

MÉCANIQUE

**La plastification de l'acier doux en flexion plane simple et composée et ses effets sur le flambage par compression des pièces droites élastoplastiques,**

par FERDINAND CAMPUS,

Membre de la Classe.

Dans la première de trois notes présentées à la Classe au cours de sa séance du 6 avril 1963, j'ai établi que la théorie classique de la plastification de l'acier doux en flexion plane simple est en défaut pour les pièces à section cohérente, c'est-à-dire dont toutes les parties résistent ou cèdent ensemble et non localement ou séparément.

Il s'agit de barreaux se rapprochant autant que possible de l'état idéal théorique de prismaticité, d'homogénéité et d'isotropie, sans tensions initiales.

Une nouvelle théorie a été édiflée, basée sur la constatation expérimentale qu'un tel barreau reste à l'état élastique jusqu'à ce que le moment de plastification totale  $M_p$  soit atteint, après quoi la plastification commence. Les tensions élastiques maxima de traction et de compression dépassent donc sensiblement la limite apparente d'élasticité  $\sigma_e$  déterminée par un essai de contrainte uniforme.

Dès que  $M_p$  est atteint, les déformations croissent rapidement sous moment constant.

Cette théorie a été étendue dans une deuxième note aux pièces présentant les mêmes caractères et soumises à la flexion plane composée. Des expériences ont été effectuées depuis lors sur des barreaux de section rectangulaire sollicités par traction excentrique. Ces barreaux ont été découpés hors de tôles et convenablement usinés. Leur hauteur était de 2 cm, leur largeur de 1 cm. Ils réalisaient avec une bonne approximation des pièces prismati-

ques, isotropes et homogènes à section cohérente. Pour deux excentricités différentes, égales à  $\frac{2}{3}h$  et  $1,459h$ , des mises en charge successives et répétées ont établi que les barreaux restent élastiques pour des tensions maxima dépassant la limite élastique. Il est à remarquer que dans la sollicitation par traction excentrique, les déformations transversales de flexion tendent à diminuer l'excentricité. La rupture des deux barreaux s'est produite par traction simple après une déformation de flexion correspondante, phénomène déjà observé antérieurement [1].

En compression excentrique aussi, pour chaque valeur de l'effort normal, il y a une valeur critique du moment fléchissant (ou de l'excentricité) correspondant au début de la plastification. Les déformations augmentent ensuite rapidement et si l'effort normal ne diminue pas ou guère, l'excentricité et le moment fléchissant augmentent très rapidement, ce qui donne lieu au phénomène de flambage. Selon la troisième note, la charge critique d'instabilité des pièces considérées peut être définie comme celle à partir de laquelle les déformations deviennent rapidement croissantes en raison de leur plastification totale. Le flambage par compression se produit toujours pratiquement de cette manière. La charge critique d'Euler est un cas limite idéal.

Les pièces pratiques ou réelles sollicitées par flexion plane simple ou composée dans les constructions ne possèdent pas les qualités définies plus haut. Leur élaboration par laminage, soudage, forgeage ou moulage y fait naître des imperfections de forme, d'homogénéité et d'isotropie, ainsi que des tensions initiales souvent très importantes. Ces caractères exercent une grande influence sur les propriétés élastiques et plastiques d'ensemble et locales de ces pièces [2].

Il est difficile de concevoir le processus exact de plastification de telles pièces, mais on peut affirmer qu'il n'est pas conforme à la théorie classique.

Des expériences ont été faites sur diverses pièces laminées, qui ont confirmé de manière qualitative la constatation précédente. Elles ont montré que la plastification des pièces laminées est influencée par leurs imperfections, mais qu'elle dépend aussi des formes et de la nature de la sollicitation. Ces expériences

ont été trop sommaires pour permettre d'en tirer des conclusions plus formelles. Il aurait fallu procéder à la détermination de la grandeur et de la répartition des tensions résiduelles, ce qui aurait exigé des travaux longs et coûteux. Pour la même raison, il n'a pas été procédé à la détermination détaillée de la variation de  $\sigma_e$  suivant les différentes fibres ; il n'a été fait que quelques mesures isolées. Néanmoins, certaines observations qui ont pu être faites ont mis en lumière des comportements qu'il est utile de comparer à ceux qui ont été observés sur les pièces prismatiques à sections cohérentes et sans tensions initiales.

La flexion simple de poutrelles D.I.L. 10 (double té de 100 mm de hauteur et de largeur, de 5 mm d'épaisseur d'âme et de 11 mm d'épaisseur d'aile) a montré que la plastification commence par l'aile comprimée, pour une valeur de  $\epsilon_{max}$  qui semble dépasser  $\frac{\sigma_e}{E}$ , mais qui est inférieure à  $\frac{M_p v}{EI}$ . Dès que la plastification de l'aile comprimée est réalisée, elle subit des déformations importantes perpendiculairement à son plan dans la région d'application des forces extérieures. Les caractéristiques géométriques et élastiques de la section sont dès lors modifiées. Il se produit un régime de transition pendant lequel la déformation croît plus rapidement que le moment, mais on atteint assez rapidement le moment de plastification totale, avec des déformations rapidement croissantes, et ce pour une valeur de  $M_p$  inférieure à  $\frac{\Omega d}{2} \sigma_e$  [3].

Les ailes sont soumises à des tensions initiales de compression vers les extrémités et de traction dans la partie centrale [2]. Il est difficile de concevoir le processus de plastification. Il semble cependant qu'à la fin de la phase élastique,  $\epsilon_{max}$  dépasse  $\frac{\sigma_e}{E}$ .

On peut admettre que l'aile comprimée ne commence à se déformer localement que lorsqu'elle est totalement plastifiée, c'est-à-dire lorsque la tension de compression  $y$  est partout au moins égale à  $\sigma_e$ , ce qui implique que  $\epsilon_{max}$  soit plus grand que  $\frac{\sigma_e}{E}$ .

Une poutrelle du même type a été fléchie dans le plan de

symétrie de rigidité minimum. La valeur de  $\epsilon_{max}$  élastique a aussi dépassé  $\frac{\sigma_e}{E}$  assez sensiblement, mais sans atteindre  $\frac{M_p v}{I}$ .  $M_p$  a d'ailleurs été inférieur à  $\frac{\Omega d}{2} \sigma_e$ . Il y a eu une phase de transition entre la fin de la phase élastique et la plastification totale, d'ailleurs peu étendue. Il est probable que les tensions initiales exercent une grande influence ; une interprétation plus précise n'est guère possible dans l'état de la question.

A partir d'une poutrelle D.I.L. 10, on a confectionné une pièce à profil T en supprimant une des ailes. Elle a été soumise à un moment de flexion constant, l'aile étant comprimée. L'âme tendue est restée élastique jusqu'à un allongement maximum de  $3,2 \cdot 10^{-3}$  correspondant à une tension de  $70,5 \text{ Kg/mm}^2$  supérieure à la limite élastique mesurée de  $43,7 \text{ Kg/mm}^2$ . L'aile comprimée avait dans cet état un raccourcissement maximum de  $0,73 \cdot 10^{-3}$  correspondant à une tension inférieure à la limite élastique, égale à  $36,7 \text{ Kg/mm}^2$ .

Ces expériences, très sommaires certes, mais tout de même fondamentales, établissent que dans les pièces laminées, même à sections non cohérentes, les déformations peuvent rester élastiques jusqu'à des valeurs notablement supérieures à  $\frac{\sigma_e}{E}$ . Dans les parties tendues qui ne se déforment pas localement, les majorations peuvent être considérables. Par contre, dès qu'elles sont complètement plastifiées, les parties comprimées subissent des déformations locales importantes par voilement, déversement ou torsion, ce qui entraîne une déformabilité générale rapidement croissante sous des moments peu variables. Il en résulte que le moment de fin d'élasticité est souvent supérieur à  $\frac{I}{v} \sigma_e$ , mais inférieur à  $\frac{\Omega d \sigma_e}{2}$ . Le moment de plastification totale est aussi généralement inférieur à  $\frac{\Omega d \sigma_e}{2}$ .

Lorsque la plastification commence par les ailes comprimées, dès que celles-ci sont entièrement plastifiées, les déformations d'ensemble croissent rapidement. On peut en conclure que pour

les pièces droites comprimées, l'instabilité commence à la fin de la phase élastique. On pourrait établir un schéma théorique élémentaire, par exemple pour une poutrelle en double té de hauteur  $h$ , celle de l'âme étant  $h'$ .

Le moment de plastification de l'aile comprimée serait

$$M_{pa} = \frac{I}{v} \sigma_e \frac{h}{h'} = \frac{2I\sigma_e}{h'}$$

en absence de tensions résiduelles, d'où

$$\frac{M_{pa}h'}{2I} = \sigma_e.$$

S'il y avait une tension résiduelle uniforme  $\sigma_i$

$$\frac{M_{pa}h'}{2I} = \sigma_e \pm \sigma_i.$$

Si l'effort normal de compression est  $N$  et le moment  $M$ ,

$$\frac{M_{pa}vh'}{I\sigma_e h} + \frac{N}{\Omega\sigma_e} = 1 \pm \frac{\sigma_i}{\sigma_e}.$$

Pour la condition de flambage élasto-plastique, on écrirait

$$\frac{M_{cr} h'}{M_e h} + \frac{N_{cr}}{N_p} = 1 \pm \frac{\sigma_i}{\sigma_e}.$$

Pour des profils très élancés, on aurait  $h' = \sim h$  et

$$\frac{M_{cr}}{M_e} + \frac{N_{cr}}{N_p} = 1 \pm \frac{\sigma_i}{\sigma_e}.$$

Le signe de  $\sigma_i$  est  $+$  s'il s'agit d'une traction et  $-$  s'il s'agit d'une compression.

Les deux dernières équations caractérisent donc les charges critiques d'instabilité pour des profils non cohérents. Les tensions initiales exercent une grande influence sur le flambage des pièces à profils non cohérents, d'autant plus que leur répartition n'est pas uniforme et qu'elles changent même de sens dans l'étendue des ailes [2].

Généralement, ce sont des compressions vers les extrémités

et des tractions dans la partie médiane. Par des opérations thermiques, on peut transformer les compressions des bords en tractions, d'où il résulte une augmentation de la charge critique d'instabilité [4].

Si l'on ne tient pas compte de  $\sigma_i$ , on a

$$\frac{M_{cr}}{M_e} + \frac{N_{cr}}{N_p} = 1,$$

loi de variation linéaire valable pour toutes les formes de profils. L'écart par rapport à la loi de plastification totale [5]

$$\frac{M_{cr}}{M_p} = f\left(\frac{N_{cr}}{N_p}\right)$$

est variable selon le profil. Il est faible pour les sections en double té et sensiblement le même pour les profils en H que pour les sections rectangulaires.

Les charges critiques d'instabilité calculées par les deux formules peuvent être assez voisines, même lorsque l'écart entre ces formules est notable. Par exemple, pour les sections rectangulaires ces formules deviennent :

$$\frac{6M_{cr}}{bh^2\sigma_e} + \frac{N_{cr}}{bh\sigma_e} = 1 \quad (b)$$

et

$$\frac{4M_{cr}}{bh^2\sigma_e} + \frac{N_{cr}^2}{b^2h^2\sigma_e^2} = 1 \quad (c)$$

Considérons le cas de flambage d'une pièce légèrement imparfaite ayant une excentricité

$$e \sin \frac{\pi x}{l} \quad [6]$$

La charge critique selon la formule (b) est donnée par

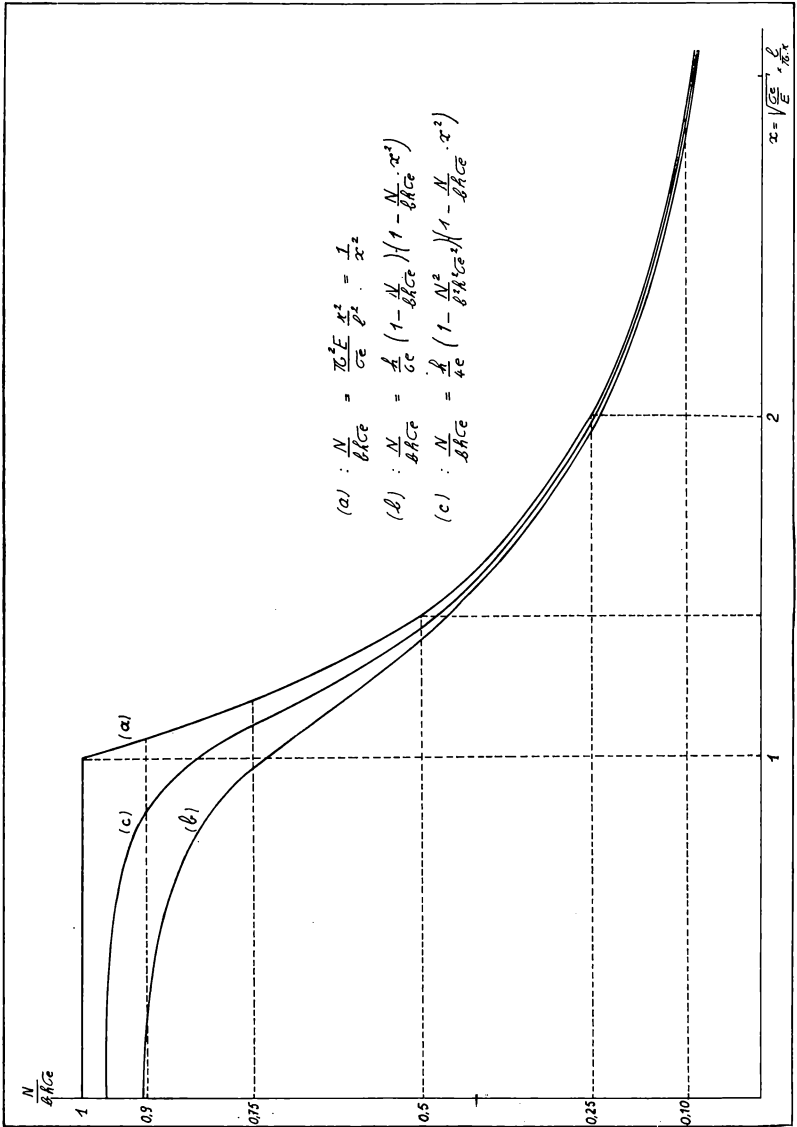
$$\frac{N_{cr}}{bh\sigma_e} = \frac{h}{be} \left(1 - \frac{N_{cr}}{bh\sigma_e}\right) \left(1 - \frac{N_{cr}}{bh\sigma_e} \frac{\sigma_e}{\pi^2 E} \frac{l^2}{r^2}\right) \quad (b)$$

D'après la formule (c)

$$\frac{N_{cr}}{bh\sigma_e} = \frac{h}{4e} \left(1 - \frac{N_{cr}^2}{b^2h^2\sigma_e^2}\right) \left(1 - \frac{N_{cr}}{bh\sigma_e} \frac{\sigma_e}{\pi^2 E} \frac{l^2}{r^2}\right) \quad (c)$$

La figure représente les variations de  $\frac{N_{cr}}{bh\sigma_0}$  suivant la formule

d'Euler, la formule (b) et la formule (c) en fonction de  $\sqrt{\frac{\sigma_e}{E}} \cdot \frac{l}{\pi r}$ .



On remarque que l'écart relatif entre les courbes (b) et (c) n'est pas très grand, même pour des sections rectangulaires.

Il serait sensiblement le même pour des sections H, mais beaucoup moindre pour des sections en double té, pour lesquelles la courbe (c) se rapprocherait beaucoup de la courbe (b).

Pour des sections cohérentes, la courbe de flambage doit se rapprocher de la courbe (c), mais pour des sections non cohérentes elle doit se rapprocher de la courbe (b) et ce d'autant plus que les courbes (b) et (c) sont moins écartées. Dans ce cas, on pourrait en toute sécurité et sans manquer à l'économie se référer à la courbe (b).

Mais l'effet de tensions résiduelles importantes et défavorablement réparties pourrait réduire encore la charge critique à des valeurs inférieures à celles données par la courbe (b). Des expériences systématiques nombreuses seraient nécessaires à ce sujet.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] F. CAMPUS. Recherches, études et considérations sur les constructions soudées. Éd. Science et Lettres, Liège, 1946.
- [2] F. CAMPUS et C. MASSONNET. Recherches sur le flambement des colonnes en acier A 37 à profil en double té sollicitées obliquement. *Bulletin du C.E.R.E.S.*, tome VII, Liège, 1955.
- [3] F. CAMPUS. La plastification de l'acier doux en flexion plane simple. *Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique*.
- [4] H. LOUIS, C. MASSONNET, P. GUIAUX, P. HALLET et G. KAYSER. Amélioration de la charge critique de flambement des colonnes en double té par l'introduction de tensions résiduelles appropriées. *Revue de la Soudure*, n° 4, Bruxelles, 1960.
- [5] F. CAMPUS. Plastification de l'acier doux en flexion plane composée. *Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique*.
- [6] —. Théorie du flambage par compression des pièces droites élastoplastiques à plan moyen (idem).