L'OPTIMISATION DE TOPOLOGIE EN MECANIQUE

Pierre DUYSINX - Premier Assistant à l'Université de Liège - Institut de Mécanique, C3 - 21 Rue Solvay, 4000 Liège

Introduction

L'ingénieur est confronté à un contexte industriel de plus en plus concurrentiel. Les clients exigent une meilleure adéquation des produits à leurs besoins. La concurrence entre les entreprises impose de réduire les temps de développement, de mise au point et de production des nouveaux produits. En outre, l'art de l'ingénieur consiste aussi à rencontrer des critères de performance de plus en plus grands. Pour répondre à ces défis, des efforts considérables sont réalisés pour améliorer les techniques de conception. Les techniques d'optimisation interviennent de façon primordiale dans cette perspective. Elles permettent tout d'abord d'automatiser et d'accélérer les tâches fastidieuses du processus de conception. Ensuite l'utilisation de méthodes mathématiques puissantes d'optimisation permet la recherche de solutions innovantes et originales. L'optimisation permet également de considérer et de résoudre des problèmes de conception de grande taille (en termes du nombre de paramètres de conception et de contraintes) qu'il est impossible de traiter par la seule intelligence humaine.

Historiquement, la complexité et la généralité des problèmes abordés par l'optimisation des structures mécaniques n'ont cessé de croître. Il y 25 ans, seules les *dimensions transversales* des éléments de structure pouvaient être modifiées. Par la suite, la résolution des problèmes d'*optimisation de forme* a permis de soulever une classe de problèmes plus complexes, dans lesquels les contours de la pièce peuvent être modifiés. L'évolution la plus récente des techniques d'optimisation concerne l'*optimisation topologique*. Celle-ci permet de modifier la morphologie des pièces, c'est-à-dire toutes les données géométriques fondamentales qui décrivent la nature, le nombre et la connectivité des éléments structuraux, la disposition relative des trous et des domaines occupés par la matière. La généralité de la démarche permet d'accéder à des gains de performance très importants. On estime généralement que l'optimisation de la topologie permet des gains pouvant aller jusqu'à 50% par rapport à des conceptions intuitives.

Depuis les premières pierres posées par Bendsøe et Kikuchi (1988), l'optimisation topologique a suscité le plus vif intérêt en mécanique. En plus de l'intérêt théorique en mécanique des solides, l'optimisation topologique propose au praticien une méthode puissante pour déterminer sans a priori et de manière rationnelle la topologie des composants mécaniques, choix qui était jusqu'alors laissé à l'empirisme ou, pire, à l'intuition.

Formulation de l'optimisation topologique

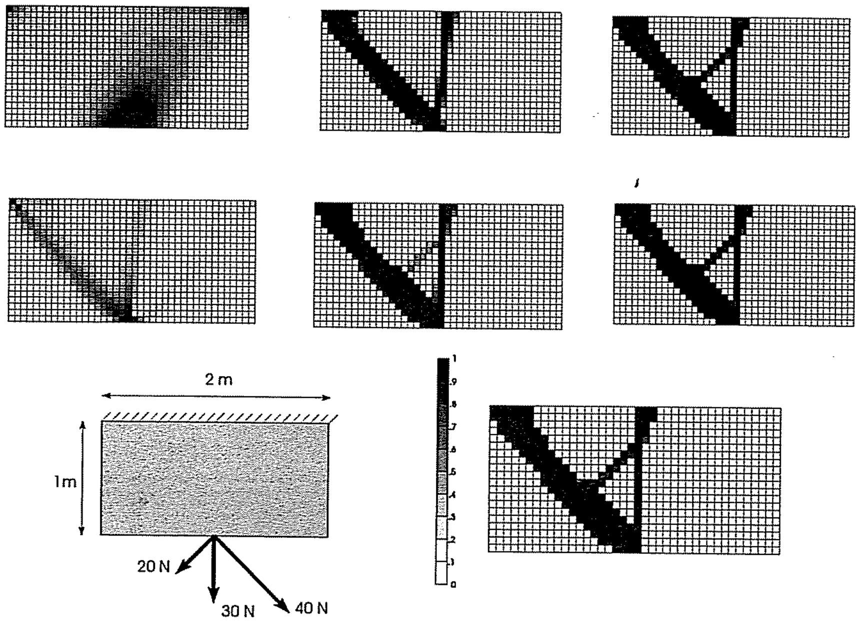
On peut montrer que la conception d'une pièce mécanique sans a priori sur sa topologie ne peut pas être effectuée à partir d'un modèle paramétrique classique basé sur des courbes et des surfaces paramétrées. Intuitivement, il est aisé de comprendre que cette paramétrisation ne permet pas de définir des notions aussi élémentaires que la dérivée par rapport au nombre de trous présents dans une structure. Aussi, on se tourne vers une description de la pièce en termes de domaine occupé par la matière. De là, on envisage le problème de topologie comme une distribution optimale de matériau sur un domaine de conception donné.

Pour calculer les performances mécaniques de la pièce au moyen de techniques numériques puissantes telles que les éléments finis, on emploie une formulation dite "discrétisée ". Classiquement (Bendsøe, 1995) le domaine de conception contenant la pièce est recouvert par un réseau maillé. La distribution de densité discrétisée est une fonction constante sur chaque élément. Le vecteur des variables de conception du problème d'optimisation est formé des densités de chaque élément. Celles-ci peuvent varier entre la densité relative du solide (1) ou celle du vide (0 ou une valeur très petite). Le problème d'optimisation consiste alors à trouver les valeurs des densités relatives qui maximisent une performance pour un coût donné.

Pour obtenir une bonne résolution de l'image de la structure, on doit introduire un nombre rapidement croissant d'éléments et donc de variables de conception. On est alors amené à traiter des problèmes d'optimisation de très grande taille : on compte généralement entre 1.000 et 100.000 variables de conception. C'est la raison pour laquelle pendant longtemps les scientifiques se sont limités à ne considérer que des critères globaux tels que le travail développé par les charges appliquées, encore appelé *compliance*. La compliance présente le très grand avantage d'être facilement calculable (ainsi que ses dérivées) et d'offrir un critère assez représentatif de la raideur globale de la structure. Divers travaux ont ensuite permis d'étendre la méthode d'optimisation topologique aux problèmes de vibration, de stabilité, etc. (voir Bendsøe, 1995 pour une revue). Toutefois, malgré la nature diverse des critères considérés, le problème conserve souvent la même complexité algorithmique que le problème de compliance minimale.

L'exemple repris à la figure 1 illustre la manière avec laquelle le processus d'optimisation conduit à une topologie structurale au moyen d'une distribution de matière de volume fixé. Le processus d'optimisation recherche ici la configuration qui présente la plus petite flexibili-

Figure 1 : ***Genèse d'une structure au cours des itérations du processus d'optimisation***



té sous l'action de trois chargements d'intensités et de directions différentes. Au cours des itérations, le "nuage" de matériau composite poreux se transforme progressivement en une distribution qui suggère une structure formée d'un treillis 2 barres.

L'application naïve du processus d'optimisation d'une distribution de matière conduit cependant à une difficulté majeure. On constate que les distributions de matière obtenues numériquement peuvent présenter des topologies différentes en fonction de la taille du maillage qui est adopté pour calculer la solution. Avec le raffinement du maillage, l'ingénieur observe que les solutions tendent à reproduire des microstructures semblables à celles des matériaux composites formés de vide et de solide.

Ceci signifie que le problème naïf d'optimisation de la distribution de matière est mal posé. Pour assurer la "régularisation du problème ", on dispose de plusieurs alternatives.

- On peut **étendre** l'espace des conceptions admissibles à tous les matériaux composites poreux de densité comprise entre le vide et le solide, de sorte que les matériaux composites sont inclus dans les conceptions possibles. On parle alors de *méthode d'homogénéisation* car il est nécessaire de disposer de la théorie mathématique de l'homogénéisation pour déterminer les propriétés moyennes de ces matériaux composites et les utiliser dans la méthode d'optimisation.
- On peut également **restreindre** l'espace des conceptions admissibles, pour interdire toutes les distributions dont la densité varie trop rapidement et donc tous les matériaux composites. Dans cette voie, la *méthode dite du périmètre* est une des plus élégantes (Haber et al. 1996). Pour des pièces planes, elle consiste à borner non seulement la surface occupée par la matière, mais aussi son périmètre. On comprend intuitivement que pour un périmètre donné, on restreint la complexité de la conception et qu'a fortiori il est impossible d'avoir un nombre infini de trous comme dans les matériaux composites.

Quelques contributions...

Microstructures et problème d'homogénéisation

Pour la méthode d'homogénéisation, on doit introduire des microstructures poreuses. La question du choix de la microstructure et de son influence sur la topologie prédite a été au centre de nombreux débats scientifiques. Dans Duysinx (1996), une vaste étude à été menée tant avec des outils théoriques qu'avec des expériences numériques. A cette fin, on a considéré plusieurs microstructures dont certaines ont même été imaginées. Les conclusions de cette étude se résument succinctement comme suit :

- L'emploi de *microstructures orthotropes* conduit à des solutions aux performances extrêmes, égales ou proches des bornes permises par la physique. Elles peuvent donc servir à étudier la faisabilité d'une solution satisfaisant à un cahier de charges. En contrepartie, ces solutions composites sont difficiles à interpréter et très difficiles ou impossibles à manufacturer. Les microstructures isotropes sont plus intéressantes pour les applications pratiques, car elles conduisent à des solutions qui prennent en compte la nature du matériau isotrope qui sera adopté pour la fabrication (générale ment un métal).
- Le facteur principal pour générer des distributions de type vide-solide faciles à interpréter est la *pénalisation des densités intermédiaires*, c'est-à-dire la propriété de donner des caractéristiques physiques faibles en regard du coût en matériau. L'inconvénient de la pénalisation des densités intermédiaires est qu'elle réintroduit le phénomène de dépendance des solutions vis-à-vis du maillage. La parade à cette difficulté provient de l'utilisation d'une restriction additionnelle sur le périmètre.

Une procédure de contrôle du périmètre

La restriction sur le périmètre est une méthode élégante pour assurer la stabilité des solutions numériques quel que soit le niveau de raffinement du maillage de calcul et quelle que soit la microstructure utilisée. L'obstacle majeur à l'utilisation de cette méthode réside dans le fait que la contrainte de périmètre est très difficile à prendre en compte lors de la résolution numérique. Pour y remédier, une procédure numérique originale a été créée et validée (Duysinx, 1997). Cette procédure se base sur une étude théorique de la nature même de la fonction périmètre. Le contrôle du périmètre est illustré à la figure 2 avec le problème dit de la poutre de plancher d'Airbus. Le périmètre permet de diriger la solution vers une topologie de raideur maximale ayant une complexité limitée (par un périmètre réduit).

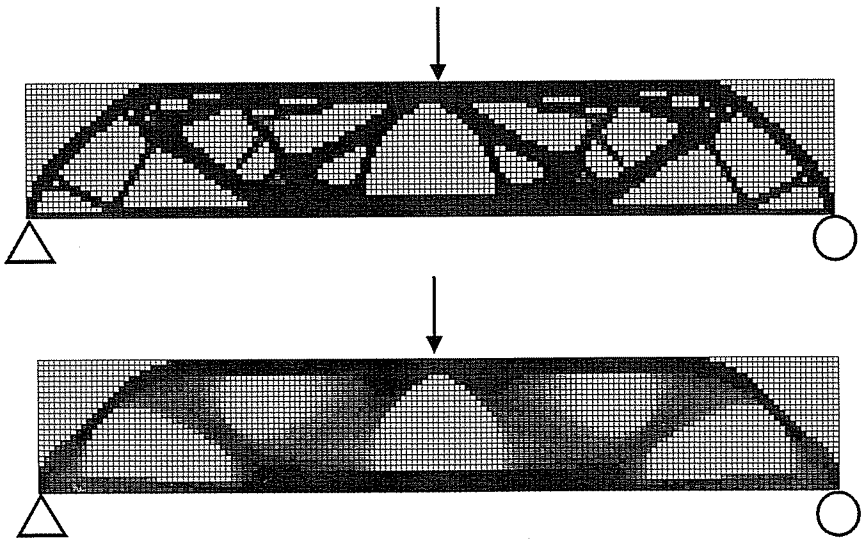
Une approche numérique efficace des problèmes d'optimisation de très grande taille

Comme signalé, les problèmes d'optimisation topologiques sont des problèmes d'optimisation de très grande taille et donc difficiles à résoudre. L'approche nouvelle mise en avant consiste à recourir aux méthodes de programma-

(suite p.8)

(SUITE DE LA PAGE 7)

Figure 2 : Poutre de plancher d'Airbus sans et avec périmètre borné



tion mathématique reposant ici sur la méthode des approximations convexes séparables et sur les algorithmes de résolution basés sur les méthodes duales (Duysinx, 1997). Une nouvelle procédure permettant de générer des approximations structurales de haute qualité pour des problèmes de grande taille a été mise en avant. L'approche de programmation mathématique apporte une réduction importante des temps de calcul. En outre, elle apporte une généralisation de la gamme des problèmes que l'on peut résoudre, ainsi qu'une souplesse d'utilisation. L'approche de programmation mathématique est un facteur favorable à une industrialisation de l'optimisation topologique.

Le traitement du problème de résistance maximale

Pendant près de dix années, seuls ont été considérés des problèmes de conception dont la complexité est similaire à celle du problème de raideur. Le problème de résistance maximale, basé sur des critères locaux de rupture, est resté sans solution, même s'il est d'une grande importance pratique pour l'ingénieur. La première difficulté consiste à disposer de critères de rupture capables de prédire la première rupture au sein de matériaux composites de densité variables (Duysinx et Bendsøe, 1997). Ensuite, on doit recourir à la théorie mathématique des ε-relaxations (Cheng et Guo, 1997) pour contourner le paradoxe dit de "singularité des contraintes de tension ", qui ne permet pas à un algorithme d'optimisation de retirer ou d'introduire de nouveaux membres structuraux sans violer les contraintes de tension. Enfin, la résolution numérique du problème de résistance en topologie est très lourde, car on doit traiter simultanément des milliers de variables et de restrictions sur les contraintes. La résolution de tels problèmes avec des temps de calcul raisonnables est possible dans le cadre de l'approche de programmation mathématique (Duysinx et Bendsøe, 1997).

Conclusion et perspectives d'avenir

L'optimisation topologique est un outil extrêmement puissant et précieux pour l'ingénieur mécanicien. Les travaux évoqués ici ont permis de contribuer de façon importante à accroître la fiabilité et la généralité des techniques d'optimisation topologique. De ce fait, celles-ci ont alors pu évoluer vers une maturité industrielle. Pour preuve, un outil informatique d'optimisation topologique prototype a été développé dans le cadre du module OPTI du progiciel SAMCEF.

De nouvelles applications ou perspectives se dégagent chaque jour pour les développements et l'utilisation de l'optimisation topologique. A titre d'exemple, on peut citer :

- l'optimisation des structures avec des matériaux nouveaux et la création de matériaux nouveaux à l'aide de l'optimisation ;
- l'optimisation de la topologie de composants mécaniques tenant compte de leurs contraintes fonction nelles (aspects structuraux) et des contraintes de fabrication (processus de manufacture) ;
- la définition de conceptions inno vantes pour les microsystèmes (MEMS).

L'optimisation topologique semble donc s'établir comme un des outils de l'ingénieur mécanicien du 21ème siècle. ■

Références

Bendsøe, M.P. et N. Kikuchi (1988). "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 71, 1988, pp 197-224.

Bendsøe, M.P. (1995). "Optimization of structural topology, shape, and material", Springer Verlag, Heidelberg, 1995.

Cheng G.D. et X. Guo (1997). "ε-relaxed approach in structural topology optimization". Structural Optimization, vol. 13 pp 258-266.

Duysinx, P. (1996). "Optimisation topologique : du milieu continu à la structure élastique", Thèse de doctorat, Université de Liège, Faculté des Sciences appliquées, février 1996.

Duysinx P. (1997) : "Layout optimization: a mathematical programming approach", Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics, DCAMM report No 540, march 1997.

Duysinx P. et Bendsøe M.P. (1997) : "Topology optimization of continuum structures with local stress constraints", accepté pour publication dans *International journal for numerical methods in engineering.*

Haber, R.B., C.S. Jog et M.P. Bendsøe (1996). "A new approach to aariable-topology shape design using a constraint on perimeter", *Structural optimization*, vol. 11, pp 1-12, 1996.