Quadrature n° 111 (2019) 1-6

[Analyse]

Sur la notion de dimension

par Samuel NICOLAY*

Résumé.

Nous proposons ici quelques considérations sur le concept de dimension, inspirées par la notion physique renvoyant au nombre de degrés de liberté. L'objectif est d'introduire de manière naturelle la dimension de Hausdorff. Afin d'illustrer nos propos, nous calculons les dimensions topologique et de Hausdorff de l'ensemble triadique de Cantor.

I Introduction

Intuitivement, la dimension d'un espace est le nombre de variables nécessaire permettant de décrire le mouvement d'un point matériel. Cette interprétation physique fait sens pour les espaces vectoriels, où la dimension est le cardinal d'une base (ce cardinal ne dépendant pas de la base choisie). Cependant, au début du *XX*$^{\mathrm{e}}$ siècle, deux célèbres découvertes ont mis en évidence les inconsistances de cette approche en général. Tout d'abord la bijection de Cantor entre les points d'une droite et les points d'un plan met à mal l'idée « qu'un plan est plus riche qu'une droite » [3]. Ensuite, l'application continue de Peano d'un intervalle sur un carré semble contredire l'idée même que la dimension représente le plus petit nombre de paramètres réels requis pour décrire la position d'un point de l'espace [16]. La question naturelle résultant de ces découvertes était de savoir s'il est possible de trouver une correspondance entre deux espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ avec $m \neq n$ jouissant des propriétés combinées des constructions de Cantor et Peano. Autrement dit, existe-t-il un homéomorphisme entre deux tels espaces ? La réponse, par la négative, apportée par Brouwer à cette question [2] laissa la porte ouverte à toute une série d'apports. La dimension topologique, non-restreinte aux espaces vectoriels, pouvait enfin être définie de manière satisfaisante et d'autres notions de dimension allaient permettre de caractériser les « curiosités mathématiques », telles celles introduites par Peano, pour donner lieu à ce qu'on appelle aujourd'hui la géométrie fractale.

Dans cet article, nous nous proposons d'abord de définir la notion de dimension au sens topologique avant d'introduire la dimension de Hausdorff, qui est une des notions que l'on qualifie de « dimension fractale ». Pour le faire de manière naturelle, nous établissons d'abord un lien entre la dimension topologique et la mesure de Lebesgue. La généralisation de cette mesure donne naturellement lieu à la dimension de Hausdorff. Comme application, nous montrons que la dimension topologique de l'ensemble (triadique) de Cantor est 0, tandis que sa dimension de Hausdorff est le nombre transcendant

$$\ln 2/\ln 3 \approx 0,630\,929\,753\,571\,457\,437.$$

Le fait que ce nombre soit transcendant est une conséquence du théorème de Gelfond-Schneider [18].

Quelques notions fondamentales en topologie et en théorie de la mesure sont utiles pour aborder sereinement le sujet. Toutefois, le lecteur néophyte pourra se baser sur l'intuition qui sous-tend toutes les notions présentées ici et largement mise en avant pour dépasser ses lacunes qui ne sont en rien rédhibitoires pour comprendre les concepts présentés ici.

II La dimension topologique

La dimension topologique est un invariant topologique destiné à étendre aux espaces topologiques la notion algébrique de dimension d'un espace vectoriel.

* S.Nicolay@ulg.ac.be

Le lecteur désirant approfondir le sujet pourra consulter [5, 11] entre autres.

II.1 Dimension de Menger-Urysohn

Par soucis de simplicité, nous nous placerons dans un espace topologique X métrisable et séparable. La notion de dimension, telle qu'introduite par Menger [15] et Urysohn [20, 22] est la suivante :

Définition II.1. *La dimension de X est définie par récurrence ;*

- *X est de dimension -1 si et seulement si X est l'ensemble vide,*
- *X est de dimension $\leq n$ au point $x \in X$, où n est un nombre naturel, si pour tout voisinage ν de x, il existe un ouvert U vérifiant $x \in U \subset \nu$ dont la frontière est de dimension $\leq n-1$,*
- *X est de dimension $\leq n$ si X est de dimension $\leq n$ en chacun de ces points,*
- *X est de dimension n s'il est de dimension $\leq n$ et s'il existe un point en lequel X n'est pas de dimension $\leq n-1$,*
- *X est de dimension ∞ si X n'est de dimension $\leq n$ pour aucun n.*

Cette définition n'est pas sans rappeler l'approche de Poincaré : ce dernier a également proposé une définition intuitive de la dimension reposant sur une récurrence [17]. Selon cette idée, dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, on considère que le point est de dimension nulle. Une droite pouvant être « coupée » en deux par un point, elle est de dimension 1, c'est-à-dire la dimension du point plus 1. De même, un plan est de dimension 2, puisqu'il peut être « coupé » en deux par une droite.

Si X est de dimension n, avec n fini, alors X contient un sous-ensemble de dimension m, pour tout $m \leq n$. De fait, comme la dimension de X est strictement supérieure à $n-1$, il existe un point x de X et un voisinage de ce point pour lequel la frontière de tout ouvert inclus dans ce voisinage et contenant x est de dimension $\geq n-1$. De plus, puisque la dimension de X est $\leq n$, il existe un ensemble ouvert U inclus dans le même voisinage, contenant lui aussi x et dont la frontière est de dimension $\leq n-1$. Ainsi la frontière de U est un ensemble de X de dimension $n-1$. La conclusion s'ensuit. De la même manière, on peut démontrer la proposition suivante.

Proposition II.2. *Un sous-espace d'un espace de dimension $\leq n$ est de dimension $\leq n$.*

On peut aussi, en déployant plus d'efforts, obtenir le résultat classique suivant.

Proposition II.3. *La dimension topologique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est n.*

Cette définition reste valable pour les espaces réguliers mais revêt alors des propriétés rendant difficile le développement d'une véritable théorie de la dimension. Par exemple, la dimension peut être non nulle pour des espaces dénombrables [21]. Il existe une notion similaire de dimension concernant les espaces normaux, attribuée à Čech [4] ; pour les espaces métrisables et séparables, ces définitions coïncident.

II.2 Dimension de Lebesgue

On peut résumer la propriété de recouvrement de Lebesgue comme suit : étant donné $\varepsilon > 0$, un hypercube de $\mathbb{R}^n$ peut être recouvert par une famille finie d'ensembles fermés dont le diamètre est inférieur à ε telle que l'intersection de $n+2$ tels ensembles est vide, alors que cette propriété n'est plus vérifiée lorsque $n+2$ est remplacé par $n+1$ [12]. Cette propriétés donne également lieu à une notion de dimension.

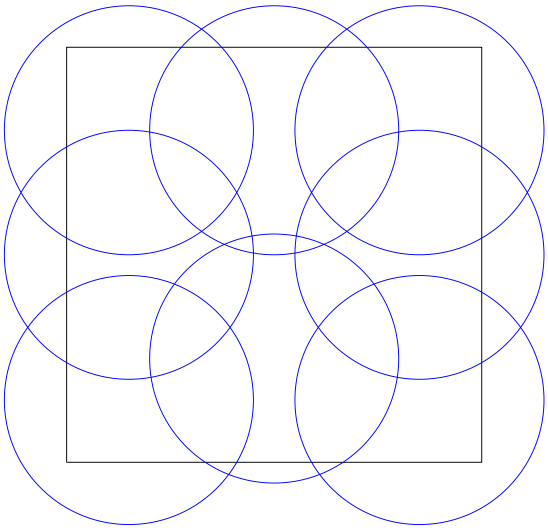

Figure 1. Illustration du théorème de Lebesgue en dimension deux : ici le carré est recouvert de disques (de même diamètre) choisis tels que l'intersection de quatre disques est toujours vide.

Nous avons d'abord besoin de formaliser l'intuition.

Définition II.4. *Soit X un ensemble et $\mathscr{A}$ une collection de sous-ensembles de X ; l'ordre de $\mathscr{A}$ est, s'il existe, le plus grand nombre entier n pour lequel $\mathscr{A}$ contient $n+1$ ensembles dont l'intersection est non vide. Si un tel nombre n'existe pas, $\mathscr{A}$ est dit d'ordre infini.*

Ainsi, si $\mathscr{A}$ est d'ordre $n \in \mathbb{Z}$, alors si $A_1, \ldots, A_{n+2}$ sont $n+2$ éléments distincts de $\mathscr{A}$, on a nécessairement

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n+2} = \emptyset.$$

En particulier, une famille d'ordre -1 est uniquement formée de l'ensemble vide. Une famille d'ordre 0 est constituée d'ensembles deux à deux disjoints non tous égaux à l'ensemble vide.

Définition II.5. *Un recouvrement $\mathscr{B}$ de X est un raffinement du recouvrement $\mathscr{A}$ du même ensemble si, pour tout $B \in \mathscr{B}$, il existe $A \in \mathscr{A}$ vérifiant $B \subset A$.*

En particulier, tout sous-recouvrement d'un recouvrement donné en est un raffinement. La dimension de Lebesgue est une simple généralisation de la propriété de recouvrement.

Définition II.6. *Soit X un espace normal ; la dimension de Lebesgue de X est $\leq n$ si pour tout recouvrement ouvert fini de X il en existe un raffinement d'ordre $\leq n$. Bien entendu, la dimension de Lebesgue de X est égale à n si elle est $\leq n$ et n'est pas $\leq n-1$. Aussi, X est de dimension de Lebesgue ∞ si X n'est de dimension de Lebesgue $\leq n$ pour aucun n .*

On peut montrer que pour un espace métrique séparable, la dimension de Lebesgue correspond à la première notion de dimension topologique introduite (il s'agit du théorème de coïncidence [10]).

Enfin, introduisons une dernière notion naturelle de dimension, différente de celles déjà présentées. Si $\mathscr{A}$ est une famille de sous-ensembles d'un espace métrique X, posons

$$|\mathscr{A}| = \sup\{|A| : A \in \mathscr{A}\},$$

où $|A|$ désigne le diamètre de $A \subset X$. La dimension métrique de X est définie de manière analogue à la dimension de Lebesgue : la dimension métrique de X est $\leq n$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement ouvert (non-nécessairement fini) $\mathscr{U}$ de X d'ordre n au plus tel que $|\mathscr{U}| < \varepsilon$. À partir de là, la définition de la dimension métrique est analogue à celle de la dimension de Lebesgue. Pour les espaces métriques compacts, ces dimensions coïncident, mais ce n'est pas le cas pour les espaces métriques séparables en général [19]. Qui plus est, la dimension métrique n'est pas un invariant topologique ; cette dimension dépend de la distance définissant l'espace métrique. Cela étant, pour tout espace métrique séparable X, la dimension métrique de X est majorée par sa dimension de Lebesgue.

III Dimension fractale

Même si l'on a rigoureusement défini la dimension d'un ensemble de l'espace euclidien, force est de constater que cette notion ne permet pas de rendre compte de la complexité de certaines « curiosités » issues de l'étude fractale. C'est justement en se basant sur cette limitation que l'on peut obtenir une définition, certes restrictive, du caractère fractal. Le lecteur intéressé par ces notions pourra consulter [6–9, 14] par exemple.

III.1 Sur la mesure de Lebesgue et la dimension topologique

On peut définir la dimension topologique d'un ensemble de $\mathbb{R}^n$ via la mesure de Lebesgue. Ainsi, si la mesure de Lebesgue de dimension n d'un ensemble est un nombre non nul, cet ensemble est de dimension n. Cette approche nous servira de base pour introduire la dimension de Hausdorff.

Commençons par définir brièvement la mesure de Lebesgue de manière à facilement définir la mesure de Hausdorff. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b ($a \leq b$), posons $\mathrm{Vol}(I) = b - a$ et $\mathrm{Vol}(\emptyset) = 0$. Une partie I de $\mathbb{R}^n$ est un hyperrectangle s'il est le produit cartésien d'intervalles (non vides) de $\mathbb{R}$, i.e. s'il existe des intervalles $I_1, \ldots, I_n$ de $\mathbb{R}$ tels que

$$I = I_1 \times \cdots \times I_n.$$

On pose alors $\mathrm{Vol}(I) = \prod_{k=1}^n \mathrm{Vol}(I_k)$; il s'agit donc du volume usuel de I. Bien entendu, un intervalle $I_1 \times \cdots \times I_n$ de $\mathbb{R}^n$ est un hypercube si $\mathrm{Vol}(I_j) = \mathrm{Vol}(I_k)$ pour tous j,k ($1 \leq j,k \leq n$). Pour un tel ensemble I, on a évidemment $\mathrm{Vol}(I) = (|I|/\sqrt{n})^n$. Soit $\mathscr{C}^n$ la collection des hypercubes compacts de $\mathbb{R}^n$ et, étant donné une partie E de $\mathbb{R}^n$, posons

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^n(E) &= \inf\{\sum_{k=1}^\infty \mathrm{Vol}(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^\infty I_k,\ I_k \in \mathscr{C}^n \forall k\} \\ &= \frac{1}{n^{n/2}} \inf\{\sum_{k=1}^\infty |I_k|^n : E \subset \bigcup_{k=1}^\infty I_k,\ I_k \in \mathscr{C}^n \forall k\}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{L}^n(E)$ représente une mesure du recouvrement optimum de E par des hypercubes (compacts) de $\mathbb{R}^n$. On vérifie sans peine qu'il s'agit d'une mesure extérieure métrique. On obtient donc la définition suivante.

Définition III.1. *Pour $n > 0$, la restriction de $\mathscr{L}^n$ à la σ-algèbre des ensembles $\mathscr{L}^n$-mesurables définit une mesure, appelée mesure de Lebesgue de dimension n. On pose $\mathscr{L}^0(E) = \#E$ (où $\#E$ représente le nombre d'éléments, éventuellement infini, de E).*

Il ne s'agit pas de la manière la plus classique d'introduire la mesure de Lebesgue, mais on constate rapidement qu'elle coïncide avec les définitions usuelles (on utilise en général des recouvrements par des hyperrectangles, mais on peut même remplacer les hypercubes par un réseau sans changer la mesure obtenue) ; en particulier, la mesure est invariante par translation et finie sur les ensembles boréliens bornés (ce qui permet d'affirmer qu'il s'agit de la mesure de Lebesgue usuelle).

Soit m et m' deux nombres entiers tels que $0 \leq m' < m$; par construction, on a $\mathscr{L}^m(E) \leq \mathscr{L}^{m'}(E)$. De plus, $\mathscr{L}^m(E) > 0$ implique $\mathscr{L}^{m'}(E) = \infty$, c'est-à-dire $\mathscr{L}^{m'}(E) < \infty$ implique $\mathscr{L}^m(E) = 0$. Ces remarques traduisent simplement l'intuition affirmant que « la longueur d'une surface est infinie », ou encore que « le volume d'une surface est nul ». Intuitivement encore, la dimension d'un ensemble E est le plus grand nombre entier m pour lequel $\mathscr{L}^m(E)$ n'est pas nul. La définition suivante est licite.

Définition III.2. *Soit E un ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$; la dimension de E est le nombre*

$$\sup\{m : \mathscr{L}^m(E) > 0\}.$$

La dimension de l'ensemble vide est par définition égale à -1.

Il est relativement facile de montrer que cette définition correspond à la dimension topologique telle qu'introduite par Menger et Urysohn (si E est une boule de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathscr{L}^n(E)$ est un nombre strictement positif).

III.2 La dimension de Hausdorff

On peut voir la mesure de Hausdorff comme une généralisation de la mesure de Lebesgue. La dimension de Hausdorff est alors introduite de manière analogue à la Définition III.2, à ceci près que m est maintenant un nombre réel positif.

La mesure de Hausdorff est une extension assez naturelle de la mesure de Lebesgue. Étant donné un ensemble E de $\mathbb{R}^n$ (on peut, en toute généralité, considérer un espace métrique séparable), $s > 0$ et $\varepsilon > 0$, on définit la quantité $\mathscr{H}^s_\varepsilon(E)$ comme une mesure du recouvrement optimal de E par des ensembles dont le diamètre est subordonné à ε :

$$\mathscr{H}^s_\varepsilon(E) = \inf\{\sum_{k=1}^\infty |E_k|^s : E \subset \bigcup_{k=1}^\infty E_k,\ |E_k| < \varepsilon\ \forall k\}. \tag{1}$$

Clairement, il s'agit d'une mesure extérieure sur $\mathbb{R}^n$, i.e. d'une application croissante, dénombrablement sous-additive (ce qui est une contrainte plus faible que pour une mesure, qui doit être dénombrablement additive) et qui associe 0 à l'ensemble vide. La mesure extérieure de Hausdorff est obtenue en faisant tendre ε vers 0 :

$$\mathscr{H}^s(E) = \sup_{\varepsilon>0} \mathscr{H}^s_\varepsilon(E)$$

On montre aisément que $\mathscr{H}^s$ est une mesure extérieure métrique.

Définition III.3. *Pour $n > 0$, la restriction de $\mathscr{H}^s$ à la σ-algèbre des ensembles $\mathscr{H}^s$-mesurables définit une mesure, appelée mesure de Hausdorff de dimension s. On pose $\mathscr{H}^0(E) = \#E$.*

L'analogie avec la mesure de Lebesgue est évident.

Remarque III.4. Lors de la définition de la mesure extérieure de Lebesgue, on aurait pu poser

$$\mathscr{L}^n_\varepsilon(E) = \frac{1}{n^{n/2}} \inf\{\sum_{k=1}^\infty |I_k|^n : E \subset \bigcup_{k=1}^\infty I_k,$$
$$I_k \in \mathscr{C}^n, |I_k| < \varepsilon\ \forall k\}$$

pour obtenir

$$\mathscr{L}^n(E) = \sup_{\varepsilon>0} \mathscr{L}^n_\varepsilon(E).$$

Cependant, cette étape est inutile, de par la nature des ensembles utilisés pour le recouvrement (un hypercube étant constitué d'hypercubes).

Par construction, la mesure de Hausdorff est invariante par translation ; il est donc naturel de supposer qu'il existe un lien entre cette mesure et celle de Lebesgue. Ce lien est donné par la proposition suivante.

Théorème III.5. *Si n est un nombre naturel strictement positif, on a, pour tout ensemble E de $\mathbb{R}^n$,*

$$\mathscr{L}^n(E) = \frac{\pi^{n/2}}{2^n \Gamma(n/2)} \mathscr{H}^n(E).$$

On reconnaît le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ intervenant dans la formule précédente.

Pour tout ensemble E de $\mathbb{R}^n$, la mesure de Hausdorff $\mathscr{H}^s(E)$ est décroissante lorsque s varie de 0 à l'infini. De plus, la relation suivante est vérifiée lorsque $0 \leq s < t$:

$$\mathscr{H}^s_\varepsilon(E) \geq \frac{\mathscr{H}^t_\varepsilon(E)}{\varepsilon^{t-s}},$$

ce qui montre que $\mathscr{H}^t(E) > 0$ implique $\mathscr{H}^s = \infty$. La définition de la dimension de Hausdorff est alors naturelle.

Définition III.6. *Soit E un ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$; la dimension de Hausdorff de E est le nombre*

$$\sup\{s : \mathscr{H}^s(E) > 0\}.$$

La dimension de l'ensemble vide est par définition égale à -1.

Il existe une relation générale assez naturelle entre les dimensions topologique et de Hausdorff.

Proposition III.7. *Si E est un ensemble de $\mathbb{R}^n$, alors, si t désigne la dimension topologique de E et s sa dimension de Hausdorff, on a toujours*

$$t \leq s \leq n.$$

La première inégalité reste valide pour les espaces métriques séparables.

Nous pouvons maintenant donner une définition d'un ensemble fractal (il est à noter que cette approche est souvent considérée comme trop restrictive) [13].

Définition III.8. *Un ensemble de $\mathbb{R}^n$ est fractal si sa dimension de Hausdorff est strictement supérieure à sa dimension topologique.*

Certains auteurs proposent une définition différente, mais équivalente de la dimension de Hausdorff en imposant aux ensembles recouvrant E d'être des boules.

Remarque III.9. Si on impose aux ensembles E_k dans l'égalité (1) d'être des boules de diamètre ε au plus, on obtient une autre mesure $\mathscr{B}$, appelée mesure de Hausdorff-Besicovitch. Il est évident que l'on a $\mathscr{H}^s(E) \leq \mathscr{B}^s(E)$ pour tout $E \subset \mathbb{R}^n$; l'égalité n'est cependant pas toujours vérifiée [1]. En incluant les ensembles E_k dans des boules de diamètre deux fois plus grand B_k, on obtient

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k|^s = 2^s \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|^s,$$

ce qui implique

$$\mathscr{H}^s(E) \leq \mathscr{B}^s(E) \leq 2^s \mathscr{H}^s(E).$$

Par conséquent, la dimension qui pourrait être définie à partir de la mesure de Hausdorff-Besicovitch en suivant la même démarche que pour la mesure de Hausdorff n'est autre que la dimension de Hausdorff elle-même.

III.3 Un exemple : l'ensemble de Cantor

Comme application, nous allons calculer les dimensions topologique et de Hausdorff de l'ensemble de Cantor.

L'ensemble de Cantor est une limite d'ensembles.

Définition III.10. *Soit C_0 l'intervalle compact unité et, si le compact C_{k-1} a été défini, soit C_k l'ensemble compact obtenu en retirant à C_{k-1} les intervalles ouverts de longueur $1/3^k$ milieu des intervalles définissant C_{k-1}. On a donc $C_0 = [0,1]$, $C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$ et*

$$C_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1].$$

L'ensemble de Cantor est l'ensemble $C = \cap_{k \in \mathbb{N}} C_k$.

Figure 2. Représentation de plusieurs ensembles successifs C_k suivant la Définition III.10.

Par construction (puisque les C_k sont des ensembles compacts non vides emboîtés en décroissant, i.e. tels que $C_{k+1} \subset C_k$ pour tout indice k), C est un compact non vide. Puisque C_k est constitués de 2^k intervalles de longueur $1/3^k$, C ne contient aucun intervalle ; en fait, il s'agit d'un ensemble parfait dense nulle part. Alternativement, C peut être défini comme l'ensemble des nombres réels de l'intervalle unité dont une des représentations en base 3 ne contient pas le chiffre 1 (ainsi le nombre entier 1 appartient à C car il admet $0.222\cdots$ comme représentation en base 3).

On montre aisément que C a la puissance du continu : $\#C = \#\mathbb{R}$ (Cela peut se faire en considérant l'escalier du Diable par exemple ou via la définition utilisant les nombres en base trois). Qui plus est, on a le résultat suivant.

Proposition III.11. *On a $\mathscr{L}^1(C) = 0$.*

Démonstration. On trouve directement $\mathscr{L}^1(C_0) = 1$ et $\mathscr{L}^1(C_1) = 1 - 1/3 = 2/3$. En fait, on constate facilement par récurrence que l'on a $\mathscr{L}^1(C_k) = 2^k/3^k$, C_k étant constitué de 2^k intervalles de longueur $1/3^k$. On obtient donc

$$\mathscr{L}^1(C) = \lim_{k \to +\infty} \mathscr{L}^1(C_k) = 0,$$

comme annoncé. □

Ainsi, l'ensemble de Cantor a la puissance du continu mais est de mesure de Lebesgue nulle. En conséquence, sa dimension topologique est égale à 0 ; topologiquement parlant, un tel résultat est évident si l'on remarque que l'ensemble de Cantor est totalement discontinu.

Montrons maintenant que l'ensemble de Cantor est fractal.

Proposition III.12. *La dimension de Hausdorff de C vaut $s = \ln 2/\ln 3$ et pour ce nombre, on a*

$$\mathscr{H}^s(C) = 1.$$

Démonstration. Soit $s = \ln 2/\ln 3$. Bien entendu, C peut être recouvert par les intervalles constituant C_k ($k \in \mathbb{N}$) et donc

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^s(C) &\leq \lim_{k\to+\infty} 2^k\left(\frac{1}{3^k}\right)^s = \lim_{k\to+\infty} 2^k e^{s\ln(1/3^k)}\\ &= \lim_{k\to+\infty} 2^k e^{-ks\ln(3)} = \lim_{k\to+\infty} 2^k e^{-k\ln(2)}\\ &= \lim_{k\to+\infty} 2^k 2^{-k} = 1.\end{aligned}$$

Soit maintenant $\mathscr{I}$ une collection d'intervalles de longueur non nulle recouvrant C et montrons que l'on a

$$\sum_{I\in\mathscr{I}} |I|^s \geq 1.$$

Puisque C est compact, on peut supposer que les éléments I de $\mathscr{I}$ sont en nombre fini. Puisqu'ils sont de longueur non nulle, il existe un nombre k_0 pour lequel les intervalles constitutifs des ensembles C_k sont tous inclus dans des éléments de $\mathscr{I}$ lorsque $k \geq k_0$ (la longueur de ces intervalles constitutifs tendant vers zéro). Pour un tel k, il vient

$$\sum_{I\in\mathscr{I}} |I|^s \geq 2^k\left(\frac{1}{3^k}\right)^s = 1.$$

On en déduit que $\mathscr{H}^s(C) = 1$ et que la dimension de Hausdorff de l'ensemble de Cantor est s. □

Cet ensemble est de première importance en analyse. Par exemple, tout espace métrique compact est l'image de C par une application continue et tout espace métrique compact totalement discontinu parfait est homéomorphe à C (donnant lieu à ce qu'on appelle les « poussières de Cantor »).

Références

[1] A. Besicovitch. On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points. *Math. Ann.*, 98 :422–468, 1928.

[2] L. Brouwer. Beweis der invarianz der Dimensionenzahl. *Math. Ann.*, 70 :161–165, 1911.

[3] G. Cantor. Ein beitrag zur mannigfaltigkeitslehre. *J. Reine Angew. Math.*, 84 :242–258, 1878.

[4] E. Čech. Příspěvek k theorii dimense. *Časopis Pěst. Mat. Fys.*, 62 :277–291, 1933.

[5] R. Engelking *Dimension Theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978.

[6] K. Falconer. *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[7] K. Falconer. *Fractal Geometry*. John Wiley & Sons, Chichester, 1990.

[8] K. Falconer. *Techniques in Fractal Geometry*. John Wiley & Sons, New-York, 1997.

[9] H. Federer. *Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag, New-York, 1969.

[10] W. Hurewicz. Über das Verhältnis separabler Räume zu kompakten Räumen. *Proc. Akad. Amsterdam*, 30 :425–430, 1927.

[11] W. Hurewicz et H. Wallman *Dimension Theory*. Princeton University Press, London, 1948.

[12] H. Lebesgue. Sur la non applicabilité de deux domaines appartenant respectivement à des espaces, de n et $n+p$ dimensions. *Math. Ann.*, 70 :166–168, 1911.

[13] B. Mandelbrot. *Fractales, hasard et finance*. Flammarion, 2009.

[14] P. Matila. *Geometry of Set and Measures in Euclidian Spaces : Fractals and Rectificability*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[15] K. Menger. Zur Dimensions und Kurventheorie. *Monatsh. Math. Phys.*, 36 :411–432, 1922.

[16] G. Peano. Sur une courbe, qui remplit tout une aire plane. *Math. Ann.*, 36 :157–160, 1890.

[17] H. Poincaré. Pourquoi l'espace a trois dimensions. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 20 :489–504, 1912.

[18] T. Schneider. Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. I. Transzendend von Potenzen. *J. Reine Angew. Math.*, 172 :65–69, 1935.

[19] K. Sitnikov. Example of a two-dimensional set in three-dimensional Euclidean space allowing arbitrarily small deformations into a one-dimensional polyhedron and a certain new characteristic of the dimension of sets in Euclidean spaces (en russe). *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 88 :21–24, 1953.

[20] P. Urysohn. Mémoire sur les multiplicités cantoriennes. *Fund. Math*, 7 :30–137, 1925.

[21] P. Urysohn. Über die Mächtigkeit zusammenhängender Mengen. *Math. Ann.*, 94 :262–295, 1925.

[22] P. Urysohn. Mémoire sur les multiplicités cantoriennes (suite). *Fund. Math*, 8 :225–351, 1926.