

UNIVERSITE de LIEGE  
L.T.A.S  
DYNAMIQUE DES CONSTRUCTIONS MECANIQUES  
Rue Ernest Solvay, 21  
4000 LIEGE  
(Belgique)

Rapport VF-68

Sur la Représentation des Modes Rigides dans la  
Formulation SAMCEF des Problèmes Hydroélastiques.

J.F. DEBONGNIE

Juin 1990

1000

1000

1000

1000

1000

1000

1000

## 1. INTRODUCTION

La question a souvent été posée, de savoir si la formulation SAMCEF [1,2] des problèmes hydroélastiques respecte les modes rigides. Bien souvent, en effet, on pose le problème libre-libre et on s'étonne de perdre des modes rigides de rotation. Le présent rapport se propose d'apporter quelques lumières sur ce point.

## 2. POSITION DU PROBLEME LIBRE-LIBRE

Les problèmes hydroélastiques considérés diffèrent des problèmes élastiques en ce que la pesanteur joue inévitablement un rôle. Par conséquent, il n'existe pas d'état relaxé et, au repos, il y a inévitablement des réactions, matérialisées en pratique par la poussée des réacteurs.

La structure au repos est donc soumise à des contraintes  $s_{ij}^0$ , et le fluide continu est soumis à la pression hydrostatique  $p_0$ . Ces efforts proviennent de la gravité et doivent être équilibrés par des efforts  $\bar{t}_i$  sur une partie  $S_2$  de la surface de la structure. Si l'on note  $V_f$  le volume du fluide,  $V_s$  celui de la structure et  $S_f$  leur interface commune, les conditions d'équilibre s'écrivent, sous forme variationnelle, comme suit :

- pour la structure :

$$\int_{V_s} s_{ij}^0 D_j \delta u_i dV - \int_{V_s} \rho_s g_i \delta u_i dV + \int_{S_f} p_0 n_i^* \delta u_i dS - \int_{S_2} \bar{t}_i \delta u_i dS = 0$$

où  $n_i^*$  est la normale sur la surface mouillée, extérieure à la coque

- pour le fluide :

$$\int_{V_f} p_0 D_i \delta u_i dV - \int_{V_f} \rho_f g_i \delta u_i dV + \int_{S_f} p_0 n_i \delta u_i dS = 0$$

où  $n_i$  est la normale sur la surface mouillée, extérieure au fluide.

Evidemment,  $n_i^* = -n_i$  et on peut additionner les deux conditions, ce qui fait disparaître les pressions sur  $S_f$  : il vient

$$\int_{V_s} s_{ij}^0 D_j \delta u_i dV + \int_{V_f} p_0 D_i \delta u_i dV - \int_{V_s} \rho_s g_i \delta u_i dV - \int_{V_f} \rho_f g_i \delta u_i dV - \int_{S_2} \bar{t}_i \delta u_i dS = 0$$

Dans le cas d'un déplacement virtuel rigide, de la forme :

$$\delta u_i = \delta a_i + \delta w_{ij} x_j \quad \delta w_{ij} = -\delta w_{ji} \quad (1)$$

, on obtient :

$$\int_{V_s} s_{ij}^0 \delta w_{ij} dV + \int_{V_f} p_0 \delta w_{ii} dV - \int_{V_s} \rho_s g_i (\delta a_i + \delta w_{ij} x_j) dV - \int_{V_f} \rho_f g_i (\delta a_i + \delta w_{ij} x_j) dV - \int_{S_2} \bar{t}_i (\delta a_i + \delta w_{ij} x_j) dS = 0$$

Les deux premières integrales sont nulles, la première parce que  $s_{ij}^0$  est symétrique et  $\delta w_{ij}$  antisymétrique, la deuxième parce que  $\delta w_{ii} = 0$ . On obtient les conditions suivantes :

$$\int_{V_s} \rho_s g_i dV + \int_{V_f} \rho_f g_i dV + \int_{S_2} \bar{t}_i dS = 0 \quad (2)$$

(équilibre de translation)

$$\int_{V_s} \rho_s g_i x_j dV + \int_{V_f} \rho_f g_i x_j dV + \int_{S_2} \bar{t}_i x_j dS = 0 \quad i \neq j \quad (3)$$

(équilibre de rotation)

### 3. COMPORTEMENT DE L'ENERGIE LINEAIRE

L'énergie linéaire

$$U_l = \int_{V_s} \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} dV$$

est nécessairement nulle lors d'un mode rigide.

### 4. COMPORTEMENT DE L'ENERGIE DE RAIDEUR GEOMETRIQUE

Il s'agit du terme

$$U_g = \frac{1}{2} \int_{V_s} s_{ij}^0 D_i u_m D_j u_m dV$$

On peut lui donner la forme équivalente :

$$U_g = \frac{1}{2} \int_{S_f} n_i^* s_{ij}^0 u_m D_j u_m dS + \frac{1}{2} \int_{S_2} n_i s_{ij}^0 u_m D_j u_m dS - \frac{1}{2} \int_{V_s} D_i s_{ij}^0 u_m D_j u_m dV - \frac{1}{2} \int_{V_s} s_{ij}^0 D_{ij} u_m dV$$

Pour un déplacement rigide, on a  $D_{ij} u_m = 0$ .

Tenant compte des conditions :

$$n_i^* s_{ij}^0 = -p_0 n_j^* \quad \text{sur } S_f$$

$$\begin{aligned} n_i s_{ij}^0 &= \bar{t}_j && \text{sur } S_2 \\ D_i s_{ij}^0 &= -\rho_s g_j && \text{dans } V_s \end{aligned}$$

on obtient

$$U_g = -\frac{1}{2} \int_{S_f} p_0 n_j^* u_m D_j u_m dS + \frac{1}{2} \int_{S_2} \bar{t}_j u_m D_j u_m dS + \frac{1}{2} \int_{V_s} \rho_s g_j u_m D_j u_m dV$$

Pour un déplacement rigide de la forme

$$u_i = a_i + w_{ij} x_j \quad w_{ij} = -w_{ji}$$

c'est encore

$$U_g = -\frac{1}{2} \int_{S_f} p_0 n_j^* u_m w_{mj} dS + \frac{1}{2} \int_{S_2} \bar{t}_i u_m w_{mj} dS + \frac{1}{2} \int_{V_s} \rho_s g_j u_m w_{mj} dV$$

## 5. TERME DE PRESSION INITIALE

Nous donnons ce nom au terme

$$U_p = -\frac{1}{2} \int_{S_f} p_0 (n_i u_i D_j u_j - n_i u_j D_j u_i) dS$$

qui, pour un mode rigide, se réduit à

$$\frac{1}{2} \int_{S_f} p_0 n_i u_j D_j u_i dS = \frac{1}{2} \int_{S_f} p_0 n_i u_j w_{ij} dS = -\frac{1}{2} \int_{S_f} p_0 n_i u_j w_{ji} dS$$

Ce terme compense exactement le premier des termes de  $U_g$

## 6. TERME DIT DE TONG

Nous désignons par là le terme :

$$U_T = -\frac{1}{2} \int_{S_f} \rho_f g_k u_k n_i u_i dS$$

En prolongeant les déplacements de la coque dans le volume du fluide, ce qui est évidemment possible pour un mode rigide, on peut le transformer en

$$U_T = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \rho_f g_k u_k n_i u_i dS - \frac{1}{2} \int_{V_f} \rho_f g_k u_k D_i u_i dV - \frac{1}{2} \int_{V_f} \rho_f g_k u_i D_i u_k dV$$

soit, pour un mode rigide, en tenant compte de l'orientation de  $g$  et du fait que sur  $\Gamma$ ,  $n_i u_i = u_3$ ,

$$U_T = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \rho_f g u_3^2 dS + \frac{1}{2} \int_{V_f} \rho_f g_j u_i w_{ij} dV$$

## 7. TERME DE SURFACE LIBRE

C'est

$$U_{\Gamma} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \rho_f g \eta^2 dS$$

En fait, les termes contenant  $\eta$  dans la raideur sont

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \rho_f g \eta^2 dS + \lambda \left( \int_{S_f} \rho_f n_i u_i dS + \int_{\Gamma} \rho_f \eta dS \right)$$

en introduisant la contrainte linéaire d'incompressibilité globale. La variation de  $\eta$  donne

$$\rho_f g \eta + \lambda \rho_f = 0$$

soit  $\eta = -\frac{\lambda}{g}$ , valeur uniforme sur toute la surface libre. On détermine cette valeur à l'aide de la contrainte linéaire, ce qui donne

$$\eta \Gamma = - \int_{S_f} n_i u_i dS$$

$\Gamma$  étant ici l'aire de  $\Gamma$ . Comme un mode rigide est toujours incompressible, on a encore

$$- \int_{S_f} n_i u_i dS = \int_{\Gamma} u_3 dS$$

donc

$$\eta = \frac{1}{\Gamma} \int_{\Gamma} u_3 dS$$

soit la moyenne de  $u_3$  sur la surface libre.

## 8. ENERGIE DE DEFORMATION TOTALE

L'énergie de déformation totale est donc

$$\begin{aligned} U = U_l + U_g + U_p + U_T + U_{\Gamma} &= \frac{1}{2} \int_{S_2} \bar{t}_j u_i w_{ij} dS + \frac{1}{2} \int_{V_s} \rho_s g_j u_i w_{ij} dV \\ &+ \frac{1}{2} \int_{V_f} \rho_f g_j u_i w_{ij} dV + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\eta^2 - u_3^2) dS \end{aligned}$$

Commençons par expliciter les déplacements dans les trois premiers termes. On obtient, en notant  $U_{\Gamma}^*$  le dernier terme,

$$\begin{aligned} U - U_{\Gamma}^* &= \frac{1}{2} \int_{S_2} \bar{t}_j (a_i + w_{ik} x_k) w_{ij} dS + \frac{1}{2} \int_{V_s} \rho_s g_j (a_i + w_{ik} x_k) w_{ij} dV \\ &+ \frac{1}{2} \int_{V_f} \rho_f g_j (a_i + w_{ik} x_k) w_{ij} dV \\ &= \frac{1}{2} a_i w_{ij} \left[ \int_{S_2} \bar{t}_j dS + \int_{V_s} \rho_s g_j dV + \int_{V_f} \rho_f g_j dV \right] \\ &+ \frac{1}{2} w_{ik} w_{ij} \left[ \int_{S_2} \bar{t}_j x_k dS + \int_{V_s} \rho_s g_j x_k dV + \int_{V_f} \rho_f g_j x_k dV \right] \end{aligned}$$

En vertu des conditions d'équilibre (1) et (2), les coefficients des  $a_i w_{ij}$  sont tous nuls. Par contre, les coefficients des  $w_{ik} w_{jk}$  ne sont nuls que si  $j \neq k$ . Pour examiner les termes  $i = k$ , nous utiliserons la notation classique

$$w_1 = w_{23} \quad , \quad w_2 = w_{31} \quad , \quad w_3 = w_{12}$$

et nous tiendrons compte du fait que  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_3$ . On a alors

$$\int_{V_s} \rho_s g_3 x_3 dV + \int_{V_f} \rho_f g_3 x_3 dV = -M g z_G$$

où  $M$  est la masse totale du système et  $z_G$ , la cote de son centre de gravité. Il vient alors

$$U - U_\Gamma^* = \frac{1}{2}(w_2^2 + w_3^2) \int_{S_2} \bar{t}_1 x_1 dS + \frac{1}{2}(w_1^2 + w_3^2) \int_{S_2} \bar{t}_2 x_2 dS \\ + \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2) \left[ \int_{S_2} \bar{t}_3 x_3 dS - M g z_G \right]$$

L'explication de ces termes devient simple si l'on distingue parmi les  $\bar{t}_i$  ceux qui agissent dans le sens de l'axe  $\mathbf{e}_i$ , que nous noterons  $t_i^+$  et ceux qui agissent dans le sens inverse, que nous noterons  $t_i^-$ . Les résultantes

$$F_i^+ = \int_{S_2} t_i^+ dS \quad , \quad F_i^- = \int_{S_2} |t_i^-| dS$$

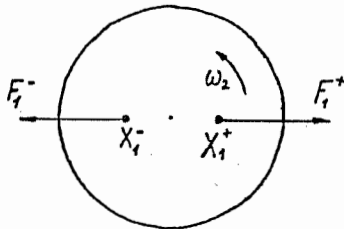
s'appliquent aux coordonnées

$$X_i^+ = \frac{1}{F_i^+} \int_{S_2} t_i^+ x_i dS \quad , \quad X_i^- = \frac{1}{F_i^-} \int_{S_2} |t_i^-| x_i dS$$

(pas de sommation). On obtient ainsi

$$U - U_\Gamma^* = \frac{1}{2}(w_2^2 + w_3^2)(F_1^+ X_1^+ - F_1^- X_1^-) + \frac{1}{2}(w_1^2 + w_3^2)(F_2^+ X_2^+ - F_2^- X_2^-) \\ + \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2)(F_3^+ X_3^+ - F_3^- X_3^- - M g z_G)$$

Considérons le premier terme. Lors d'une rotation  $w_2$ , la charge  $F_1^+$  prend une position



$$X_1^+ \cos w_2 \approx X_1^+ \left(1 - \frac{w_2^2}{2}\right)$$

et la charge  $F_1^-$  prend une position

$$X_1^- \cos w_2 \approx X_1^- \left(1 - \frac{w_2^2}{2}\right)$$

Il en résulte une variation d'énergie

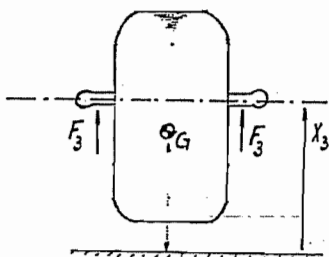
$$\frac{w_2^2}{2}(F_1^+ X_1^+ - F_1^- X_1^-)$$

positive dans le cas de la figure, négative si  $X_1^+ < X_1^-$ . Ceci correspond au fait que la position des forces de la figure est stable et la position inverse instable.

Le terme en  $(w_1^2 + w_2^2)$  est du même type.

En particulier, pour un réservoir *plein* soutenu par un pivot à la hauteur  $X_3$ , il faudra, pour que le système soit stable, que le centre de gravité du système soit situé en-dessous de l'axe du pivot.

Ces conclusions sont naturelles.



Passons au terme de surface libre. Si le fluide était gelé, on y trouverait des déplacements  $u_3$ . En réalité, la surface libre prend une position horizontale à la valeur moyenne de  $u_3$ .

Si la surface libre est, au repos, à la cote  $h$ , à un élément  $dS$  de la surface libre correspond un supplément d'énergie potentielle égal au poids de liquide dépassant la cote  $h$ , multiplié par sa cote moyenne, soit

$$\rho g u_3 dS \left( h + \frac{u_3}{2} \right)$$

Intégrant sur la surface libre, on obtient

$$EP(u_3) = \int_{\Gamma} \rho g u_3 \left( h + \frac{u_3}{2} \right) dS$$

Dans la position  $\eta$ , on obtient de même

$$EP(\eta) = \int_{\Gamma} \rho g \eta \left( h + \frac{\eta}{2} \right) dS$$

La différence est

$$EP(\eta) - EP(u_3) = \int_{\Gamma} \rho g h (\eta - u_3) dS + \frac{1}{2} \int_S \rho g (\eta^2 - u_3^2) dS = U_{\Gamma}^*$$

car le premier terme est nul,  $\eta$  étant la moyenne de  $u_3$ . On notera que ce terme supplémentaire d'énergie potentielle est déstabilisant, car la position horizontale de la surface libre correspond toujours à un minimum d'énergie potentielle.



## 9. CONCLUSION

Dans la pratique, on a souvent  $F_1^+ = F_1^- = F_2^+ = F_2^- = 0$ , si bien que le mode rigide de rotation autour de l'axe vertical est normalement préservé. Pour les deux autres modes rigides de rotation, l'énergie n'est généralement pas nulle. La contribution de la surface libre est négative, et celle de l'intérieur du fluide dépend du centre de rotation, assez difficile à préciser a priori.

## 10. REMARQUES SUR L'APPLICATION PRATIQUE

Les conclusions qui précèdent supposent naturellement que la raideur géométrique  $U_g$  et le terme de pression  $U_p$  soient correctement calculés, ce qui n'est pas toujours le cas. Observons qu'elles restent valables si  $U_p$  et  $U_g$  sont *exacts lors d'un mode rigide*. En particulier, pour  $U_p$ , il ne suffit pas de faire le calcul pour une pression moyenne sur l'élément. Le cas de  $U_g$  est plus complexe. Examinons par exemple le cas d'une plaque. On a, lors d'un mode rigide,

$$\begin{aligned}\gamma_{11}^{(2)} &= \frac{1}{2}[(D_1 u_1)^2 + (D_1 u_2)^2 + (D_1 u_3)^2] = \frac{1}{2}(w_{21}^2 + w_{31}^2) \\ \gamma_{22}^{(2)} &= \frac{1}{2}[(D_2 u_1)^2 + (D_2 u_2)^2 + (D_2 u_3)^2] = \frac{1}{2}(w_{12}^2 + w_{23}^2) \\ \gamma_{33}^{(2)} &= \frac{1}{2}[(D_3 u_1)^2 + (D_3 u_2)^2 + (D_3 u_3)^2] = \frac{1}{2}(w_{13}^2 + w_{23}^2) \\ \gamma_{13}^{(2)} &= \frac{1}{2}[D_1 u_1 D_3 u_1 + D_1 u_2 D_3 u_2 + D_1 u_3 D_3 u_3] = \frac{1}{2}w_{21} w_{23} \\ \gamma_{23}^{(2)} &= \frac{1}{2}[D_2 u_1 D_3 u_1 + D_2 u_2 D_3 u_2 + D_2 u_3 D_3 u_3] = \frac{1}{2}w_{12} w_{13} \\ \gamma_{12}^{(2)} &= \frac{1}{2}[D_1 u_1 D_2 u_1 + D_1 u_2 D_2 u_2 + D_1 u_3 D_2 u_3] = \frac{1}{2}w_{31} w_{32}\end{aligned}$$

Compte tenu du fait que l'équilibre s'obtient en supposant  $\sigma_{33}^0 = 0$ , on obtient comme expression de la raideur géométrique

$$\frac{1}{2} \int_S [N_{11}^0 (w_{21}^2 + w_{31}^2) + N_{22}^0 (w_{12}^2 + w_{23}^2) + 2N_{12}^0 w_{32} w_{12} + 2Q_1^0 w_{21} w_{23} + 2Q_2^0 w_{12} w_{13}] dS$$

avec

$$w_{21} = \frac{1}{2}(D_1 u_2 - D_2 u_1) \quad , \quad w_{31} = \frac{1}{2}(D_1 u_3 - D_3 u_1) \quad , \quad w_{32} = \frac{1}{2}(D_2 u_3 - D_3 u_2)$$

ou toute expression équivalente compte tenu du fait que, lors d'un mode rigide,  $D_1 u_2 + D_2 u_1 = 0$  ,  $D_1 u_3 + D_3 u_1 = 0$  ,  $D_2 u_3 + D_3 u_2 = 0$ .

En particulier, on peut écrire  $w_{31} = D_1 u_3$  ,  $w_{32} = D_2 u_3$  ce qui donne

$$\begin{aligned}U_g &= \frac{1}{2} \int_S \left\{ N_{11}^0 [(D_1 u_3)^2 + \frac{1}{4}(D_1 u_2 - D_2 u_1)^2] + N_{22}^0 [(D_2 u_3)^2 + \frac{1}{4}(D_1 u_2 - D_2 u_1)^2] \right. \\ &\quad \left. + 2N_{12}^0 D_1 u_3 D_2 u_3 - Q_1^0 (D_1 u_2 - D_2 u_1) D_2 u_3 - Q_2^0 (D_2 u_1 - D_1 u_2) D_1 u_3 \right\} dS\end{aligned}$$

On constate qu'il faut plus que les termes classiques de Bryan

$$U_g(\text{Bryan}) = \frac{1}{2} \int_S [N_{11}^0 (D_1 u_3)^2 + N_{22}^0 (D_2 u_3)^2 + 2N_{12}^0 D_1 u_3 D_2 u_3] dS$$

Par contre, il est parfaitement licite, pour le problème qui nous occupe, de remplacer les contraintes par leur moyenne volumique, puisque les rotations sont constantes lors d'un mode rigide.

## 11. CAS OU L'ON NEGLIGE $U_p$ ET $U_g$

Il arrive souvent que l'on néglige  $U_p$  et  $U_g$ . Dans ce cas, l'énergie se ramène à

$$U = U_T + U_\Gamma = \frac{1}{2} \int_{V_f} \rho_f g_j u_i w_{ij} dV + \frac{1}{2} \int_\Gamma \rho_f g (\eta^2 - u_3^2) dS$$

Dans le cas d'un mode rigide de translation, on a  $w_{ij} = 0$  et  $\eta = u_3$ , si bien que l'énergie est nulle. Pour une rotation  $w_{12}$  autour de l'axe vertical, on a  $\eta = u_3 = 0$  et  $g_2 = 0$ , et l'énergie est encore nulle. Par contre, pour une rotation autour d'un des axes  $e_1$  ou  $e_2$ , on a ici

$$U - U_\Gamma^* = -\frac{1}{2} (w_1^2 + w_2^2) M_f g z_{Gf}$$

où  $M_f$  est la masse du fluide et  $z_{Gf}$  son centre de gravité. Ce terme est nul si l'on tourne autour du centre de gravité du fluide. Par ailleurs, sur  $\Gamma$ , on a  $u_3 = -w_1 x_2 + w_2 x_1$  et par conséquent  $\eta = -w_1 \bar{x}_2 + w_2 \bar{x}_1$  en notant  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$  les moyennes de  $x_1$  et  $x_2$  sur la surface libre. On a donc

$$U_\Gamma^* = -\frac{1}{2} w_1^2 \int_\Gamma \rho_f g (x_2^2 - \bar{x}_2^2) dS - \frac{1}{2} w_2^2 \int_\Gamma \rho_f g (x_1^2 - \bar{x}_1^2) dS \\ + w_1 w_2 \int_\Gamma \rho_f g (x_1 x_2 - \bar{x}_1 \bar{x}_2) dS$$

Cette expression s'écrit encore

$$U_\Gamma^* = -\frac{1}{2} w_1^2 \int_\Gamma \rho_f g (x_2 - \bar{x}_2)^2 dS - \frac{1}{2} w_2^2 \int_\Gamma \rho_f g (x_1 - \bar{x}_1)^2 dS \\ + w_1 w_2 \int_\Gamma \rho_f g (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) dS$$

Il est aisé de voir qu'elle est définie négative. Il existe des valeurs de  $z_G$  pour lesquelles certaines rotations n'ont pas d'énergie

$$\begin{vmatrix} I_2 + z_G & -I_{12} \\ -I_{12} & I_1 + z_G \end{vmatrix} = 0$$

en notant

$$I_2 = \frac{1}{M_f g} \int_{\Gamma} \rho_f g (x_2 - \bar{x}_2)^2 dS$$

$$I_1 = \frac{1}{M_f g} \int_{\Gamma} \rho_f g (x_1 - \bar{x}_1)^2 dS$$

$$I_{12} = \frac{1}{M_f g} \int_{\Gamma} \rho_f g (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) dS$$

Cette équation s'écrit explicitement

$$z_G^2 + z_G(I_1 + I_2) + I_1 I_2 - I_{12}^2 = 0$$

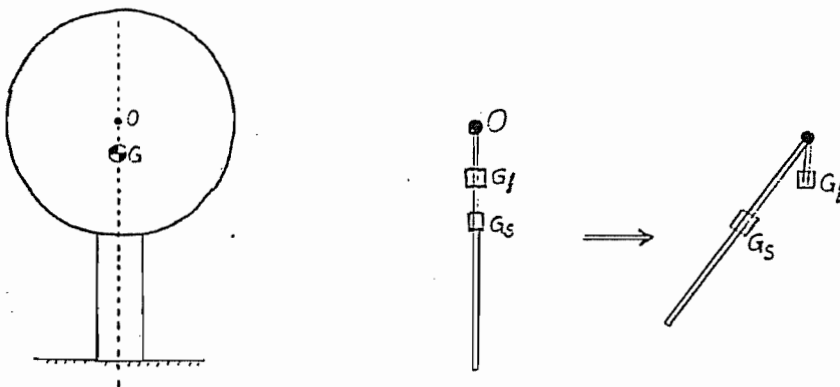
soit

$$z_G = \frac{-(I_1 + I_2) \pm \sqrt{(I_1 + I_2)^2 - 4I_1 I_2 + 4I_{12}^2}}{2}$$

$$= \frac{-(I_1 + I_2) \pm \sqrt{(I_1 - I_2)^2 + 4I_{12}^2}}{2}$$

En particulier, pour un réservoir circulaire ou carré,  $I_1 = I_2 = I$  et  $I_{12} = 0$  ce qui donne  $z_G = -\frac{I}{2}$

En suspendant le réservoir de manière à obtenir cette valeur, l'énergie de rotation sera nulle. Notons que ce point de suspension est situé *au-dessus* du centre de gravité du fluide. Comme ce centre ne coïncide pas avec le centre de rotation des modes rigides orthogonalisés aux quatre précédents, l'énergie peut aussi bien être positive que négative. On peut se faire une idée assez correcte du comportement du système dans le cas d'un réservoir sphérique (château d'eau moderne). Le fluide tendra toujours à aligner son centre de gravité au-dessous du centre de la sphère. Ce système est comparable à un pendule suspendu en O, dont il est aisé de saisir l'effet déstabilisant



## BIBLIOGRAPHIE

[1] J.F. DEBONGNIE - " Modélisation de Problèmes Hydroélastiques par Eléments Finis. Application aux Lanceurs Aérospatiaux " - Thèse de Doctorat en Sciences Appliquées, Liège, 1978

[2] J.F. DEBONGNIE - " On a Purely Lagrangian Formulation of Sloshing and Fluid Induced Vibrations of Tanks " - Comp. Meth. Appl. Mech. and Engng 58 (1986) pp 1-18