

DE L'INSTITUT TECHNIQUE
DU BATIMENT
ET DES TRAVAUX PUBLICS

N° 474 — MAI 1989
SÉRIE : THÉORIES ET MÉTHODES
DE CALCUL 305

**CALCUL des CONSTRUCTIONS HYDRAULIQUES
MÉTALLIQUES
par la MÉTHODE
des DÉVELOPPEMENTS HARMONIQUES**

Philippe RIGO

Ingénieur Civil des Constructions. Docteur en Sciences Appliquées
Assistant à l'Université de Liège
Laboratoire d'Hydrodynamique, d'Hydraulique Appliquée,
de Constructions Hydrauliques et Navales de l'Université de Liège

**CALCUL DES CONSTRUCTIONS HYDRAULIQUES MÉTALLIQUES
PAR LA MÉTHODE DES DÉVELOPPEMENTS HARMONIQUES**

L'auteur présente ici une méthode originale, la méthode des bordages raidis, particulièrement adaptée aux constructions hydrauliques métalliques. Cette méthode permet, en plus de la prise en compte des charges extérieures classiques, d'introduire de nombreuses conditions d'appuis spécifiques (appui simple, encastrement, appui élastique, ...).

Particulièrement performante, cette méthode permet l'étude de structures complexes de façon précise et détaillée dans un temps raisonnable (inférieur à 12 heures).

CALCUL des CONSTRUCTIONS HYDRAULIQUES MÉTALLIQUES

par la MÉTHODE des DÉVELOPPEMENTS HARMONIQUES

1. POSITION DU PROBLÈME

La vérification des contraintes et des déplacements dans les structures métalliques nous intéresse au premier plan. Il s'agit en effet de se définir un outil permettant de calculer des structures en réduisant au maximum les simplifications et approximations sur la géométrie de la structure, sur l'interdépendance des divers éléments constitutifs (bordages, raidisseurs, aiguilles, ...), sur la sollicitation.

Les coques cylindriques possèdent des particularités géométriques qui rendent leur calcul difficile, surtout lorsque ces coques sont raidies (fig. 1 et 2). En ce qui les concerne, les méthodes les plus performantes sont celles

qui utilisent des décompositions en série des charges et des déplacements, suivant une direction privilégiée. On peut les regrouper sous l'appellation générale d'*analyse harmonique des structures* [1, 2, 3, 4 et 5].

C'est donc dans cette voie que nous présentons la méthode des bordages raidis.

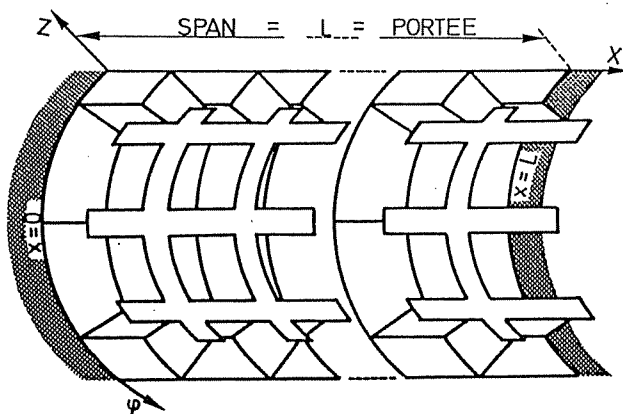


Fig. 1. — Élément de coque raidie; les nervures pouvant être des raidisseurs, des aiguilles ou des traverses.

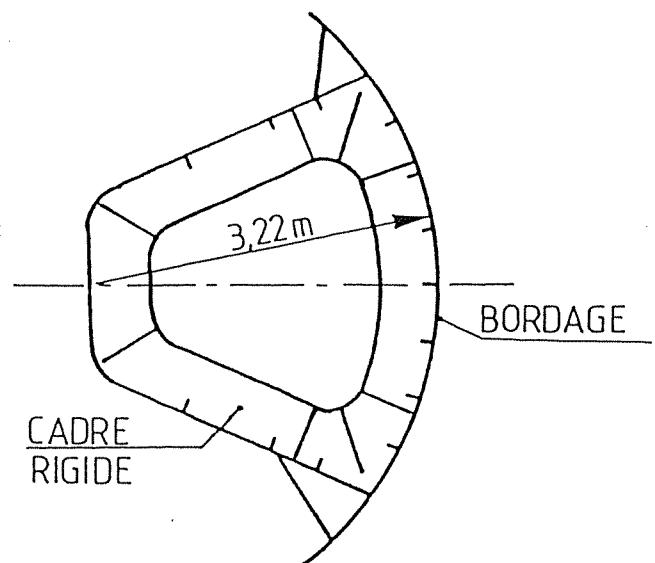


Fig. 2. — Vanne de barrage mobile composée de coques et de plaques raidies.

2. MÉTHODOLOGIE ET HYPOTHÈSES

Cette méthode de calcul des plaques et des coques cylindriques (fig. 1 et 2) repose sur une résolution analytique des équations différentielles des coques cylindriques d'épaisseur constante (fig. 3). Ces équations différentielles sont issues de la méthode de Donnell, von Karman et Jenkins [6].

L'élément de base est une coque cylindrique de longueur L et de rayon q . Le système de coordonnées dont on fait usage est représenté figure 3. L'axe des X est orienté selon les génératrices du cylindre et l'axe des φ selon la circonférence. A chaque axe est associé un déplacement, u selon OX , v selon l'axe des φ et w selon OZ . La surface schématisée est celle du feuillet moyen et c'est à partir d'elle que sont comptées les coordonnées Z positivement vers le haut.

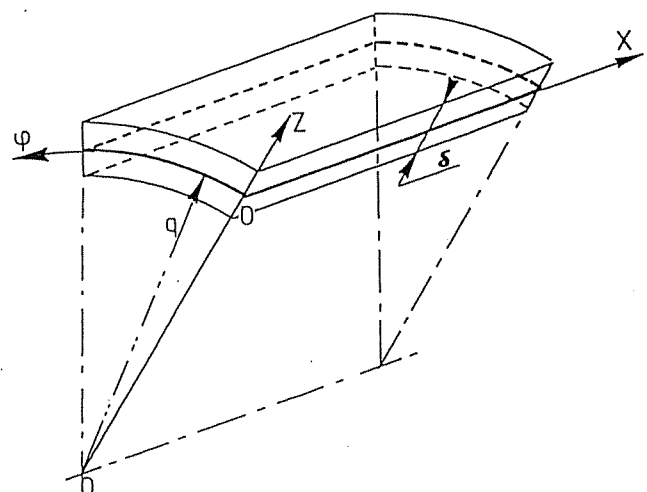


Fig. 3. — Élément de coque cylindrique.

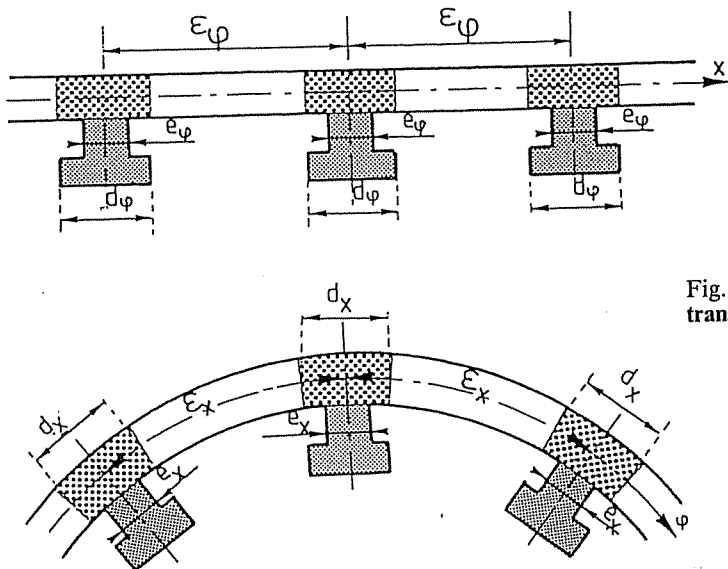


Fig. 4. — Éléments de raidissage longitudinaux et transversaux.

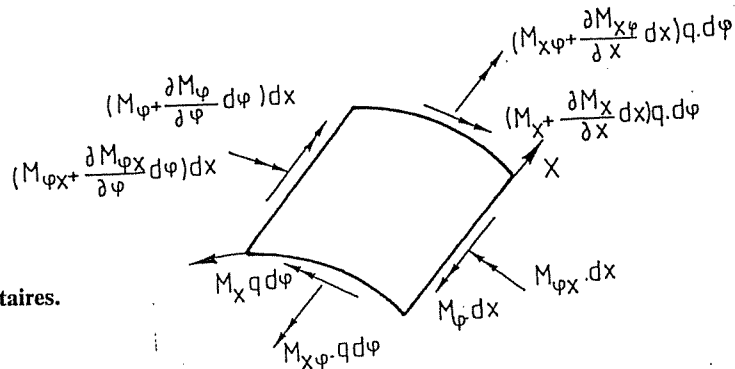
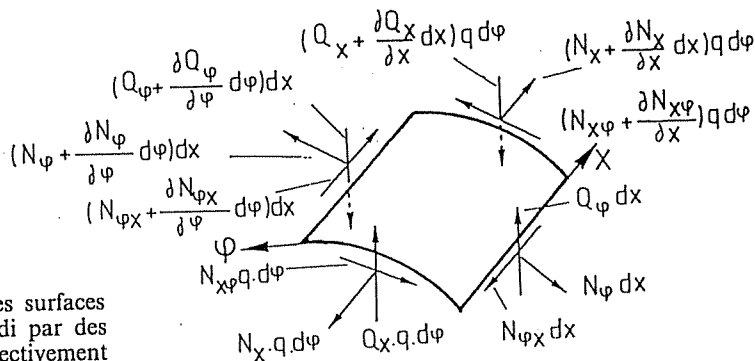


Fig. 5. — Forces et moments unitaires.



Cet élément de référence est compris entre les surfaces d'intrados et d'extrados de la coque ; il est raidi par des nervures longitudinales et transversales, respectivement espacées de ϵ_x et ϵ_ϕ (fig. 4). A cet élément, on associe les efforts unitaires et les moments unitaires calculés par rapport à la surface moyenne (fig. 5). On les nomme N_x , N_ϕ , $N_{x\phi}$, $N_{\phi x}$, Q_x , Q_ϕ , M_x , M_ϕ , $M_{x\phi}$ et $M_{\phi x}$.

Les fonctions $f(\phi)$ sont des fonctions composées de fonctions de Heaviside [7] et elles permettent d'obtenir des fonctions (fig. 6) parfaitement compatibles avec la géométrie du système (fig. 4). Ces fonctions $f(\phi)$ sont égales à l'unité mais s'annulent en dehors des zones (d_x et d_ϕ) où les nervures agissent (fig. 4 et 6).

La surface moyenne (fig. 7) reçoit la charge extérieure et celle-ci peut être subdivisée comme suit :

- X , Y , Z les pressions spécifiques en N/m^2
- M_x , M_ϕ , M_z les moments spécifiques en $N.m/m^2$.

Cela étant, il est possible d'écrire les 6 équations d'équilibre (1 à 6) contenant les 10 grandeurs inconnues nommées ci-avant (fig. 5).

$$\begin{aligned}
 N'_x + N_{\phi x}^0/q + X + g_z \delta &= 0 & (1) \\
 N_\phi^0/q + N'_{x\phi} - Q_\phi/q + Y + g_\phi \delta &= 0 & (2) \\
 N_\phi/q + Q_\phi^0/q + Q'_x = Z + g_z \delta & & (3) \\
 M_\phi^0/q + M'_{x\phi} - Q_\phi + M_x &= 0 & (4) \\
 M'_x + M_{\phi x}^0/q - Q_x - M_\phi &= 0 & (5) \\
 N_{x\phi} - N_{\phi x} + M_{\phi x}/q + M_z &= 0 & (6)
 \end{aligned}$$

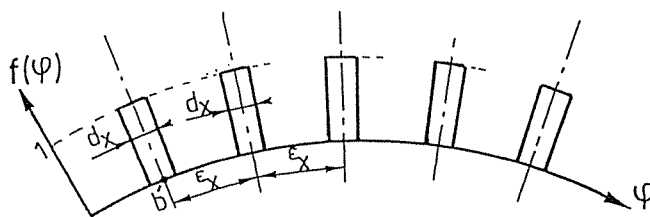
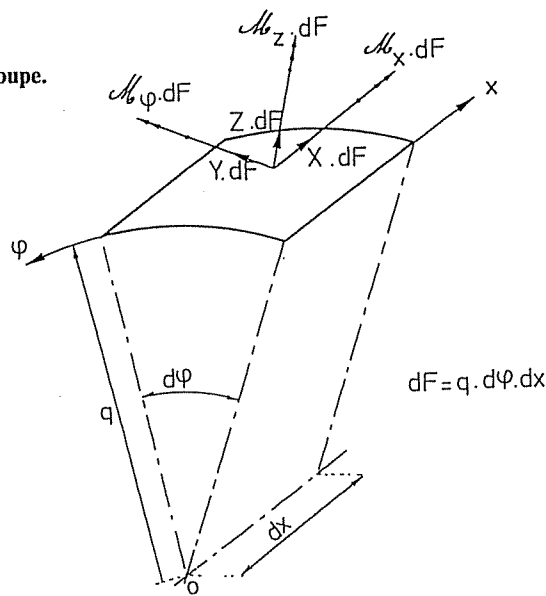


Fig. 6. — Allure des fonctions $f(\varphi)$ permettant de tenir compte exactement de la position des diverses nervures.

Fig. 7. — Types de sollicitations de la coupe.



avec f' dérivée de f par rapport à x (df/dx) et f'' dérivée de f par rapport à φ ($df/d\varphi$).

A ce point aucune hypothèse n'a été émise, néanmoins, si l'on veut résoudre le problème, il faut introduire les simplifications suivantes :

- le domaine de validité des développements est le régime élastique,
- on doit admettre les simplifications conduisant à la méthode D.K.J., à savoir :
 - une coque mince (épaisseur \ll rayon = q),
 - de faibles déformations,
 - et les hypothèses dites de Love-Kirchhoff.

Ces dernières conditions équivalent, en fait, à imposer une variation linéaire des contraintes selon l'épaisseur de la coque.

3. MISE EN ÉQUATIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Pour écrire les expressions des efforts et moments unitaires (fig. 5) en fonction des seuls déplacements u , v et w , avec D et K des constantes dépendant uniquement du matériau (à savoir du module de Young E et du coefficient de poisson ν) et de l'épaisseur δ de la coque, on procède de la manière suivante.

Au lieu de considérer l'équilibre d'un élément infiniment petit dans le sens des trois coordonnées, on envisage un élément de coque compris entre les surfaces intrados et extrados à la coque mais dont la surface moyenne est $q \cdot dx \cdot d\varphi$.

Nous pouvons écrire l'équilibre d'un tel élément à condition d'introduire les efforts unitaires correspondants, calculés par rapport à la surface moyenne. A titre d'exemple :

$$N_x = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{q}\right) dz \quad (7)$$

$$M_x = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{q}\right) z dz \quad (8)$$

Compte tenu des relations classiques contraintes-déformations

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[u' + \frac{\nu v^0}{q} + \frac{\nu w}{q} - \frac{z}{q} \left(q w'' + \frac{\nu w^{00}}{q} \right) \right] \quad (9)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\frac{v^0}{q} + \frac{w}{q} + \nu(u' - z w'') - \frac{z}{q^2} w^{00} \right] \quad (10)$$

$$\tau_{x\varphi} = G \left(\frac{u^0}{q} + v' - \frac{2z}{q} w^{0'} \right) \quad (11)$$

on obtient pour une coque non raidie,

$$N_x = (E\delta/(1 - \nu^2)q) \cdot (u'q + \nu v^0 + \nu w) \quad (12)$$

$$M_x = (E\delta^3/(1 - \nu^2)q^2) \cdot (q^2 w'' + \nu w^{00}) \quad (13)$$

En présence de raidisseurs, ces 2 expressions ne sont plus valables et il en serait de même des relations $N_{x\varphi}$ et $M_{x\varphi}$. Ainsi, dans l'hypothèse de raidisseurs longitudinaux, les expressions (7 et 8) deviennent

$$N_x = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{q}\right) dz + f(\varphi) \int_{\omega_x} \sigma_x \frac{e_x}{d_x} dz \quad (14)$$

$$M_x = - \left[\int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{q}\right) z dz + f(\varphi) \int_{\omega_x} \sigma_x z \frac{e_x}{d_x} dz \right] \quad (15)$$

avec

- e_x la largeur du raidisseur (fig. 4),
- d_x la largeur maximale du raidisseur,
- ω_x la section transversale du raidisseur,
- $f(\varphi)$ une fonction dite Heaviside (Schwartz 1966) valant 1 au droit des raidisseurs, sinon 0 (fig. 6).

Après intégration des relations (14 et 15), on a :

$$N_x = (E\delta/(1 - \nu^2)q) \cdot (u'q + \nu v^0 + \nu w) + f(\varphi)(E/d_x) \cdot (u'\omega_x - w''h_x) \quad (16)$$

$$M_x = (E\delta^3/(1 - \nu^2)q^2) \cdot (q^2 w'' + \nu w^{00}) - f(\varphi)(E/d_x) \cdot (u'h_x - w''I_x) \quad (17)$$

avec

h_x le moment statique de ω_x calculé par rapport à la surface médiane de la coque,

I_x le moment d'inertie des ω_x par rapport à la surface médiane.

D'une manière équivalente, on obtient pour N_{xp} et M_{xp} .

$$N_{xp} = D \frac{1-\nu}{2} \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) + f(\varphi) \frac{G}{d_x} \Omega_x \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) \quad (18)$$

$$M_{xp} = \frac{K}{q} (1-\nu) w^{0'} + f(\varphi) \frac{G}{q d_x} (K_{2xp} + K_{3xp}) w^{0'} + f(\varphi) \frac{G \lambda_x}{d_x} \Omega_x \left(v' + \frac{u^0}{q} \right) \quad (19)$$

Il est aisé de recommencer ce raisonnement pour des nervures circonférentielles de manière à déterminer cette fois N_φ , $N_{\varphi x}$, M_φ et $M_{\varphi x}$.

Quant aux expressions de Q_x et Q_φ , elles s'obtiennent à partir des deux équations d'équilibre moments (4 et 5) en y injectant les forces et moments unitaires déjà calculés.

Ensuite, en remplaçant ces efforts et moments unitaires par leurs expressions analytiques dans les 3 équations (1 à 3), on obtient après calcul 3 équations différentielles à coefficients constants (20 à 22).

Ces 3 équations (20 à 22) relatives à une coque cylindrique raidie sont fonctions des déplacements u , v , w et de leurs dérivées (réf. 5), et s'écrivent :

$$D(qu'' + \nu v^{0'} + \nu w') + D/q^2 \cdot (1-\nu)/2 \cdot (u^{00} + qv^{0'}) + f(x) \cdot [S_\varphi/q (v^{0'} + u^{00}/q)] + f^0(\varphi)/q [S_x(v' + u^0/q)] + f(\varphi)[\Omega_x u'' - H_x w''' + S_x/q \cdot (v^{0'} + u^{00}/q)] + X = 0 \quad (20)$$

$$D/q^2 (v^{00} + w^0 + \nu q u^{0'}) + D/q \cdot (1-\nu)/2 \cdot (u^{0'} + qv^{0'}) + f(x) \cdot [\Omega_\varphi/q^2 \cdot (v^{00} + w^0) - H_\varphi/q^3 \cdot w^{000} + S_\varphi(v'' + u^{0'}/q)] + f'(x)/q [S_\varphi(v' + u^0/q)] + f(\varphi)[S_x(v'' + u^{0'}/q)] + Y = 0 \quad (21)$$

$$D/q^2 (v^0 + w + \nu q u') + K/q^4 \cdot w^{0000} + 2 \cdot K/q^2 \cdot w^{00''} + K w^{0''''} + f(x)[\Omega_\varphi/q^2 \cdot (v^0 + w) - 2H_\varphi/q^3 \cdot w^{00} - H_\varphi/q^3 \cdot v^{000} + R_\varphi/q^4 \cdot w^{0000} + T_\varphi/q^2 \cdot w^{00''} + L_\varphi/q \cdot (v^{0''} + u^{00'})] + f(\varphi)[T_x/q^2 \cdot w^{00''} + L_x/q \cdot (v^{0''} + u^{00'}/q) - H_x \cdot u'' + R_x \cdot w^{0''''}] + f^0(\varphi)/q [T_x/q \cdot w^{00''} + L_x/q \cdot (v'' + u^{0'}/q)] + f'(x)[T_\varphi/q \cdot w^{00''} + L_\varphi/q \cdot (v'' + u^{0'}/q)] = -M_x^0/q + M_x' + Z \quad (22)$$

Remarque : les fonctions $f^0(\varphi) = df(\varphi)/d\varphi$ et $f'(x) = df(x)/dx$ dérivées de fonctions de Heaviside, sont des fonctions de Dirac et sont nulles partout, sauf au droit des nervures où elles valent 1 [8].

4. MÉTHODE DE RÉOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Le processus de résolution de ce système (20 à 22) consiste à ramener le problème à un système classique de 3 équations à 3 inconnues dont les coefficients sont des opérateurs de dérivation et les inconnues les déplacements u , v et w . Après élimination des u , v et w , on obtient une équation différentielle en w du 8° ordre à 2 variables, x et φ .

$$A \cdot w^{8''''} + B \cdot w^{6''''} + C \cdot w^{4''''} + D \cdot w^{2''''} + E \cdot w^{0''''} + F \cdot w^{0''''0} + G \cdot w^{0''0} + I \cdot w^{0''00} + J \cdot w^{0''000} + K \cdot w^{0''0000} = 0 \quad (23)$$

avec

$$w^0 = dw/d\varphi, w' = dw/dx, w^{0'} = d^2w/dx \cdot d\varphi, \dots$$

Les coefficients A, B, C, ..., J et K sont des constantes connues dépendant uniquement des caractéristiques géométriques de la coque et des nervures ainsi que des propriétés mécaniques du matériau (module de Young E et coefficient de Poisson ν).

Mais afin d'obtenir une équation à variables séparées, on est astreint à poser :

$$w(x, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} w(\varphi) \sin(n\pi x/L) \quad (24)$$

$$v(x, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} v(\varphi) \sin(n\pi x/L) \quad (25)$$

$$u(x, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} u(\varphi) \cos(n\pi x/L) \quad (26)$$

5. ACTIONS CONCENTRÉES DES NERVURES

Dans les 3 équations (20), (21) et (22), il existe 3 types de termes

- ceux relatifs aux charges extérieures X, Y, Z, M_x, M_φ (fig. 7),
- ceux relatifs aux nervures, affectés des fonctions $f(x), f'(x), f(\varphi)$ et $f'(\varphi)$ dont les sigles $S_x, S_\varphi, L_x, L_\varphi, \dots, T_x, T_\varphi$ sont des coefficients dépendant uniquement de la géométrie des nervures [6],
- ceux relatifs à la coque lisse.

La signification de cette observation est évidente : la charge appliquée est reprise partiellement par la coque et partiellement par les nervures. Le rôle des nervures se caractérise donc par 5 types de forces (fig. 8).

- Les X_0, Y_0 et Z_0 sont des pressions agissant sur la surface médiane de la coque et le long de bandes dont la largeur est celle de la nervure correspondante.
- les U_{0x} et U_{0z} sont des lignes de moment agissant le long de ces mêmes nervures.

$$\alpha(x)f(x) = F(x) + \lambda \int_a^b K(x, \varepsilon)f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (27)$$

$$\Psi(K_i) = (X_0 d_x)_{0, \varphi=K_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\Psi(K_j)}{10\,000} ((X_0 d_x)_{A, \varphi=K_i, \Lambda=K_j}) \quad (28)$$

Comparons l'expression théorique des équations de Volterra-Fredholm (27) avec la première équation de notre système (28), on remarque que :

- $\Psi(K_i)$ est la fonction inconnue notée $f(x)$ dans l'équation de référence ;
- le coefficient $\alpha(x)$ de l'équation de référence (27) vaut dans notre cas 1 (28), on a donc bien des équations intégrales de Volterra-Fredholm de la 2^e espèce ;
- la fonction $(X_0 d_x)_0$ est une fonction connue puisque relative à la coque lisse soumise à la charge extérieure, elle correspond à la fonction $F(x)$;

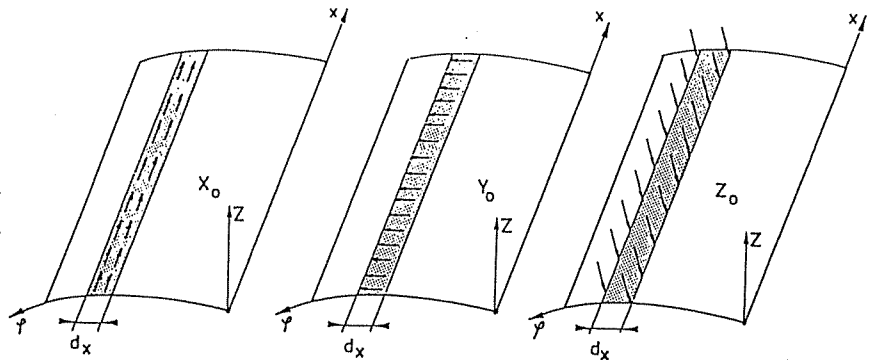
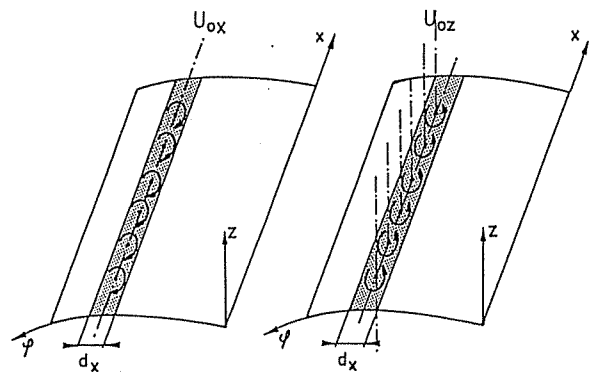


Fig. 8. — Représentation des 5 types de forces et de moments que transmet une traverse à la coque (d_x étant la largeur de la traverse).



Les lignes de moments U_{0x} et U_{0z} résultent de l'apparition de termes contenant des dérivées de fonction de Heaviside dans les équations différentielles (20 à 22). Comme la dérivée d'une fonction de Heaviside est une fonction de Dirac, on obtient bien des lignes de moment.

Résoudre le problème de la coque raidie revient donc à considérer une coque non raidie sur laquelle agit la charge extérieure ainsi que 5 lignes de forces et de moments agissant au droit de chaque traverse. La détermination de ces lignes de charge repose sur la résolution d'un système de 5.M équations intégrales (M étant le nombre de traverse) dites de « VOLTERRA-FREDHOLM » de la 2^e espèce mais dégénérées en sommes [9].

- les $(X_0 d_x)_A$ (ou indice B, C, D et E) sont les noyaux des équations intégrales à l'image de la fonction $K(x, \varepsilon)$. Elles s'obtiennent en introduisant les solutions des fonctions de Green dans les expressions des $(X_0 d_x), (Y_0 d_x), (Z_0 d_x), (U_{0x} d_x)$ et $(U_{0z} d_x)$;
- le signe intégrale est lui, par contre, remplacé par un signe de sommation.

Les développements analytiques complets ne pouvant être repris ici, pour le détail des développements analytiques, veuillez consulter le manuscrit de référence de l'auteur [5].

6. EXTENSION DE LA MÉTHODE AUX STRUCTURES AYANT DES CONDITIONS D'APPUI PARTICULIÈRES (ENCASTREMENT, APPUIS ÉLASTIQUES,...)

Les relations (24) à (26) imposent les conditions d'appuis aux extrémités en $x = 0$ et $x = L$. En effet, vu l'expression de $w(x, \varphi)$, on aura toujours w et M_x nuls en $x = 0$. A ce stade, le logiciel des bordages raidis n'était donc applicable qu'aux structures ayant des conditions d'appuis simples ($w = v = M_x = N_x = 0$). Cette sévère limitation à la méthode peut, comme nous allons le montrer, être supprimée par l'adjonction des effets de bord, forces longitudinales N_b et moments de bord M_b (fig. 9). Le logiciel sera alors applicable à une large gamme de conditions d'appuis (encastrement, appuis élastiques, ...).

Les effets de bords (fig. 9) sont des forces et des moments que l'on applique aux extrémités $x = 0$ et $x = L$ des coques ou des plaques de la structure. Ces forces de bord N_b et moments de bord M_b , vont permettre de simuler, par exemple, les forces et moments que transmettent les bras aux extrémités d'une vanne segment de barrage mobile (fig. 10).

Pour ce qui est des forces de bord N_b (fig. 11), on connaît la solution analytique d'un cylindre complet chargé par une ligne de force de $10\,000 \cos \lambda x$ dirigée selon OX [5]. Si au lieu d'utiliser le développement en série de Fourier d'une charge uniforme, on utilise celui correspondant à 2 charges d'extrémités antisymétriques, on obtient la solution analytique de cette même coque soumise à des forces axiales F (antisymétriques) agissant aux extrémités $x = 0$ et $x = L$.

Pour les moments de bord M_b , nous utilisons le même procédé. Néanmoins, une différence importante existe, les charges extérieures de type moment M_0 n'apparaissent dans l'équation (22) que sous forme de leur dérivée première. D'où, pour un diagramme de moment de bord M_b donné qui est appliqué à la structure (fig. 12), c'est en fait l'effet dérivé que l'on applique.

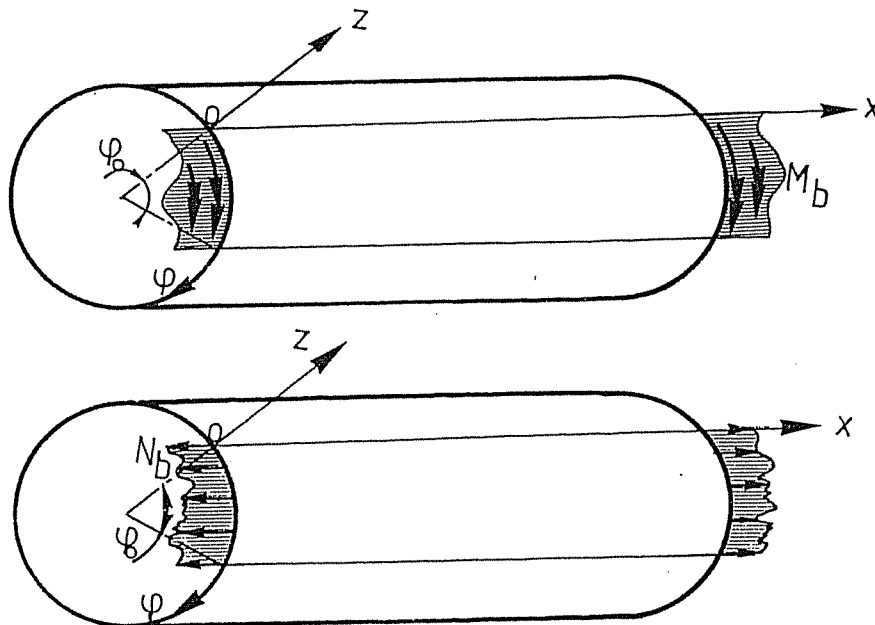


Fig. 9. — Forces de bord N_b et moments de bord M_b .

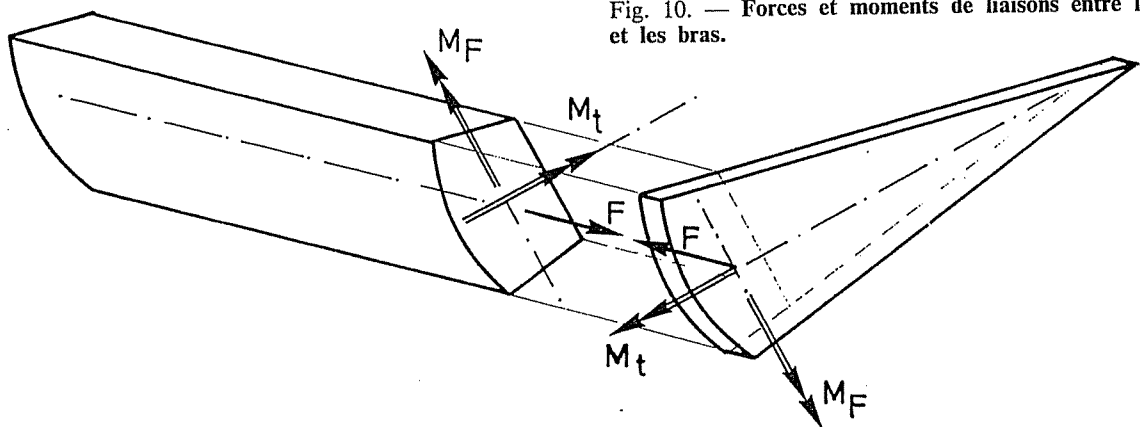


Fig. 10. — Forces et moments de liaisons entre la vanne et les bras.

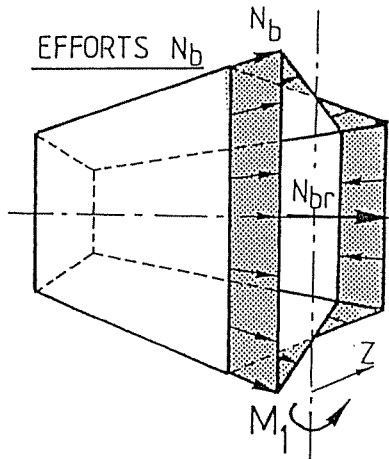


Fig. 11. — Exemple de répartition de forces de bord N_b que l'on applique aux extrémités de la structure.

Analytiquement cela se traduit par l'expression (29) d'un moment d'extrémité M_b développé en série de Fourier et par l'expression (30) de la dérivée du moment qui, au coefficient H près, est identique à l'expression obtenue pour le développement des forces de bord N_b .

$$M_b(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[4M_b / (2n - 1)\pi d^* \cdot (-1)^{n+1} \cdot \cos [(2n - 1)\pi(L - 2d^*)/L] \cdot \cos [(2n - 1)\pi x/L] \right] \quad (29)$$

$$dM_b/dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[4M_b / (2n - 1)\pi d^* \cdot H \cdot (-1)^{n+1} \cdot \cos [(2n - 1)\pi(L - 2d^*)/L] \cdot \sin [(2n - 1)\pi x/L] \right] \quad (30)$$

avec

$$H = - (2n - 1)\pi/L \cdot M_b.$$

6.1. Développement en série des forces et moments de bord

Les figures 13 et 14 montrent que pour les développements des effets de bord et plus spécialement pour les moments de bord, il faut un nombre de termes très importants pour représenter exactement les charges, mais en pratique, 7 termes suffisent pour représenter ces charges ponctuelles d'extrémités avec suffisamment de précision.

Il est à noter que les charges concentrées n'existent pas et qu'elles sont toujours réparties plus ou moins localement. Ainsi, les forces de bord N_b et les moments de bord M_b sont-ils appliqués sur de petits intervalles placés aux extrémités. Pour ces effets de bord, on obtient des résultats très satisfaisants en se limitant à l'utilisation de 7 termes de la série de Fourier (fig. 15).

6.2. Détermination des effets de bord

Il reste à présenter la technique utilisée pour déterminer les forces de bord N_b et les moments de bord M_b pour des champs de déplacement u et de rotation dw/dx donnés. Les expressions des forces et moments de bord sont théoriquement de la forme suivante :

$$[a_i \cos (\beta_i q \varphi) + b_i \sin (\beta_i q \varphi)] e^{-\alpha_i q \varphi} + [c_i \cos (\beta_i q (\varphi_0 - \varphi)) + \dots] e^{-\alpha_i q (\dots)} + \dots + \dots + [g_i \cos (\beta_i q (2\pi - (\varphi_0 - \varphi))) + \dots] e^{-\alpha_i q (\dots)} \quad (31)$$

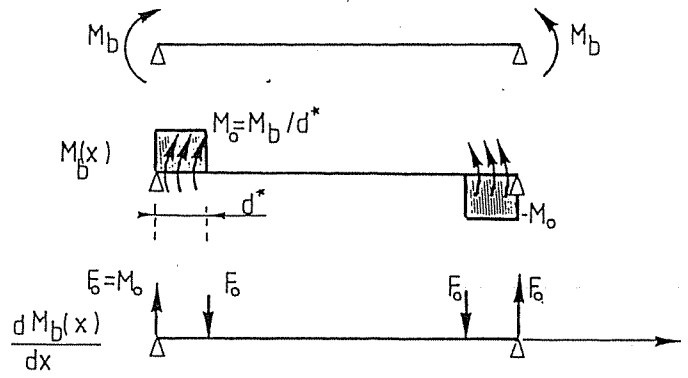


Fig. 12. — Moments de bord M_b .

Mais ces expressions présentent des inconvénients majeurs qui sont liés à la lourdeur des développements analytiques nécessaires compte tenu de la forme de ces fonctions.

A des fins de simplicité et de rationalisation, nous avons opté pour un développement des fonctions de bord en série polynomiale du 3^e degré (32) et (33).

Soit $F(\varphi)$ la fonction fixant la répartition des forces de bord

$$F(\varphi) = a(q\varphi)^3 + b(q\varphi)^2 + c(q\varphi) + d \quad (32)$$

avec a, b, c, d les paramètres inconnus de la fonction force de bord.

Soit $G(\varphi)$ la fonction fixant la répartition des moments de bord

$$G(\varphi) = e(q\varphi)^3 + f(q\varphi)^2 + g(q\varphi) + h \quad (33)$$

avec e, f, g, h les paramètres inconnus de la fonction moment de bord.

Ces paramètres sont à déterminer de manière à avoir une équivalence entre $F(\varphi)$ et N_b (fig. 16) et entre $G(\varphi)$ et M_b .

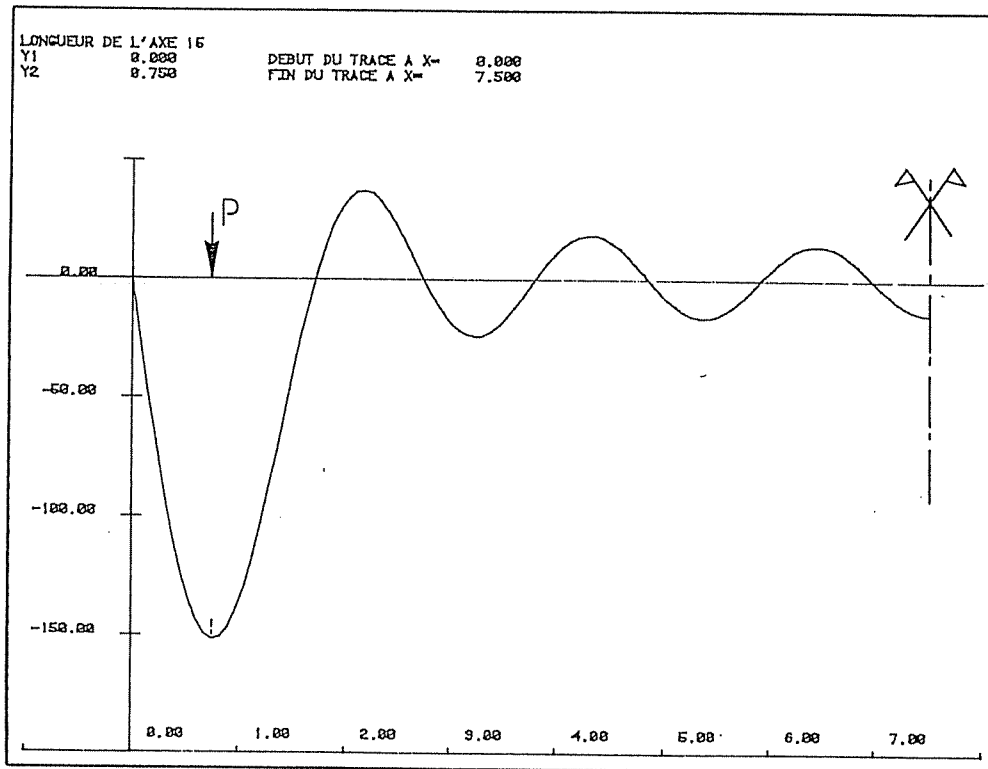


Fig. 13. — Représentation d'une charge concentrée avec 7 termes de la série de Fourier.

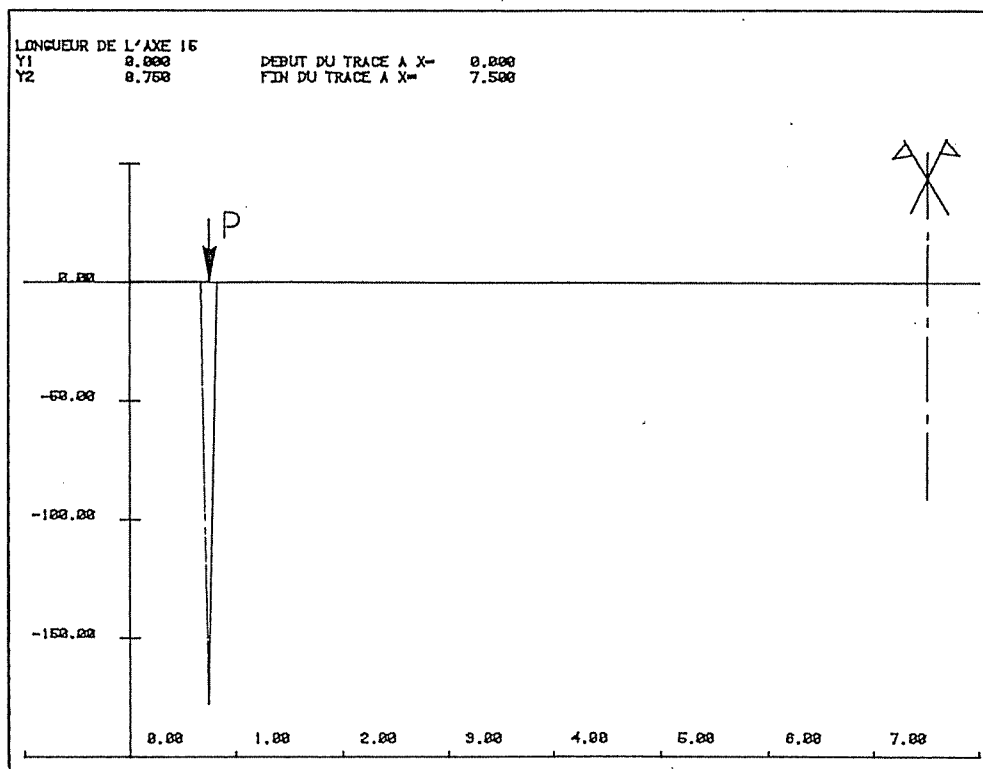


Fig. 14. — Représentation d'une charge concentrée avec 100 termes de la série de Fourier.

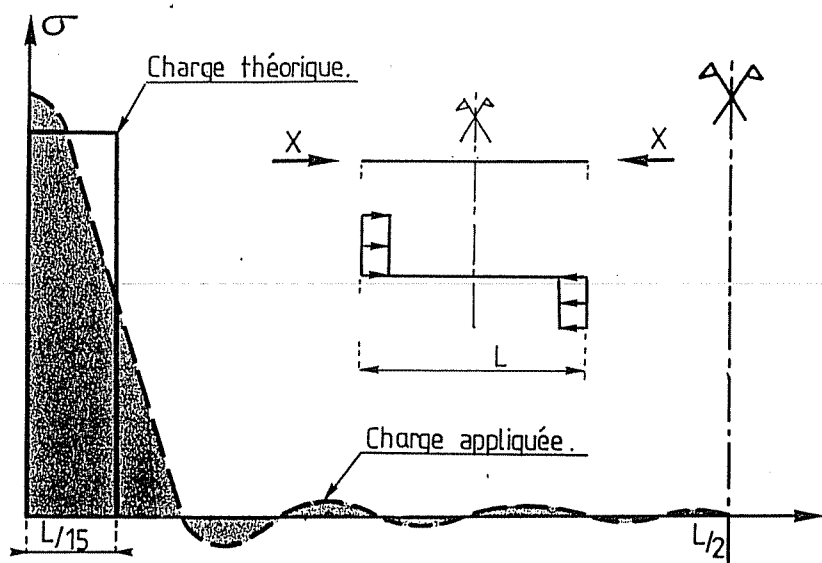
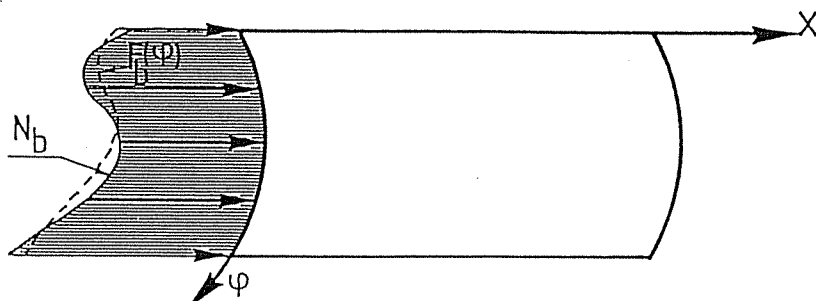


Fig. 15. — Développement d'une charge antisymétrique localisée sur un petit intervalle situé aux extrémités.

Fig. 16. — Ajustement de la fonction de forme des forces de bord $F(\varphi)$ aux forces de bord théoriques N_b .



Pratiquement on obtient les coefficients a, b, c, \dots, h en imposant une continuité de déplacements et de rotations point par point entre la vanne et ses bras. Pour une structure composée de n coques on aura donc $8.n$ paramètres inconnus que l'on obtient en imposant $8.n$ conditions en des points ponctuels de la structure. Le choix de ces points est particulièrement délicat car il doit assurer une homogénéité dans les résultats et garantir leur qualité et leur précision. Dans le logiciel, il est proposé d'utiliser systématiquement les dispositions standards de la figure 17 qui garantissent la qualité des résultats.

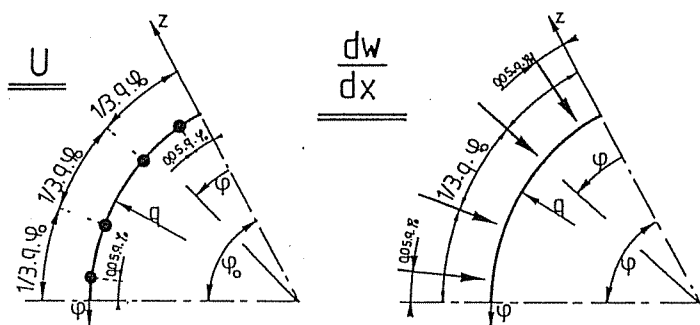


Fig. 17. — Dispositions standards des points auxquels sont imposées les conditions u et dw/dx aux extrémités.

7. VÉRIFICATIONS NUMÉRIQUES DE LA MÉTHODE DES BORDAGES RAIDIS

Ces vérifications sont basées sur la comparaison entre nos résultats et ceux relatifs à la méthode des éléments finis.

et soumise à une pression uniforme de 10 cm d'eau (fig. 18).

7.1. Coque cylindrique

Dans cet exemple, on analyse une coque cylindrique supportée, par deux diaphragmes rigides dans leur plan

- $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$
- $\nu = 0.3$
- $\delta = 0.014 \text{ m}$
- $P = 0.01 \text{ bar}$
- $q = 4 \text{ m}$
- $L = 23.3 \text{ m}$
- $\alpha = 45^\circ$

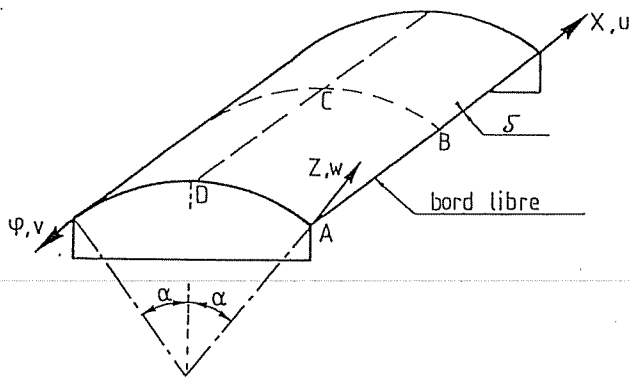


Fig. 18. — Vue de la coque cylindrique.

La figure 19 montre l'allure des déplacements dans la section médiane BC selon 3 approches différentes [5, 10 et 11]. A savoir : les logiciels SAPLI (élément « shell » de coque mince à 4 nœuds) et SAMCEF (élément « T56 » de coque plane quadrangulaire hybride) et notre logiciel des bordages raidis, nommé L.B.R.

D'une manière similaire, nous avons étudié cette même coque soumise à son poids propre. Il s'agit d'un cas d'école très utilisé pour tester des éléments finis ; ce cas

est connu pour sa sensibilité à la qualité de la représentation des modes de déformation flexionnelle. La solution analytique est donnée par Scordelis [12]. Au tableau 1, nous comparons la flèche w au point B situé au milieu du bord libre (fig. 18) pour différentes analyses du problème [13].

TABLEAU 1

Résultats comparatifs de la déformée de la coque de Scordelis.

Approche	Déplacement vertical du point B en cm
<i>Éléments finis</i>	
Nadisor (8 × 9 E.F.) ...	- 9,1684 cm (- 0,3008 ft)
SAP (4 × 4 E.F.)	- 8,3881 cm (- 0,2752 ft)
DAWSEY (4 × 4 E.F.) ...	- 7,7998 cm (- 0,2559 ft)
T.S.D. (4 × 4 E.F.)	- 9,1480 cm (- 0,299 ft)
Logiciel des bordages raidis (3 termes)	- 8,9540 cm (- 0,294 ft)
Solution de Scordelis ...	- 9,1683 cm (- 0,3006 ft)

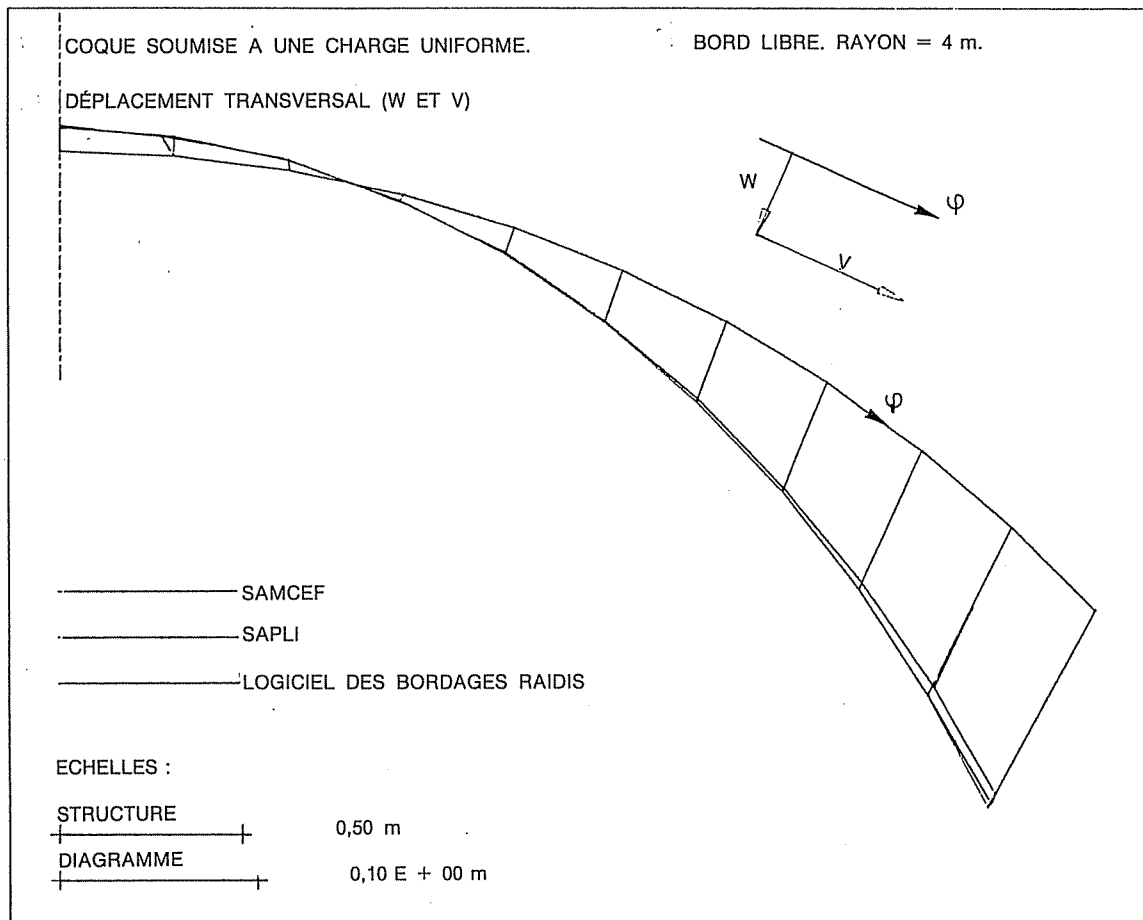


Fig. 19. — Déplacement w et v combinés dans la section transversale à mi-portée selon 3 approches de calcul.

7.2. Plaque orthotrope

Notre but est d'évaluer la contribution des semelles à la reprise de l'effort de cisaillement agissant dans le plan de la plaque [5]. Pour ce faire, nous allons étudier l'effet d'une charge agissant dans le plan d'une plaque raidie par 6 nervures longitudinales (fig. 20). Ces nervures étant choisies particulièrement importante vis-à-vis du bordage, de manière à souligner leur influence. Les bords $x = 0$ et $x = L$ correspondent à des appuis simples et les bords $\varphi = 0$ et $\varphi = \varphi_0$ sont des bords libres.

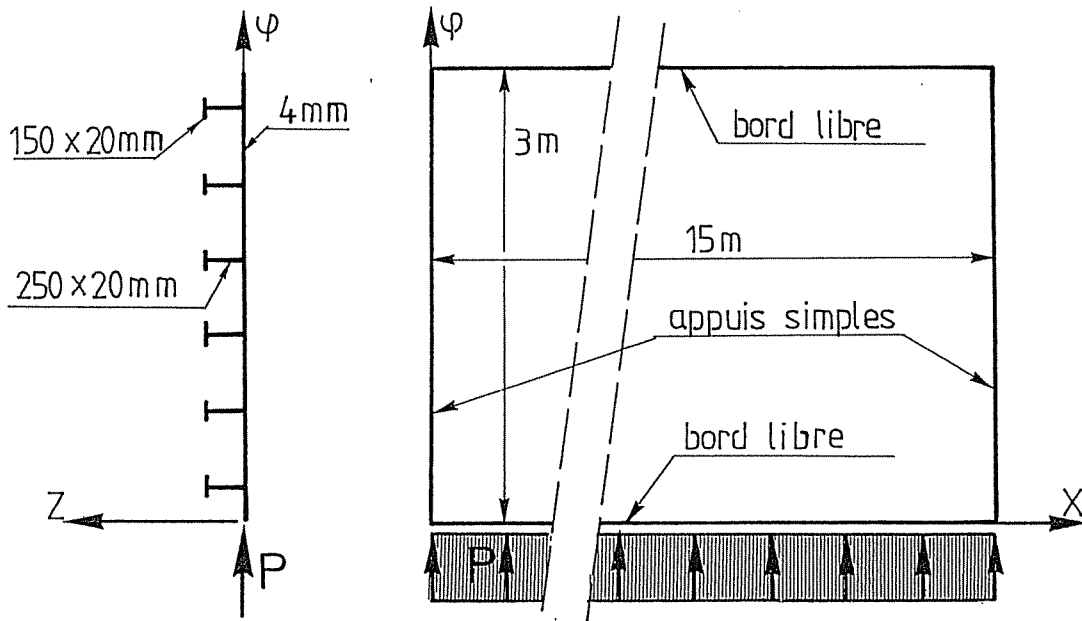


Fig. 20. — Vue d'une plaque raidie soumise à une charge agissant dans son plan.

Si les nervures sont solidarisiées au bordage par l'intermédiaire de nombreux renforts (fig. 21), il est logique de tenir compte de la contribution des semelles à la reprise et à la transmission des efforts de cisaillement. Mais dans le cas contraire, cette collaboration devient négligeable.

Étudions ces 2 alternatives séparément.

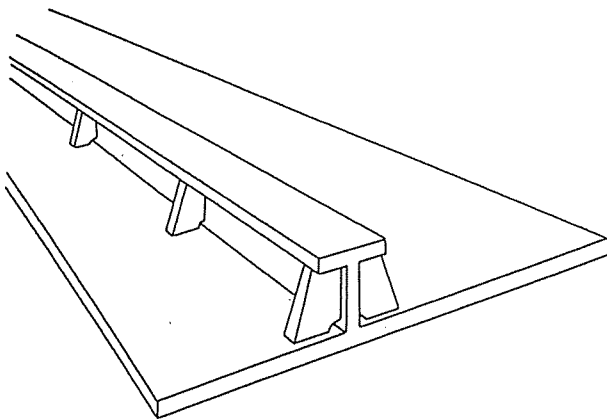


Fig. 21. — Vue d'une nervure rigidement fixée à la plaque.

7.2.1. Étude de la plaque sans transmission du cisaillement aux semelles

L'étude de cette plaque a été réalisée par éléments finis [11] de manière à confirmer nos propres résultats. Vu la symétrie de la structure, la décomposition a été la suivante : 24×5 éléments pour le bordage et 3×5 éléments par nervure, soit un total de 210 éléments comptant 32 DDL chacun, c'est-à-dire, compte tenu des fixations 2 854 degrés de liberté.

En ce qui concerne notre méthode, nous présentons les résultats de 2 discrétisations différentes de cette même structure.

La première (L.B.R.1) ne comporte qu'un seul panneau (système de 8 équations).

La seconde (L.B.R.2), plus détaillée mais aussi la plus coûteuse, comporte 7 panneaux pour le bordage et 3 panneaux par nervure, soit un total de 25 panneaux ; ce qui correspond à un système de 200 inconnues. Cette discrétisation est originale dans le sens qu'elle assimile les âmes et les semelles à des plaques lisses. Les nervures sont dès lors constituées de 3 plaques et sont reliées entre elles par des tronçons de bordage, eux-mêmes discrétisés comme des plaques distinctes. Cette manière d'agir est d'ailleurs une pratique courante dans la méthode des bandes finies.

Un avantage de cette technique de discrétisation est de permettre aux nervures de se déformer indépendamment du bordage ; le principe de la conservation des sections planes n'étant plus une imposition restrictive. De plus, la transmission des efforts entre les nervures et le bordage est cette fois assurée de manière totalement exacte.

Les déplacements v et w à mi-portée relatifs aux 3 approches envisagées sont repris au tableau 2.

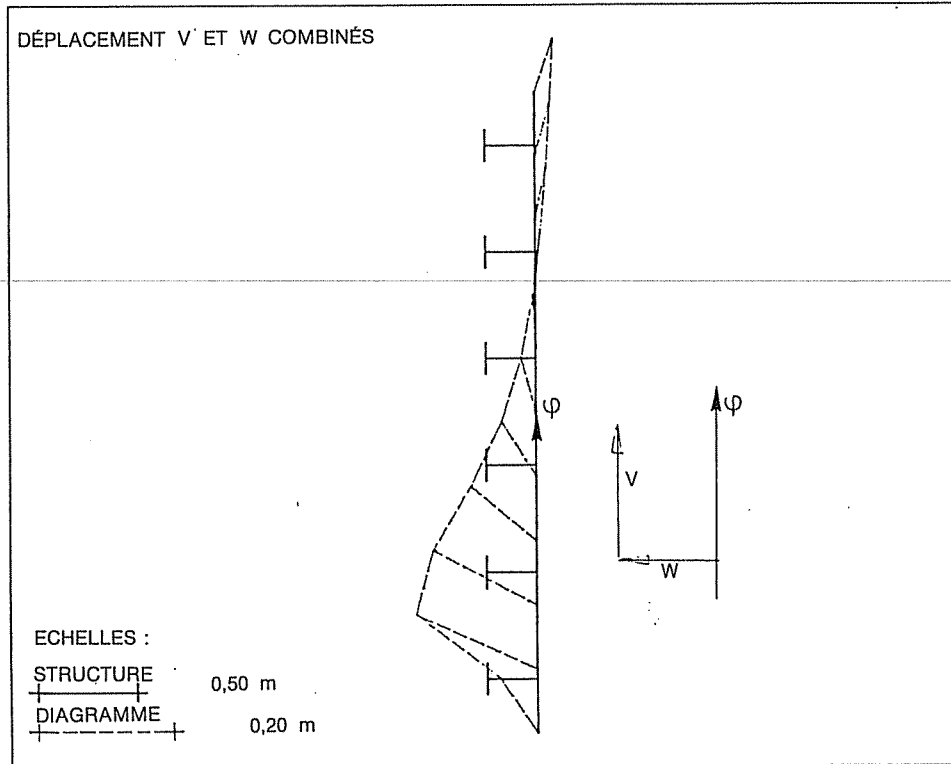


Fig. 22. — Déplacements v et w à mi-portée relatifs à la discrétisation L.B.R.1.

TABLEAU 2
Déplacements v et u à mi-portée
(nervures non rigidement liées au bordage).

	Déplacement selon $O\varphi$ v (cm)	Déplacement selon OX u (cm)
Éléments finis SAMCEF (210 éléments)	18,1	5,14
L.B.R.1, 1 panneau (8 inc.), 6 raid., 7 termes	20,17	5,81
L.B.R.2, 25 panneaux (200 inc.), 7 termes	19,50	5,57

On constate un bon accord entre la solution L.B.R.2 et celle due aux éléments finis. La solution L.B.R.1 est fort proche des 2 précédentes et vu la simplicité de la discrétisation qui la caractérise, elle doit être considérée comme un optimum.

La cause de l'écart enregistré entre la discrétisation L.B.R.1 et les approches L.B.R.2 et éléments finis est logique. En effet, dans ces 2 dernières discrétisations, la collaboration des semelles à la reprise du cisaillement est faible mais pas inexistante. Or, dans l'approche L.B.R.1, les effets des semelles sont par hypothèses annulés. La collaboration des semelles, aussi faible soit elle, justifie à notre avis cette différence de résultat.

7.2.2. Avec transmission du cisaillement aux semelles

Dans le cas des nervure rigidement fixées au bordage par l'intermédiaire de nervures transversales ou par des goussets, nous avons réétudié la structure. Nos résultats sont donnés au tableau 3 et sont comparés avec ceux théoriques dus à de la Résistance des Matériaux.

TABLEAU 3
Déplacements v et u à mi-portée
(nervures rigidement liées au bordage).

	v (cm)	u (cm)
Discrétisation L.B.R.1. 1 panneau, 6 raid.	7,31 (7 termes) 7,70 (1 terme)	2,11 (7 termes) 2,05 (1 terme)
R.D.M	7,1	2,25

La comparaison est excellente et montre combien il est aisé de tenir compte de la présence de multiples renforts qui solidarisent les semelles avec le bordage sans avoir besoin de les discrétiser comme ce serait le cas avec les éléments finis [14].

8. CONCLUSION

Notre but est de présenter une méthode originale, adaptée aux exigences des constructions hydrauliques métalliques, économique à l'usage, d'utilisation aisée et rapide et donnant des résultats clairs ; ces derniers devant être précis, nombreux et détaillés aussi bien au niveau des déplacements que des contraintes.

Ainsi, la méthode des bordages raidis que nous venons de présenter est particulièrement performante. L'étude complète d'une structure complexe comme une porte marée-tempête ou une vanne segment peut, grâce à ce logiciel, être réalisée dans les 12 heures.

Cette méthode permet, outre la prise en compte des charges extérieures classiques, l'introduction de toutes sortes de conditions d'appuis (appui simple, encastrement, appui élastique). Cela permet d'envisager l'étude complète de nombreuses structures, métalliques et en béton dont notamment les constructions hydrauliques telles que : pont-canal, porte d'écluse, vanne de barrage mobile, ...

Une vérification numérique comparative confirme d'ailleurs la qualité du modèle mathématique proposé.

RÉFÉRENCES

- [1] J. E. GOLBERG et H. L. LEVE. — Theory of Prismatic Folded Plate Structures, *Mémoires AIPC*, 1957, vol. 17.
- [2] Y. K. CHEUNG. — Finite Strip Method Analysis of Elastic Slabs, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, déc. 1968, vol. 94, n° EM6.
- [3] R. BARES et Ch. MASSONNET. — Le calcul des grillages de poutres et dalles orthotropes, 1966, Dunod, Paris.
- [4] W. C. SCHNOBRICH. — Different methods of numerical analysis of shells, *IASS*, 1987, bulletin n° 94.
- [5] Ph. RIGO. — Applications des développements harmoniques aux calculs des ouvrages hydrauliques métalliques, Collection des Publications de la Faculté des Sciences Appliquées de l'Université de Liège, n° 120, 1988.
- [6] N. M. DEHOUSSE. — Les bordages raidis en construction hydraulique, *Mémoires du Centre d'Études, de Recherche et d'Essais Scientifiques du Génie Civil* (Nouvelle série), 1961, vol. n° 1, Liège.
- [7] B. FRIEDMAN. — Principles and Techniques of Applied Mathematics, New-York, 1956.
- [8] L. SCHWARTZ. — Théorie des distributions, 2 vol., Coll. Actualités Scientifiques et Industrielles, 1245, Paris, Hermann et Cie, 1966.
- [9] F. B. HILDEBRAND. — Method of Applied Mathematics, New-York, Prentice-Hall, Inc., 1952.
- [10] SAPLI. — Programme Sapli 5 ; Utilisation, Service de Résistance des Matériaux, Université de Liège, 1979.
- [11] SAMCEF. — Système d'Analyse des Milieux Continus par Éléments finis, Laboratoires des Techniques Aéronautiques et Spatiales, U.Lg., 1986.
- [12] A. C. SCRODELIS and K. S. LO. — Computer Analysis of Cylindrical Shells, *Journal of A.C.I., Proc.*, 1964, vol. 61, n° 5.
- [13] R. LAGARD. — Comparaison de 3 éléments finis pour coques, Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées, TFE, 1973.
- [14] P. ARISTAGHES, P. LEBRETON, F. VANSTEENKISTE. — Calcul des portes d'écluses maritimes, *AIPCN*, 1986, bulletin n° 52.

**COMPUTATION
OF STEEL HYDRAULIC STRUCTURES
BY THE HARMONIC EXPANSION METHOD**

The author presents an original method based in stiffened edge hanging, especially adapted to steel hydraulic structures. This method takes into account the usual external loads, but also deals with numerous specific support conditions (simply supported, fixed end restraint, elastic support...).

This high-performance method provides a means of calculating very complex structures in a reasonable lapse of time (below 12 hours).

**BERECHNUNG VON METALLKONSTRUKTIONEN
IM WASSERBAU DURCH DAS VERFAHREN
DER HARMONISCHEN ENTWICKLUNGEN**

Der Autor präsentiert hier ein originäres Verfahren: die Methode der versteiften Känder ist insbesondere für Metallkonstruktionen im Wasserbau geeignet. Dieses Verfahren erlaubt es, zusätzlich zu den klassischen äußeren Lastfällen zahlreiche Auflagerbedingungen einzuführen (gelenkige Lagerung, Einspannung, elastische Bettung,...).

Dieses besonders wirkungsvolle Verfahren gestattet eine genaue und ins Einzelne gehende Untersuchung komplexer Konstruktionen bei vernünftigen Zeitaufwand (weniger 12 Stunde).

**CALCULO DE LAS CONSTRUCCIONES
HIDRAULICAS MEDIANTE EL METODO
DE LOS DESARROLLOS ARMONICOS**

En este artículo, el autor presenta un método original, el método de los rebordes rigidizados, especialmente adaptado para las construcciones hidráulicas metálicas. Además de permitir la integración de las cargas externas convencionales, este método permite la introducción de numerosos medios de apoyo específicos (apoyo sencillo, empotramiento, apoyo elástico, etc.).

Sumamente eficaz, este método facilita el estudio de estructuras complejas de forma precisa y detallada en periodos de tiempo razonables (inferior 12 horas).

Les thèses et la méthode d'exposition adoptées par les auteurs peuvent parfois heurter certains points de vue habituellement admis. Mais il doit être compris que ces thèses, à l'égard desquelles l'Institut Technique ne saurait prendre parti, ne visent en rien les personnes ni le principe des institutions.

© 1989 by S.E.B.T.P. (S.A.R.L.).