Quadrature n° ?? (??) 1-5

Sur les démonstrations du théorème de Borel-Lebesgue

par Samuel NICOLAY*

Résumé.

Nous considérons ici le théorème de Borel-Lebesgue sur le plan historique. En particulier, nous présentons les démonstrations essentiellements dues à Cousin et Lebesgue. Finalement, nous donnons une démonstration permettant d'adapter la démonstration de Lebesgue au cas multidimensionnel sans faire appel à des outils sophistiqués tels que le théorème de Tychonov.

I Introduction

Le théorème de Borel-Lebesgue affirme qu'un ensemble de $\mathbb{R}^n$ est borné et fermé si et seulement s'il est compact, ce qui signifie que de tout recouvrement de cet ensemble par des ouverts, on peut en extraire un recouvrement fini (cf. Section III), la principale difficulté consistant à montrer qu'un ensemble borné et fermé est compact.

Ce théorème classique est d'une grande importance ; Borel lui-même souhaitait l'appeler « premier théorème fondamental de la théorie de la mesure » [4]. Il est aussi appelé theorème de Heine-Borel (particulièrement chez les non francophones) ou théorème de Borel-Schoenflies (comme suggéré par Lebesgue [4]). Le seul nom indiscociable de ce résultat est celui de Borel qui en 1895 écrivait « si l'on a sur une droite [1] une infinité d'intervalles partiels, tels que tout point de la droite soit intérieur à l'un au moins des intervalles, on peut déterminer effectivement un nombre limité [2] d'intervalles choisis parmi les intervalles donnés et ayant la même propriété » [1]. De nos jours, ce théorème s'énonce plutôt comme suit : De tout recouvrement d'une partie bornée et fermée de $\mathbb{R}$ par des ouverts, on peut en extraire un recouvrement fini. Ce résultat est très semblable à l'énoncé moderne, si ce n'est qu'il ne considère que l'espace euclidien de dimension un.

Il existe principalement deux manières répandues pour démontrer ce théorème. La première méthode, certainement la plus fréquente, est due à Lebesgue [5] ; les démonstrations de Borel [1], Schoenflies [12] ou Young [13] reposent sur des idées similaires. La seconde procède par l'absurde et a été utilisée pour la première fois par Cousin [3]. Remarquons que si la démonstration de Cousin s'adapte directement au cas multidimensionnel (originellement, elle traitait déjà du cas bidimensionnel), il n'en va pas de même pour celle de Lebesgue, qui comme Borel, n'a originellement considéré que le cas unidimensionnel. La généralisation peut bien sûr s'obtenir grâce au lemme du tube [8] ou au théorème de Tychonov [10], stipulant qu'un produit fini de compacts est compact (au sens de la topologie produit). Sans surprise, il existe des approches plus exotiques (voir par exemple [7], où il est montré que l'espace des suites binaires équipé de la métrique adéquate est compact) que nous n'aborderons pas dans ce très court traité.

Dans ce travail, nous commençons par introduire brièvement l'histoire de ce théorème, avant d'en donner deux démonstrations, calquant les approches de Cousin et Lebesgue respectivement. Finalement, puisque la seconde ne traite que du cas unidimensionnel, nous en proposons une extension permettant d'obtenir le cas général ; l'idée est de se passer des outils, certes puis-

* Université de Liège, S.Nicolay@uliege.be

1. Par droite, Borel entend un segment comprenant ses extrémités, c'est-à-dire un intervalle borné et fermé.
2. Il faut comprendre un nombre fini.

sants mais très abstraits de la topologie, tels le lemme du tube ou le théorème de Tychonov. Il s'agit ici d'une simple récurrence reprenant les mêmes arguments que la démonstration de Lebesgue. Originellement, notre objectif avec cette généralisation était d'obtenir le théorème de Borel-Lebesgue dans le plan complexe en n'utilisant que des outils disponibles pour un étudiant de niveau L2 [9]. Bien que nous n'ayons rencontré cette démonstration nulle part ailleurs, nous n'osons en réclamer la parternité ; vu sa simplicité et le nombre d'ouvrages traitant de ce sujet, il est possible qu'elle fasse partie de la tradition mathématique.

II Un peu d'histoire

Pour cette section, nous reprenons principalement des éléments présentés dans [4], agrémentés de quelques publications plus récentes que nous préciserons dans le texte.

Le théorème de Borel-Lebesgue est aussi parfois appelé théorème de Heine-Borel. Dugac répertorie six noms que l'on peut directement associer à ce résultat, cette liste se divisant elle-même en deux catégories. D'une part, Borel, Lebesgue et Schoenflies qui ont directement contribué à la démonstration et d'autre part, Dirichlet, Heine et Weierstraß qui ont simplement utilisé un résultat similaire, mais antérieurement au résultat de Borel. Bien entendu, cette liste est loin d'être exhaustive ; d'autres mathématiciens comme Baire, Cauchy, Goursat, Pincherles, Stokes ou von Seidel (et certainement beaucoup d'autres encore) mériteraient aussi d'avoir leur nom associé à ce théorème [4, 2].

La première personne qui énonce et établit un résultat de ce type est indiscutablement Borel [1]. Sa démonstration utilise les nombres transfinis de Cantor, mais ne porte que sur des recouvrements dénombrables à une dimension. L'année de la publication du résultat de Borel, Cousin prouve un résultat similaire en dimension deux [3] pour des recouvrements ouverts arbitraires (i.e. non nécessairement dénombrables).

En 1900, Schoenflies publie un rapport sur les récents développement en topologie générale pour la DMV (Deutsche Mathematiker-Vereinigung) [12] qui va populariser le résultat de Borel, tout en prétendant qu'il « généralise un résultat connu de Heine » (en allemand dans le texte). C'est donc à Schoenflies que l'on doit l'association du théorème au nom de Heine. Schoenflies expliquera que pour lui, le théorème de continuité uniforme de Heine (qui est plutôt dû à Dirichlet [6], que Heine aurait omis de citer) est le pendant géométrique du résultat de Borel ; une association que Lebesgue jugera ridicule [4]. Cette affiliation a donc été source de discorde. Traduisons par exemple une phrase de [11] à ce sujet (en anglais dans le texte) : « Alors que Heine a été considéré pour un théorème qu'il n'a pas démontré, Cousin a été négligé pour un théorème qu'il a établi ».

En 1902, Young fournit une démonstration pour le cas non dénombrable [13] qui va populariser la dénomination « théorème de Heine-Borel ». Lebesgue quant à lui n'avait pas remarqué que Borel supposait que le recouvrement était dénombrable ; il publiera sa propre version du théorème, sans cette hypothèse, en 1904 [5]. La démonstration de Lebesgue semble universellement considérée comme la plus élégante ; elle est sans surprise la plus répandue dans les livres traitant du sujet, bien qu'elle ne soit valide qu'en dimension un.

Enfin, remarquons qu'aucun de ces auteurs n'utilise explicitement le terme « compact », puisque ce dernier a été introduit par Fréchet en 1906 [11].

III La structure classique du théorème

Les démonstrations classiques du théorème de Borel-Lebesgue suivent toutes le même schéma que nous allons ici détailler. La différence réside dans la manière de montrer qu'un produit cartésien d'intervalles compacts est compact ; c'est ce qui nous occupera dans les sections suivantes.

Établissons d'abord quelques conventions. Un pavé de $\mathbb{R}^n$ désignera un produit cartésien de n intervalles bornés de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}^*$ désignera l'ensemble des nombres naturels non nuls $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Définition III.1. *Étant donné un ensemble E de $\mathbb{R}^n$, un recouvrement ouvert $(U_j)_{j\in J}$ de E est la donnée d'un ensemble J (non nécessairement dénombrable) et pour tout $j \in J$ d'un ensemble ouvert U_j de $\mathbb{R}^n$ tels que $E \subset \cup_{j\in J} U_j$.*

Définition III.2. *Un ensemble K de $\mathbb{R}^n$ est compact si de tout recouvrement ouvert de K on peut en extraire un recouvrement fini. En d'autres termes, K est compact lorsque pour tout recouvrement ouvert $(U_j)_{j\in J}$ de K, il existe une partie finie J' de J telle que $K \subset \cup_{j\in J'} U_j$.*

Le théorème repose sur trois résultats préliminaires. Le plus délicat est certainement celui qui affirme que tout pavé fermé de $\mathbb{R}^n$ est compact. C'est lui qui nous intéressera dans la suite. Établissons les deux autres.

Lemme III.3. *Si K est un ensemble compact et si F est un ensemble fermé inclus dans K, alors F est également compact.*

Démonstration. Soit $(U_j)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de F. Si j_0 est un élément qui n'appartient pas à J [3], posons $U_{j_0} = \complement F$ (où $\complement F$ désigne le complémentaire de F) et $J_0 = J \cup \{j_0\}$. Puisque $(U_j)_{j\in J_0}$ est un recouvrement ouvert de K, il existe une partie finie J' de J_0 telle que $K \subset \cup_{j\in J'} U_j$. On a ainsi $F \subset \cup_{j\in J'} U_j$ et même $F \subset \cup_{j\in J''} U_j$ avec $J'' = J' \setminus \{j_0\}$, puisque F et U_{j_0} sont disjoints. Dès lors, J'' étant une partie finie de J, on peut conclure. □

Remarque III.4. *Sa démonstration ne faisant appel à aucune propriété de l'espace euclidien, le résultat précédent est valable en toute généralité.*

Lemme III.5. *Si K est un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et x un point n'appartenant pas à K, alors il existe deux ensembles ouverts disjoints contenant K et x respectivement.*

Démonstration. Étant donné $x' \in K$, soit $I_{x'}$ et $I'_{x'}$ deux pavés ouverts disjoints contenant x' et x respectivement. Puisque $(I_{x'})_{x'\in K}$ est un recouvrement ouvert de K, on peut en extraire un recouvrement fini. Il existe donc un nombre fini de points $x_1, \dots, x_m$ de K ($m \in \mathbb{N}^*$) tels que $K \subset \cup_{j=1}^m I_{x_j}$.

Posons alors $U = \cup_{j=1}^m I_{x_j}$ et $\Omega = \cap_{j=1}^m I'_{x_j}$. Il s'agit de deux ensembles ouverts contenant K et x respectivement. Qui plus est, on a

$$\begin{aligned} U \cap \Omega &= (\cup_{j=1}^m I_{x_j}) \cap \Omega = \cup_{j=1}^m (I_{x_j} \cap \Omega) \\ &\subset \cup_{j=1}^m (I_{x_j} \cap I'_{x_j}) = \emptyset, \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. □

Théorème III.6 (Borel-Lebesgue)**.** *Un ensemble de $\mathbb{R}^n$ est compact si et seulement s'il est borné et fermé.*

Démonstration. La condition est suffisante. Soit K un ensemble borné et fermé ; puisqu'il est borné, il existe une constante $C > 0$ telle que $K \subset [-C, C]^n$. L'ensemble K étant fermé et $[-C, C]^n$ étant compact (ce que nous établirons dans la suite), le Lemme III.3 permet d'affirmer que K est compact.

La condition est nécessaire. Soit K un ensemble compact ; montrons que K est fermé. Si x est un point qui n'appartient pas à K, par le lemme III.5, il existe deux ensembles ouverts disjoints U_x et Ω_x contenant K et x respectivement. Puisque $\Omega_x \subset \complement K$, l'ensemble $\complement K$ est ouvert, ce qui établit que K est fermé. Montrons que K est borné. Si x est un point de K, soit B_x la boule ouverte de centre x et de rayon unité. Puisque $(B_x)_{x\in K}$ est un recouvrement ouvert de K, il existe un nombre fini de points $x_1, \dots, x_m$ de K ($m \in \mathbb{N}^*$) tels que $K \subset \cup_{j=1}^m B_{x_j}$. Une union finie d'ensembles bornés étant bornée, on peut conclure. □

3. Il est toujours possible de choisir un élément n'appartenant pas à un ensemble ; on peut par exemple utiliser le théorème de Cantor qui affirme que J n'est pas en bijection avec l'ensemble $\wp(J)$ de ses parties et prendre j_0 dans $\wp(J)$.

IV La démonstration de Cousin

La démonstration de Cousin [3] repose sur la technique « diviser pour régner », aussi utilisée pour la démonstration classique du théorème de Bolzano-Weierstraß. Elle devrait donc être relativement familière au lecteur un tant soit peu expérimenté en analyse.

Théorème IV.1. *Étant donné deux nombres réels a et b tels que $a < b$, l'ensemble $[a, b]^n$ est un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Procédons par l'absurde, en supposant que l'ensemble $I_1 = [a, b]^n$ n'est pas compact. Soit donc un recouvrement ouvert $(U_j)_{j\in J}$ du pavé I_1 duquel on ne peut extraire un recouvrement fini. L'ensemble I_1 peut être décomposé en 2^n pavés fermés isométriques dont le diamètre de chacun est la moitié de celui de I_1 (ces ensembles sont des translatés d'un unique pavé). Au moins un de ces 2^n pavés n'admet pas de recouvrement fini à partir de $(U_j)_{j\in J}$, sinon I_1 admettrait lui-même un recouvrement fini. Notons I_2 l'un de ces pavés n'admettant pas de recouvrement fini.

Si on décompose I_2 en 2^n pavés fermés isométriques de diamètre égal à la moitié de celui de I_2, au moins un d'entre eux n'admet pas de recouvrement fini ; notons-le I_3. De la même manière, si I_k a été défini ($k \in \mathbb{N}^*$), il existe un pavé fermé I_{k+1} inclus dans I_k dont le diamètre est égal à la moitié de celui de I_k et n'admettant pas de recouvrement fini à partir de $(U_j)_{j\in J}$.

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que $x_k \in I_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque le diamètre de I_k vaut $\sqrt{n}(b-a)/2^{k-1}$, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy ; soit ℓ sa limite. Maintenant, I_k étant fermé pour tout k et puisque x_m appartient à I_k pour m suffisamment grand, ℓ appartient à I_k pour tout nombre naturel k non nul.

Soit alors $j_0 \in J$ tel que $\ell \in U_{j_0}$. Puisque U_{j_0} est ouvert, il existe une boule ouverte B centrée en ℓ telle que $B \subset U_{j_0}$. On a alors $I_k \subset B \subset U_{j_0}$ pour k suffisamment grand, ce qui implique qu'on peut recouvrir cet ensemble I_k par un unique élément U_{j_0} de $(U_j)_{j\in J}$. Ceci étant absurde, I_1 est compact. □

Remarque IV.2. On peut bien sûr remplacer $[a, b]^n$ par un pavé de la forme $\prod_{l=1}^n [a_l, b_l]$ dans l'énoncé précédent. Le diamètre de l'intervalle I_k vaut alors

$$\sqrt{n}\frac{\prod_{l=1}^n (b_l - a_l)}{2^{k-1}} \qquad (k \in \mathbb{N}^*).$$

V La démonstration de Lebesgue

Lebesgue attribue sa démonstration à Borel [5], les démonstrations de Schoenflies et Young reposant également sur les mêmes idées.

Théorème V.1. *Étant donné deux nombres réels a et b tels que $a < b$, l'ensemble $[a,b]$ est un ensemble compact de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $(U_j)_{j\in J}$ une famille d'ensembles ouverts recouvrant $[a,b]$ et posons

$$I = \{x \in [a,b] : \\ [a,x] \subset \cup_{j\in J'} U_j \text{ pour un ensemble fini } J' \text{ de } J\}.$$

Premièrement, on a $a \in I$, puisque, par définition, il existe un indice $j_0 \in J$ tel que $[a,a] \subset U_{j_0}$.

Montrons que I est un intervalle ; il suffit d'établir que si a et x_0 sont deux points de I tels que $a < x_0$ et si x vérifie $a < x < x_0$, alors x est également un point de I. Puisqu'il existe une partie finie J' de J telle que $[a,x_0] \subset \cup_{j\in J'} U_j$, on a $[a,x] \subset \cup_{j\in J'} U_j$, ce qui suffit.

Montrons que I est fermé. Si x_0 est un nombre réel tel que $[a,x_0[$ est inclus dans I, soit $j_0 \in J$ tel que $x_0 \in U_{j_0}$. Cet ensemble étant ouvert, il existe un nombre x tel que $[x,x_0[$ est inclus dans U_{j_0}. Cela étant, puisque $x \in I$, il existe alors une partie finie J' de J telle que $[a,x] \subset \cup_{j\in J'} U_j$. Par conséquent, on a $[a,x_0] \subset \cup_{j\in J''} U_j$, avec $J'' = J' \cup \{j_0\}$ et donc $x_0 \in I$.

Montrons enfin que $I = [a,b]$, ce qui permettra de conclure. Supposons avoir $I = [a,x_0]$, avec $x_0 < b$ et soit J' une partie finie de J pour laquelle on a $[a,x_0] \subset \cup_{j\in J'} U_j$. Si $j_0 \in J'$ est tel que $x_0 \in U_{j_0}$, il existe un nombre x vérifiant $x_0 < x \leq b$ tel que $[x_0,x] \subset U_{j_0}$, puisque U_{j_0} est ouvert. On a dès lors $[a,x] \subset \cup_{j\in J'} U_j$ et donc $x \in I$, ce qui est absurde. □

VI Le cas multidimensionnel

Nous allons montrer ici que les pavés fermés de $\mathbb{R}^2$ sont compacts en modifiant les arguments de la démonstration du Théorème V.1. Les idées de la démonstration pourraient être jugées astucieuses, si elles n'avaient pas déjà été utilisées par Lebesgue, à qui revient donc tout le mérite.

Théorème VI.1. *Étant donné quatre nombres a_1, a_2, b_1 et b_2 tels que $a_1 < b_1$ et $a_2 < b_2$, l'ensemble $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$ est un ensemble compact de $\mathbb{R}^2$.*

Démonstration. Soit $(U_j)_{j\in J}$ une famille d'ensembles ouverts recouvrant $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$ et posons

$$I = \{x \in [a_2,b_2] : [a_1,b_1] \times [a_2,x] \subset \cup_{j\in J'} U_j \\ \text{pour un ensemble fini } J' \text{ de } J\}. \tag{1}$$

Pour $j \in J$, posons $\Omega_j = \{x : (x,a_2) \in U_j\}$. On constate trivialement que $(\Omega_j)_{j\in J}$ est une famille d'ensembles ouverts recouvrant $[a_1,b_1]$. Par conséquent, vu le Théorème V.1, il existe une partie finie J' de J telle que $[a_1,b_1] \subset \cup_{j\in J'} \Omega_j$. On a donc $[a_1,b_1] \times [a_2,a_2] \subset \cup_{j\in J'} U_j$, ce qui implique $a_2 \in I$.

Montrons que I est un intervalle. De fait, si x_0 et x sont deux nombres tels que $a_2 \leq x \leq x_0$ avec $x_0 \in I$, il existe une partie finie J' de J telle que $[a_1,b_1] \times [a_2,x_0] \subset \cup_{j\in J'} U_j$. On a dès lors $[a_1,b_1] \times [a_2,x] \subset \cup_{j\in J'} U_j$, ce qui suffit.

Montrons que I est fermé. Soit x_0 un nombre réel tel que $[a_2,x_0[$ est inclus dans I. Pour tout $x \in [a_1,b_1]$, il existe $j_x \in J$, un nombre $c_x < x_0$ et un intervalle ouvert I_x comprenant x tels que $I_x \times [c_x,x_0] \subset U_{j_x}$. Puisque $(I_x)_{x\in[a_1,b_1]}$ est un recouvrement ouvert de $[a_1,b_1]$, il existe un nombre fini de points $x_1,\ldots,x_m \in [a_1,b_1]$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ tels que $[a_1,b_1] \subset \cup_{k=1}^m I_{x_k}$. En particulier, pour $J' = \cup_{k=1}^m \{j_{x_k}\}$, on a $[a_1,b_1] \times \{x_0\} \subset \cup_{j\in J'} U_j$. En posant $x_s = \max\{c_{x_1},\ldots,c_{x_m}\}$, on obtient $[a_1,b_1] \times [x_s,x_0] \subset \cup_{j\in J'} U_j$. Cela étant, puisque x_s appartient à I, il existe une partie finie J'' de J telle que $[a_1,b_1] \times [a_2,x_s] \subset \cup_{j\in J''} U_j$. Au total, on a obtenu $[a_1,b_1] \times [a_2,x_0] \subset \cup_{j\in J'\cup J''} U_j$, ce qui prouve que x_0 appartient à I.

Montrons enfin que l'on a $I = [a_2,b_2]$, ce qui sera suffisant pour conclure. Supposons avoir $I = [a_2,x_0]$, avec $x_0 < b$. Comme à l'étape précédente, pour tout $x \in [a_1,b_1]$, il existe $j_x \in J$, un nombre $c_x > x_0$ et un intervalle ouvert I_x comprenant x tels que $I_j \times [x_0,c_x] \subset U_j$. Il existe donc un nombre fini de points $x_1,\ldots,x_m \in [a_1,b_1]$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ tels que $[a_1,b_1] \times \{x_0\} \subset \cup_{j\in J'} U_j$, avec $J' = \cup_{k=1}^m \{j_{x_k}\}$. En posant $x_m = \min\{c_{x_1},\ldots c_{x_m}\}$, on obtient $[a_1,b_1] \times [x_0,x_m] \subset \cup_{j\in J'} U_j$. Maintenant, si J'' est une partie finie de J pour laquelle on a $[a_1,b_1] \times [a_2,x_0] \subset \cup_{j\in J''} U_j$, on obtient $[a_1,b_1] \times [a_2,x_m] \subset \cup_{j\in J'\cup J''} U_j$ et donc $x_m \in I$, ce qui est absurde. □

Remarque VI.2. On peut aisément modifier la précédente démonstration pour montrer que les pavés fermés de $\mathbb{R}^n$ sont compacts, par récurrence. Il faut remplacer la définition (1) de I par

$$I = \{x \in [a_n,b_n] : \prod_{k=1}^{n-1} [a_k,b_k] \times [a_n,x] \subset \bigcup_{j\in J'} U_j \\ \text{pour un ensemble fini } J' \text{ de } J\}.$$

Références

[1] E. Borel. Sur quelques points de la théorie des fonctions. *Ann. Sci. de l'E.N.S*, 12 :9–55, 1895.

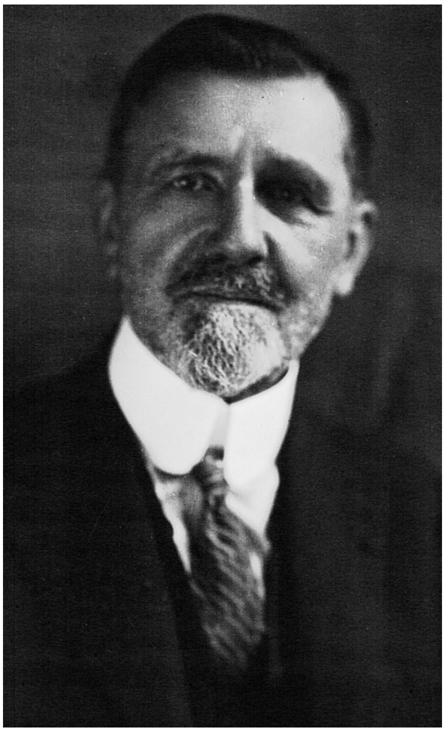

FIGURE 1. Émile Borel

FIGURE 2. Henry-Léon Lebesgue

[2] D.M. Bressoud. *A Radical Approach to Lebesque's Theory of Integration*. Cambridge University Press, 2008.

[3] P. Cousin. Sur les fonctions de *n* variables complexes. *Acta Math.*, 19 :1–61, 1895.

[4] P. Dugac. Sur la correspondance de Borel et le théorème de Dirichlet-Heine-Weierestrass-Borel-Schoenflies-Lebesgue. *Arch. Int. Hist. Sci.*, 39 :69–110, 1989.

[5] H. Lebesgue. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Gauthier-Villars, 1904.

[6] P.G. Lejeune-Dirichlet and G. Arendt. *Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen*. Braunschweig, 1904.

[7] M. Macauley, B. Rabern, and L. Rabern. A novel proof of the Heine-Borel theorem. arXiv :0808.0844, 2008.

[8] J. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, 2000.

[9] S. Nicolay. *Analyse mathématique – Fonctions définies sur une partie de la droite réelle*. Dunod, 2018.

[10] H. Queffélec. *Topologie : cours et exercices corrigés*. Dunod, 2020.

[11] M. Raman-Sundström. A pedagogical history of compactness. *Amer. Math. Monthly*, 122 :619–635, 2015.

[12] A. Schoenflies. *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*. Teubner, B.G., 1900.

[13] W.H. Young. Overlapping intervals. *Bull. London Math. Soc.*, 35 :384–388, 1902.