

Réflexions sur la méthode de M. Dutheil pour le calcul des pièces comprimées et fléchies

I. Introduction

La Société Royale Belge des Ingénieurs et des Industriels a publié, dans son *Bulletin n° 3*, de juillet 1950, une étude remarquable de M. Jean Dutheil sur « Les problèmes fondamentaux d'instabilité en construction métallique : le flambement et le déversement ».

Par sa clarté et son ordonnance, elle constitue une synthèse particulièrement compréhensible et une mise au point complète des publications multiples de son auteur au cours des dernières années.

Ces communications avaient suscité un vif intérêt et quelques discussions; le nouvel exposé d'ensemble constitue une contribution de première importance aux questions si complexes de l'instabilité, qui aidera beaucoup à leur compréhension scientifique autant qu'à leur résolution pratique.

M. Dutheil souhaite que son exposé engendre de fructueuses discussions. Mon collègue, M. Ch. Massonnet, a répondu à ce vœu avant la lettre, dans cette revue même (1).

A mon tour, je me permets d'exposer ci-après un ensemble de réflexions, dont plusieurs sont anciennes d'une vingtaine d'années et dont le souvenir est réveillé en moi par l'étude de M. Dutheil. Je les crois susceptibles d'entrer dans le cadre des discussions souhaitées.

II. Cas fondamental. — Diagramme universel

La portée des réflexions étant générale, je me borne au cas fondamental de la pièce droite prismatique articulée aux deux extrémités et comprimée suivant son axe.

On désigne par :

l sa longueur entre articulations;

I son moment d'inertie;

Ω sa section;

$r = \sqrt{\frac{I}{\Omega}}$ son rayon d'inertie;

$s = \frac{I}{v\Omega}$ l'étendue du noyau central;

v = la distance de la fibre extrême à la fibre neutre.

On suppose que le matériau est élastique suivant la loi de Hooke pour une tension de compression moyenne n comprise entre 0 et la limite élastique n_e , sous laquelle les déformations croissent sans augmentation de tension.

Pour une pièce idéale sollicitée idéalement, le diagramme de la tension critique peut être représenté sous la forme universelle de la figure 1.

En abscisses, on porte les valeurs de $\frac{l}{r} \sqrt{\frac{n_e}{E}}$,

en ordonnées celles de $\frac{n_c}{n_e}$. Le diagramme de

$\frac{n_c}{n_e}$ se compose de la courbe A B D, d'équation

$\frac{n_c}{n_e} = \pi^2 \frac{E}{n_e} \left(\frac{r}{l}\right)^2$, et de la droite D E d'équa-

tion $\frac{n_c}{n_e} = 1$.

Il est indépendant de la nature des matériaux.

Si la limite de proportionnalité, c'est-à-dire de validité de la loi de Hooke, est inférieure à n_e , comme dans les aciers réels de construction, l'angle B D E serait amorti suivant une courbe telle que B E, représentée en trait interrompu. Ceci pour le cas parfaitement idéal, qui met bien en évidence le dualisme de l'instabilité dans le cas fondamental, qui est maintenant bien connu :

a) L'instabilité par bifurcation de l'équilibre (flambement eulérien);

b) L'instabilité par divergence de l'équilibre, dès que la limite élastique est atteinte.



Mais il s'agit là du cas idéal, qui n'a pas de réalité.

Il y a longtemps (2) que j'ai attiré l'attention sur la signification purement abstraite de la charge critique et sur la nécessité de considérer le flambement dans sa réalité physique.

Celle-ci exclut les conditions idéales et introduit des perturbations aléatoires, qui ont comme conséquence inévitable l'instabilité par divergence de l'équilibre. Cependant les notions de l'instabilité par bifurcation de l'équilibre et de la charge critique conservent une signification essentielle.

La méthode de M. Dutheil en est une preuve manifeste, attendu que fondée essentiellement sur l'instabilité par divergence de l'équilibre, elle n'en exprime pas moins tous ses résultats en fonction de la charge critique.

La possibilité de l'instabilité par bifurcation de l'équilibre, si elle est une limite, n'en reste pas moins plus ou moins latente et susceptible de manifester une réalité physique en combinaison avec l'instabilité de l'équilibre par divergence.

Un cas typique est celui du flambement en deux demi-ondes des arcs minces surbaissés sous l'effet combiné de charges transversales extérieures et des contraintes de compression qui en résultent en vertu des liaisons aux appuis (3).

Le caractère dualiste de l'instabilité ne peut donc être perdu de vue dans les considérations sur la sécurité et aussi, de préférence, dans les méthodes pratiques. C'est un des mérites de la méthode de M. Dutheil de satisfaire à cette condition.

III. Formules de flambement fondées sur la limite élastique

On désigne comme M. Dutheil par f_0 la flèche initiale fictive, qui sera toujours rapportée à s . Sous l'effet de la flexion sinusoidale de flambement assez petite, cette flèche devient f telle que approximativement $\frac{f}{s} = \frac{f_0}{s} \frac{n_c}{n_c - n}$. n désigne la compression moyenne, comme indiqué plus haut. (Dans les notations de M. Dutheil, n est représenté par n_z .)

Du fait de la flexion, lorsque la limite élastique est atteinte à la fibre extrême

$$n_e = n + \frac{n \Omega f v}{1} = n \left(1 + \frac{f}{s} \right) = n \left(1 + \frac{f_0}{s} \frac{n_c}{n_c - n} \right)$$

d'où

$$\frac{f}{s} = \frac{n_e - n}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{f_0}{s} = \frac{n_e - n}{n} \times \frac{n_c - n}{n_c} \quad (I)$$

On déduit de là l'équation ou la formule générale de flambement fondée sur la limite élastique :

$$\frac{n}{n_e} = \frac{1}{1 + \frac{f}{s}} = \frac{1}{1 + \frac{f_0}{s} \frac{n_c}{n_c - n}}$$

ou

$$\left(\frac{n}{n_e} \right)^2 - \frac{n}{n_e} \left[1 + \frac{f_0}{s} \frac{n_c}{n_e} \left(1 + \frac{f_0}{s} \right) \right] + \frac{n_c}{n_e} = 0.$$

A partir de cette forme générale, on peut établir une grande variété de formes particulières, en attribuant à $\frac{f}{s}$ ou à $\frac{f_0}{s}$ des expressions appropriées.

A) Tout d'abord la formule de M. Dutheil, qui pose

$$\frac{f_0}{s} = C \frac{n_c}{n_e}, \quad \text{d'où} \quad \frac{f}{s} = C \frac{n_e}{n_c - n}.$$

On en déduit

$$C = \frac{n_e - n}{n_e} \times \frac{n_c - n}{n}$$

ou

$$n^2 - n [n_c + n_e (1 + C)] + n_e n_c = 0$$

$$B) \frac{f_0}{s} = C = (\text{constante}), \quad \text{d'où} \quad \frac{f}{s} = C \frac{n_c}{n_c - n}.$$

On obtient

$$n^2 - n [n_c + n_e (1 + C)] + n_e n_c = 0.$$

Cette variété de formule a été considérée depuis longtemps, ainsi que le signale M. Timoshenko (4).

$$C) \frac{f_0}{s} = C \frac{l}{s}, \quad \text{d'où} \quad \frac{f}{s} = C \frac{l}{s} \frac{n_c}{n_c - n}.$$

La formule devient

$$n^2 - n \left[n_e + n_c \left(1 + C \frac{l}{s} \right) \right] + n_e n_c = 0$$

analogue à la précédente.

Cette variété est plus récente selon M. Timoshenko (4).

$$D) \frac{f_0}{s} = C \frac{n}{n_e}, \quad \text{d'où} \quad \frac{f}{s} = C \frac{n}{n_c - n}.$$

On obtient

$$n^2 (1 - C) - n (n_e + n_c) + n_e n_c = 0.$$



Cette variété n'a pas été considérée à ma connaissance.

Remarque commune aux variétés A à D

Toutes ces variétés ont ceci de commun que si l'on y fait $C=0$, ce qui correspond au cas idéal considéré en II, les formules donnent identiquement $n=n_e$ et $n=n_c$, c'est-à-dire la courbe idéale A B D E de la figure 1. Si C est différent de 0, les courbes de $\frac{n}{n_e}$ en fonction de $\frac{l}{r} \sqrt{\frac{n_e}{E}}$ ont l'allure de la figure 2. Elles passent par le point E, sauf celles de la variété B. En effet, pour

$$\frac{l}{r} \sqrt{\frac{n_e}{E}} = 0, \quad \frac{n_c}{n_e} \equiv \infty \text{ et } \frac{f}{s} = \frac{f_0}{s},$$

d'où

$$\left(\frac{n}{n_e}\right)_0 = \frac{1}{1 + \frac{f_0}{s}}.$$

Or, pour cette valeur de $\frac{l}{r} \sqrt{\frac{n_e}{E}}$, $\frac{f_0}{s} = 0$ pour toutes les variétés, sauf pour la variété B, pour laquelle $\left(\frac{n}{n_e}\right)_0 = \frac{1}{1+C}$, ce qui montre que la variété B n'est guère convenable pour les faibles élanements.

Les courbes sont toutes asymptotiques à B A; elles s'écartent d'autant plus de A B D E que C est plus grand.

E) On pose

$$\frac{f}{s} = C \frac{n_e}{E} \left(\frac{l}{r}\right)^2 \text{ d'où } \frac{f_0}{s} = C \frac{n_e}{E} \frac{n_c - n}{n_c} \left(\frac{l}{r}\right)^2.$$

On obtient

$$C \frac{n_e}{E} \left(\frac{l}{r}\right)^2 = \frac{n_e - n}{n} \text{ d'où } n = \frac{n_e}{1 + C \frac{n_e}{E} \left(\frac{l}{r}\right)^2}.$$

Cette variété restitue la formule de Navier-Schwarz-Rankine. Les courbes correspondantes de $\frac{n}{n_e}$ en fonction de $\frac{l}{r} \sqrt{\frac{n_e}{E}}$ ont même allure que celles de la figure 2; elles passent par E et sont asymptotiques à l'axe des abscisses. Mais lorsque $C \equiv 0$, dans le cas de la pièce idéale, on obtient $n=n_e$, c'est-à-dire seulement le tronçon D E de la courbe universelle idéale.

Pour toute valeur de $C > 0$, la courbe de Rankine coupe la courbe idéale A B D en un point

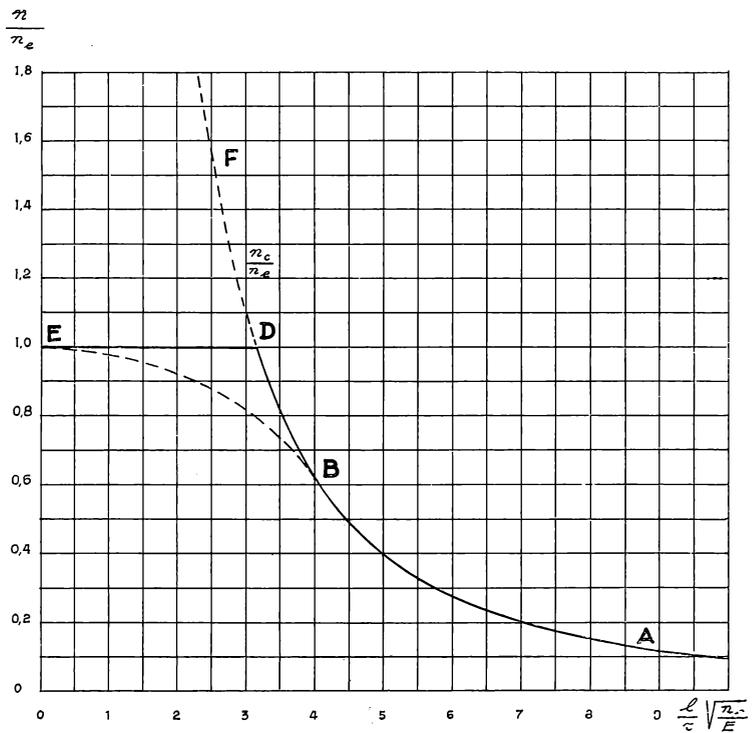
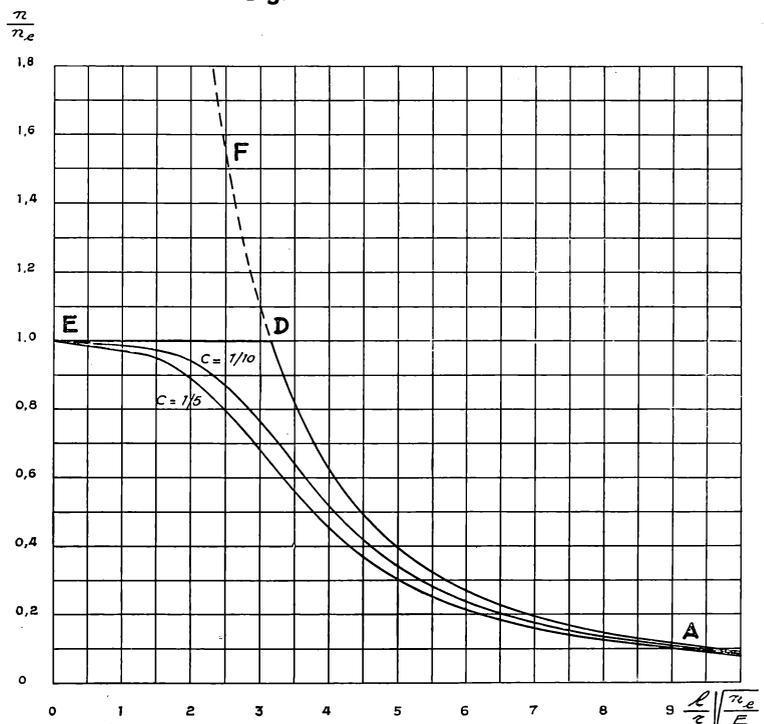


Fig. 1.

d'abscisse $\frac{l}{r} \sqrt{\frac{n_e}{E}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{1 - C\pi^2}}$, dont le minimum est π (point D, $C=0$).

Ce point d'intersection est d'autant plus éloigné que C est plus grand et peut être déplacé ainsi au delà de la région des plus grands élanements utiles. Il devient imaginaire si C est plus grand que $\frac{1}{\pi^2}$. Néanmoins, on reconnaît là

Fig. 2.



une incorrection fondamentale de cette variété de formule, qui la rend inférieure aux variétés des types A à D, lorsque $C < \frac{1}{\pi^2}$.

F. On obtient la formule linéaire, du type de la formule de Tetmayer, en posant :

$$\frac{f}{s} = \frac{1}{\frac{r}{Cl} - 1}, \text{ d'où } \frac{f_0}{s} = \frac{1}{\frac{r}{Cl} - 1} \times \frac{n_c - n}{n_c}.$$

On obtient

$$n = n_c \left(1 - C \frac{l}{r} \right)$$

Les courbes sont des droites passant par E et qui coupent la courbe idéale A B D en des points dont les abscisses sont la racine comprise entre π et l/∞ de l'équation du 3^e degré

$$C \sqrt{\frac{E}{n_e}} \left(\sqrt{\frac{n_e}{E}} \frac{l}{s} \right)^3 - \frac{n_e}{E} \left(\frac{l}{r} \right)^2 + \pi^2 = 0.$$

Pour $C=0$, ce point est D et la droite D E est seule utile.

Ces formules linéaires sont donc théoriquement très incorrectes.

On peut encore concevoir d'autres formules d'allure théoriquement correcte et possédant des propriétés analogues à celles des variétés A à D.

J) Par exemple en posant

$$\frac{f_0}{s} = C \frac{n_e}{n}, \quad \frac{f}{s} = C \frac{n_e}{n} \times \frac{n_e}{n_c - n}$$

d'où $n^2 - n(n_e + n_c) + n_e n_c (1 - C) = 0$.

$$G) \frac{f_0}{s} = \frac{C}{s}, \quad \frac{f}{s} = C \frac{n_c}{n_c - n},$$

d'où

$$n^2 - n \left[n_e + n_c \left(1 + \frac{C}{s} \right) \right] + n_e n_c = 0.$$

Ces deux variétés présentent une incorrection analogue à celle de B).

Remarque générale

Pour ajuster les variétés A, B, C, D, J et G aux valeurs expérimentales, on peut non seulement faire varier les valeurs de C considérées comme constantes, mais en faire des fonctions appropriées de $\frac{n_e}{E}$ et de $\frac{l}{r}$, ce qui multiplie considérablement les variétés de formules théoriquement correctes.

IV. Formules de flambement fondées sur la charge critique

Des formules d'un autre type peuvent être obtenues en se référant à n_c .

H) En posant par exemple

$$\frac{f_0}{s} = \frac{n_e \left[1 + C \frac{E}{n_e} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right] - n_c}{n_c} \times \frac{C \frac{E}{n_e} \left(\frac{r}{l} \right)^2}{1 + C \frac{E}{n_e} \left(\frac{r}{l} \right)^2}$$

d'où

$$\frac{f}{s} = \frac{n_e \left[1 + C \frac{E}{n_e} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right] - n_e}{n_e},$$

on obtient

$$n = \frac{n_c}{1 + C \frac{E}{n_e} \left(\frac{r}{l} \right)^2}$$

ou encore

$$\frac{n}{n_e} = \frac{\pi^2 \frac{E}{n_e} \left(\frac{r}{l} \right)^2}{1 + C \frac{E}{n_e} \left(\frac{r}{l} \right)^2}.$$

Si l'on fait $C=0$ (pièce idéale), on obtient $n = n_c$ (branche A B D de la courbe idéale).

Pour des valeurs de $C > 0$, on obtient une famille de courbes asymptotiques à la courbe d'Euler et qui coupent la droite $\frac{n}{n_e} = 1$ en un

point d'abscisse $\frac{l}{r} \sqrt{\frac{n_e}{E}} = \sqrt{\pi^2 - C}$. Pour $C = \pi^2$, ce point est en E, c'est-à-dire $n = n_e$ pour $\frac{l}{r} = 0$.

La formule n'est donc pas théoriquement correcte.

Mais alors que pour les formules des variétés Rankine et Tetmayer, l'incorrection est du côté des grands élancements et dangereux de ce fait, pour la formule H, l'incorrection est dans la région des petits élancements et par conséquent peu dangereuse.

La formule peut être amendée en posant

$$C = \pi^2 + k \frac{n_e}{E} \left(\frac{l}{r} \right)^2,$$

k étant une constante d'ajustement.

Toutes les courbes passent alors par E pour $\frac{l}{r} = 0$, mais il n'est plus possible d'obtenir la courbe idéale pour $k=0$, puisque alors $C = \pi^2 > 0$.



1) Si l'on suppose

$$\frac{f_0}{s} = \frac{n_e \left[1 + C \frac{n_e}{E} \left(\frac{l}{r} \right)^2 \right] - n_e C \frac{n_e}{E} \left(\frac{l}{r} \right)^2}{n_e \left[1 + C \frac{n_e}{E} \left(\frac{l}{r} \right)^2 \right] C \frac{n_e}{E} \left(\frac{l}{r} \right)^2}$$

ou

$$\frac{f}{s} = \frac{n_e \left[1 + C \frac{n_e}{E} \left(\frac{l}{r} \right)^2 \right] - n_e C \frac{n_e}{E} \left(\frac{l}{r} \right)^2}{n_e C \frac{n_e}{E} \left(\frac{l}{r} \right)^2},$$

on obtient

$$\frac{n}{n_e} = \frac{n_e}{n_e} \frac{C \frac{n_e}{E} \left(\frac{l}{r} \right)^2}{1 + C \frac{n_e}{E} \left(\frac{l}{r} \right)^2}$$

ou

$$\frac{n}{n_e} = \frac{\pi^2 C}{1 + C \frac{n_e}{E} \left(\frac{l}{r} \right)^2} = \frac{\pi^2}{\frac{1}{C} + \frac{n_e}{E} \left(\frac{l}{r} \right)^2}.$$

Pour

$$\frac{l}{r} \equiv \infty \quad n \equiv n_e.$$

La pièce idéale correspond à $\frac{1}{C} = 0$, d'où $n = n_e$.

Les courbes pour les valeurs de $\frac{C}{1} > 0$ sont asymptotiques à la courbe idéale A B D et coupent la droite D E et des points d'abscisses $\sqrt{\frac{n_e}{E} \frac{l}{r}} = \sqrt{\pi^2 - \frac{1}{C}}$. Ce point sera en E $\left(\frac{l}{r} = 0 \right)$ pour $\frac{1}{C} = \pi^2$. Pour cette valeur, la courbe devient une courbe de Rankine

$$\frac{n}{n_e} = \frac{1}{1 + \frac{n_e}{\pi^2 E} \left(\frac{l}{r} \right)^2},$$

identique à la courbe de la variété H lorsque $C = \pi^2$.

V. Diagramme expérimental universel

Ainsi qu'il a été dit plus haut, les perturbations par rapport au cas idéal sont aléatoires. La sécurité ne peut dès lors être fondée que sur une connaissance statistique suffisante.

On relèvera expérimentalement les valeurs de

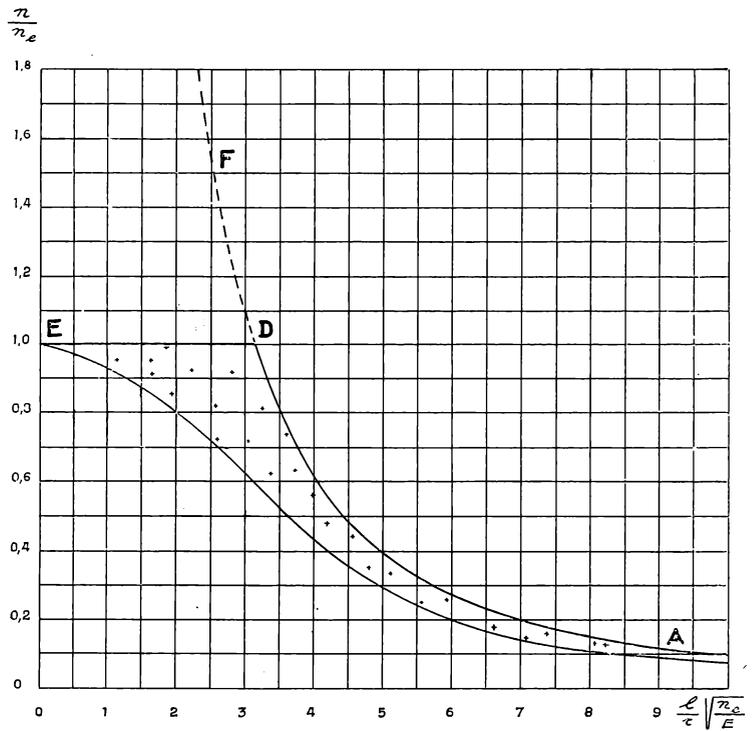


Fig. 3.

$\frac{n}{n_e}$ au moment où la limite élastique sera atteinte strictement à la fibre la plus comprimée : on les portera en ordonnées sur un diagramme dont les abscisses représenteront les valeurs correspondantes de $\sqrt{\frac{n_e}{E}} \cdot \frac{l}{r}$. En raison du caractère aléatoire des perturbations, si l'on reporte sur le diagramme un très grand nombre de points expérimentaux, ils formeront un nuage de points par rapport auquel on pourra tracer une courbe limite assurant une probabilité de ruine suffisamment faible, c'est-à-dire une sécurité suffisante (fig. 3). On peut éventuellement tracer diverses courbes limite, correspondant à des probabilités de ruine, c'est-à-dire à des coefficients de sécurité divers. Mais on ne perdra pas de vue qu'en matière de flambement, il faut être circonspect quant à la sécurité. Il faudra, pour assurer une probabilité de ruine suffisamment faible, disposer d'une statistique d'essais très étendue, car la dispersion est particulièrement grande, par suite du caractère multiple des circonstances aléatoires.

Dans l'étude de M. Dutheil, l'ajustement du coefficient de la formule est fondé sur les expériences de Tetmayer pour l'acier, sur d'autres pour le duralumin et le bois. Il n'est pas certain que ces expériences répondent aux conditions

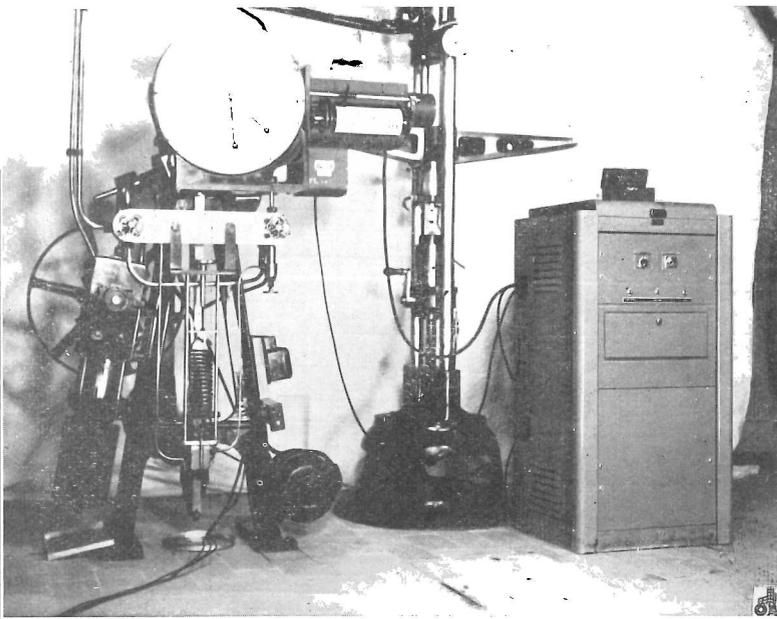
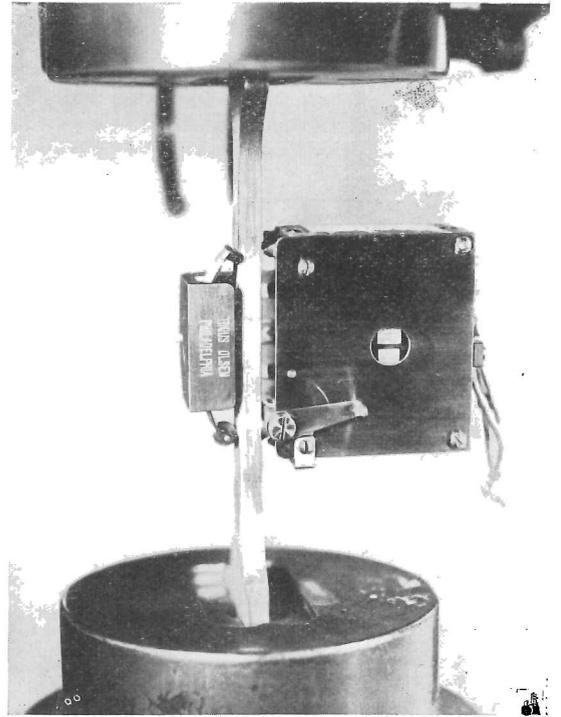


Fig. 4 et 4bis. Enregistreur électronique à grande amplification, utilisé pour la détermination de n_c .



théoriques requises. Les anciennes expériences ont été inspirées principalement par la notion de charge critique; il n'est pas certain qu'elles établissent le moment strict où la limite élastique est atteinte; il y a lieu de croire au contraire qu'il était dépassé, c'est-à-dire que l'on a pris comme critère de ruine l'apparition de grandes déformations de flexion, correspondant à une plastification déjà généralisée et non à la limite inférieure de plastification, c'est-à-dire à la première apparition de la limite de l'élasticité en un point de la pièce.

Il se pourrait donc que les courbes de M. Dutheil doivent être abaissées, mais ceci peut influencer sur les valeurs du coefficient de sécurité.

De même, il n'est pas certain que les valeurs de n_c et de E ont été déterminées pour chaque pièce d'essai.

Ces déterminations sont délicates, longues et coûteuses; elles compliquent les essais de flambage, déjà très complexes et encore relativement peu nombreux. Actuellement, la détermination de n_c peut être faite assez simplement en traction ou en compression et avec précision, par exemple au moyen de l'enregistreur électronique à grande amplification de la «*Tinius Olsen Testing Machine Co*» (fig. 4) qui est très sensible. La mesure de la valeur moyenne de E pour une pièce complète peut être faite avec grande précision en un temps très court par les appareils d'auscultation dynamiques, tels que le chronographe à condensateur de Joergensen-Weibel (fig. 5). Pour des matériaux assez homogènes, tels que l'acier, les résultats sont remarquables.

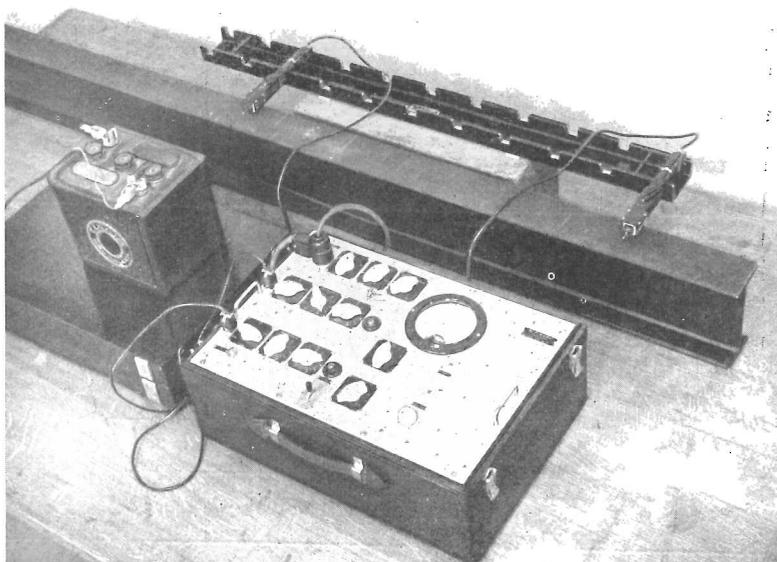


Fig. 5. Chronographe à condensateur de Joergensen-Weibel.

Pour des matières plus hétérogènes, telles que le béton, la mesure tient compte des hétérogénéités, mais pas de la variation de E en fonction de la charge, de telle sorte qu'il faudrait faire les déterminations dans divers états de charge, ce qui complique beaucoup la question.

Enfin, la détermination stricte de l'apparition de la limite élastique pourrait être décelée par des extensomètres très sensibles, très précis et sans jeu, par exemple au moyen d'extensomètres ohmiques. S'il était, dans certaines circonstances, plus facile de mesurer $\frac{f}{s}$, on en déduirait

$$\frac{n}{n_c} = \frac{1}{1 + \frac{f}{s}}$$

On pourrait aussi déterminer $\frac{f_0}{s}$ par la méthode expérimentale de Southwell (1); on en déduirait $\frac{n}{n_c}$ par l'équation :

$$\left(\frac{n}{n_c}\right)^2 - \frac{n}{n_c} \left[1 + \frac{n_c}{n_c} \left(1 + \frac{f_0}{s}\right)\right] + \frac{n_c}{n_c} = 0.$$

Il serait recommandable en tout cas de procéder concurremment à la mesure extensométrique directe de la valeur de n correspondant à la stricte apparition de n_c , de manière à contrôler les relations ci-dessus, dont la deuxième est approximative.

Si l'on disposait d'un diagramme expérimental universel suffisant, la connaissance de la courbe limite assurant un certain degré de sécurité permettrait, par le moyen de tableaux numériques ou de courbes, un calcul facile et assuré, éventuellement selon les formes indiquées par M. Dutheil ou d'autres analogues, sans devoir encore recourir à l'emploi de formules dont le mécanisme formel a été analysé à suffisance aux paragraphes III et IV. Pour les raisons indiquées plus haut, les expériences anciennes ne répondront probablement pas toutes, ni guère, aux conditions définies. Cela n'empêche pas qu'il serait opportun tout d'abord de procéder à un dépouillement systématique et centralisé de toutes les expériences de valeur faites jusqu'à présent. Ce pourrait être l'œuvre d'un groupement international actif, tel que l'Association Internationale des Ponts et Charpentes (A.I.P.C.) ou la Réunion des Laboratoires d'Essais et de Recherches sur les matériaux et les constructions.

Il est néanmoins certain que de nouvelles et nombreuses expériences seront nécessaires (fig. 6).

Comme elles sont importantes, il est souhai-

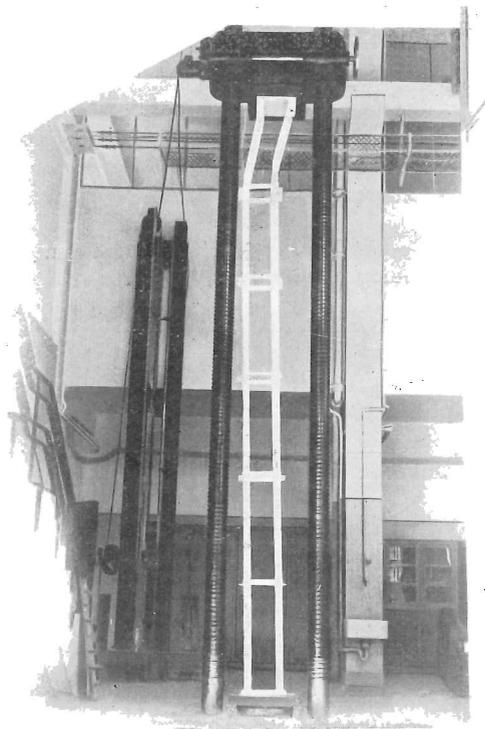


Fig. 6. Machine d'essai pour pièces soumises au flambement.

table aussi que ces expériences nouvelles, qui doivent répondre à des conditions bien définies esquissées plus haut, soient réparties entre plusieurs pays et que leurs résultats soient coordonnés par le même organisme central qui aurait assuré le dépouillement des expériences antérieures.

Ces expériences seraient tout d'abord aussi fondamentales que possible, mais concerneraient tous les phénomènes d'instabilité, le déversement aussi bien que le flambement.

Un progrès considérable aurait été réalisé ainsi et qui rendrait aux constructeurs des services inappréciables.

VI. Prise en compte de la déformation d'effort tranchant

Les considérations de M. J. Dutheil ne sont pas nouvelles dans leur principe (5), mais elles s'appliquent d'une manière particulièrement



simple au développement de sa méthode et permettent ainsi de tenir compte des efforts tranchants dans les cas où ils peuvent être importants pour le flambement, c'est-à-dire pour les pièces en treillis et à étrésoillons, auxquelles la méthode de M. Dutheil s'applique d'une façon particulièrement simple.

VII. Flambement avec flexion (flambement composé selon M^r Dutheil)

Soit M_0 le moment de flexion dû aux forces transversales indépendant de l'action des forces longitudinales, f_m la flèche correspondante. Soit enfin σ le coefficient de sécurité applicable à la flexion simple.

L'équation de résistance par rapport à la limite élastique s'écrit :

$$n + \frac{\Omega n}{W} f + \frac{\sigma M_0}{W} = n_c,$$

d'où

$$n = \frac{n_c - \frac{\sigma M_0}{W}}{1 + \frac{f}{s}} = \frac{n_c'}{1 + \frac{f}{s}}.$$

Tout le problème est ramené par cette formule à un cas de flambement fictif. Mais il faut encore considérer la valeur différente de $\frac{f}{s}$ qui est égale

$$\text{à } (f_0 + \sigma f m) \frac{n_c}{n_c - n}$$

d'où

$$n + n \frac{f_0}{s} \frac{n_c}{n_c - n} + \frac{\sigma f m}{s} \frac{n_c}{n_c - n} + \frac{\sigma M_0}{W} = n_c$$

$$n \left[1 + \frac{n_c}{n_c - n} \left(\frac{f_0}{s} + \frac{\sigma f m}{s} \right) \right] = n_c - \frac{\sigma M_0}{W} = n_c'$$

En posant

$$\frac{f_0}{s} + \frac{\sigma f m}{s} = \frac{f_0'}{s},$$

on obtient

$$\left(\frac{n}{n_c'} \right)^2 - \frac{n}{n_c'} \left[1 + \frac{n_c}{n_c'} \left(1 + \frac{f_0'}{s} \right) \right] + \frac{n_c}{n_c'} = 0,$$

équation de flambement fictif.

L'opportunité de ramener l'étude du flambement composé à un cas fictif de flambement simple se recommande pour dissiper la tendance instinctive de beaucoup de praticiens à considérer le flambement composé comme moins dangereux que le flambement simple et à ajouter simplement à la tension de flexion ordinaire la

tension de compression multipliée par le coefficient de majoration de flambage. Ceci revient à négliger l'effet de la flexion sur le flambage, c'est-à-dire le terme $\frac{\sigma f m}{s}$. L'inconvénient de la méthode réside dans le fait que le diagramme universel de flambage ne sera pas applicable, à cause de la substitution de $\frac{f_0'}{s}$ à $\frac{f_0}{s}$.

Cet inconvénient pourrait être évité en ajoutant à la courbe fondamentale de flambage simple ($f_m = 0$), des courbes supplémentaires cotées en valeurs de $\frac{\sigma f m}{s}$. Ceci peut se faire par le calcul à partir de la courbe fondamentale expérimentale. Cette famille de courbes mettrait bien en évidence l'effet majorant de la flexion sur le flambage.

Selon une autre conception,

$$n \left(1 + \frac{f_0}{s} \frac{n_c}{n_c - n} \right) + \frac{\sigma M_0}{W} \left[1 + \frac{W}{M_0} \frac{f m}{s} \frac{n n_c}{n_c - n} \right] = n_c,$$

$$n \left(1 + \frac{f_0}{s} \frac{n_c}{n_c - n} \right) + \frac{\sigma M_0}{W} \left[1 + \frac{N f m}{M_0} \frac{n_c}{n_c - n} \right] = n_c;$$

on ajoute à la tension normale, multipliée par le coefficient de majoration de flambage, la tension de flexion, multipliée par un coefficient de majoration analogue à celui de flambage et pour lequel on peut établir des tables ou des courbes à partir des valeurs expérimentales. Cette méthode sépare peut-être mieux les deux effets, mais exige l'emploi de deux coefficients différents. C'est celle que préconise M. Dutheil. Comme il faut en tout état de cause déterminer la flèche de flexion ou faire une opération analogue, la première méthode me paraît plus simple et plus sûre.

VIII. Autre mécanisme d'établissement de formules de flambement

L'analyse du mécanisme d'établissement de formules de flambement faite plus haut, qui est inspirée de l'examen de la méthode de M. Dutheil, m'a remis en mémoire un autre mécanisme qui m'avait intéressé il y a bientôt vingt ans. Il est inspiré d'une étude de M. Léon Descans, intitulée « Contribution à l'étude des pièces chargées de bout » et parue dans le deuxième fascicule



de 1929 des *Annales de l'Association des Ingénieurs sortis de l'Université de Gand*. L'auteur étudie le cas de la pièce encastrée à une extrémité et libre à l'autre. Ce qui suit est une adaptation au cas fondamental considéré dans la présente note de la pièce articulée aux deux extrémités.

Soit N l'effort normal engendrant une compression moyenne n . M. L. Descans définit comme suit la sécurité dans le cas du flambement composé, c'est-à-dire accompagné de flexion indépendante de l'effort normal.

La tension limite étant n_m , celle due à la flexion n_0 , n ne peut dépasser $n_m - n_0$. En admettant cette valeur pour n et en déplaçant $N = \Omega (n_m - n_0)$ à la limite du noyau central $s = \frac{W}{\Omega v} = \frac{r^2}{v}$, la compression maximum devient $n_0 + 2 (n_m - n_0)$, valeur qui ne peut être dépassée.

Si f_m est la flèche maximum due à la flexion indépendamment de tout effet de flambement, M. L. Descans démontre la relation approximative

$$f = f_m \frac{N_c}{N_c - N}$$

aussi utilisée par M. Dutheil.

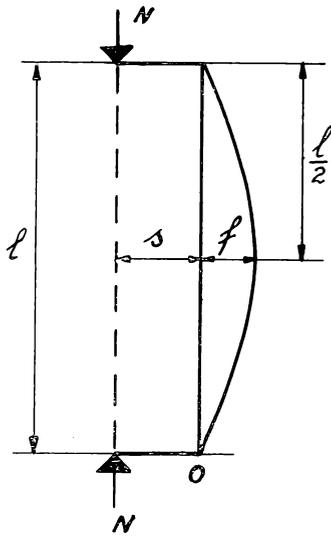


Fig. 7.

Posons

$$\eta = \frac{n}{n_m}, \quad \eta_c = \frac{n_c}{n_m}, \quad \text{d'où} \quad f = f_m \frac{\eta_c}{\eta_c - \eta}.$$

L'effort normal étant excentré de s , la tension maximum devient

$$n_0 + n + Nf \frac{v}{I} + \frac{Nsv}{I} = n_0 + 2 (n_m - n_0)$$

Mais

$$\frac{Nsv}{I} = n_m - n_0, \text{ donc } n_0 + n + \frac{Nfv}{I} = n_m.$$

La flèche due au moment Ns , sans effet de flambage, est $\frac{Nsl^2}{8EI}$.

La flèche totale de flambage devient

$$f = \left(f_m + \frac{Nsl^2}{8EI} \right) \frac{\eta_c}{\eta_c - \eta}$$

Donc

$$\frac{n_0}{n_m} + \eta + \frac{\eta \eta_c}{\eta_c - \eta} \left[f_m \frac{v}{r^2} + \frac{n_m}{E} \left(1 - \frac{n_0}{n_m} \right) \frac{l^2}{8r^2} \right] = 1.$$

Par des considérations de géométrie analytique, M. L. Descans établit une solution approximative qui est

$$\frac{1 + \eta}{2} = \frac{\eta_c - \eta}{\eta_c \left(1 + \frac{n_0}{n_m} \right)} \text{ d'où } \eta = \frac{1 - \frac{n_0}{n_m}}{1 + \frac{n_0}{n_m} + \frac{2}{\eta_c}}$$

formule qui convient pour le flambement composé. Pour le flambement simple

$$\begin{aligned} n_0 = 0, \text{ d'où } \eta &= \frac{n}{n_m} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{2}{\eta_c}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi^2} \frac{n_m}{E} \frac{l^2}{r^2}}. \end{aligned}$$

Cette formule est de la variété de Rankine, considérée sous E) au paragraphe III. En admettant $n_e = 2 n_m$, on aurait

$$\frac{n}{n_m} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\pi^2} \frac{n_e}{E} \left(\frac{l}{r} \right)^2},$$

qui est la formule du type E avec $C = \frac{1}{\pi^2}$; c'est la valeur limite donnant la courbe de Rankine qui coupe la courbe d'Euler à l'infini. Elle peut encore s'écrire

$$\frac{n\sigma}{n_e} = \frac{1}{1 + \frac{n_e}{n_c}}.$$



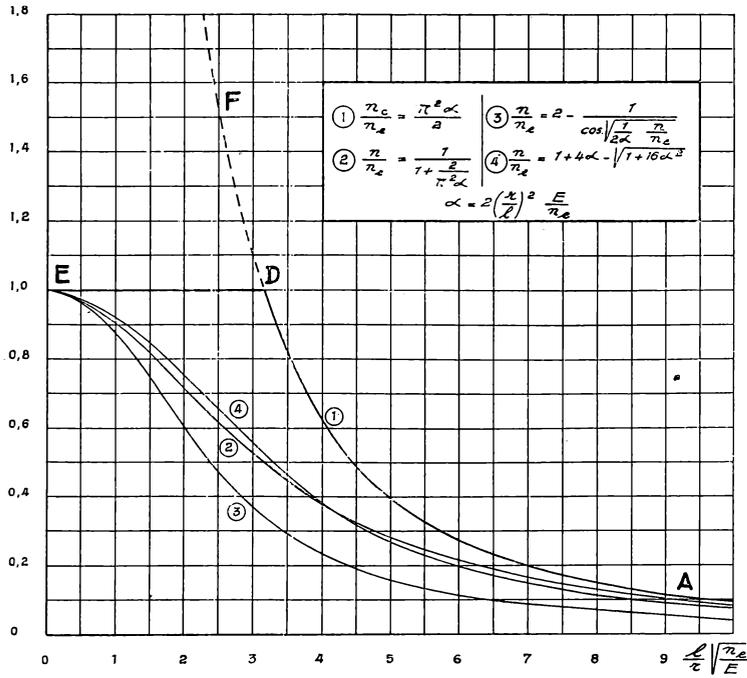


Fig. 8.

Il y correspond $\frac{f}{s} = \frac{n_c}{n_e}$.

Il y a quelque analogie entre la méthode de M. L. Descans et celle de M. Dutheil, mais elle ne va pas jusqu'à permettre de comparer des valeurs de $\frac{f_0}{s}$, les deux solutions étant assez différentes à ce point de vue.

Elle est cependant plus grande pour le flambement simple que pour le flambement composé.

Dans le cas de flexion composée, schématisé à la figure 7, page 39, on a

$$M = EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -N(s + y).$$

La solution de cette équation est :

$$y = s \left[\frac{1 - \cos \sqrt{\frac{N}{EI}} l}{\sin \sqrt{\frac{N}{EI}} l} \sin \sqrt{\frac{N}{EI}} x + \cos \sqrt{\frac{N}{EI}} x - 1 \right].$$

On en déduit facilement pour $x = \frac{l}{2}$

$$f + s = \frac{s}{\cos \sqrt{\frac{N}{EI}} \frac{l}{2}}, \text{ d'où } f = s \frac{1 - \cos \sqrt{\frac{N}{EI}} \frac{l}{2}}{\cos \sqrt{\frac{N}{EI}} \frac{l}{2}}.$$

La section dangereuse correspond à la même valeur de x et l'équation de limite de tension est :

$$n + N_m(f + s) \frac{v}{I} = 2n_m, \text{ avec } N_m = \Omega n_m$$

d'où

$$2 - \eta = (f + s) \frac{v}{I} = \frac{1}{\cos \sqrt{\frac{N}{EI}} \frac{l}{2}}.$$

Ceci donne une nouvelle formule de flambage inédite :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{n}{n_m} = 2 - \frac{1}{\cos \sqrt{\frac{N}{EI}} \frac{l}{2}} \\ &= 2 - \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{n}{n_c}}} = 2 - \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\eta}{\eta_c}}}; \\ \frac{n}{n_m} &= 2 - \frac{1}{\cos \frac{1}{2} \frac{l}{r} \sqrt{\frac{n_c}{E}} \sqrt{\frac{n}{n_c}}} \end{aligned}$$

ou

$$\frac{n\sigma}{n_c} = 2 - \frac{1}{\cos \frac{1}{2} \frac{l}{r} \sqrt{\frac{n_c}{E}} \sqrt{\frac{n}{n_c}}}.$$

Une autre formule de flambage peut être établie en donnant à $\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\eta}{\eta_c}}$ la valeur approximative $1 - \frac{\pi^2}{8} \frac{\eta}{\eta_c}$.

On obtient :

$$\frac{1}{2 - \eta} = 1 - \frac{\pi^2}{8} \frac{\eta}{\eta_c}.$$

D'où

$$\eta^2 - 2\eta \left(\frac{4}{\pi^2} \frac{\eta_c}{\eta_c} + 1 \right) + \frac{8}{\pi^2} \frac{\eta_c}{\eta_c} = 0;$$

$$\eta = 1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{\eta_c}{\eta_c} - \sqrt{1 + \frac{16}{\pi^4} \frac{\eta_c^2}{\eta_c^2}};$$

$$\eta = \frac{n_c}{n_m} = \frac{\sigma n}{n_c} = 1 + \frac{8 E r^2}{n_c l^2} - \sqrt{1 + \frac{64 E^2 r^4}{n_c^2 l^4}}.$$

Le diagramme de la figure 8 reproduit les trois courbes comparées au diagramme universel idéal de la figure 1. Elles ont été calculées en 1931-1932 par M. J. Lamoën, alors aspirant du Fonds National de la Recherche scientifique à l'Université de Liège pour le cas de la pièce encastrée à une extrémité et libre à l'autre. Elles ont été adaptées récemment pour le cas envisagé ici de la pièce articulée aux deux extrémités par M. O. Dauby,



assistant. Elles sont plus basses que les courbes de M. Dutheil. Ceci n'est pas nécessairement une infériorité, selon une remarque du paragraphe V. Mais il est évident que la conception proposée par M. Dutheil est plus simple et plus rationnelle.

Tous les raisonnements qui précèdent concernent uniquement des pièces isostatiques; les cas de liaisons hyperstatiques demandent un examen spécial dans chaque cas.

Pour les cas isostatiques, M. Timoshenko établit (4) que dans le cas d'une courbure initiale de la pièce, affine à l'élastique de flambement, le coefficient de majoration de la flèche initiale f_0 est $\frac{n_c}{n_c - n}$. Le moment initial Nf_0 est majoré proportionnellement. Si la pièce est droite et si f_0 représente une excentricité, alors

$$\frac{f}{s} = \frac{f_0}{s} \frac{1 - \cos \sqrt{\frac{N}{EI} \frac{l}{2}}}{\cos \sqrt{\frac{N}{EI} \frac{l}{2}}}$$

mais le moment est majoré davantage et devient

$$\frac{Nf_0}{\cos \sqrt{\frac{N}{EI} \frac{l}{2}}}$$

Enfin, si la flèche f_0 provient d'une sollicitation de flexion latérale, le moment fléchissant dû à cette sollicitation est, en raison du flambement, multiplié par

$$\frac{\text{tg} \sqrt{\frac{N}{EI} \frac{l}{2}}}{\sqrt{\frac{N}{EI} \frac{l}{2}}} \text{ ou } \frac{2 \left(1 - \cos \sqrt{\frac{N}{EI} \frac{l}{2}}\right)}{\left(\frac{N}{EI}\right)^2 \frac{l^2}{4} \cos \sqrt{\frac{N}{EI} \frac{l}{2}}}$$

Ces deux dernières expressions, pour les valeurs de N habituellement très inférieures à la charge critique, sont équivalentes à $\frac{1}{\cos \sqrt{\frac{N}{EI} \frac{l}{2}}}$. Pour

les mêmes valeurs de N en limitant le développement en série de $\cos \sqrt{\frac{N}{EI} \frac{l}{2}}$

$$\text{à } 1 - \frac{N l^2}{EI 8},$$

égal à $1 - \frac{\pi^2 N}{8 N_c}$, le coefficient de majoration s'écrit aussi

$$\frac{1}{1 - \frac{\pi^2 N}{8 N_c}} = \frac{\frac{N_c}{N}}{\frac{N_c}{N} - \frac{\pi^2}{8}}$$

Lorsque $\frac{N_c}{N}$ est assez grand, cette fraction est approximativement égale à $\frac{n_c}{n_c - n}$.

On peut donc s'en tenir généralement au facteur de majoration $\frac{n_c}{n_c - n}$ et il ne semble guère y avoir d'utilité à substituer à la formule

$$\frac{n}{n_c} = \frac{1}{1 + \frac{f_0}{s} \frac{n_c}{n_c - n}}$$

la formule

$$\frac{n}{n_c} = \frac{1}{1 + \frac{f_0}{s \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{n}{n_c}}}}$$

D'autant plus qu'en fin de compte, d'après le paragraphe V, il se recommande plutôt de se rapporter à une courbe limite expérimentale correspondant à une probabilité de ruine assez faible. Ces scrupules mathématiques perdent toute signification en regard de cette conception, surtout pour les grands élancements, pour lesquels il est prudent de ne pas perdre de vue le plus grand risque d'instabilité.

M. Dutheil formule dans son étude quelques remarques au sujet des prescriptions du règlement belge dans le domaine des grands élancements. Elles doivent être considérées attentivement, mais avec la circonspection imposée par le nombre relativement faible de résultats expérimentaux dans ce domaine, où la probabilité de ruine est assez indéterminée et susceptible de croître rapidement.

F. C.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) Ch. MASSONNET, « Réflexions concernant l'établissement des prescriptions rationnelles sur le flambage des barres de fer ». *L'Ossature Métallique*, juillet-août 1950.
- (2) F. CAMPUS, « Remarques sur la notion de la charge critique de flambement ». *Le Génie Civil*, 19 avril 1930.
- (3) F. CAMPUS, « A propos du flambement des arcs ». *La Technique des Travaux*, juin 1930.
- (4) S. TIMOSHENKO, *Theory of Elastic Stability*, 1st édition 1930, pp. 186 à 192.
- (5) E. BATICLE, « Le flambement des arcs » (Lettre de l'auteur). *Le Génie Civil*, 23 mars 1929 (1).

(1) Cette lettre contient une erreur de signe dans la formule exprimant l'effet de la déformation d'effort tranchant, qui a fait l'objet d'une correspondance entre M. Aug. Mesnager et l'auteur de la présente note en mai et juin 1931, la formule exacte étant identique à celle qui figure dans l'étude de M. Dutheil.

