction de la bathymétrie d'équilibre à long terme du réservoir, par une technique itérative ;
- la modélisation de la séquence d'alluvionnement du réservoir, par un modèle découplé ;
- la simulation d'opérations de chasses, par une modélisation hydrosédimentaire totalement couplée.

Bien que la précision des résultats reste conditionnée par les incertitudes affectant inévitablement les hypothèses sur les données d'entrée, entre autres en ce qui concerne l'hydrologie et les apports en sédiments (volumes et granulométrie), le système de modélisation se révèle néanmoins à même de produire des éléments quantitatifs essentiels pour orienter certaines décisions cruciales tant au stade de la conception que de la gestion de grands ouvrages hydrauliques affectés par des processus de dépôts et d'érosion.

VII ■ REMERCIEMENTS

Les auteurs adressent leurs remerciements à Monsieur Paul Gaudron et Monsieur Patrice Marietta, EDF- Centre d'Ingénierie Hydraulique, pour la fourniture des données et la collaboration fructueuse.

VIII ■ RÉFÉRENCES

- [1] CHAUDHRY M.H. (1993) — *Open-Channel Flow*, Englewood Cliffs : Prentice Hall. 483 p
- [2] HERVOUET J.-M. *Hydrodynamique Des Écoulements À Surface Libre - Modélisation Numérique Avec La Méthode Des Éléments Finis*. 2003, Paris : Presses De L'ecole Nationale Des Ponts Et Chaussées. 311 p
- [3] DEWALS B. *Une Approche Unifiée Pour La Modélisation D'écoulements À Surface Libre, De Leur Effet Érosif Sur Une Structure Et De Leur Interaction Avec Divers Constituants*, 2006, Thèse De Doctorat, Université De Liège. 636 p
- [4] FÄH R. (1997) — Numerische Simulation der Strömung in offenen Gerinnen mit beweglicher Sohle. *Mitteilungen der Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie*, ed. D. Vischer., Zürich. **Vol 153**
- [5] ERPICUM S. (2006) — *Optimisation Objective De Paramètres En Écoulements Turbulents À Surface Libre Sur Maillage Multibloc*, Thèse De Doctorat, Université De Liège. 356 p
- [6] DEWALS B.J., ERPICUM S., ARCHAMBEAU P., DETREMBLEUR S., PIROTON M. (2006) — Depth-Integrated Flow Modelling Taking Into Account Bottom Curvature. *J. Hydraul. Res.* **44(6)** pp. 787-795
- [7] DEWALS B.J., ERPICUM S., ARCHAMBEAU P., DETREMBLEUR S., PIROTON M. (2006) — Numerical Tools For Dam Break Risk Assessment : Validation And Application To A Large Complex Of Dams. *Improvements in reservoir construction, operation and maintenance*, H. Hewlett (ed.), Thomas Telford. pp. 272-282
- [8] SINGH S.P. (1999) — *Mathematical Model Studies On Sedimentation Of Bhakra Reservoir*, In *Silting Problems In Hydro Power Plants*. New Delhi : Central Board of Irrigation and Power.