

COURS DE  
CONSTRUCTIONS EN BETON ARME

F. Campus

Professeur ordinaire  
à l'Université de Liège.

1938

RAPPEL DES PROPRIETES PHYSICOCHEMISTIQUES DU BETON.

=====

1.- GENERALITES ET PRINCIPALES PROPRIETES PHYSIQUES.

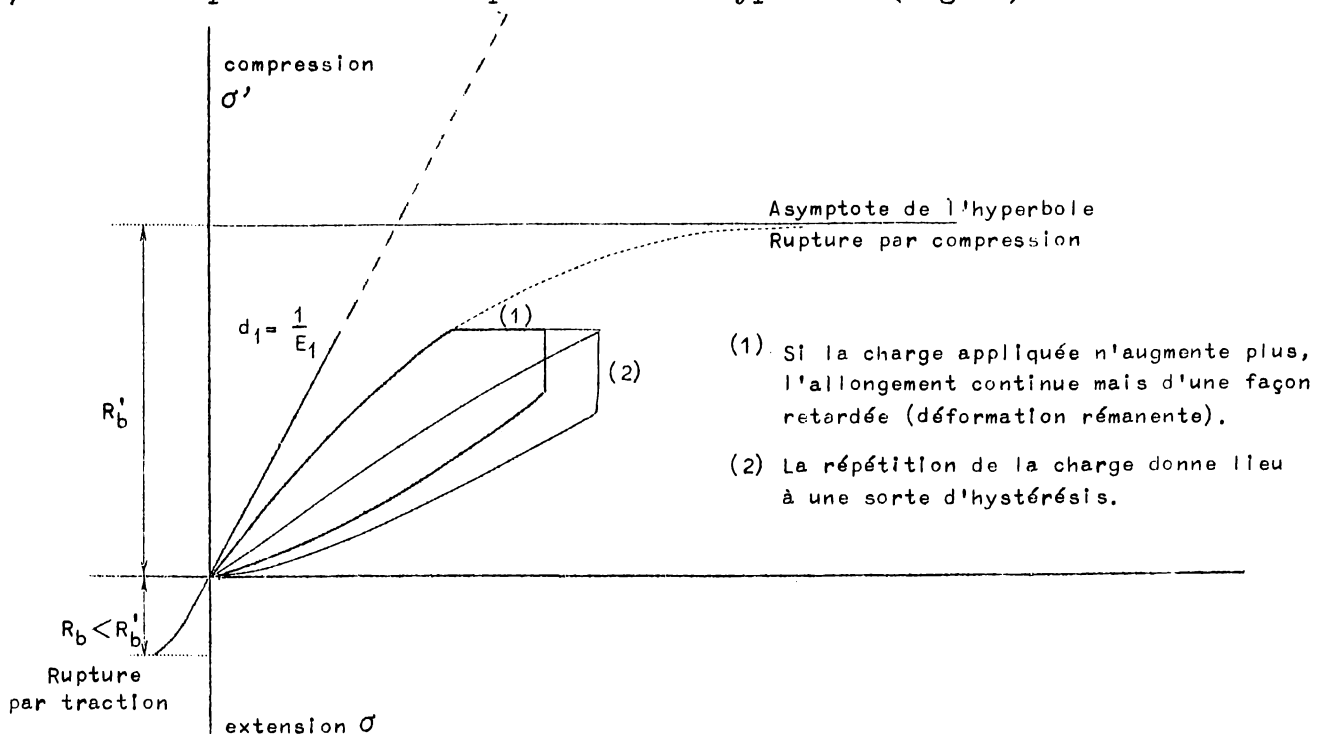
Le béton est une matière hétérogène dont les propriétés sont analogues à celles de ses constituants et en dépendent d'une manière directe. C'est-à-dire qu'elles sont déterminées par les qualités et proportions relatives des divers constituants et par l'HISTOIRE DU BETON, mode de confection, circonstances de durcissement et toutes actions physiques ou chimiques qui ont exercé une influence ultérieure sur le conglomerat.

On conçoit que les propriétés des bétons ne peuvent être énoncées qu'en termes généraux. Même des éprouvettes préparées dans des conditions apparemment les plus identiques donnent des résultats présentant des écarts atteignant fréquemment 10%, parfois le double, notamment en ce qui concerne les résistances. D'autres facteurs sont plus voisins d'une moyenne.

Le béton est une substance élastique, mais elle n'obéit pas rigoureusement à la loi de Hooke, c'est-à-dire que le module d'élasticité  $E$  est variable d'après la tension. Dans l'état actuel de la question, d'après les derniers travaux des L.F.E.M. de Zurich, on peut écrire :

$$\delta = \delta_0 + \delta_1 = \frac{\sigma}{E_0} + \frac{k \cdot \sigma}{R'_b - \sigma} \quad \text{pour la compression,}$$

$\sigma$  est une tension quelconque,  $\delta$  la dilatation correspondante,  $E_0$  le coefficient d'élasticité initial,  $R'_b$  la résistance de rupture maximum sur prisme de béton de dimensions 12 x 36 ou 20 x 60;  $k$  un coefficient sensiblement égal à 0,1. Cette expression est l'équation d'une hyperbole.(fig. 1).



N.B.- La seconde direction asymptotique est  $\delta = \frac{\sigma}{E_0}$ . La tangente initiale est telle que

$$\frac{1}{E_1} = \left( \frac{d\delta}{d\sigma} \right)_0 = \frac{1}{E_0} + \frac{k}{R'_b} \quad \text{donc très voisin de } \frac{1}{E_0}$$

En un point quelconque

$$\frac{d\delta}{d\sigma} = \frac{1}{E_0} + \frac{k \cdot R'_b}{(R'_b - \sigma)^2}$$

Les déformations permanentes de compression sont faibles, elles atteignent en moyenne 0,1% pour  $\sigma = 0,50 R'_b$ . La formule précédente correspond à une mise en charge progressive ET UNIQUE. La répétition des efforts modifie le diagramme  $(\sigma, \delta)$  et fait diminuer E. On constate qu'il existe une limite de fatigue  $(R'_b)_f$  qui est comprise entre 0,47 et 0,60  $R'_b$  et vaut en moyenne 0,50  $R'_b$ .

Si  $\sigma_{\max} < (R'_b)_f$ , la dilatation  $\delta_{\max}$  sous charge répétée tend vers une limite correspondant à une valeur sensiblement constante de E, d'autant plus petite que  $\sigma_{\max}$  est plus grande. Si  $\sigma_{\max} > (R'_b)_f$ , la déformation croît sans limite sous l'effet de la répétition et entraîne une rupture d'autant plus rapide que  $\sigma_{\max}$  est grande.

A la traction, le coefficient d'élasticité initial est sensiblement le même que pour la compression, et il décroît aussi à mesure que  $\sigma$  croît. Mais la limite de rupture  $R_b$  est sensiblement plus petite que  $R'_b$  et vaut environ le 1/10<sup>e</sup>. Il en résulte que la variation totale de E est moindre et que dans les limites pratiques inférieures à la tension de rupture, on peut envisager E constant et peu inférieur à  $E_0$ . On emploiera, par exemple les valeurs correspondant aux formules qui suivent.

LE COEFFICIENT DE POISSON  $\mu$  pour  $\sigma_{\max} < 0,6 R'_b$  est compris entre 1/6 et 1/4 en général; IL SEMBLE AUGMENTER SENSIBLEMENT POUR DE PLUS FORTES TENSIONS.

Les mesures de coefficient d'élasticité sont complexes et ne peuvent s'effectuer que dans des laboratoires bien outillés. Les mesures de  $R'_b$  sont au contraire assez courantes. D'après la voie indiquée par Schüle, le laboratoire Fédéral de Zurich a établi les formules suivantes des coefficients d'élasticité moyens pour la compression, sous l'effet de charges répétées, lorsque  $\sigma_{\max} < 0,3 R'$  :

$$\text{pour le mortier : } E = 600 \frac{R'_b}{R'_b + 300} \text{ tonnes/m}^2$$

$$\text{pour le béton : } E = 550 \frac{R'_b}{R'_b + 150} \text{ tonnes/m}^2$$

Ces chiffres de E correspondent à des expériences de laboratoire peu prolongées. On attribue au béton une PROPRIETE DE PLASTICITE : augmentation des déformations avec le temps sans variation de la charge. Cet effet serait très important pour les effets des charges permanentes. Le module d'élasticité sous l'effet d'une charge permanente, tend avec le temps, suivant une loi exponentielle, vers une valeur limite  $E_v$  beaucoup plus petite que la valeur initiale. La détermination des COEFFICIENTS D'ELASTICITE DE FLEXION est complexe, car les tensions varient en grandeur et en signe d'un point à un autre ainsi donc que E. L'hypothèse de l'invariabilité des sections planes n'est pas vérifiée si la charge est élevée. Pour les charges modérées, les écarts sont cependant assez faibles pour que l'on en puisse faire abstraction et considérer un module d'élasticité moyen de flexion. Si la charge augmente, les modules varient, surtout celui de la zone étendue, car la limite de rupture à l'extension est atteinte plus vite que celle de compression. Il en résulte que le module moyen d'élasticité est plus petit dans la zone étendue que dans la zone comprimée. Par consé-

quent, si l'on calcule la tension de rupture des fibres étendues par le moyen d'un module moyen constant (sections planes) on trouve une résistance à la rupture supérieure (approx. double) de celle des éprouvettes de traction directe. La réduction du module d'élasticité de la zone étendue n'est cependant pas la seule raison de cet écart entre les valeurs expérimentales de résistance à l'extension et à la flexion, ainsi qu'il est exposé plus loin.

Le MODULE DE GLISSEMENT déterminé par essais de torsion, semble dépendre légèrement de la forme des sections et il est en moyenne, pour les faibles tensions tangentielles, un peu supérieur à la moitié du module d'élasticité de compression (ce qui correspond aux valeurs assez faibles de  $\mu$  puisque

$$G = \frac{E}{2(\mu + 1)}).$$

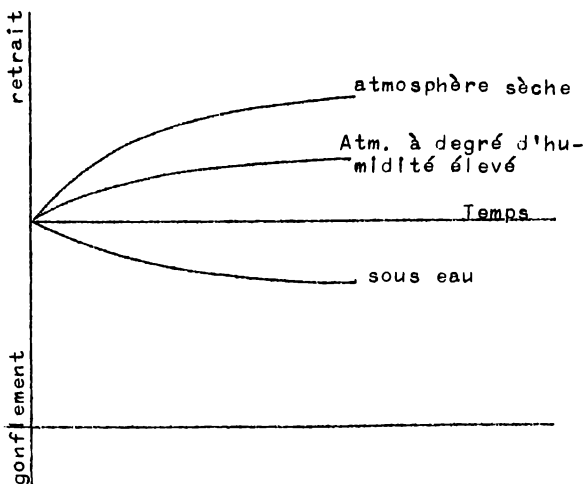
Le COEFFICIENT DE DILATATION THERMIQUE peut être pris en moyenne égal à  $10 \times 10^{-6}$  (A.B.S.); il varie de 10 à 12,5 .  $10^{-6}$ . Il est très voisin de celui de l'acier ce qui évite des tensions internes dans le béton armé du fait des variations de température. Par contre, le retrait de durcissement du béton donne lieu à des tensions internes : compression dans l'acier, extension dans le béton. Soit  $\delta_r$  le retrait spécifique du béton; la compression de l'acier est  $\sigma'_a = E_a \cdot \delta'_r$ ; la tension du béton est  $\sigma_b = E_b \cdot \delta'_r$  avec la relation

$$\delta'_r = \frac{\delta_r}{1 + m \frac{\omega_a}{\omega_b}}$$

car

$$\delta'_r \cdot E_a \cdot \omega_a = (\delta_r - \delta'_r) \cdot E_b \cdot \omega_b \quad \text{et} \quad m = \frac{E_a}{E_b}$$

donc  $\delta''_r = \delta_r - \delta'_r$ . Ceci ne vaut que tant que  $\sigma_b = E_b \cdot \delta''_r < R_b$  (rupture par traction) et suppose les armatures uniformément réparties dans la section transversale de la pièce. Le retrait dépend du dosage (il augmente avec la proportion de ciment), de la consistance (il augmente avec la plasticité ou fluidité et avec la finesse du mortier) et de l'humidité pendant le durcissement (il est moindre en cas de durcissement sous eau qu'en cas d'évaporation intense pendant la prise). La dessiccation joue donc un rôle important. L'augmentation de l'humidité réduit le retrait et le durcissement sous eau peut même donner lieu à une dilatation. Une humectation du béton après durcissement produit également une dilatation, qui diminue le retrait total. La détermination du retrait est donc difficile et très influencée par l'état hygrométrique. Dans notre pays,



pour les bétons d'usage courant, il semble qu'il varie de 3 à 5.  $10^{-4}$ . Le chiffre inférieur est le plus probable par suite de l'humidité générale du ciment. On peut admettre 3.  $10^{-4}$  comme un bon chiffre moyen. Selon E. Freyssinet, le retrait varie avec l'état de contrainte et les chiffres précédents sont pratiquement exagérés. Le retrait serait effectivement de 2 à 4.  $10^{-4}$  il est partiellement réversible d'après le degré hygrométrique. Il en résulte qu'il agit dans un sens réducteur des déformations thermiques.

Le POIDS SPECIFIQUE du béton est en moyenne de 2300 Kgs/m<sup>3</sup>; pour le béton armé, on compte généralement 2400 à 2500 Kgs/m<sup>3</sup>.



Le béton armé est assez bon conducteur de la chaleur et du son, non de l'électricité. Sa perméabilité dépend de sa compacité et de son épaisseur. Cette propriété ainsi que la porosité ou pouvoir absorbant ne s'expriment pas par des coefficients bien définis et doivent faire l'objet d'essais spéciaux dans chaque cas concret. Le sable fin et le trass accroissent l'étanchéité; d'une manière générale un béton fin est plus étanche et résiste mieux aux agents chimiques.

La RESISTANCE A L'USURE que l'on peut éventuellement rattacher à la dureté joue un grand rôle dans de nombreuses constructions. Elle semble dépendre surtout de la qualité du sable (qui doit être dur et plutôt gros 0 - 5 mm). Les enduits les plus résistants à l'usure s'obtiennent en employant comme sable des fragments de carborundum, du poussier de pierres très dures (basalte, porphyre, quartz), de la limaille de fer, etc...

## 2.- NOTIONS DE GRANULOMETRIE.

L'unité de volume du béton mis en oeuvre comporte en volumes absolus :

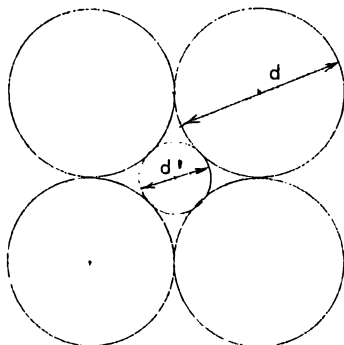
$\left. \begin{array}{l} p \text{ de pierrailles} \\ s \text{ de sable} \\ c \text{ de ciment, } e \text{ d'eau et } v \text{ de vides} \end{array} \right\} \text{ définis par des limites de calibres de grains}$   
 donc

$$p + s + c + e + v = 1$$

La COMPACITE DU MELANGE est définie par  $p + s + c + e = 1 - v$  ; elle est égale à l'unité si  $v = 0$  . Elle dépend notamment de l'importance du DAMAGE, si le béton est sec. Dans un béton compact, le vide des pierrailles est rempli par le mortier. Dans ce mortier, les vides du sable sont, à leur tour, comblés par les grains de ciment et en cas de compacité totale, l'eau remplit les moindres vides. Il est donc nécessaire en vue du résultat final, de connaître les proportions des vides des constituants et de les réduire éventuellement, afin d'obtenir les mélanges les plus favorables en vue de la résistance qui, ainsi que nous le verrons, dépend de la compacité.

Les VIDES d'un amas de grains dépendent des dimensions, de la forme et de leur enchevêtrement. L'expérience montre que le tassement par agitation ou le damage peuvent réduire considérablement les vides d'une masse granuleuse déversée librement. On peut les déterminer par pesée, connaissant le volume et le poids spécifique absolu. Le degré d'humidité intervient dans ces déterminations. Pour les besoins de la pratique, à moins d'employer des matériaux détremés, il n'est guère possible d'envisager des corrections de cet ordre, ni des méthodes aussi complexes. On obtient un résultat grossier en déterminant le volume d'eau nécessaire pour remplir les vides d'une capacité connue remplie de pierrailles. Si la pierraille est absorbante, il faut déterminer à part l'absorption.

Considérons un amas de sphères d'égal diamètre  $d$  . Le maximum de vide correspondant à un rangement dans lequel chaque sphère en touche 6 autres. Les centres des 6 sphères tangentes sont les sommets d'un cube. La proportion de vides est donc



$$\frac{d^3 - \frac{\pi \cdot d^3}{6}}{d^3} = 1 - \frac{\pi}{6} = 1 - 0,524 = 0,476$$

Le diamètre maximum des sphères pouvant s'insérer dans les vides est :

$$d' = (\sqrt{2} - 1) \cdot d = 0,415 d$$

Il peut y avoir environ 20 touchants chaque grande

sphère. Le vide restant est

$$d^3 - \frac{\pi \cdot d^3}{6} - 4 \frac{\pi}{6} (0,415 d)^3 = 0,326 d^3$$

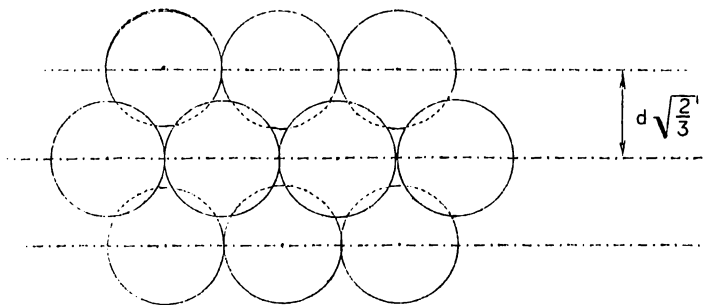
Il reste donc encore près de 33% de vides, c'est-à-dire plus de 2/3 du vide maximum, dont l'obturation ne peut se faire que par des grains de dimensions beaucoup plus petites ( $< 0,1 d$  environ).

Le minimum de vides du magma de sphères égales est réalisé lorsque chaque sphère en touche 12 autres; les centres de 8 sphères qui se touchent sont aux sommets d'un rhomboèdre régulier (angle de  $60^\circ$ ) dont le volume est

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} d^3 = \frac{d^3}{\sqrt{2}} = 0,707 d^3$$

Le rapport des vides est donc

$$\frac{0,707 - 0,524}{0,707} = 0,259$$



Ceci montre l'importance de l'enchevêtrement, qui assure une compacité plus grande qu'un remplissage partiel par des sphères de moindre diamètre. Quatre sphères qui se touchent ont leurs centres aux sommets d'un tétraèdre régulier. Le diamètre de la sphère intérieurement tangente aux quatre est égal à

$$d' = d \left( \frac{\sqrt{6}}{2} - 1 \right) = 0,225 d$$

Donc : 1°) Dans un amas homogène de grains sphériques de  $\emptyset d$ , la compacité peut varier dans une large mesure, entre 0,524 et 0,741 d'après l'enchevêtrement,

2°) Si l'on ajoute des grains de grosseur moindre, il faut que leur diamètre soit inférieur à  $0,415 d$  ou environ  $d/2,5$  et s'il atteint cette valeur, l'écartement des gros grains correspond à la compacité minimum; la compacité résultante n'est que de 0,674 et est inférieure à celle que permet l'enchevêtrement maximum des gros grains seuls.

3°) Pour pouvoir, par un mélange de grains de deux grosseurs différentes, obtenir une compacité supérieure à 0,741, il faut que les grains fins aient un diamètre inférieur à  $0,225 d$  ou  $d/4,45$ .

Ces considérations purement géométriques montrent bien le rôle de l'enchevêtrement et les principes de la granulométrie. Elles montrent un désavantage du gravier tout venant, contenant des grains de dimensions diverses en proportions quelconques. Une bonne composition granulométrique ne doit pas consister en une variation continue des proportions de grains de dimensions décroissant progressivement, mais bien en un magma de catégories, aussi régulières que possible, de grains de dimensions décroissantes, ceux d'une catégorie ayant comme dimension  $1/2,5$  ou  $1/4,45$  de ceux de la catégorie supérieure. Bien entendu, ces conclusions très générales sont plus ou moins modifiées par suite de la forme non sphérique des grains, mais le principe du rapport minimum de décroissance de dimension subsiste : des grains intermédiaires trop gros écartent ceux de la catégorie supérieure et accroissent les vides.

Monsieur Leclerc du Sablon (A.P.C. Mars - avril 1927 page 163) a déduit des

conclusions analogues d'essais granulométriques directs. Il conclut qu'il faut une marge suffisante entre les plus petits éléments du gravier et les plus gros du sable. D'après ses essais, le rapport minimum est 2,5 correspondant avec celui que j'ai déduit des considérations géométriques. Il est donc convenable d'employer pour la composition d'un béton, un gravier ou de la pierraille de composition unique bien déterminée, par exemple du 2/4 cm ou du 5/20 mm. Si l'on y ajoute d'autres pierres, ce doit être du 6/12 cms (refus du classeur) pour du béton massif, ou bien des libages noyés dans le béton (système américain). Bien entendu, il faut aussi que l'écart des catégories successives ne dépasse pas fortement la valeur optimum indiquée, sinon il y a augmentation des vides.

Avec du gravier 2/4 cm les dimensions maxima des grains de sable seront de 8 mm. et de préférence 5 mm, selon Mr Leclerc du Sablon. Ainsi que nous l'avons vu, le très gros sable ne remplit au maximum que le 1/3 des vides du gravier; il reste 2/3 à remplir d'éléments plus fins. Une telle composition de sable est opposée à celle qui, selon des expériences de Mr Feret, confirmée par tous les autres expérimentateurs donne le maximum de compacité du sable et qui est voisine de

$$g \text{ (gros)} = 2/3 \quad f \text{ (fin)} = 1/3 \quad m \text{ (moyen)} = 0$$

Cette règle expérimentale concorde assez bien avec celle de la compacité maximum du magma de sphères égales  $g = 0,741$ ,  $f = 0,259$  si l'on tient compte de ce que pratiquement l'enchevêtrement maximum n'est guère réalisé. Comme gros, on peut envisager le 2/5 mm (grenaille standardisée), comme fin, le poussier 0/2 mm.

Enfin, le ciment doit avoir la plus grande finesse possible, pour remplir les plus petits vides d'une manière parfaite. La finesse de mouture qui a fait de grands progrès, constitue un élément essentiel de qualité des ciments.

Dans un béton ainsi composé; il ne faut plus en principe que le minimum d'eau de gâchage pour la mise en oeuvre. Les quantités minima d'eau nécessaires pour les réactions de prise sont :

pour le ciment portland ordinaire de 38 à 44%	du poids du ciment
" " fondu	53%
" " de laitier	55%

Pratiquement, on ne dépasse pas 40 à 50% (Freyssinet et Cagne - Génie civil 1928, page 140).

La facilité de mise en oeuvre dépend de la plasticité du béton, qui dépend surtout de la quantité d'eau mais aussi de la composition granulométrique. Une trop grande proportion de fin diminue la plasticité; la même plasticité exige plus d'eau à cause de la plus grande surface à enrober.

La variation des propriétés d'un mélange à 3 constituants peut s'étudier facilement par le diagramme triangulaire de M. Feret. On y représente suivant trois axes les proportions en volumes absolus

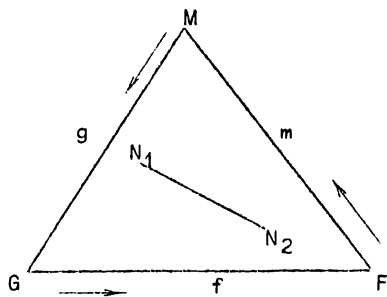
$$g + m + f = 1$$

Un mélange quelconque est défini par un point  $N_1(g_1, m_1, f_1)$  un autre par un point  $N_2(g_2, m_2, f_2)$ . Un mélange en proportions variables de  $N_1$  et  $N_2$  est représenté par un point de la droite  $N_1N_2$ . (figure page suivante)

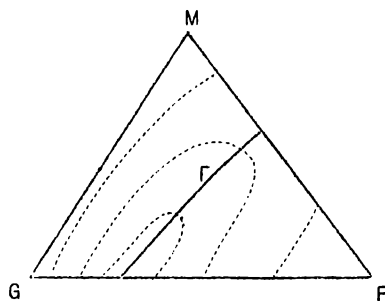
Considérons un mélange de trois sables, par exemple  $s'$ (gros) de 3 à 8 mm;  $s''$ (moyen) de 0,5 à 3 mm;  $s'''$ (fin) de 0,5 à 0 mm.

On peut déterminer expérimentalement les compacités d'un grand nombre de

mélanges divers de ces constituants et représenter les courbes des points d'égalité des compacités. Elles ont l'allure de la figure 6. On retrouve la même allure pour un mélange de 3 catégories de pierrailles de calibres assez divers (par exemple 5/10, 2/5 et 1/2 mm). On constate qu'il existe une courbe  $\Gamma$  des sommets des courbes d'égalité des compacités et que la plus grande compacité satisfait en moyenne à la relation de Feret :  $g = 2/3$   $f = 1/3$   $m = 0$ . En réalité, cette proportion dépend de la forme des grains.



On a toujours  $m = 0$  mais pour les grains ronds on a sensiblement  $g = 3/4$   $f = 1/4$  (correspondant aux résultats théoriques) la compacité est maximum. Pour les grains anguleux, on obtient jusqu'à  $g = 1/2$  et  $f = 1/2$  la compacité est moindre. Les résultats sont analogues pour les sables et gravier (Voir Feret - Chimie appliquée à l'art de l'Ingénieur par Durant-Claye page 444 à 519).



On peut étudier de la sorte la compacité des éléments secs d'un mortier, sables divers et ciments, en assimilant le ciment au fin. On commet ainsi une erreur (voir Mr Leclerc du Sablon op. cit.). Le ciment est à vrai dire de la farine et on constate que la compacité maximum augmente avec la proportion de ciment dans le fin. Si on considère comme fin la farine de sable, de finesse comparable à celle du ciment (refus de 35% au tamis

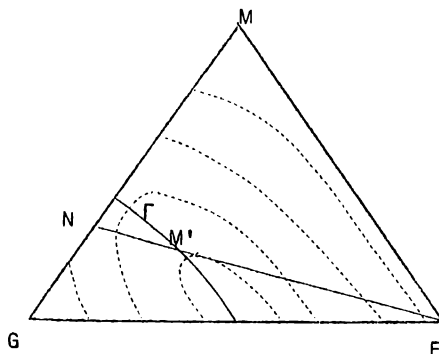
de 4900 mailles) on constate l'équivalence de cette farine et du ciment au point de vue de la compacité. Si on étudie des mélanges :

$g$  = sable non fin                       $m$  = sable fin                       $f$  = ciment + farine,

on obtient des courbes de compacité du genre de la figure 7, avec des maxima d'autant plus élevés que  $g$  est plus gros (par exemple 3/8 mm). Le maximum serait réellement obtenu pour  $g = 2/3$   $f = 1/3$   $m = 0$ .

Ayant un sable donné représenté par un point  $N$  (situé sur  $GM$  s'il n'y a pas de farine) le mortier de compacité maximum possible est représenté par le point de rencontre  $M'$  de la droite  $FN$  avec la courbe  $\Gamma$ .

Plus le sable contiendra de fin, moins la compacité sera élevée et plus il faudra forcer le ciment. Le gros sable est donc le meilleur pour le mortier. Ces observations concordent avec la règle de l'écart suffisant des dimensions des constituants. Elles expliquent l'impropriété des sables très fins, tels que ceux des dunes, pour la confection des mortiers. D'après Graf, la composition idéale du sable serait



< 0,24 mm	25%	(900 mailles)
< 1 mm	35%	
< 3 mm	65%	
< 7 mm	100%	

La règle d'une proportion optimum de farine (de  $\frac{1}{2}$  pour les grains anguleux à  $\frac{1}{4}$  pour les grains sphériques) semble exiger toujours une forte proportion de ciment et donc des mortiers très résistants. Mais l'addition de farine étrangère, même inerte, permet de réduire le ciment en conservant une grande compacité et une bonne résistance. C'est le principe :

1°) DES MORTIERS BATARDS avec addition de chaux grasse ou légèrement hydraulique;

2°) DES CIMENTS AMAIGRIS ou SAND-CIMENT par addition de farine de sable broyée; (intéressant aux colonies où on peut faire de la farine de sable sur place).

3°) Des additions de matières pouzzolaniques : trass, laitier, gaize, etc., qu'il y a intérêt à broyer le plus finement possible.

Des usines allemandes fabriquent un ciment comprenant une addition de trass moulu, qui possède grande résistance à la traction et résiste bien aux solutions de sulfate de magnésie.

Ces matières agissent non seulement par leur finesse, mais aussi par réaction, dont l'intensité est accrue du fait de la division extrême.

Mais, en tous cas, la proportion totale de farine ne doit pas dépasser la limite indiquée ci-dessus. C'est ainsi qu'une addition de chaux à un mortier riche en ciment est nuisible (voir Féret op.cit. et autres travaux). Par contre, pour une matière pulvérulente donnée, il existe un pourcentage d'addition optimum, donnant une résistance supérieure à celle du mortier maigre sans addition.

On étudie de même la composition granulométrique des bétons, mélanges des pierrailles, de sable et de farine active (ciment) ou non. Les études de Mr. Féret, confirmées par tous les expérimentateurs ultérieurs, conduisent aux conclusions suivantes :

1°) le béton le plus compact ne résulte pas de l'association du gravier le plus compact et du mortier le plus compact, à cause de la règle de l'écart suffisant des dimensions.

2°) il faut employer de préférence un gravier uniforme et de grosseur moyenne.

3°) le mortier doit contenir moins de gros sable; une certaine proportion de fin ou un excès de farine sont sans inconvénient pour la compacité du béton. Pour un gravier donné, le maximum de compacité ne correspond plus à l'absence de fin (moyen) dans le sable (côté GF du triangle) mais plutôt à l'absence de gros (côté FM). Cela correspond à la règle de l'écart suffisant et à la constatation théorique faite au sujet du magma de sphères égales permettant un sable à  $\frac{1}{3}$  au maximum de gros.

4°) le maximum de compacité du mélange  $p + s + c$  ne correspond pas à l'absence de moyen (s) mais à une proportion variable des constituants, par exemple :

$$p = 0,55 \quad s = 0,25 \quad c = 0,20$$

Les maxima de compacité des bétons sont supérieurs à ceux des mortiers. Il faut plus de sable pour les pierres cassées que pour les galets, parce qu'il y a plus de vides.

5°) le maximum de compacité correspond d'ordinaire à un rapport du volume du mortier au volume des vides du gravier compris entre 1,3 et 1,4 en moyenne 1,35.

Ces règles nous serviront dans paragraphe ultérieur pour l'étude des dosages.

### 3.- RESISTANCE DES BETONS A LA COMPRESSION.

Les propriétés essentielles des bétons pour l'ingénieur sont les résistances de rupture notamment à la compression. Ce coefficient  $R'_b$  se détermine généralement par un essai à outrance sur cubes de 0,20 ou 0,30 m. de côté, au moyen d'un effort croissant jusqu'à la rupture. La résistance sur prismes est plus faible; d'après les expériences de Bach elle vaut environ 0,9 de la résistance sur cubes pour les prismes dont la hauteur vaut trois fois le côté de la base carrée et elle tend vers 0,8 de cette résistance lorsque la hauteur dépasse 12 fois le côté de la base. D'autre part, cette résistance est la résistance maximum qui peut être considérablement réduite par effet de fatigue.

La valeur de  $R'_b$  dépend

- 1°) des qualités des constituants, surtout des plus fins, c'est-à-dire du ciment, de la farine et aussi du sable;
- 2°) du dosage et de la composition granulométrique;
- 3°) de la consistance c'est-à-dire de la quantité d'eau de malaxage;
- 4°) du mode de confection, notamment du damage plus ou moins soigné;
- 5°) des précautions prises pendant la prise et le durcissement notamment la protection contre la dessiccation;
- 6°) de l'âge;
- 7°) éventuellement de l'addition de certains produits réactifs : trass, pouzzolanes, chlorure de calcium etc., généralement prévue en vue d'obtenir certaines qualités spéciales qui ne sont pas en relation directe avec la résistance mécanique.

Les qualités et les essais du ciment, les qualités des sables, mortiers et pierres sont exposés dans le cours de chimie des matériaux techniques et dans les cours de constructions. Les spécifications imposées figurent dans les cahiers des charges; notamment les nouvelles prescriptions belges au sujet des fournitures de ciment (A.T.P.B. octobre 1927).

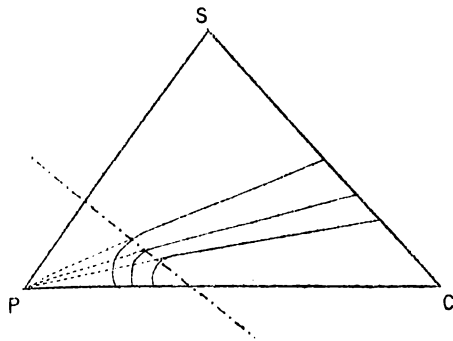
Les qualités et les effets des produits actifs ajoutés aux mortiers et bétons sont exposés aussi dans le cours de chimie des matériaux techniques et font l'objet de spécifications ou prescriptions des cahiers des charges.

L'étude des divers facteurs influant sur la résistance des bétons est longue, complexe principalement du domaine du laboratoire. On consultera avec fruit les travaux de Mr. R. Féret et la mise au point de l'état actuel de la question que constitue le rapport n°7 sur la résistance des mortiers et béton du L.F.E.M de Zürich. Les conclusions essentielles sont les suivantes :

- 1°) La résistance augmente avec la qualité et la quantité du ciment.
- 2°) Elle dépend de la qualité du sable, qui doit être propre et satisfaire aux conditions granulométriques indiquées pour l'obtention d'un béton compact. La nature géologique du sable exerce peu d'influence. Selon L.F.E.M. Zurich, la proportion optimum sable/gravier en volumes apparents est 0,5 , mais peut sans grands écarts s'élever à 0,6 même 0,7 ce qui correspond bien aux proportions en volumes absolus données dans le paragraphe précédent. Mais lorsque ce rapport dépasse 1 et atteint 2, le déficit de résistance peut être de 40% à dosage égal de ciment. Donc un excès de sable est nuisible dans le béton.

3°) La qualité de la pierraille cause moins d'influence, il faut cependant que sa résistance soit supérieure à celle du mortier. Mr Feret a montré que la résistance d'un béton dépend principalement de celle du mortier (chimie app. à l'art de l'ingénieur page 525). Les courbes d'égale résistance tracées dans un diagramme triangulaire PCS sont presque des droites passant par le sommet P

lorsque  $p < 2/3$ . Donc les résistances des bétons sont dans ces conditions, sensiblement les mêmes que celles des mortiers correspondants, représentés par les points de la droite CS. Lorsque  $p > 2/3$  les résistances décroissent très rapidement (béton caverneux). Mais la pierre agit par ses formes et ses dimensions selon les considérations granulométriques du paragraphe précédent avec moins d'importance toutefois que pour le sable. La pierre doit être propre, bien adhérente au mortier et peu poreuse, afin d'éviter la gélivité et l'absorption de l'eau du béton par les pierres.

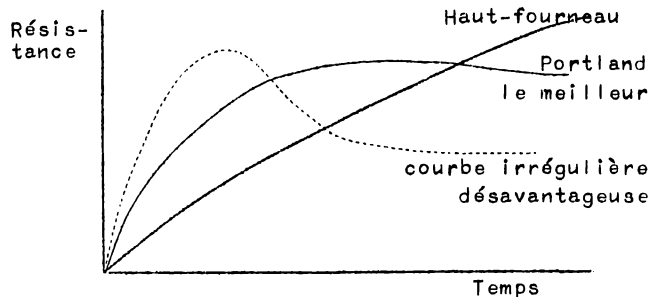


4°) Le mélange intime des constituants, le mélange mécanique et le damage intense, notamment le damage pneumatique accroissent la résistance. Le damage vibratoire est d'une très grande efficacité. La résistance croît

donc avec le poids spécifique du béton. On a récemment découvert les propriétés du béton désaéré, béton préparé dans un vide relatif, afin d'en extraire l'air, d'en diminuer les vides de la sorte, et donc d'augmenter la compacité et le poids spécifique, la résistance en est sensiblement accrue.

5°) le durcissement sous eau ou dans un état d'humidité entretenue ralentit d'abord le durcissement, mais accroît la résistance après quelques mois. La dessiccation rapide et l'action du gel la diminuent.

6°) La résistance augmente avec l'âge pendant de longues années, d'une manière naturellement décroissante, mais néanmoins très marquée.



7°) Enfin, les travaux de Mr. Féret confirmés par les nombreux expérimentateurs de tous pays, montrent l'influence considérable de la consistance sur la résistance c'est-à-dire de la quantité d'eau de gâchage en rapport avec la compacité du mélange. Mr Feret a établi la formule :

$$R'_b = K \left( \frac{c}{1 - s - p} \right)^2$$

d'après les notations précédentes en

volumes absolus.

Pour mettre en évidence par cette formule l'influence de l'eau et des vides on peut écrire

$$R'_b = K \left( \frac{c}{c + e + v} \right)^2 = K \left( \frac{\frac{c}{c + v}}{1 + \frac{e}{c + v}} \right)^2 = K \left( \frac{1}{1 + \frac{e + v}{c}} \right)^2 \quad (*)$$

$R'_b$  est la résistance sur cubes de 7 cms pour le mortier et de 20 ou 30 cms pour le béton.  $K$  est un coefficient qui tient compte de la qualité du ciment, de l'âge du béton et des conditions de durcissement. Il est différent pour le mortier et pour le béton et d'après le L.F.E.M.Z. on a  $K_b = 0,87 K_m$ .

Pour une valeur de  $K$  donnée, la courbe de  $R'_b$  en fonction de  $\frac{c}{e + v}$  est du 3<sup>e</sup> degré, mais la partie utile se confond sensiblement avec une droite.

(\*) Voir note au bas de la page suivante.

L'Américain Duff.A. Abrams a établi la formule :

$$\Delta_c = 3100 ; \Delta_o = \Delta_p = 2650 ; \Delta_e = 1000 ; R'_b = A \times B^{-1,5} e'/c'$$

$R'_b$  est la résistance à la compression des cylindres de 15 cm de  $\phi$  et 130 cm de hauteur, A et B sont des coefficients dépendant des mêmes facteurs que K. Cette formule correspond aux bétons fluides américains. Elle est applicable, dans les limites :

$$0,7 < \frac{c'}{e'} < 30$$

$c'$  étant le poids du ciment en Kgs.-  $e'$  étant le volume d'eau en litres. La partie utile de la courbe se confondant avec une droite, Mr. Bolomey (Suisse) lui a donné l'équation

$$R'_b = K \left( \frac{c}{E + V} - K_1 \right).$$

$$R'_b = K \left( \frac{c'}{e'} - K_1 \right)$$

$R'_b$  étant la résistance sur cubes.

Cette formule est applicable aux bétons fluides. Pour les bétons secs, Mr. Bolomey propose :

$$K_b = 0,87 K_m \quad (K_m = K \text{ mortier})$$

$$R'_b = K \left( \frac{c'}{e' + v'} - K_1 \right)$$

$v'$  étant le volume des vides en litres.

Enfin en Allemagne, on use des formules de Graf

$$R'_b = \frac{R}{400} \left( \frac{1500}{72^w} + 20 \right) \text{ Kgs/cm}^2 \quad \text{pour les bétons plastiques.}$$

$$R'_b = \frac{R}{400} \left( \frac{1640}{72^w} + 30 \right) \text{ Kgs/cm}^2 \quad \text{pour les mortiers plastiques.}$$

$R'_b$  étant la résistance après 28 jours sur cubes de 20 ou 30 cm. de côté en béton ou de 7 cm. de côté en mortier.

$R_n$  est la résistance du mortier normal d'après les règlements allemands,

w le rapport  $\frac{e'}{c'}$  du poids de l'eau au poids du ciment.

Le L.F.E.M.E. a reconnu la formule de Mr. Feret comme la plus convenable, à la suite des résultats de plus de 10000 essais répartis sur une durée de plus de 20 années. Toutes ces formules sont d'ailleurs compatibles; pour les valeurs usuelles, les courbes de  $R'_b$  en fonction de  $\frac{c}{e + v}$  sont sensiblement des droites. Il existe encore d'autres formules analogues.

NOTE DE LA PAGE PRECEDENTE.

En considérant la relation entre les poids, on obtient :

$$R'_b = K \left[ \frac{\frac{C}{3100}}{\frac{C}{3.100} + \frac{E}{1.000} + \frac{V}{1.000}} \right]^2 = K \left[ \frac{C}{C + 3,10 (E + V)} \right]^2 = K \left[ \frac{1}{C + 3,10 \frac{E + V}{C}} \right]^2 = K \left[ \frac{\frac{C}{E + V}}{\frac{C}{E + V} + 3,10} \right]^2$$

$$= K \left[ \frac{\frac{C}{3,10}}{1 + \frac{S + P}{2,650}} \right]^2 = K \left[ \frac{C}{3,10 - 1,17 (S + P)} \right]^2 \quad \text{Les lettres majuscules sont relatives aux poids.}$$



Pour les bétons très fluides,  $v = 0$  et la formule de Feret donne

$$R'_b = K \left( \frac{1}{1 + \frac{e}{c}} \right)^2 \text{ forme compatible avec la formule d'Abrams.}$$

La formule de Feret est donc la plus générale et celle qui se réfère le plus directement au dosage, à la granulométrie et à la consistance du béton.

Les opérations de Mr Freyssinet confirment ce point. Il estime que la résistance ne dépend que de la compacité. La loi d'Abrams n'est qu'un cas particulier, lorsque l'eau remplit exactement les vides, ce qui correspond à un commencement d'exsudation. Dans les cubes d'essai, les pièces minces en béton armé non vibré etc., on peut conserver toute l'eau, mais dans les grands massifs et les pièces centrifugées ou vibrées, il y a évacuation d'eau. Il en résulte que les formules de prévision des résistances sont assez illusoires et ne peuvent pas se substituer à des essais directs. (Génie Civil 21 juillet 1928).

D'après le rapport précité de L.F.E.M.Z., le coefficient  $K_m$  peut être déterminé par l'essai de compression sur cubes de mortiers plastiques pour un ciment déterminé. On en déduit  $K_b$  et on peut alors prédéterminer la résistance probable ou moyenne des bétons de dosage et de consistance définies que l'on peut confectionner avec ce ciment. Le rapport donne aussi des valeurs moyennes de  $K_m$  à 7 et à 28 jours pour diverses qualités de ciments suisses.

	3 jours.	7 jours.	28 jours.
Mortier plastique de ciment Portland ordinaire :		1403,8	2124,2
Mortier plastique de ciment Portland spécial :	1554,5	2578,7	3493,5

Il donne aussi des valeurs moyennes de  $\left( \frac{c}{1 - s - p} \right)^2$  pour divers mortiers et bétons plastiques (voir figures).

Ces données ne peuvent ipso facto être valable partout. Faute de renseignements généraux plus précis, elles permettent cependant de fixer un ordre de grandeur. Il serait désirable que des données pareilles fussent établies en Belgique.

La formule de Graf, qui se réfère explicitement à la résistance du mortier normal, semble susceptible d'être en défaut d'après certaines observations néerlandaises (voir De Ingenieur N°4 de 1928 et 17 novembre 1928) notamment en cas d'excès de sable fin. Il est préférable de se référer à des essais sur mortier plastique.

Selon le rapport suisse,  $K_b$  étant le coefficient de Feret à 28 jours, la résistance après 7 jours est :

$$R'_b = K_b \left( \frac{c}{1 - s - p} \right)^2 \frac{a \cdot T^{2/3}}{b + T^{2/3}} = R'_b (28 \text{ jours}) \times \frac{a \cdot T^{2/3}}{b + T^{2/3}}$$

Pour les bétons très plastiques de ciments suisses :  $a = 1,50$      $b = 4,61$

Pour les bétons peu plastiques de ciments suisses :  $a = 1,40$      $b = 3,69$

En désignant par  $x$  le logarithme du temps Mr Van Perck (Annales A.I.Br.) propose une loi

$$R_b - R_a = D (x_b - x_a)$$

valable entre certaines limites. En admettant

$$R_b = K_1 \left( \frac{c'}{E'} - K' \right) \quad \text{il trouve} \quad D = k \left( \frac{c'}{E'} - k' \right)$$

On a :

$$D = \frac{dR}{dx} = \frac{dK_1}{dx} \left( \frac{c'}{E'} - K' \right) - \frac{dK'}{dx} K' = k \left( \frac{c'}{E'} - k' \right)$$

donc

$$k = \frac{dK_1}{dx} \quad \text{et} \quad k' = K' + K_1 \frac{\frac{dK'}{dx}}{\frac{dK_1}{dx}}$$

Cette loi n'est guère valable que pendant la période moyenne du durcissement entre quelques jours et quelques semaines tout au plus.

#### 4.- DOSAGE CORRECT DU BETON.

Pour un travail important, il est recommandable de chercher à établir le dosage le plus avantageux, ayant la résistance et la plasticité voulues, en se servant des matériaux dont on dispose. On détermine la loi

$$R'_b = f \left( \frac{c}{e + v} \right)$$

On étudie les compositions granulométriques des matériaux constitutants et de leurs mélanges secs. On peut par les diagrammes triangulaires, tracer les courbes des compacités maxima et déterminer le rapport du volume de pâte liante au volume des vides de la pierraille donnant la compacité maximum pour un béton plastique. Remarquons que  $\frac{c}{e + v}$  est d'autant plus grand que  $e + v$  est petit c'est-à-dire que  $1 - (p + s + c)$  est petit, donc que la compacité du mélange sec est grande. Seulement, un tel mélange donne un béton très sec, difficile à mettre en oeuvre et qui malgré le soin de damage, comportera des vides, qui diminueront la résistance. Tel était le cas, il y a quelques années. Actuellement par la vibration on évite tout vide et on emploie une quantité considérable de pierrailles. Ce dernier béton ne conviendrait évidemment pas pour le béton armé. Si le béton est armé, les barres seront mal enrobées. Pour augmenter la facilité de mise en oeuvre, il faut augmenter la plasticité par addition d'eau. Pour la mise en place par gravité, on va jusqu'à rendre le béton fluide. Pour essayer de concrétiser la notion de plasticité, on a défini en Amérique la méthode d'affaissement ou SLUMP-TEST. On remplit un moule tronconique, de 30 cm. de hauteur et de 10 et 20 cm. de case supérieure et inférieure de béton non damé. On retire le moule et on mesure l'affaissement. C'est l'essai le plus répandu. On peut aussi opérer sur une table à secousses, au moyen d'un moule tronconique de 7,5 cm. de hauteur et de 10 et 15 cm. de base. On démoule après remplissage et on imprime 15 secousses de 15 mm. de hauteur en 10". La consistance est exprimée par le rapport entre le nouveau diamètre maximum et initiale (flow-test). En moyenne on peut envisager les degrés suivants de consistance :

<u>Consistance</u>	<u>Slump</u>	<u>Table à secousses</u>
Terre humide	0 - 1 cm	1,10 à 1,20
Plastique	1 - 3 cm	1,20 à 1,30
Semi-fluide	3 - 10 cm	1,30 à 1,80
Fluide	10 - 15 cm	1,80 à 2,30
Tout à fait fluide	15 - 20 cm	2,30 à 2,60
Les matières se séparent	> 20 cm	> 2,60

Pour le béton armé, la consistance semi-fluide, avec un slump compris entre 4 et 8 cm. paraît la meilleure.

L'augmentation de plasticité exige l'accroissement de  $e$  donc la réduction de  $\frac{c}{e}$  et de la résistance. Pour maintenir la résistance, il faut augmenter  $c$ ,

ce qui est coûteux. Le problème se pose d'obtenir une certaine plasticité moyennant le minimum d'eau, donc aussi de ciment, pour une résistance donnée. Il est soluble, parce que la plasticité dépend de la composition granulométrique. Mais on conçoit que la relation est complexe et ne peut être exprimée que par des règles empiriques, c'est-à-dire expérimentales. Il faut se garder de leur accorder une valeur trop absolue car les écarts par rapport aux moyennes peuvent être grands. Dans ces conditions, il faut éviter la complication dans les recherches préliminaires et préférer les méthodes les plus simples. Il suffit en somme, de pouvoir déterminer, d'une manière approximative le dosage probable. Ensuite, pour un travail important, on procède à des essais comparatifs directs de résistance pour déterminer le dosage définitif.

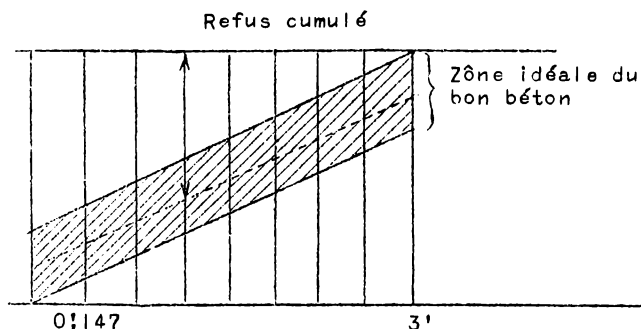


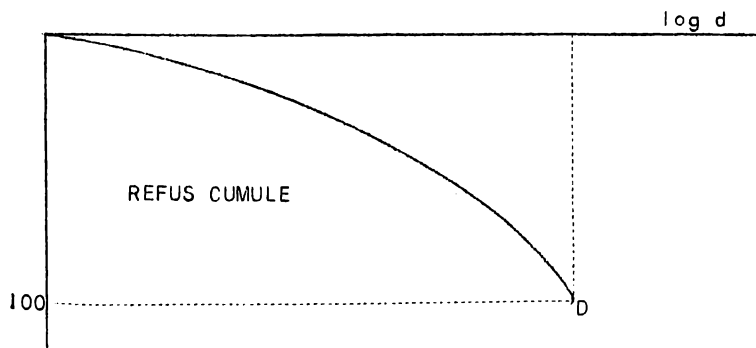
TABLE DE TYLER STANDARD dont les jours ont comme dimensions :

0,147	0,295	0,589	1,17	1,36
4,70	4,42	18,85	1,5'	3'

Mr. Abrams a établi une méthode de prédétermination, basée sur le MODULE DE FINESSE. C'est le quotient par 100 de la somme des pourcentages des résidus de tamisage du mélange sur une série de 10 tamis standard. Ce module de finesse est d'autant plus petit que la matière est plus fine; il serait 0 pour la farine idéale. Les dimensions extrêmes des mailles de la série sont 0,147 et 76,2mm. Mr. Abrams exprime les règles suivantes :

1°) Pour une quantité de ciment donnée par  $m^3$  de béton la plasticité ne dépend que du module de finesse et de la quantité d'eau.

2°) Pour un rapport donné des volumes de ciment et de matières inertes il existe un module de finesse dit IDEAL réalisant une consistance donnée avec le minimum d'eau et assurant donc la plus grande résistance. Abrams a établi des tableaux des modules idéaux en relation avec la consistance, d'après le slump-test et en fonction de la teneur en ciment, des dimensions maxima des grains et du rapport  $c'/e'$ . La méthode est assez complexe et appropriée surtout pour les bétons américains. Elle semble d'ailleurs ne pas jouir de la faveur générale. Selon les rapports suisses, il paraît plus simple de se référer à la courbe de Fuller (U.S.A.). Cet expérimentateur américain a énoncé la règle qu'il existe une composition granulométrique idéale définie comme suit. On porte en abscisses



suisvant une échelle logarithmique, les jours des mailles carrées des tamis et en ordonnées les pourcentages des matières traversant les tamis correspondants. On peut de la sorte, pour un mélange déterminé tracer un diagramme de composition granulométrique. Le mélange idéal de l'agrégat sans liant est défini par une courbe continue dont la

formule d'après Fuller est  $p = 100 \sqrt{\frac{d}{D}}$  p étant le pourcentage de passé correspondant au jour d et D étant la dimension des grains maximum en mm.. Le L.F.E.M.Z. recommande de réduire un peu les ordonnées de cette courbe pour  $d < D$  ce qui revient à réduire un peu la quantité de fin.

Mr Bolomey a modifié cette formule comme suit :

$$p = A + (100 - A) \sqrt{\frac{d}{D}}$$

Valeur A	Fluidité 1,7 (béton semi-fluide)	Fluidité 2,6 (béton liquide)
Matériaux de rivière	A = 10	A = 12
Matériaux concassés	A = 12	A = 14
		A = 0 si D < 10 mms.

La courbe de Fuller Bolomey se rapporte au mélange sec complet du béton, liant compris. D'après les coefficients de Bolomey il faut donc plus de fin pour une consistance fluide, ce qui corrobore des remarques précédemment faites (plus de vides et plus grande surface à enrober d'eau). En Allemagne pour éviter la séparation du béton coulé, on emploie un volume de mortier fluide égal à 2,5 fois celui des vides de l'agrégat. Ce mortier a 40 % de fin < 0,5 mm. Pour obtenir ce résultat sans excès de sable, on doit ajouter une certaine proportion de sable très fin (Z.V.d.I. 20-10-28).

Une méthode qui paraît supérieure à celle de la courbe granulométrique idéale ou moyenne ou qui la complète est celle des courbes granulométriques limites situées de part et d'autre de la moyenne. De petits écarts par rapport à la moyenne sont sans effet sensible, mais il importe de définir les limites des écarts.

Connaissant les courbes granulométriques des constituants le problème revient à chercher un mélange se rapprochant le plus possible de la courbe idéale. Les pourcentages des mélanges sont des fonctions linéaires de ceux des constituants. En vue de maximum de compacité, on pose par exemple :

$$\frac{S + c}{1 - v_m} = 1,35 p \frac{V}{1 - V} \text{ pour un béton plastique}$$

V étant la proportion des vides du volume apparent du gravier,  $1 - v_m$  la compacité du mortier. Mathématiquement on peut s'imposer la coïncidence de la courbe du mélange et de la courbe idéale en 2 points, pour définir les proportions à adopter.

Il reste à vérifier si le rapport  $\frac{c}{e + v}$  correspondant à la résistance voulue réalise la consistance demandée. Si elle est trop fluide, on réduit l'eau et le ciment, que l'on remplace par de la farine inerte. Si elle est trop forte on augmente l'eau et le ciment. Mais il faut bien noter que la consistance n'est pas une qualité qu'il importe de réaliser dans des limites très étroites. Le rapport de L.F.E.M.Z. met en garde contre une normalisation excessive de la notion de consistance. Il semble préférable, par la surveillance d'un chantier de définir le pourcentage d'eau de gâchage en poids par rapport au mélange sec. Le rapport suisse indique :

Consistance	terre humide	8,5 à 7 %	} mortier	5 à 6 %	} béton
	plastique	11 à 8 %		7 à 8 %	
	fluide	13 à 11 %		8 à 10 %	

La courbe de Fuller-Bolomey, et les courbes granulométriques limites ont

l'avantage d'indiquer la correction éventuelle des matériaux, par exemple, au moyen d'un criblage supplémentaire, tandis que la méthode du module de finesse d'Abrams est moins précise à ce point de vue. Or les considérations qui précèdent ont montré qu'il y a intérêt à réaliser une composition déterminée. La composition du sable est essentielle. Nous avons vu qu'un excès de gros sable ou du sable trop gros ne conviennent pas au béton. Un excès important de fin est aussi mauvais, il donne un mortier maigre, non liant, analogue à un mortier de sable fin, et il en résulte dans un béton plastique, une tendance à la séparation des éléments et à l'écaillage; ainsi qu'une diminution générale de résistance (voir rapport suisse et De Ingenieur N°4 de 1928, et Cogne Pont de Plougastel G C 4 octobre 1930). Or l'un et l'autre défauts se marquent tout de suite par un écart important par rapport à la courbe de Fuller ou par le dépassement des courbes granulométriques limites, tandis que la méthode d'Abrams peut s'accommoder du module de finesse trouvé. Nous pouvons confirmer la conclusion déjà exprimée, il est utile de procéder à une série d'essais directs avant d'arrêter la composition définitive.

#### 5.- REGLES PRATIQUES SOMMAIRES.

Les notions précédemment exposées sont des plus utiles parce qu'elles définissent les facteurs essentiels d'un bon dosage de béton. Pour la pratique européenne des bétons plastiques, les règles et formules de Féret sont capitales et les développements les plus récents relatifs à la plasticité ne font que les confirmer en les complétant. Par contre, elles sont peu propres pour la pratique des bétons fluides, moins connue en Europe. On peut admettre  $v - s$  et le facteur  $\frac{c}{e}$  est déterminant. Comme le béton fluide s'emploie généralement pour la mise en place par gravité de volumes importants de béton, il est en général utile et possible de procéder à des essais directs préalables. Cela est d'autant plus nécessaire que selon Mr Féret l'excès d'eau donne lieu à l'altération de certains ciments notamment le ciment fondu (voir G.C. 3 mars 1928). Cependant Mr Freyssinet objecte que dans les massifs coulés, une grande partie de l'eau incorporée au béton frais s'écoule, elle ne sert que de véhicule mais n'agit pas sur le durcissement.

Dans la pratique journalière, l'obligation d'études préalables en toutes circonstances constituerait plutôt un obstacle au développement de l'emploi du béton et il est désirable que l'on connaisse des dosages normaux satisfaisant aux conditions courantes.

La connaissance des notions générales et quelques vérifications simples, en cas de doute, peuvent être des guides suffisants pour le constructeur. On peut d'ailleurs se référer aux coefficients moyens suisses précités en attendant que de tels coefficients soient établis en Belgique.

Le dosage en volume apparent n'est pas fort utile. Il faut faire le dosage en volume absolu par la mesure du poids. Le dosage correct est donc celui du poids. On a des doseuses automatiques. Sinon on peut le faire par la méthode détournée : on prend un volume de 10 litres par exemple et on le pèse. Nous devons avoir quelques chiffres pour pouvoir opérer dessus.

Le poids spécifique absolu du ciment Portland artificiel est généralement compris entre 3,10 et 3,20

le ciment de laitier	< 2,80	
Ferro-ciment	2,90	$\Delta'_c = 1,10$ environ
Ciment fondu	3 à 3,16	(Rabozée)

$\Delta'_c$  diminue lorsque la finesse de mouture augmente, il dépend aussi du tassement. On admet en moyenne  $1400 \text{ Kgs/m}^3$ , il peut varier entre 1500 et 1300. La compacité varie donc de 0,47 à 0,42 (ciment Portland). La densité apparente est de 900 à 1000 pour le ciment de laitier, compacité 0,322 - 0,355.

Pour le sable siliceux  $\Delta_1 = 2,65$ , pour le poussier de porphyre  $\Delta_1$  dépend de la proportion des vides, et dans une large mesure du degré d'humidité. La proportion des vides du sable sec non tassé est de 0,40 à 0,50. En faisant abstraction du sable de carrière trop fin, 0,45 est un bon chiffre moyen pour le sable et pour le poussier. Lorsque le sable est gorgé d'eau et tassé

$$v = 0,25 \text{ à } 0,40 \text{ en moyenne } 0,35$$

Le poids spécifique des pierrailles est variable (voir cours de route). La densité apparente varie de 1,30 à 1,60 le minimum pour les plaquettes non tassées, alors que le gravier du Rhin dépasse le maximum. Les vides sont en moyenne de 40 à 45 % pour les galets arrondis et de 45 à 50 % pour les pierres cassées. Le degré d'humidité influe sur ces données. Pour des calculs exacts, il faudrait en tenir compte, notamment pour connaître la proportion totale d'eau.

Si  $V$  est la proportion des vides du gravier, le volume apparent  $P$  de pierraille contient  $P.V$  de vides. Il faut donc un volume  $\varphi.P.V$  de mortier sec,  $\varphi > 1$  et égal environ 1,35 pour le béton plastique au maximum de compacité. La composition du mortier dépend de la résistance à réaliser et se détermine comme nous l'avons vu, d'après des valeurs moyennes.

#### DOSAGE EN POIDS.

On a

$$\frac{\frac{C}{\Delta_c} + \frac{S}{\Delta_s}}{\mu} = \varphi \frac{P}{\Delta_p} \frac{V}{1-V}$$

$\mu$  = RENDEMENT DU MORTIER; en moyenne pour les bétons plastiques  $\mu = 0,667$ ; pour les bétons les plus fluides, le coefficient peut descendre à 0,60 exceptionnellement; pour les mortiers de maçonnerie plastiques ou les bétons les plus secs, on atteint jusqu'à 0,70 et davantage (0,72).

Pour les graviers de rivière :  $V_g = \frac{0,40}{\frac{V}{1-V}} = 0,67 \quad (\Delta_g)_a = 1600$

Pour les pierres cassées :  $V_p = \frac{0,50}{\frac{V}{1-V}} = 1,00 \quad (\Delta_p)_a = 1325$

Pour le sable :  $V_s = 0,45 \quad (\Delta_s)_a = 1450$

$$\Delta_g = \Delta_p = \Delta_s = 2650$$

On a :  $\frac{P}{\Delta_p} + \frac{\frac{C}{\Delta_c} + \frac{S}{\Delta_s}}{\mu} = 1$

d'où :

$$\frac{P}{\Delta_p} = \frac{1}{1 + \varphi \frac{V}{1-V}}$$

$\varphi$  est le COEFFICIENT DE REMPLISSAGE DES VIDES de la pierraille par le mortier comportant l'ensemble du sable, du ciment, de l'eau et des vides.

Pour les bétons les plus compacts :  $\varphi = 1,35$  à  $1,40$  (bétons pauvres en sable, très peu travaillables).

Pour les bétons les plus courants :  $\varphi = 1,40$  à  $1,50$

EXEMPLE I.

350 Kg C.P. (Ciment de Portland), gravier de rivière :  $\varphi = 1,55$

$\frac{P}{\Delta_p} = \frac{1}{1 + 1,55 \times 0,67} = 0,493$	$P = 1305$	Volume apparent 815 litres
$C = 350 \quad \frac{C}{\Delta_c} = 0,113$	$C = 350$	250 litres $\beta = 0,825$
$\frac{S}{\Delta_s} = 1 - (0,493 + 0,113 + 0,175) = 0,219$	$S = 580$	400 litres
$H^2O \quad \frac{C}{H^2O} = 2(7,87 \% P + C + S)$	$\frac{2235}{173}$	$\mu = \frac{332}{507} = 0,655$
	$2410 \text{ Kg/m}^3$	

S'il y avait eu 150 litres d'eau et 2,5 % de vides on aurait :

$$\Delta_b = 2395 \text{ Kg/m}^3$$

EXEMPLE II.

450 Kg C.P.

Pierres cassées

$\varphi = 1,65$

$\frac{P}{\Delta_p} = \frac{1}{1 + 1,65 \times 1} = 0,378$	$P = 1000$	Volume apparent 625 litres
$C = 450 \quad \frac{C}{\Delta_c} = 0,145$	$C = 450$	321 litres $\beta = 0,775$
$\frac{S}{\Delta_s} = 1 - (0,378 + 0,145 + 0,225) = 0,252$	$S = 668$	460 litres
$\frac{C}{H^2O} = 2$	$\frac{2118}{225}$	$\mu = \frac{397}{622} = 0,637$
	$2343 \text{ Kg/m}^3$	

Béton peu compact, trop riche en mortier.

Les pierres cassées bien composées peuvent avoir au moins 50 % de vides.

Pour  $V = 0,40$  ,  $\frac{V}{1-V} = 0,67$       Pour  $V = 0,33$  ,  $\frac{V}{1-V} = 0,50$

Dans ces conditions, les formules sont applicables aux bétons de routes.

Pour des bétons très plastiques :  $\varphi = 1,60$  à  $1,70$

Pour des bétons mous et fluides :  $\varphi = 1,80$  à  $2,00$

Enfin :  $\frac{C}{\Delta_c} + \frac{S}{\Delta_s} = \mu (1 - \frac{P}{\Delta_p}) = 1 - \frac{P}{\Delta_p} - (e + v)$

e et v étant les volumes absolus d'eau et de vides ( $e = \frac{E}{1000}$ )

Si C est donnée en  $\text{Kg/m}^3$ , on en déduit S, connaissant le rapport  $\frac{C}{E+V}$

pour obtenir une résistance déterminée.

On a :  $\Delta_c = 3100$  pour le ciment Portland et le ciment fondu

$\Delta_c = 2950$  pour le ciment de haut-fourneau

$\Delta_c = 2800$  pour le ciment de laitier.

Correspondant aux anciens dosages en volumes apparents, on a les dosages suivants en poids:

Vol. appar.	{ 1      1,5      3	{ 1      2      3	{ 1      2      4
gr.	{ 1      1,85      4,00	{ 1      2,45      4,00	{ 1      2,45      5,30
	{ 0,146      0,271      0,584	{ 0,135      0,329      0,536	{ 0,115      0,280      0,605
P.c.	{ 1      1,85      3,35	{ 1      2,45      3,35	{ 1      2,45      4,45
	{ 0,161      0,298      0,541	{ 0,147      0,360      0,493	{ 0,127      0,310      0,563

Vol. appar.	{ 1      3      5	{ 1      3      6
gr.	{ 1      3,70      6,70	{ 1      3,70      8,00
	{ 0,088      0,325      0,587	{ 0,079      0,291      0,630
P.c.	{ 1      3,70      5,60	{ 1      3,70      6,70
	{ 0,097      0,359      0,544	{ 0,088      0,326      0,586

Béton à 450 Kg/m<sup>3</sup> de C.P.;  $\rho = 1,60$ ;  $V = 0,35$ ; Mortier de 465 l;  $\mu = \frac{285}{465} = 0,612$

		Vol. appar.	Vol. absolu
$\frac{P}{\Delta_p} = \frac{1}{1 + 1,60 \times 0,54} = 0,535$	$P = 1.415$	825 l.	535 l
$C = 450 \quad \frac{C}{\Delta_c} = 0,145$	$C = 450$	321 l.	145 l $\beta = 0,820$
$\frac{S}{\Delta_s} = 1 - (0,535 + 0,145 + 0,180) = 0,140$	$S = \frac{371}{2.236}$	256 l.	140 l
	$\frac{180}{2.236}$		
	$\frac{180}{2.416}$	eau et vides	<u>180 l</u>
	$\text{Kg/m}^3 \quad 2.416$		1000 l

En descendant en dessous de 180 litres d'eau, ce qui augmenterait le sable, on pourrait encore légèrement augmenter la compacité. On ne pourrait guère descendre en dessous de 170 litres d'eau.

<u>Béton de route</u> à 350 Kg/m <sup>3</sup> C.P.	$V_p = 0,33$	$\rho = 1,50$	
		Vol. appar.	Vol. absolu
$\frac{P}{\Delta_p} = \frac{1}{1 + 1,50 \times 0,50} = 0,572$	$P = 1515$	860 l.	572 l.
$C = 350 \quad \frac{C}{\Delta_c} = 0,113$	$C = 350$	250 l.	113 l. $\beta = 0,825$
$\frac{S}{\Delta_s} = 1 - (0,572 + 0,113 + 0,175) = 0,140$	$S = \frac{371}{2.236}$	256 l.	140 l.
	$\frac{175}{2.236}$		
$\frac{C}{H^2O} = 2$	$\frac{175}{2.411}$	eau et vides	<u>175 l.</u>
	$\text{Kg/m}^3 \quad 2.411$		1000 l.

428 l. de mortier,  $\mu = \frac{253}{428} = 0,59$



En admettant qu'il n'y ait que 150 l. d'eau après damage, on aurait 0,165 de sable ou 437 Kg et  $\Delta_b = 2452$ ,  $\beta = 0,85$ ,  $\mu = 0,65$ . Les chiffres ainsi obtenus pour les bétons de route sont voisins des chiffres réels. Seulement il faut effectivement, que  $V_p = 0,33$  à  $0,35$  et que le sable soit tel que le mortier soit bien compact, enfin il faut un serrage parfait. On voit que pour une bonne compacité de béton, il faut que  $H^2O$  soit LE PLUS PETIT POSSIBLE.  $\mu$  dépend essentiellement de la quantité d'eau et est assez faible pour les mortiers de béton. Quant à  $\beta$  il vaut en moyenne 0,80, parfois 0,82 pour des bétons de bonne qualité; au maximum 0,85 pour des bétons secs très compacts (routes), il est difficile d'avoir mieux. Il descend en dessous de 0,80 (0,77) pour les bétons très mous et jusque 0,75 pour les bétons les plus fluides.

5'. - PREDETERMINATION APPROXIMATIVE ET RAPIDE DE LA RESISTANCE DES BETONS.

Soit un béton composé de  $C_p$  Kgs de ciment, S litres de sable, et P litres de pierrailles par  $m^3$ . Ce dosage est déterminé par exemple d'après le paragraphe 5. Le poids par  $m^3$  des matières sèches est

$$C_p + 2650 \left( 0.55 S + 0.50 P \right) \text{ pour le béton de pierrailles.}$$

$$C_p + 2650 \left( 0.55 S + 0.60 P \right) \text{ pour le béton de gravier.}$$

Le pourcentage d'eau en poids des matières sèches étant choisi pour une consistance déterminée, on en déduit la quantité E d'eau. D'après la consistance on suppose le volume des pores; par exemple le complément à 20 du pourcentage d'eau en volume. La résistance probable, d'après Féret est :

$$R'_b = K_b \left( \frac{c}{c+e+v} \right)^2 = K_b \left[ \frac{\frac{C_p}{3,10}}{\frac{C_p}{3,10} + E + V} \right]^2 = K_b \left[ \frac{1}{1 + 3,10 \frac{E + V}{C_p}} \right]^2 = K_b \left[ \frac{\frac{C_p}{E+V}}{\frac{C_p}{E+V} + 3,10} \right]$$

car

$$e + v = \frac{E + V}{1000} \quad \text{et} \quad c = \frac{C_p}{3,10}$$

D'après la formule de Bolomey

$$R'_b = K \left[ \frac{C_p}{E + V} - 0,5 \right]$$

Ci-contre les diagrammes de fonctions de Féret et de Bolomey, toutes deux en fonction de  $\frac{C_p}{E + V}$  et la première aussi en fonction de  $\frac{E + V}{C_p}$ . On voit par la représentation en fonction de  $\frac{C_p}{E + V}$  que les différences entre les deux fonctions sont très faibles, d'autant plus que le coefficient  $K_b$  est environ 10 fois plus grand que K. Par exemple, pour du ciment Portland artificiel ordinaire à 28 jours  $K_b = 1850$  et  $K = 200$ .

EXEMPLES. I.- Reprenons le béton de gravier 1 : 2 : 4 du paragraphe 5. Par  $m^3$  on a : 283 kgs de ciment, 806 litres de gravier, 403 litres de sable.  
Poids des matières sèches : 283 + 1280 + 590 = 2153 Kgs.

Béton plastique : 8 % d'eau = 172 Kgs ou litres. Poids du  $m^3$  fait 2325 Kgs.  
Pores 2,8 %  $E + V = 200$  litres.

$$\frac{C_p}{E + V} = 1,415 \quad \text{D'après la formule de Féret} \quad R'_b = 1850 \cdot 0,099 = 183 \text{ Kgs/cm}^2$$

$$\text{D'après la formule de Bolomey} \quad R'_b = 200 \cdot 0,92 = 184 \text{ Kgs/cm}^2.$$

Béton fluide : 10 % d'eau = 215 litres;  $\frac{C_p}{E + V} = \frac{283}{215} = 1,315$ ; Poids = 2368 Kgs.

D'après la formule de Feret  $R'_b = 1850.0,09 = 166 \text{ Kgs/cm}^2$

D'après la formule de Bolomey  $R'_b = 200.0,80 = 160 \text{ Kgs/cm}^2$ .

II.- Béton de plaquettes 1 : 2 : 3 . 365 Kgs ciment; 782 litres gravier, 523 litres sable. Poids du m<sup>3</sup> sec : 365 + 1040 + 760 = 2165 Kgs.

Béton plastique : 8 % d'eau = 173 litres + 27 litres de vides.

Poids du m<sup>3</sup> = 2338 Kgs.  $E + V = 200$  ;  $\frac{C_p}{E + V} = 1,825$

D'après la formule de Féret  $R'_b = 0,037.1850 = 254 \text{ Kgs/cm}^2$

D'après la formule de Bolomey  $R'_b = 200.1,32 = 264 \text{ Kgs/cm}^2$

Béton fluide : 10 % d'eau = 216,5 litres;  $\frac{C_p}{E + V} = 1,68$ ; Poids du m<sup>3</sup> = 2381,5 Kg.

D'après la formule de Féret  $R'_b = 0,033.1850 = 227 \text{ Kgs/cm}^2$

D'après la formule de Bolomey  $R'_b = 200.1,2 = 240 \text{ Kgs/cm}^2$ .

On voit que les écarts entre les résultats des formules ne sont pas sensibles et l'on fera bien, par sécurité, d'envisager une marge de 20 % par rapport à la prévision la plus basse. Ainsi pour le premier béton, on tablera sur 150 Kgs/cm<sup>2</sup>. ou 130 Kgs/cm<sup>2</sup> suivant qu'il est plastique ou fluide; pour le second, on tablera sur 200 et 175 Kgs/cm<sup>2</sup> dans les mêmes conditions; avec de grandes présomptions de réaliser des résistances supérieures si, bien entendu, toutes les règles indiquées dans les paragraphes précédents sont respectées dans la confection du béton.

## 6.- RESISTANCE A LA FLEXION, A L'EXTENSION ET AU CISAILLEMENT.

La résistance à l'extension du béton est beaucoup moins bien connue que celle à la compression, ayant été beaucoup moins étudiée. On n'a pas établi de relation bien définie entre les deux. On admet souvent  $R_b \leq 0,1 R'_b$  ; en réalité la résistance mesurée peut même être moindre. Mais par suite des tensions très inégales qui se développent dans les éprouvettes, ainsi que le montre l'étude photo-élastique, on peut admettre que la résistance moyenne mesurée est trop faible. J'ai indiqué déjà que la résistance de rupture de flexion est la même que la résistance à l'extension. Mais la résistance apparente, calculée par la formule de Navier, est sensiblement double, tant par suite de la diminution de  $E_b$  à la traction dans le stade de rupture que par suite de l'erreur de l'essai direct de traction. Par de multiples essais de flexion de petits prismes de mortier sous moment constant, au moyen de l'appareil qu'il a imaginé, Mr Feret a trouvé le rapport 1,95 de la résistance apparente de flexion à la résistance à l'extension. La résistance de flexion représente mieux, semble-t-il, la résistance véritable à l'extension.

La résistance au cisaillement intervient dans la flexion et dans la torsion. A vrai dire, cette notion est contestable. Les ruptures paraissent dues surtout aux tensions principales de traction et les formes d'armatures les plus efficaces pour résister au cisaillement sont celles qui supportent les efforts de traction principaux. Selon Mohr le coefficient conventionnel de résistance au cisaillement pour la torsion et la flexion s'exprime par :

$$R''_b = \frac{1}{2} \sqrt{R_b \cdot R'_b} \text{ en Kgs/cm}^2 ; (t - n.tg\varphi) = C ; R_b = 2 C.tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$R'_b = 2 C.tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

il est donc plus élevé que  $R_b$  et d'ordinaire compris entre 1,6 et 2  $R_b$  .

7.- TAUX DE TRAVAIL DE SECURITE.

Selon le règlement français, on admet comme taux de travail à la compression 0,28 de la résistance de rupture sur cubes après 30 jours. Le règlement l'A.B.S. envisage le même coefficient pour la résistance de rupture sur cube lors de la mise en service.

Comme taux de travail de cisaillement, on peut admettre le 1/10<sup>e</sup> de celui de compression et pour la traction, le 1/10<sup>e</sup> si l'on veut éviter à coup sûr les fissurations, sinon éventuellement le 1/5<sup>e</sup>.

\*\*\*\*\*

CHAPITRE II.

=====

FORMULES ET TABLES POUR LE CALCUL ORGANIQUE DU BETON ARME.

=====

Les principes et les théories relatives à la résistance et au calcul du béton armé sont exposés dans les cours de résistance des matériaux.

L'exposé qui suit, condensé en vue de l'application, suppose connues ces notions.

Les notations employées, sont celles de l'A.B.S., dont le règlement doit être en main de tout praticien belge.

1.- COMPRESSION SIMPLE.

Désignons par  $\Omega_t$  la section totale,  $\Omega_b$  la section du béton,  $\omega_a$  la section de l'acier. ( $\Omega_t = \Omega_b + \omega_a$ ).

La section fictive est :

$$\Omega_f = \Omega_b + m.\omega_a = \Omega_t \left[ 1 + (m - 1) \frac{\omega_a}{\Omega_t} \right] = \Omega_t (1 + \lambda)$$

en posant

$$\lambda = \frac{(m - 1) . \omega_a}{\Omega_t}$$

On a :

$$\sigma'_b = \frac{P}{\Omega_f} = \frac{P}{\Omega_t . (1 + \lambda)} \quad \text{ou} \quad \frac{P}{\Omega_t . \sigma'_b} = 1 + \lambda$$

La tension du métal est  $\sigma'_a = m . \sigma'_b$

Il faut  $\sigma'_b < \frac{R'_b}{S}$  ,  $\sigma'_a < \frac{R'_a}{S}$  , S étant un coefficient de sécurité = 3,6 par exemple.

Dans les limites des charges de sécurité, correspondant aux parties élastiques des diagrammes de déformation, on a

$$m = \left( \frac{E_a}{E_b} \right)_{\text{comp.}}$$

Dans ces conditions, m varie de 6 à 10 en général. Si on considère la charge de rupture et que les fatigues de rupture de l'acier et du béton soient simultanément atteintes, on a  $m = \frac{R'_a}{R'_b}$  . Cette valeur est supérieure à la précédente et peut-être même supérieure à 15, mais la plupart des essais sur éprouvettes armées, comprimées jusqu'à rupture, justifient le coefficient  $m = 15$ . Ce coefficient pourrait même sous des charges permanentes devenir plus grand, si les déformations du béton croissent avec le temps. Compte tenu des compressions initiales que le retrait peut produire dans les armatures, celles-ci peuvent être

chargées au delà de la limite d'élasticité; le béton étant peu fatigué. Mais dès que le métal atteint la limite d'élasticité, la situation se modifie; la charge du métal ne peut plus croître et la charge du béton se stabilise.

D'après cela il n'est pas mauvais d'armer fortement les pièces comprimées, il est nécessaire de bien soigner les joints d'armatures et de les réaliser de préférence par aboutement au moyen de manchons ou de soudures (éviter les crochets).

## 2.- TRACTION SIMPLE.

Les formules sont les mêmes que ci-dessus :

$$\sigma_b = \frac{P}{\Omega_t \cdot (1 + \lambda)} \quad \frac{R_b}{s} ; \quad \sigma_a = m \cdot \sigma_b < \frac{R_a}{s}$$

Mais, par raison de sécurité, on impose que l'armature puisse résister seule à l'effort, de sorte que :

$$P = \frac{\omega_a \cdot R_a}{s} = \Omega_t \cdot (1 + \lambda) \cdot \sigma_b$$

Si l'on veut éviter toute fissuration :

$$\frac{R_a}{s \cdot (m - 1) \cdot \sigma_b} = \frac{1 + \lambda}{\lambda} \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{(m - 1) \cdot \sigma_b}{\frac{R_a}{s} - (m - 1) \cdot \sigma_b}$$

EXEMPLES :

$$\frac{R_a}{s} = 1200 ; \sigma_b = 12 ; m = 10 ; \lambda = \frac{108}{1092} = 0,099 ; \omega_a = 0,011 \Omega_t$$

$$" \quad " \quad " \quad " \quad m = 15 ; \lambda = \frac{168}{1032} = 0,1625 ; \omega_a = 0,0116 \Omega_t$$

Donc, pour que le béton ne soit pas fissuré, il faut que la section d'armature ne dépasse guère 1,1 %, condition qui ne peut guère être réalisée. Tant que l'on est en dessous de la limite élastique de l'acier, la dilatation est trop faible pour que les fissures soient apparentes, ce qui ne signifie pas qu'elles sont inexistantes et que l'on peut par exemple compter encore sur une résistance à l'extension du béton.

A la limite  $\sigma_b = R_b$ . Dans ces conditions on aura pour  $R_b = 50$  et  $\frac{R_a}{s} = 1200 ; m = 10 ; \lambda = 0,6$  et  $\omega_a = 0,067 \Omega_t ; m = 15 ; \lambda = 1,4$  et  $\omega_a = 0,10 \Omega_t$

Le pourcentage d'acier est par conséquent fortement accru.

## 3.- FLAMBAGE.

Ritter a établi que la formule convenant le mieux au béton armé est celle de Rankine

$$\sigma'_b = \frac{R'_b}{s} \frac{1}{1 + 0,001 \left(\frac{L}{i}\right)^2}$$

$L$  étant la longueur de flambage entre 2 articulations,  $i$  le plus petit rayon d'inertie :  $i^2 = \frac{I}{\Omega}$  si les conditions d'extrémité sont différentes, il faut affecter  $\left(\frac{L}{i}\right)^2$  d'un coefficient  $k = 4$  pour 1 colonne libre à un bout, encastrée à l'autre;  $k = 1/2$  pour 1 colonne articulée à un bout et encastrée à l'autre;

$k = 1/4$  pour 1 colonne encastrée aux 2 bouts. Par raison de sécurité, on admet souvent  $k = 1$  pour le béton armé.

Formule d'Euler  $P = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{k \cdot L^2}$        $\frac{P}{S} = \sigma_b = \frac{\pi^2 \cdot E}{k \left(\frac{L}{i}\right)^2}$

2 articulations  $k = 1$  ; 1 encastrement  $k = 4$

2 encastremets  $k = \frac{1}{4}$  ; 1 encastrement et 1 articulation  $k = \frac{1}{2}$

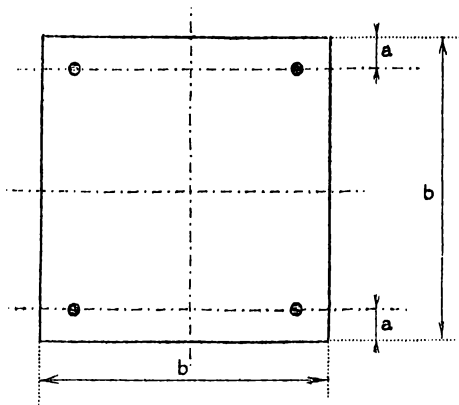
La section la plus favorable, tant au point de vue de la résistance au flambage que de la facilité d'exécution et de l'économie, est la section carrée. Elle s'adapte le mieux aux formes des hourdis. Eventuellement, on emploie la section rectangulaire. Les sections rondes ou polygonales sont moins fréquentes, même pour soutenir les dalles sans nervures (musch-room), à cause de leur moindre résistance et de la complication du coffrage. Par raison d'aspect, on chanfreine souvent les angles des colonnes carrées, mais on néglige l'influence de cette opération dans le calcul. La disposition la plus courante et la plus économique des armatures consiste à placer une barre dans chaque angle. D'après le règlement allemand, si

$$\frac{l}{b} \geq 10 \quad , \quad \frac{\omega_a}{\Omega_t} > 0,008$$

$$\frac{l}{b} = 5 \quad , \quad \frac{\omega_a}{\Omega_t} > 0,005$$

Ce sont les valeurs minima, Comme maximum de  $\frac{\omega_a}{\Omega_t}$ , on envisageait 3 %.

Le règlement de l'A.B.S. stipule  $\frac{\omega_a}{\Omega_t} > 0,008$ , mais se réfère au  $\Omega$  minimum autorisé si,  $\sigma'_b < R'_b$ . Lorsque  $\frac{\omega_a}{\Omega_t} > 0,025$ , les armatures au delà de ce pourcentage ne comptent plus que pour moitié.



Une armature plus forte ne permet plus aussi sûrement d'utiliser la capacité de résistance des 2 éléments et c'est anti-économique. Actuellement on n'hésite pas à envisager des armatures longitudinales beaucoup plus fortes. Le  $\phi$  des barres doit être moyen (20 à 30 mm.). Dans les colonnes de fortes dimensions fortement armées, on répartit les barres uniformément le long des 4 côtés, ce qui réduit l'efficacité des barres au point de vue du flambage. - Pour un pilier carré à 4 armatures d'angle, on a

$$\Omega_t = b^2 + (m - 1) \cdot \omega_a = b^2 \cdot (1 + \lambda) \quad \lambda = (m - 1) \frac{\omega_a}{b^2}$$

Posons  $\delta = \frac{b - 2a}{b}$ ,  $a$  étant le recouvrement des barres sur l'axe.

$$I = \frac{b^4}{12} + (m - 1) \cdot \omega_a \cdot \left(\frac{b}{2} - a\right)^2 = \frac{b^4}{12} + \frac{(m - 1) \cdot \omega_a}{4} (b - 2a)^2$$

$$\frac{I}{b^4} = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{3} + \frac{(m - 1) \cdot \omega_a}{b^2} \cdot \left(\frac{b - 2a}{b}\right)^2 \right] = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{3} + \lambda \cdot \delta^2 \right]$$

$$\frac{b^2}{i^2} = \frac{\Omega/b^2}{I/b^4} = \frac{4(1+\lambda)}{\frac{1}{3} + \lambda \cdot \delta^2}$$

On établit un ABAQUE en fonction de  $\lambda$  et  $\delta$ , de  $\frac{\Omega_f}{b^2}$ ,  $\frac{I}{b^4}$  et  $\frac{b^2}{i^2}$  et on écrit :

$$\sigma'_b = \frac{R_b}{s} \cdot \frac{1}{1 + 0,0001 \left(\frac{L}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{i}\right)^2} = \frac{1}{1+k} \cdot \frac{R'_b}{s}$$

$\frac{L}{b}$  est l'élanement géométrique connu du pilier,  $\left(\frac{b}{i}\right)^2$  se détermine par l'abaque. On peut établir un abaque à points alignés du coefficient de flambage.

$$\frac{1}{1+k} = \frac{1}{1 + 0,0001 \left(\frac{L}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{i}\right)^2}, \text{ en fonction de } \left(\frac{L}{b}\right) \text{ et de } \left(\frac{b}{i}\right)$$

Le règlement allemand donne comme valeur de  $1+k$  admissible pour un avant projet

	$L/b =$	13	15	20	25
Colonnes non frettées de section carrée	$1+k =$		1	1,25	1,75
Colonnes frettées	$1+k =$	1		1,7	2,7

On interpole entre ces valeurs. Le règlement précité recommande de ne pas dépasser.

#### 4.- COMPRESSION OU TRACTION PEU EXCENTRIQUE.

On emploie la formule de flexion, composée des pièces homogènes.

$$\sigma'_{b \max} = \frac{N}{\Omega_f} \pm \frac{M}{I/V}, \quad \Omega_f \text{ est connu en fonction de } b, m \text{ et } \omega_a$$

On peut écrire :

$$\frac{I/V}{b^3} = \frac{b^4 \cdot \left(\frac{1}{3} + \lambda \cdot \delta^2\right)}{4 b^3 \times b/2} = \frac{\frac{1}{3} + \lambda \cdot \delta^2}{2}$$

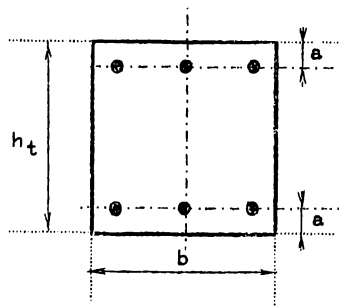
On peut tracer un abaque de cette fonction. La fatigue du métal est inférieure à  $m \cdot \sigma'_{b \max}$ . Il faut tracer le diagramme rectiligne de  $\sigma'_b$  et multiplier par  $m$  l'ordonnée au droit de l'armature.

Pour un pilier rectangulaire de hauteur  $h_t$  et de largeur  $b$ , les armatures symétriques étant aux angles ou concentrées le long des petits côtés, on a :

$$\frac{\Omega_f}{b \cdot h_t} = (1 + \lambda); \quad \lambda = (m - 1) \frac{\omega_a}{b \cdot h_t}; \quad \delta = \frac{h_t - 2a}{h_t}$$

$$\frac{I}{b \cdot h_t^3} = 1/4 \left(\frac{1}{3} + \lambda \cdot \delta^2\right); \quad \frac{I/V}{b \cdot h_t^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} + \lambda \cdot \delta^2\right); \quad \left(\frac{h_t}{i}\right)^2 = \frac{4(1+\lambda)}{1/3 + \lambda \cdot \delta^2}$$

Il suppose toutefois l'ARMATURE SYMÉTRIQUE, ce qui est, il est vrai, le cas le plus fréquent. J'ai donné dans le A.B.S., fascicule de 1924, des formules et une table facilitant le calcul des éléments en cas d'armature double non symétrique.



Ces formules et les abaques correspondants peuvent être utiles pour le calcul des arcs.

### 5.- ETRIERS.

Les armatures longitudinales des piliers et colonnes sont reliées par des étriers équidistants, servant de ligatures de construction. Ils n'ont pas d'action frettante. Le système le plus courant est le simple cadre carré. La dilatation transversale du béton tend à faire flamber les barres longitudinales vers l'extérieur. Le béton de recouvrement, de faible épaisseur, ne peut guère s'opposer à ce flambage et on fait une hypothèse favorable à la sécurité en n'en tenant pas compte. D'après la formule de flambage de Tetmayer, si  $l$  est la distance entre deux étriers consécutifs et  $d$  le diamètre des barres longitudinales, on a

$$\sigma'_a = 3200 - 12 \frac{l}{d} = 3200 - 48 \frac{l}{d}$$

On admet  $\sigma'_a = 2500 \text{ Kg/cm}^2$  (limite apparente d'élasticité). Il en résulte :

$$\frac{l}{d} = \frac{700}{48} = 14$$

On recommande

$$\frac{l}{d} = 12$$

qui donne une large sécurité. L'A.B.S. prescrit  $\frac{l}{d} < 30$ . Pour ces raisons,  $d = 12$ , est une dimension convenable. De plus petites dimensions conduisent à rapprocher trop les étriers, ce qui complique le bétonnage et augmente le poids de fer. De plus fortes dimensions demandent des moindres valeurs de  $l/d$ .

Les étriers doivent être de dimensions suffisantes pour s'opposer efficacement au flambage des barres longitudinales. L'expérience a démontré que des étriers de diamètre  $d/4$  à  $d/3$  (5 et 7 mm) assurent parfaitement leurs fonctions. L'augmentation des déformations sous l'effet des charges permanentes et des répartitions des charges qui correspond à une diminution du coefficient d'élasticité, entraîne une augmentation de fatigue des barres longitudinales et augmente leur danger de flambage. D'où l'utilité de veiller à une bonne disposition des étriers, qui empêche utilement le flambement des barres.

### 6.- COMPRESSION PARTIELLE. (Dés d'appui).

Soit un dé de largeur  $b$  (section carrée) et de hauteur  $k$  supportant une charge  $P$  répartie suivant un carré central de côté  $a$ . La contrainte locale est

$$\sigma'_b = \frac{P}{a^2}$$

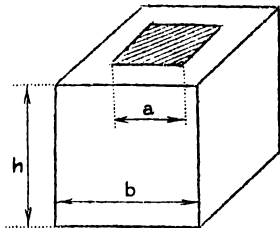
Elle peut être supérieure à  $\frac{R'_b}{s}$  à cause de l'action frettante du béton extérieur, cette action est mal déterminée. S'il y a un frettage métallique, on peut employer les formules du béton fretté. M. Flamant avait indiqué la formule

$$\sigma'_b = \frac{R'_b}{s} \cdot \frac{b}{a}$$

Elle semble excessive. Le règlement allemand indique

$$\sigma'_b = \frac{R'_b}{s} \sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}$$

lorsque  $k \leq b$ , sans indication de limite.



Il se développe transversalement dans le dé un effort de traction égal, d'après Mörsch, à :  $\frac{P \cdot (b - a)}{4k}$  la tension maximum dans un bloc non armé serait  $1,5 \frac{P \cdot (b - a)}{4h^2 b} = \sigma_b < R'_b$

Il faut même que  $\sigma_b < \frac{R_b}{s}$ . Mais on peut déterminer les armatures pour supporter cette traction. Il y a intérêt à augmenter  $a/b$ , ce qui se conçoit, ainsi que  $h$ , mais évidemment, pour cet élément, dans des limites restreintes, par exemple  $h \leq b$ . Cette formule concorde, à

peu de choses près, avec celle de Krüger, donnée dans le cours des ponts en maçonnerie pour les articulations roulantes.

Supposons  $b = h$  et un bloc non armé; on a

$$\sigma'_b \leq \left(\frac{b}{a}\right)^{2/3} \cdot \frac{R'_b}{s} \quad \text{d'où } P \leq b^{2/3} \cdot a^{4/3} \frac{R'_b}{s} \quad \text{car } \sigma'_b = \frac{P}{a^2} \quad \text{d'où}$$

$$R_b > \frac{1,5}{4} \cdot \frac{b^{2/3} \cdot a^{4/3} \cdot (1 - \frac{a}{b})}{b^2} R'_b \quad \text{ou} \quad \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{4/3} \cdot (1 - \frac{a}{b}) \cdot R'_b$$

$$\text{Donc : } \left(\frac{a}{b}\right)^{4/3} \cdot (1 - \frac{a}{b}) < \frac{8}{3} \frac{R_b}{R'_b} \cong \frac{8}{30} \quad \text{ou } < 0,266 ; \quad (R_b \cong \frac{R_b}{10})$$

Cette condition est toujours satisfaite, quelle que soit les valeurs du rapport  $a/b$ .

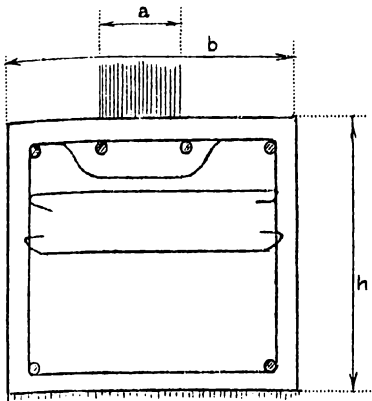
Cela veut dire que les formules ci-dessus sont compatibles dans de très larges limites pour des dés cubiques, qui sont donc dans de bonnes conditions de résistance. Il n'en est pas de même des sommiers bas.

Supposons  $h = \frac{b}{2}$ . On trouve

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{4/3} \cdot (1 - \frac{a}{b}) < \frac{2}{3} \frac{R_b}{R'_b} \quad \text{ou } < 0,0666, \quad \text{d'où } \frac{a}{b} < 0,93$$

Des SOMMIERS BAS non uniformément chargés doivent donc toujours recevoir des armatures transversales.



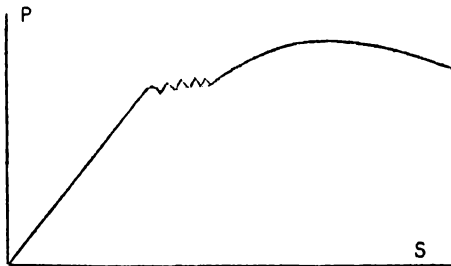


Ces formules, suffisantes pour l'usage, grâce l'emploi d'un coefficient de sécurité, ne peuvent prétendre régler le problème dans sa généralité. La question est une des plus complexes de la résistance des matériaux et est assez mal élucidée. Les frottements sur les surfaces d'appui interviennent dans une large mesure. Mais les conclusions générales de l'étude sont très nettes; on utilisera de préférence les dés cubiques. IL EST AVANTAGEUX DE FRETTER TRANS-VERSEMENT, par exemple suivant le système Freyssinet, c'est-à-dire au moyen de quadrillages superposés de barres fines, car ce frettage réalise en même temps une armature d'extension.

Il ne faut pas d'armatures parallèles aux pressions, mais des barres obliques sous la face poinçonnée sont avantageuses. Ce dispositif est applicable aux semi-articulations à lames de plomb ou des systèmes Mesnager ou Freyssinet, ainsi qu'aux sommiers d'articulations des arcs en béton armé.

### BETON FRETTE.

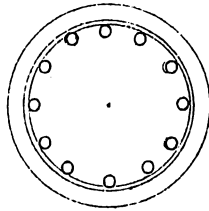
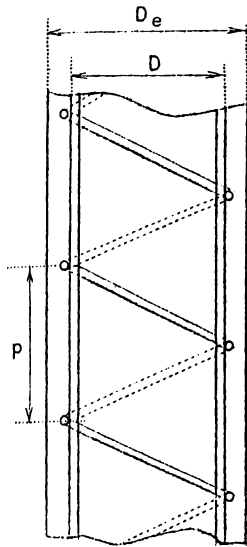
Le principe du frettage est connu d'après le cours de résistance des matériaux. Diverses formules sont employées pour le calcul, dont certaines ne correspondent que d'une manière imparfaite aux conditions théoriques. Par suite de l'importance qu'acquiert le béton fretté, notamment pour les grands arcs en béton armé; il est utile d'examiner la question avec quelque détail. L'ACTION DE LA FRETTE NE PEUT ETRE AVANTAGEUSE QUE SI ELLE EST CIRCULAIRE. Elle est alors toujours tendue, tandis que les frettes carrées ou rectangulaires sont fléchies sous l'effet de l'expansion du béton et de la tendance au flambement des barres longitudinales. Elles s'opposent donc beaucoup moins efficacement à ces deux actions et leur frettant est faible. Nous n'envisagerons donc que des frettes circulaires, disposées sous formes d'anneaux soudés équidistants ou d'hélice continue.



Le problème du frettage doit s'étudier dans le stade de rupture. Car si on charge une pièce frettée, on obtient un diagramme PS analogue au diagramme PS de l'acier. Le palier d'allongement correspond à la fissuration et à la chute de l'enveloppe extérieure au frettage. Cette chute se produit sous une tension égale en moyenne à  $0,9 R_b$ . Sous l'effet du retrait, la frette est d'abord comprimée. Les premières déformations élastiques du béton doivent d'abord compenser cette compression (assimilable à un jeu de la frette Vandepierre), puis font entrer

en action la résistance à l'allongement de la frette. A ce moment, l'enveloppe se fissure et tombe. On se trouve sensiblement dans l'état ultime de la colonne non frettée, mais ayant une armature longitudinale comprimée, dont on trouve d'ailleurs que le taux de travail est considérable et UN MULTIPLE DU TAUX DE RUPTURE DU METAL. (ce qui correspond à des valeurs ultimes élevées de  $m$ ). LES FRETTEES N'ENTRENT EN ACTION QU'AU DELA DU PALIER, DONC DANS LA ZONE DES GRANDS ALLONGEMENTS. La charge maximum est réalisée lorsque la traction dans les frettes

atteint la tension maximum avant rupture; elle est donc connue.



Soient  $D$  le diamètre du noyau fretté,  $D_e$  le diamètre extérieur,  $d$  le diamètre des barres longitudinales et  $\delta$  le diamètre du fil de frette. Si  $p$  est le PAS DE L'HELICE, on appelle PAS RELATIF DU FRETAGE

$$\varepsilon = \frac{p}{D}$$

S'il y a  $n$  barres longitudinales  $\omega_a = \frac{n \cdot \pi \cdot d^2}{4}$

La section totale du noyau est  $\Omega_n = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$

Celle du pilier  $\Omega_t = \frac{\pi \cdot D_e^2}{4}$

Le VOLUME DE FRETTE PAR UNITE DE HAUTEUR EST

$$V' = \frac{\pi \cdot D}{\varepsilon \cdot D} \cdot \frac{\pi \cdot \delta^2}{4} = \frac{\pi^2 \cdot \delta^2}{4 \varepsilon}$$

Le VOLUME DU NOYAU FRETTE est  $V = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$

Donc  $\frac{V'}{V} = \frac{\pi \cdot \delta^2}{\varepsilon \cdot D^2} = \lambda_f$ , rapport de section réduite de frette à la section du noyau.

La résistance à outrance d'un pilier fretté provient du noyau; l'enveloppe extérieure se détache comme nous l'avons dit, sous l'effet d'UNE CHARGE QUI N'EST PAS SUPERIEURE A CELLE DE RUPTURE DU PILIER non fretté. Par suite de l'action du frettage, le béton soumis aux fortes pressions en tous sens SE

COMPORTE COMME UN CORPS PLASTIQUE ET SUBIT DE TRES FORTES DEFORMATIONS SANS RUPTURE. La destruction ne se produit que par épuisement de la force de frettage, c'est-à-dire par dépassement de la tension maximum avant rupture des frettes. La charge de rupture correspond donc à un effort de frettage

$$\frac{2 \pi \cdot \delta^2}{4} R_a = \sigma_c \cdot \varepsilon \cdot D^2$$

rapportée à la section diamétrale du noyau.  $\sigma_c$  étant l'ETREINTE LATÉRALE DU BETON. Donc

$$\sigma_c = \frac{\pi \cdot \delta^2}{\varepsilon \cdot D^2} \cdot \frac{R_a}{2} = \frac{1}{2} R_a \frac{V'}{V}$$

Si la CHARGE DE RUPTURE correspondante est  $P$ , on a

$$\sigma'_b = \frac{4 P}{\pi \cdot D^2} > R'_b$$

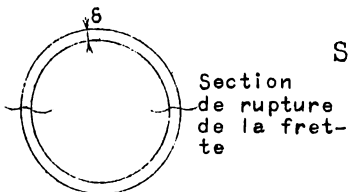
S'il y a une proportion

$$\frac{\lambda}{m - 1} = \frac{\omega_a}{\Omega}$$

d'armatures longitudinales par rapport au noyau on a

$$P = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot (1 + \lambda) \cdot \sigma'_b > \frac{\pi \cdot D^2}{4} (1 + \lambda) \cdot R'_b$$

Selon les expériences de Considère et Mesnager, confirmant les théories de Mohr on a sensiblement sous l'effet d'une étreinte dans certaines limites :



$$\sigma'_b = R'_b + K \cdot \sigma_c = R'_b + \frac{K}{2} R_a \frac{V'}{V}$$

Donc

$$\begin{aligned} P &= \frac{\pi \cdot D^2}{4} (1 + \lambda) \cdot R'_b \left[ 1 + \frac{K}{2} \cdot \frac{R_a}{R'_b} \cdot \frac{V'}{V} \right] \\ &= \frac{\pi \cdot D^2}{4} (1 + \lambda) \cdot R'_b \cdot \left( 1 + m' \frac{V'}{V} \right) \end{aligned}$$

K est un coefficient qui dépend de l'étreinte. C'est la formule de la circulaire ministérielle française de 1906, adoptée aussi par l'A.B.S. Cette formule a donc une signification rationnelle.

Selon la circulaire française et l'A.B.S., m' VARIE D'APRES L'ECARTEMENT DES SPIRES.

Ce point concorde avec les expériences de Considère et Mesnager (voir Mesnager, Matériaux pierreux, page 93), qui montrent que K diminue lorsque l'étreinte croît. Cependant M. Mesnager admet une valeur moyenne  $K = 4,2$  pour du mortier mais, cette valeur correspond à des étreintes hydrauliques indépendantes de l'effort longitudinal. D'après les expériences de l'américain Talbot sur des pièces frettées sans armatures longitudinales, M. L. Vandepierre (Thèse de doctorat spécial à l'université libre de Bruxelles) trace une courbe de  $\frac{\sigma_c}{R'_b}$  correspondant approximativement à  $K = 2,2$  pour les frettages usuels.

Le professeur suédois Ljungberg établit la relation

$$m' = \frac{13}{1 - 8 \frac{V'}{V}},$$

en admettant

$$\mu = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad m = \frac{40}{3} = \left( \frac{R_a}{R'_b} \right)$$

Mais les règlements n'envisagent généralement pas le rapport  $\frac{R_a}{R'_b}$  dans le coefficient de frettage m'.

D'après ce rapport, l'action du frettage serait relativement moindre pour du béton plus résistant que pour du béton moins résistant (ce que l'expérience confirme), K ne dépendant que de la proportion de frettes. Le coefficient de majoration de frettage est d'ailleurs d'ordinaire limité par raison de sécurité et, notamment, POUR EVITER LA FISSURATION DE L'ENVELOPPE. Admettons que la charge de fissuration soit

$$P' = \frac{\pi \cdot D_e^2}{4} \left( 1 + \lambda \frac{D^2}{D_e^2} \right) \cdot R'_b = \frac{P}{2} \quad \text{par exemple.}$$

Le coefficient de sécurité revient à admettre

$$1 + m' \frac{V'}{V} = 2 \left( \frac{D_e}{D} \right)^2 \cdot \frac{1 + \lambda \frac{D^2}{D_e^2}}{1 + \lambda}$$

valeur qui donne une sécurité à la fissuration supérieure à la moitié de la sécurité à la rupture. Si on admet la valeur moyenne  $D_e/D = 1,20$

$$\left( 1 + m' \frac{V'}{V} \right)_{\max} = 2 \frac{1,44 + \lambda}{1 + \lambda}.$$

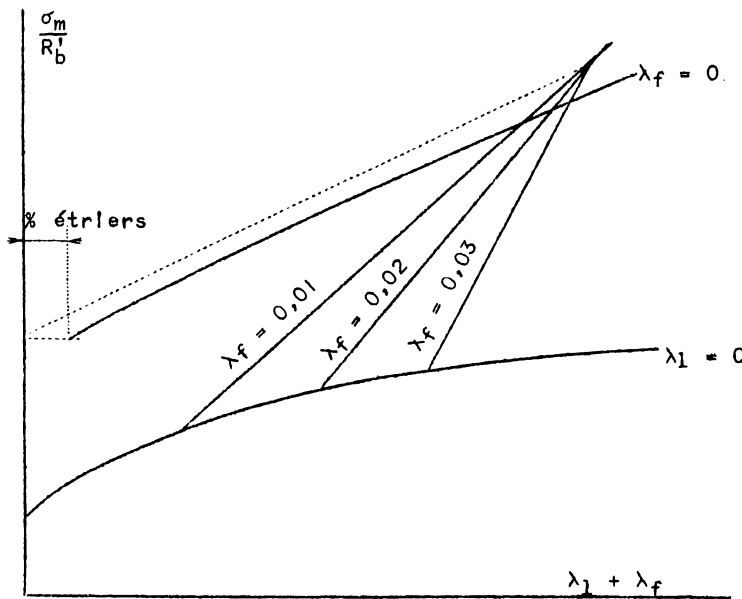
La circulaire française stipule que

$$1 + m' \frac{V'}{V} < 2,14$$

tandis que le règlement de l'A.B.S. n'autorise que  $1 + m' \frac{V'}{V} = 1,5$  au maximum. En admettant  $\frac{D_e}{D} = 1,2$ , ce qui est une moyenne assez fréquente, on a

$$P_s = \frac{\pi \cdot D_e^2}{4} (1 + \lambda) \frac{R'_b}{s} \cdot \frac{(1 + m' \frac{V'}{V})}{1,44}$$

Donc, le frettage n'est intéressant effectivement que si  $1 + m' \frac{V'}{V}$  est sensiblement plus grand que 1,44. La limite 1,50, imposée par l'A.B.S. enlèverait donc tout intérêt pratique au frettage. Abstraction faite de cette disposition réglementaire inconsiderée, il est un fait que la diminution de section utile de la colonne frettée par rapport à la colonne non frettée de même diamètre extérieur, qui atteint et dépasse généralement 50 %, constitue un tel handicap pour le béton fretté que la colonne armée ordinaire est toujours plus économique que la colonne frettée, sauf pour des armatures totales atteignant et dépassant des proportions exceptionnelles de 10 % et davantage. Le diagramme ci-



contre explique ce qui se passe. Le frettage ne devient plus avantageux que l'armature simple pour des valeurs de

$$\frac{\sigma_m}{R} > 4$$

que pour du bon béton ordinaire. Le double facteur défavorable au frettage est déterminé par

1°) la perte de section de l'enveloppe (prédominant).

2°) la diminution (de moitié environ) de l'effet de l'étreinte développée par allongement de la frette au fur et à mesure de la mise en charge, par rapport à l'étreinte hydraulique

centrale et indépendante. LE BETON FRETTE NE TRAVAILLE REELLEMENT QU'AVEC FORTES DEFORMATIONS.

Les formules précédentes donnent des charges de rupture, auxquelles doit s'appliquer le coefficient de sécurité ordinaire 3,6 de la circulaire ministérielle française. Donc, la charge de sécurité est :

$$P_s = \frac{\pi \cdot D^2}{4} (1 + \lambda) \frac{R'_b}{s} (1 + m' \frac{V'}{V}) \text{ avec } s = 3,6$$

a) Il reste quelques points à élucider, tout d'abord celui de la VALEUR à ATTRIBUER à m dans le facteur

$$\lambda = \frac{(m - 1) \cdot \omega_a}{\pi \cdot D^2 / 4}$$

Les règlements lui assignent la valeur constante habituelle, par exemple

$$m = 15 = \frac{R_a}{R'_b}$$

M.L. Vandeperre fait observer (observation citée) que l'armature longitudinale est à son tour frettée par le béton et que lors de la rupture, le béton est rendu plastique sous l'effet de l'étreinte. Il en résulte de grandes déformations longitudinales auxquelles correspond une élévation de la limite d'élasticité des barres longitudinales analogue à l'élévation de la résistance à la rupture du béton.

On peut donc considérer  $m$  comme fonction de  $\frac{\sigma_c}{R'_b}$ . M. Vandeperre déduit d'expériences de Bach et d'expériences propres une relation graphique entre  $m$  et  $\frac{\sigma_c}{R'_b}$ , donnant des valeurs moyennes de  $m \approx 22$  pour les frettages moyens et élevés, tandis qu'il semble que  $m$  augmente jusqu'aux environs de 30 pour les faibles étreintes (frettage faible et insuffisant). Des expériences américaines de Withey on a conclu aussi que  $m$  peut atteindre des valeurs comprises entre 20 et 30 comme celles qu'envisage M. Vandeperre. Mais pour les charges inférieures à la rupture, elles concluent à des valeurs de l'ordre de grandeur habituel. IL N'Y A DONC AUCUN INCONVENIENT A EMPLOYER LES VALEURS USUELLES DE  $m$  pour LE CALCUL DE LA CHARGE ELASTIQUE DE SECURITE. La sécurité s'en trouve d'ailleurs accrue. Le professeur Ljungberg, d'après des considérations rationnelles et expérimentales, est d'ailleurs conduit à réduire le coefficient  $m$  applicable à l'armature. Sa formule peut s'écrire :

$$P = \frac{R'_b}{S} \left[ \Omega_b \left( 1 + \frac{13 \frac{V'}{V}}{1 - 8 \frac{V'}{V}} \right) + m \cdot \Omega_a \cdot \left( 1 + \frac{12 \frac{V'}{V}}{1 - 8 \frac{V'}{V}} \right) \right]$$

b) Un autre point particulier est celui des DIMENSIONS DES ARMATURES afin d'avoir un enrobage suffisant de la frette, il faut :

$$2 \delta < \frac{D_e - D}{2}$$

En moyenne  $\frac{D_e}{D} = 1,20$  d'où  $\frac{\delta}{D} < 0,05$  ;  $\frac{D}{\delta} > 20$ . D'autre part  $\varepsilon \cdot D \geq 2 \delta$  d'où  $\varepsilon > 0,10$ .

Les expériences allemandes montrent que les barres longitudinales trop fortes ou trop fines sont défavorables, de même qu'un pas relatif  $\varepsilon$  trop grand.

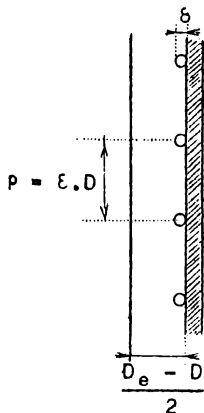
Par des considérations déduites de l'étude théorique du flambage en milieu élastique et des expériences précitées, M.L. Vandeperre déduit  $\varepsilon < 0,271$ .

Il établit des courbes des limites extrêmes de  $\frac{d}{\delta}$  et une courbe des valeurs optima qui pour  $D/\delta < 20$  donne approximativement la relation

$$\frac{d}{\delta} = 1,20 + 0,0125 \left( \frac{D}{\delta} - 20 \right).$$

On voit donc que  $\frac{D}{d} > \frac{20}{1,20}$  ou 17 environ. Les considérations qui précèdent permettent, dans chaque cas, de déterminer les armatures à bon escient.

c) Enfin, il y a la question du FLAMBEMENT DES PILIERS frettés. On emploie généralement la formule de Rankine. Cependant, les coefficients de flambement du règlement allemand pour les piliers frettés sont inférieurs à ceux des piliers non frettés. Cela peut se justifier par le fait qu'il faut considérer



$\frac{L}{D} > \frac{L}{D_e}$  puisque l'enveloppe n'intervient pas dans la résistance.

M. Vandeperre considère que, lorsque la rupture par flambage coïncide avec celle des frettes, le béton est plastique et les armatures longitudinales supportent toute la charge.

Elles ne peuvent évidemment reprendre que la partie de la charge qui est en excès sur la charge maximum du béton. Une fois même qu'elles auraient commencé à flamber en se dérochant sous la charge, nécessairement, la charge se reporterait sur le béton, qui devrait se rompre aussitôt.

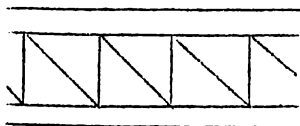
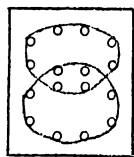
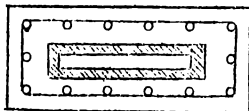
Je ne crois pas utile d'entrer dans plus de détails car, en observant la limite  $\frac{L}{b} < 20$  du règlement allemand la charge de sécurité du frettage est inférieure à celle de flambage d'après la formule de M. Vandeperre. Il paraît en outre, prudent de la diviser par le coefficient de flambage usuel K .

LE BETON FRETTE DEMANDE UNE CONFECTION SOIGNEE. L'EQUIDISTANCE DES FRET-  
TES DOIT ETRE TRES REGULIERE. LE FRETAGE DE M. FREYSSINET, par quadrillages  
étroits superposés de barres minces, bien qu'agissant suivant le même princi-  
pe, ne correspond pas théoriquement aux formules précédentes. Il s'accommode  
des sections carrées ou rectangulaires. Son emploi convient surtout pour le  
renforcement local résistant à de fortes pressions concentrées externes. Il  
est bon de procéder à des essais directs.

Le frettage du béton est particulièrement intéressant pour les piliers  
et pour les pièces simplement comprimées ou peu fléchies. Pour les pièces  
fléchies il ne convient que pour les pièces exceptionnelles de très faible  
hauteur. Sinon, l'élévation de la résistance à la compression du béton n'est  
généralement pas nécessaire, ni économique.

### 8.- FONTE ET BETON FRETTE.

Le Dr. Emperger de Vienne a imaginé de renforcer des colonnes creuses en  
fonte par une enveloppe de béton fretté. Sous l'EFFET DU FRETAGE, LA FONTE  
CESSE D'ETRE FRAGILE ET DEVIENT DUCTILE COMME LE BETON FRETTE. La charge de  
rupture est fortement élevée; elle dépasse généralement 6000 Kg/cm<sup>2</sup> pour les  
fontes usuelles.



M. Emperger a d'abord réalisé de la sorte des piliers.  
Il a étendu le système un peu modifié, aux grands arcs  
en béton principalement comprimés et peu fléchis. La  
section du béton est fortement frettée et contient une  
importante armature de fonte ou plus récemment d'acier.  
Elle est formée de barres profilées de fortes sections.  
Dans le pont de Gmunden (Autriche), ces barres étaient  
assemblées entre elles et formaient un véritable arc  
en treillis à 4 membrures d'angles, reliées par des  
barres de remplissage. Pour le calcul, M. Emperger en-  
visage une section réduite de fonte : à la section net-  
te de la fonte on ajoute 1/40<sup>e</sup> de celle du béton.  
Comme taux de travail, on prend 0,28 de la résistance  
à la compression de la fonte frettée, soit  
0,28 x 6000 = 1680 Kg./cm<sup>2</sup> par exemple. Le béton tra-  
vaille donc à :

$$\frac{1680}{40} = 42 \text{ Kg/cm}^2 .$$

Des armatures longitudinales ordinaires d'acier résistent aux moments de flexion très modérés à envisager. Le frettage doit être modéré et tel qu'il n'y ait pas de danger de séparation de l'enveloppe. Car dans cette dernière éventualité les fatigues de flexion seraient fortement augmentées. LE BUT DU FRETAGE N'EST DONC PAS LE MEME QUE DANS LE BETON FRETTE PROPREMENT DIT. Il sert surtout à assurer la solidarité de tous les éléments et le frettage de la fonte. La question doit être encore mieux élucidée par des essais; je me réfère aux études de M. Emperger.

Le pourcentage de fonte en surface atteint jusqu'à 25 %. Le poids spécifique de la matière s'élève à 3,6 mais le taux de travail de sécurité moyen est de 450 Kg/cm<sup>2</sup>.

Si l'on rapporte le taux du travail pratique à la densité, c'est-à-dire si l'on exprime le poids du prisme de l'unité de longueur et de section correspondant à l'unité de charge, on trouve 0,78 pour l'acier laminé; 0,8 pour la fonte frettée de béton; 1,40 pour le béton fretté et 2,60 pour le béton armé ordinaire. La fonte frettée a donc une haute résistance spécifique, ce qui réduit le poids propre des ouvrages et améliore leur aspect. Quelques ponts ont été construits d'après ce système, auquel un grand avenir paraît réservé, mais dont la technique doit encore se préciser.

#### 9.- FLEXION DES PIECES A SECTIONS RECTANGULAIRES.

Dans cette catégorie entrent les dalles, dont on calcule généralement des bandes de 1.00 m. de largeur, ainsi que les poutres proprement dites à sections rectangulaires et celles qui peuvent s'y ramener, par exemple, les poutres en T dont l'axe neutre est situé dans les ailes ou dont les ailes sont dans la zone étendue.

Le principe de la méthode que j'ai publiée à partir de 1922 dans diverses revues belges et françaises a déjà été appliqué dans certains paragraphes précédents. Il consiste à mettre tous les éléments du calcul organique des pièces fléchies sous forme de facteurs relatifs, c'est-à-dire purement numériques et sans dimension.

Ils sont donc indépendants de toutes dimensions, de tout système d'unités et de tous facteurs techniques : taux de travail pratiques, coefficient  $m$ , etc. Ils sont ainsi universels et applicables à tous les règlements, à tous les matériaux et permettent d'effectuer tous les calculs de contrôle, vérification ou équarrissage. Enfin, ils permettent de condenser en un petit nombre d'abaques ou de tables tous les éléments nécessaires au calcul de toutes les pièces en flexion simple ou composée, à armatures simples ou doubles.

Il ne reste à faire comme calculs que des opérations arithmétiques fondamentales, d'ailleurs peu nombreuses dans les cas simples et usuels.

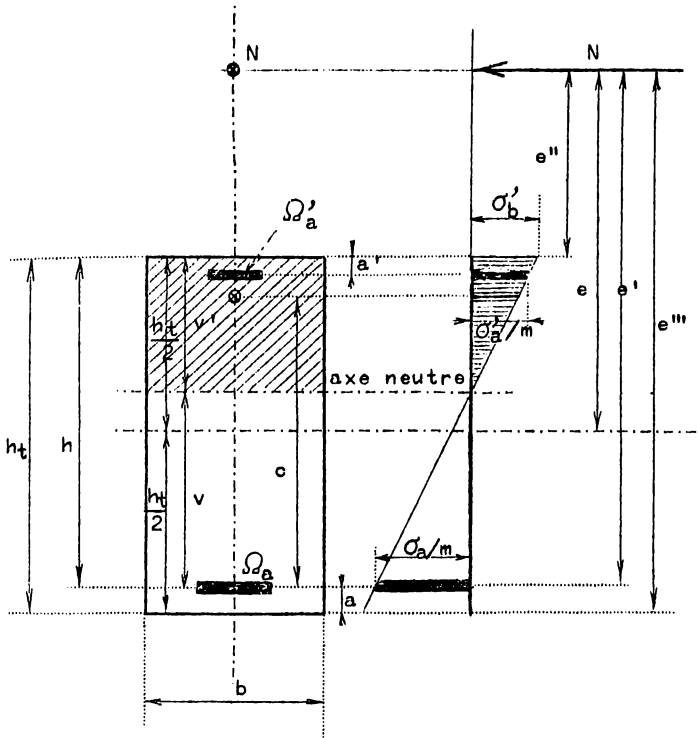
Les opérations un peu plus longues dans les cas les plus compliqués, ont par contre l'avantage de bien faire ressortir l'influence des divers éléments et de faciliter ainsi un établissement rationnel et économique des projets.

J'indiquerai d'ailleurs des méthodes sommaires toujours très simples, donnant toute sécurité, qui permettent de réserver l'emploi de la méthode exacte pour la seule vérification du projet définitif.

Nous considérons d'emblée le cas le plus général de la FLEXION COMPOSEE D'UNE SECTION RECTANGULAIRE DOUBLEMENT ARMEE. L'effort normal  $N$  est consi-

déré comme positif s'il est une compression. Son excentricité peut être définie :

- par la distance  $e$  à l'axe médiane de la section,
- par la distance  $e'$  à l'armature tendue,
- par la distance  $e''$  à la face la plus comprimée ou
- par la distance  $e'''$  à la face la plus tendue.



Le sens positif de mesure des excentricités est toujours celui du passage de la zone d'extension vers la zone de compression.

Les deux équations d'équilibre interne de la section sont:

1°) Equilibre de translation

$$\Omega_a \sigma_a = \frac{b \cdot v' \sigma'_b}{2} + \Omega'_a \cdot \sigma'_a - N \quad (1)$$

2°) Equilibre de moments

$$N(e + 0,5 h_t - a - c) = \Omega_a \cdot \sigma_a \cdot c \quad (2)$$

Posons :

$$c = \gamma \cdot h, \quad \frac{\sigma_a}{m \cdot \sigma'_b} = \theta, \\ \frac{\sigma'_a}{\sigma_a} = \varphi, \quad \frac{\Omega'_a}{\Omega_a} = \kappa$$

$c$  est la distance de l'armature tendue à la résultante des tensions élastiques de la zone comprimée (béton et acier).

$h$  appelé HAUTEUR THEORIQUE de la section, est la distance de

l'armature tendue à la fibre la plus comprimée de béton. Il en résulte que la position relative de l'axe neutre est donnée par :

$$\frac{v'}{h} = \frac{1}{1 + \theta} \text{ et } \frac{v}{h} = \frac{\theta}{1 + \theta} \quad \text{puisque } \frac{\frac{\sigma_a}{m}}{\sigma'_b} = \theta = \frac{h - v}{v'} = \frac{v}{h - v}$$

On peut, dès lors, écrire l'équation (1) sous la forme

$$\frac{m \cdot \Omega_a}{b \cdot h} = \frac{\lambda - \frac{m \cdot N}{b \cdot h \cdot \sigma_a}}{1 - \kappa \cdot \varphi} \quad \text{en posant } \lambda = \frac{1}{2 \theta (1 + \theta)}$$

L'équation (1') peut s'écrire, par combinaison avec (2)

$$\frac{m \cdot \Omega_a}{b \cdot h} (1 - \kappa \cdot \varphi) = \lambda - \frac{m \cdot \Omega_a \cdot \sigma_a \cdot c}{b \cdot h \cdot \sigma_a (e + 0,5 h_t - a - c)}$$

ou

$$\frac{m \cdot \Omega_a}{b \cdot h} \left( 1 - \kappa \cdot \varphi + \frac{\gamma \cdot h}{e + 0,5 h_t - a - \gamma \cdot h} \right) = \frac{m \cdot \Omega_a}{b \cdot h} (1 - \kappa \cdot \varphi + \psi) = \lambda \quad (1'')$$

en posant

$$\psi = \frac{\gamma \cdot h}{e + 0,5 h_t - a - \gamma \cdot h}$$

Si nous posons :



on a :

$$\frac{h - a}{h} = \delta \quad \text{et} \quad \frac{h - a'}{h} = \delta'$$

$$\varphi = \frac{1 - (1 - \delta') \cdot (1 + \theta)}{\theta}$$

$$\psi = \frac{\gamma}{\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2} - \gamma} = \frac{\gamma}{\frac{e'}{h} - \gamma} = \frac{\gamma}{\frac{e''}{h} + 1 - \gamma} = \frac{\gamma}{\frac{e''' }{h} + \delta - 1 - \gamma}$$

Donc :

$$\frac{m \cdot \Omega_a}{b \cdot h} = \frac{\lambda}{1 - \kappa \cdot \varphi + \psi} \quad (\text{I})$$

ensuite

$$\frac{N}{\Omega_a \cdot \sigma_a} = \psi \quad (\text{II})$$

NOTE COMPLÉMENTAIRE.

Les formules précédentes ont été établies en supposant une partie de la section fissurée l'armature  $\Omega_a$  étant tendue.  $\Omega_a, \Omega'_a, \sigma_a, \sigma'_a$  et  $\sigma'_b$  sont dans ces conditions des valeurs POSITIVES. D'autre part d'après la convention des signes énoncée plus haut :  
 N et e sont POSITIFS dans le cas de COMPRESSION EXCENTRIQUE.  
 N et e sont NEGATIFS dans le cas de TRACTION EXCENTRIQUE.  
 Il en résulte que dans le domaine d'application des formules relatives à la flexion composée. (CE QUI CORRESPOND AU CAS OU N TOMBE EN DEHORS DU NOYAU CENTRAL DE LA SECTION FICTIVE DE BETON ARME)

Le rapport  $\frac{N}{\psi} = \Omega_a \cdot \sigma_a$  est toujours POSITIF, d'où REGLE : les formules relatives au calcul des pièces rectangulaires en béton armé sont applicables lorsque :

- a)  $\psi > 0$  ou  $\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2} - \gamma > 0$  ou  $|\frac{e}{h}| + \frac{\delta}{2} > \gamma$  en cas de COMPRESSION EXCENTRIQUE.
- b)  $\psi < 0$  ou  $\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2} - \gamma < 0$  ou  $|\frac{e}{h}| + \gamma < \frac{\delta}{2}$  en cas de traction excentrée.

Lorsque ces conditions ne sont pas vérifiées, cela signifie que N tombe à l'intérieur du noyau central de la section de béton armé non fissurée. On doit recourir alors aux formules classiques  $\sigma = \frac{N}{\Omega_f} + \frac{Mv}{I_f}$  (voir paragraphe 4).

Si la solution du problème doit être obtenue par tâtonnements, en s'imposant différentes valeurs de  $\theta$ , on choisira comme première valeur de  $\theta$  celle qui réalise, SELON LE CAS, l'une ou l'autre des conditions précédentes

Enfin, il faut obtenir l'expression de  $\gamma$ .

$$c = \gamma \cdot h = h - \frac{\frac{b \cdot v'}{2} \sigma'_b \frac{v'}{3} + \Omega'_a \cdot \sigma'_a \cdot a'}{\frac{b \cdot v'}{2} \sigma'_b + \Omega'_a \cdot \sigma'_a}$$

$$\gamma = 1 - \frac{\frac{h \cdot b \cdot \sigma'_b}{6(1+\theta)^2} + \frac{\Omega'_a \cdot \sigma'_a}{h} a'}{\frac{b \cdot \sigma'_b}{2(1+\theta)} + \frac{\Omega'_a \cdot \sigma'_a}{h}} = 1 - \frac{\frac{1}{6(1+\theta)^2} + \kappa \cdot \varphi \cdot \theta \frac{m \cdot \Omega_a}{b \cdot h} \cdot \frac{a'}{h}}{\frac{1}{2(1+\theta)} + \kappa \cdot \varphi \cdot \theta \frac{m \cdot \Omega_a}{b \cdot h}}$$

$$\gamma = \frac{\frac{2 + 3\theta}{6(1+\theta)^2} + \kappa.\varphi.\theta \frac{m.\Omega_a}{b.h} \left(1 - \frac{a'}{h}\right)}{\frac{1}{2(1+\theta)} + \kappa.\varphi.\theta \frac{m.\Omega_a}{b.h}} = \frac{\mu + \kappa.\varphi.\theta.\delta' \frac{m.\Omega_a}{b.h}}{\theta.\left(\lambda + \kappa.\varphi \frac{m.\Omega_a}{b.h}\right)}$$

en posant

$$\mu = \frac{2 + 3\theta}{6(1+\theta)^2} ; \quad \gamma = \frac{\mu + \kappa.\varphi.\theta.\delta' \frac{\lambda}{1 - \kappa.\varphi + \Psi}}{\theta.\left[\lambda + \kappa.\varphi \frac{\lambda}{1 - \kappa.\varphi + \Psi}\right]}$$

$$\gamma = \frac{\mu}{\theta.\lambda} + \frac{\kappa.\varphi.\left(\theta.\delta'.\lambda - \mu\right)}{\theta.\lambda.\left(1 + \Psi\right)} = \gamma_0 + \kappa\varphi \frac{\delta' - \gamma_0}{1 + \Psi}$$

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{\kappa.\Phi}{1 + \Psi} \quad \text{(III)} \quad \text{en posant } \gamma_0 = \frac{\mu}{\theta.\lambda} = \frac{2 + 3\theta}{3(1+\theta)} \quad \text{et } \Phi = \varphi.\left(\delta' - \gamma_0\right).$$

Les formules pratiques sont dès lors :

I.- FLEXION SIMPLE, ARMATURE SIMPLE.

$$\frac{m.\Omega_a}{b.h} = \lambda ; \quad \frac{M}{\Omega_a.\sigma_a.h} = \gamma_0 ; \quad \frac{M}{b.h^2.\sigma'_b} = \mu ; \quad \frac{M}{b.h^2.\sigma_a} = \mu'$$

Il suffit d'un diagramme ou d'une table des valeurs de  $\mu, \mu', \lambda$  et  $\gamma_0$  en fonction de  $\theta$  ( $\theta = \frac{\sigma_a}{m.\sigma'_b}$ )

II.- FLEXION SIMPLE, ARMATURE DOUBLE.

$$\frac{m.\Omega_a}{b.h} = \frac{\lambda}{1 - \kappa.\varphi} ; \quad \frac{M}{\Omega_a.\sigma_a.h} = \gamma ; \quad \gamma = \gamma_0 + \kappa.\Phi$$

Il suffit de tables ou d'abaques de correction donnant  $\varphi$  et  $\Phi$  en fonction de  $\theta$  et  $\delta'$ .

III.- FLEXION COMPOSEE, ARMATURE SIMPLE.

$$\frac{m.\Omega_a}{b.h} = \frac{\lambda}{1 + \Psi} ; \quad \frac{N}{\Omega_a.\sigma_a} = \Psi ; \quad \gamma = \gamma_0$$

Il suffit d'une table de correction ou d'un abaque de  $\Psi$  en fonction de  $\gamma$  et de

$$\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{e'}{h} \quad \text{ou} \quad \frac{e''}{h} + 1 \quad \text{ou} \quad \frac{e'''}{h} + \delta - 1$$

IV.- FLEXION COMPOSEE, ARMATURE DOUBLE :

$$\frac{m.\Omega_a}{b.h} = \frac{\lambda}{1 - \kappa.\varphi + \Psi} ; \quad \frac{N}{\Omega_a.\sigma_a} = \Psi ; \quad \gamma = \gamma_0 + \frac{\kappa.\Phi}{1 + \Psi}$$

Les tables et abaques précédents suffisent pour résoudre le problème.

Pour les cas où  $\sigma'_b$  est connu, tandis que  $\Omega_a$  ou  $\sigma_a$  sont inconnus, il est commode de se référer à la formule

$$\frac{N \left(\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2}\right)}{b.h.\sigma'_b} = \mu + \kappa.\varphi.\theta.\delta' \frac{m.\Omega_a}{b.h}$$

qui en cas de FLEXION SIMPLE devient :

$$\frac{M}{b \cdot h^2 \cdot \sigma'_b} = \mu + \kappa \cdot \varphi \cdot \theta \cdot \delta' \frac{m \cdot \Omega_a}{b \cdot h}$$

Le premier diagramme donne les valeurs de  $\mu$  en fonction de  $\theta$ , ainsi que celles de  $\mu' = \frac{\mu}{\theta}$ .

#### 10.- FORMULES SIMPLIFIEES.

Pour les avants projets et les études rapides on peut simplifier la méthode comme suit :

$\Phi$  est généralement très petit et on fait ordinairement une hypothèse de sécurité en le négligeant. On a alors  $\gamma = \gamma_0$ . On admet donc  $\delta' = \gamma_0$  (l'armature comprimée est au tiers supérieur de la zone comprimée). Il en résulte que  $\varphi = \frac{2}{3\theta}$  et quel que soit le cas considéré  $\frac{m \cdot \Omega_a}{b \cdot h} = \frac{\lambda}{1 - \frac{2\kappa}{3\theta} + \Psi}$

Pratiquement, pour le calcul de  $\Psi$ , on peut toujours admettre  $\gamma = \gamma_0$ .

Quant à  $\varphi$ , on peut adopter la valeur  $\frac{2}{3\theta}$  mais il n'est pas plus difficile de déterminer par l'abaque la valeur exacte de  $\varphi$ , dont l'écart par rapport à la valeur approximative peut-être assez important. La conséquence n'en serait d'ailleurs appréciable qu'au point de vue de la valeur de  $\sigma'_b$ ;  $\Omega_a$  et  $\sigma_a$  VARIENT TRES FEU EN FONCTION DE  $\kappa$ .

#### 11.- PREDETERMINATION DU POIDS PROPRE DES DALLES EN POUTRES RECTANGULAIRES EN FLEXION SIMPLE.

Le moment des forces extérieures  $M'$ .

La section est  $b(h + a)$ , et le poids par unité de longueur  $b \cdot (h + a) \Delta$

Le moment qui en résulte est de la forme  $K b (h + a) \Delta$ ;  $K$  dépendant de la portée, des conditions d'appui et de la situation dans la pièce de la section considérée. Donc  $M = M' + K \cdot b \cdot (h + a) \cdot \Delta = \gamma \cdot \Omega_a \cdot \sigma_a \cdot h$ .

On choisit généralement  $\sigma_a$ ,  $\sigma'_b$  et  $\kappa$  ainsi qu'une des dimensions  $h$  ou  $b$ . On connaît donc  $\theta$ ,  $\lambda$ ,  $\gamma$  et  $\varphi$ , donc

$$\frac{m \cdot \Omega_a}{b \cdot h} = \frac{\lambda}{1 - \kappa \cdot \varphi}$$

On obtient donc deux relations entre deux inconnues  $\Omega_a$  et  $b$  ou  $h$ . ( $a$  est choisi d'avance), système qui se résout facilement par équation linéaire si  $b$  est l'inconnue, ou une équation du 2<sup>e</sup> degré, si  $h$  est l'inconnue, Cette manière de procéder est très commode, car le poids propre constitue généralement une partie non négligeable de la charge des dalles.

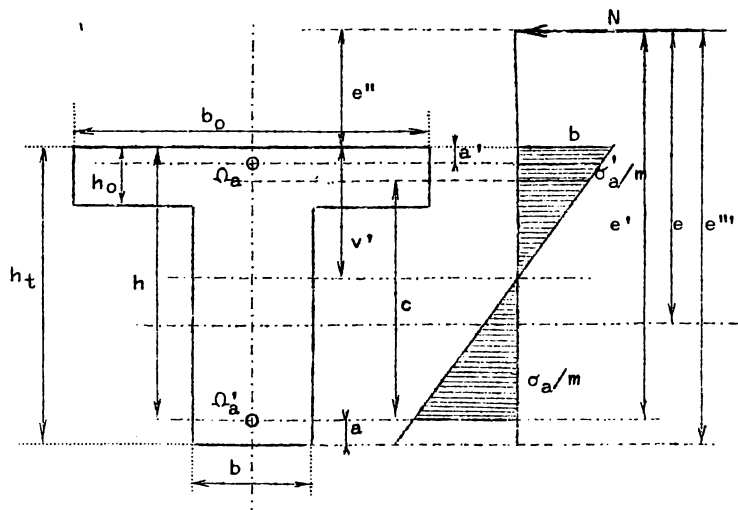
#### 12.- FLEXION DES POUTRES NERVUREES.

Je me réfère au règlement de l'A.B.S. pour ce qui est de la largeur des ailes à porter en compte dans la résistance de la poutre, en faisant observer que le règlement allemand envisage des valeurs différentes suivant qu'il s'agit de la détermination des tensions ou des flèches.

Règlement l'A.B.S.

$$b_0 \leq 12 h_0, \frac{L}{3} \text{ ou } l.$$

$L$  = portée de la nervure;  $l$  = portée de la dalle.



Règlement allemand.

$$b_o = 6 h_o + b + 2 b_s \quad (b_s = \text{largeur des chanfreins})$$

$$b_o = 12 h_o + b + 2 b_s < \frac{1}{2} \text{ ou } 1 \quad (b_s < 3 h_o)$$

Les équations d'équilibre de la section sont, en négligeant la zone comprimée de la nervure.

$$\Sigma X = 0 = \Omega_a \cdot \sigma_a = \Omega'_a \cdot \sigma'_a + \frac{b_o \cdot h_o \cdot \sigma'_b}{2} \left(1 + \frac{v' - h_o}{v'}\right) - N \dots \dots \dots (1)$$

$$N \cdot (e + 0,5 h_t - a - c) = \Omega_a \cdot \sigma_a \cdot c$$

Posons encore :

$$c = \gamma \cdot h ; \quad \frac{\sigma_a}{m \cdot \sigma'_b} = \theta ; \quad \frac{\sigma'_a}{\sigma_a} = \varphi ; \quad \frac{\Omega'_a}{\Omega_a} = \kappa ; \quad \frac{h}{h_o} = \eta ; \quad \frac{v'}{h} = \frac{1}{1 + \theta}$$

Donc :

$$\frac{v'}{h_o} = \frac{\eta}{1 + \theta} \quad \text{et} \quad \frac{v' - h_o}{v'} = \frac{\eta - 1 - \theta}{\eta}$$

d'où

$$\Omega_a \cdot \sigma_a = \Omega'_a \cdot \sigma'_a + b_o \cdot h_o \cdot \sigma'_b \left(\frac{2\eta - 1 - \theta}{2\eta}\right) - N \dots \dots \dots (1')$$

$$N (e' - c) = \omega_a \cdot \sigma_a \cdot c$$

$$\frac{m \cdot \Omega_a}{b_o \cdot h_o} \left[ \frac{\sigma_a}{m \cdot \sigma'_b} - \kappa \frac{\sigma'_a}{m \cdot \sigma'_b} \right] = \frac{2\eta - 1 - \theta}{2\eta} - \frac{N}{b_o \cdot h_o \cdot \sigma'_b} = \frac{m \cdot \Omega_a}{b_o \cdot h_o} \theta (1 - \kappa \cdot \varphi)$$

$$\frac{m \cdot \Omega_a}{b_o \cdot h_o} = \frac{\frac{2\eta - 1 - \theta}{2\eta \cdot \theta} - \frac{m \cdot N}{b_o \cdot h_o \cdot \sigma_a}}{1 - \kappa \cdot \varphi} = \frac{\Lambda - \frac{m \cdot N}{b_o \cdot h_o \cdot \sigma_a}}{1 - \kappa \cdot \varphi} \quad (2)$$

en posant

$$\Lambda = \frac{2\eta - 1 - \theta}{2\eta \theta}$$

Donc

$$\frac{m \cdot \Omega_a}{b_o \cdot h_o} (1 - \kappa \cdot \varphi) = \Lambda - \frac{m \cdot \Omega_a \cdot \sigma_a \cdot c}{b_o \cdot h_o \cdot \sigma_a \cdot (e + 0,5 h_t - a - c)}$$

d'où

$$\boxed{\frac{m \cdot \Omega_a}{b_o \cdot h_o} = \frac{\Lambda}{1 - \kappa \cdot \varphi + \Psi}} \quad (IV)$$

$$\Psi = \frac{\gamma}{\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2} - \gamma} = \frac{\gamma}{\frac{e'}{h} - \gamma} = \frac{\gamma}{\frac{e''}{h} + 1 - \gamma} = \frac{\gamma}{\frac{e'''}{h} + \delta - 1 - \gamma} \quad \text{et} \quad \frac{N}{\Omega_a \cdot \sigma_a} = \Psi \quad (II)$$

Les tables de  $\varphi$  et de  $\Psi$  établies pour ces sections rectangulaires peuvent servir, il faut une nouvelle table de  $\Lambda$ . Il reste à déterminer  $\gamma$  :

$$\begin{aligned} \gamma \cdot h &= h - \frac{b_o \cdot \sigma'_b \int_0^{h_o} \frac{v' - x}{v'} \cdot x \cdot dx + \Omega'_a \cdot \sigma'_a \cdot a'}{b_o \cdot \sigma'_b \int_0^{h_o} \frac{v' - x}{v'} dx + \Omega'_a \cdot \sigma'_a} = h - \frac{b_o \cdot \sigma'_b \left(\frac{h_o^2}{2} - \frac{h_o^3}{3v'}\right) + \Omega'_a \cdot \sigma'_a \cdot a'}{b_o \cdot \sigma'_b \cdot \left(h_o - \frac{h_o^2}{2v'}\right) + \Omega'_a \cdot \sigma'_a} \\ &= h - h_o \frac{b_o \cdot h_o \cdot \sigma'_b \left(3 - \frac{2(1+\theta)}{\eta}\right) + \Omega'_a \cdot \sigma'_a \frac{a'}{h_o}}{\frac{b_o \cdot \sigma'_b}{2} \left(2 - \frac{1+\theta}{\eta}\right) + \frac{\Omega'_a \cdot \sigma'_a}{h_o}} = \frac{3\eta - 2 - 2\theta}{2\eta} + \kappa \cdot \varphi \cdot \theta \frac{a'}{h_o} \cdot \frac{m \cdot \Omega_a}{b_o \cdot h_o} h_o \\ &= \frac{2\eta - 1 - \theta}{2\eta} + \kappa \cdot \varphi \cdot \theta \frac{m \cdot \Omega_a}{b_o \cdot h_o} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 - \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\frac{3\eta - 2 - 2\theta}{6\eta} + \kappa \cdot \varphi \cdot \theta \frac{a'}{h_0} \cdot \frac{m \cdot \Omega_a}{b_0 \cdot h_0}}{\frac{2\eta - 1 - \theta}{2\eta} + \kappa \cdot \varphi \cdot \theta \frac{m \cdot \Omega_a}{b_0 \cdot h_0}} = \\ &= \frac{\frac{6\eta^2 - 3\eta(2 + \theta) + 2(1 + \theta)}{6\eta} + \kappa \cdot \varphi \cdot \theta \frac{m \cdot \Omega_a}{b_0 \cdot h_0} \left(\eta - \frac{a'}{h_0}\right)}{\frac{2\eta - 1 - \theta}{2} + \kappa \cdot \varphi \cdot \theta \cdot \eta \frac{m \cdot \Omega_a}{b_0 \cdot h_0}} \\ &= \frac{M + \kappa \cdot \varphi \cdot \theta \frac{m \cdot \Omega_a}{b_0 \cdot h_0} \eta \cdot \delta'}{\Lambda \cdot \eta \cdot \theta + \kappa \cdot \varphi \cdot \theta \cdot \eta \frac{m \cdot \Omega_a}{b_0 \cdot h_0}} = \frac{M(1 - \kappa \cdot \varphi + \Psi) + \kappa \cdot \varphi \cdot \theta \cdot \eta \cdot \delta' \cdot \Lambda}{\Lambda \cdot \eta \cdot \theta \cdot (1 - \kappa \cdot \varphi + \Psi) + \kappa \cdot \varphi \cdot \theta \cdot \eta \cdot \Lambda} \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{M}{\Lambda \cdot \eta \cdot \theta} + \frac{\kappa \cdot \varphi}{1 + \Psi} \left( \delta' - \frac{M}{\Lambda \cdot \eta \cdot \theta} \right) = \gamma_0 + \kappa \frac{\Phi}{1 + \Psi}$$

en posant

$$M = \frac{6\eta^2 - 3\eta \cdot (2 + \theta) + 2(1 + \theta)}{6\eta} ; \quad \gamma_0 = \frac{M}{\Lambda \cdot \eta \cdot \theta} \quad \text{et} \quad \Phi = \varphi \cdot (\delta' - \gamma_0)$$

$$\gamma_0 = \frac{6\eta^2 - 3\eta \cdot (2 + \theta) + 2(1 + \theta)}{3\eta(2\eta - 1 - \theta)} = 1 - \frac{1}{3\eta} - \frac{\eta - 1 - \theta}{3\eta(2\eta - 1 - \theta)}$$

$$= 1 - \frac{2}{3\eta} + \frac{1}{3(2\eta - 1 - \theta)}$$

En prenant la moyenne des deux expressions, on trouve encore :

$$\gamma_0 = 1 - \frac{1}{2\eta} + \frac{1 + \theta}{6\eta(2\eta - 1 - \theta)}$$

Les formules pratiques s'écrivent :

I.- FLEXION SIMPLE, ARMATURE SIMPLE.

$$\frac{m \cdot \Omega_a}{b_0 \cdot h_0} = \Lambda \quad ; \quad \frac{M}{\Omega_a \cdot \sigma_a \cdot h} = \gamma \quad ; \quad \gamma = \gamma_0$$

Il faut un abaque ou tables des valeurs de  $\Lambda$  et  $\gamma_0$  en fonction de  $\theta$  et  $\eta$ .

II.- FLEXION SIMPLE, ARMATURE DOUBLE.

$$\frac{m \cdot \Omega_a}{b_0 \cdot h_0} = \frac{\Lambda}{1 - \kappa \cdot \varphi} \quad \frac{M}{\Omega_a \cdot \sigma_a \cdot h} = \gamma \quad \gamma = \gamma_0 + \kappa \cdot \Phi$$

Les tables de correction (valeur de  $\varphi$  et de  $\Phi$ ) sont les mêmes que pour les sections rectangulaires.

III.- FLEXION COMPOSEE, ARMATURE SIMPLE.

$$\frac{m \cdot \Omega_a}{b_0 \cdot h_0} = \frac{\Lambda}{1 + \Psi} \quad ; \quad \frac{N}{\Omega_a \cdot \sigma_a} = \Psi \quad ; \quad \gamma = \gamma_0$$

Le diagramme de  $\Psi$  est le même que pour les sections rectangulaires.

IV.- FLEXION COMPOSEE, ARMATURE DOUBLE.

$$\frac{m \cdot \Omega_a}{b_0 \cdot h_0} = \frac{\Lambda}{1 - \kappa \cdot \varphi + \Psi} \quad ; \quad \frac{N}{\Omega_a \cdot \sigma_a} = \Psi \quad ; \quad \gamma = \gamma_0 + \frac{\kappa \cdot \Phi}{1 + \Psi}$$

Pour les cas où  $\sigma'_b$  est connu, tandis que  $\Omega_a$  ou  $\sigma_a$  sont inconnues,

cas peu fréquent pour les poutres nervurées, il est plus commode de se référer à la formule

$$\frac{M}{b_0 \cdot h_0^2 \cdot \sigma'_b} \quad \text{ou} \quad \frac{N \left( e + \frac{\delta}{2} h \right)}{b_0 \cdot h_0^2 \cdot \sigma'_b} = M + \kappa \cdot \delta' \cdot \varphi \cdot \theta \cdot \eta \frac{m \cdot \Omega_a}{b_0 \cdot h_0}$$

Les diagrammes donnent les courbes de M ainsi que celles de  $M' = \frac{M}{\theta}$

### 13.- FORMULES SIMPLIFIEES.

On simplifie beaucoup les calculs, sans grande erreur et en réalisant une sécurité plus grande en admettant  $\gamma = \gamma_0$  ce qui consiste à admettre que  $\delta' = \gamma_0$  c'est-à-dire que l'armature comprimée est au point d'action de la résultante des compressions du béton.

La dernière expression de

$$\gamma_0 = 1 - \frac{1}{2\eta} + \frac{1 + \theta}{6\eta(2\eta - 1 - \theta)}$$

montre que l'erreur est très faible si on se limite aux 2 premiers termes du deuxième membre, CE QUI REVIENT A ADMETTRE QUE LE CENTRE D'ACTION DE LA RESULTANTE DES TENSIONS DE COMPRESSION EST INVARIABLEMENT A MI-HAUTEUR DE LA DALLE.

Si  $\eta = 1 + \theta$ , cas limite, la valeur maximum du 3<sup>e</sup> terme est

$$\frac{1}{6\eta} = \frac{1}{6(1 + \theta)}$$

Si  $\eta = 2(1 + \theta)$ , la valeur du 3<sup>e</sup> terme est :

$$\frac{1}{36(1 + \theta)} = \frac{1}{18\eta}$$

Or, on a toujours  $\eta > 1 + \theta$  sinon on doit opérer à l'aide des formules des sections rectangulaires. Donc

$$\gamma_0 = \frac{2\eta - 1}{2\eta} = \delta', \quad \text{d'où} \quad \varphi = \frac{2\eta \cdot (1 + \theta)}{2\eta \cdot \theta} = \Lambda$$

et par conséquent

$$\frac{m \cdot \Omega_a}{b_0 \cdot h_0} = \frac{\Lambda - \frac{m \cdot N}{b_0 \cdot h_0 \cdot \sigma_a}}{1 - \kappa \cdot \Lambda} = \frac{\Lambda}{1 - \kappa \cdot \Lambda + \psi}$$

On emploie alors comme seconde équation :

$$M \text{ ou } N(e - 0,5 h + 0,5 h_0) = \Omega_a \cdot \sigma_a (h - 0,5 h_0)$$

### 14.- CORRECTION POUR TENIR COMPTE DE LA ZONE COMPRIMEE DES NERVURES.

Nous avons dans les formules précédentes, négligé la zone comprimée des nervures, conformément à la pratique générale. L'erreur est, en général, insignifiante et augmente la sécurité. La correction n'acquiert quelque importance que pour les pièces relativement hautes, à nervure épaisse, fortement armée et très chargées.

J'ai démontré dans les annales des Travaux Publics de Belgique, fascicule 2 - 1924 et fascicule 5 - 1925 des formules de correction assez simples, qui sont, en appelant  $\nu$  le rapport  $b/b_0$ .

Démonstration des formules.

$$\frac{m \cdot \Omega_a}{b_o \cdot h_o} = \frac{(1 + \nu \cdot \varepsilon) \cdot \Lambda}{1 - \kappa \cdot \varphi + \Psi} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{\left(\frac{v'}{h_o} - 1\right)^2}{2 \frac{v'}{h_o} - 1} = \frac{(\eta - 1 - \theta)^2}{(1 + \theta) \cdot (2\eta - 1 - \theta)}$$

$$\frac{M}{b_o \cdot h_o^2 \cdot \sigma'_b} \quad \text{ou} \quad \frac{N \left(e + \frac{\delta}{2} h\right)}{b_o \cdot h_o^2 \cdot \sigma'_b} = \left(M + \kappa \cdot \delta' \cdot \varphi \cdot \theta \cdot \eta \frac{m \cdot \Omega_a}{b_o \cdot h_o}\right) \cdot (1 + \nu \cdot \varepsilon) - \nu \cdot \varepsilon$$

avec

$$\varepsilon' = \frac{\left(\frac{v'}{h_o} - 1\right)^2 \cdot \frac{v'}{h_o}}{3 \left(2 \frac{v'}{h_o} - 1\right)} = \varepsilon \frac{\eta}{3(1 + \theta)}$$

Je reproduis les tables de  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  que j'ai publiées dans la revue précitée. L'application des corrections ne complique pas beaucoup les calculs. On déduit des formules précédentes que

$$\gamma_{\text{corrigé}} = \gamma - \nu \left[ \frac{\varepsilon'}{\Lambda \cdot \eta \cdot \theta \cdot (1 + \nu \cdot \varepsilon) \cdot (1 + \Psi)} - \frac{\kappa \cdot \varphi}{1 + \Psi} \delta' \cdot \varepsilon \right]$$

Ce terme de correction est en général très faible, sauf dans le cas spécial précité.

Observation générale pour toutes les formules de flexion.

Selon l'usage général, il n'a pas été retranché de la section comprimée du béton l'aire correspondant aux armatures comprimées.

Si l'on veut tenir compte de cette correction, il faut réduire  $\kappa$  dans le rapport  $\frac{m - 1}{m}$ .

5.- TENSIONS TANGENTIELLES.

En adoptant les mêmes hypothèses fondamentales de calcul qui pour les tensions normales de flexion-consistant à envisager l'état de rupture des poutres et à y appliquer un certain coefficient de sécurité - le maximum de tension tangentielle dans une section d'une poutre fléchie en béton armé est

$$\sigma''_b = \frac{T}{b \cdot \gamma \cdot h}$$

T étant l'effort tranchant. Le diagramme de  $\sigma''_b$  calculés possède l'allure ci-contre. Cette formule peut s'écrire :

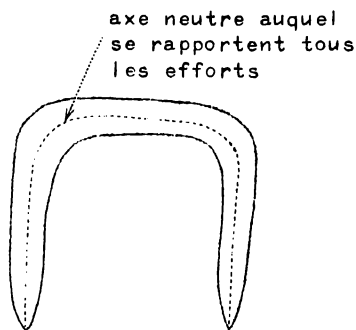
$$\frac{T}{b \cdot h \cdot \sigma''_b} = \gamma$$

L'effort rasant par unité de longueur, en un point de la partie étendue de la nervure est :

$$b \cdot \sigma''_b = \frac{T}{\gamma \cdot h} .$$

Lorsqu'on connaît le diagramme des T maxima d'une poutre, on peut déterminer dans quelle partie de la poutre le béton peut résister seul à l'effort tranchant, par la condition

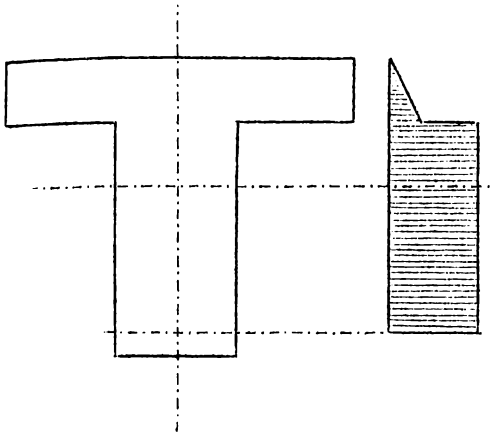
$$\frac{dM}{dx} = T < \gamma \cdot b \cdot h \cdot \sigma''_b$$





D'après l'A.B.S.  $\sigma_b'' = \frac{\sigma_b'}{10}$ . Dans les autres parties, il faut des armatures spéciales : étriers ou barres obliques.

Il est habituel que ces armatures soient calculées comme si ELLES RESISTAIENT SEULES, ABSTRACTION FAITE DE LA RESISTANCE DU BETON. Il est logique d'opérer ainsi si l'on se rapporte au stade de rupture. Il semble donc qu'il n'y ait pas lieu de contrôler les valeurs atteintes par  $\sigma_b''$  pas plus qu'on ne recherche celles de  $\sigma_b$  dans la zone étendue du béton. Cependant, l'A.B.S. recommande des renforcements spéciaux lorsque  $\sigma_b''$  dépasse  $\sigma_b'/5$  ( $\sigma_b''$  étant calculé sans tenir compte des armatures spéciales).



Pratiquement, cela revient presque à établir la limite  $\sigma_b'' < \frac{\sigma_b'}{5}$ . Le règlement allemand prescrit  $\sigma_{b,max}'' < 14 \text{ Kg/cm}^2$  ( $\sigma_b''$  étant calculé abstraction faite des armatures spéciales). Ces restrictions, théoriquement assez arbitraires sont pratiquement justifiées, parce qu'elles conduisent à adopter des valeurs élevées de  $\gamma h$  donnant des poutres à la fois rigides et économiques. Elles ont aussi pour effet d'établir une règle de proportion entre  $b$  et  $h$  au voisinage des appuis. Seulement, si ces conditions sont justifiées, il ne l'est pas moins de contrôler et de limiter  $\sigma_b$  ce qui procurerait les mêmes avantages pratiques, dans les zones

des  $M$  maxima, qui n'est pas moins intéressante que celle de  $T$  maxima.

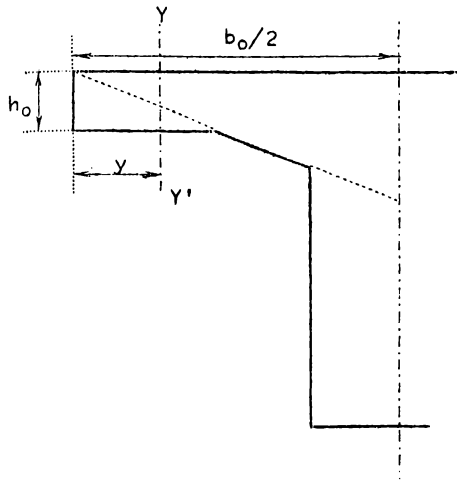
La notion des tensions principales n'a pas grande signification si l'on se rapporte à des tensions fictives. Dans l'étendue de la zone de traction, où l'on admet  $\sigma_b = 0$  certains considèrent une traction principale  $\sigma_b = \sigma_b''$  inclinée à  $45^\circ$  sur l'axe neutre. Elle est égale à la compression principale qui lui est perpendiculaire. Limiter  $(\sigma_b'')_{max}$  aux appuis revient donc aussi à limiter  $(\sigma_b')_{max}$  et la valeur limite de  $14 \text{ Kg/cm}^2$  du règlement allemand est déduite de la considération de la résistance du rupture à la traction. Mais il y a contradiction flagrante entre l'hypothèse  $\sigma_b = 0$  et la conséquence  $\sigma_b \neq \sigma_b''$ . Cette considération vient à l'appui de celle qui est faite ci-dessus pour montrer l'utilité de limiter de même les tensions principales d'extension se produisant dans la flexion du béton armé. Le règlement de l'A.B.S. prévoit, lorsque l'on emploie des armatures obliques en faisceau très serré, que  $\sigma_b''$  peut dépasser  $\frac{\sigma_b'}{5}$  sans atteindre toutefois  $\frac{3}{4} \sigma_b'$ . Ceci revient à limiter la compression principale maxima égale à  $\sigma_b''$ . Mais cette considération est très discutable, vu la précarité de la conception des tensions principales dans les hypothèses envisagées.

On envisage des appuis simples; comme il n'y a pas de moment, ces notions peuvent avoir quelque réalité. Mais les poutres des constructions en béton armé sont généralement encastées ou continues de telle sorte que la flexion existe le plus souvent aux appuis.

Des tensions tangentielles assez importantes peuvent se développer dans les sections correspondant du prolongement des faces latérales des nervures dans l'intérieur des dalles.

Considérons les extrémités des ailes libres et soit  $Y Y'$  une section parallèle à l'axe et normale à l'aile, dans un tronçon de poutre de longueur  $\Delta x$ . L'équilibre de translation parallèle à l'axe de l'élément d'aile détaché fictivement par  $Y Y'$  est :

$$h_o \cdot \Delta x \cdot \sigma_b'' = \frac{Y}{b_o} \cdot \Delta \left( \frac{M}{\gamma \cdot h} \right) .$$



en supposant l'armature comprimée uniformément répartie sur la largeur  $b_o$ , d'où

$$\frac{h_o}{y} = \frac{\Delta M}{\Delta x \cdot \gamma \cdot h \cdot b_o \cdot \sigma_b''} = \frac{T}{\gamma \cdot h \cdot b_o \cdot \sigma_b''}$$

Si on impose une limite de  $\sigma_b''$  il faut que

$$h_o > y \frac{T}{\gamma \cdot h \cdot b_o \cdot \sigma_b''}$$

Lorsque  $T$  est grand et que  $h$  ou  $b_o$  sont petits, il se peut que cette condition ne soit pas réalisée pour les valeurs les plus grandes de  $y$  c'est-à-dire au voisinage de la nervure. Les ailes doivent être alors renforcées par des chanfreins à la jonction

avec les nervures. Le profil minimum s'obtient en traçant, par rapport à la face supérieure des ailes, la droite d'équation

$$h_o = y \frac{T}{\gamma \cdot h \cdot b_o \cdot \sigma_b''}$$

IL EST UTILE DE TENIR COMPTE DE CETTE CONDITION, QUI EST SOUVENT NEGLIGEE.

#### 6.- ADHERENCE DES ARMATURES AU BETON.

En toute hypothèse, on est obligé d'admettre que l'effort de traction  $\Omega_a \cdot \sigma_a$  de l'armature varie d'un point à un autre. Il est dès lors nécessaire que des tensions d'adhérence entre le béton et l'acier s'exercent tangentielle-ment à la périphérie  $\chi_a$  des armatures.

$$\chi_a \cdot \sigma_b''' = \frac{d(\Omega_a \cdot \sigma_a)}{dx} = \frac{dM}{\gamma \cdot h \cdot dx} = \frac{T}{\gamma \cdot h} \quad \text{ou} \quad \frac{T}{h \cdot \chi_a \cdot \sigma_b'''} = \gamma$$

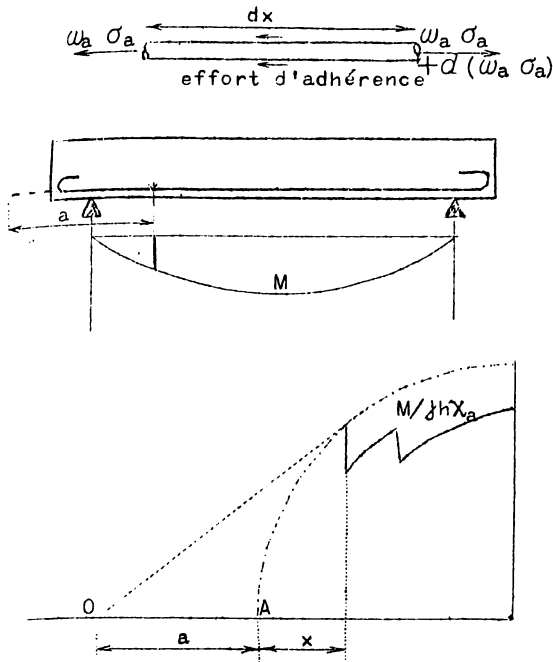
$\sigma_b'''$  serait maximum aux appuis, où  $T$  est maximum et  $\chi_a$  minimum, en cas d'appuis simple. En cas d'encastrement, il faut contrôler les valeurs de  $\sigma_b'''$  au point d'inflexion.

A vrai dire, ces conditions sont excessives si, ainsi qu'il est habituel, les barres sont prolongées au delà du point théorique à partir duquel elles sont nécessaires, et en outre terminées par des crochets.

Soit  $A$  une extrémité d'une poutre à appuis simples et supposons que l'armature dépasse l'appui d'une longueur  $a$ . En un point à distance  $x$  de l'appui, la sécurité d'adhérence sera satisfaite si

$$(a + x) \cdot \chi_a \cdot \sigma_b''' = \frac{M}{\gamma \cdot h} \quad \text{d'où} \quad \sigma_b''' = \frac{M}{\gamma \cdot h \cdot \chi_a \cdot (x + a)}$$

Si nous traçons un diagramme de  $\frac{M}{\gamma \cdot h \cdot \chi_a}$ ,  $\sigma_b'''$  est proportionnel à la tangente de l'angle que fait avec l'axe de la poutre la droite joignant l'extrémité  $O$  de l'armature au point considéré de la courbe de



$\frac{M}{\gamma \cdot h \cdot \chi_a}$ . Cet angle, donc  $\sigma_b''$  possède un maximum correspondant à la tangente issue de 0 à la courbe de  $\frac{M}{\gamma \cdot h \cdot \chi_a}$  (éventuellement la droite joignant 0 à un point saillant de la courbe).

Je renvoie pour plus de détails aux A.T.P.B. 1922, fasc.3. D'après le règlement autrichien, un crochet peut être assimilé à une surlongueur de  $12 \varnothing$  barre. Cette méthode a l'avantage de faire réaliser un bon ancrage des barres, tandis que la précédente conduirait à augmenter leur nombre, solution tout à fait désavantageuse. Le règlement de l'A.B.S. tient compte de ces éléments en limitant  $\sigma_b''$  à  $\frac{\sigma_b}{10}$  LORSQU'IL N'Y A PAS DE CROCHET ET A  $\frac{\sigma_b}{5}$  LORSQU'IL Y EN A.

On peut s'en tenir à cette méthode pour les cas courants mais pour les courbes, par exemple, il sera bon de vérifier l'ancrage des barres comme je l'ai indiqué.

- ETRIERS.

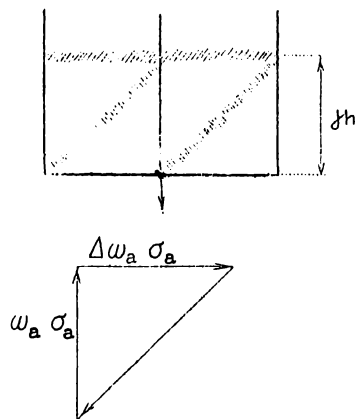
Les étriers se déterminent également par rapport à l'état de rupture. En les envisageant comme les montants tendus d'une poutre en N dont la membrure inférieure est l'armature et dont les diagonales comprimées à  $45^\circ$ , sont réalisées par le béton, on a

$$\omega_a \cdot \sigma_a = \frac{\Delta M}{\gamma \cdot h}$$

$\Delta M$  étant la variation de moment dans l'étendue de la poutre afférente à l'étrier. Le nombre total d'étriers est donc

$$n \geq \frac{M_{\max} - M_{\min}}{\gamma \cdot h \cdot \omega_a \cdot \sigma_a}$$

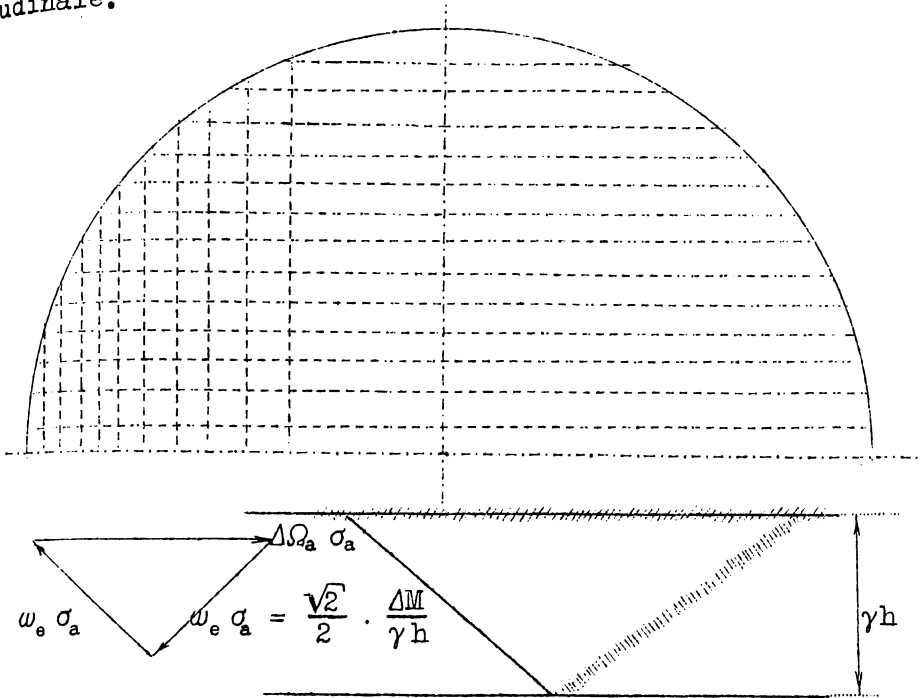
pour  $\frac{1}{2}$  poutre. Le moyen le plus simple consiste à faire choix d'une section d'étrier  $\omega_a$ , on en déduit  $\Delta M = \omega_a \cdot \sigma_a \cdot \gamma \cdot h$ . On divise le diagramme des M maxima en une série d'ordonnées partielles  $\Delta M$  et on place les étriers aux milieu des segments d'abscisses correspondants.



Les étriers sont, le plus souvent, des éléments indispensables, au montage du ferrailage. On en place donc aussi dans les zones où le béton suffit pour résister seul à l'effort tranchant, ainsi que lorsque les effets de l'effort tranchant sont absorbés par des barres obliques. Seulement, la distance des étriers est alors augmentée autant que le permettent les conditions de montage.

$$\omega_a \sigma_a = \Delta \omega_a \sigma_a = \frac{\Delta M}{\gamma h} = \frac{\int T \cdot dx}{\gamma \cdot h}$$

La section totale d'étriers d'une poutre sur 2 appuis est égale à 2 fois la section maximum de l'armature principale. Elle est la même en valeur absolue dans une poutre encastree, mais relativement plus forte par rapport à l'armature longitudinale.



La section totale des barres obliques près d'un appui d'une poutre sur 2 appuis est égale à  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  la section maximum de l'armature principale. On doit donc toujours trouver un nombre suffisant des barres à relever, si on recherche les dispositions avec le minimum de barres.

### 18.- BARRES OBLIQUES.

Nous avons rappelé au paragraphe 15 les tensions de tractions principales, agissant à 45° sur l'axe neutre qui se dé-

veloppent dans la zone étendue du béton, dans le stade de rupture, ces tensions se manifestent par des fissures à 45° près des appuis. Il est tout indiqué d'établir des armatures obliques à 45° pour résister à ces tractions et les épreuves montrent la grande efficacité de ces armatures; supérieure à celle des étriers.

Le calcul se fait comme pour les étriers, mais en envisageant une poutre en croix de St. André, à diagonales à 45°, celles de traction étant les barres obliques et celles de compression le béton. Pour une barre oblique de section  $\omega_a$  on a :  $\omega_a \sigma_a = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\Delta M}{\gamma \cdot h}$ . Donc, ayant fait choix d'une section  $\omega_a$  (généralement le même  $\phi$  de barre que pour l'armature principale), le nombre de barres obliques nécessaires est

$$n = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{M_{\max} - M_{\min}}{\gamma \cdot h \cdot \omega_a \cdot \sigma_a}$$

Il est moindre que celui des étriers, mais comme la longueur des barres obliques est égale à  $\sqrt{2}$  fois celle des étriers, le volume théorique des 2 genres d'armatures est le même. Les alignements des barres obliques se déterminent comme pour les étriers. On divise le diagramme des M en ordonnées partielles

$$\Delta M = \gamma \cdot h \cdot \omega_a \cdot \sigma_a \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Les centres des segments d'abscisses correspondants projetés sur l'axe neutre sont les points de passage des barres obliques.

On peut se servir sans inconvénient de l'axe neutre pour les poutres sur 2 appuis, mais pour les poutres encastrees ou continues, il y a des difficultés.

M. Moïsch ne se réfère pas à l'axe neutre, mais à la ligne axiale de la hauteur étendue (nervure). Dans le cas d'encastrement ou de continuité, il y a deux axes de référence différents d'après le sens de flexion. M. Moïsch prend la droite de la position moyenne.

REMARQUE IMPORTANTE. - En cas d'encastrement ou de continuité, les moments sur les appuis n'étant pas nuls, le diagramme des M doit être considéré dans chaque travée par rapport à la droite inférieure joignant les extrémités du diagramme au droit des appuis et qui est l'origine des ΔM. Car les ΔM seuls importent et non les signes de moments. Donc le volume des étriers ou barres obliques ne dépend que de la charge; elle est indépendante des conditions d'appuis d'extrémités. Cette méthode est plus simple que celle qui opère au moyen du diagramme des T (voir A.T.P.B. 1924 fascicule 3.)

Le plus possible, les barres obliques sont constituées par le relèvement des barres principales étendues. Il faut déterminer à partir de quels points les diverses barres peuvent être relevées. A cet effet, on divise ordinairement l'ordonnée maximum du diagramme des M en autant de parties égales qu'il y a des barres. On mène des parallèles à l'axe des abscisses par les points de division; les segments de ces parallèles interceptés par la courbe donnent les longueurs minima des diverses barres. Ceci suppose γ.h et σ<sub>a</sub> restent constants. L'erreur qui en résulte est favorable à la sécurité et j'ai montré (A.T.P.B. fascicule 3, 1924), que le calcul exact, qui est très long, donne d'ordinaire des résultats peu différents.

Le règlement l'A.B.S. impose quelques conditions, plutôt sévères au sujet des barres obliques. Il est recommandable qu'une barre oblique passe par le point de l'axe de référence au droit de l'appui et que l'écartement longitudinale des barres obliques les plus voisines de l'appui soit au plus égal à la moitié de la hauteur γ.h (treillis double). A plus grande distance de l'appui, l'écartement horizontal sera au plus égal à γ.h (treillis simple).

En toute hypothèse, il est désirable que l'écartement croisse depuis les appuis vers le milieu. Cela se réalise très rationnellement si on relève les barres principales à partir des points où c'est admissible et en complétant l'armature par des étriers. Il faut encore avoir soin de tenir compte que les barres doivent être prolongées au delà du point à partir duquel elles deviennent strictement utiles, d'une longueur suffisante pour assurer leur adhérence. S'il y a un crochet d'extrémité, c'est 30 fois le ϕ d'après l'A.B.S.

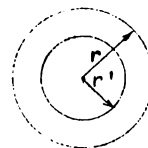
19.- TORSION.

La torsion peut se produire dans certaines constructions en béton armé et il est nécessaire de savoir comment disposer les armatures pour y résister et quelle importance leur donner. Ces conditions sont cependant peu connues. Elles ont été étudiées surtout en Allemagne par Bac, Moïsch et Hayer. Les formules simples de ces auteurs ont l'avantage de correspondre très bien aux résultats d'expérience et de ne pas exiger d'hypothèse différente de celles du calcul des pièces fléchies en béton armé. On se réfère encore à l'état de rupture, par emploi d'un coefficient de sécurité suffisant. Pour une section circulaire pleine ou évidée concentriquement, soumise à un moment de torsion M, on sait que la tension tangentielle périphérique maximum est :

$$\sigma''_b = \frac{M \cdot r}{I_p}$$

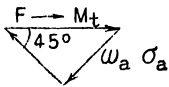
I<sub>p</sub> étant le moment d'inertie polaire

$$I_p = \frac{\pi}{2} (r^4 - r'^4)$$



$\sigma_b''$  est < que la limite de sécurité, il ne faut pas d'armature. D'après la théorie de l'élasticité, en cas de glissement simple  $\sigma_b''$ , il ne développe pas des tensions principales à 45° sur la direction de  $\sigma_b''$  et qui lui sont égales en valeur absolue. Et, en fait, les cylindres tordus se fissurent et se rompent suivant des hélices inclinées à 45° sur les génératrices  $\perp$  aux tractions principales. L'armature de renforcement d'un cylindre tordu en béton doit être une spirale inclinée à 45°, s'élevant dans le sens du moment. Si le moment peut varier de sens, il faut deux spirales opposées.

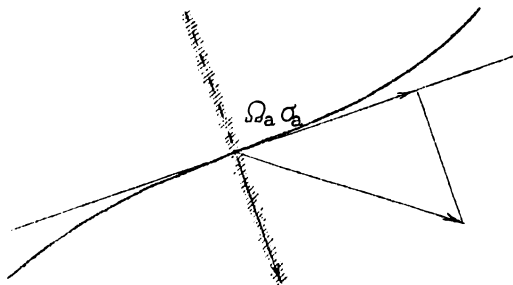
Dans le stade de rupture, les armatures supportent la moitié du moment, l'autre moitié étant supportée par le béton comprimé. Le moment est donc égal à

$$M = \Omega_a \cdot \sigma_a \cdot r \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}$$


étant la distance des armatures au centre,  $\Omega_a$  la section totale d'armature d'une section droite. Cette formule est surtout vraie pour les cylindres creux. Pour les cylindres pleins, le petit noyau central de béton non rompu ne peut donner lieu à une forte erreur. Donc

$$\frac{M}{\Omega_a \cdot \sigma_a \cdot r} = \frac{2}{\sqrt{2}} = 1,445.$$

Pour éviter des fissures, il faut en outre que  $\sigma_b''$  reste inférieur à une certaine limite, par exemple  $\sigma_b' / 5$ . Le cas le plus intéressant pour le béton armé est celui des sections rectangulaires ou carrées. On sait que pour un solide homogène, la question est des plus complexes. Les formules de Bach pour les prismes non armés sont :



$$\sigma_b''_{\max} = \left( 3 + \frac{2^6}{0,45 + \frac{h}{b}} \right) \frac{M}{h \cdot b^2}$$

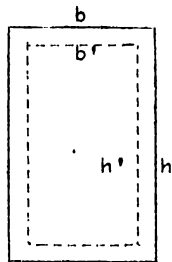
pour le rectangle ( $h > b$ ).

Ces tensions se produisent au milieu des grandes faces

$$\sigma_b''_{\max} = 4,8 \frac{M}{b^3} \text{ pour le carré.}$$

Ces formules peuvent servir pour les prismes non armés et peu tordus, ainsi que pour la sécurité à la fissuration des prismes armés.

Les prismes rectangulaires sont aussi armés de spirales de 45°. Soit  $\Omega_a$  l'armature totale répartie en  $\Omega_{ab}$  suivant les petits côtés et  $\Omega_{ah}$  suivant les grands côtés. Comme les spires sont parallèles et équidistantes



$$\frac{\Omega_b}{\Omega_h} = \frac{b'}{h'}, \text{ d'où } \Omega_{ab} = \frac{\Omega_a \cdot b'}{b' + h'} ; \quad \Omega_{ah} = \frac{\Omega_a \cdot h'}{b' + h'}$$

On a évidemment

$$M = \left( \Omega_{ab} \frac{2}{\sqrt{2}} h' + \Omega_{ah} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} b' \right) \cdot \sigma_a$$

la compression du béton intervenant pour la même part que la tension des armatures. Donc :

$$M = \frac{2 \Omega_a \cdot b' \cdot h'}{(b' + h') \cdot \sqrt{2}} \cdot \sigma_a$$

D'après les essais, les fatigues de première fissuration sont supérieures à la résistance de rupture à la traction, déterminée par mesure directe. Les raisons de cet écart sont connues. D'après M. Moïsch on peut se borner pour  $\sigma_a$  à la sécurité habituelle (par rapport à la limite d'élasticité). Les spirales se font de préférence en barre de faible diamètre, dont l'écartement normal est au plus égal à  $\frac{b'}{2\sqrt{2}}$ . Il faut des armatures longitudinales aux angles.

Il est facile d'établir un diagramme de

$$\frac{M}{\Omega_s \cdot \sigma_a \cdot b'} = \frac{\sqrt{2}}{1 + \frac{b'}{h'}} \text{ en fonction de } \frac{b'}{h'}$$

#### 0.- CONTRIBUTION DE LA ZONE ETENDUE A LA RESISTANCE, A LA FLEXION.

Dans la réalité, sous l'effet des charges pratiques, la zone étendue des pièces fléchies en béton armé peut résister à l'extension. Il est établi depuis longtemps (Considère 1899) que le béton armé possède une faculté d'allongement plus grande que celle du béton ordinaire, sans grandes fissures apparentes. Les grandes fissures apparaissent lors de la striction des armatures.

Toutefois, de fines fissures se produisent dès que la limite de traction vraie du béton est atteinte; elle est supérieure, comme on sait, à la résistance de rupture mesurée par traction directe. En fait, les charges pratiques sont souvent en dessous de cette limite, notamment s'il n'y a pas d'effets dynamiques ou de fatigue.

J'ai publié des considérations assez détaillées sur la question dans les A.T.P.B. 1924, fascicule 1, 2 et 3.

Je m'y réfère en observant cependant que les travaux du laboratoire fédéral de Zürich ont établi depuis, que, dans les limites des charges pratiques, on peut considérer une valeur moyenne de  $E_b$  uniforme pour la compression et pour la traction.

Bien que je l'ai fait observer aussi dans cette étude, il en résulte une diminution de  $c$  par rapport à la méthode ordinaire de calcul. Comme la formule de  $\sigma'_b$  est inchangée, il en résulte que les tensions tangentiels réelles sont légèrement accrues. Le règlement de l'A.B.S. prescrit, pour cette raison, que les calculs des tensions principales résultant de l'effort tranchant seront faits en tenant compte de l'extension du béton, c'est-à-dire avec des valeurs réduites de  $c$ . Mais si l'on opérât ainsi pour le calcul des barres obliques, il faudrait, logiquement porter en compte la résistance au glissement du béton, même dans la zone qui reçoit des armatures spéciales, barres obliques ou étriers.

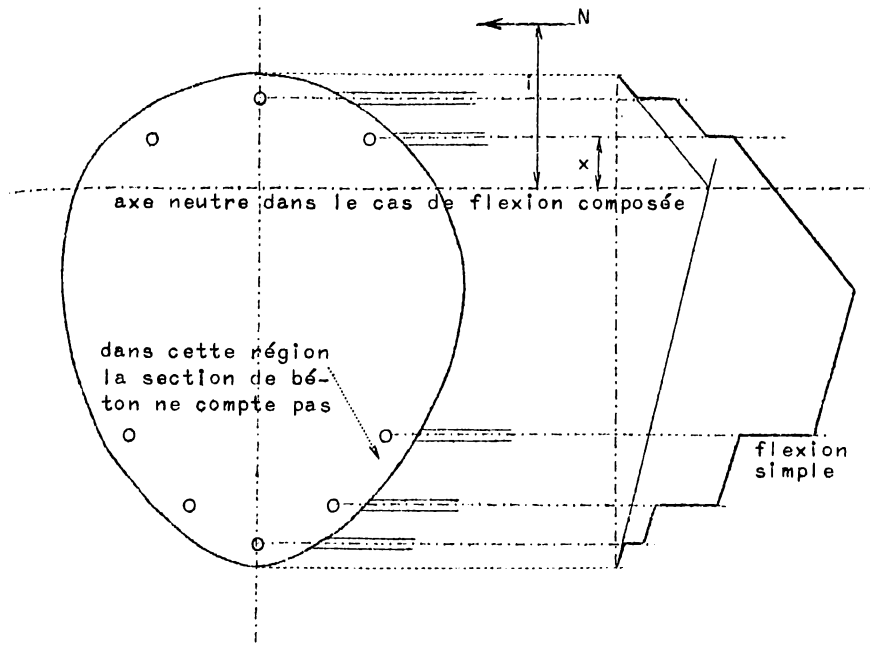
Agir autrement conduirait à un excès d'armature, qu'il serait préférable de reporter au profit de l'armature principale. Mais si l'on opérât de la sorte, les résultats obtenus ne pourraient guère différer de ceux que donne la méthode ordinaire de calcul de résistance du béton armé.

Il semble donc préférable et plus logique de s'y tenir, d'autant plus que la notion de la zone étendue n'est pas familière aux praticiens.

#### 1.- FLEXION PLANE D'UNE SECTION QUELCONQUE.

La méthode la plus simple est celle de l'intégration graphique. Considérons d'abord une section symétrique. On trace par rapport à l'axe de symétrie comme

axe des abscisses, et à partir de deux extrémités : 1°) un profil réduit, c'est-à-dire dont les épaisseurs de métal sont multipliés par  $(m - 1)$  dans la zone de compression et par  $m$  dans la zone de traction.



2°) des courbes des aires (intégrales premières), en ne tenant compte que des sections de métal dans la zone étendue.

3°) des courbes des moments statiques (intégrales secondes), sous les mêmes conditions, qu'au 2°.

Dans le cas de la flexion composée (effort  $N$  excentré) on a :

$$N = \int \sigma \cdot b \cdot dx$$

$$N_i = \int \sigma \cdot b \cdot x \cdot dx$$

$$\sigma = \frac{\sigma_{\max} \cdot x}{v}$$

$$N = \frac{\sigma_{\max}}{v} \int b \cdot x \cdot dx$$

$$N_i = \frac{\sigma_{\max}}{v} \int b \cdot x^2 \cdot dx$$

$$i = \frac{\int b \cdot x^2 \cdot dx}{\int b \cdot x \cdot dx} = \frac{I_{\text{axe neutre}}}{M_{\text{statique}} \text{ (axe neutre)}}$$

Dans le cas de flexion simple, la rencontre des 2 courbes des moments statiques détermine l'alignement de l'axe neutre. Dans le cas de flexion composée, on se base sur la propriété que la distance  $i$  du point d'action de la force normale  $N$  à l'axe neutre est égal à  $I_n / S_n$ ,  $I_n$  étant le moment d'inertie,  $S_n$  le moment statique, tous deux par rapport à l'axe neutre.

On a un diagramme de  $S_n$ , il suffit de considérer les ordonnées différentielles des deux courbes des moments statiques. Comme les moments d'inertie s'additionnent, on trace ensuite les intégrales troisièmes, mais en opposition de côté par rapport à l'axe des abscisses. Les ordonnées sommatoires donnent les valeurs de  $I$ . On détermine par tâtonnements la position de l'axe neutre telle que

$i = \frac{I_n}{S_n}$ . C'est une adaptation de la méthode du professeur Guide.

En cas de section disymétrique (poutre cornière) on peut opérer de même suivant deux directions  $\perp$  de manière à déterminer les axes principaux d'inertie. Il existe aussi des méthodes algébriques spéciales (voir Moïsch).

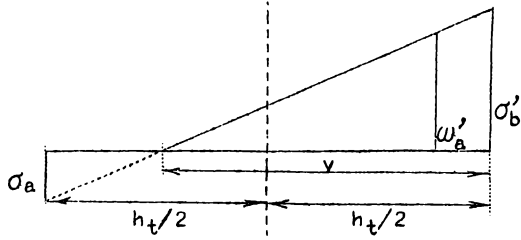
## 22.- PIECE COMPRIMEE EXCENTRIQUEMENT A ARMATURE SIMPLEMENT COMPRIMEE ET FISSURATION EVENTUELLE.

$$\delta = 1 ; \omega_a = 0 ; h = h_t ; \frac{e}{h} + \frac{\delta}{2} = \gamma = \frac{e}{h_t} + 0,5$$

$$\psi = \frac{\gamma}{e/h_t + 0,5 \gamma} = \infty$$



$$\frac{N}{b \cdot h_t \cdot \sigma'_b} \left( \frac{e}{h_t} + 0,5 \right) = \mu + \left( \frac{\kappa \cdot \varphi \cdot \theta \cdot m \cdot \omega_a}{b \cdot h_t} \right) \delta'$$



$$\frac{N \left( \frac{e}{h_t} + 0,5 \right)}{b \cdot h_t \cdot \sigma'_b} = \mu + \frac{m \cdot \omega'_a}{b \cdot h_t} \delta' \left[ 1 - (1 - \delta')(1 + \theta) \right]$$

$$v = \frac{h_t}{1 + \theta} \quad \text{Pour que } v = h_t \rightarrow \theta = 0$$

$$\text{alors } \mu = \frac{1}{3}, \quad \gamma_0 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{N \left( \frac{e}{h_t} + 0,5 \right)}{b \cdot h_t \cdot \sigma'_b} = \frac{1}{3} + \frac{m \cdot \omega'_a}{b \cdot h_t} \delta', 2$$

Cette relation n'est pas applicable lorsque  $\frac{e}{h_t} < \frac{1}{6}$ . On a aussi la relation :

$$\frac{N}{b \cdot h_t \cdot \sigma'_b} = \frac{1}{2(1 + \theta)} + \frac{m \cdot \omega'_a}{b \cdot h_t} \theta \cdot \varphi; \quad \text{lorsque } \theta = 0, \quad \frac{N}{b \cdot h_t \cdot \sigma'_b} = \frac{1}{2} + \frac{m \cdot \omega'_a}{b \cdot h_t} \delta'$$

$$\text{Donc dans ce cas : } \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \left( \frac{e}{h_t} + 0,5 \right)} = \frac{m \cdot \omega'_a}{b \cdot h_t} \delta' \left[ -1 + \frac{\delta'}{\frac{e}{h_t} + 0,5} \right]$$

$$\text{Si } \frac{e}{h_t} = \frac{1}{6}, \quad 0 = \frac{m \cdot \omega'_a}{b \cdot h_t} \delta' \left[ -1 + \frac{\delta'}{\frac{e}{h_t} + 0,5} \right] \quad \text{d'où } \omega'_a = 0, \quad \frac{N}{b \cdot h_t \cdot \sigma'_b} = 0,5$$

$$\text{Si } \frac{e}{h_t} < \frac{1}{6}, \quad \frac{m \cdot \omega'_a}{b \cdot h_t} < 0 \quad \text{ce qui est absurde } \frac{N}{b \cdot h_t \cdot \sigma'_b} < \frac{1}{2}$$

$$\text{Si } \frac{e}{h_t} > \frac{1}{6}, \quad \frac{m \cdot \omega'_a}{b \cdot h_t} > 0 \quad \frac{N}{b \cdot h_t \cdot \sigma'_b} > \frac{1}{2}$$

Il faut toutefois que  $\delta' > \frac{e}{h_t} + 0,5$  sinon  $\omega'_a$  est aussi négatif. La relation s'écrit véritablement :

$$\frac{3 \frac{e}{h_t} - 0,5}{6 \frac{e}{h_t} + 3} = \frac{m \cdot \omega'_a}{b \cdot h_t} \delta', \quad \frac{\delta' - \frac{e}{h_t} - 0,5}{\frac{e}{h_t} + 0,5}$$

Pour réaliser le taux de fatigue  $\sigma'_b$ , il faut :

$$\frac{m \cdot \omega'_a}{b \cdot h_t} \delta' = \frac{N}{b \cdot h_t \cdot \sigma'_b} - \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } \frac{3 \frac{e}{h_t} - 0,5}{6 \frac{e}{h_t} + 3} = \left[ \frac{N}{b \cdot h_t \cdot \sigma'_b} - \frac{1}{2} \right] \frac{\delta' - \frac{e}{h_t} - 0,5}{\frac{e}{h_t} + 0,5}$$

$$\frac{\delta'}{\frac{e}{h_t} + 0,5} = \frac{3 \frac{e}{h_t} - 0,5}{\left( 6 \frac{e}{h_t} + 3 \right) \left( \frac{N}{b \cdot h_t \cdot \sigma'_b} - \frac{1}{2} \right)} + 1 = \frac{\frac{N}{b \cdot h_t \cdot \sigma'_b} - \frac{1}{3 \left( \frac{e}{h_t} + 0,5 \right)}}{\frac{N}{b \cdot h_t \cdot \sigma'_b} - \frac{1}{2}}$$

MARCHE A SUIVRE.

On connaît  $b, h_t, N, e$  et  $\sigma'_b$ . On déduit  $\delta'$  de la relation ci-dessus. On en déduit ensuite  $\omega'_a$  de

$$\frac{m.\omega'_a}{b.h_t} = \frac{N}{b.h_t.\sigma'_b} - \frac{1}{2}$$

Il est évident que l'on appliquera cette théorie pour  $\theta = 0$ , section non fissurée. Si cependant  $e$  est relativement grand et  $N$  assez petit, on pourrait prendre  $\theta > 0$ . On a alors les relations suivantes :

$$\frac{N}{b.h_t.\sigma'_b} \left( \frac{e}{h_t} + 0,5 \right) = \mu + \frac{m.\omega'_a}{b.h_t} \delta' . \varphi . \theta$$

$$\frac{N}{b.h_t.\sigma'_b} = \frac{1}{2(1 + \theta)} + \frac{m.\omega'_a}{b.h_t} \varphi . \theta$$

Leur combinaison donne :

$$\frac{1}{2(1 + \theta)} - \frac{\mu}{\frac{e}{h_t} + 0,5} = \frac{m.\omega'_a}{b.h_t} \varphi . \theta \left[ \frac{\delta'}{\frac{e}{h_t} + 0,5} - 1 \right]$$

Il faut que  $\frac{e}{h_t} > 2\mu(1 + \theta) - 0,5 > \frac{1}{6}$  ;  $\frac{e}{h_t} > \gamma_0 - 0,5$

et que  $\delta' > \frac{e}{h_t} + 0,5$

Lorsque la fatigue doit être  $\sigma'_b$  il faut que

$$\frac{m.\omega'_a}{b.h_t} \varphi . \theta = \frac{N}{b.h_t.\sigma'_b} - \frac{1}{2(1 + \theta)}$$

Donc

$$\frac{\delta'}{\frac{e}{h_t} + 0,5} = \frac{\frac{1}{2(1 + \theta)} - \frac{\mu}{\frac{e}{h_t} + 0,5}}{\frac{N}{b.h_t.\sigma'_b} - \frac{1}{2(1 + \theta)}}$$

MARCHE A SUIVRE.

On connaît  $b, h_t, N, e$  et  $\sigma'_b$ . On calcule  $\frac{e}{h_t} + 0,5$ . On choisit une valeur de  $\theta$  par comparaison avec  $2\mu(1 + \theta) = \gamma_0$  qui doit être  $< \frac{e}{h_t} + 0,5$ . Plus l'écart est faible, plus l'armature sera faible.

Ayant choisi  $\theta$  on calcule  $\delta'$  par la formule ci-dessus, ensuite  $\omega'_a$  par

$$\frac{m.\omega'_a}{b.h_t} = \frac{N}{b.h_t.\sigma'_b} - \frac{1}{2(1 + \theta)}$$

Cette théorie est extrêmement importante pour les arcs en béton armé à cause de faibles excentricités. Elle économise beaucoup d'armatures, n'emploie que des barres comprimées. On sait que les barres étendues sont très mal utilisées aux faibles excentricités et que les barres comprimées sont les plus avantageuses.

Tableau des valeurs de  $\frac{1}{2(1 + \theta)}$  et de  $2\mu(1 + \theta)$  en fonction de  $\theta$

$$2\mu(1 + \theta) = \frac{2 + 3\theta}{3(1 + \theta)} = \gamma_0$$

ON PEUT OPERER COMME POUR UNE POUTRE NERVUREE.

$$\frac{N \cdot \eta \left( \frac{e}{h_t} + 0,5 \right)}{b_o \cdot h_o \cdot \sigma'_b} = M + \varphi \cdot \delta' \cdot \theta \cdot \eta \cdot \frac{m \cdot \Omega'_o}{b_o \cdot h_o}, \quad \eta = \frac{h_t}{h_o}$$

$$\frac{N}{b_o \cdot h_o \cdot \sigma'_b} = \frac{2 \eta - 1 - \theta}{2 \eta} + \frac{m \cdot \Omega'_a}{b_o \cdot h_o} \varphi \cdot \theta$$

D'où 
$$\frac{2 \eta - 1 - \theta}{2 \eta} - \frac{M}{\eta \cdot \left( \frac{e}{h_t} + 0,5 \right)} = \frac{m \cdot \Omega'_a}{b_o \cdot h_o} \varphi \cdot \theta \cdot \left[ \frac{\delta'}{\frac{e}{h_t} + 0,5} - 1 \right]$$

Il faut que :

$$\frac{e}{h_t} > \frac{2 M}{2 \eta - 1 - \theta} - 0,5 ; \quad \frac{e}{h_t} > \gamma_o - 0,5$$

D'autre part

$$\delta' > \frac{e}{h_t} + 0,5 ; \quad \frac{m \cdot \Omega'_a}{b_o \cdot h_o} = \frac{\frac{N}{b_o \cdot h_o \cdot \sigma'_b} - \frac{2 \eta - 1 - \theta}{2 \eta}}{\varphi \cdot \theta}$$

La marche à suivre est la même que pour une section rectangulaire. On peut aussi faire  $\theta = 0$ . Alors

$$M = \eta - 1 + \frac{1}{3 \eta} ; \quad \gamma_o = \frac{2(\eta - 1 + \frac{1}{3 \eta})}{2 \eta - 1} \quad \text{et} \quad \varphi \cdot \theta = \delta'$$

Lorsque l'excentricité devient assez grande et que notamment  $\frac{e}{h_t} + 0,5 > \delta'$  il faut nécessairement une armature étendue en même temps qu'une armature comprimée. On opérera comme suit : on a

$$\frac{N \left( \frac{e}{h} + \frac{\delta}{2} \right)}{b \cdot h \cdot \sigma'_b} = \mu + \kappa \cdot \varphi \cdot \theta \cdot \delta' \cdot \frac{\lambda}{1 - \kappa \varphi + \Psi}$$

On déterminera

$$\frac{N \left( \frac{e}{h} + \frac{\delta}{2} \right)}{b \cdot h \cdot \sigma'_b}$$

et on choisira  $\mu$  plus petit mais assez voisin, ce qui détermine  $\theta$  et  $\sigma'_a$  puisque  $\sigma'_b$  est imposé. Il faut naturellement que  $\sigma_a = \theta \cdot m \cdot \sigma'_b < R_a$

Ayant  $\theta$ , on connaît  $\gamma_o$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  ainsi que  $\varphi(\delta'$  étant connu). On a

$$\frac{N \left( \frac{e}{h} + \frac{\delta}{2} \right)}{b \cdot h \cdot \sigma'_b} = \mu + \kappa \cdot \varphi \cdot \theta \cdot \delta' \cdot \frac{\lambda}{1 - \kappa \varphi + \Psi}$$

$$\Psi = \frac{\gamma}{\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2} - \gamma} \quad \text{et} \quad \gamma = \gamma_o + \frac{\kappa \cdot \varphi (\delta' - \gamma_o)}{1 + \Psi} = \gamma_o + \frac{\kappa \cdot \varphi (\delta' - \gamma_o)}{\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2}} \left( \frac{e}{h} + \frac{\delta}{2} - \gamma \right)$$

$$\gamma \left( 1 + \kappa \cdot \varphi \cdot \frac{\delta' - \gamma_o}{\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2}} \right) = \gamma_o + \kappa \cdot \varphi \cdot (\delta' - \gamma_o)$$

$$\gamma = \gamma_o \frac{1 + \kappa \cdot \varphi \frac{\delta' - \gamma_o}{\gamma_o}}{1 + \kappa \cdot \varphi \frac{\delta' - \gamma_o}{\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2}}} \quad \text{d'où} \quad 1 + \Psi = \frac{\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2}}{\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2} - \gamma_o \frac{1 + \kappa \cdot \varphi \frac{\delta' - \gamma_o}{\gamma_o}}{1 + \kappa \cdot \varphi \frac{\delta' - \gamma_o}{\frac{e}{h} + \frac{\delta}{2}}}}$$

$$1 + \psi = \frac{\frac{e}{h} + \frac{\delta}{z} + \kappa \cdot \varphi \cdot (\delta' - \gamma_0)}{\frac{e}{h} + \frac{\delta}{z} - \gamma_0}$$

En général  $\frac{e}{h} + \frac{\delta}{z} > \gamma_0$ . Donc

$$\frac{N \left( \frac{e}{h} + \frac{\delta}{z} \right)}{b \cdot h \cdot \sigma'_b} = \mu + \kappa \cdot \varphi \cdot \theta \cdot \delta' \cdot \frac{\lambda}{\frac{\frac{e}{h} + \frac{\delta}{z} + \kappa \cdot \varphi \cdot (\delta' - \gamma_0)}{\frac{e}{h} + \frac{\delta}{z} - \gamma_0} - \kappa \cdot \varphi}$$

$$\left[ \frac{N \left( \frac{e}{h} + \frac{\delta}{z} \right)}{b \cdot h \cdot \sigma'_b} - \mu \right] \left[ \frac{e}{h} + \frac{\delta}{z} + \kappa \cdot \varphi \cdot (\delta' - \frac{e}{h} - \frac{\delta}{z}) \right] = \kappa \cdot \varphi \cdot \theta \cdot \delta' \cdot \lambda \left( \frac{e}{h} + \frac{\delta}{z} - \gamma_0 \right)$$

C'est une équation du 1er degré en  $\kappa$  que l'on écrira numériquement sans difficultés grâce aux tables. On peut d'ailleurs agir sur  $\kappa$  dans une certaine mesure par  $\delta$  et  $\delta'$ , ce dernier élément influe sur  $\varphi$ .

On peut opérer tout à fait de même pour la poutre nervurée, la marche est identique et les formules peu différentes. Le minimum de  $(1 + \kappa) u_b$  dans le cas de faibles excentricités s'obtient par tâtonnements, ou par différentiation ou par la valeur approximative de  $\theta$  correspondant au minimum (voir calcul économique).

### CHAPITRE III.

=====

#### PRINCIPES GENERAUX DU CALCUL DES PONTS EN BETON ARME.

1. CHARGES MORTES. - Le poids mort des ponts en béton armé est généralement plus élevé que celui des ouvrages métalliques de même portée, ce qui est un avantage pour les petits ouvrages, au point de vue des effets de fatigue dus aux surcharges et aux actions dynamiques.

Cela limite évidemment les portées, tant au point de vue technique qu'économique. Cependant, on construit actuellement des arcs en béton armé de près de 200 m. de portée. En mauvais terrain, le poids mort élevé semble devoir procurer des difficultés supplémentaires de fondation. Mais, le béton armé se prête très bien à la confection de fondations larges ou évidées, donc légères. En outre, grâce aux armatures, le béton armé est moins sensible aux tassements que la maçonnerie ordinaire. Néanmoins, il faut adopter des dispositions d'appui telles qu'elles soient aussi inébranlables que possible.

Le poids spécifique moyen est 2400 Kgs/m<sup>3</sup>., éventuellement 2500, pour du béton très riche et fortement armé.

En plus du poids mort de la construction en béton armé, il faut compter le poids de la voie, qui dépend de son épaisseur. Celle-ci doit être choisie en rapport avec l'importance des charges mobiles. Dans les ponts à faible portée, la majoration de surcharge pour tenir compte des effets dynamiques est d'autant plus faible que le poids mort est plus grand.

D'autre part, la voie assure une répartition d'autant plus étendue des charges mobiles qu'elle est plus épaisse. De la sorte elle influe directement sur l'épaisseur du dallage.

### ACTION REPARTITRICE DE LA VOIE.

Les charges circulant sur la voie agissent à la surface, suivant une aire de petites dimensions; surface d'empreinte d'un bandage élastique, surface d'assise des travaux de chemin de fer, etc. Dans l'épaisseur de la voie, cette aire d'action s'épanouit suivant la profondeur. La théorie et l'expérience montrent que, à une profondeur quelconque sous la surface plane, les pressions varient en décroissant d'après la distance à l'axe de la charge; elles s'annulent assez rapidement lorsque cette distance croît. La loi de la répartition dépend de l'étendue et de la forme de la surface d'appui de la charge. Ainsi qu'il a été indiqué dans le cours de fondation, on admet usuellement pour un sol dur, que la totalité de la charge est comprise dans le cône dont les génératrices sont inclinées à  $45^\circ$ . Cela est assez approximativement vrai; mais la pression n'est pas uniforme; elle est maximum à l'aplomb de la zone chargée et décroît vers l'extérieur. Donc l'hypothèse de la répartition uniforme dans l'étendue délimitée par les talus à  $45^\circ$  est trop favorable pour le calcul des dalles. Mais c'est celle que prescrivent les règlements, par exemple, le règlement allemand, dont celui de l'A.B.S. s'est inspiré entièrement.

Ce dernier règlement stipule notamment que :

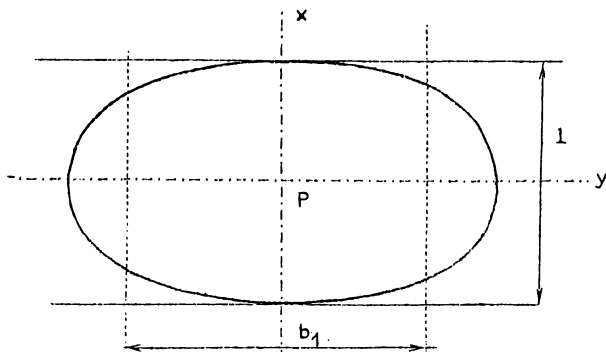
1°) Pour les dalles ne portant que dans un sens, la largeur de répartition d'une charge  $P$  dans le sens de la portée est  $a_1 = a + 2h_t$ ; dans le sens perpendiculaire  $b_1 = b + 2h_t + 1/3$ ;  $l$  est la portée,  $a$  et  $b$  sont les dimensions de la surface d'appui de la charge totale  $P$ ,  $h_t$  est l'épaisseur totale de la voie et du hourdis. Donc, à la surface la charge agit suivant l'aire  $ab$ , à la face intérieure du hourdis suivant l'aire  $a_1b_1$ .

Toutefois, il faut que  $a_1 < l$  et  $b_1 < l$ .

2°) Pour une DALLE CARREE portant suivant les 4 bords et chargée au centre suivant une section corréée  $a^2$ , on envisage une charge  $P/2$  pour chaque sens de flexion et on écrit :

dans le sens de flexion  $a_1 = a + 2h_t < l$   
 dans le sens perpendiculaire  $b_1 = a + 2h_t + \frac{1}{2,5} < l$

S'il y a en outre une épaisseur de remblai  $h$ , on ajoute  $h$  à chacune des dimensions  $a_1$  et  $b_1$ .



Voici comment on justifie cette intervention de  $1$  dans la formule de  $b_1$ . Sous l'effet d'une charge isolée  $P$ , une dalle de grande longueur et appuyée suivant 2 bords de portée  $l$ , fléchit également dans le sens de la largeur. Les limites de la partie fléchie sont des courbes tangentes aux bords suivant leur normale passant par  $P$ . Nous substituons à ces courbes des  $\perp$  aux bords, situées à égales distances de  $P$  et écartées de  $b_1$ . Nous envisageons donc une plaque de dimensions  $b_1$  et  $l$ , appuyée aux 4 bords. Elle fléchit dans les 2 sens. Admettons

que l'effort agissant pour fléchir la dalle dans les sens des  $x$  soit  $P_1$ , soit  $P_2$  dans le sens des  $y$ .

$$P_1 + P_2 = P$$

La charge étant au centre, la flèche en ce point est

$$\eta = \frac{P_1 l^3}{4 b_1 e^3 E} = \frac{P_2 b_1^3}{4 l e^3 E}$$

dans l'hypothèse du simple appui (armature simple dans les 2 sens).

Donc :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{b_1^4}{l^4} \quad \text{et} \quad P_1 = P \frac{b_1^4}{l^4 + b_1^4}, \quad P_2 = P \frac{l^4}{l^4 + b_1^4}$$

Cette répartition varie suivant la valeur de  $b_1$ , mais l'hypothèse la plus satisfaisante est évidemment :

$$P_1 = P_2 \quad \text{et} \quad b_1 = l$$

La conclusion est la même si l'armature est double dans les 2 sens (double encastrement) :

S'il y a encastrement suivant les bords et armature simple parallèle au bords, on a :

$$\eta = \frac{P_1 l^3}{16 b_1 e^3 E} = \frac{P_2 b_1^3}{4 l e^3 E} \quad \text{d'où} \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{4 b_1^4}{l^4} \quad \text{et} \quad P_1 = P \frac{4 b_1^4}{4 b_1^4 + l^4}, \quad P_2 = P \frac{l^4}{4 b_1^4 + l^4}$$

Pour assurer l'égalité des charges (et des fatigues également ainsi qu'on peut s'en assurer) il faut

$$b_1 = \frac{l}{\sqrt{2}} = 0,71 l.$$

Si l'on tient compte de la surface d'application de la charge et de l'action répartitrice du revêtement, on voit que, pour 1 charge centrale, on peut admettre  $b_1 < l$ .

Mais il faut pour cela envisager la charge au milieu. Si elle se rapproche d'un des appuis, on voit que  $b_1$  diminue et doit d'ailleurs être nul au droit de l'appui, si l'on envisage aucune action répartitrice (voir Génie Civil janvier 1928, étude de M. Chaudy). Mais en fait cela ne justifie pas que  $l$  intervienne dans la largeur de la répartition transversale; cela définit simplement la largeur de plaque fléchie à prendre en considération sous l'effet d'une charge concentrée.

Pour les dalles appuyées aux 4 bords, la justification est plus contestable, car on voit que, à la limite  $a_1 = b_1 = b$  ce qui revient à confondre les effets de la charge centrale localisée avec ceux de la même charge uniformément répartie.

Soient  $h_b$  l'épaisseur du hourdis, le poids correspondant est  $2400 h_b \text{ Kg/m}^2$ .  
Soient  $h_v$  l'épaisseur de la voie, le poids correspondant est  $2000 h_v \text{ Kg/m}^2$ .

Donc  $h_t = h_b + h_v$

La surcharge est donc :

$$\frac{P}{a_1 b_1} = \frac{P}{(a + 2 h_t)(b + 2 h_t + l/3)}$$

dans le cas le plus général.

La charge totale pour le calcul du hourdis est donc :

$$2400 h_b + 2000 h_v + \frac{P}{(a + 2 h_t)(b + 2 h_t + l/3)}$$

formule dans laquelle il faut éventuellement substituer à  $a_1$  et  $b_1$  leur limite commune  $l$ .

Ces expressions sont susceptibles de minima. Pour simplifier on poserait par exemple  $h_b = 0,07$  ou  $0,08$  et l'on dériverait par rapport à  $h_v$ . On obtiendrait ainsi les valeurs les plus favorables de  $h_t$  au point de vue du calcul du tablier en béton armé, dont l'épaisseur est surtout conditionnée par les surcharges. Les nouveaux règlements belges et français (A.T.P.B. août 1926 et A.P.C. septembre-octobre 1927) fixent  $P_{max} = 6000$  Kg.  $a = 0$  et  $b = 0,30$  m. pour les ponts-routes. Pour ces valeurs, les valeurs de  $h_t$  donnant le minimum de charge répartie sont de l'ordre de  $0,80$  m. pour les portées usuelles de dalles. Elles dépassent sensiblement les dimensions usuelles et donneraient lieu à une augmentation inadmissible du poids mort total, qui entraînerait un renforcement et une forte dépense supplémentaire pour les pièces de pont, les poutres principales et les appuis. Elles se rapprochent plus des épaisseurs des tabliers et voies de pont-rails. Au point de vue du poids mort, on aura donc intérêt, pour les grandes portées et les fortes charges, à augmenter l'épaisseur du béton et à réduire celle de la voie des ponts-routes qui comportera, par exemple, une simple couche d'asphalte dur de  $5$  cm.

Pour le calcul des pièces de pont et poutres principales, l'influence de la répartition n'est pas à considérer, sauf pour les petites portées et dans le cas où l'écartement de ces éléments est très faible.

Au point de vue des éléments à faible portée du tablier, notamment au point de vue des effets dynamiques, il y a intérêt à ne pas trop restreindre l'épaisseur de la voie en rapport avec les charges. Cependant, au point de vue économique, le prix d'une chaussée épaisse peut être supérieur à celui du supplément d'épaisseur de hourdis qu'exigerait un revêtement mince. On ne dépassera pas les épaisseurs de revêtements de chaussées indiquées dans le cours de ponts en maçonnerie et l'on envisagera moins, de préférence.

Pour les voies ferrées, on conservera l'épaisseur courante de ballast, soit au minimum,  $20$  cm. sous les traverses, éventuellement davantage pour réduire les effets dynamiques. Il faut observer cependant que la chape et la contrechape augmentent l'épaisseur totale du tablier de la voie.

## 5. SURCHARGES MOBILES.

Sauf prescriptions exceptionnelles, les surcharges qu'il convient d'envisager pour le calcul sont fixées par les règlements. Citons les Instructions relatives aux ponts-routes en Belgique (A.T.P.B. août 1926) et le nouveau règlement français des ponts métalliques (A.P.C. sept. oct. 1927).

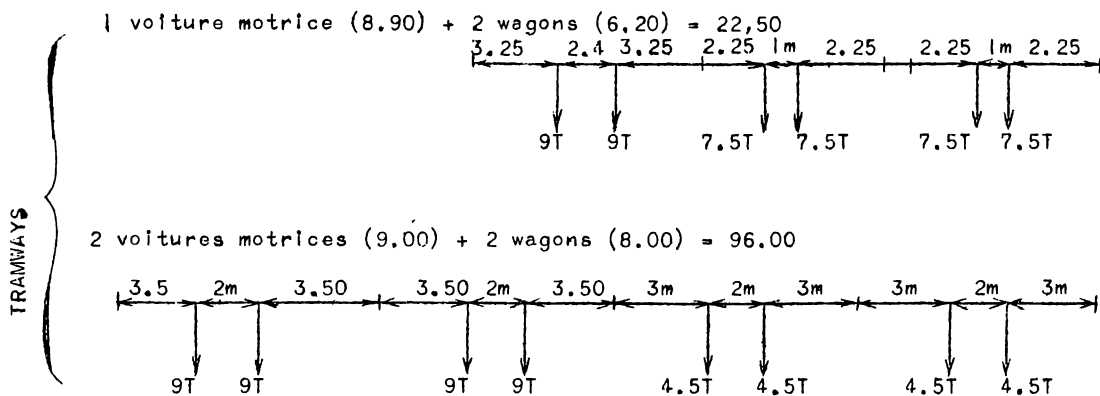
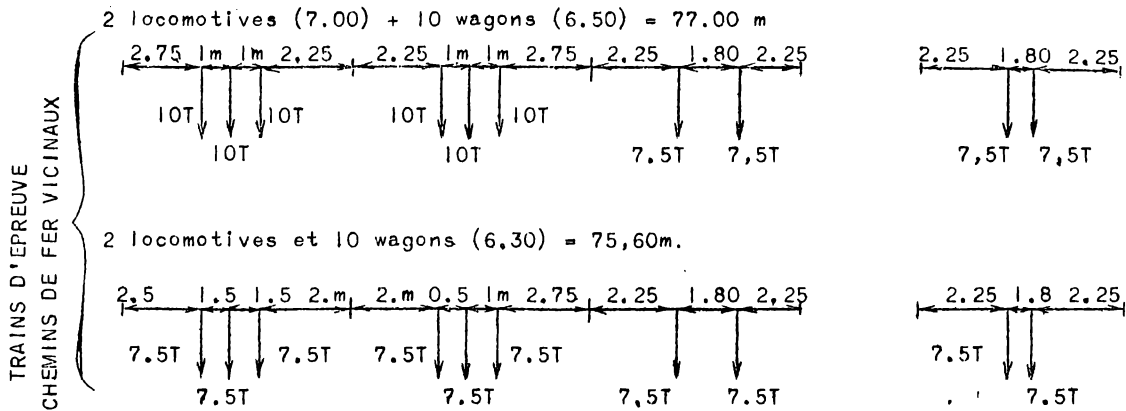
Le dernier règlement prescrit, pour les ponts de chemin de fer à voie normale, des locomotives de  $100$  tonnes, à  $5$  essieux de  $20$  tonnes, distants de  $1,50$  m. Pour la voie de  $1,00$  m. les locomotives ont  $5$  essieux de  $10$  tonnes distants de  $1,50$  m.

Pour les voies ferrées de  $1,00$  m. (chemin de fer vicinaux), le règlement belge prévoit deux trains d'épreuve différents, représentés ci-dessous. Pour les tramways électriques, il fixe également deux trains différents.

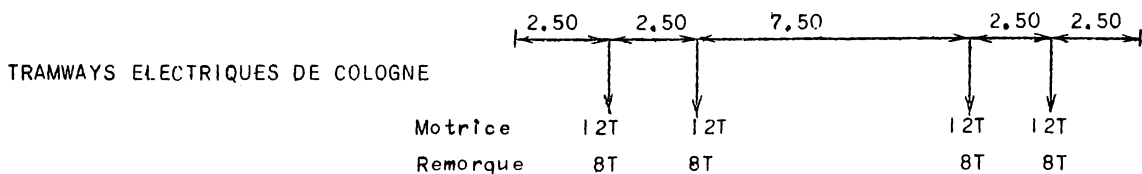
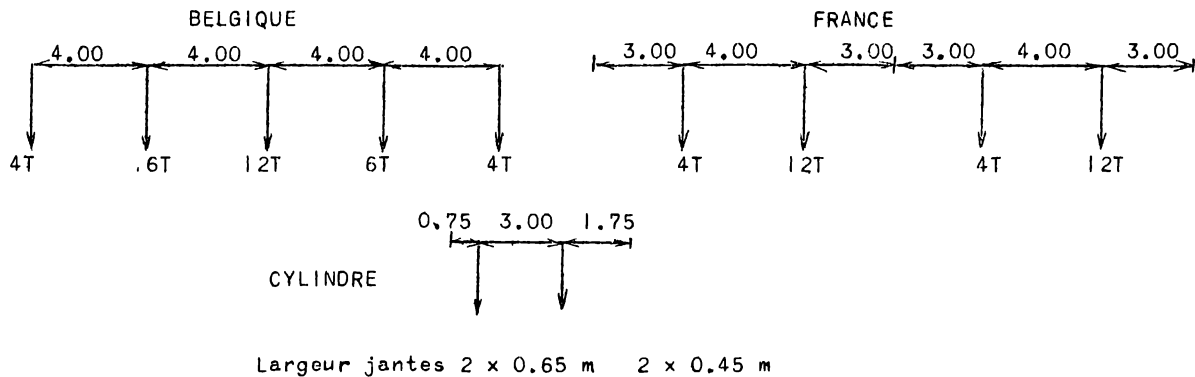
Pour les véhicules routiers, il envisage un convoi de  $5$  essieux, du poids total de  $32$  tonnes ayant  $16,00$  m. de longueur totale.

La répartition des forces dans le train peut être quelconque.

Le train français comporte  $4$  essieux du poids total de  $32$  tonnes et de  $14$  m. de longueur, il est spécifiquement plus lourd que le train belge. Dans les  $2$  cas la largeur d'encombrement est  $2,50$ , la voie des roues entre axes est de  $1,70$  et



TRAINS ROUTIERS D'EPREUVE





largeur des jantes 0,30. On suppose autant des trains côte à côte qu'il y a de voies charretières.

Les cylindres peuvent éventuellement constituer des charges défavorables, et celui qui est schématisé ci-dessus. Il serait toutefois excessif de considérer plusieurs cylindres en ligne ou à la file.

Exceptionnellement, on considère des surcharges très supérieures. C'est ainsi que dans les grands centres industriels et maritimes anglais, on prescrit un chariot de 120 tonnes traîné par 5 tracteurs de 15 tonnes (5 tonnes avant, 10 tonnes arrière) voir Concrete, janvier 1928.

Les tramways électriques peuvent éventuellement avoir des poids supérieurs à ceux indiqués ci-dessus, par exemple les grands tramways de Cologne (voir ci-dessus).

Le règlement belge envisage comme surcharge de foule 400 Kgs/m<sup>2</sup> pour les ponts routes. Le règlement français prescrit une surcharge uniforme divisible sur la chaussée égale à :  $p = 820 - 4 L$  Kgs/m<sup>2</sup>, L étant la portée en m. La limite est :  $p = 500$  Kgs/m<sup>2</sup> si  $L > 80$  m.

Pour les trottoirs, c'est 400 Kgs/m<sup>2</sup>. Selon le règlement français, les surcharges occupent les positions les plus défavorables pour la sollicitation des éléments considérés. Pour les ponts-routes, on peut diviser les surcharges. Pour les ponts de chemin de fer, on ne divise pas, mais on suppose des wagons intercaisés, pesant 1250 Kgs.m. pour la voie normale, 750 Kgs/m pour la voie de 1.00 m.

Pour tenir compte des effets dynamiques, selon le règlement français, on majora les effets des surcharges en les multipliant par le coefficient :

$$1 + \alpha + \beta = 1 + \frac{0,4}{1 + 0,2 L} + \frac{0,6}{1 + 4 P/S} < 2$$

étant la portée en m. de l'élément considéré (longrine, entretoise, longeron).  $P$  le total des charges permanentes et  $S$  le poids maximum de surcharge.

Le règlement belge prescrit pour les ponts-routes un coefficient de majoration uniforme de 1,50.

#### CHARGES SECONDAIRES.

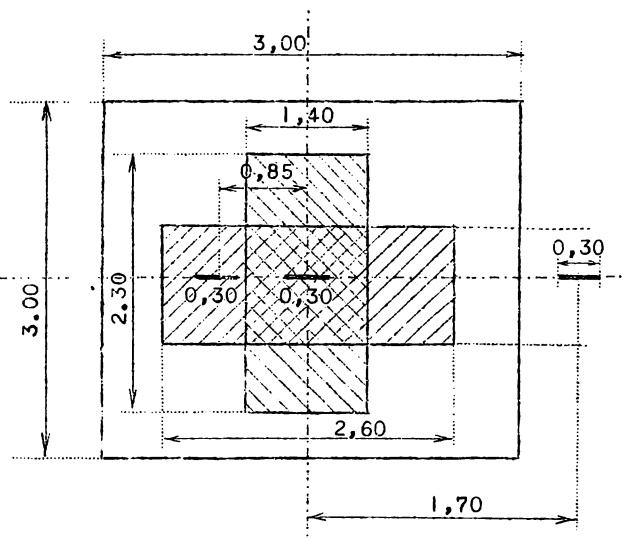
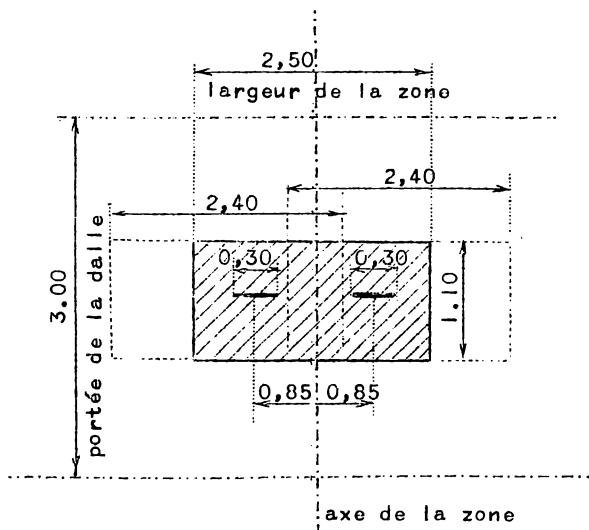
Le règlement français et le règlement belge admettent une force de vent de 150 Kgs/m<sup>2</sup> lorsqu'il n'y a pas de surcharge sur le pont. Pour les ponts-routes, le règlement français n'envisage pas de surcharge. Pour les ponts de chemin de fer, il prévoit la circulation d'un train de wagons vides, pesant 1250 Kgs/mcart. formant un écran de 3.00 m. de hauteur à partir de 0,50 au-dessus du rail.

La pression du vent est réduite à 150 Kgs/m<sup>2</sup> pour la voie normale et à 100 Kgs/m<sup>2</sup> pour la voie étroite. Le règlement belge prévoit 150 Kgs/m<sup>2</sup> dans les deux cas.

Le calcul de la pression du vent sur les diverses surfaces se fait suivant le procédé du règlement français, exposé dans le cours de ponts en maçonnerie.

L'effort du vent sur les véhicules ne donne pas seulement lieu à une charge horizontale transmise au tablier, mais elle modifie la répartition verticale des surcharges entre deux roues d'un même essieu. Les longerons du côté opposé au vent soufflant d'un côté ou de l'autre, cela revient à majorer les surcharges molles pour chaque longeron.

Le règlement belge prévoit pour les ponts-routes une surcharge de neige de



30 Kgs/m<sup>2</sup>. - Le règlement belge des ponts métalliques stipule que la température peut varier de -25° à +45°. Cette variation est considérable. Il semble que l'on peut se borner pour les ponts en béton armé, à envisager une variation de  $\pm 25^\circ$  par rapport à la température moyenne de pose et même moins, si l'ouvrage est dans un emplacement protégé ou couvert de remblai. On envisage éventuellement une différence de température de 10° entre les 2 membrures.

Pour ce qui est du retrait, l'A.B.S. prescrit d'en tenir compte par une variation fictive de température de 20°, réduite à 10° si l'on bétonne par sections. Cette méthode est la plus généralement considérée, mais est contestable, car si le béton contient une armature suffisante, le retrait ne se manifeste pas seulement par un raccourcissement, mais par des tensions internes que l'on peut calculer ainsi qu'il a été indiqué. D'autre part, le retrait dépend de l'importance de l'armature et n'est pas uniforme, surtout si l'armature n'est pas symétrique.

Pour les ponts-routes, l'effort horizontal de la foule sur les garde-corps est évalué à 100 ou 150 Kgs/mcrt. Une action assez importante, et souvent négligée, est celle du freinage. Le coefficient d'adhérence maximum moyen est de 0.60 pour les routes, pour les voies ferrées 0,15.

#### CALCUL DU TABLIER.

La première opération consiste à définir les zones ou voies de circulation, c'est-à-dire leurs axes et leurs largeurs.

Pour une voie normale de chemin de fer, on compte 4.00 ou 4.50 m., pour une voie de tramway 3.00 et pour une voie charretière 2.50 m. Les axes des voies ferrées sont naturellement fixés, mais ceux des voies charretières peuvent se déplacer de manière à envisager la sollicitation la plus défavorable possible des éléments du tablier. Il y a toutefois lieu d'envisager que le monolithisme des tabliers en béton armé donne lieu à la répartition des efforts et que la disposition la plus rationnelle est celle qui fatigue également et au maximum les éléments du tablier. LES VOIES CHARRETIÈRES PEUVENT, d'après le règlement belge, EMPIETER DE 0.25 SUR LES TROTTOIRS. Donc, si  $l$  est la largeur de la chaussée, le nombre de voies charretières est :

$$n = \frac{l + 0,50}{2,50}$$

On détermine ensuite les positions des charges des trains par rapport aux axes des zones et en indiquant les surfaces de contact. Pour les voies de chemin de fer on doit donc considérer la largeur, la longueur et l'entredistance des traverses (longueur 2.50, largeur 0.20, entredistance 0,70 à 0,75 pour les voies normales; la longueur est 1.80, la largeur 0.20 et l'espacement 0.30 pour les tramways). Connaissant l'épaisseur de la voie et du hourdis et la portée du hourdis, on peut, d'après les règles exposées, déterminer les surfaces de répartition.

Par exemple, soit un essieu de 12 t.

$$a = 0, \quad b = 0,30, \quad h_t = 0,55, \quad l = 3.00 \quad (\text{portée du hourdis})$$

Il en résulte que  $a_1 = 1,10$ ,  $b_1 = 2,40$

En largeur, les zones de répartition se recouvrent et débordent sur les zones de circulation voisines. Comme toutes les zones peuvent être chargées, on considérera une bande uniformément chargée de  $1.10 \times 2.50 = 2,75 \text{ m}^2$  à quoi correspond une pression de 4360 Kgs/m<sup>2</sup> en supposant les zones voisines chargées de même. Le moment fléchissant est maximum lorsque la charge est au milieu de la portée.

Si la plaque est un carré de 3 x 3 m., la situation la plus défavorable

est celle d'une roue au centre. - Dans un sens, on aura un rectangle de 1,10 x 2,60, contenant une charge  $P/2 = 3000$  Kgs. ou 1050 Kgs/m<sup>2</sup>.

Dans l'autre sens, le rectangle mesure 1,40 x 2,30, la même charge donne une pression de 930 Kgs/m<sup>2</sup>.

Etant donné le caractère assez arbitraire de cette répartition, on simplifie le calcul et on tient compte des charges voisines en supposant les deux zones de charge suivantes : l'une 1,10 x 3,00 chargée de 3465 Kgs. (soit 1050 Kgs/m<sup>2</sup>.) l'autre de 1,40 x 3,00, chargée de 4,20 x 930 = 3910 Kgs. La charge totale répartie est donc 7375 Kgs. au lieu d'une charge concentrée de 6000.

On simplifie encore davantage, sans aggraver beaucoup la sollicitation, en considérant la dalle comme complètement surchargée de 1050 + 930 = 1980 Kgs/m<sup>2</sup>, ce qui correspond à plus de 17 tonnes par dalle, ce qui correspond à un essieu de 12 tonnes et un essieu de 6 tonnes sur la dalle. Ces considérations ne sont plus valables et sensiblement modifiées lorsque l'épaisseur du tablier est faible.

On est sûr de la sorte que l'essieu de 12 tonnes peut occuper une position quelconque sur la dalle. Les dimensions calculées de la sorte sont tout à fait ordinaire, tout en donnant de grandes garanties de sécurité. Les données précédentes ne tiennent pas compte des coefficients de majoration dynamiques.

Considérons une voie de chemin de fer, soit 0,50 l'épaisseur  $h_t$  totale et  $l = 3,00$  la portée du hourdis. La largeur de la zone est 4,50 m. La surface de répartition sous une traverse chargée est

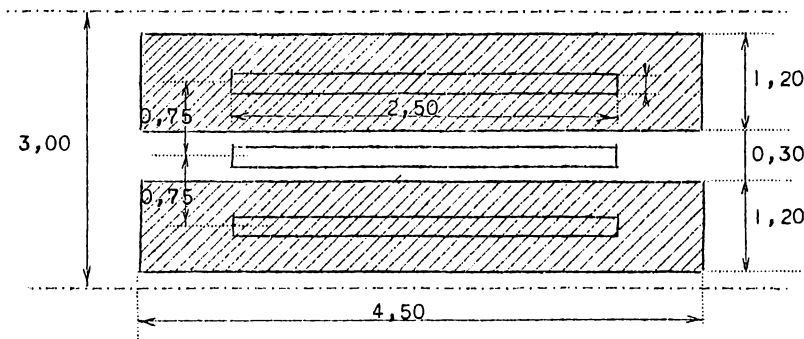
$$a_1 (= 1,20) \times b_1 (= 4,50)$$

Pour 1 essieu de 20 tonnes, la charge par m<sup>2</sup>. est :

$$\frac{20.000}{5,40} = 3700 \text{ Kgs/m}^2.$$

pour un essieu de 22 t., elle est 4070 Kgs/m<sup>2</sup>.

On voit qu'on peut donc considérer le tablier comme portant une surcharge uniforme complète dans toute l'étendue de la zone. Cette charge serait la même en cas de dalle doublement armée.



Pour l'essieu du camion automobile de 12 tonnes, la surcharge uniforme fictive pour le calcul d'un hourdis simple est plus forte que pour l'essieu le plus lourd de locomotive, seulement dans le premier cas elle est partielle, tandis que dans le second elle est complète. On peut néanmoins estimer que la limite de largeur de zone de 2,50 est trop faible, surtout si l'on tient compte de l'application d'un coefficient de majoration dynamique sévère, qui implique une circulation à grande vitesse, dont la sécurité exige de grandes aisances.

Il serait plus raisonnable d'envisager une largeur de zone de 3,00 m. ce qui réduirait la surcharge pour le calcul des dalles à 3640 Kgs/m<sup>2</sup>., à peu près la même que celle relative à l'essieu de locomotive de 20 tonnes. Lorsque pour une dalle doublement armée l'on peut substituer à l'essieu de 12 tonnes une surcharge uniforme fictive complète, elle est de l'ordre de 2000 Kgs/m<sup>2</sup>., moitié moindre à peu près que celle de ponts-rails.

Le tablier est formé d'une dalle épaisse en béton armé, armée dans un sens ou deux. Nous avons vu que, dans la première hypothèse, les charges pour le calcul de la dalle sont énormes; il faut donc la nervurer si la portée est quelque peu grande. Le meilleur dispositif, surtout pour les ponts routes, notamment au point de vue de la réduction du poids mort revient donc à constituer un quadrillage de nervures coordonnées réalisant des dalles autant que possible carrées et armées dans les 2 sens. L'écartement moyen convenable peut être de 2.50 m. à 3.00 pour les fortes charges, éventuellement plus pour les faibles charges. Les moindres portées augmentent le coefficient de majoration dynamique, compliquent le coffrage et entraînent d'autres augmentations relatives de prix.

Il arrive que l'écartement des nervures formant longrines ou traverses descende à la  $\frac{1}{2}$  de leur portée.

On peut encore dans cette disposition, considérer les dalles comme appuyées sur leur pourtour, l'une des dimensions étant double de l'autre. L'armature dans le sens de la plus grande dimension est environ 4 fois moindre que l'autre, donc une armature de répartition suffit. Il faut bien entendu, additionner dans ces conditions les fatigues du béton provenant de la flexion de la dalle et de la flexion du hourdis nervuré.

Il faut toutefois, dans cette addition, considérer les tensions telles qu'elles se présentent réellement, compte tenu de la largeur des dalles que l'on est autorisé à prendre en compte pour la largeur des ailes des poutres nervurées et seulement dans les régions où ces ailes sont comprimées (c'est-à-dire les poutres centrales, des traverses et longrines).

Pour les faibles écartements des longrines et traverses généralement employés, les largeurs de dalles à porter en compte avec les nervures sont faibles et les tensions de flexion de dalles à retrancher sont faibles aussi.

Enfin, on peut avoir des dalles simples, de portée généralement voisine de 1,5 à 2 m. principalement lorsque le tablier repose sur de multiples longerons sous voie. Cette forme très simple convient bien pour les petites portées et même pour les arcs de moyenne portée.

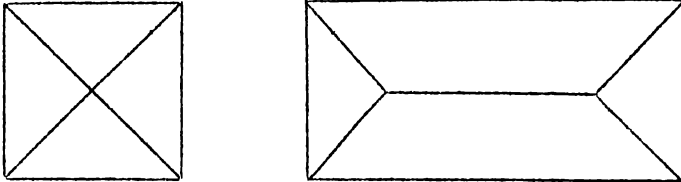
Le choix de la disposition du tablier dépend des cas d'espèce. Il doit surtout résulter de la disposition des zones de circulation et bien s'y adapter de manière à avoir une sollicitation aussi uniforme que possible de tous les éléments.

Les dalles se calculent par les formules appropriées (voir plus loin) sous l'effet de la surcharge la plus défavorable, disposée comme il a été indiqué ci-dessus.

VU LES DIMENSIONS USUELLES, IL EST GÉNÉRALEMENT AVANTAGEUX D'ENVISAGER UNE SURCHARGE UNIFORME FICTIVE CORRESPONDANTE, COMME IL A ÉTÉ MONTRE. IL FAUT, BIEN ENTENDU, TENIR COMPTE DE LA CONTINUITÉ ET DES ENCASTREMENTS, NOTAMMENT POUR LA DISPOSITION DES ARMATURES. CÉPENDANT, PAR SUITE DE LA FLEXIBILITÉ DES APPUIS (NERVURES), ON AUGMENTERA LÉGEREMENT LES MOMENTS AU MILIEU DES POUTRES, PAR EXEMPLE EN LES SUPPOSANT ÉGAUX À CEUX DES APPUIS.

Pour les nervures formant longrines, on envisage la surcharge la plus défavorable d'une ou des zones contigües. Pour les entretoises, l'hypothèse la plus défavorable correspond évidemment aux essieux maxima situés dans leur aplomb.

Il est à remarquer toutefois que la continuité des éléments du tablier intervient grandement dans la répartition des charges. En ce qui concerne les longrines, l'effet maximum est certainement réalisé lorsque toute la largeur du tablier est



oids de ces essieux. Par suite de la continuité, ce poids influence 5 à 7 traverses voisines. On admet parfois par simplification que la traverse chargée prend a moitié et les deux voisines chacune  $1/4$ ; mais cette répartition dépend des rigidités relatives.

Pour les réactions d'appui des dalles sur les nervures sous l'effet des poids morts et surcharges uniformes, on ne doit pas tenir compte de la continuité. Les dalles fléchies dans un sens reportent la moitié de leur charge sur chaque bord.

Pour les dalles carrées, on peut admettre avec M. Mesnager, que chaque bord reçoit la charge du  $1/4$  contigu délimité par les diagonales. Pour les dalles rectangulaires, une division analogue est obtenue par les bissectrices et la médiane ajeure.

Par suite de la continuité, pour les nervures, il faut tenir compte du changement possible du signe des moments aux appuis, en cas de charge incomplète.

Rigoureusement, il faudrait tenir compte de la déformabilité des appuis dans le calcul. Les observations faites sur des ponts à longerons multiples montrent l'effet de la continuité transversale, mais il décroît rapidement de part et d'autre des longerons chargés.

On peut donc se borner à envisager, pour les traverses un petit nombre d'appuis, supposés également élastiques.

Il y a un grand intérêt, pour alléger les tabliers d'employer les traverses vidées, à treillis triangulés ou Vierendeel.

### ROTTOIRS.

Les trottoirs des tabliers supérieurs s'établissent entre un longeron de rive et un longeron principal, ou bien sur encorbellements, dans les ponts n'ayant que deux ou peu de maîtresses poutres. Ceux des tabliers inférieurs s'établissent à l'intérieur des maîtresses poutres en garde-corps, ou bien en encorbellement. Dans la première disposition, il est recommandable d'établir les poutres à un écartement tel que, compte tenu des



charges de trottoirs, le longeron principal extrême soit à peu près aussi chargé que les intermédiaires. Le longeron extérieur sous trottoir l'est généralement moins. Pour le charger autant que les autres, il faudrait disposer le trottoir en encorbellement.

L'encorbellement est favorable pour les ponts à entretoises de grande portée;

chargée.

L'effet des charges isolées est en général peu intéressant lorsque toute la largeur du tablier est chargée, si cette charge est bien uniformisée les longrines extrêmes porteront autant que les autres. En ce qui concerne les traverses, lorsque l'on dispose les essieux les plus lourds au droit d'une telle pièce celle-ci ne supporte pas tout le

il en réduit la flexion, ainsi que la torsion des poutres principales.  
Il est aussi avantageux pour l'aspect.

7. CALCUL DES MAÎTRESSES-POUTRES, CONTREVENTEMENTS, etc.

Le calcul des maîtresses-poutres, contreventements, etc. se fait d'après les règles générales de la stabilité, principalement des systèmes hyperstatiques. Le caractère principal des systèmes constructifs en béton armé est la continuité. Dans les chapitres suivants, nous rappelons et développons l'étude des systèmes principaux du béton armé, directement en vue de l'application et afin d'en déduire des règles constructives et des méthodes simplifiées pour les établissements des avant-projets.

\*  
\* \*

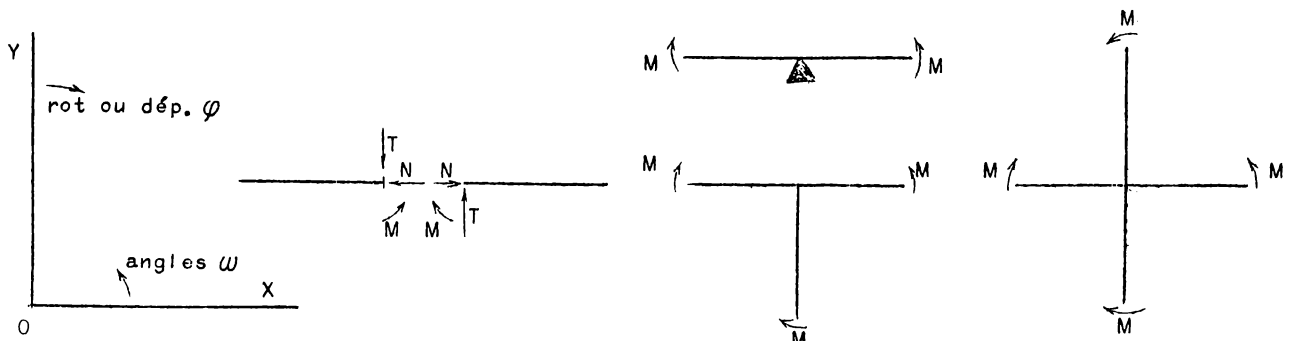
CHAPITRE IV.  
=====

RAPPEL DES PROPRIETES FONDAMENTALES DES CONSTRUCTIONS CONTINUES.

1. NATURE DE LA CONTINUITÉ. CONVENTION DE SIGNES.

Les constructions en béton armé sont souvent composées de pièces droites ou courbes, se réunissant par groupes en des assemblages appelés noeuds. Généralement ces assemblages sont monolithiques, sans joints ni organes spéciaux, de telle sorte que l'on passe d'une pièce à l'autre sans solution de continuité. Un tel système est dit continu à angles rigides. L'effet du dispositif est de conserver les angles que les axes des pièces font entre eux, quelles que soient les déformations des pièces. D'ordinaire, les axes des groupes de pièces se réunissant en un noeud sont concourants. Nous représenterons en général les pièces par leurs axes et le noeud par leur point de concours.

La convention de signe est essentielle, nous conservons celle qui a été donnée pour les arcs dans le cours de ponts en maçonnerie. L'axe des  $x$  horizontal a son sens positif de la gauche vers la droite. Pour l'axe des  $y$  vertical, c'est de bas en haut. On passe de l'un à l'autre par rotation d'un angle droit dans le sens direct. Le sens positif des angles par rapport à chaque axe est le sens trigonométrique; mais le sens positif des rotations ou déformations angulaires est le sens direct. Les moments positifs produisent des courbures positives, ce qui donne lieu aux conventions des figures ci-après :



En principe nous n'affecterons pas les forces extérieures d'un signe, nous les envisagerons comme des quantités positives et nous tiendrons compte de leurs sens dans le signe des T et M.

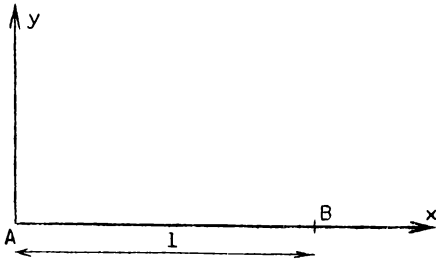
2. EQUATIONS GENERALES DES CONSTRUCTIONS CONTINUES A BARRES DROITES.

Nous envisagerons d'abord les systèmes à barres droites; envisager d'emblée des barres quelconques obscurcirait l'exposé. La base de la théorie est le théorème de Clerc, exposé dans le cours de RESISTANCE DES MATERIAUX (Mécanique appliquée). - Considérons une pièce droite AB, soumise à l'action de certaines forces extérieures, dont les moments aux extrémités sont  $M_a$  et  $M_b$  et les déplacements normaux des points A et B sont  $y_a$  et  $y_b$ .

On déduit immédiatement des équations d'équilibre statique qu'en un point quelconque

$$M = m + M_a + \frac{M_b - M_a}{l} x$$

$$T = t + \frac{M_b - M_a}{l} x$$



m et t étant les moments et les efforts tranchants dus aux charges extérieures pour la pièce

AB supposée appuyée aux extrémités. J'ai rappelé dans le cours de ponts en maçonnerie la 3<sup>e</sup> formule de Bresse absolument générale

$$\varphi = \varphi_0 - \int_0^x \frac{M}{E.I} dx$$

$\varphi$  étant la rotation du point d'abscisse x,  $\varphi_0$  la rotation de l'extrémité initiale, donc de A.

Pour une pièce telle que AB on a :

$$\varphi_0 = \frac{y_a - y_b}{l} + \frac{1}{l} \iint_0^1 \frac{M}{E.I} dx^2$$

Donc :

$$\varphi = \frac{y_a - y_b}{l} - \int_0^x \frac{M}{E.I} dx + \frac{1}{l} \iint_0^1 \frac{M}{E.I} dx^2 \quad (\text{théorie de Clerc}).$$

$$\varphi_a = \frac{y_a - y_b}{l} + \frac{1}{l} \iint_0^1 \frac{M}{E.I} dx^2 = \frac{y_a - y_b}{l} + \frac{M_a}{l} \iint_0^1 \frac{dx^2}{E.I} + \frac{M_b - M_a}{l} \iint_0^1 \frac{x \cdot dx^2}{E.I} + \frac{1}{l} \iint_0^1 \frac{m}{E.I} dx^2.$$

$$\varphi_b = \frac{y_a - y_b}{l} - \int_0^1 \frac{M}{E.I} dx + \frac{1}{l} \iint_0^1 \frac{M}{E.I} dx^2 = \frac{y_a - y_b}{l} - M_a \left[ \int_0^1 \frac{dx}{E.I} - \frac{1}{l} \iint_0^1 \frac{dx^2}{E.I} \right] - \frac{M_b - M_a}{l} \left[ \int_0^1 \frac{x \cdot dx}{E.I} - \frac{1}{l} \iint_0^1 \frac{x \cdot dx^2}{E.I} \right] - \int_0^1 \frac{m}{E.I} dx + \frac{1}{l} \iint_0^1 \frac{m}{E.I} dx^2$$

On connaît par le cours de résistance des matériaux, les significations graphostatiques des intégrales qui, pour  $\varphi_a$  et  $\varphi_b$ , représentent les moments par rapport aux extrémités opposées du diagramme des  $\frac{M}{E.I}$ . On peut les écrire

$$\varphi_a = \frac{y_a - y_b}{l} + \frac{1}{l} \int_0^1 \frac{M \cdot (1 - x)}{E.I} dx \qquad \varphi_b = \frac{y_a - y_b}{l} - \frac{1}{l} \int_0^1 \frac{M \cdot x}{E.I} dx$$



$$\varphi_a = \frac{y_a - y_b}{l} + \frac{M_a}{l} \int_0^1 \frac{(1-x)}{E.I} dx + \frac{M_b - M_a}{l^2} \int_0^1 \frac{(1-x).x}{E.I} dx + \frac{1}{l} \int_0^1 \frac{m}{E.I} (1-x) dx$$

$$\varphi_b = \frac{y_a - y_b}{l} - \frac{M_a}{l} \int_0^1 \frac{x}{E.I} dx - \frac{M_b - M_a}{l^2} \int_0^1 \frac{x^2}{E.I} dx - \frac{1}{l} \int_0^1 \frac{m.x}{E.I} dx$$

En général, les moments d'inertie des pièces sont sensiblement constant ou peuvent être considérés comme tel.

Les équations se simplifient beaucoup et en posant  $\frac{y_a - y_b}{l} = \psi$  on a :

$$\varphi_b = \psi - \frac{1}{E.I} \left( \frac{M_a}{6} + \frac{M_b}{3} \right) - \frac{1}{l} \frac{M_b a}{E.I}$$

$$\varphi_a = \psi + \frac{1}{E.I} \left( \frac{M_a}{3} + \frac{M_b}{6} \right) + \frac{1}{l} \frac{M_b b}{E.I}$$

$M_a$  et  $M_b$  représentant les moments par rapport à A et B du diagramme de  $m$ . Ces équations sont fondamentales,  $\varphi_a$  et  $\varphi_b$  sont les rotations des extrémités des barres tandis que  $\psi$  est la rotation de l'axe rectiligne idéal de la barre.

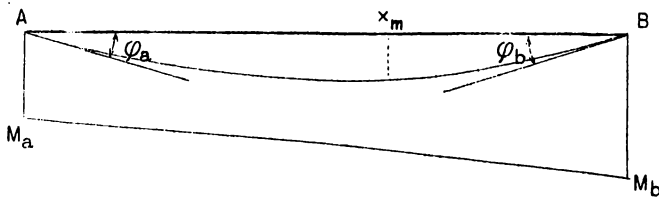
On déduit des deux formules précédentes :

$$M_a = \frac{2 E.I}{l} \left[ 2 (\varphi_a - \psi) + (\varphi_b - \psi) \right] - 2 \left( \frac{l M_b - M_b a}{l^2} \right)$$

$$M_b = \frac{2 E.I}{l} \left[ (\varphi_a - \psi) + 2 (\varphi_b - \psi) \right] - 2 \left( \frac{2 M_b a - M_b b}{l^2} \right)$$

CAS DES BARRES NON CHARGÉES A APPUIS FIXES.

Dans ce cas  $\psi = 0$ ,  $m = 0$  donc :



$$\varphi_a = \frac{1}{E.I} \left( \frac{M_a}{3} + \frac{M_b}{6} \right)$$

$$\varphi_b = \frac{1}{E.I} \left( \frac{M_a}{6} + \frac{M_b}{3} \right)$$

$$M_a = \frac{2 E.I}{l} (2 \varphi_a + \varphi_b)$$

$$M_b = \frac{2 E.I}{l} (\varphi_a + 2 \varphi_b)$$

Donc :  $\frac{M_a}{M_b} = - \frac{2 \varphi_a + \varphi_b}{\varphi_a + 2 \varphi_b}$  si je pose  $\frac{M_a}{M_b} = -k$  et  $\frac{\varphi_a}{\varphi_b} = -i$  on a :

$$k = \frac{-2i + 1}{-i + 2} \quad \text{et} \quad i = \frac{-2k + 1}{-k + 2}$$

L'étude de la déformation des barres non chargées, a appuis fixes, présente un certain intérêt pour la suite. En un point quelconque :

$$\varphi = \frac{M_a}{E.I} \left( \frac{1}{2} - x \right) + \frac{M_b - M_a}{2 l.E.I} \left( \frac{l^2}{3} - x^2 \right)$$

$$y = \frac{x.(1-x)}{2 E.I} \left[ M_a + \frac{M_b - M_a}{3 l} (1+x) \right]$$

Si  $M_a > 0$ ,  $M_b > 0$  on a :  $\varphi_a > 0$ ,  $\varphi_b < 0$ , dans l'intervalle  $\varphi = 0$

pour

$$x_m = \left[ \frac{-M_a \pm \sqrt{M_a^2 + M_a + M_b^2}}{M_b - M_a} \right]. l$$

si  $M_a = 0$   $x_m = + \frac{1}{\sqrt{3}}$  Si  $M_a < M_b \frac{1}{\sqrt{3}} > x_m > \frac{1}{2}$

si  $M_a = M_b$ , l'élastique, est circulaire;  $x_m = \frac{1}{2}$ , l'autre valeur est  $\infty$

si  $M_a > M_b$ ,  $\frac{1}{2} > x_m > 1 (1 - \frac{1}{\sqrt{3}})$

si  $M_b = 0$   $x_m = 1 (1 - \frac{1}{\sqrt{3}})$

Observons que si  $M_a$  ou  $M_b = 0$  (articulation), l'élastique a un point d'inflexion en A ou B ; puisque  $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ . Donc le sens de la courbure de l'élastique est invariable et elle ne recoupe pas l'axe entre ces deux extrémités. En effet,  $y = 0$  pour  $x = 0$ ,  $x = 1$  et  $x = -1 (1 + \frac{3 M_a}{M_b - M_a}) < 0$  ou  $> 1$ .

Considérons ensuite  $M_a < 0$   $M_b > 0$ . L'élastique peut recouper l'axe entre ses deux extrémités, il suffit que  $-1 < 1 + \frac{3 M_a}{M_b - M_a} < 0$  ce qui revient à :  $\frac{M_b}{2} < -M_a < 2 M_b$ . Si  $0 < -M_a$ ,  $\varphi_a > 0$ ,  $\varphi_b < 0$ , l'élastique ne recoupe pas l'axe, possède un maximum et un point d'inflexion correspondant à  $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$  ou  $M = 0$ , or  $M = M_a + \frac{M_b - M_a}{l} x$  d'où  $x_i = -1 \frac{M_a}{M_b - M_a} > 0$

si  $-M_a = \frac{M_b}{2}$   $\varphi_a = 0$  (encastrement)

$$\varphi_b = -\frac{1 \cdot M_b}{4 E \cdot I} = \frac{1 \cdot M_a}{2 E \cdot I} < 0 . \text{ Il y a un minimum } x_m = 0 \text{ et un}$$

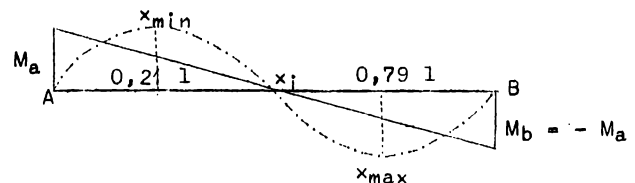
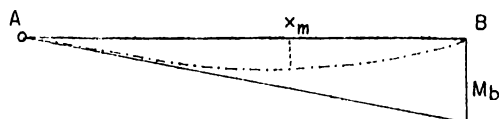
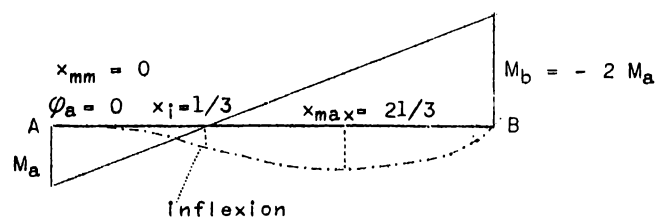
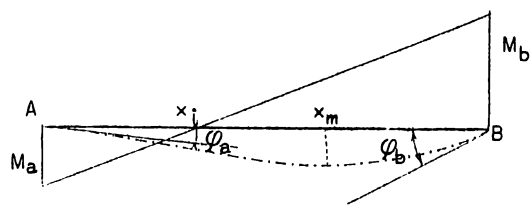
maximum  $x_m = \frac{2}{3} l$ . Il y a un point d'inflexion  $x_i = \frac{1}{3}$ .

si  $\frac{M_b}{2} < -M_a < M_b$ ,  $\varphi_a < 0$  il y a un point d'inflexion  $\frac{1}{3} < x_i < \frac{1}{2}$

un minimum  $0 < x_m < 0,21 l$  et un maximum  $\frac{2}{3} l < x_m < 0,79 l$ .

enfin si  $-M_a = M_b$   $\varphi_a = \varphi_b = \frac{-M_a l}{6 E \cdot I} < 0$   $x_i = \frac{1}{2}$  et

$$x_{\min} = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{\frac{1}{3}}) = 0,21 l \quad x_{\max} = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{\frac{1}{3}}) = 0,79 l$$



Ces différentes figures peuvent être réalisées par une lame flexible entre deux appuis à couteaux et soumises à une force extérieure oblique qui coupe l'élastique au point d'inflexion. Si A est un appui fixe et qu'il s'y exerce un moment extérieur  $M_a$ ,  $M_b$  peut varier de 0 en cas d'appui simple à  $-\frac{M_a}{2}$  en cas d'encastrement parfait.

On a : appui simple  $M_b = 0$ ,  $M_a \neq 0$ ,  $\varphi_a = \frac{M_a l}{3 E.I}$ ,  $\varphi_b = -\frac{M_a l}{6 E.I}$ ,  $x_i = 1$   
 $x_m = 1(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})$ , encastrement parfait en  $M_b = -\frac{M_a}{2}$   $M_a \neq 0$   $\varphi_a = \frac{M_a l}{4 E.I} = -\frac{M_b l}{2 E.I}$   
 $x_i = \frac{2}{3}$ ,  $x_m = \frac{1}{3}$ ,  $\varphi_b = 0$ .

Entre ces deux extrêmes, on peut envisager des encastrements imparfaits, caractérisés par un coefficient d'encastrement  $\epsilon$  variant de 0 à 1 tel que  $\varphi_b = -\frac{M_a l}{6 E.I} (1 - \epsilon)$  d'où  $M_b = -\frac{\epsilon}{2} M_a$  et  $x_i = 1 \frac{2}{2 + \epsilon}$ . Il en résulte que

$$\varphi_b = -\frac{(1 - \epsilon)}{2 - \epsilon/2} \varphi_a ; \quad \varphi_b = -\frac{(1 - \epsilon) M_b l}{3 E.I \epsilon}$$

$$\varphi_a = -\frac{(2 - \epsilon/2)}{1 - \epsilon} \varphi_b = -\frac{M_a l}{6 E.I} (2 - \frac{\epsilon}{2}) = \frac{M_b l}{3 E.I} \frac{(2 - \epsilon/2)}{\epsilon}$$

(Tracer un diagramme des valeurs correspondantes de  $\epsilon$ ,  $k$ ,  $i$  et  $\frac{x_i}{l}$ ). Les formules ci-dessus correspondent à l'encastrement partiel à droite, elles permutent en cas d'encastrement à gauche. Alors

$$\frac{M_a}{M_b} = -k \quad \frac{\varphi_a}{\varphi_b} = -i \quad (\text{Voir p. 66}) \quad \frac{\varphi_a}{\varphi_b} = -\frac{1 - \epsilon}{2 - \epsilon/2} = -i \quad \text{d'où} \quad \epsilon = -\frac{2i + 1}{1 - i/2} = 2k$$

#### OBSERVATIONS GENERALES.

1°) TOUTES CES FORMULES DERIVEES DE L'EQUATION USUELLE SIMPLIFIEE DE L'ELASTIQUE NE TIENNENT COMPTE NI DES EFFETS DES N NI DES T. Selon l'opinion générale, ces effets peuvent être négligés sans grande erreur en ce qui concerne la flexion.

2°) LE DIAGRAMME DE M EST LINEAIRE. A l'échelle près, la connaissance du rapport  $\frac{M_a}{M_b} = k$ , le définit complètement. Il est particulièrement intéressant pour les constructions continues. Le diagramme coupe l'axe AB en un point F qui correspond au point d'inflexion de l'élastique et que l'on appelle FOYER, lorsqu'il est fixé; on peut définir le foyer par un des segments  $x_i$  ou  $1 - x_i$ , qu'il détermine sur AB. Ces segments sont complètement déterminés par  $k$ .

En effet  $x_i = 1 \frac{k}{1 + k} = 1 \frac{\epsilon}{2 + \epsilon}$ ,  $1 - x_i = \frac{1}{1 + k} = \frac{2}{2 + \epsilon}$ .

Nous avons vu que le rapport  $-k$  détermine aussi le rapport  $-i = \frac{\varphi_a}{\varphi_b}$  et inversement. On trouve aisément que

$$x_i = 1 \frac{1 - 2i}{3(1 - i)} \quad \text{et} \quad 1 - x_i = \frac{2 - i}{3(1 - i)} l$$

Mais il y a une différence géométrique essentielle entre  $k$  et  $i$ , car le diagramme de  $\varphi$  n'est pas rectiligne mais parabolique. Son point d'intersection avec AB n'est pas le foyer F mais correspond au sommet de l'élastique, c'est à-dire à  $x_m$ . Le point d'inflexion  $x_i$  correspond au maximum de la courbe de  $\varphi$

4. METHODE GENERALE APPLICABLE AUX CONSTRUCTIONS A NOEUDS FIXES.

Nous appelons constructions continues à noeuds fixes celles dont les liaisons ont pour effet de fixer invariablement les coordonnées des noeuds dans le plan. La position des noeuds peut être fixée directement par une articulation fixe ou un encastrement ou indirectement par l'intersection de 2 barres dont les deux autres extrémités sont des noeuds fixes de l'une ou l'autre espèce. Les figures triangulées rentrent donc dans cette catégorie. En effet, nous négligeons les dilatations des barres, dues aux efforts normaux et, ainsi qu'on le sait, la flexion élastique des barres ne modifie pas leur longueur d'une manière sensible (voir démonstration dans le cours de Mr. Pigeaud, à propos des tensions secondaires dans les barres de treillis).

Donc dans ces hypothèses, si un triangle a 2 sommets fixes, le troisième l'est également. Dans ces conditions les inclinaisons d'ensemble  $\Psi$  sont nulles et les équations fondamentales se simplifient.

$$\varphi_a = \frac{1}{E I} \left( \frac{M_a}{3} + \frac{M_b}{6} \right) + \frac{1}{l} \frac{M_b}{E I}$$

$$\varphi_b = \frac{-1}{E I} \left( \frac{M_a}{6} + \frac{M_b}{3} \right) - \frac{1}{l} \frac{M_a}{E I}$$

$$M_a = \frac{2 E I}{l} (2 \varphi_a + \varphi_b) - 2 \left( \frac{2 M_b - M_a}{l^2} \right) \quad M_b = - \frac{2 E I}{l} (\varphi_a + 2 \varphi_b) - 2 \left( \frac{2 M_a - M_b}{l^2} \right)$$

Soit une telle construction comportant N noeuds (ou extrémités de barres) et B barres ( $B < \frac{N(N-1)}{2}$ ). Les deux conditions résolvant le problème sont que :

- 1°) en chaque noeud, chaque barre tourne du même angle,
- 2°) les moments aux extrémités concourantes de toutes les barres se font équilibre.

En désignant les noeuds par les numéros d'ordre 1.....n on peut donc considérer n inconnues  $\varphi_1 \dots \varphi_n$  entre lesquelles existent n équations de la forme

$$\Sigma_a \left[ \frac{2 E I}{l} (2 \varphi_a + \varphi_b) - 2 \left( \frac{2 M_b - M_a}{l^2} \right) \right] = 0$$

La résolution de ce système de n équations linéaires à n inconnues permet ensuite de calculer  $M_a$  et  $M_b$ , ce qui détermine complètement la sollicitation des barres. Si l'on prenait comme inconnues  $M_a$  et  $M_b$  on aurait un système de 2 B équations à résoudre, au maximum N(N-1) équations. On voit l'avantage de l'adoption des rotations des noeuds comme inconnues.

Les n équations du système peuvent se mettre sous la forme

$$\Sigma_a \frac{2 E I}{l} (2 \varphi_a + \varphi_b) = \Sigma_a 2 \left( \frac{2 M_b - M_a}{l^2} \right)$$

S'il n'y a pas de forces extérieures, tous les seconds membres sont nuls et tous les angles  $\varphi_x$  également, ce qui est évident a priori. Si l'une des travées est chargée, deux équations ont un second membre, ce sont celles des noeuds situés aux deux extrémités de la barre considérée.

Pour qu'une seule des équations ait un second membre, il faut qu'il agisse simplement un moment extérieur en l'un des noeuds.

On a alors :

$$n - 1 \text{ équations : } \sum_a \frac{2 E \cdot I}{l} (2 \varphi_a + \varphi_b) = 0$$

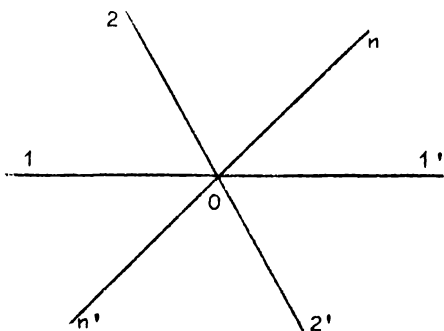
et

$$1 \text{ équation : } \sum_m \frac{2 E \cdot I}{l} (2 \varphi_m + \varphi_1) = M$$

Le système comporte une solution et, en vertu du théorème de Cramer, toutes les valeurs de  $\varphi$  sont proportionnelles à  $M_m$ . Ces coefficients de proportionnalité étant constant et ne dépendant que de  $\frac{E \cdot I}{l}$  des barres et de la situation des barres par rapport au noeud chargé. Donc toutes les valeurs de  $\varphi_a, \varphi_b$  etc. et par conséquent toutes les valeurs de  $M_a, M_b, \dots$  etc. sont entre elles dans des rapports constants, donc les foyers des barres sont des points fixes lorsque la sollicitation extérieure se réduit à un moment appliqué en un noeud. S'il y a une travée chargée, cela revient à avoir des moments extérieurs correspondant aux deux noeuds constituant les extrémités de la travée. En vertu du principe de superposition, on peut additionner les solutions correspondant à chacun de ces moments fictifs considéré isolément. Toutefois pour que la propriété des foyers fixes subsiste dans ce cas, il faut que leur position soit indépendante de celle des noeuds chargés. Cela exige que le système de  $(n - 2)$  équations sans second membre comporte  $(n - 1)$  inconnues. On se rend aisément compte qu'il en est ainsi lorsque la barre chargée n'appartient pas à une maille fermée. S'il y a une ou des mailles fermées, la propriété des foyers fixes indépendants des noeuds chargés n'existe pas dans leur étendue, car les  $(n - 2)$  équations homogènes ont  $n$  inconnues, elle peut exister pour les barres ne formant pas de mailles fermées, il faut pour cela que l'on puisse isoler des groupes de  $m$  équations homogènes ( $m < n - 2$ ) à  $m + 1$  inconnues. La connaissance générale de la théorie des foyers, acquise dans le cours de résistance des matériaux, permet de comprendre le rappel très général ci-dessus qui sera d'ailleurs éclairci par des exemples concrets. La propriété des foyers va permettre de résoudre très simplement les  $n$  équations aux noeuds; dans le cas des mailles fermées en utilisant le principe fondamental de superposition.

DETERMINATION DES FOYERS DES SYSTEMES A NOEUDS FIXES.

Fonction focale.- Considérons un noeud 0 non chargé auquel aboutissent  $n$  axes  $11' \ 22' \ \dots \ nn'$ , constituant un certain nombre  $r$  de barres  $< 2n$ ,



c'est-à-dire que suivant certains axes, il peut n'y avoir qu'une barre. Ainsi qu'on le sait les foyers sont à l'intérieur des barres, c'est-à-dire que les moments  $M_a$  et  $M_b$  aux extrémités d'une barre possédant un foyer, dans l'état de sollicitation envisagé sont de signes contraires. Supposons que l'on connaisse les foyers de toutes les barres sauf 1; par exemple on connaît  $i_1 \ i_1' \ \dots \ i_{r-1}$ . On peut déterminer  $i_r$  en fonction des autres valeurs de  $i$ . Il suffit d'écrire

$$\sum_o M_a = 0$$

donc

$$\sum_o \frac{2 E \cdot I_n}{l_n} (2 \varphi_o + \varphi_n) = 0$$

mais par définition

$$\varphi_n = - i_n \cdot \varphi_o \quad \text{donc} \quad \varphi_o \sum_o \frac{2 E \cdot I_n}{l_n} (2 - i_n) = 0$$

donc :

$$\frac{2 E \cdot I_r}{l_r} (2 - i_r) = \sum_{n=1}^{n=r-1} \frac{2 E \cdot I_n}{l_n} (2 - i_n) = 0$$

C'est la formule générale de récurrence des foyers, dans l'application de laquelle il faut d'ailleurs être très attentif aux conventions de signes. Il est recommandable de se guider dans l'application au moyen de croquis.

Pratiquement, on a affaire à des noeuds de 2,3 ou 4 barres pour lesquelles on peut établir des formules de récurrence d'emploi facile.

Observons que les foyers se déterminent à partir des appuis extrêmes, d'où la distinction en foyer de droite et en foyer de gauche. Les conditions d'appui peuvent varier entre l'articulation et l'encastrement. En cas d'articulation

$$M_a = 0, \quad x_i = 0, \quad k = 0 = \varepsilon, \quad i = \frac{1}{2} = 0,5$$

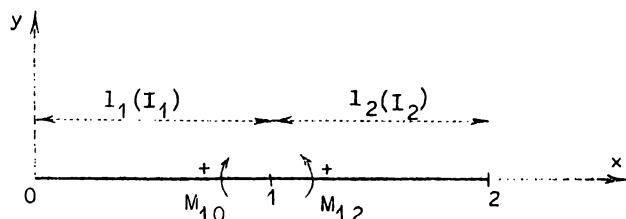
En cas d'encastrement parfait

$$M_a = -\frac{M_b}{2}, \quad x_i = -\frac{1}{3}, \quad k = 0,5, \quad \varepsilon = 1 = 2k$$

En cas d'encastrement partiel

$$M_a = -\frac{\varepsilon}{2} M_b, \quad x_i = l \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon}, \quad k = 0,5\varepsilon; \quad i = \frac{1 - \varepsilon}{2} \times 0,5\varepsilon \quad 0 < \varepsilon < 1$$

Donc dans une barre de rigidité constante, les foyers se trouvent dans les tiers extrêmes : k varie de 0 à 0,5 et i de 0,5 à 0. Nous voyons donc que la position d'un foyer de gauche ou de droite et les rapports focaux correspondant k et i définissent le degré d'encastrement de l'appui de gauche ou de droite considéré.



Considérons d'abord 2 barres 01 et 12 que nous considérons comme un axe continu dont le sens positif est 012. Au noeud 1 on a :

$$-M_{10} + M_{12} = +\frac{I_1}{l_1} (2\varphi_1 + \varphi_0)$$

$$+ \frac{I_2}{l_2} (2\varphi_1 + \varphi_2) = 0$$

Or  $\frac{\varphi_0}{\varphi_1} = -i_1$  ;  $\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = -i_2$  donc  $\frac{I_1}{l_1} (2 - i_1) + \frac{I_2}{l_2} (2 - \frac{1}{i_2}) = 0$

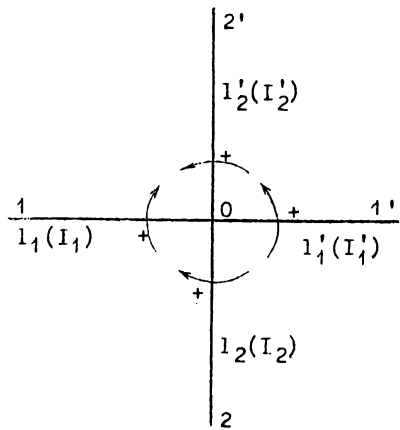
Connaissant  $i_1$  on peut déterminer  $i_2$  et ainsi de proche en proche pour les foyers de gauche. Dans le cas d'une suite de noeuds à 2 barres assimilable à une poutre continue sur appuis fixes on peut déterminer, comme il est montré ci-dessus les foyers des travées extrêmes, d'après les conditions d'appui d'extrémité. Par la formule de récurrence, on peut alors déterminer les foyers de gauche et de droite de proche en proche : Si les barres sont toutes identiques on a :

$$4 - i_1 - \frac{1}{i_2} = 0$$

Considérons deux axes orthogonaux Ox et Oy se coupant en un noeud 0 à 4 barres 11' et 22'. Les conventions de signes sont celles que nous avons exposées. Nous envisagerons encore les foyers de gauche. Au noeud 0  $\sum M = 0$  ou

$$-M_{01} + M_{02'} + M_{01'} - M_{02} = 0 \quad \text{ce qui s'écrit}$$

$$\frac{I_1}{l_1} (2\varphi_0 + \varphi_1) + \frac{I_2'}{l_2'} (2\varphi_0 + \varphi_2') + \frac{I_1'}{l_1'} (2\varphi_0 + \varphi_1') + \frac{I_2}{l_2} (2\varphi_0 + \varphi_2) = 0$$



Or  $\frac{\varphi_1}{\varphi_0} = -i_1$  ;  $\frac{\varphi_0}{\varphi_1} = -i_1'$  ;  $\frac{\varphi_2}{\varphi_0} = -i_2$  ;

$\frac{\varphi_0}{\varphi_2} = -i_2'$  d'où

$$\frac{I_1}{l_1}(2 - i_1) + \frac{I_2}{l_2}(2 - i_2) + \frac{I_1'}{l_1'}(2 - \frac{1}{i_1'}) + \frac{I_2'}{l_2'}(2 - i_2') = 0$$

Si les barres sont identiques dans chaque alignement

$$\frac{I_1}{l_1} (4 - i_1 - \frac{1}{i_1'}) + \frac{I_2}{l_2} (4 - i_2 - i_2') = 0$$

Dans le cas où le noeud ne reçoit que 3 barres il suffit, dans l'équation précédente, de supprimer le terme correspondant à la barre manquante.

Ainsi dans le cas de la poutre à béquilles multiples (noeud à 3 barres) la barre 02' manque

(noeud à 3 barres) la barre 02' manque

$$\frac{I_1}{l_1} (2 - i_1) + \frac{I_1'}{l_1'} (2 - \frac{1}{i_1'}) + \frac{I_2}{l_2} (2 - i_2) = 0$$

ou en cas d'identité des travées horizontales :

$$\frac{I_1}{l_1} (4 - i_1 - \frac{1}{i_1'}) + \frac{I_2}{l_2} (2 - i_2) = 0$$

Ces équations de récurrence permettent de déterminer un foyer inconnu connaissant les 3 ou 2 autres. Les déterminations se font toujours de proche en proche, à partir des appuis extrêmes. Il en résulte que les foyers d'une barre quelconque se trouvent toujours dans les tiers extrêmes des barres et que  $i$  est toujours compris entre 0 et 0,5. D'autre part sauf pour les barres extrêmes, les positions des foyers ne sont pas très influencées par les conditions d'appui d'extrémité, ni même par la rigidité relative des barres, d'autant moins que la barre considérée est plus loin des appuis et que le nombre de barres qui se réunissent à ses extrémités est plus grand. En d'autres termes à distance suffisante des appuis d'extrémité, le degré d'encastrement des barres devient sensiblement constant.

Pour le noeud 0 à quatre barres et supposons qu'il y ait des articulations en 1, 2 et 2' toutes les barres étant identiques

$$i_1 = i_2 = \frac{1}{i_2'} = 0,5 \quad \text{d'où} \quad 6,5 - \frac{1}{i_1'} = 0 \quad i_1' = 0,154$$

S'il y a encastrement parfait en 1, 2 et 2'

$$i_1 = i_2 = \frac{1}{i_1'} = 0 \quad i_1' = 0,125$$

La variation de  $i_1'$  est donc peu étendue.

Dans le cas de 3 barres, si 1 et 2 sont des articulations

$$i_1 = i_2 = \frac{1}{2} \quad i_1' = \frac{1}{5} = 0,200$$

Si 1 et 2 sont des encastresments

$$i_1 = i_2 = 0 \quad i_1' = \frac{1}{6} = 0,167$$

Dans le cas de 2 barres, si 0 est articulé  $i_1 = 0,5$   $i_2 = \frac{1}{3,5} = 0,285$

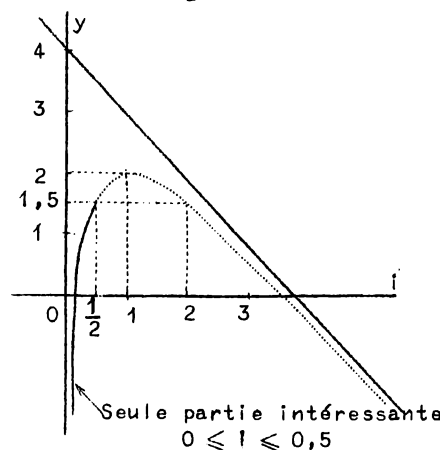
Si 0 est encastré  $i_1 = 0$   $i_2 = \frac{1}{4} = 0,250$

On voit d'après cela aussi que la continuité correspond à un encastrement partiel des barres, dont le coefficient  $\epsilon$  peut se déduire des valeurs de  $i$ . On voit que le degré d'encastrement est d'autant plus grand que le nombre de barres concourant en un noeud est plus élevée. En continuant à appliquer les équations de récurrence de proche en proche, on constate aussi qu'il est d'autant plus grand que l'on s'éloigne d'avantage des appuis, mais qu'il tend très rapidement vers une limite. Lorsque cette limite est atteinte dans une construction formée de noeuds à 2 barres, elle satisfait à l'équation  $4 - i - 1/i = 0$  dont les racines sont  $i = 2 - \sqrt{3} = 0,2679$   $\frac{1}{i} = 2 + \sqrt{3} = 3,7381$

Supposons ensuite une construction à étages (3 branches)

sur colonnes superposées, il y a donc des noeuds à 4 barres.

Admettons que tous les coefficients de rigidité horizontaux soit  $P_1$ , tous les coefficients de rigidité verticaux  $P_2$ .



Lorsque les limites  $i_1$  et  $i_2$  sont atteintes, on a

$$P_1 (4 - i_1 - \frac{1}{i_1}) = - P_2 (4 - i_2 - \frac{1}{i_2})$$

S'il n'y a qu'un étage

$$P_1 (4 - i_1 - \frac{1}{i_1}) = P_2 (2 - i_2)$$

Considérons la fonction :  $Y = 4 - i_1 - \frac{1}{i_1}$  que

nous appelons fonction focale. Elle représente une hyperbole de second degré dont les asymptotes sont l'axe des Y et une droite d'équation

$Y = 4 - i$ . Les coordonnées du centre sont  $i = 0$   $Y = 4$ . La partie utile de la courbe est comprise

dans l'intervalle  $i = 0 \rightarrow 0,5$  mais on peut aussi envisager  $1/i = 2 \rightarrow \infty$ . La connaissance de cette courbe facilite la recherche des foyers. Ainsi dans le cas du portique continu à béquilles encastrees,  $i_2 = 0$  et

$$Y = 4 - i - \frac{1}{i_1} = 2 \frac{P_2}{P_1}$$

Si  $\frac{P_2}{P_1} = 0,5$       0,75      1  
 $Y = -1$       -1,5      -2  
 $i_1 = 0,208$       0,187      0,172

Si les béquilles sont articulées  $i_2 = 0,5$        $Y = 4 - i_1 - \frac{1}{i_1} = 1,5 \frac{P_2}{P_1}$

Si  $\frac{P_2}{P_1} = 0,5$       0,80      1  
 $Y = -0,75$       -1,20      -1,50  
 $i_1 = 0,22$       0,20      0,187

Cet exemple montre bien la commodité d'emploi de la courbe focale, l'influence des conditions d'appui et des rigidités relatives et la faible variation des foyers.

OBSERVATION : En se rapportant aux équations générales du paragraphe 2, on



constate facilement que les propriétés exposées ci-dessus subsistent en principe pour les barres à moments d'inertie variables. Mais les coefficients numériques des équations doivent se calculer dans chaque cas, ce qui est une grande complication. Lorsque les barres sont symétriques et que le moment d'inertie n'est pas très variable on peut par approximation considérer un moment d'inertie moyen tel que

$$\frac{l^2}{2 I_m} = \iint_0^l \frac{dx^2}{I} = \int_0^l \frac{(1-x).dx}{I}$$

6. LIGNES D'INFLUENCE - FONCTIONS D'INFLUENCE.

Les lignes d'influence spécifiques s'obtiennent en considérant les effets d'une charge, de valeur unitaire, se déplaçant sur la construction, supposée non pesante.

Il n'y a qu'une seule travée chargée, celle qu'occupe la charge mobile. Soient a et b les noeuds d'extrémité. S'il y a n noeuds fixes, on peut écrire le système de n équations :

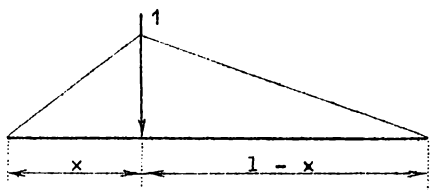
1 équation  $\Sigma_a \frac{2 E.I}{1} (2 \varphi_a + \varphi_b) = 2 \left( \frac{2 M_b - M_a}{1^2} \right) = \Phi_a$

1 équation  $\Sigma_b \frac{-2 E.I}{1} (2 \varphi_b + \varphi_a) = 2 \left( \frac{2 M_a - M_b}{1^2} \right) = \Phi_b$

(n - 2) équations  $\Sigma_m \frac{2 E.I}{1} (2 \varphi_m + \varphi_1) = 0$

$\Phi_a$  et  $\Phi_b$ , que j'appelle fonctions d'influence, sont uniquement fonctions des positions relatives de la force mobile unitaire sur la travée chargée. En effet, considérons une barre de longueur l divisée par une force F = 1 en deux segments x et (1 - x). Nous devons considérer cette pièce comme simplement appuyée aux deux extrémités. Le diagramme des moments est formé de deux droites se coupant au droit de la force et dont l'ordonnée maximum est

$$\frac{x(1-x)}{1}$$



On voit aisément que :

$$M_a = \frac{x.(1^2 - x^2)}{6} ; M_b = \frac{x.(1-x)(2l-x)}{6}$$

d'où  $\Phi_a = \frac{x.(1-x)^2}{1^2} ; \Phi_b = \frac{x^2.(1-x)}{1^2}$

2 forces symétriques :  $\Phi_a = \Phi_b = \frac{x.(1-x)}{1} ; M_a = M_b = \frac{1.x.(1-x)}{2}$

2 forces antisymétriques :  $\Phi_a = \Phi_b = \frac{x.(1-x).(2x-1)}{1^2}$

$$M_a = M_b = \frac{x.(1-x).(2x-1)}{6}$$

Les fonctions  $\Phi_a/1$  et  $\Phi_b/1$  dépendent uniquement de x/1. On peut en dresser une table ou un diagramme, pour des valeurs échelonnées de x/1. A l'aide de ces fonctions on peut tracer toutes les lignes d'influence des rotations  $\varphi$  des extrémités des barres dont on peut, par les formules connues, déduire celles des moments d'extrémités, et partant de là, par les règles ordinaires de la statique, les lignes d'influence des éléments quelconques de la sollicitation.

Donc toutes les lignes d'influence des constructions continues à noeuds

fixes dépendent, directement ou indirectement des fonctions d'influence  $\Phi_a/l$  et  $\Phi_b/l$ , dont le nom est justifié. Une table des valeurs de ces fonctions permet de calculer toutes les lignes d'influence. Observons d'ailleurs que ces fonctions sont symétriques par rapport à  $x/l = 0,5$ . Pour l'étude des charges réparties uniformément ou suivant une loi trapézoïdale il est utile de connaître les valeurs de :

$$\frac{1}{12} \int_0^x \Phi_a . dx ; \quad \frac{1}{12} \int_0^x \Phi_b . dx ; \quad \frac{1}{13} \int_0^x \Phi_a . x . dx ; \quad \frac{1}{13} \int_0^x \Phi_b . x . dx$$

Ces valeurs inscrites également dans les tableaux ou diagrammes sont obtenues par les formules suivantes :

$$\frac{1}{12} \int_0^x \Phi_a . dx = \frac{x^2 . (6 l^2 - 8 l . x + 3 x^2)}{12 l^4} ; \quad \frac{1}{12} \int_0^x \Phi_b . dx = \frac{x^3 . (4 l - 3 x)}{12 l^4}$$

$$\frac{1}{13} \int_0^x \Phi_a . x . dx = \frac{x^3 . (10 l^2 - 15 l . x + 6 x^2)}{30 l^5} ; \quad \frac{1}{13} \int_0^x \Phi_b . x . dx = \frac{x^4 . (5 l - 4 x)}{20 l^5}$$

En cas de charge complète uniforme  $p$  on peut faire intervenir le facteur

$$p \int_0^1 \Phi_a . dx = p \int_0^1 \Phi_b . dx = \frac{p . l^2}{12} = \frac{P . l}{12}$$

$$M_a = M_b = \frac{p . l^4}{24}$$

En cas de surcharge uniforme complète variable, on doit considérer les facteurs

$$w \int_0^1 \Phi_a . x . dx = \frac{w . l^3}{30} = \frac{P . l}{15}$$

## 7. CONSTRUCTIONS CONTINUES A NOEUDS PSEUDO-FIXES.

Ce sont des constructions à noeuds mobiles, envisagées dans des cas de sollicitation tels que, par raison de symétrie les noeuds restent fixes, c'est-à-dire que les  $\Psi$  sont nuls. Par exemple, le portique simple n'est pas une construction à noeuds fixes, car il n'y a que 2 noeuds fixés sur 4. En cas de surcharge dissymétrique, les béquilles prennent des inclinaisons  $\Psi$ . Mais en cas de charges absolument symétriques, par raison de symétrie,  $\Psi = 0$  et on peut appliquer les mêmes équations que pour les systèmes à noeuds fixes. Cette remarque facilite beaucoup le calcul des certains systèmes symétriques, sollicités dissymétriquement. En ajoutant fictivement une charge symétrique à la précédente on constitue le système à noeud pseudo-fixes dont le calcul est souvent fortement simplifié, le nombre d'inconnues étant réduit de moitié. Tous les éléments symétriques de la sollicitation sont ainsi déterminés au double de leur valeur réelle. Leur connaissance facilite le calcul des inconnues hyperstatiques, qui restent encore éventuellement. On peut d'ailleurs opérer comme suit :

Soit un système des charges  $F$ . Appliquons d'abord une sollicitation  $\frac{F}{2}$  plus la symétrique. Un élément quelconque aura pour valeur

$$X_1 = k \frac{F}{2} + k' \frac{F}{2}$$

Appliquons ensuite  $\frac{F}{2}$  et la symétrique en sens contraire. L'élément correspondant vaudra

$$X_2 = k \frac{F}{2} - k' \frac{F}{2}$$

et en superposant les deux systèmes :  $X = k F$ .

Le premier est facile à calculer comme système à noeuds pseudo-fixes; le second présente comme simplification que les éléments symétriques sont nuls ou de signes contraires ce qui réduit le nombre d'inconnues. Certains éléments non symétriques sont éventuellement doublés (efforts tranchants antisymétriques).

### 8. CONSTRUCTIONS CONTINUES A NOEUDS MOBILES.

Le principe de fixité des noeuds se ramène à empêcher les déplacements des noeuds  $\perp$  aux axes des barres, afin d'avoir tous les  $\Psi$  nuls. Cette condition est compatible avec les dilatations thermiques. Il suffit que le nombre minimum nécessaire d'appuis extrêmes soit matériellement fixé par des rotules ou encastrement, ou n'étant fixés qu'en vertu des propriétés géométriques de la construction. Mais nombreuses sont les constructions rigides en béton armé ne possédant pas le nombre suffisant d'appuis fixes réels pour réaliser ces conditions. Sous l'effet des forces extérieures certains noeuds se déplacent. Dans ce cas les équations aux noeuds se compliquent par la présence des termes  $\Psi$  inconnus. On a donc aux  $n$  noeuds  $n$  équations telles que

$$\Sigma_a \frac{2 E \cdot I}{1} \left[ (2 \varphi_a - \Psi) + (\varphi_b - \Psi) \right] = \Sigma_a 2 \left( \frac{2 \delta'_{\omega_b} - \delta'_{\omega_a}}{1} \right)$$

Ce système n'est pas suffisant pour résoudre le problème car en plus des  $n$  inconnues  $\varphi$ , il y a encore les inconnues  $\Psi$ .

Il faut écrire autant d'équations entre ces quantités qu'il y a d'inconnues  $\Psi$ . On les obtient d'une part par les relations cinématiques existant entre les déplacements angulaires des barres de la construction en vertu de la composition géométrique. Ensuite il faut exprimer les conditions que les réactions normales aux barres aux noeuds mobiles sont nulles, en tenant compte des forces extérieures. - Dans la plupart des cas pratiques, ces conditions sont simples. Ainsi dans le portique continu à béquilles, pour les travées horizontales on a toujours  $\Psi = 0$ . Pour les béquilles, les  $\Psi$  sont en raison inverse des hauteurs des béquilles. Ils sont donc égaux si les béquilles ont même hauteur et il n'y a dans ce cas qu'une inconnue  $\Psi$ . Cette inconnue  $\Psi$  se détermine par l'équation supplémentaire qui exprime l'équilibre des forces normales aux béquilles, compte tenu des réactions de flexion aux têtes des béquilles. Dans les cas les plus simples, on écrira directement toutes les équations complètes et on les résoudra par les méthodes connues de l'algèbre.

Dans les cas plus complexes, lorsque le nombre d'équations est élevé, on opérera de préférence par superposition des effets. On considérera d'abord le système comme étant à noeuds fixes. Par les méthodes précédentes on peut déterminer facilement les effets et les lignes d'influence correspondant notamment à des réactions normales aux appuis rendues fictivement fixes. Ensuite, on considère la sollicitation du système à appuis mobiles sous l'effet de rotations unitaires séparées des barres aboutissant aux noeuds mobiles. On se borne bien entendu à celles qui sont utiles. On superpose ensuite toutes les solutions en exprimant que les réactions totales aux noeuds mobiles sont effectivement nulles ce qui détermine complètement les rotations réelles des barres et la solution finale.

Pour chaque rotation indépendante d'un système à  $n$  noeuds on a donc à résoudre un système de  $n$  équations, dont 2 relatives à la barre qui tourne de l'angle  $\Psi$

$$\Sigma_a \frac{2 E.I}{1} (2 \varphi_a + \varphi_b) = \frac{6 E.I.\Psi}{1} + K.\Psi$$

$$\Sigma_b \frac{2 E.I}{1} (\varphi_a + 2 \varphi_b) = - \frac{6 E.I.\Psi}{1} + K'.\Psi$$

ensuite le nombre pair d'équations analogues, dont les seconds membres dépendent de  $\Psi$  en vertu des propriétés géométriques de la construction et qui correspondent aux barres qui subissent une certaine rotation du fait de la rotation  $\Psi$ , enfin éventuellement le restant des équations sans second membre aux noeuds qui ne subissent aucune rotation. Le résolution du système donne les  $\varphi_a$  et les  $\varphi_b$  correspondants en fonction de  $\Psi$ , généralement des fonctions constantes de  $\Psi$ . On retrouve donc une propriété analogue à celles des points fixes, c'est la propriété des FOYERS DE DEPLACEMENT. Mais ceux-ci ne dépendent pas seulement des conditions d'appuis et des rapports des rigidités, mais aussi de la position de la barre dont on envisage la rotation et de ses relations géométriques avec les autres éléments de la construction.

Connaissans les  $\varphi_a$  et les  $\varphi_b$  on peut déterminer les  $M_a, M_b, T_a, T_b$  en fonction de  $\Psi$ . Ce sont ces derniers éléments qui, pour les conditions d'équilibre de translation des noeuds mobiles, permettent de déterminer les  $\Psi$  réels, d'où découle la solution finale. Dans la plupart des cas pratiques, la méthode est relativement simple (par exemple portiques continus, cadres continus, etc.). Nous verrons qu'on peut aussi avantageusement la combiner avec la méthode de Maxwell.

La même méthode permet de déterminer, les effets de des dilatations thermiques. On détermine les dilatations de toutes les barres, ce qui fait connaître d'après la figure géométrique de la construction, les rotations  $\Psi$  des barres. On en déduit les  $\varphi$ , d'où les  $M$  et tous les éléments de la sollicitation thermique. On peut étudier de même les déplacements, élastiques ou non, des appuis. Cette remarque s'applique à tous les systèmes à noeuds fixes ou mobiles.

-----  
ANNEXE.

GENERALISATION DES EQUATIONS FONDAMENTALES DES CONSTRUCTIONS CONTINUES.

Nous avons vu dans le cas le plus général des poutres droites à profi variable, les équations de Clerc donnaient :

$$\varphi_a = \Psi + \frac{1}{E} \left[ M_a \left( \iint_0^1 \frac{dx^2}{I.l} - \iint_0^1 \frac{x.dx^2}{I.l^2} \right) + M_b \iint_0^1 \frac{x.dx^2}{I.l^2} \right] + \frac{1}{E.l} \iint_0^1 \frac{m.dx^2}{I}$$

$$\varphi_b = \Psi - \frac{1}{E} \left[ M_a \left( \iint_0^1 \frac{dx}{I} - \iint_0^1 \frac{dx^2}{I.l} - \int_0^1 \frac{x.dx}{I.l} + \iint_0^1 \frac{x.dx^2}{I.l^2} \right) + M_b \left( \int_0^1 \frac{x.dx}{I.l} - \iint_0^1 \frac{x.dx^2}{I.l^2} \right) \right] - \frac{1}{E.l} \left( \int_0^1 \frac{m.dx}{I.l} - \iint_0^1 \frac{m.dx^2}{I} \right)$$

Posons  $\int_0^1 \frac{dx}{I} = \frac{1}{P}$ , c'est l'aire de la courbe de  $\frac{1}{I}$ , que nous pouvons obtenir par intégration graphique de cette courbe (intégrale 1ère). Posons  $\iint_0^1 \frac{dx}{I} = \frac{1}{P}\mu l$ . C'est le moment  $\mathcal{M}_b^a$  par rapport à  $b$  de la courbe des  $\frac{1}{I}$ , représenté par l'ordonnée finale de l'intégrale seconde de cette courbe.  $\mu l$  est la distance de  $b$

au centre de gravité de l'aire de la courbe des  $\frac{1}{I}$ . Par conséquent :

$$\int_0^1 \frac{x \cdot dx}{I} = \mathcal{M}_a^b = \frac{1}{P} (1 - \mu) \cdot l$$

Il reste à définir  $\iint_0^1 \frac{x \cdot dx^2}{I}$  c'est le moment par rapport à b de la courbe  $\frac{x}{I}$ . Or, cette courbe a la même aire que l'intégrale première rapportée à l'axe vertical passant par a comme axe des abscisses. En effet l'élément de ces courbes est  $\frac{x \cdot dx}{I}$ , une aire partielle est  $\int_0^x \frac{x \cdot dx}{I}$  et l'aire totale  $\int_0^1 \frac{x \cdot dx}{I}$ . Les aires partielles et totale sont données par les ordonnées d'une intégrale auxiliaire tracée à partir de a par rapport à l'axe ab'. Ces ordonnées sont alors reportées par rapport aux abscisses x comptées suivant ab, la correspondance étant établie par l'intégrale première.

On a ainsi la courbe des intégrales de  $\frac{x \cdot dx}{I}$ . En traçant son intégrale on obtient par l'ordonnée finale

$$\iint_0^1 \frac{x \cdot dx^2}{I} = \frac{1}{P} (1 - \mu) \cdot l \cdot \nu \cdot l$$

$\nu \cdot l$  est la distance à b du centre de gravité de la courbe  $\frac{x}{I}$  qui n'a d'ailleurs pas été tracée; cette distance est donnée par l'intersection avec ab de la tangente à l'extrémité de la dernière intégrale.

Enfin  $\iint_0^1 \frac{m}{I} dx^2 = \mathcal{M}_b^i$  est le moment par rapport à b de la courbe de  $\frac{m}{I}$  obtenu par double intégration de cette courbe. Ces deux intégrales définissent aussi

$$\int_0^1 \frac{m}{l \cdot I} dx - \iint_0^1 \frac{m}{I} dx^2 = \int_0^1 \frac{m \cdot x}{I} dx = \mathcal{M}_a^i$$

Dès lors les formules générales deviennent

$$\varphi_a = \Psi + \frac{1}{E \cdot P} \left[ \mathcal{M}_a (\mu - \nu + \mu \cdot \nu) + \mathcal{M}_b (1 - \mu) \nu \right] + \frac{1}{E \cdot I} \mathcal{M}_b^i$$

$$\varphi_b = \Psi - \frac{1}{E \cdot P} \left[ \mathcal{M}_a (1 - \mu) + \mathcal{M}_b (1 - \mu) (1 - \nu) \right] - \frac{1}{E \cdot l} \mathcal{M}_a^i$$

On déduit de ces relations

$$\mathcal{M}_a = \frac{E \cdot P}{(1 - \mu)(\mu - \nu)} \left[ (1 - \mu)(1 - \nu)(\varphi_a - \Psi) + (1 - \mu) \nu (\varphi_b - \Psi) \right] - P \left[ \frac{(1 - \mu)(1 - \nu) \mathcal{M}_b^i - (1 - \mu) \nu \cdot \mathcal{M}_a^i}{1 (1 - \mu)(\mu - \nu)} \right]$$

$$\mathcal{M}_b = \frac{-E \cdot P \cdot \left[ (\mu \cdot \nu + \mu - \nu)(\varphi_b - \Psi) + (1 - \mu) \cdot \nu \cdot (\varphi_a - \Psi) \right]}{(1 - \mu)(\mu - \nu)} - P \cdot \left[ \frac{(\mu - \nu + \mu \cdot \nu) \mathcal{M}_a^i - (1 - \mu) \cdot \nu \cdot \mathcal{M}_b^i}{1 \cdot (1 - \mu)(\mu - \nu)} \right]$$

Ces formules sont tout à fait analogues à celles des poutres à section constante, mais les coefficients numériques dépendent de  $\mu$  et  $\nu$  qu'il faut déterminer pour chaque forme de poutre de préférence par intégration graphique, ainsi qu'il

a été indiqué. En cas de symétrie  $\mu = \frac{1}{2} = 1 - \mu$ . Lorsque I est constant  $\nu = \frac{1}{3}$  et les formules ci-dessus restituent celles dont nous avons fait usage.

Pour l'établissement des lignes d'influence, on peut considérer les fonctions d'influence

$$\Phi_a^i = \frac{(1 - \mu)(1 - \nu) \cdot \mathcal{M}_b^i - (1 - \mu) \cdot \nu \cdot \mathcal{M}_a^i}{(1 - \mu)(1 - \nu)}$$

$$\Phi_b^i = \frac{(\mu - \nu + \mu \cdot \nu) \cdot \mathcal{M}_a^i - (1 - \mu) \cdot \nu \cdot \mathcal{M}_b^i}{(1 - \mu)(1 - \nu)}$$

Comme  $m = \frac{x(1-x)}{1} \dots \dots (x - \alpha)$  lorsque l'abscisse de la force est  $\alpha$

$$\mathcal{M}_b^i = \frac{1 - \alpha}{1} \int_0^\alpha \frac{x \cdot dx^2}{I} + \alpha \int_0^1 \frac{dx^2}{I} - \frac{\alpha}{1} \int_\alpha^1 \frac{x \cdot dx^2}{I}$$

$$\mathcal{M}_a^i = \frac{1}{1} \int_0^1 \frac{m}{I} dx - \mathcal{M}_b^i = \frac{1}{1} \left[ \frac{1 - \alpha}{1} \int_0^\alpha \frac{x \cdot dx}{I} + \alpha \int_0^1 \frac{dx}{I} - \frac{\alpha}{1} \int_\alpha^1 \frac{x \cdot dx}{I} \right] - \mathcal{M}_b^i$$

Donc les intégrales tracées pour déterminer  $\mu$  et  $\nu$  procurent tous les éléments pour le calcul de  $\mathcal{M}_b^i$  et  $\mathcal{M}_a^i$  donc de  $\Phi_a^i$  et  $\Phi_b^i$ . D'ailleurs  $\Phi_a^i$  et  $\Phi_b^i$  sont les lignes d'influence des moments d'encastrement de la poutre supposée parfaitement encastree aux 2 extrémités.

Lorsqu'il n'y a pas de charges et pas d'inclinaison de la poutre

$$\frac{M_a}{M_b} = -k \qquad \frac{\varphi_a}{\varphi_b} = -i$$

et on a les relations

$$-k = \frac{M_a}{M_b} = - \frac{(1 - \mu)(1 - \nu) \cdot i + (1 - \mu) \cdot \nu}{-(1 - \mu) \cdot \nu \cdot i + (\mu - \nu + \mu \cdot \nu)}$$

et

$$\frac{\varphi_a}{\varphi_b} = - \frac{-(\mu + \mu \cdot \nu - \nu) \cdot k + (1 - \mu) \cdot \nu}{-(1 - \mu) \cdot \nu \cdot k + (1 - \mu)(1 - \nu)} = -i$$

En cas d'encastrement  $\varphi_a = 0 \quad i = 0 \quad k = \frac{(1 - \mu) \cdot \nu}{\mu + \mu \cdot \nu - \nu}$

En cas d'appui simple  $M_a = 0 \quad k = 0 \quad i = \frac{\nu}{1 - \nu}$

Dans le cas de système à noeuds fixes, on peut établir les équations de récurrence des foyers de la même manière que lorsque I est constant. On peut d'ailleurs déterminer i et k pour un degré d'encastrement déterminé

$$k = \frac{\varepsilon \cdot (1 - \mu) \cdot \nu}{\mu - \nu + \mu \cdot \nu} \qquad i = \frac{(1 - \varepsilon) \cdot \nu \cdot (\mu - \nu + \mu \cdot \nu)}{(1 - \nu)(\mu - \nu + \mu \cdot \nu) - (1 - \mu) \cdot \nu \cdot \varepsilon}$$

Observons que dans le cas de symétrie

$$\iint_0^1 \frac{dx^2}{I} = \int_0^1 \frac{(1-x) \cdot dx}{I} = \frac{1^2}{2I} \qquad \text{en posant} \qquad \int_0^1 \frac{dx}{I} = \frac{1}{I_m}$$

Il en résulte d'ailleurs  $\mu = \frac{1}{2}$ .

Si l'on suppose  $I = I_m = C^{te}$ , on a  $\iint_0^1 \frac{x \cdot dx^2}{I} = \frac{1^3}{6I_m}$  d'où  $\nu = \frac{1}{3}$

En réalité  $\nu$  est différent de  $1/3$ , mais on se rend compte d'après l'allure des intégrales que dans ce cas le centre de gravité de la surface de

l'intégrale première, ne peut être très différent de celui du triangle ayant même ordonnée finale, lorsque la variation de I est modérée, ce qui est généralement le cas pour le béton armé. L'erreur commise en adoptant la valeur moyenne de I comme I constant ne peut dans ce cas être importante.

\*\*\*\*\*

CHAPITRE V.

=====

APPLICATION AUX SYSTEMES USUELS A NOEUDS FIXES.

=====

OBSERVATION GENERALE.

Nous n'envisagerons que des pièces à moment d'inertie constant. Dans les constructions en béton armé, cette hypothèse est toujours très sensiblement justifiée. En cas de faible variation, on peut d'ailleurs se référer à un moment d'inertie moyen. Si les variations de raideur sont très caractérisées, il faudra recourir aux équations généralisées (voir annexe chapitre IV).

PREMIERE SECTION : POUTRES CONTINUES A APPUIS FIXES.

Soit une poutre 0, 1, ..... N à (n+1) appuis fixes de niveau, comportant donc n travées de longueurs  $l_1, l_2, \dots, l_n$ . L'équation générale à chaque noeud est

$$M_n = \frac{-2 E \cdot I_n}{l_n} (2 \varphi_n + \varphi_{n-1}) - 2 \frac{2 M_{n-1}^n - M_n^n}{l_n^2} \quad \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \Delta & \Delta & \Delta & \Delta \end{array}$$

$$= \frac{2 E \cdot I_{n+1}}{l_{n+1}} (2 \varphi_n + \varphi_{n+1}) - 2 \left( \frac{2 M_{n+1}^{n+1} - M_n^{n+1}}{l_{n+1}^2} \right)$$

Analogue à l'équation des trois moments, elle pourrait s'appeler l'équation des 3 angles. L'équation des trois moments est :

$$-\frac{l_n}{E \cdot I_n} \left( \frac{M_{n-1}}{6} + \frac{M_n}{3} \right) - \frac{1}{l_n} \cdot \frac{M_n^n}{E \cdot I_n} = \frac{l_{n+1}}{E \cdot I_{n+1}} \left( \frac{M_n}{3} + \frac{M_{n+1}}{6} \right) + \frac{1}{l_{n+1}} \cdot \frac{M_n^{n+1}}{E \cdot I_{n+1}}$$

$$\frac{M_{n-1} \cdot l_n}{E \cdot I_n} + \frac{2 M_n}{E} \left( \frac{l_n}{I_n} + \frac{l_{n+1}}{I_{n+1}} \right) + \frac{M_{n+1} \cdot l_{n+1}}{E \cdot I_{n+1}} = 6 \left[ \frac{-M_b^n}{E \cdot I_n \cdot l_n} - \frac{M_a^{n+1}}{E \cdot I_{n+1} \cdot l_{n+1}} \right]$$

En cas de charge uniforme complète

$$\frac{M_{n-1} \cdot l_n}{E \cdot I_n} + \frac{2 M_n}{E} \left( \frac{l_n}{I_n} + \frac{l_{n+1}}{I_{n+1}} \right) + \frac{M_{n+1} \cdot l_{n+1}}{E \cdot I_{n+1}} = \varnothing \left[ \frac{p_n \cdot l_n^3}{4 E \cdot I} + \frac{p_{n+1} \cdot l_{n+1}^3}{4 E \cdot I_{n+1}} \right]$$

Si les travées sont égales

$$M_{n-1} + 4 M_n + M_{n+1} = - \frac{1}{2} p \cdot l^2$$

(2 travées contigües de l'appui n chargées).

L'équation des 3 angles peut se mettre sous la forme

$$P_n \cdot \varphi_{n-1} + 2 (P_n + P_{n+1}) \cdot \varphi_n + P_{n+1} \cdot \varphi_{n+1} = - \frac{2 M_{n-1}^n - M_n^n}{l_n^2 \cdot E} + \frac{2 M_{n+1}^{n+1} - M_n^{n+1}}{l_{n+1}^2 \cdot E}$$

En cas de charge uniforme complète de chaque travée,

$$P_n \cdot \varphi_{n+1} + 2 (P_n + P_{n+1}) \cdot \varphi_n + P_{n+1} \cdot \varphi_{n+1} = - \frac{P_n \cdot l_n^2}{24 E} + \frac{P_{n+1} \cdot l_{n+1}^2}{24 E}$$

Pour toute la poutre, on a un système de N+1 équations à N+1 inconnues tout comme pour l'équation des 3 moments. Cette dernière méthode toutefois réduit de 2 le nombre des inconnues si les appuis extrêmes sont simples ( $M_0 = 0$ ,  $M_n = 0$ ). L'équation de 3 angles réduit de 2 le nombre des inconnues lorsque les appuis extrêmes sont des encastremets ( $\varphi_0 = 0$ ,  $\varphi_n = 0$ ). Si toutes les travées ont même moment d'inertie

$$\frac{\varphi_{n-1}}{l_n} + 2 \varphi_n \left( \frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right) + \frac{\varphi_{n+1}}{l_{n+1}} = - \frac{1}{24 E \cdot I} (P_n \cdot l_n^2 - P_{n+1} \cdot l_{n+1}^2)$$

si les travées ont même raideur (même I et même l)

$$\varphi_{n-1} + 4 \varphi_n + \varphi_{n+1} = - \frac{1}{24 E \cdot I} (P_n - P_{n+1})$$

Lorsque les 2 travées contigües d'un appui ne supportent pas de charges, les équations précédentes ont les seconds membres nuls. Si les surcharges se rapportent à une seule travée, quelle que soit leur nature (force ou moment), les travées non chargées, à gauche et à droite, satisfont à la propriété des foyers. Les foyers de gauche et de droite, se déterminent à partir des appuis extrêmes, en vertu de la formule de récurrence

$$P_n (2 - i_n) + P_{n+1} \left( 2 - \frac{1}{i_{n+1}} \right) = 0$$

pour les foyers de gauche. En cas de travées identiques,  $4 - i_n - \frac{1}{i_{n+1}} = 0$

En cas d'appui extrême articulé, on a :

$i_1 = 0,5$  ,  $i_2 = 0,285$  ,  $i_3 = 0,269$  ,  $i_4 = 0,268$  ,  $i_5 = 0,267$  , etc...

$$(i_n = - \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n})$$

En cas d'encastremets extrêmes

$i_1 = 0$  ,  $i_2 = 0,25$  ,  $i_3 = 0,266$  ,  $i_4 = 0,267$  , etc...

Donc, l'influence des conditions d'appuis d'extrémités s'atténue rapidement et lorsqu'il y a plus de 5 travées égales, on peut considérer toutes les travées comprises entre les 4 extrêmes comme identique au point de vue de la sollicitation. La distance du foyer de gauche à l'appui de gauche est

$$x_1 = l_n \frac{1 - 2 i_n}{3 (1 - i_n)}$$

il est toujours dans le tiers de gauche. Le rapport des moments extrêmes d'une travée non chargée est d'ailleurs

$$\frac{M_{n-1}}{M_n} = - k_n = - \frac{1 - 2 i_n}{2 - i_n}$$

Donc les moments sur appui provenant de la surcharge d'une travée s'atténuent très rapidement lorsqu'on s'éloigne de la travée chargée.

### LIGNE D'INFLUENCE.

Une charge mobile égale à l'unité parcourt la n<sup>e</sup> travée. A l'appui n - 1 on a :



$$P_{n-1} \cdot \varphi_{n-2} + 2 (P_{n-1} + P_n) \cdot \varphi_{n-1} + P_n \cdot \varphi_n = \frac{\Phi_a}{2 E}$$

à l'appui n

$$P_n \cdot \varphi_{n-1} + 2 (P_n + P_{n+1}) \cdot \varphi_n + P_{n+1} \cdot \varphi_{n+1} = - \frac{\Phi_b}{2 E}$$

A tous les autres appuis, l'équation est sans second membre. Donc, en vertu de la propriété des foyers,

$$- i_{n-1} = \frac{\varphi_{n-2}}{\varphi_{n-1}} \quad \text{et} \quad \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = - i'_{n+1}$$

$$\varphi_{n-1} [P_{n-1} (2 - i_{n-1}) + 2 P_n] + P_n \cdot \varphi_n = \frac{\Phi_a}{2 E}$$

$$P_n \cdot \varphi_{n-1} + \varphi_n [2 P_n + P_{n+1} (2 - i'_{n+1})] = - \frac{\Phi_b}{2 E}$$

En vertu des formules de récurrence des foyers ces équations s'écrivent :

$$P_n \left( \frac{\varphi_{n-1}}{i_n} + \varphi_n \right) = \frac{\Phi_a}{2 E} \quad P_n (\varphi_{n-1} + \frac{\varphi_n}{i'_n}) = - \frac{\Phi_b}{2 E}$$

d'où

$$\varphi_{n-1} = \frac{\Phi_b + \frac{\Phi_a}{i_n}}{2 E \cdot P_n \left( \frac{1}{i_n \cdot i'_n} - 1 \right)} = \frac{i_n}{2 E \cdot P_n} \cdot \frac{\Phi_b \cdot i'_n + \Phi_a}{1 - i_n \cdot i'_n}$$

$$\varphi_n = - \frac{i'_n}{2 E \cdot P_n} \cdot \frac{\Phi_a \cdot i_n + \Phi_b}{1 - i_n \cdot i'_n}$$

Les rotations des extrémités des travées chargées sont des fonctions linéaires des fonctions d'influence. Dès lors, on connaît

$$\varphi_{n-2} = - i_{n-1} \cdot \varphi_{n-1} \quad \varphi_{n-3} = i_{n-1} \cdot i_{n-2} \cdot \varphi_{n-1} \quad \text{etc...}$$

$$\varphi_{n+1} = - i'_{n+1} \cdot \varphi_n \quad \text{etc...}$$

On peut aussi grâce aux éléments connus des foyers fixes, tracer les lignes d'influence de tous les angles  $\varphi$ , en faisant circuler la charge successivement sur toutes les travées. DANS L'ETENDUE D'UNE TRAVEE, LES LIGNES D'INFLUENCE DE TOUS LES  $\varphi$  SONT SEMBLABLES. Il est donc très facile de les tracer à l'aide des fonctions d'influence. CES LIGNES REPRESENTENT A L'ECHELLE ET AU SIGNE PRES, LES LIGNES D'INFLUENCE DES MOMENTS AUX APPUIS. En effet,

$$M_{n-1} = - 2 E \cdot P_{n-1} (2 \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}) = - 2 E \cdot P_{n-1} (2 - i_{n-1}) \cdot \varphi_{n-1}$$

$$M_n = 2 E \cdot P_{n+1} (2 \varphi_n + \varphi_{n+1}) = 2 E \cdot P_{n+1} (2 - i'_{n+1}) \cdot \varphi_n$$

Ces formules sont tout à fait générales. On voit notamment qu'aux extrémités des travées chargées :

$$M_{n-1} = - \frac{P_{n-1}}{P_n} \cdot \frac{i_n (2 - i_{n-1})}{1 - i_n \cdot i'_n} (\Phi_b \cdot i'_n + \Phi_a) < 0$$

$$M_n = - \frac{P_{n+1}}{P_n} \cdot \frac{i'_n (2 - i'_{n+1})}{1 - i_n \cdot i'_n} (\Phi_a \cdot i_n + \Phi_b) < 0$$

ou encore

$$M_{n-1} = - \frac{(1 - 2 i_n) \cdot (\Phi_b \cdot i'_n + \Phi_a)}{1 - i_n \cdot i'_n} ; \quad M_n = - \frac{(1 - 2 i'_n) \cdot (\Phi_a \cdot i_n + \Phi_b)}{1 - i_n \cdot i'_n}$$

Ces dernières formules sont tout à fait générales. On peut par cette méthode, tracer les lignes spécifiques d'influence des moments aux appuis pour des poutres continues à 2, 3, 4, 5 travées identiques, qui peuvent servir pour toutes les constructions de ce genre. Lorsqu'il y a plus de 5 travées, on peut admettre pour toutes les travées centrales  $i = i' = 0,267$ . Les lignes d'influence ne se modifient plus.

Lorsque la travée est couverte d'une charge uniforme, il suffit de remplacer dans les formules précédentes  $\Phi_a$  et  $\Phi_b$  par  $p.l^2/12$ . Lorsqu'il y a un grand nombre de travées et que  $i = i'$ , on a :

$$M_{n-1} = M_n = - \frac{p.l^2}{12} \cdot \frac{1 - 2i}{1 - i}$$

Si  $i = 0,267$

$$M_{n-1} = M_n = - \frac{0,636 p.l^2}{12} = - \frac{p.l^2}{18,85}$$

Le moment au milieu de la travée est alors

$$(M_m)_n = \frac{0,864}{12} p.l^2 = \frac{p.l^2}{13,9}$$

Les moments maxima d'un appui ne s'obtiennent pas en chargeant une seule travée mais les deux voisines de l'appui et aussi toutes celles qui sont de part et d'autre et séparées de l'appui que l'on envisage par un nombre pair de travées. Mais les effets vont s'atténuant rapidement à mesure que l'on s'éloigne des appuis considérés, de sorte que les maxima sous l'effet des charges uniformes divisibles sont peu supérieurs à ceux correspondant à la surcharge des deux travées continues (soit  $p.l^2/9,425$ ). Sous l'effet des charges uniformes complètes, les moments sont moindres. Il est dès lors facile d'établir le tableau des moments aux appuis :

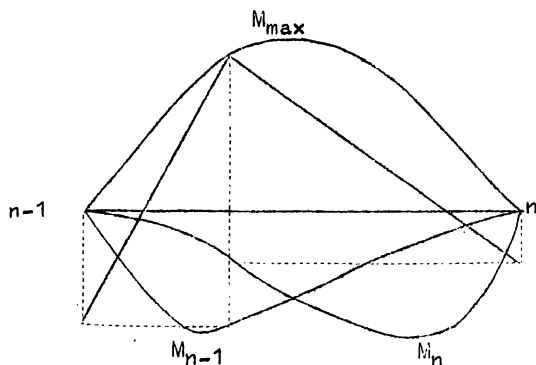
- a) sous l'effet d'une charge uniforme complète (poids mort)
- b) d'une surcharge uniforme divisible dans la situation la plus défavorable pour les travées continues à 2, 3, ... n travées égales.

On peut déduire les lignes d'influence des moments aux appuis, celles des moments en un point quelconque, par exemple au milieu de la travée. Les maxima s'obtiennent en surchargeant la travée même et celles qui en sont distantes d'un nombre pair; toutefois l'influence de la surcharge des travées successives est encore moindre de telle sorte que le maximum ne peut guère dépasser  $p.l^2/13,9$ . On peut établir facilement le tableau des valeurs des moments aux milieux des travées dans les mêmes hypothèses que celles envisagées ci-dessus pour les moments aux appuis. Mais en vue du calcul et de la répartition des barres principales et obliques dans les poutres en béton armé, il est préférable d'avoir les lignes enveloppes spécifiques des moments positifs dans les diverses travées. L'enveloppe spécifique des moments positifs est la courbe des moments au droit de la force mobile. La valeur est :

$$M_x^n = \frac{x.(l_n - x)}{l_n} + \frac{M_{n-1}(l_n - x).M_n.x}{l_n}$$

Pour toutes valeurs de  $x$ ,  $M_{n-1}$  et  $M_n$  sont connus, on peut tracer la ligne enveloppe spécifique. Pour un train de charges, on ne peut pas s'en servir. Comme une ligne d'influence par addition d'ordonnées au droit des diverses forces. En admettant que les maxima se produisent sous la plus forte charge du train, il faut tracer l'enveloppe des moments positifs totaux sous cette charge en se servant de l'enveloppe spécifique et des lignes d'influence de  $M_{n-1}$  et  $M_n$ .

À chaque position, on trace le triangle des moments afférents à chaque force, on additionne les ordonnées correspondant à l'alignement de la plus grande



force, compte tenu des grandeurs respectives des forces. S'il y a plusieurs forces, il sera en général plus rapide d'opérer par la méthode de la poutre mobile, en se servant d'un polygone funiculaire type, permettant par simple report d'ordonnées de tracer les polygones funiculaires pour des positions successives du train de charges, mais rapportées aux côtes de fermeture réel, qui est déterminé par les moments aux appuis dont la grandeur est obtenue au moyen de leur ligne d'influence. L'ensemble de ces polygones permet de tracer l'enveloppe des moments positifs, mais aussi celle des moments négatifs, formée de deux segments dans le voisinage des appuis; mais qui existent aussi dans la zone médiane de

la poutre, du fait des charges circulant sur les travées voisines. De même, il y a des moments positifs possibles aux appuis. Les forces circulant sur les autres travées influent par les moments qui résultent des moments aux appuis de la travée considérée, le diagramme des moments partiels correspondant étant rectiligne. L'action est faible, elle devient nulle à l'un ou l'autre foyer, selon que la force agit à droite ou à gauche. Elle s'atténue aussi rapidement à mesure que les surcharges s'éloignent de la travée envisagée.

Les lignes d'influence des efforts tranchant se déduisent de celles des moments aux appuis par les formules

$$T_{n-1} = \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} + \frac{l_n - x}{l_n}$$

$$T_n = \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} - \frac{x}{l_n}$$

lorsque la travée est chargée. Dans les travées non chargées, l'effort tranchant est constant et égal à :

$$\frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}$$

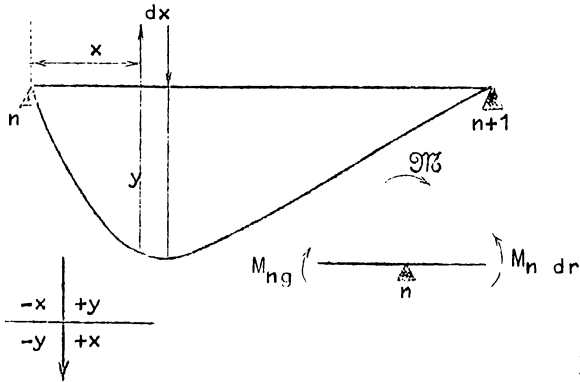
On a :

$$R_n = (T_{n dr} - T_g)$$

Pour le béton armé, il n'est pas indispensable de déterminer les  $T$  maxima, il suffit de tracer les enveloppes tant positives que négatives, des moments. Les réactions d'appui peuvent s'obtenir sans l'aide des  $T$ , par application du théorème de Maxwell. La ligne d'influence de  $R$  n'est autre chose que l'élastique de la poutre sous l'effet d'une charge égale à l'unité agissant en lieu et place de la réaction d'appui  $R_n$ . On peut déterminer le diagramme des moments sous l'effet de cette sollicitation et une double intégration donne l'élastique. On peut de même tracer les lignes d'influence des flèches, p. ex. au milieu des travées, en traçant l'élastique sous l'effet d'une force égale à l'unité agissant en un tel point.

EFFETS DE COUPLES EXTERIEURS.

Supposons un couple extérieur  $\mathcal{M}$  agissant en un point d'abscisse  $x$  de la travée n°. L'ordonnée d'influence spécifique de  $M_n$  en ce point est  $y$ , qui n'est fonction que de  $\Phi_a$  et  $\Phi_b$  c'est-à-dire des moments statiques du diagramme des moments  $m$  de la travée simplement appuyée aux extrémités et chargée d'une force égale à 1 au point  $x$ . Lorsqu'au lieu de la force agit un moment  $\mathcal{M}$ , on a



$$\mathcal{M}_m = \mathcal{M} \frac{dm}{dx}$$

il en résulte que

$$M_n = \mathcal{M} \frac{dy}{dx}$$

On peut d'ailleurs démontrer la propriété plus généralement. On peut substituer au couple deux forces infiniment voisines  $\mathcal{M}/dx$ . Dès lors

$$\frac{\mathcal{M}}{dx} (-y + y + dy) = \mathcal{M} \frac{dy}{dx}$$

Donc, les lignes d'influence des divers éléments permettent de déterminer les effets des couples extérieurs. Toutefois la méthode est en défaut lorsque le couple agit au droit d'un appui n. On a alors

$$M_n dr - M_{ng} = \mathcal{M}$$

ou

$$P_n \cdot \varphi_{n-1} + 2 (P_n + P_{n+1}) \cdot \varphi_n + P_{n+1} \cdot \varphi_{n+1} = \frac{\mathcal{M}}{2 E}$$

Or

$$\varphi_{n-1} = -i_n \cdot \varphi_n \quad \varphi_{n+1} = -i'_{n+1} \cdot \varphi_n$$

Donc

$$\varphi_n [(2 - i_n) \cdot P_n + (2 - i'_{n+1}) \cdot P_{n+1}] = \frac{\mathcal{M}}{2 E}$$

d'après les formules de récurrence

$$P_n \cdot \varphi_n \left( \frac{1}{i'_n} - i_n \right) = \frac{\mathcal{M}}{2 E}$$

d'où

$$\varphi_n = \frac{\mathcal{M}}{2 E \cdot P_n} \cdot \frac{i'}{1 - i_n \cdot i'_n} = \frac{\mathcal{M}}{2 E \cdot P_{n+1}} \cdot \frac{i_{n+1}}{1 - i_{n+1} \cdot i'_{n+1}}$$

Il en résulte que

$$M_n dr = 2 E \cdot P_{n+1} (2 \varphi_n + \varphi_{n+1}) = \mathcal{M} \frac{i_{n+1} (2 - i'_{n+1})}{1 - i_{n+1} \cdot i'_{n+1}}$$

$$M_{ng} = - 2 E \cdot P_n (2 \varphi_n + \varphi_{n-1}) = - \frac{\mathcal{M} \cdot i_n (2 - i_n)}{1 - i_n \cdot i'_n}$$

INEGALE ELEVATION DE TEMPERATURE.

Supposons qu'il y ait une différence de température  $t$  entre les faces supérieure et inférieure de la poutre. Il en résulte une différence de dilatation

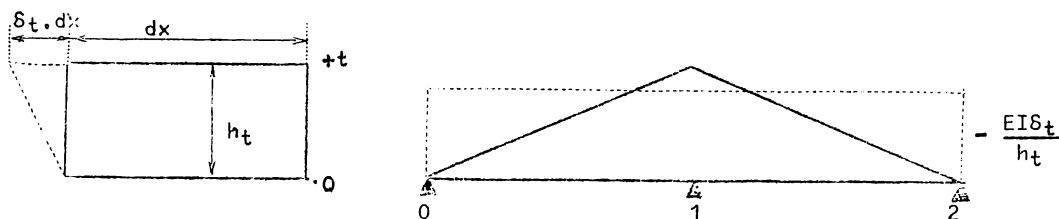
Les sections s'inclinent de  $\frac{dx}{\varrho} = - \frac{\delta t}{h_t} dx$  d'où  $\frac{1}{\varrho} = \frac{M_t}{E \cdot I} = - \frac{\delta t}{h_t}$  ;

$h_t$  étant la hauteur de la poutre. Donc  $M_t = - \frac{E.I.\delta_t}{h_t}$ . Si la différence de température est la même partout,  $M_t$  est constant. Il suffit d'introduire dans toutes les formules précédentes, les expressions

$$\delta b_a = \delta b_b = - \frac{E.I.\delta_t}{h_t} \cdot \frac{l^2}{2}$$

Donc  $\frac{2 \delta b_{n-1} - \delta b_n}{l_n^2 E} = - \frac{I.\delta_t}{2 h_t} = \frac{2 \delta b_{n+1} - \delta b_n}{E.l_{n+1}^2}$  (si  $h_t$  et  $l$  sont constants)

Donc toutes les équations des trois angles sont sans second membre, sauf celles des appuis extrêmes. Tous les angles  $\varphi$  sont proportionnels à  $\frac{\delta_t}{h_t}$  et  $M_n = \frac{2 E.I}{l_{n+1}} (2 \varphi_n + \varphi_{n+1}) + \frac{E.I.\delta_t}{h_t}$ . Il faut prendre garde au sens de l'augmentation de température et du moment qui en résulte.



Exemples.- A) POUTRE SUR 3 APPUIS.

$$\varphi_1 = 0 ; \varphi_0 = - \varphi_2 ; M_0 = M_2 = 0 = 4 E.P.\varphi_0 + \frac{E.I.\delta_t}{h_t} ; \varphi_0 = - \frac{1.\delta_t}{4 h_t}$$

$$M_1 = - 2 E.P.\varphi_0 + \frac{E.I.\delta_t}{h_t} = \frac{3 E.I.\delta_t}{h_t}$$

B) POUTRE SUR 4 APPUIS.

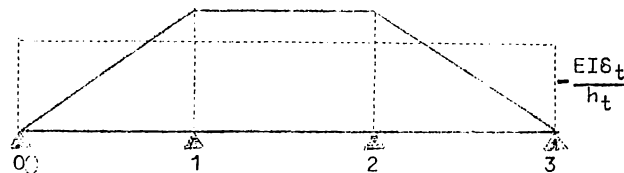
$$\varphi_1 = - \varphi_2 ; \varphi_0 = - \varphi_3 ; M_0 = M_3 = 0$$

$$0 = 4 E.P.\varphi_0 + 2 E.P.\varphi_1 + \frac{E.I.\delta_t}{h_t} ;$$

$$P.(\varphi_0 + 3 \varphi_1) = 0 ; \varphi_0 = - 3 \varphi_1$$

$$+ 10 E.P.\varphi_1 = \frac{E.I.\delta_t}{h_t}$$

$$\varphi_1 = \frac{1.\delta_t}{10 h_t} ; \varphi_0 = - \frac{3}{10} \frac{1.\delta_t}{h_t} ; M_1 = M_2 = 2 E.P.\varphi_1 + \frac{E.I.\delta_t}{h_t} = \frac{E.I.\delta_t}{5 h_t} + \frac{E.I.\delta_t}{h_t} = \frac{6 E.I.\delta_t}{5 h_t}$$

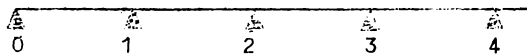


C) Dans le cas d'un grand nombre de travées égales,  $\varphi = 0$  et  $M = \frac{E.I.\delta_t}{h_t}$  pour les travées centrales. Admettons qu'en 2 on ait atteint la valeur normale

$$\varphi_0 = 0 \text{ et } \varphi_0 + 4 \varphi_1 = 0 , \varphi_0 = -4 \varphi_1$$

$$\text{En 0 , } 4 E.P.\varphi_0 + 2 E.P.\varphi_1 + \frac{E.I.\delta_t}{h_t} = 0 , 14 E.P.\varphi_1 = \frac{E.I.\delta_t}{h_t} , \varphi_1 = \frac{1.\delta_t}{14 h_t}$$

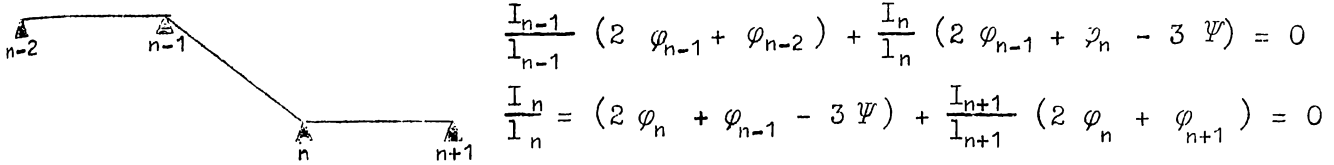
$$\varphi_0 = - \frac{2}{7} \cdot \frac{1.\delta_t}{h_t} \quad M_1 = \frac{9}{7} \cdot \frac{E.I.\delta_t}{h_t}$$



Si on considère  $\varphi_3 = 0$  au lieu de  $\varphi_2 = 0$  on trouve  $M_1 = \frac{33}{26} \cdot \frac{E.I.\delta t}{h_t}$  résultat peu différent du précédent.

DENIVELLATION DES APPUIS.

Supposons qu'une travée, et une seule, s'incline d'un angle  $\Psi$ . Aux deux extrémités de cette travée, on a



$$\frac{I_{n-1}}{I_{n-1}} (2 \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}) + \frac{I_n}{I_n} (2 \varphi_{n-1} + \varphi_n - 3 \Psi) = 0$$

$$\frac{I_n}{I_n} = (2 \varphi_n + \varphi_{n-1} - 3 \Psi) + \frac{I_{n+1}}{I_{n+1}} (2 \varphi_n + \varphi_{n+1}) = 0$$

d'où par soustraction

$$P_{n-1} \cdot \varphi_{n-2} + \varphi_{n-1} (2 P_{n-1} + P_n) - \varphi_n (P_n + 2 P_{n+1}) - P_{n+1} \cdot \varphi_{n+1} = 0$$

Comme toutes les autres équations des 3 angles sont sans second membre, il en résulte que

$$\varphi_{n-2} = - i_{n-1} \cdot \varphi_{n-1} ; \quad \varphi_{n+1} = - i'_{n+1} \cdot \varphi_n$$

Donc

$$\varphi_{n-1} [(2 - i_{n-1}) \cdot P_{n-1} + P_n] - \varphi_n [P_n + (2 - i'_{n+1}) \cdot P_{n+1}] = 0$$

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = \frac{1 - i'_n}{1 - i_n} \cdot \frac{i_n}{i'_n} \quad \text{car} \quad \varphi_{n-1} (1 - \frac{1}{i_n}) - \varphi_n (1 - \frac{1}{i'_n}) = 0$$

C'est la propriété des points neutres de Maurice Levy; on a :

$$M_{n-1} = - 2 E \cdot P_{n-1} (2 \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}) = - 2 E \cdot P_{n-1} \cdot \varphi_{n-1} (2 - i_{n-1})$$

$$M_n = 2 E \cdot P_{n+1} (2 \varphi_n + \varphi_{n+1}) = 2 E \cdot P_{n+1} \cdot \varphi_n (2 - i'_{n+1})$$

$$\frac{M_{n-1}}{M_n} = - \frac{P_{n-1}}{P_{n+1}} \cdot \frac{2 - i_{n-1}}{2 - i'_{n+1}} \cdot \frac{1 - i'_n}{1 - i_n} \cdot \frac{i_n}{i'_n} = - \frac{(1 - i'_n) \cdot (2 i_n - 1)}{(1 - i_n) \cdot (2 i'_n - 1)} = \text{constante}$$

Donc lorsqu'une travée s'incline, la loi des moments est une droite passant par un point de l'axe de la pièce qui ne dépend que des foyers de la travée. S'il y a un très grand nombre de travées,  $i = i'$  et le point neutre est au milieu.

On a :

$$\varphi_{n-1} [(2 - i_{n-1}) \cdot P_{n-1} + 2 P_n] + P_n \cdot \varphi_n = 3 \Psi \cdot P_n$$

$$\varphi_{n-1} \cdot P_n + \varphi_n [2 P_n + (2 - i'_{n+1}) \cdot P_{n+1}] = 3 \Psi \cdot P_n$$

d'où

$$\varphi_{n-1} [(2 - i_{n-1}) \cdot P_{n-1} + 3 P_n] + \varphi_n [3 P_n + (2 - i'_{n+1}) \cdot P_{n+1}] = 6 \Psi \cdot P_n$$

$$\varphi_{n-1} (1 + \frac{1}{i_n}) + \varphi_n (1 + \frac{1}{i'_n}) = 6 \Psi$$

$$\varphi_{n-1} (\frac{1 + i_n}{i_n}) + \varphi_n (\frac{i'_n + 1}{i'_n}) = 6 \Psi$$

comme

$$\frac{\varphi_{n-1}}{i_n} = \frac{\varphi_n}{i'_n} \cdot \frac{1 - i'_n}{1 - i_n}$$

on a finalement

$$\varphi_n = \frac{3 \Psi \cdot i'_n (1 - i_n)}{1 - i_n \cdot i'_n}$$

$$\varphi_{n-1} = \frac{3 \Psi \cdot i_n (1 - i'_n)}{1 - i_n \cdot i'_n}$$

$$\left. \begin{aligned} M_{n-1} &= 2 E.P_n \left(2 - \frac{1}{i_n}\right) \cdot \varphi_{n-1} = 6 E.P_n \cdot \psi \frac{(2 i_n - 1) \cdot (1 - i'_n)}{1 - i_n \cdot i'_n} < 0 \\ M_n &= - 2 E.P_n \left(2 - \frac{1}{i'_n}\right) \cdot \varphi_n = - 6 E.P_n \cdot \psi \frac{(2 i'_n - 1) \cdot (1 - i_n)}{1 - i_n \cdot i'_n} > 0 \end{aligned} \right\} \text{ Si } \psi > 0$$

Si plusieurs appuis se dénivellent, il en résulte des inclinaisons des travées adjacentes, que l'on peut déterminer. On superpose les effets des inclinaisons des diverses travées, calculés d'après les indications précédentes. On pourrait aussi envisager les déformations élastiques des appuis, proportionnelles aux intensités des réactions. On n'en tient pas compte dans le béton armé, car on néglige les déformations longitudinales des appuis par compression et il n'est guère possible de tenir compte des tassements des fondations. On les réduit au minimum par de larges bases autant que possible uniformément chargées ou bien par des fondations sur pilots. Nous n'insistons donc pas sur ce point, mais il n'est pas difficile d'établir une équation générale des moments ou des angles d'après les formules générales indiquées, ou exprimant les réactions d'appuis en fonction des moments.

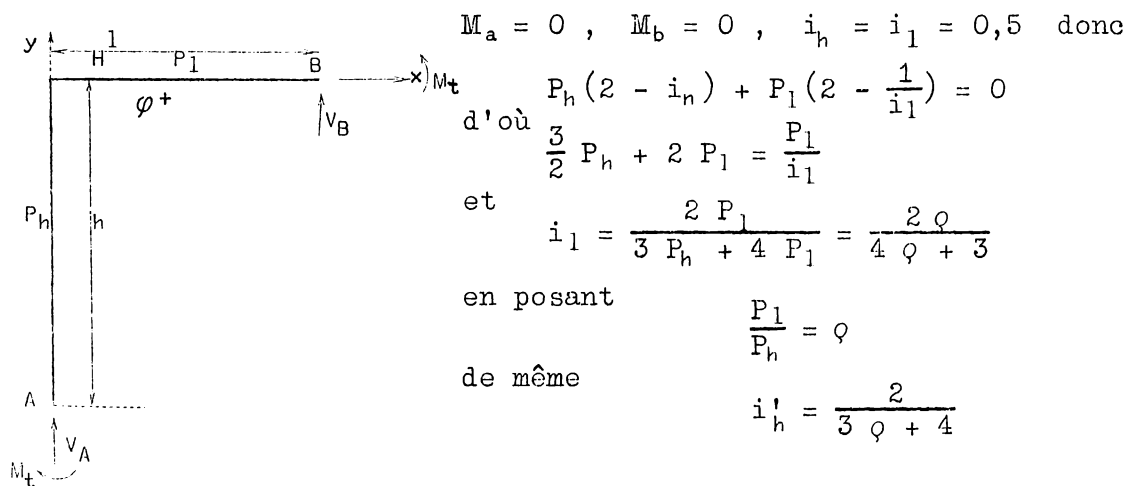
OBSERVATION GENERALE.

Les considérations précédentes sont intégralement applicables à tout système de barre polygonal à noeuds fixes, c'est-à-dire à liaisons telles que les noeuds ne puissent subir que des rotations. Il faut toutefois tenir compte éventuellement de l'incidence des forces extérieures par rapport aux barres.

DEUXIEME SECTION - SEMI-PORTIQUE A APPUIS FIXES.

Les semi-portiques sont des constructions simples à deux barres seulement et à un noeud rigide, dont l'étude est une application simple de l'observation qui précède. Le système se résoud toujours par une équation unique.

A) SEMI-PORTIQUE A DEUX ROTULES.



Ligne d'influence du moment Ms sous l'effet d'une force verticale sur la travée.- D'après la section précédente

$$M_s = - \frac{1 - 2 i_1}{1 - i_1 \cdot i'_1} (\varphi_a + i'_1 \cdot \varphi_b) = - \frac{1}{1 + \varphi} (\varphi_a + 0,5 \varphi_b)$$

En cas de surcharge complète uniforme  $\phi_a = \phi_b = \frac{p.l^2}{12}$  et  $M_s = -\frac{p.l^2}{8(1+\varphi)}$

On a en outre :

$$V_A = -\frac{M_s}{l} + t_a ; \quad V_B = +\frac{M_s}{l} - t_b ; \quad H = -\frac{M_s}{h}$$

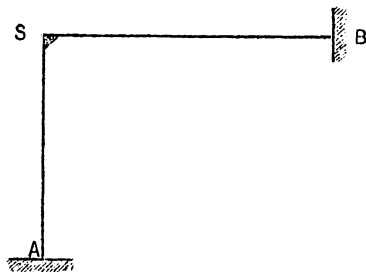
ce qui permet de tracer les lignes d'influence de ces éléments. En cas de surcharge complète,

$$t_a = -t_b = \frac{p.l}{2} \quad \text{et} \quad V_A = \frac{p.l}{8(1+\varphi)} + \frac{p.l}{2} = \frac{p.l}{8} \cdot \frac{5+4\varphi}{1+\varphi}$$

$$V_B = \frac{p.l}{8} \cdot \frac{3+4\varphi}{1+\varphi} \quad H = \frac{p.l}{8} \cdot \frac{1}{h(1+\varphi)}$$

On étudierait de même les effets d'une charge horizontale agissant sur la béquille, il suffit de substituer  $1/\varphi$  à  $\varphi$  dans la formule de  $M_s$ .

B) SEMI-PORTIQUE A DOUBLE ENCASTREMENT.



$$\phi_a = \phi_b = 0, \quad i_h = i'_l = 0,$$

$$2P_h + P_l(2 - \frac{1}{i_1}) = 0 \quad \text{d'où} \quad i_1 = \frac{\varphi}{2(1+\varphi)}$$

de même

$$i'_h = \frac{1}{2(1+\varphi)}$$

Lignes d'influence des moments  $M_A, M_s$  et  $M_B$  sous l'effet d'une force verticale mobile sur la travée.- On a toujours

$$M_A = -\frac{M_s}{2}$$

D'après les formules établies pour les poutres

continues,

$$M_s = -\frac{1-2i_1}{1-i_1 \cdot i'_l} (\phi_a \cdot i_1 + \phi_b)$$

$$M_B = -\frac{1-2i_1}{1-i_1 \cdot i'_l} (\phi_a \cdot i_1 + \phi_b) = -\left[\frac{\phi_a}{2} \cdot \frac{\varphi}{1+\varphi} + \phi_b\right]$$

d'où

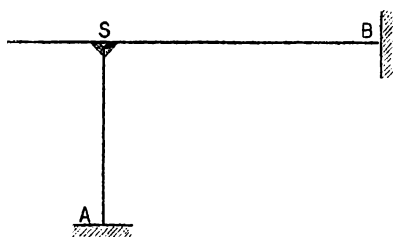
$$H = \frac{-M_s - M_a}{h} = \frac{3M_s}{2h}, \quad V_A = \frac{M_B - M_s}{l} + t_a, \quad V_B = \frac{-M_B - M_s}{l} - t_b$$

En cas de surcharge uniforme complète  $p$  :  $\phi_a = \phi_b = \frac{p.l^2}{12}$  et

$$M_s = -\frac{p.l^2}{12(1+\varphi)} \quad M_B = -\frac{p.l^2}{24} \cdot \frac{2+3\varphi}{1+\varphi} \quad M_A = \frac{p.l^2}{24(1+\varphi)}$$

$$H = \frac{p.l^2}{8h(1+\varphi)} \quad V_A = \frac{p.l(4+3\varphi)}{8(1+\varphi)} \quad V_B = \frac{p.l(4+5\varphi)}{8(1+\varphi)}$$

C) EQUILIBRE DU MOMENT SUR LA BEQUILLE PAR UN ENCORBELLEMENT.



Supposons la travée du cas B complètement chargée d'une surcharge uniforme  $p$ . Il en résulte une flexion de la béquille. Cherchons à équilibrer ce moment par un encorbellement chargé produisant sur la tête de béquille un moment inverse de telle sorte que la béquille soit simplement comprimée. Soit  $\mathcal{M}$  ce couple qui doit être négatif. D'après la section précédente,



$$M'_{3h} = \frac{\mathfrak{M} \cdot i'_h (2 - i_h)}{1 - i_h \cdot i'_h} = \frac{\mathfrak{M}}{1 + \varphi} = M_S + \frac{p \cdot l^2}{1 + \varphi}$$

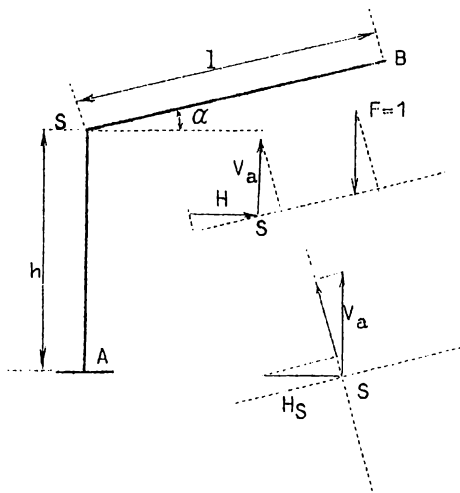
Donc le moment d'encastrement de l'encorbellement doit être égale à  $\frac{p \cdot l^2}{12}$ . Dans ces conditions  $M_B = M_{S, \text{tot}} = -\frac{p \cdot l^2}{12}$ . La sollicitation de la travée est la même que si elle était en S et en B. Cette conclusion pourrait être obtenue sans calcul en observant que le problème posé consistait à annuler  $\varphi_1$ . Mais les opérations précédentes sont données surtout à titre de contrôle des formules. Ce dispositif est avantageux car il annule toute poussée et toute flexion dans les piliers extrêmes qui sont plus exposés ainsi que nous le verrons.

#### D) SEMI-PORTIQUE A APPUIS HETEROGENES.

On peut concevoir le cas d'un semi-portique dont un appui est un encastrement, l'autre une rotule. La position relative de ces deux appuis peut être inversée. En toute hypothèse, le calcul se conduit comme ci-dessus, il n'y a que les valeurs relatives de  $i$  et de  $i'$  qui changent. Nous n'étudierons donc pas ce cas, nous nous bornerons à étudier une application compliquée par le fait que la travée est inclinée. Nous la supposons appuyée par une rotule, la béquille étant encastree, dispositif qui a l'avantage de réaliser en B un moment nul et une faible réaction d'appui. On a  $\varphi_a = 0$ ,  $M_b = 0$ ,  $i_h = 0$ ,  $i'_1 = 0,5$ , d'où

$$i_1 = \frac{\varphi}{2(1 + \varphi)} \quad \text{et} \quad i'_h = \frac{2}{3\varphi + 4}$$

Lignes d'influence des effets des charges verticales sur la travée. - Nous supposons une charge verticale mobile de valeur égale à 1,  $\alpha$  étant l'inclinaison de la travée sur l'horizontale. La composante perpendiculaire à la travée est égale à  $\cos \alpha$ . On a



$$M_A = -\frac{M_S}{2}$$

$$M_S = -\frac{1 - 2i_1}{1 - i_1 \cdot i'_1} (\varphi_a + i'_1 \cdot \varphi_b) \cdot \cos \alpha$$

$$= -\frac{4}{4 + 3\varphi} (\varphi_a + 0,5 \varphi_b) \cdot \cos \alpha$$

$$M_B = 0, \quad H_A = +\frac{M_S - M_a}{h} = -\frac{3M_S}{2h}$$

$$H_A = -H_S = H_B$$

L'effort normal de compression dans la travée est

$$N = H_S \cdot \cos \alpha + V_a \cdot \sin \alpha \dots - \sin \alpha ;$$

$$V_a \cdot \cos \alpha - H_S \cdot \sin \alpha = -\frac{M_S}{1} + t_a \cdot \cos \alpha$$

$t_a$  étant considéré verticalement. On en

déduit les valeurs des réactions verticales

$$V_A = -\frac{M_S}{1 \cdot \cos \alpha} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1 \cdot \cos \alpha}{h}\right) + t_a$$

$$V_B = \frac{M_S}{1 \cdot \cos \alpha} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1 \cdot \sin \alpha}{h}\right) - t_b$$

Si nous avons une charge complète de p/m horizontal, on a

$$\Phi_a = \Phi_b = \frac{p.l^2 \cdot \cos\alpha}{12} ; \quad t_a = t_b = \frac{p.l \cdot \cos\alpha}{2}$$

d'où

$$M_s = - \frac{p.l^2}{2(4+3\varphi)} \cos^2\alpha ; \quad M_A = \frac{p.l^2 \cdot \cos^2\alpha}{4(4+3\varphi)} ; \quad H_s = \frac{3 p.l^2 \cdot \cos^2\alpha}{4(4+3\varphi).h}$$

Ces éléments sont les mêmes que si la travée n'était pas inclinée.

$$V_A = \frac{p.l \cdot \cos\alpha}{2} \cdot \frac{5+3\varphi + \frac{3}{2} \frac{l \cdot \sin\alpha}{h}}{4+3\varphi} ; \quad V_B = \frac{3 p.l \cdot \cos\alpha}{2} \cdot \frac{1+\varphi - \frac{l \cdot \sin\alpha}{2h}}{4+3\varphi}$$

Si la travée n'était pas inclinée, il suffit de faire  $\cos\alpha = 1$  et  $\sin\alpha = 0$  dans les formules précédentes. En cas de surcharge variables réparties suivant une loi linéaire (poussée de terre ou matières pulvérulentes ou de liquides), on se servira des valeurs de  $\int \Phi_a \cdot x \cdot dx$  et  $\int \Phi_b \cdot x \cdot dx$  données précédemment.

Lignes d'influence des effets des charges horizontales sur la béquille.-

On a :  $M_b = 0$

$$M_A = - \frac{1-2i_h}{1-i_h \cdot i'_h} (\Phi_a + i'_h \cdot \Phi_b) = - \left[ \Phi_a + \frac{2\Phi_b}{3\varphi+4} \right]$$

$$M_s = - \frac{1-2i'_h}{1-i_h \cdot i'_h} (\Phi_a \cdot i_h + \Phi_b) = - \frac{3\varphi}{3\varphi+4} \Phi_b$$

$$V_A = -V_B = - \frac{M_s}{l \cdot \cos\alpha} + \frac{H_s \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} , \quad H_s = H_b = \frac{-M_s - M_a}{h} - t_s , \quad H_a = \frac{M_s - M_a}{h} + t_a$$

L'effort normal de compression dans la travée est  $N = H_s \cdot \cos\alpha + V_a \cdot \sin\alpha$  (dans le cas où les actions horizontales agissent dans le sens de la compression de la travée). En cas de surcharge complète de la béquille,  $M_b = 0$

$$M_a = - \frac{p \cdot h^2}{4} \cdot \frac{\varphi+2}{3\varphi+4} , \quad M_s = - \frac{p \cdot h^2}{4} \cdot \frac{\varphi}{3\varphi+4} , \quad H_a = \frac{p \cdot h}{2} \cdot \frac{5+3\varphi}{3\varphi+4}$$

$$H_s = H_B = \frac{p \cdot h}{2} \cdot \frac{3(1+\varphi)}{3\varphi+4} ; \quad -V_B = V_A = \frac{p \cdot h^2}{4 l \cdot \cos\alpha} \cdot \frac{\varphi+6(1+\varphi)}{3\varphi+4} \frac{l \cdot \sin\alpha}{h}$$

Par permutation dans les formules on établirait facilement les éléments relatifs au cas où les appuis sont permutés, et pour le semi-portique à travée horizontale et à la béquille inclinée.

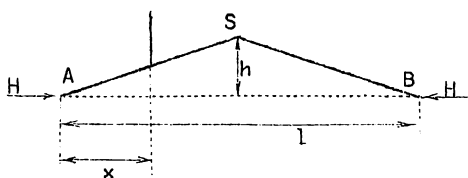
3<sup>e</sup> SECTION - POUTRE ARCBOUTEE A ARBALETRIERS SYMETRIQUES.

Supposons une telle poutre à 2 articulations, symétrique qui peut convenir pour des passerelles de petites portées,

$$i_a = i'_b = 0,5$$

Etudions les lignes d'influence des effets des forces verticales circulant sur la poutre.

$$V_A = \frac{1-x}{l} ; \quad V_B = \frac{x}{l} ; \quad M_a = 0 ; \quad M_B = 0 ;$$



$$M_S = - \frac{1 - 2 i'_a}{1 - i_a \cdot i'_a} (\Phi_a \cdot i_a + \Phi_b)$$

Les deux arbalétriers étant symétriques :

$$2 - i'_b + 2 - \frac{1}{i'_a} = 0 \quad \text{d'où} \quad i'_a = \frac{2}{7} = i_b \quad M_S = - \frac{1}{2} (0,5 \Phi_a + \Phi_b) .$$

$$\text{Or, } M_S = \frac{1-x}{1} \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - x\right) - H \cdot h = \frac{x}{2} - H \cdot h \quad \text{d'où} \quad H = - \frac{M_S}{h} + \frac{x}{2h}$$

En cas de surcharge uniforme d'une travée:  $\Phi_a = \Phi_b = \frac{p \cdot l^2}{48}$

$$V_A = \frac{3 p \cdot l}{8}, \quad V_B = \frac{p \cdot l}{8}; \quad M_S = - \frac{p \cdot l^2}{64}; \quad H = + \frac{5 p \cdot l^2}{64 h} .$$

En cas de surcharge totale :  $V_A = V_B = \frac{p \cdot l}{2}; \quad M_S = - \frac{p \cdot l^2}{32}; \quad H = - \frac{p \cdot l^2}{32 h} .$

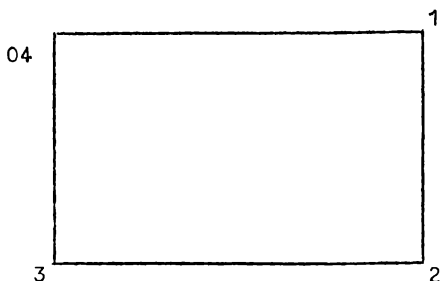
Cette disposition de poutre est donc avantageuse et réduit sensiblement les moments de flexion. Toutefois, il faut que  $h$  soit assez grand pour que les déformations longitudinales dues à  $H$  restent négligeables ( $h > l/8$ ). On peut étudier de même les effets d'actions quelconques sur des formes de toitures, éventuellement dissymétriques.

#### 4<sup>e</sup> SECTION - CADRES POLYGONAUX A NOEUDS FIXES.

On appelle cadre une construction formée de barres rigides constituant une figure fermée. Des cadres à noeuds fixes peuvent parfaitement se rencontrer dans les constructions, soit comme ferme (cadre triangulaire), soit dans les réservoirs, silos, etc. Un cadre rectangulaire peut être à noeuds fixes, il suffit qu'il soit appuyé en 2 sommets opposés diagonalement. En outre le système sert de base au calcul des cadres à appuis mobiles.

Soit un cadre polygonal ABCD...N à noeuds fixes. Il y a  $n$  côtés et  $n$  noeuds. Nous pouvons écrire  $n$  équations entre les rotations  $\varphi$  des noeuds, dont les seconds membres dépendent des actions extérieures agissant sur les barres.

On remarque que d'après ces équations, la propriété des foyers ne subsiste dans un cadre fermé que lorsque la sollicitation extérieure se réduit à un moment agissant en un noeud. Une seule des  $n$  équations est alors à second membre, donc tous les  $\varphi$  sont proportionnels à  $\mathfrak{M}$ . A vrai dire, les points fixes ne sont plus des foyers proprement dits. Comme pour les points neutres, leur position dépend de celle du noeud chargé et dépend en quelque sorte d'une superposition de diagramme de moments à foyers de droite et de gauche. Un exemple relatif à un cadre rectangulaire fera mieux comprendre.



Soit 0123(4) ce cadre, parcouru dans le sens positif de 0 à 4. Les rigidités des côtés 0, 1; 1,2; 2,3; 3,4(0) sont  $P_1, P_2, P_3, P_4$ . Au noeud (0,4) agit un moment  $\mathfrak{M}$ .

Les quatre équations sont :

$$P_4 \cdot \varphi_3 + 2 (P_4 + P_1) \cdot \varphi_0 + P_1 \cdot \varphi_1 = \frac{\mathfrak{M}}{2 E}$$

$$P_1 \cdot \varphi_0 + 2 (P_1 + P_2) \cdot \varphi_1 + P_2 \cdot \varphi_2 = 0$$

$$P_2 \cdot \varphi_1 + 2 (P_2 + P_3) \cdot \varphi_2 + P_3 \cdot \varphi_3 = 0$$

$$P_3 \cdot \varphi_2 + 2 (P_3 + P_4) \cdot \varphi_3 + P_4 \cdot \varphi_0 = 0$$

Tous les  $\varphi$  sont proportionnels à  $\mathfrak{M}$  mais d'une manière qui dépend de la position, du noeud chargé, car les rapports  $\varphi_1/\varphi_0, \varphi_2/\varphi_0, \varphi_3/\varphi_0$  sont donnés par 3 des 4 équations. On peut aisément résoudre ce système de 3 équations au

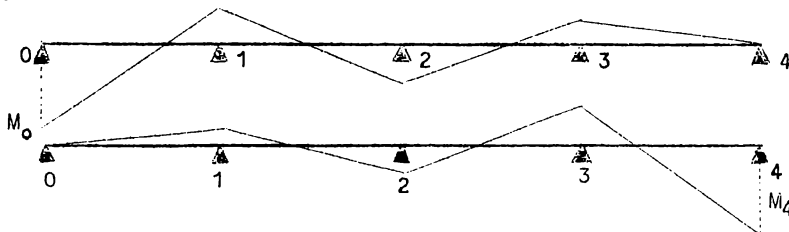
moyen des déterminants on obtient des expressions complexes telles que

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_0} = \frac{P_1[4(P_2 + P_3)(P_3 + P_4) - P_3^2] + P_2 \cdot P_3 \cdot P_4}{8(P_1 + P_2)(P_2 + P_3)(P_3 + P_4) - 2P_2^2(P_3 + P_4) - 2P_3^2(P_1 + P_2)}$$

Il est préférable de résoudre les équations numériques. Mais on peut éviter les calculs complexes, en procédant par superposition des effets. Le couple  $\mathcal{M}_0$  donne lieu en 04 à un moment  $M_0$  et à un moment  $M_4$  tels que  $M_0 - M_4 = \mathcal{M}_0$ . On peut alors couper le cadre en 0 et superposer les deux systèmes ouverts soumis en 0 au couple  $M_0$  et en 4 au couple  $M_4$ . Dans le 1er cas on a la suite :

$$\begin{array}{cccccc} M_0 & & -k'_1 \cdot M_0 & & k'_1 \cdot k'_2 \cdot M_0 & & -k'_1 \cdot k'_2 \cdot k'_3 \cdot M_0 & & 0 \\ 0 & & -k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 \cdot M_4 & & k_3 \cdot k_4 \cdot M_4 & & -k_4 \cdot M_4 & & M_4 \end{array}$$

dans le second cas.



L'identité de rotation des barres 01 et 43 au noeud 04 s'écrit :

$$P_1(2M_0 - k'_1 \cdot M_0 - k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 \cdot M_4) + P_4(2M_4 - k_4 \cdot M_4 - k'_1 \cdot k'_2 \cdot k'_3 \cdot M_0) = 0$$

d'où

$$M_4 = \frac{-M_0 \cdot P_1(2 - k'_1) - P_4 \cdot k'_1 \cdot k'_2 \cdot k'_3}{P_4(2 - k_4) - P_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4}$$

et

$$M_1 = -M_0 \left[ k'_1 - k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 \frac{P_1(2 - k'_1) - P_4 \cdot k'_1 \cdot k'_2 \cdot k'_3}{P_4(2 - k_4) - P_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4} \right] \text{ etc...}$$

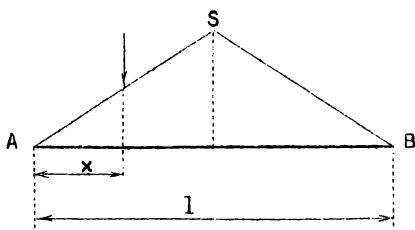
Si les 4 côtés du cadre sont identiques,  $M_4 = -M_0 = -\frac{\mathcal{M}_0}{2}$

$$M_1 = -M_0 \cdot k'_1 \cdot (1 - k'_2 \cdot k'_3) \quad M_2 = (k'_1 \cdot k'_2 - k_3 \cdot k_4) \cdot M_0 = 0$$

Tout se passe comme si 2 était articulé.

On se rend compte que s'il y a un grand nombre de côtés, comme les produits multiples des facteurs  $k$  sont très petits, les points fixes des barres suffisamment rapprochés du noeud chargé sont sensiblement les mêmes que dans le système ouvert. Les moments décroissent d'ailleurs très rapidement quand on s'éloigne du noeud chargé. Pour l'étude d'une travée chargée, on peut opérer par superposition des effets en considérant successivement les deux noeuds limitant la travée, sollicités par un moment équivalent à l'expression du second membre de l'équation au noeud correspondant.

Exemple du cadre triangulaire fermé. - Ce système peut être substitué à la poutre arc-boutée étudiée précédemment. Il est extérieurement isostatique et librement dilatable, ayant un appui glissant, il n'exerce pas de poussées sur ses appui. Supposons les 2 arbalétriers identiques de raideur  $P$ . La raideur de l'entrait est  $P$ . On a toujours



$$V_A = \frac{1 - x}{l}, \quad V_B = \frac{x}{l}$$

pour une charge verticale 1. Supposons un arbalétrier chargé, les trois équations aux noeuds sont :

$$P_1 \cdot \varphi_B + 2 (P_1 + P_b) + P_b \cdot \varphi_3 = \frac{\Phi_a}{2 E}$$

$$P_b \cdot \varphi_A + 4 P_b \cdot \varphi_S + P_b \cdot \varphi_B = - \frac{\Phi_b}{2 E}$$

$$P_b \cdot \varphi_S + 2 (P_b + P_1) \cdot \varphi_B + P_2 \cdot \varphi_A = 0$$

Ce système peut être résolu directement par les déterminants, ou bien on peut superposer 2 systèmes simplifiés obtenus en annulant successivement l'un et l'autre second membre.

En cas de surcharge uniforme d'un seul arbalétrier en posant  $\frac{P_1}{P_b} = \varphi$ ,

$$\varphi \cdot \varphi_B + 2 (1 + \varphi) \cdot \varphi_A + \varphi_S = \frac{p \cdot l^2}{96 E \cdot P_b}$$

$$\varphi_A + 4 \varphi_S + \varphi_B = - \frac{p \cdot l^2}{96 E \cdot P_b}$$

$$\varphi_S + 2 (1 + \varphi) \cdot \varphi_B + \varphi \cdot \varphi_A = 0$$

En cas de surcharge symétrique  $\varphi_S = 0$  et  $\varphi_A = -\varphi_B$  le système se réduit à

$$(2 + \varphi) \cdot \varphi_A = \frac{p \cdot l^2}{96 E \cdot P_b} \quad \varphi_A = -\varphi_B = \frac{p \cdot l^2}{96 E \cdot P_b (2 + \varphi)}$$

on en déduit

$$M_A = M_B = - \frac{2 E \cdot P_b}{2 + \varphi} \cdot \frac{p \cdot l^2}{96 E \cdot P_b} = - \frac{\varphi}{2 + \varphi} \cdot \frac{p \cdot l^2}{48}$$

$$M_S = - \frac{2 E \cdot P_b \cdot p \cdot l^2}{96 E \cdot P_b (2 + \varphi)} - \frac{p \cdot l^2}{48} = - \frac{p \cdot l^2 (3 + \varphi)}{48 (2 + \varphi)}$$

Enfin

$$M_S = M_A + \frac{p \cdot l^2}{8} - H \cdot h \quad \text{d'où} \quad H \cdot h = M_A + \frac{p \cdot l^2}{8} - M_S \quad \text{et} \quad H = \frac{p \cdot l^2}{16 h} \cdot \frac{5 + 2 \varphi}{2 + \varphi}$$

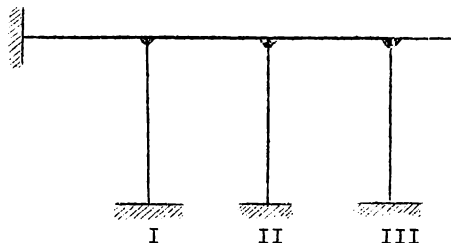
$$\text{Si } \varphi = 1, \quad M_A = M_B = - \frac{p \cdot l^2}{144}; \quad M_S = - \frac{p \cdot l^2}{36}; \quad H = \frac{7 p \cdot l^2}{48 h} \equiv \frac{p \cdot l^2}{7 h}$$

### 5<sup>e</sup> SECTION - POUTRES CONTINUES A BEQUILLES INTERMEDIAIRES.

Dans ces poutres les appuis fixes d'extrémité peuvent varier du simple appui (rotule) à l'encastrement, et les appuis intermédiaires sont constitués par des béquilles verticales assemblées à angles rigides avec la poutre. Nous envisagerons le cas assez général d'un grand nombre de travées et d'un encastrement partiel  $\epsilon$  aux extrémités de la poutre et  $\epsilon'$  aux pieds des béquilles.

#### A) DETERMINATION DES FOYERS.

Envisageons les foyers de gauche; les mêmes considérations se répètent pour les foyers de droite (symétriquement).



Pour la première travée puisqu'il y a encastrement  $\epsilon$

$$i_1 = \frac{1 - \epsilon}{2 - 0,5 \epsilon}$$

Pour la première béquille, puisqu'il y a un encastrement  $\epsilon'$  au pied

$$i_{h_1} = \frac{1 - \epsilon'}{2 - 0,5 \epsilon'}$$

Nous devons en déduire par la formule de

réurrence

$$P_2 \left( 2 - \frac{1}{i_2} \right) = - \left[ P_1 (2 - i_1) + P_{h_1} (2 - i_{h_1}) \right]$$

Pour la seconde béquille

$$i_{h_2} = \frac{1 - \varepsilon'}{2 - 0,5 \varepsilon'}$$

d'où

$$P_3 \left( 2 - \frac{1}{i_3} \right) = - \left[ P_2 (2 - i_2) + P_{h_2} (2 - i_{h_2}) \right] \quad \text{etc...}$$

Il est donc très simple de déterminer les foyers de droite et de gauche des travées horizontales. Pour les  $i'$  des béquilles il faut écrire

$$P_{h_2} \left( 2 - \frac{1}{i'_{h_2}} \right) = - \left[ P_2 (2 - i_2) + P_3 (2 - i_3) \right]$$

Il faut connaître  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  qui dépendent du mode d'appui, notamment de la plus ou moins grande rigidité des massifs de fondation des béquilles. Un massif très pesant et un empattement très rigide sur pilots peuvent donner un encastrement parfait, mais une semelle ordinaire ne constituera souvent qu'un encastrement imparfait, dont le degré d'encastrement dépend des qualités du terrain et de la rigidité de la semelle. On comprend l'intérêt qu'il y a à éviter les tassements inégaux du terrain, donc à avoir des fondations à peu près uniformément chargées. Sinon, il faut les rendre inébranlables en les fondant sur pilots.

Notons cependant que l'expérience du degré d'encastrement n'a d'importance que pour les travées extrêmes et pour les béquilles.

Nous avons déjà constaté en effet que les valeurs de  $i$  des travées tendent vers une valeur commune lorsqu'on s'éloigne des appuis d'extrémité.

Nous avons vu que cette valeur dépend relativement plus des raideurs relatives des béquilles et travées que du degré d'encastrement.

Considérons une poutre continue à grand nombre de béquilles, les travées et les béquilles ayant la même raideur  $P_1 = P_h$ .

En cas d'articulation des appuis extrêmes et des poids des béquilles :

$$i_1 = 0,5 ; \quad i_{h_1} = 0,5 ; \quad i_2 = \frac{1}{5} = 0,2 ; \quad i_{h_2} = 0,5 ; \quad i_3 = \frac{1}{5,3} = 0,1875 ;$$

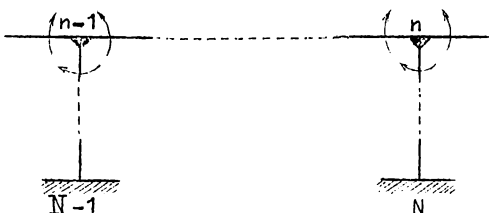
$$i_4 = \frac{1}{5,3125} = 0,187 ; \quad \text{etc...}$$

Dès la 4<sup>e</sup> travée, la valeur constante de  $i$  est sensiblement atteinte. Supposons qu'il y ait partout encastrement

$$i_1 = 0 ; \quad i_h = 0 ; \quad i_2 = \frac{1}{6} = 0,1667 ; \quad i_3 = \frac{1}{5,8333} = 0,1715 ;$$

$i_4 = \frac{1}{5,8285} = 0,172$ . On voit que sous l'effet de la rigidité des béquilles, le degré d'encastrement des appuis intermédiaires tend à s'uniformiser.

#### R) LIGNES D'INFLUENCE D'UNE TRAVÉE QUELCONQUE.



Considérons une charge verticale égale à l'unité circulant sur la n<sup>e</sup> travée.

Les équations d'équilibre des moments aux noeuds n-1 et n s'écrivent :

$$M_{n-1} \cdot i_{n-2} + M_{n-1} \cdot i_{n-1} - M_{n-1} \cdot M_n = 0 \quad \text{et}$$

$$M_{n-1} + M_n - M_{n+1} = 0$$

d'où

$$\begin{aligned} & - 2 P_{n-1} (2 \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}) - 2 P_{h_{n-1}} (2 \varphi_{n-1} + \varphi_{N-1}) - 2 P_n (2 \varphi_{n-1} + \varphi_n) + \frac{\Phi_a}{E} = 0 \\ & - 2 P_n (\varphi_{n-1} + 2 \varphi_n) - \frac{\Phi_b}{E} - 2 P_{h_n} (2 \varphi_n + \varphi_N) - 2 P_{n+1} (2 \varphi_n + \varphi_{n+1}) = 0 \end{aligned}$$

Nous avons donc, à chaque appui, une équation des 4 rotations qui correspond aux équations classiques de 4 moments (Keelhoff).

Mais puisque la n<sup>e</sup> travée est seule chargée, en vertu de la propriété des foyers :

$$\varphi_{n-2} = - i_{n-1} \cdot \varphi_{n-1}; \quad \varphi_{N-1} = - i_{h_{n-1}} \cdot \varphi_{n-1}; \quad \varphi_N = - i_{h_n} \cdot \varphi_n; \quad \varphi_{n+1} = - i_{n+1} \cdot \varphi_n$$

Donc

$$\left[ (2 - i_{n-1}) \cdot P_{n-1} + (2 - i_{h_{n-1}}) \cdot P_{h_{n-1}} + 2 P_n \right] \cdot \varphi_{n-1} + P_n \cdot \varphi_n = \frac{\Phi_a}{2 E}$$

$$P_n \cdot \varphi_{n-1} + \left[ 2 P_n + (2 - i_{h_n}) \cdot P_{h_n} + (2 - i_{n+1}) \cdot P_{n+1} \right] \cdot \varphi_n = - \frac{\Phi_b}{2 E}$$

ou, en vertu des équations de récurrence

$$P_n \left( \frac{\varphi_{n-1}}{i_n} + \varphi_n \right) = \frac{\Phi_a}{2 E}$$

$$P_n (\varphi_{n-1} + \frac{\varphi_n}{i_n}) = - \frac{\Phi_b}{2 E}$$

CES EQUATIONS SONT LES MEMES QUE POUR LES POUTRES A APPUIS FIXES, DONC :

$$\varphi_{n-1} = \frac{i_n}{2 E \cdot P_n} \cdot \frac{\Phi_a + i_{h_n} \cdot \Phi_b}{1 - i_n \cdot i_n'}$$

$$\varphi_n = - \frac{i_n'}{2 E \cdot P_n} \cdot \frac{i_n \cdot \Phi_a + \Phi_b}{1 - i_n \cdot i_n'}$$

On en déduit

$$\varphi_{n-2} = - i_{n-1} \cdot \varphi_{n-1}, \quad \varphi_{n+1} = - i_{n+1}' \cdot \varphi_n \quad \text{etc....}$$

Donc les lignes d'influence de tous les  $\varphi$  dans l'étendue d'une travée sont semblables, ce sont des fonctions linéaires des fonctions d'influence de la travée, dont les facteurs numériques dépendent uniquement du degré d'encastrement des extrémités de la travée.

On en déduit les lignes d'influence des moments aux têtes des béquilles, par les formules générales :

$$M_{n-1 \ N-1} = - 2 E \cdot P_{h_{n-1}} (2 \varphi_{n-1} + \varphi_{N-1}) = - 2 E \cdot P_{h_{n-1}} (2 - i_{h_{n-1}}) \cdot \varphi_{n-1} < 0$$

$$M_{n \ N} = - 2 E \cdot P_{h_n} (2 \varphi_n + \varphi_N) = - 2 E \cdot P_{h_n} (2 - i_{h_n}) \cdot \varphi_n > 0$$

Donc les lignes d'influence des moments aux têtes des béquilles sont, à l'échelle près, les mêmes que celles des rotations des noeuds, mais changées de signe.

Les moments aux extrémités des travées sont doubles. Dans les travées non chargées, nous avons :

$$M_{n-1 \ n-2} = - 2 E \cdot P_{n-1} (2 \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}) = - 2 E \cdot P_{n-1} (2 - i_{n-1}) \cdot \varphi_{n-1} < 0$$

$$M_{n \ n+1} = 2 E \cdot P_n (2 \varphi_n + \varphi_{n+1}) = 2 E \cdot P_{n+1} (2 - i_{n+1}') \cdot \varphi_n < 0$$

Donc dans les travées non chargées, les lignes d'influence des moments aux extrémités sont, à l'échelle près et au signe près, les mêmes que celles des rotations des noeuds.

Enfin, pour les travées chargées

$$\begin{aligned} M_{n-1 \ n} = M_{n-1 \ n+2} + M_{n-1 \ N-1} &= - 2 E \cdot \varphi_{n-1} \left[ P_{h_{n-1}} (2 - i_{h_{n-1}}) + P_{n-1} (2 - i_{n-1}) \right] \\ &= 2 E \cdot P_n \left( 2 - \frac{1}{i_n} \right) \cdot \varphi_{n-1} < 0 \end{aligned}$$

$$M_{n n-1} = M_n - M_{n+1} - M_{n N} = 2 E \cdot \varphi_n \left[ P_{n+1} (2 - i'_{n+1}) + P_{nn} (2 - i_{nn}) \right]$$

$$= - 2 E \cdot P_n \left[ 2 - \frac{1}{i_n} \right] < 0$$

Donc dans les travées chargées, les lignes d'influence des moments aux extrémités sont, à l'échelle et au signe près, les mêmes que celles des rotations des extrémités.

Ces propriétés sont tout à fait générales, elles s'applique aussi bien aux travées d'extrémité qu'aux travées centrales, il suffit de connaître pour chaque travée la position des foyers, c'est-à-dire le degré d'encastrement. Or nous avons vu que ces éléments sont faciles à déterminer.

Les rapports de similitude des lignes d'influence dans l'étendue d'une même travée ne dépendent que des constantes focales et se réduisent très rapidement à mesure que l'on s'éloigne des travées chargées, à cause du degré assez élevé d'encastrement. On peut donc généralement négliger l'influence de la surcharge d'une travée sur celles qui en sont séparées par au moins une travée.

On peut par cette méthode, d'une manière analogue à celle envisagée pour les poutres continues sur appui fixe de niveau, tracer des lignes d'influence spécifiques pour des constructions à nombres divers de travées égales en fonction de diverses valeurs de  $\varphi$  et correspondant à diverses circonstances d'appui des extrémités et des pieds des béquilles.

Il suffit d'ailleurs de tracer celles de  $\varphi$ , toutes les autres s'en déduisent par de simples constantes. On trouvera ci-joint un tableau des formules et constantes pour les divers cas intéressants qui permettent de tracer des courbes, utiles si l'on doit faire un usage fréquent des formules. Sinon, le calcul par les fonctions d'influence, tant pour les charges concentrées que réparties, ne présente aucune difficulté.

Observons que les moments aux extrémités des travées chargées sont négatifs, tandis que ceux des têtes des béquilles correspondantes sont l'un positif, l'autre négatif. En cas de charge uniforme complète, les moments aux extrémités d'une travée chargée sont sensiblement égaux, à distance suffisante des appuis d'extrémité. Donc, en cas de surcharge uniforme complète, les moments aux têtes des colonnes sont sensiblement nuls; cette observation est même sensiblement vraie pour les colonnes extrêmes, à condition que les appuis d'extrémité soient fixes conformément aux hypothèses faites. Si les appuis d'extrémité étaient réalisés par des colonnes à têtes fixes, mais libres de tourner, celles-ci subirait des moments importants. Donc, sous ces réserves, le poids mort ne fait pas fléchir les colonnes. Par contre, les moments aux extrémités des travées sont maxima sous l'effet de la surcharge de deux travées contigües et de celles qui sont écartées de part et d'autre d'un nombre pair de travées. Les effets de couples s'étudient comme pour les poutres continues. Si le point d'application est à l'intérieur d'une travée, on multiplie le couple par la dérivée en ce point de la ligne d'influence spécifique de l'élément considéré. Si le couple  $\mathfrak{M}$  agit au noeud  $n$ , on a :

$$M_n - M_{n+1} - M_{n N} - M_{n n-1} = \mathfrak{M}$$

ou

$$2 E \cdot \varphi_n \left[ P_{n+1} (2 - i'_{n+1}) + P_{nn} (2 - i_{nn}) + P_r (2 - i_r) \right] = \mathfrak{M}$$

ou

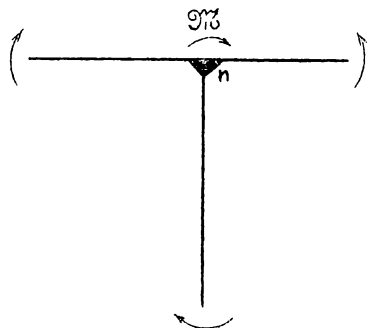
$$2 E \cdot \varphi_n \cdot P_n \left[ \frac{1}{i_n} - i_n \right] = \mathfrak{M} \qquad \varphi_n = \frac{\mathfrak{M} \cdot i_n'}{2 E \cdot P_n (1 - i_n \cdot i_n')}$$



Par raison de symétrie on a :

$$\varphi_n = \frac{M \cdot i_{n+1}}{2 E \cdot P_{n+1} (1 - i_{n+1} \cdot i'_{n+1})} = \frac{M \cdot i'_{nn}}{2 E \cdot P_{nn} (1 - i_{nn} \cdot i'_{nn})}$$

Les valeurs de  $M$  se déduisent de celles de  $\varphi_n$  par les formules générales précédentes.



Pour ce qui est de lignes d'influence des réactions verticales on peut les déduire de celles des  $M$  par les formules usuelles, mais le théorème de Maxwell en permet un tracé graphique direct. La ligne d'influence de la réaction verticale suivant une béquille déterminée est donnée par l'élastique des flèches verticales de la poutre continue sous l'effet d'un déplacement vertical égal à l'unité de la béquille envisagée rendue libre de se déplacer uniquement dans le sens vertical.

Par les méthodes exposées, il est possible de déterminer le diagramme des  $M$  correspondant à une telle surcharge; une double intégration donne l'élastique. On opérera comme suit : on envisagera un déplacement vertical arbitraire de la béquille considérée. On déterminera les diagrammes des moments et on intégrera deux fois. On déterminera les réactions verticales des autres béquilles dont la somme algébrique donne la force verticale correspondant au déplacement de la première béquille. Cela permet de déterminer l'échelle de l'élastique.

Il en est de même pour la poussée horizontale totale. La ligne d'influence est l'élastique des flèches verticales de la poutre continue sous l'effet d'un déplacement horizontal égal à l'unité de la poutre suivant son axe, les appuis d'extrémité étant supposés conserver leur niveau, mais permettre les déplacements horizontaux.

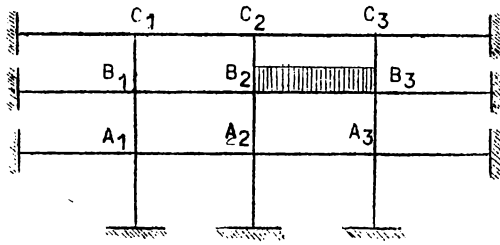
De la sorte, tous les éléments d'une poutre continue à béquilles intermédiaires sont connus et la vérification des dimensions est possible. En admettant pour les avant-projets  $\varphi = 1$  et en envisageant des surcharges uniformes, on voit que cette étude est très simple.

#### 6<sup>e</sup> SECTION. - PORTIQUES ET CADRES CONTINUS ETAGES.

Ce dispositif est devenu l'un des plus courants des constructions en béton armé de tous genres. Il s'emploie pour les ponts et passerelles élevés à paliers multiples, les estacades et appontements, les ouvrages de retenue hydraulique etc., de même que dans un grand nombre de constructions industrielles et d'édifices.

Le système est complexe et ne se calcule pas toujours rigoureusement. L'application de la méthode des sections précédentes permet de déterminer facilement l'influence de la continuité, son étendue pratique et les hypothèses simplificatrices permises.

Rigoureusement, dans un tel système à panneaux fermés, la propriété des foyers n'existe plus, abstraction faite des barres d'extrémités. Considérons à titres d'exemple le système à 9 noeuds schématisé ci-après (voir page suivante) les extrémités étant encastées.



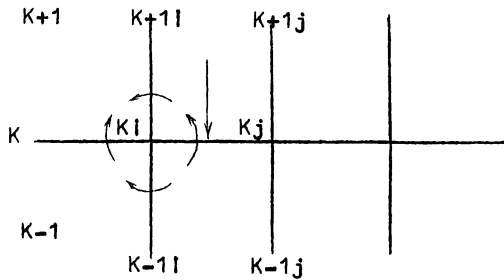
Les équations résolvant le système lorsqu'il y a une travée chargée peuvent s'écrire symboliquement :

$$\begin{aligned} \varphi(A_1 B_1 A_2) &= 0 & \varphi(B_1 A_1 B_2 C_1) &= 0 & \varphi(C_1 B_1 C_2) &= 0 \\ \varphi(A_2 A_1 B_2 A_3) &= 0 & \varphi(C_2 C_1 B_2 C_3) &= 0 & \varphi(B_2 B_1 A_2 C_2 B_3) &= K \\ \varphi(A_3 A_2 B_3) &= 0 & \varphi(C_3 C_2 B_3) &= 0 & \varphi(B_3 B_2 A_3 C_3) &= K' \end{aligned}$$

Les 7 équations homogènes comportent 9 inconnues; les rapports des moments ne sont donc pas constants. Il n'est d'autre part pas possible de séparer des groupes des  $m$  équations homogènes à  $(m+1)$  inconnues ( $m < n - 2$ ).

D'ailleurs, en partant des appuis extrêmes selon la méthode usuelle de recherche des foyers, l'équation de récurrence se trouve en défaut dès le premier noeud, parce qu'il y a 2 inconnues.

Mais, si la propriété n'existe plus rigoureusement, nous pourrions cependant nous en servir par approximation, grâce à l'atténuation très rapide de la continuité dans les systèmes à grand nombre de barres et par la notion du degré d'encastrement. Nous montrerons que l'erreur est certainement faible.



Soit une construction à  $N$  étages et  $n$  files de colonnes. Supposons que la travée  $K_i K_j$  soit chargée. Nous considérons le système formé par l'étage  $K$  et les colonnes adjacentes supposées arrêtées à leurs extrémités  $K - 1$  et  $K + 2$  et y possédant un certain degré d'encastrement  $\varepsilon$  que nous supposons provisoirement constant. Dans un tel système, la propriété des foyers existe et nous pouvons déterminer tous les  $i$ . Aux extrémités de la travée chargée, nous pouvons écrire :

$$M_{i-1} - M_{K+1i} - M_{ij} + M_{K-1i} = 0 ; \quad M_{ji} - M_{K+1j} - M_{j+1} + M_{K-1j} = 0$$

Il est apparent, en vertu de la propriété des foyers et de la formule de récurrence, que ces équations prennent la forme connue :

$$\begin{aligned} P_{Kj} \left( \frac{\varphi_{K1}}{i_{Kj}} + \varphi_{Kj} \right) &= \frac{\Phi_a}{2E} & P_{Kj} \left( \varphi_{K1} + \frac{\varphi_{Kj}}{i'_{Kj}} \right) &= - \frac{\Phi_b}{2E} \\ \text{d'où} \quad \varphi_{K1} &= \frac{i_{Kj}}{2E \cdot P_{Kj}} \cdot \frac{\Phi_a + i'_{Kj} \cdot \Phi_b}{1 - i_{Kj} \cdot i'_{Kj}} & \varphi_{Kj} &= - \frac{i'_{Kj}}{2E \cdot P_{Kj}} \cdot \frac{i_{Kj} \cdot \Phi_a + \Phi_b}{1 - i_{Kj} \cdot i'_{Kj}} \end{aligned}$$

Il en résulte l'ensemble des propriétés précédemment rencontrées

$$\begin{aligned} \varphi_{K-1} &= -i_{K1} \cdot \varphi_{K1}, & \varphi_{K+1} &= -i'_{K+1} \cdot \varphi_{Kj}, & \text{etc...} \\ M_{K-1i} &= 2E \cdot P_{K-1i} (2 - i_{K-1i}) \cdot \varphi_{K1} \\ M_{K-1j} &= -2E \cdot P_{K-1j} (2 - i_{K-1j}) \cdot \varphi_{Kj} \\ M_{K+1i} &= 2E \cdot P_{K+1i} (2 - i'_{K+1i}) \cdot \varphi_{K1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{K \quad K+1j} &= 2 E.P_{K \quad K+1j} (2 - i_{K \quad K+1j}) \cdot \varphi_{Kj} \\
 M_{K1 \quad 1-1} &= - 2 E.P_{K1} (2 - i_{K1}) \cdot \varphi_{K1} \\
 M_{Kj \quad j+1} &= 2 E.P_{K \quad j+1} (2 - i_{Kj+1}) \cdot \varphi_{Kj} \\
 M_{Kij} &= 2 E.P_{Kj} (2 - \frac{1}{i_{Kj}}) \cdot \varphi_{K1} \\
 M_{Kji} &= - 2 E.P_{Kj} (2 - \frac{1}{i_{Kj}}) \cdot \varphi_{Kj}
 \end{aligned}$$

Donc les lignes d'influence des rotations des noeuds d'un étage dans l'étendue d'une travée sont des courbes semblables, qui sont des fonctions linéaires des fonctions d'influence.

Les facteurs numériques et les facteurs de similitude ne dépendent que des constantes focales. Par suite du degré élevé d'encastrement, les effets de la continuité s'annulent très rapidement lorsqu'on s'éloigne d'une travée chargée.

Les lignes d'influence de tous les moments quelconques sont, à l'échelle et au signe près, les mêmes que celles des rotations des noeuds correspondants.

Le problème serait résolu d'une manière satisfaisante si l'on connaissait le degré d'encastrement des colonnes haut et bas. Supposons le nombre des travées élevé, toutes identiques, de sorte qu'elles aient toutes même degré d'encastrement. Supposons les colonnes identiques haut et bas et ayant même degré d'encastrement. La formule de récurrence donne :

$$4 - i_1 - \frac{1}{i_1} = \frac{P_h}{P_1} (4 - 2 \frac{1 - \varepsilon}{2 - 0,5 \varepsilon})$$

Envisageons les cas extrêmes de l'encastrement parfait  $\varepsilon = 1$  et de l'appui simple  $\varepsilon = 0$ . On obtient des valeurs suivantes :

	$\frac{P_h}{P_1} = 0,250$	0,500	1,000
encastrement parfait	$i_1 = 0,208$	0,172	0,127
" nul	$i_1 = 0,220$	0,188	0,146

Donc les valeurs de  $i$  ont entre ces cas extrêmes des écarts de 5,55%, 9,3%, 15%.

Ils se répercutent à peu près proportionnellement sur les valeurs des  $\varphi$  ils s'atténuent légèrement dans les valeurs des moments. Mais les valeurs les plus usuelles de  $P_h/P_1 < 1$ . D'autre part, le degré d'encastrement des colonnes est élevé et se rapproche plus de 1 que de 0. On pourrait donc sans grande erreur admettre  $\varepsilon = 1$ . Nous pouvons d'ailleurs supputer une valeur approximative de  $\varepsilon$ . En admettant que  $i_h$  soit le même pour toutes les colonnes, on a :

$$4 - i_h - \frac{1}{i_h} = - \frac{P_1}{P_h} (4 - 2 i).$$

En admettant que  $i_1$  a des valeurs précédemment calculées pour le cas de l'encastrement parfait, on a :

$\frac{P_h}{P_l}$	0,250	0,500	1,000
$i_l$	0,208	0,172	0,127
$4 - i_h - \frac{1}{i_h}$	- 14,336	- 7,312	- 3,746
$i_h$	0,055	0,089	0,1315
$\varepsilon = \frac{1 - 2 i_h}{1 - 0,5 i_h}$	0,915	0,860	0,790

En recalculant les valeurs de  $i_l$  d'après celles trouvées pour  $\varepsilon$ , on obtient :

$$i_l = 0,210 \qquad 0,175 \qquad 0,1315$$

Une seconde approximation ne donnerait pas de différence sensible.

Observons donc que l'encastrement des éléments est très voisin de l'encastrement parfait et que l'on a sensiblement  $i_h/i_l =$

Ces conclusions sont très précieuses et autorisent, avec une approximation suffisante, à calculer chaque étage séparément avec les colonnes contiguës. En supposant celles-ci encastrees haut et bas, on commet une erreur par défaut sur  $\varphi$  inférieure à 3,5% lorsque  $P_h < P_l$ . L'erreur est moindre pour les M. On peut l'atténuer encore en supputant, comme ci-dessus, un degré d'encastrement que l'on considérera comme constant pour toutes les colonnes.

On peut ainsi obtenir les moments à toutes les extrémités de travées et de colonnes pour l'étage considéré. Mais les étages immédiatement inférieur et supérieur recoivent en leurs noeuds, par l'intermédiaire des colonnes, des rotations et des flexions, déjà fortement atténuées d'ailleurs. Ainsi, au noeud  $(K - 1) i$ , on a

$$\varphi_{K-1i} = - i_{hKI} \cdot \varphi_{KI}$$

ou

$$\varphi_{K-1i} = - \frac{1 - \varepsilon}{2 - 0,5 \varepsilon} \varphi_{KI}$$

Donc, le ligne d'influence de  $\varphi_{K-1i}$  est déterminée; elle est proportionnelle à celle de  $\varphi_{KI}$  en sens inverse.

Les lignes d'influence des moments correspondants sont sensiblement proportionnelles à celles de  $\varphi_{K-1i}$ , par application des formules générales données plus haut.

Etant donné le degré d'encastrement élevé, caractérisé par les faibles valeurs de  $i$ , on voit que les rotations provenant de la continuité deviennent négligeables dès que le noeud envisagé est éloigné de plus d'une barre d'une des extrémités de la travée chargée. Dans ces conditions, l'altération de la propriété des foyers fixes par effet de superposition non concordante est vraiment très faible et les résultats de la méthode précédente peuvent être considérés comme suffisamment exacts.

Si l'on voulait opérer d'une manière strictement rigoureuse il faudrait: ou bien résoudre directement le système de toutes les équations, ou bien procéder par superposition en substituant à la charge d'une travée deux moments fictifs correspondants agissant à ses extrémités.

S'il n'y a pas trop de noeuds, ces méthodes sont praticables. Il sera en somme plus simple d'envisager la première et résoudre le système d'équations par voie graphique.



Les considérations précédentes montrent que, dans les constructions à étages également, les colonnes ne sont pas fléchies sous l'effet des surcharges uniformes totales de toutes les travées, donc sous l'effet du poids mort par exemple. Les colonnes ne sont fléchies que sous l'effet de surcharge de travées isolées et très sensiblement comme si elles étaient encastrées dans les étages immédiatement inférieur et supérieur. Les maxima des moments aux extrémités des travées s'obtiennent en surchargeant deux travées contigües.

Les efforts tranchants verticaux et horizontaux, donc les réactions d'appui verticales et horizontales peuvent se déduire des moments.

L'application du théorème de Maxwell au système fictif ne peut convenir que pour les réactions principales; elle semble peu appropriée pour les réactions des étages inférieurs et supérieurs. Mais on sait qu'elle permet le tracé des lignes d'influence des réactions par la flexion de systèmes figurés de lames flexibles reproduisant l'ouvrage à étudier.

\*\*\*\*\*