

UNIVERSITE DE LIEGE  
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES

**OPTIMISATION TOPOLOGIQUE :**  
**DU MILIEU CONTINU**  
**A**  
**LA STRUCTURE ELASTIQUE**

par

**Pierre DUYSINX**

Ingénieur Civil Electricien-Mécanicien (Aérospatiale)

Thèse présentée en vue de l'obtention du titre de  
Docteur en Sciences Appliquées  
de l'Université de Liège

---

Année académique 1995-1996

COMPOSITION DU JURY :

---

Président:

Pierre BECKERS, Professeur ordinaire à l'Université de Liège,

Membres:

Martin BENDSØE,	Docent à la Technical University of Denmark, Lyngby
Jean-François DEBONGNIE,	Chargé de Cours à l'Université de Liège
Claude FLEURY,	Professeur ordinaire à l'Université de Liège, Promoteur
Michel GERADIN,	Professeur ordinaire à l'Université de Liège
François-Xavier LITT,	Professeur ordinaire à l'Université de Liège
Patrick MORELLE,	Docteur Ingénieur, SAMTECH S.A.
Van Hien NGUYEN,	Professeur ordinaire aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix de Namur
Jacques RONDAL,	Professeur ordinaire à l'Université de Liège

---

Thèse de doctorat soutenue avec La Plus Grande Distinction, le 7 février 1996.

## **REMERCIEMENTS**

Je voudrais d'abord remercier Monsieur le Professeur Claude FLEURY pour les conseils avisés qu'il a su me prodiguer pour guider mes recherches.

Que Messieurs les Professeurs Pierre BECKERS, Jean-François DEBONGNIE, Michel GERADIN et Jacques RONDAL veuillent bien trouver l'expression de ma gratitude pour le temps qu'ils m'ont consacré lors des discussions pertinentes et enrichissantes que nous avons eues.

Je désire ne pas oublier les membres du LTAS et du service de Structures Aérospatiales. Parmi ceux-ci, je voudrais tout particulièrement mettre en évidence Monsieur ZHANG Wei-Hong pour la complicité que nous avons développée.

Je remercie également Monsieur le Professeur NGUYEN Van Hien pour les collaborations interuniversitaires que nous avons entretenues.

Je tiens aussi à souligner le rôle de Monsieur Patrick MORELLE de la société SAMTECH pour l'attention qu'il m'a témoignée dès le début de mes recherches.

Il ne m'est pas permis de passer sous silence le rôle des lecteurs qui ont permis de donner au texte la présentation qu'il a aujourd'hui. Je citerai tout spécialement : Monsieur Jacques RIGA, Monsieur Luc DUYSINX, ainsi que Monsieur et Madame Pascal ROGIEST-LEJEUNE.

Je voudrais enfin rendre hommage à toute ma famille, pour son soutien constant, quelles que soient les circonstances. Je veux aussi associer mon père, Robert DUYSINX, qui a su, depuis l'enfance, m'initier à la recherche scientifique et dont l'exemple a constitué un phare tout au long de mes études d'ingénieur et de doctorant.

# TABLE DES MATIERES

## PREFACE

### Chapitre 1 : INTRODUCTION

1.1 Définition et buts de l'optimisation topologique des structures . . . . .	- 1.1 -
1.2 Evolution historique de l'optimisation structurale . . . . .	- 1.5 -
1.3 Difficultés en optimisation structurale . . . . .	- 1.8 -
1.3.1 L'impossibilité de modifier et de déterminer la topologie des structures avec les techniques d'optimisation connues . . . . .	- 1.8 -
1.3.2 L'existence et l'unicité des solutions du problème d'optimisation avec des paramètres distribués . . . . .	- 1.12 -
1.3.3 La méthode d'homogénéisation . . . . .	- 1.17 -
1.4 La méthode d'homogénéisation en optimisation topologique . . . . .	- 1.18 -
1.5 A propos de cette thèse . . . . .	- 1.22 -
1.5.1 Les buts de la thèse et ses hypothèses . . . . .	- 1.22 -
1.5.2 Présentation de la thèse . . . . .	- 1.24 -
1.6 Conclusion . . . . .	- 1.26 -

### Chapitre 2 : FORMULATIONS DU PROBLEME D'OPTIMISATION                   TOPOLOGIQUE DES MILIEUX CONTINUS

2.0 De la nécessité de décrire et de justifier les formulations du problème de topologie des milieux continus . . . . .	- 2.1 -
2.1 Rappel des équations du comportement mécanique du solide élastique linéaire .	- 2.2 -
2.1.1 Les équations locales de l'élasticité linéaire . . . . .	- 2.2 -
2.1.2 Formulation faible des équations de l'élasticité linéaire . . . . .	- 2.3 -
<i>Définition des espaces fonctionnels</i> . . . . .	- 2.4 -
<i>Ensemble des déplacements admissibles</i> . . . . .	- 2.4 -
<i>Formes bilinéaire et linéaire d'énergie</i> . . . . .	- 2.4 -
<i>Principe des travaux virtuels</i> . . . . .	- 2.5 -
2.1.3 Conditions d'existence des formes faibles . . . . .	- 2.6 -
2.1.4 Résolution des équations du solide élastique par la méthode des éléments finis . . . . .	- 2.8 -
<i>Expression matricielle des équations de l'élasticité</i> . . . . .	- 2.8 -
<i>Méthode aux éléments finis</i> . . . . .	- 2.8 -
2.2 Position du problème d'optimisation topologique . . . . .	- 2.10 -
2.2.1 L'optimisation topologique formulée comme une distribution de matière . . . . .	- 2.10 -
2.2.2 Echec de l'approche purement discrète et de la conception de type vide- solide . . . . .	- 2.11 -
2.2.3 Régularisation du problème par l'introduction de matériaux composites obtenus par perforation . . . . .	- 2.12 -
2.2.4 La méthode d'homogénéisation pour résoudre le problème de	

topologie . . . . .	- 2.14 -
<i>Les concepts de microstructure et de théorie de l'homogénéisation</i> . . . . .	- 2.14 -
<i>La procédure de résolution numérique</i> . . . . .	- 2.15 -
<i>Remarque sur la résolution par une paramétrisation libre du tenseur d'élasticité</i> . . . . .	- 2.17 -
2.2.5 Variables de conception du problème de topologie - exemple des matériaux feuilletés de rang 2 . . . . .	- 2.17 -
2.3 Formulations du problème de la topologie . . . . .	- 2.18 -
2.3.1 Enoncé du problème fondamental de la topologie . . . . .	- 2.18 -
2.3.2 Exemple des matériaux feuilletés de rang 2 . . . . .	- 2.20 -
2.3.3 Compliance ou énergie potentielle totale ? . . . . .	- 2.21 -
2.3.3.1 Critère de l'énergie potentielle totale . . . . .	- 2.21 -
<i>Conditions limites de déplacement homogène</i> . . . . .	- 2.21 -
<i>Conditions limites de déplacement non homogène</i> . . . . .	- 2.21 -
<i>Une approche unifiée des différentes formulations</i> . . . . .	- 2.22 -
2.3.3.2 Compliance généralisée . . . . .	- 2.23 -
2.3.4 Formulation équilibre du problème de conception . . . . .	- 2.23 -
2.3.5 Critère local ou critère global ? . . . . .	- 2.24 -
2.3.6 Introduction d'une borne sur le périmètre de la solution . . . . .	- 2.28 -
2.3.7 Utilisation de fonctions de coût autres que la densité locale et le volume de matière . . . . .	- 2.29 -
2.4 Illustration numérique de différentes formulations du problème de topologie . . . . .	- 2.30 -
2.5 Extension du problème fondamental de la topologie à d'autres problèmes de conception . . . . .	- 2.31 -
2.5.1 Extension du problème fondamental de la topologie aux problèmes avec plusieurs cas de charge . . . . .	- 2.31 -
2.5.1.1 Position du problème . . . . .	- 2.31 -
2.5.1.2 Formulation du problème fondamental de la distribution optimale de matière en dynamique des structures continues . . . . .	- 2.32 -
2.5.1.3 Exemple . . . . .	- 2.33 -
2.5.2 Formulation du problème d'optimisation topologique pour les structures en vibration . . . . .	- 2.34 -
2.5.2.1 Position du problème . . . . .	- 2.34 -
2.5.2.2 Rappel des équations des problèmes dynamiques et vibratoires en mécanique des solides . . . . .	- 2.34 -
<i>Principe de d'Alembert</i> . . . . .	- 2.34 -
<i>Principe de Hamilton</i> . . . . .	- 2.35 -
<i>Vibrations libres</i> . . . . .	- 2.36 -
<i>Discrétisation en éléments finis</i> . . . . .	- 2.36 -
2.5.2.3 Formulation du problème fondamental de la distribution optimale de matière en dynamique des structures continues . . . . .	- 2.37 -
2.5.2.4 Problème de topologie optimale sous forme d'une distribution de microstructure avec un matériau feuilleté de rang 2 . . . . .	- 2.38 -
2.5.2.5 Résolution des problèmes de croisement de fréquences propres . . . . .	- 2.38 -
2.5.2.6 Résolution des problèmes d'exclusion de bandes de fréquence . . . . .	- 2.38 -
2.5.2.7 Exemple . . . . .	- 2.39 -
2.6 Conclusion . . . . .	- 2.41 -

**Chapitre 3 : ANALYSE DE SENSIBILITE, CONDITIONS D’OPTIMALITE ET PRINCIPES DE LA RESOLUTION DU PROBLEME D’OPTIMISATION TOPOLOGIQUE**

3.0 Introduction	- 3.1 -
3.1 Analyse de sensibilité du premier et du second ordre en optimisation topologique	- 3.2 -
3.1.1 Le problème statique	- 3.2 -
3.1.1.1 Dérivées des déplacements généralisés	- 3.2 -
3.1.1.2 Dérivées des grandeurs structurales	- 3.2 -
3.1.1.3 Dérivées des grandeurs énergétiques	- 3.4 -
<i>Dérivées des grandeurs énergétiques sous forme discrète</i>	- 3.4 -
<i>Formulation continue des dérivées de l'énergie potentielle élastique</i>	- 3.5 -
<i>Dérivées de l'énergie potentielle d'un matériau hyperélastique</i>	- 3.6 -
3.1.2 Analyse de sensibilité des problèmes aux valeurs propres	- 3.8 -
3.1.2.1 Dérivées premières des modes propres et des valeurs propres	- 3.8 -
3.1.2.2 Dérivées secondes des valeurs propres	- 3.10 -
3.1.2.3 Similitude entre la sensibilité de l'énergie de déformation et des valeurs propres	- 3.10 -
3.1.3 L'analyse de sensibilité des problèmes de topologie au sein d'un code de calcul	- 3.10 -
3.1.3.1 La méthode semi-analytique	- 3.11 -
3.1.3.2 La méthode analytique	- 3.12 -
<i>Cas où les dérivées de la matrice de Hooke sont connues analytiquement</i>	- 3.12 -
<i>Les matériaux isotropes avec une pénalisation de type puissance des densités intermédiaires (SIMP)</i>	- 3.13 -
3.1.3.3 Remarque sur l'analyse de sensibilité du second ordre	- 3.14 -
3.2 Conditions d'optimalité pour le problème d'optimisation topologique	- 3.15 -
3.2.1 Conditions d'optimalité pour le problème fondamental de la topologie	- 3.15 -
<i>Conditions d'optimalité sous forme discrétisée</i>	- 3.16 -
3.2.2 Analyse des conditions d'optimalité du problème fondamental	- 3.17 -
3.2.3 Conditions d'optimalité pour le problème de cas de charges multiples	- 3.18 -
<i>Analyse des conditions d'optimalité et principe de la résolution numérique</i>	- 3.20 -
3.2.4 Conditions d'optimalité pour le problème de comportement vibratoire	- 3.21 -
<i>Analyse des conditions d'optimalité et principe de la résolution numérique de ce problème</i>	- 3.21 -
3.3 Principe de la résolution du problème partiel d'optimisation lié aux variables de microstructure	- 3.22 -
3.4 Résolution du problème partiel d'optimisation par rapport aux variables d'angle	- 3.25 -
3.4.1 Analyse du problème	- 3.25 -
3.4.2 Orientation optimale des matériaux orthotropes en état plan	- 3.26 -
<i>Solution analytique en état plan</i>	- 3.26 -
<i>Solution du problème tridimensionnel</i>	- 3.29 -
3.4.3 Algorithme de résolution numérique du problème du minimum de l'énergie élastique	- 3.29 -
<i>Résoudre le problème du minimum de l'énergie par un critère d'optimalité</i>	- 3.29 -

	<i>Résolution du problème d'orientation optimale en optimisation topologique</i>	- 3.30 -
3.4.4	Minimum d'une combinaison linéaire convexe d'énergies potentielles de déformation	- 3.30 -
3.5	Applications	- 3.32 -
3.5.1	Résolution d'un problème fondamental	- 3.32 -
3.5.2	Résolution d'un problème de conception avec plusieurs cas de charge	- 3.35 -
3.6	Conclusion	- 3.38 -

## Chapitre 4 : HOMOGENEISATION DES MATERIAUX COMPOSITES POREUX

4.0	Introduction	- 4.1 -
4.1	Le concept d'homogénéisation et la modélisation des matériaux composites	- 4.3 -
4.1.1	Définition opérationnelle de la science des matériaux	- 4.3 -
4.1.2	La théorie micromécanique	- 4.4 -
4.1.3	Homogénéisation et modélisation mathématique des matériaux composites	- 4.5 -
4.1.4	Quelques formules et théorèmes utiles de la théorie micromécanique des matériaux composites	- 4.8 -
	<i>Approche directe des propriétés homogénéisées</i>	- 4.8 -
	<i>Expression des modules effectifs en fonction des matrices de concentration</i>	- 4.8 -
	<i>Théorème de la déformation moyenne et de la contrainte moyenne</i>	- 4.9 -
	<i>Relations entre les valeurs moyennes</i>	- 4.10 -
	<i>L'approche énergétique du calcul des propriétés homogénéisées</i>	- 4.10 -
4.1.5	Quelques formules utiles de la théorie de l'homogénéisation des composites périodiques	- 4.11 -
4.2	Matériaux feuilletés	- 4.12 -
4.2.1	Homogénéisation des matériaux composites feuilletés de rang 1	- 4.12 -
4.2.2	Matériaux feuilletés de rang 2	- 4.15 -
4.2.3	Quelques propriétés des matériaux feuilletés de rang 2	- 4.16 -
	<i>Angle d'orthotropie et rigidité en cisaillement</i>	- 4.16 -
	<i>Analyse des coefficients élastiques homogénéisés et de la non-linéarité de la raideur vis-à-vis de la densité relative</i>	- 4.17 -
	<i>Etude de quelques cas particuliers</i>	- 4.18 -
	<i>Formules de transformation</i>	- 4.19 -
	<i>Identification des paramètres de microstructure d'un matériau de rang 2 de propriétés matérielles connues</i>	- 4.20 -
4.2.4	Matériaux feuilletés de rang N	- 4.21 -
4.2.5	Borne sur les modules homogénéisés et optimalité des matériaux feuilletés de rang N et de rang 2	- 4.22 -
	<i>Borne supérieure sur l'énergie élastique des matériaux composites</i>	- 4.22 -
	<i>Optimalité des matériaux feuilletés de rang N</i>	- 4.23 -
4.2.6	Utilisation des matériaux composites de rang 2 en optimisation topologique	- 4.23 -
4.2.7	Matériaux de rang 2 auto-adaptatifs	- 4.26 -
	<i>Solution en formulation équilibre</i>	- 4.26 -

	<i>Formulation déplacement</i> . . . . .	- 4.28 -
4.3	Microperforations rectangulaires . . . . .	- 4.29 -
4.4	Microperforations sphériques et microstructure de Hashin . . . . .	- 4.30 -
4.4.1	Introduction . . . . .	- 4.30 -
4.4.2	Approximation diluée . . . . .	- 4.31 -
	<i>Module de compressibilité cubique <math>\kappa^*</math></i> . . . . .	- 4.31 -
	<i>Module de cisaillement <math>G^*</math></i> . . . . .	- 4.32 -
4.4.3	Le modèle des sphères composites ou microstructure de Hashin . . . . .	- 4.32 -
4.4.4	Bornes variationnelles sur les modules équivalents . . . . .	- 4.34 -
	<i>Bornes de Hashin-Shtrikman</i> . . . . .	- 4.34 -
	<i>Borne de Herve-Soltz-Zaoui</i> . . . . .	- 4.35 -
4.4.5	Modèle à trois phases de Christensen et Lo (1979) . . . . .	- 4.35 -
4.4.6	Approximation de Mori et Tanaka . . . . .	- 4.36 -
4.4.7	Application de la microstructure de Hashin à l'optimisation topologique . . . . .	- 4.39 -
4.5	Microperforations cylindriques . . . . .	- 4.42 -
4.5.1	Solutions exactes pour le modèle des cylindres composites . . . . .	- 4.43 -
4.5.2	Bornes variationnelles de Hashin et Hill . . . . .	- 4.45 -
4.5.3	Equations de Halpin-Tsai . . . . .	- 4.45 -
4.5.4	Application des équations de Halpin-Tsai à l'optimisation topologique . . . . .	- 4.46 -
4.6	Microstructure de Hashin à deux niveaux . . . . .	- 4.48 -
	<i>La première microstructure de Hashin : la matrice</i> . . . . .	- 4.48 -
	<i>La seconde microstructure de Hashin : un matériau à fibres unidirectionnelles</i> . . . . .	- 4.48 -
4.7	Matériaux artificiels avec pénalisation des densités intermédiaires (SIMP) . . . . .	- 4.50 -
4.7.1	Définition des propriétés matérielles . . . . .	- 4.50 -
4.7.2	Les matériaux SIMP en pratique . . . . .	- 4.52 -
	<i>Coûts de calcul et souplesse d'utilisation</i> . . . . .	- 4.52 -
	<i>Qualité des résultats obtenus</i> . . . . .	- 4.53 -
	<i>Choix du paramètre <math>p</math> et processus de continuation</i> . . . . .	- 4.53 -
4.8	Utilisation comparée de différentes lois microstructurales pour l'optimisation topologique . . . . .	- 4.56 -
4.9	Conclusion . . . . .	- 4.63 -

## Chapitre 5 : SCHEMAS D'APPROXIMATION CONVEXE ET ALGORITHMES DE RESOLUTION

5.0	Introduction . . . . .	- 5.1 -
5.1	Schémas d'approximation convexe du premier et du second ordre . . . . .	- 5.4 -
A.	Approximations du premier ordre . . . . .	- 5.4 -
5.1.1	Approximation linéaire . . . . .	- 5.4 -
5.1.2	Approximations en fonction des variables inverses . . . . .	- 5.5 -
5.1.3	Approximations obtenues par linéarisation mixte (CONLIN) . . . . .	- 5.6 -
5.1.4	Approximations basées sur la méthode des asymptotes mobiles (M.M.A.) . . . . .	- 5.7 -
B.	Approximations du second ordre . . . . .	- 5.9 -
5.1.5	Approximations quadratiques et programmation séquentielle quadratique . . . . .	- 5.9 -
5.1.5.1	Approximation quadratique . . . . .	- 5.9 -
5.1.5.2	Méthode de Newton-Lagrange et programmation séquentielle quadratique . . . . .	- 5.10 -
5.1.5.3	Approximation quadratique séparable et méthode SQP . . . . .	- 5.10 -



diagonal . . . . .	- 5.11 -
5.1.6 Méthode des asymptotes mobiles du second ordre . . . . .	- 5.11 -
5.1.7 Approximation de courbures nulles . . . . .	- 5.13 -
5.2 Une nouvelle procédure pour former des approximations structurales . . . . .	- 5.13 -
5.2.1 Remise à jour de type Quasi-Newton diagonal . . . . .	- 5.14 -
5.2.2 Adaptation de la méthode de BFGS pour matrices diagonales au problème des structures . . . . .	- 5.16 -
5.2.2.1 Effectuer la remise à jour dans l'espace des variables directes ou variables inverses . . . . .	- 5.16 -
5.2.2.2 Choix de la matrice des courbures initiales . . . . .	- 5.17 -
5.2.2.3 Utilisation d'une procédure de Levenberg-Marquardt pour forcer la définition positive du Hessien . . . . .	- 5.18 -
5.2.2.4 Amortissement des actualisations du Hessien . . . . .	- 5.19 -
5.2.3 Utilisation de la méthode de BFGS diagonal avec les approximations MMA et quadratique séparable . . . . .	- 5.19 -
5.2.3.1 La méthode MMA . . . . .	- 5.19 -
5.2.3.2 L'approximation quadratique séparable . . . . .	- 5.20 -
5.3 Une procédure de correction des données du second ordre . . . . .	- 5.21 -
5.3.1 Approximation quadratique . . . . .	- 5.21 -
5.3.2 Schémas d'approximation utilisant les asymptotes mobiles . . . . .	- 5.22 -
5.4 Validation des nouvelles procédures d'approximation . . . . .	- 5.23 -
5.4.1 Problème de la poutre cantilever . . . . .	- 5.23 -
5.4.2 Problème du treillis 2 barres . . . . .	- 5.25 -
5.4.3 Problème du treillis 10 barres . . . . .	- 5.27 -
5.4.4 Problème du treillis 8 barres . . . . .	- 5.29 -
5.4.5 Problème du treillis 4 barres . . . . .	- 5.31 -
5.5 Résolution numérique du problème d'optimisation . . . . .	- 5.34 -
5.5.1 Les caractéristiques du problème d'optimisation topologique . . . . .	- 5.34 -
5.5.2 Deux approches pour résoudre le problème d'optimisation . . . . .	- 5.35 -
5.5.2.1 Les critères d'optimalité . . . . .	- 5.35 -
5.5.2.2 La méthode de programmation convexe séquentielle . . . . .	- 5.36 -
5.5.3 Résolution des sous-problèmes d'optimisation par méthode duale . . . . .	- 5.37 -
5.5.3.1 De l'avantage de travailler dans l'espace dual . . . . .	- 5.37 -
5.5.3.2 L'optimiseur CONLIN V.2 . . . . .	- 5.37 -
5.5.4 Des approximations structurales liées à la nature des restrictions . . . . .	- 5.38 -
5.5.4.1 Le volume . . . . .	- 5.38 -
5.5.4.2 Le périmètre . . . . .	- 5.38 -
5.5.4.3 La compliance . . . . .	- 5.39 -
5.5.4.4 Les fréquences propres . . . . .	- 5.41 -
5.5.5 Une stratégie de "move limits" . . . . .	- 5.42 -
5.6 Utilisation comparée des approximations structurales en optimisation topologique . . . . .	- 5.42 -
5.7 Conclusion . . . . .	- 5.49 -

## **Chapitre 6 : CONTROLE DU PERIMETRE ET DES MODES DE DISTRIBUTION PARASITE**

6.1 Description des problèmes liés à la résolution numérique du problème de topologie . . . . .	- 6.1 -
6.2 Contrôle du périmètre de la solution . . . . .	- 6.2 -
6.2.1 Régularisation du problème de topologie par l'introduction d'une borne sur le périmètre . . . . .	- 6.2 -

6.2.1.1	Description de la méthode du périmètre . . . . .	- 6.2 -
6.2.1.2	Comparaison de la méthode du périmètre et de la relaxation du problème à l'aide de microstructures optimales . . . . .	- 6.5 -
6.2.2	La procédure de résolution adoptée dans cette thèse pour résoudre le problème de compliance minimale avec un périmètre borné . . . . .	- 6.6 -
6.2.2.1	Choix de la microstructure et de l'approximation différentiable du problème discret . . . . .	- 6.6 -
6.2.2.2	Résolution du problème par une approche de programmation mathématique . . . . .	- 6.7 -
6.3.3	Approximation de la restriction sur le périmètre . . . . .	- 6.8 -
6.3.3.1	Expression différentiable du périmètre et de ses dérivées . .	- 6.8 -
6.3.3.2	Choix du paramètre de différentiabilité $\epsilon$ . . . . .	- 6.9 -
6.3.3.3	Approximation du périmètre . . . . .	- 6.10 -
	<i>Choix de l'approximation</i> . . . . .	- 6.10 -
	<i>Une première estimation heuristique de la courbure</i> . . . . .	- 6.11 -
	<i>Une approximation utilisant la méthode de lissage</i> . . . . .	- 6.13 -
	<i>Estimation d'une courbure par une technique de BFGS diagonal</i> . . . . .	- 6.13 -
6.3	Les distributions en "damier" et autres modes parasites . . . . .	- 6.14 -
6.3.1	Introduction . . . . .	- 6.14 -
6.3.1.1	Origine des distributions en damier et des distributions parasites . . . . .	- 6.14 -
6.3.1.2	Critères de comparaison des stratégies d'élimination des distributions parasites . . . . .	- 6.15 -
6.3.2	Analogie avec le problème de Stokes et le problème d'élasticité incompressible . . . . .	- 6.16 -
6.3.3	Une expérience simplifiée sur l'influence du degré du champ de déplacement des éléments finis . . . . .	- 6.18 -
6.3.4	Une analyse locale du problème des distributions en damier . . . . .	- 6.21 -
6.3.6	La méthode des macroéléments . . . . .	- 6.23 -
6.3.7	La méthode des filtres . . . . .	- 6.25 -
	<i>Filtrage des distributions en damier</i> . . . . .	- 6.26 -
	<i>Eliminer la dépendance vis-à-vis du maillage</i> . . . . .	- 6.26 -
6.4	Le contrôle du périmètre : une nouvelle stratégie pour éliminer les distributions en damier et les autres modes parasites . . . . .	- 6.27 -
6.4.1	Le principe de la stratégie . . . . .	- 6.27 -
6.4.2	Comparaison de la stratégie du périmètre et des autres méthodes d'élimination des modes de distribution parasite . . . . .	- 6.29 -
6.5	Applications . . . . .	- 6.31 -
6.5.1	Le problème de la poutre cantilever courte . . . . .	- 6.31 -
6.5.2	Le problème du treillis de Michell . . . . .	- 6.32 -
6.5.3	Influence de la valeur du périmètre cible sur la topologie . . . . .	- 6.35 -
6.5.4	Contrôle des modes parasites avec des éléments triangulaires . . . . .	- 6.36 -
6.5.5	Convergence des solutions obtenues avec des microstructures suboptimales vis-à-vis du maillage lorsque le périmètre est borné . .	- 6.37 -
6.6	Conclusion . . . . .	- 6.40 -

## Chapitre 7 : UN OUTIL DU PROCESSUS DE CONCEPTION DES STRUCTURES

7.1	La conception des structures et l'optimisation topologique . . . . .	- 7.1 -
7.1.1	De la nécessité de l'optimisation topologique dans la conception des structures de haute performance . . . . .	- 7.1 -

7.1.2	De la nécessité actuelle d'interpréter les résultats de l'optimisation topologique et de les compléter par d'autres techniques d'optimisation	- 7.2 -
7.1.3	La place de l'optimisation topologique dans la chaîne de conception	- 7.3 -
7.2	Résolution du problème de topologie	- 7.6 -
7.2.1	Méthodologie de résolution d'un problème d'optimisation topologique	- 7.6 -
7.2.2	Choix des paramètres du problème	- 7.8 -
7.2.3	Présentation des résultats	- 7.10 -
7.2.3.1	Visualisation des distributions de matière	- 7.10 -
7.2.3.2	Comparaison des résultats à l'aide de grandeurs adimensionnelles	- 7.11 -
7.2.4	L'optimisation topologique dans le progiciel SAMCEF	- 7.12 -
7.3	Analyse et interprétation des distributions de densité	- 7.12 -
7.3.1	Exploitation des résultats de topologie	- 7.13 -
7.3.1.1	Le processus de décision sur la nature des éléments structuraux	- 7.14 -
7.3.1.2	Extraction d'un modèle paramétrique	- 7.15 -
	<i>La méthode de manipulation interactive</i>	- 7.15 -
	<i>L'ajustement des frontières selon une "méthode des moindres carrés"</i>	- 7.16 -
	<i>La méthode de reconnaissance d'image</i>	- 7.16 -
7.3.2	Exemple	- 7.16 -
7.4	Applications	- 7.21 -
7.4.1	Problème de la poutre MBB	- 7.21 -
7.4.2	Optimisation d'une cage de roulement	- 7.26 -
7.4.3	Etude de la topologie d'un support à deux moyeux	- 7.29 -
7.4.4	Optimisation topologique tridimensionnelle : conception d'une plaque cantilever épaisse	- 7.35 -
7.4.5	Problème de la barrière	- 7.39 -
7.4.5.1	Présentation des résultats	- 7.39 -
7.4.5.2	Apparition de modes parasites de vibration	- 7.40 -
	<i>Modification de la loi de raideur-densité</i>	- 7.42 -
	<i>Filtrage des modes locaux</i>	- 7.43 -
7.5	Conclusion	- 7.45 -

## Chapitre 8 : PERSPECTIVES D'AVENIR ET CONCLUSION

8.1	Résumé de cette thèse	- 8.1 -
8.2	La contribution originale de cette thèse	- 8.3 -
8.3	Perspectives d'avenir	- 8.6 -
8.3.1	Extensions possibles de notre outil d'optimisation topologique	- 8.6 -
8.3.2	Vers un processus de conception totale	- 8.7 -
8.3.3	Vers la conception de matériaux intelligents et de microstructures aux propriétés quelconques	- 8.8 -
8.3.3.1	Différentes approches de la conception des matériaux	- 8.9 -
8.3.3.2	Un exemple de matériaux nouveaux : les matériaux à coefficient de Poisson négatif	- 8.11 -
8.4	Conclusion	- 8.13 -

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

**Annexe A : RESUME DE LA THEORIE DE L'HOMOGENEISATION DES COMPOSITES A MICROSTRUCTURE PERIODIQUE**

A.1	Position du problème et notations	- A.1 -
A.2	Les équations du problème	- A.4 -
	<i>Formulation forte</i>	- A.4 -
	<i>Formulation variationnelle</i>	- A.4 -
A.3	Le problème d'homogénéisation	- A.5 -
	<i>Développement en série de la solution</i>	- A.5 -
	<i>Lemme de Lions</i>	- A.7 -
	<i>Equilibre microscopique et macroscopique du corps</i>	- A.7 -
	<i>Introduction des coefficients élastiques homogénéisés</i>	- A.10 -
A.3	Les coefficients homogénéisés	- A.12 -
	<i>Détermination des coefficients</i>	- A.12 -
	<i>Propriétés des coefficients homogénéisés</i>	- A.13 -
A.4	Quelques remarques	- A.13 -
A.5	Cas de la masse volumique locale et des forces de volume	- A.14 -
	<i>Masse volumique locale</i>	- A.14 -
	<i>Forces de volume proportionnelles à la masse volumique locale</i>	- A.14 -

**Annexe B : METHODES DE QUASI-NEWTON POUR MATRICES DIAGONALES**

B.1	Méthodes de Newton et Quasi-Newton : rappel	- B.1 -
	B.1.1 Méthode de Newton	- B.1 -
	B.1.2 Méthodes de Quasi-Newton	- B.2 -
	B.1.3 Position du problème : génération d'une séquence d'approximations creuses ou diagonales	- B.4 -
B.2	Méthodes de Quasi-Newton préservant la structure diagonale des matrices	- B.5 -
	B.2.1 Version modifiée des formules de remise à jour de Davidon-Fletcher-Powell	- B.5 -
	B.2.2 Généralisation de la remise à jour diagonale à d'autres procédures de type Quasi-Newton	- B.6 -
	B.2.3 Caractère défini positif des approximations de la matrice Hessienne B	- B.7 -
	B.2.4 Algorithme de la méthode de Quasi-Newton pour matrice diagonale correspondant à la remise à jour de type BFGS	- B.8 -

# Chapitre 1 : INTRODUCTION

## 1.1 Définition et buts de l'optimisation topologique des structures

Déterminer la forme appropriée des composants structuraux est un problème de première importance pour l'ingénieur. Dans tous les domaines de la mécanique des structures, l'impact de la bonne conception d'une pièce est très important sur sa résistance, sa durée de vie et son utilisation en service. Ce défi est quotidien dans les secteurs de pointe que sont la recherche spatiale, l'aéronautique, l'automobile, la compétition navale, la fine mécanique, la mécanique de précision ou les ouvrages d'art en génie civil... Le développement de l'art de l'ingénieur requiert des efforts considérables pour améliorer sans cesse les techniques de conception des structures. L'optimisation intervient de façon primordiale dans l'augmentation des performances et la réduction de masse des engins aérospatiaux et automobiles, entraînant ainsi de substantielles économies d'énergie.

Le développement constant des techniques de conception assistée par ordinateur et des stratégies d'optimisation s'inscrit dans ce cadre. L'optimisation des structures soulève depuis plus de vingt ans le plus vif intérêt. Encore trop peu appliquée aux techniques classiques de bureau d'études, elle s'y intègre progressivement au fur et à mesure que s'accroît sa fiabilité. Parti des problèmes les plus simples, le champ d'application de l'optimisation structurale s'étend aujourd'hui à de nouveaux défis toujours plus intéressants. L'optimisation de la topologie des structures est maintenant un sujet en pleine ébullition. L'établissement de ses bases théoriques remonte au milieu de la dernière décennie, tandis que les premières applications pratiques ne datent que de la fin des années 80. L'optimisation de la topologie des structures constitue le sujet de cette thèse.

Pour illustrer l'évolution des techniques d'optimisation structurale, on peut scinder arbitrairement l'optimisation des structures en trois grandes familles. Historiquement, chacune a été abordée par ordre croissant de difficulté et de généralité (voir figure 1.1).

Le *dimensionnement automatique* des structures (figure 1.1-a) ne permet de modifier que la section droite ou l'épaisseur transversale des composants d'une structure dont la forme et la topologie sont fixées. Aucune modification du modèle géométrique n'est possible.

L'*optimisation de forme* (figure 1.1-b) admet des changements de forme compatibles avec une topologie fixée au préalable. L'optimisation de forme classique modifie la représentation paramétrique des frontières du domaine. En faisant bouger les frontières des domaines, on peut rechercher une meilleure solution parmi l'ensemble de toutes les structures obtenues par transformation homéomorphe de la structure originale. Dans ce cas, il est clair que l'on peut admettre un changement des dimensions transversales aussi bien qu'une modification de la configuration de la structure, mais il n'est certainement pas permis d'altérer la connectivité ou la nature des membres structuraux.

Enfin, l'*optimisation topologique* (figure 1.1-c) permet de modifier plus fondamentalement la nature de la structure. Cette fois, la géométrie de la pièce est envisagée sans aucun a priori sur la connectivité des domaines ou des membres structuraux présents dans la solution. Optimiser la topologie conduit naturellement à déterminer d'une certaine manière la forme ou les dimensions transversales optimales de la structure, de sorte que certains auteurs (Rozvany, 1993) lui attribuent aussi le nom d'*optimisation de forme généralisée*.

Il est évident que les gains de performance sont une fonction croissante de la liberté dont on dispose pour réaliser l'optimisation. Ainsi, la flexibilité disponible avec une topologie variable permet des

gains de performance très significatifs et nettement supérieurs à ceux obtenus par une méthode d'optimisation de forme paramétrique. Pour des problèmes de conception courants, on peut estimer que les gains moyens de performance vont, en dimensionnement, de 5 à 10% et, en optimisation de forme avec une topologie fixée, de 10 à 30%. Avec l'optimisation topologique, on pense que les gains générés peuvent aller de 40 à 100 % sur le critère de performance. Ces chiffres démontrent toute l'utilité et toute la potentialité de l'optimisation de la topologie en conception automatisée.

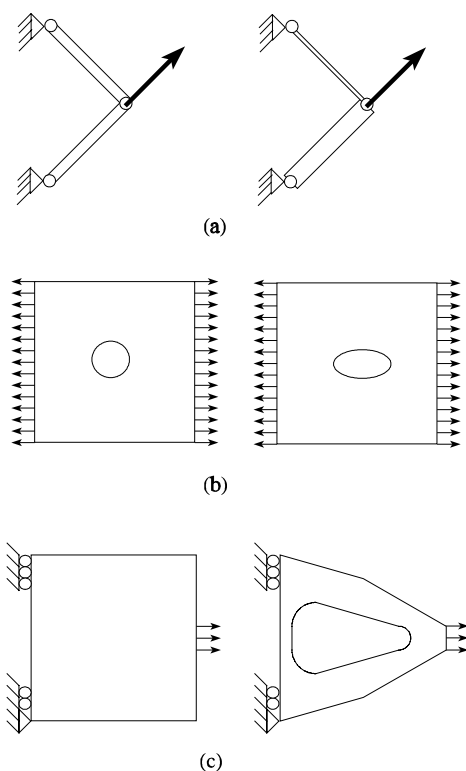


Figure 1.1 : Les 3 classes de problèmes d'optimisation des structures. (a) Dimensionnement. (b) Forme avec topologie fixée. (c) Topologie variable

Il est temps, maintenant, de définir plus clairement la notion de topologie des structures. De façon générique, pour le *Grand Robert, Dictionnaire Alphabétique et Analogique de la Langue Française*, le terme de topologie dérive du mot anglais "*topology*" où il désigne la *géométrie de position* ou de *situation*, encore appelée "*analysis situs*" par Poincaré. En mathématiques, ce mot désigne "*la partie de la géométrie qui étudie les propriétés qualitatives et les positions relatives des êtres géométriques, indépendamment de leur forme et de leur grandeur*".

Deux domaines de topologie identique peuvent être projetés sur un même domaine de référence par une transformation bijective, continue et différentiable. Quelles que soient les transformations géométriques du domaine de référence, pourvu qu'elles soient continûment dérivables, la topologie de tous les domaines obtenus par projection est identique à celle du domaine de départ.

Pour le mécanicien, la topologie d'une structure recouvre l'ordonnement de ses membres et de ses joints structuraux ou encore la connectivité du domaine occupé par la matière et donc, par corollaire, le nombre et la position des perforations du domaine. Parfois, il est d'usage d'appeler topologie d'autres données d'arrangement relatif comme la séquence d'empilement de plis dans un laminé.

La topologie d'une structure étant une des premières décisions du processus de conception, on dispose, à ce moment, de peu d'informations; on ne connaît souvent que certaines sollicitations prédominantes d'un côté et les fixations possibles de l'autre. Dès lors, dans de nombreuses applications, l'**optimisation topologique** a pour but de déterminer la nature et la connectivité des éléments constitutifs d'une structure dans un problème où seuls les conditions aux limites et le domaine spatial où il est possible de placer la structure, sont spécifiés.

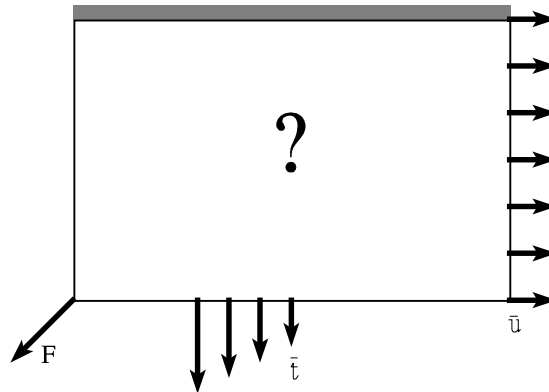


Figure 1.2 : Définition des données minimales du problème de topologie

En analysant l'esprit du processus de conception, l'optimisation topologique tente de répondre à une des premières questions que se pose l'ingénieur : quelle est la nature de la structure nécessaire pour remplir le cahier des charges ? On peut encore se laisser aller à une interprétation plus abstraite où la structure serait une boîte noire dont le rôle serait de transmettre les efforts nécessaires pour relier les fixations aux charges. Le problème de topologie correspondant consisterait alors à déterminer les caractéristiques générales de la structure, et l'optimisation topologique aurait pour but de réaliser ce choix initial de la manière la plus automatique possible.

La topologie nécessite une approche différente selon que l'on ait formulé ou non des hypothèses complémentaires sur la nature de la solution. Le problème de topologie se pose en des termes différents selon que l'on présuppose une modélisation en membres structuraux discrets (généralement unidimensionnels : poutres, barres) ou bien continus (structures bidimensionnelles et tridimensionnelles : volumes, coques, plaques, membranes). Les méthodes d'optimisation avec topologie variable font la distinction entre l'optimisation topologique de structures composées d'éléments discrets (treillis de barres ou réseaux de poutres) et l'optimisation topologique des milieux continus.

Si la structure a été préalablement discrétisée avec des poutres ou des barres, la notion de topologie regroupe l'ensemble des données concernant "l'ordonnement" et la connectivité de ses membres ou de ses joints structuraux. Comme la nature de ses éléments structuraux est fixée par hypothèse, on part d'un ensemble prédéterminé de membres structuraux potentiels reliant un réseau de joints structuraux et couvrant le domaine de conception. L'optimisation consiste alors à extraire de cet *univers structural* un sous-ensemble optimal de composants destinés à former la structure recherchée. La variation de connectivité permet de générer ou d'éliminer des membres structuraux entre les joints existants. La figure 1.3 présente le problème d'une structure en porte-à-faux, souvent connu sous le nom de problème de Michell. Le domaine rectangulaire est chargé dans son coin inférieur droit tandis que tous les noeuds du côté gauche sont fixés. La figure 1.4 présente l'univers structural et le

sous-ensemble de barres formant le treillis optimal obtenu par Beckers et Fleury (1994).

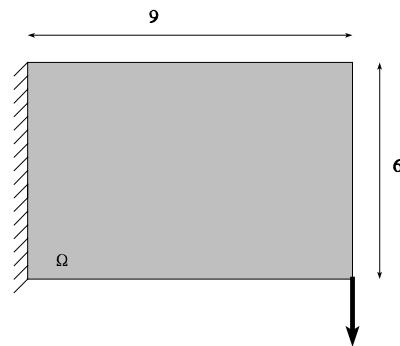


Figure 1.3: Définition du problème de Michell

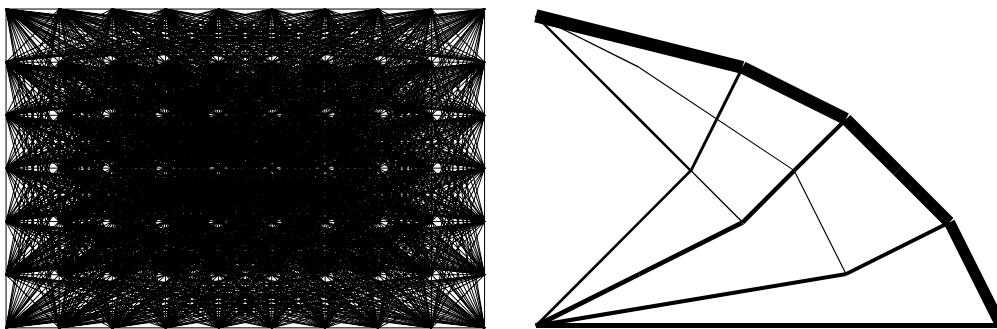


Figure 1.4 : Optimisation topologique de treillis de barres

L'optimisation topologique des milieux continus ne fait aucune hypothèse préalable sur la nature des composants structuraux de la solution. Le domaine disponible est un milieu continu et on désire en extraire un sous-domaine occupé par la structure. Dans une procédure de résolution numérique, le domaine de conception est "discrétisé" en éléments finis, mais il n'est pas naturellement discret comme l'univers structural. Au départ, on n'introduit donc aucune restriction sur la nature de la solution. De même, a priori, on ne choisit pas le type d'éléments structuraux de la solution (barres ou poutres). Bien au contraire, la forme, le type ainsi que les dimensions transversales des composants structuraux présents dans la structure optimale sont suggérés par le résultat du processus sans spécifier en aucune manière une représentation paramétrique de la forme ou des dimensions de la structure. L'approche "milieu continu", permet de varier la connectivité du domaine, de séparer ou de réunir des domaines structuraux, de générer ou de réduire des domaines constitutifs en vue d'en dégager la silhouette idéale. Comme nous le verrons, le problème continu est généralement traité sous la forme d'une répartition optimale de la matière disponible. Pour déterminer numériquement la distribution de matière, on recouvre le domaine disponible avec un maillage. Le sous-domaine réellement occupé par le matériau s'obtient en optimisant la densité locale au sein de chaque élément.

La figure 1.5 montre la discrétisation en éléments finis et la distribution de matière optimale obtenue pour un problème équivalent au treillis de Michell (figure 1.4). Le noir représente le solide et le blanc,



le vide. Le volume de matière admissible vaut, cette fois, 50% de celui du domaine de conception. Comme on le voit, les solutions de type treillis ou membrane peuvent s'interpréter de façon identique.

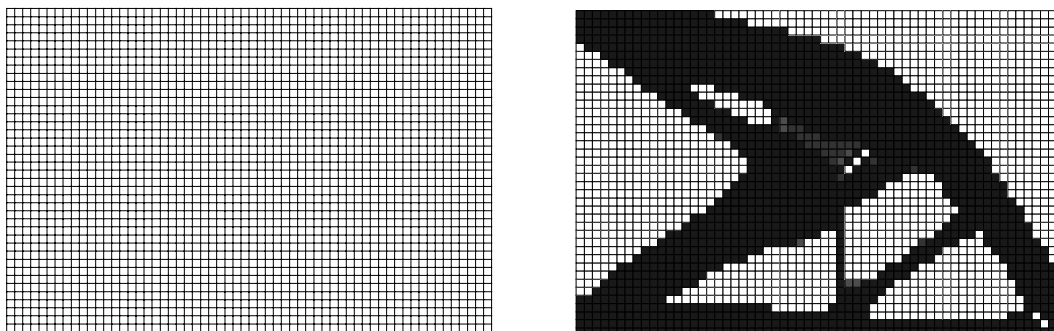


Figure 1.5 : Optimisation de la topologie par l'approche "milieu continu"

La topologie abordée sous le biais d'une approche des milieux continus tient compte de la concentration de contraintes entre les membres structuraux, ce qui est totalement ignoré par la modélisation en treillis. Ceci conduit à une coalescence des fins réseaux de barres. On peut cependant montrer (Bendsøe et Haber, 1993) que l'approche treillis est un cas limite de l'approche des milieux continus lorsque la fraction de matière à redistribuer tend vers zéro.

## 1.2 Evolution historique de l'optimisation structurale

C'est au début des années 60 que Schmit (1960) et Fox (1965) ont jeté les bases d'une théorie moderne de l'optimisation des structures fondée sur les concepts de programmation mathématique et d'analyse de sensibilité. Paradoxalement, à cette époque, le "*fully stressed design*" était la seule technique à être largement utilisée en pratique même s'il n'existait aucune justification théorique... si ce n'étaient l'empirisme et l'intuition des ingénieurs. Il a fallu attendre Prager et Taylor (1968) pour que les méthodes variationnelles et les conditions d'optimalité de Lagrange permettent de justifier les critères de "*fully stressed design*" pour une classe de problèmes d'optimisation structurale. Les conditions d'optimalité du problème d'optimisation furent alors utilisées directement pour construire un algorithme de résolution itératif qu'on appelle la technique des *critères d'optimalité*.

A l'origine, l'optimisation structurale était principalement limitée au dimensionnement de treillis ou de portiques. Le dimensionnement des structures fut, donc, le premier champ d'application des critères d'optimalité. Le problème de dimensionnement recherche les sections transversales des membres structuraux tandis que leur longueur et la localisation de leurs joints restent fixées. Durant la fin des années 60 et le début des années 70, les critères d'optimalité furent rapidement adaptés aux structures de grande taille, modélisées par éléments finis (Venkayya, Khot et Berke, 1973). La technique des critères d'optimalité produisit quelques résultats intéressants et nombre d'extensions furent présentées depuis les années 70 jusqu'à nos jours, comme les méthodes de critères généralisés de Venkayya (1988) ou les critères d'optimalité discrétisés de Rozvany et Zhou (1992).

Bien que depuis les années 70, l'attention ait été principalement ciblée sur le dimensionnement, le problème de topologie de treillis a été également étudié par Prager (1974) sur une classe très restreinte de structures en se basant sur le concept de treillis de Michell (1904). Le problème consiste à trouver la meilleure configuration possible pour que le treillis ou le portique puisse transmettre les forces aux fondations en minimisant une performance donnée et en satisfaisant aux contraintes sur la conception.

La théorie de Michell (1904) concerne la topologie de treillis de barres de masse minimale. La solution optimale au sens de Michell est constituée uniquement de barres perpendiculaires entre elles, qui forment une structure de configuration optimale pour les contraintes limites de tension et de compression. Tous les problèmes de configuration étudiés plus tard par Prager furent résolus analytiquement, de sorte que l'application pratique de la topologie fut très sérieusement limitée. Pour y remédier, Rozvany (1976) déploya beaucoup d'efforts pour développer de nouvelles approches afin de résoudre ces problèmes de configuration le plus automatiquement possible.

Plus récemment, l'étude de la topologie optimale des treillis fut approfondie par Kirch (1990). En imposant une borne minimale de très faible valeur sur la section, l'optimisation de "*layout*" des treillis et portiques peut être approchée comme un problème de dimensionnement classique, de très grande taille. La solution est alors obtenue par l'application de critères d'optimalité généralisés pour une variété de fonctions objectifs : compliance, déplacements, tensions, valeurs propres (Rozvany, 1989, Rozvany *et al.*, 1993 et Zhou, 1991).

Enfin, le point d'orgue du problème d'optimisation topologique de treillis semble avoir été posé par Bendsøe, Ben-Tal et Haftka (1991), Bendsøe et Ben-Tal (1991) Ben-Tal et Bendsøe (1993). Le problème de topologie de treillis est envisagé sous une approche intégrée combinant simultanément analyse et conception. Le problème de compliance minimale y est transformé en un problème d'optimisation non différentiable et ensuite, dans le cas de treillis de barres, en un problème linéaire. Sous cette forme, sa résolution peut être faite sur de très grandes structures en utilisant des méthodes d'optimisation non différentiables (Ben-Tal, Kočvara et Zowe, 1993), une méthode du point intérieur (Ben-Tal et Nimirowskii, 1993), une méthode de pénalité/barrière multiplicateur (Ben-Tal et Zibulevsky, 1994), ou une méthode duale (Beckers et Fleury, 1994).

A côté des critères d'optimalité, le problème d'optimisation structurale fit de rapides progrès basés sur le développement de l'analyse de sensibilité, du concept d'approximation structurale explicite et des méthodes de programmation mathématique adaptées aux structures. La grande difficulté du problème de conception des structures provient du fait qu'il s'agit d'un problème d'optimisation non linéaire et implicite dans les variables de conception. Pour atteindre une conception quasi optimale en quelque dix analyses par éléments finis, Fleury (1973) et Schmit et ses collaborateurs (Schmit et Farshi, 1974, Schmit et Miura, 1976) ont indépendamment suggéré de procéder par une séquence de problèmes d'optimisation approchés, mais explicites, qu'on pourrait résoudre plus efficacement par une méthode de programmation mathématique. Chaque caractéristique structurale est remplacée par une approximation explicite généralement séparable et convexe. Les schémas d'approximation les plus populaires sont basés sur le rôle clé des variables inverses : la linéarisation inverse (Schmit et Farshi, 1974), l'approximation mixte ou CONLIN (Fleury et Braibant, 1986), la méthode des asymptotes mobiles ou MMA (Svanberg, 1987). Si l'information de courbure est disponible, l'approximation qui en résulte est généralement de très haute qualité (Smaoui *et al.*, 1988, Fleury, 1989b, 1991b, Svanberg, 1991b). La résolution des sous-problèmes convexes et séparables demanda la mise au point d'algorithmes de résolution efficaces et robustes basés sur des méthodes de programmation mathématique. Les méthodes de programmation quadratique séquentielle ont été appliquées aux structures par plusieurs auteurs dont Belegundu et Arora (1984) et Schittkowskii (1985). La méthode de résolution la plus répandue reste cependant la méthode duale qui fut appliquée par Fleury (1979) à la résolution des problèmes convexes séparables de l'optimisation structurale. Le traitement des variables discrètes a également fait l'objet de l'attention de Schmit et Fleury (1980b), mais il reste encore largement inexploré. La construction des approximations structurales serait impossible sans une analyse de sensibilité précise et de coût modéré. Son perfectionnement a requis aussi de nombreux efforts de recherche (par exemple Arora et Haug, 1979, Haftka et Adelman, 1993). L'analyse de sensibilité du second ordre est également disponible (Haftka, 1982).

Le problème de dimensionnement automatique a bénéficié en premier lieu de ces recherches, de sorte que l'optimisation des dimensions transversales est actuellement un outil fiable. Le problème d'optimisation de dimensionnement fut également étendu au problème des éléments de flexion (Fleury et Sander, 1983), à l'amélioration du comportement vibratoire et à la stabilité de l'équilibre.

Outre les dimensions transversales des éléments structuraux, il est possible d'en faire varier la forme. A notre connaissance, peu de travaux ont été consacrés à l'étude de la forme optimale de treillis. Dans ce type de problème, seule la localisation des joints structuraux est modifiée pendant que la topologie reste inchangée. Svanberg (1981) fut un des seuls à mener à bien l'optimisation de forme de treillis sur la base d'analyses par éléments finis et de résolutions selon des techniques de programmation mathématique.

Au contraire, l'optimisation de la forme des structures minces et tridimensionnelles commença très tôt grâce à Zienkiewicz et Campbell (1973). Depuis lors le domaine de l'optimisation de forme a connu un tel essor qu'il est impossible d'être exhaustif et nous renvoyons le lecteur aux revues détaillées réalisées par Haftka et Gandhi (1986) et Ding (1986).

Le problème est beaucoup plus complexe que le dimensionnement, puisque les modifications de la forme du contour extérieur entraînent des modifications du domaine intérieur. Il faut surmonter plusieurs difficultés. La première difficulté consiste à réaliser l'analyse de sensibilité qui est beaucoup plus complexe qu'en dimensionnement. Il faut relier les mouvements des points intérieurs du domaine aux variations de la frontière. C'est le problème de la détermination du champ de vitesse. D'abord limitée aux maillages transfinis (par exemple Braibant, 1985), la technique a été étendue aux maillages libres (Belegundu et Rajan, 1988, Beckers, 1991, Zhang, 1991, Duysinx, *et al.*, 1993). Le calcul de sensibilité doit être mené de façon semi-analytique, ce qui peut aussi entraîner des erreurs importantes (Barthelemy et Haftka, 1988). La seconde difficulté est de maîtriser la définition des frontières du domaine et de pouvoir remailler le domaine quel que soit le contour extérieur. Braibant et Fleury (1984) ont montré que la problème est bien posé et régularisé quand on emploie des courbes douces telles que les *B-splines*. Le remaillage de la pièce optimisée exige des mailleurs automatiques fiables. Malheureusement, lorsque les changements de forme deviennent très importants, il devient parfois difficile de faire varier le modèle éléments finis sans introduire des éléments très distordus et, par là, une erreur d'approximation très importante. La solution a été suggérée par Bennet et Botkin (1983) et Botkin et Bennet (1985): pour prévenir ce phénomène, il faut modifier le maillage au cours de l'optimisation. Actuellement, on combine génération automatique de maillage, optimisation de forme et même calcul d'erreur pour maintenir un niveau de précision constant (par exemple Duysinx, *et al.*, 1994).

Pour déterminer la forme initiale sans a priori, il est nécessaire de se débarrasser de la représentation paramétrique et de pouvoir se passer de fonction de forme pour décrire le domaine. Poser le problème sous forme d'une distribution de matière répond à ce critère, mais une méthode de résolution générale restait inconnue jusqu'à ce que Bendsøe et Kikuchi (1988) suggèrent d'introduire la notion de microstructure poreuse et la théorie de l'homogénéisation dans le problème de distribution optimale de matière.

### 1.3 Difficultés en optimisation structurale

Aujourd'hui, les problèmes d'optimisation des dimensions transversales et d'optimisation des paramètres de forme des structures élastiques sont maîtrisés dans une large mesure. Si la fonction objectif et les contraintes se prêtent à une analyse de sensibilité, l'application d'algorithmes d'optimisation permet de dégager une solution au problème avec un effort souvent raisonnable. Ainsi, de nombreux problèmes pratiques de conception structurale peuvent être résolus avec succès et rigueur. Mais il ne faut pas se leurrer, il existe encore plusieurs difficultés majeures.

La première difficulté est fondamentalement liée à la nature de l'optimisation de forme paramétrique. Le modèle de la forme de la structure doit être choisi avant le processus d'optimisation qui ne pourra le modifier. La solution trouvée est découverte parmi la classe de contours initialement définie pour la modélisation. La recherche d'une meilleure topologie sur des bases rationnelles échappe complètement à la stratégie de l'optimisation de forme classique. Pour sortir de cette classe de solution, il faut recourir à une autre formulation du problème. La forme libre d'une structure s'obtient généralement en recherchant la distribution de matière optimale selon un critère spécifié.

La seconde difficulté est inhérente à la solution des problèmes d'optimisation d'un paramètre distribué tel que celui des propriétés matérielles sur un domaine de conception. L'existence et l'unicité de l'optimum sont loin d'être évidentes. Le calcul numérique de la solution est alors mis en difficulté. La solution à ce problème passe par le processus de relaxation, c'est-à-dire une extension de l'espace de conception à l'ensemble de toutes les distributions de matériaux composites poreux.

Pour arriver au calcul des variations et à l'optimisation sur des domaines généralisés, Murat et Tartar (1985a), parlent des deux difficultés à surmonter. *"La première difficulté survient lorsque l'on recherche à démontrer l'existence: pour nombre de problèmes il n'existe pas de solution optimale dans la classe que l'on a considérée a priori, et les suites optimisantes (minimisantes) convergent vers quelque chose que l'on peut appeler "solution généralisée" et qu'il est important de définir de façon précise.*

*La seconde difficulté survient lorsque l'on cherche à dériver la fonction coût pour obtenir des conditions nécessaires d'optimalité (et mettre en oeuvre des méthodes numériques telles que les méthodes de descente); dans certains problèmes, l'ensemble sur lequel on optimise n'a pas de propriété de convexité (ou plus généralement n'est pas localement une variété) de sorte qu'on ne peut faire de variations ou d'accroissements sans sortir de l'ensemble considéré a priori: c'est le cas de l'optimisation de domaine où l'on recherche une fonction caractéristique et où il n'y a pas de chemin naturel pour aller d'une fonction caractéristique à une autre en restant dans l'ensemble des fonctions caractéristiques ( $t \chi_1 + (1-t) \chi_2$  n'est pas une fonction caractéristique pour  $0 < t < 1$  si  $\chi_1 \neq \chi_2$ )."*

Voyons maintenant ces difficultés plus en détail et montrons quelles sont les solutions qui y ont été apportées.

#### 1.3.1 L'impossibilité de modifier et de déterminer la topologie des structures avec les techniques d'optimisation connues

Le processus d'optimisation des dimensions transversales d'une structure ne peut générer une structure de nouvelle topologie. Ce fait a été constaté très tôt par Rossow et Taylor (1973). Le processus d'optimisation de forme paramétrique est, lui aussi, incapable de modifier la topologie choisie initialement.

Là, où la variable est le domaine, le calcul des variations a été réalisé depuis 1905 par Hadamard en déplaçant la frontière le long de sa normale et en calculant la variation induite de la fonctionnelle. Avec le formalisme de l'optimisation de forme, les frontières mobiles de la structure sont définies en fonction de segments de courbe régulière dont on modifie les paramètres afin d'optimiser des critères de performance sélectionnés. Cependant, il est troublant de constater que l'optimisation de forme paramétrique nécessite la définition préalable de la structure en fonction de courbes paramétriques et que, par conséquent, les principales caractéristiques de la structure, comme sa topologie, sont choisies a priori. La connectivité des domaines et le nombre de trous sont choisis et figés durant tout le processus d'optimisation.

En effet, la méthode de transformation homéomorphe, qui est la base du processus d'optimisation de forme paramétrique, possède le défaut suivant: un domaine ne peut être comparé qu'avec un domaine de connectivité semblable. Il est impossible d'y créer un trou ou d'ajouter un petit appendice à l'extérieur de ses frontières. La difficulté réelle réside dans le fait que pour un ensemble de domaines accessibles, c'est-à-dire l'ensemble de ses fonctions caractéristiques, il n'existe aucun passage entre des domaines de topologie distincte. Il n'y a pas de chemin naturel pour aller d'une fonction caractéristique, représentative d'une topologie, à une autre fonction caractéristique, représentative d'une autre topologie, en restant dans l'ensemble des fonctions caractéristiques. La fonction  $t\chi_1+(1-t)\chi_2$  n'est pas une fonction caractéristique pour  $0 < t < 1$  si  $\chi_1 \neq \chi_2$ . Dès lors, on n'a pas de structure mathématique permettant d'établir une notion de dérivée au sens classique entre deux topologies distinctes. Comme rappelé par Bendsøe et Kikuchi (1988), une simple transformation isomorphe du domaine est inapte à générer des topologies différentes, ce qui fut démontré clairement par Chenais (1993).

Le choix de la topologie est cependant crucial pour la performance de la conception, mais on ne possède aucun élément objectif pour la connaître a priori. Il y a peu de chance que l'optimum absolu soit constitué d'un domaine simplement connexe. Il y a même souvent intérêt à créer des trous et des cavités pour améliorer la performance de la conception. Généralement, on ne sait pas en prévoir le nombre, la position et la forme. Hélas, la méthode d'optimisation de forme avec variation de frontières est incapable de modifier la topologie initiale. La solution optimale que l'on obtient n'est que le meilleur optimum pour un nombre de trous fixés, soit une solution suboptimale. Il n'existe aucune garantie pour qu'un changement de topologie ne fournisse pas une solution plus intéressante.

Pour générer des structures de forme optimale sans aucun a priori sur la topologie, il est établi depuis assez longtemps qu'il faut sortir du cadre de l'optimisation de forme paramétrique et abandonner une représentation homéomorphe, dans laquelle la forme est définie par un nombre fini de fonctions de base préchoisies. L'idée novatrice pour trouver la topologie d'une structure est de rechercher et d'optimiser la fonction indicatrice qui décrit le domaine occupé par la matière. Cette formulation alternative a, d'abord, été brièvement discutée par Cea, Gioan et Michel (1973) et par Tartar (1977), mais c'est à Bendsøe et Kikuchi (1988) qu'il revient d'avoir porté cette idée à maturité et de l'avoir concrétisée en une approche numérique pour la détermination de la topologie en mécanique des structures. Formuler le problème en fonction d'une distribution optimale de la matière disponible est une alternative satisfaisante, car aucune hypothèse n'est nécessaire sur la solution.

Pour illustrer le défaut de l'optimisation de forme, nous proposons de reprendre une application académique célèbre proposée par Bennet et Botkin (1983) et nous allons montrer que la topologie initiale préconisée par l'énoncé est fortement suboptimale. Le choix erroné de la connectivité initiale du domaine handicape le processus d'optimisation de forme qui ne peut trouver une solution réellement satisfaisante dans la classe des domaines de topologie présélectionnée.

Les données du problème sont représentées à la figure 1.6. On recherche la forme appropriée d'un support reliant deux moyeux (à droite sur la figure) fixés rigidement à un troisième (à gauche sur la

figure) chargé par une force. La connectivité initiale de la pièce est formée d'un domaine de forme triangulaire incluant les trois moyeux. Le centre du domaine est évidé par un trou formé par trois droites tangentes à trois cercles. On minimise la masse de la structure tout en maintenant les tensions équivalentes de von Mises sous une limite donnée. L'épaisseur de chaque partie structurale est également limitée à une jauge minimale. Cette limitation technologique permet au modèle de ne pas dégénérer. Aucun membre structural ne peut disparaître.

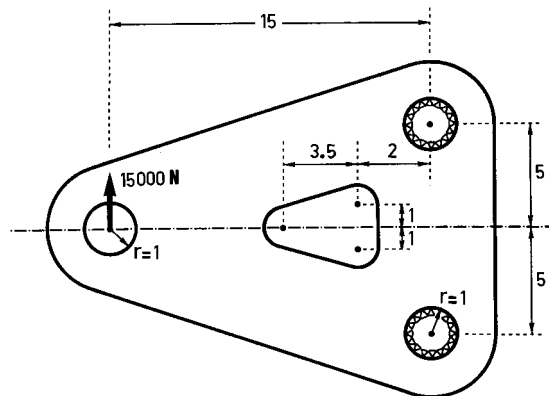


Figure 1.6 : L'énoncé du problème et la topologie initiale suggérée

La solution proposée par Zhang (1991) est reprise à la figure 1.7. La solution possède une forme plus mince qui satisfait aux critères de conception, mais sa topologie est identique à celle du modèle initial. Aucun membre structural supplémentaire n'a été créé. Aucune perforation ne peut se créer durant le processus d'optimisation. La solution est incluse dans le choix initial de la paramétrisation. Pourtant, la partie de la structure qui est située entre les deux moyeux fixés ne reprend aucun effort et le processus d'optimisation essaie de réduire cette partie inutile de la pièce en diminuant son épaisseur le plus possible. Mais, il est impossible d'éliminer ce membre, même si son épaisseur est réduite à sa jauge minimale admissible. On sent qu'il y aurait avantage à pouvoir éliminer ou créer des parties dans la structure pour réduire encore la masse.

Pour générer une forme sans poser de choix préalable sur la topologie de la solution et donc pour déterminer la topologie idéale, on peut transformer le problème en une distribution optimale de matière. La figure 1.8 présente le résultat d'un tel calcul. Il est remarquable de constater que le choix initial de la topologie de la solution de la figure 1.7 est relativement malheureux en comparaison de la topologie qui est suggérée par la distribution de matière de la figure 1.8.

Comme cela avait été prévu, la distribution de matière prévoit l'élimination de toute la matière située entre les deux moyeux fixés. Il est plus étonnant de constater que la topologie de la distribution de matière suggère aussi de placer deux croisillons au centre de la pièce afin de renforcer les arcs qui relient les fixations à la sollicitation. On voit apparaître deux petites cavités autour du moyeu où est placé le chargement. Ces deux sortes "d'arc-boutant" sont apparues pour renforcer le passage de l'effort entre le pourtour du moyeu et les structures principales.

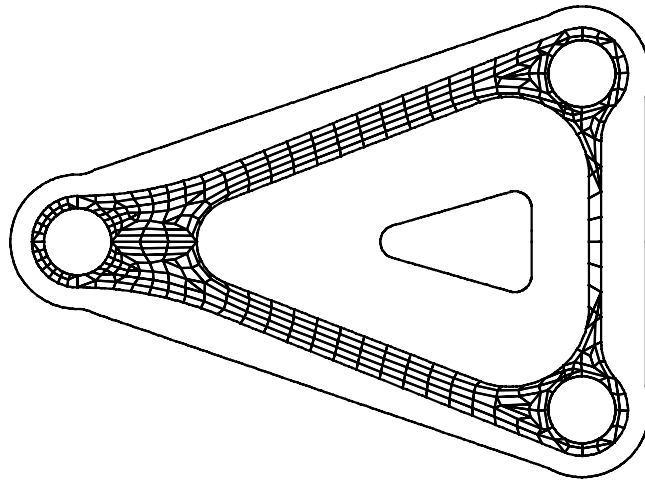


Figure 1.7 : Le modèle initial et la solution du problème obtenue par Zhang (1991)

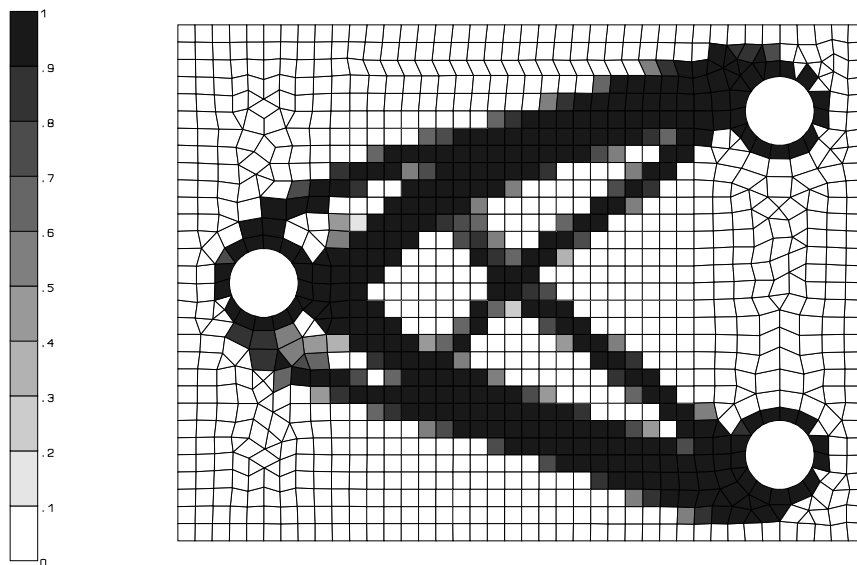


Figure 1.8 : Une meilleure topologie suggérée par une distribution de matière optimale

On peut en conclure que la recherche d'une distribution optimale de matière sur le domaine de conception est une alternative intéressante pour résoudre le problème du choix de la topologie initiale. Cette nouvelle formulation permet de s'affranchir d'un choix initial de la connectivité du modèle. De plus, la technique est séduisante, car elle peut être résolue numériquement sur un maillage fixe et elle évite les difficultés de la manipulation d'un domaine variable. Malheureusement, les distributions optimales sont des problèmes d'optimisation avec des paramètres distribués. Leur résolution soulève des difficultés inattendues. L'existence et l'unicité de la solution ne peuvent être démontrées. La résolution numérique du problème est également moins évidente qu'il n'y paraît au premier abord. L'étude de cette nouvelle difficulté fait l'objet du paragraphe suivant.

### ***1.3.2 L'existence et l'unicité des solutions du problème d'optimisation avec des paramètres distribués***

Pour les problèmes classiques d'optimisation de dimensionnement et de forme, on peut établir une théorie mathématique rigoureuse d'unicité et d'existence de l'optimum car on travaille sur un compact dans un espace de conception de dimension finie (Armand et Lodier, 1978, Armand, Lurie, Cherkaev, 1984) ou sur un ensemble admissible dans un espace de dimension infinie (Pironneau, 1986, Buttazzo et Dal Maso, 1990). Dans le problème de dimensionnement, les variables de conception gouvernent les dimensions transversales des composants d'une zone déterminée de la structure. Pour le problème d'optimisation de forme paramétrique, la topologie de la structure est fixée et les frontières mobiles sont décrites à l'aide de segments de courbes régulières définies au moyen d'un nombre fini de paramètres tels que des points de contrôle. La solution des problèmes bien posés existe et est stable. La précision de la solution est sans cesse améliorée par un raffinement du maillage et son évaluation numérique peut être entreprise sans danger.

A côté de ces problèmes bien formulés, il existe, néanmoins, beaucoup de problèmes de conception où la construction d'une théorie d'existence de l'optimum devient difficile, voire impossible. Ainsi, il est rare de pouvoir établir l'existence et l'unicité de l'optimum pour un problème dont la variable de conception est un paramètre distribué appartenant à un espace de Banach non réflexif tel que  $L^\infty(\Omega)$ . Pour répondre à la question de l'existence de la solution de ce type de problèmes, il faut étendre le problème de conception à un ensemble plus vaste de variables de conception, ensemble compatible avec les principes variationnels régissant la mécanique des structures.

La famille des problèmes de conception qui nous intéresse dans cette thèse est la conception de structures élastiques continues, sans a priori sur la topologie optimale. Les distributions optimales des propriétés matérielles appartiennent à la classe des problèmes avec paramètres distribués. La densité et les propriétés mécaniques locales sont des paramètres distribués appartenant à l'espace des fonctions bornées sur le domaine de conception. L'existence et l'unicité de la solution ne sont pas garanties. Il en résulte que la calculabilité de la solution numérique est également difficile.

Historiquement, le premier problème de paramètres distribués, abordé dans la littérature, est le problème de conception des plaques de souplesse minimale. Le comportement singulier de la solution a été rapporté pour la première fois par Cheng et Olhoff (1981, 1982).

Pour assurer d'une part, l'existence et l'unicité de la solution et d'autre part, la calculabilité de la solution, le problème doit être relaxé, c'est-à-dire étendu à un ensemble plus grand de conceptions possibles. Le processus de relaxation est réalisé par l'introduction d'une microstructure. La théorie de l'homogénéisation permet alors de connaître les propriétés macroscopiques de chaque microstructure poreuse.

#### *Le problème des plaques de raideur maximale*

Le problème des plaques élastiques linéaires de souplesse minimale est la première application pour laquelle on a constaté qu'un nombre fini de variables de conception ne conduisait pas à la solution optimale. Pour une approche de dimensionnement classique, où l'on suppose que l'épaisseur est décrite par un nombre fini et fixé de fonctions de base  $C^\infty(\Omega)$ , Bannichuk (1975) a montré qu'on pouvait prouver facilement l'existence de l'optimum pour ces fonctions de base. Le problème est plus compliqué lorsque le nombre de variables de conception augmente avec le maillage comme dans l'expérience de Cheng et Olhoff (1981). Si on augmente le nombre de variables de conception avec la discrétisation de la structure, le choix différent des fonctions de base pour décrire l'évolution de l'épaisseur aboutit à un optimum différent. La véritable solution optimale contient une multitude de



raidisseurs discrets de tailles variées. La figure 1.9 est extraite de l'expérience de Cheng et Olhoff (1981) dans le cas d'une plaque annulaire doublement encastrée dont on maximise la raideur. La figure représente la solution pour: (a) 150 éléments, (b) 200 éléments, (c) 250 éléments, (d) 300 éléments. On y voit apparaître des raidisseurs de plus en plus fins au fur et à mesure que la discrétisation devient de plus en plus grande. Ce fait est révélateur de la dépendance de la solution numérique optimale vis-à-vis du choix du maillage.

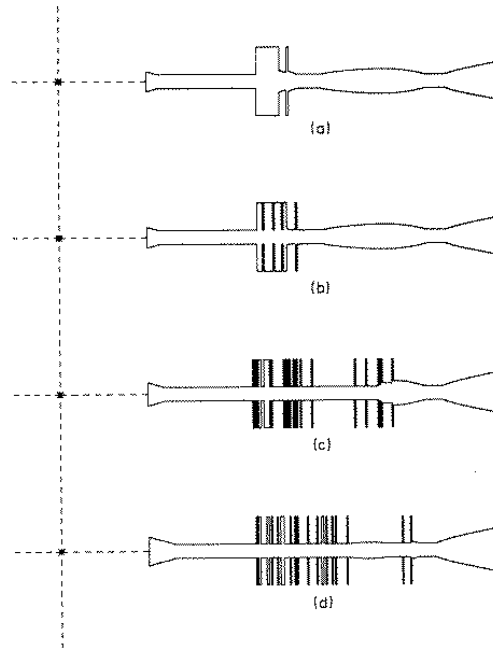


Figure 1.9 : Expérience de Cheng et Olhoff, 1981, illustrant la dépendance de la solution vis-à-vis du maillage

En réalité, pour décrire complètement une telle solution caractérisée par la présence de raidisseurs discrets, un nombre infini de fonctions de base serait nécessaire. Il est donc illusoire de tenter d'approcher de manière précise la solution du problème en utilisant un nombre fini fixé de paramètres et de fonctions de base.

Si l'on examine le principe des travaux virtuels qui gouvernent la solution, on voit deux choses :

Premièrement, les coefficients du tenseur dans l'opérateur différentiel doivent appartenir à  $L^\infty(\Omega)$  c'est-à-dire qu'ils doivent être bornés. On peut en conclure que la convergence de la représentation paramétrique de l'épaisseur  $h^n = \{h_1, \dots, h_n\}$  compatible avec le principe variationnel, est attendue dans  $L^\infty(\Omega)$  lorsque la discrétisation  $n$  tend vers l'infini. Cela signifie par exemple qu'on ne peut pas espérer que la limite de la distribution d'épaisseur présente une certaine régularité ou une certaine "douceur".

Deuxièmement, on peut se rendre compte que supposer la plaque isotrope peut être inadéquat, car les limites des représentations paramétriques contiennent également les plaques orthotropes.

Une preuve très simple de cette affirmation s'obtient en voyant que l'épaisseur paramétrée (1.1) tend à la limite vers une plaque orthotrope si  $n$  tend vers l'infini.

$$h^n(x,y) = \begin{cases} h_a & \text{si } \frac{2i-2}{2(2n)^2} < x < \frac{2i-1}{2(2n)^2} \text{ et } \frac{2j-2}{2(2n)^2} < y < \frac{2j-1}{2(2n)^2} \\ h_a & \text{si } \frac{2i-1}{2(2n)^2} < x < \frac{2i}{2(2n)^2} \text{ et } \frac{2j-1}{2(2n)^2} < y < \frac{2j}{2(2n)^2} \\ h_b & \text{si } \frac{2i-2}{2(2n)^2} \leq x \leq \frac{2i-1}{2(2n)^2} \text{ et } \frac{2j-1}{2(2n)^2} \leq y \leq \frac{2j}{2(2n)^2} \\ h_b & \text{si } \frac{2i-1}{2(2n)^2} \leq x \leq \frac{2i}{2(2n)^2} \text{ et } \frac{2j-2}{2(2n)^2} \leq y \leq \frac{2j-1}{2(2n)^2} \end{cases} \quad i,j = 1, \dots, (2n^2) \quad (1.1)$$

La formulation mathématiquement correcte du problème des plaques de raideur maximale a été apportée par Lurie, Fedorov et Cherkav (1984). En réalité, la convergence des variables de conception doit être comprise dans un sens généralisé. Le problème de conception relaxé consiste à envisager les équations d'équilibre sous forme variationnelle et à considérer a priori qu'un espace de conception a été étendu pour inclure aussi toutes les plaques orthotropes possédant une microstructure. La résolution du problème, quant à elle, passe par la connaissance du "*G-Closure*" des microstructures du problème considéré, c'est-à-dire l'ensemble des microstructures de raideur extrême pour le problème.

On peut en conclure que, même dans le cas d'un problème de dimensionnement, si la variable de conception est une variable distribuée et si elle est attendue dans  $L^\infty(\Omega)$ , l'équation d'état (ici le principe des travaux virtuels) doit être étendue à une forme relaxée où l'on introduit a priori les structures possédant une microstructure.

#### *Le problème de topologie optimale et de distribution optimale de matière*

Lorsqu'on optimise la forme d'une structure, l'optimisation s'effectue sur un domaine variable et les difficultés des problèmes de dimensionnement sont amplifiées. Pour trouver des structures de forme optimale sans aucun a priori sur la topologie, il est établi depuis assez longtemps qu'il faut sortir du cadre de l'optimisation de forme paramétrique et d'une représentation avec un nombre fini de fonctions de base préchoisies.

Pour généraliser l'optimisation de forme, il faut trouver une nouvelle formulation au problème. La solution du problème d'optimisation de forme et de topologie doit être repensée sous forme d'une distribution optimale de matériau avec l'introduction d'une microstructure.

L'absence d'une preuve de l'existence et de l'unicité se manifeste concrètement par l'impossibilité de dégager une solution numérique qui soit stable lorsque l'on modifie la discrétisation du domaine de conception. *La solution numérique dépend du maillage.* Le calcul numérique de la solution discrétisée est alors ardu. Le phénomène est flagrant sur l'exemple suivant. On recherche la distribution de matière optimale pour soutenir une charge placée au milieu de la portée d'un domaine de conception. Les deux appuis sont placés de part et d'autre du chargement ainsi que le montre la figure 1.10.

On recherche la solution qui minimise l'énergie potentielle de la charge avec un volume de matière donné. En chaque point du domaine de conception, on veut que les propriétés du milieu soient celles du solide ou celles du vide. La résolution de ce problème discret n'est pas chose facile et elle est approchée par un problème continu dans lequel on pénalise les densités intermédiaires à la manière de l'épaisseur dans le problème de plaque. Les propriétés mécaniques relatives varient en fonction du cube de la densité relative. Comme les densités intermédiaires donnent lieu à une faible raideur pour un coût déraisonnable, les densités du vide et du solide sont généralisées dans la solution optimale.

La première solution est calculée avec un maillage de 32x20 éléments, tandis que la seconde est obtenue avec 72x45 éléments.

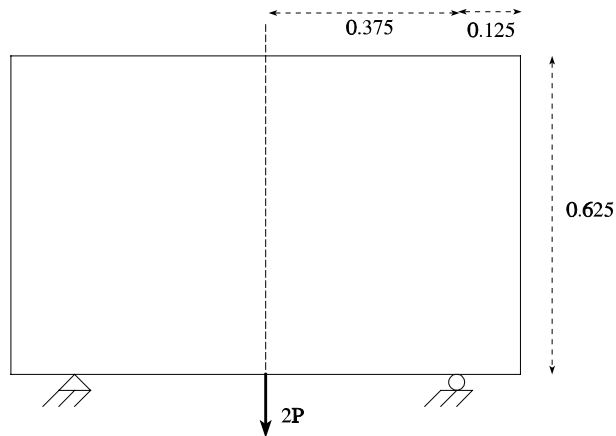


Figure 1.10 : Problème de la "roue"

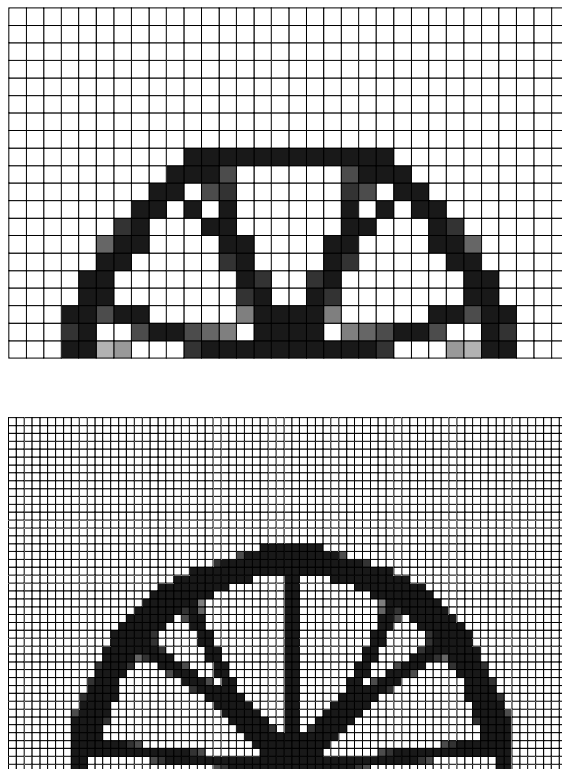


Figure 1.11 : Non-convergence de la solution numérique vis-à-vis du choix du maillage

Dans la première distribution de matière, on distingue une structure en demi-cercle qui s'appuie sur les fondations. Quatre rayons la relient à la charge. La seconde distribution n'est pas la première carte de densité dont la résolution aurait été améliorée par le raffinement du maillage. On voit toujours la

structure en demi-cercle, mais on compte sept rayons. Les topologies des deux solutions sont donc différentes. Si on raffinaît progressivement le maillage, on verrait apparaître un nombre de plus en plus grand de rayons et on atteindrait la solution de Michell (1904) composée d'un nombre infini de rayons.

Le deuxième fait intéressant est l'apparition spontanée de zones où le vide et le solide se mêlent à la manière d'un matériau composite. La solution tend à recréer au niveau du maillage macroscopique une sorte de microstructure. Cette constatation a été faite très tôt par Goodman, Kohn et Reyna (1986) lors de l'étude de la répartition optimale de deux matériaux dans un barreau prismatique de raideur maximale en torsion. On y recherche la distribution des deux matériaux de modules de cisaillement différents sur la section droite sans a priori sur la topologie de la solution. Le problème se caractérise par une fonctionnelle objectif dont on ne peut exhiber aucune propriété de continuité sur un espace linéaire, de sorte que l'on ne peut montrer l'existence de sa solution. Comme cela était visible dans l'exemple précédent, l'étude montre d'abord l'absence de solution numérique stable et l'échec de la formulation naïve purement discrète qui consisterait à disposer dans chacun des éléments du domaine les propriétés matérielles d'un des deux matériaux. Ensuite, Goodman, Kohn et Reyna constatent l'apparition spontanée de matériaux composites obtenus par un mélange des deux constituants au niveau microscopique. La présence de ces zones met en déroute la procédure numérique de résolution. Ces difficultés sont surmontées en considérant un problème relaxé c'est-à-dire convexifié dans lequel on admet a priori l'existence de zones homogénéisées (zones grises sur la figure 1.12). La relaxation est non seulement nécessaire pour assurer l'existence de la solution mais aussi indispensable pour la calculer.

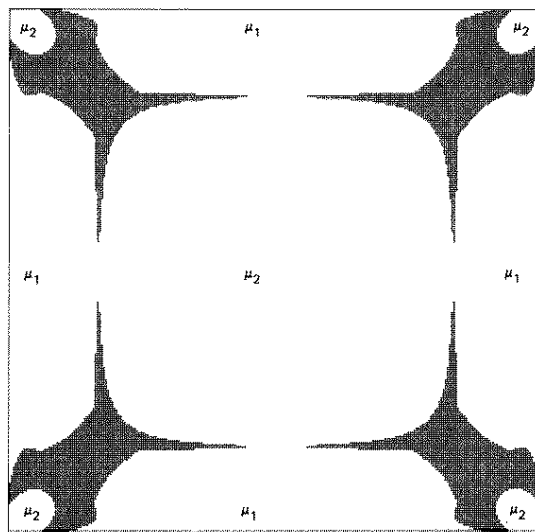


Figure 1.12 : Solution du problème de topologie optimale d'un barreau en torsion (Goodman *et al.*, 1986)

L'établissement de la théorie mathématique générale des problèmes de domaine variable a suscité plusieurs travaux, dont les plus importants et les plus connus sont, d'une part, ceux de Kohn et Strang (1986a et 1986b), et d'autre part, ceux de Murat et Tartar (1985a et 1985b).

Pour Kohn et Strang (1986a et 1986b), on doit relaxer les problèmes de distribution de matière. La convexification du problème est nécessaire pour établir l'existence d'une solution optimale. Quoique surprenante de prime abord, cette constatation peut être comprise physiquement: il est parfois plus

avantageux de perforer certaines parties du domaine par un grand nombre de petits trous de géométrie appropriée. Si les caractéristiques optimales ne peuvent être réalisées que dans le cas limite où l'échelle de ces perforations tend vers zéro, alors le problème de conception ne possède plus de solution géométrique dans le sens classique. La solution n'existe plus que dans une classe généralisée de conceptions, laquelle autorise l'emploi de matériaux composites obtenus par des perforations appropriées en certains points du domaine. En exprimant cette idée d'une autre façon, on se rend compte que si on est prêt à introduire un nombre infini de trous, ce qui peut arriver en raffinant de plus en plus le maillage, alors il faut être capable de considérer aussi la limite des solutions obtenues, ce qui peut être fait en considérant, dès le départ, des microstructures poreuses.

Murat et Tartar (1985a) arrivent indépendamment à des conclusions similaires. Ils sont toutefois les premiers à suggérer le rôle de la théorie de l'homogénéisation pour évaluer les propriétés de la microstructure poreuse. Pour résoudre le problème de forme et de topologie par une distribution de matière, Murat et Tartar (1985a) précisent que la solution "*consiste à s'apercevoir qu'on peut en tirer un problème sur un convexe et à calculer les dérivées sur cet ensemble. On désigne sous le nom général de relaxation le procédé qui consiste à fabriquer les solutions généralisées (...). Nous avons été amenés à introduire la "bonne" classe de solutions généralisées: les domaines homogénéisés, qui sont analogues à des matériaux composites; cela permet de surmonter les difficultés liées aux problèmes de non-existence et dans cette classe (qui a une structure sous-jacente d'espace vectoriel: celui des matrices  $N \times N$  à coefficients  $L^\infty$ ), on peut écrire facilement les conditions d'optimalité*". D'après leur travail, on peut encore dire qu'on est en présence d'un phénomène que l'on a baptisé "*homogénéisation*" chaque fois qu'on résout un problème pour lequel la variable de conception est le domaine et pour lequel l'équation d'état est une équation différentielle. En effet, le domaine généralisé qui apparaît dans la solution est l'analogue du mélange de deux matériaux différents. Les propriétés équivalentes de ce domaine généralisé ne sont pas obtenues par une simple moyenne, mais, pour être évaluées de manière rigoureuse, elles doivent être étudiées par la *théorie de l'homogénéisation* qui fut développée dans ce but.

### **1.3.3 La méthode d'homogénéisation**

La méthode d'homogénéisation utilise les idées qui se dégagent de la discussion précédente. La première idée pour déterminer la topologie d'une structure est de rechercher la fonction indicatrice du sous-domaine occupé par la matière. Malheureusement, le problème d'optimisation de topologie ou de forme généralisée n'est pas un problème facile car il accumule les complexités des problèmes de dimensionnement et de forme. De plus, le problème d'optimisation est mal posé car l'unicité et l'existence de sa solution ne peuvent être montrées. Pour surmonter cette difficulté, la seconde idée est de relaxer le problème afin de le placer dans un cadre adéquat, d'assurer l'existence de sa solution et finalement de pouvoir le résoudre par un procédé numérique. Une réponse satisfaisante consiste à inclure depuis le début la présence d'un matériau formé d'une infinité de petits trous, c'est-à-dire une microstructure poreuse, dont le calcul des propriétés effectives est du ressort de la théorie de l'homogénéisation. L'implantation de l'optimisation de topologie des structures sur l'idée de l'homogénéisation fait l'objet de la *méthode d'homogénéisation*. La première application de la méthode d'homogénéisation à l'optimisation topologique des milieux élastiques est le fruit du travail de Bendsøe et Kikuchi (1988). Depuis lors, la méthode d'homogénéisation a été plus amplement développée comme nous allons le rappeler au paragraphe suivant.

## 1.4 La méthode d'homogénéisation en optimisation topologique

L'optimisation topologique des milieux continus élastiques débute avec les travaux de Bendsøe et Kikuchi (1988). La méthode qu'ils proposent pour résoudre le problème, et qui est maintenant connue sous le nom de *méthode d'homogénéisation*, se fonde sur les idées de distribution optimale de matière et de relaxation. Pour cela, Bendsøe et Kikuchi (1988) introduisent une microstructure poreuse dont ils déterminent les propriétés macroscopiques en fonction de la densité grâce à la théorie de l'homogénéisation des microstructures périodiques.

Dans ce premier article, Bendsøe et Kikuchi (1988) introduisent une microstructure périodique dont la porosité variable provient d'une *perforation rectangulaire* au sein de la cellule de base. La *théorie de l'homogénéisation*, valable pour tout matériau composite de microstructure périodique, est utilisée pour déterminer les propriétés macroscopiques équivalentes. Le domaine de conception où l'on désire faire naître le composant structural est couvert par un maillage régulier. Si la microstructure est constante par élément fini, les variables de conception du problème numérique sont les paramètres de longueur et de largeur de la perforation de la cellule de base au sein de chaque élément fini. Comme le matériau macroscopique est orthotrope, on ne tarde pas à découvrir que l'orientation de la microstructure locale joue un rôle fondamental et que l'angle d'orthotropie est également une variable de conception du problème d'optimisation. Le problème numérique d'optimisation est un problème de très grande taille puisqu'on introduit trois variables de conception par élément fini. Pour aborder un aussi grand problème, on adopte une formulation très simple. En analyse statique linéaire, on minimise l'énergie potentielle des charges appliquées (encore appelée *compliance*) qui est un critère de souplesse moyenne, tandis que la ressource en volume de matière disponible est limitée. Seules des structures planes sont étudiées. Compte tenu de la forme simple du problème qui ne comprend qu'une seule contrainte, l'optimisation des variables de conception est réalisée avec une technique de critère d'optimalité. Pour l'angle d'orthotropie, le critère d'optimalité basé sur une procédure de type bisection-Newton se montre bien vite peu efficace, de sorte que les résultats numériques de cette première étude ne présentent pas une silhouette claire de la structure optimale.

Pour obtenir des résultats de meilleure qualité, le schéma de remise à jour des angles d'orthotropie doit être révisé. Comme cela fut suggéré par Bendsøe (1989) et plus amplement réalisé par Suzuki et Kikuchi (1991), l'angle d'orthotropie doit être aligné sur les directions principales de contraintes. La justification de ce critère d'optimalité ne fut apportée que plus tard par l'étude théorique des composites de raideur optimale menée parallèlement par Pedersen (1989a et 1989b) et par Gibiansky et Cherkov (1988).

Rapidement, de nouvelles contributions ont été apportées aux premiers travaux de Bendsøe et Kikuchi (1988). On peut citer notamment Bendsøe (1989), Suzuki et Kikuchi (1991, 1992, 1993) et Thomsen (1991). Deux synthèses ont été proposées par Bendsøe, Díaz et Kikuchi (1993) et Bendsøe, Kikuchi (1993). Depuis sa création, la méthode d'homogénéisation a suscité un très vif intérêt dans la communauté scientifique et de nouvelles contributions n'ont cessé d'étendre son application à de nombreux aspects de la conception structurale.

Le choix de la microstructure poreuse a fait l'objet de nombreux débats. Dans sa version primitive (Bendsøe et Kikuchi, 1988), la méthode de l'homogénéisation s'est tournée vers les microperforations rectangulaires. Mais, très tôt, on a proposé de nouvelles microstructures et d'autres lois donnant la raideur en fonction de la densité relative. Bendsøe (1989) a introduit la famille des matériaux feuilletés de rang 2 dont Avellaneda (1987) et Kohn (1988) ont démontré l'optimalité pour la distribution de compliance minimale en deux dimensions. Cette microstructure à deux niveaux donne lieu à une relaxation complète du problème d'optimisation en mécanique des structures (Kohn 1990, Allaire et

Kohn, 1993a, 1993b). Malheureusement, la microstructure optimale de rang 2 ou de rang N conduit à des résultats qui sont souvent inutilisables pour la pratique de l'ingénieur. La solution est largement remplie de zones de matériaux composites de densité comprise entre le vide et le solide. Ces microstructures ne sont ni manufacturables, ni faciles à interpréter pour dégager un modèle CAO qui servirait à un autre type d'optimisation. La solution optimale théorique est donc souvent limitée à servir de comparaison. Pour améliorer la séparation entre les régions occupées par le vide et le solide et pour donner lieu à des solutions qui soient plus directement utilisables dans la pratique, on préfère recourir à des microstructures suboptimales.

Simultanément à l'introduction des matériaux feuilletés de rang 2, Bendsøe (1989) a suggéré d'employer une loi dans laquelle les densités intermédiaires sont pénalisées par une loi de type puissance, de sorte qu'on la nomme souvent SIMP, pour *Simply Isotropic Material with Penalization*. Dans son idée première, cette loi différentiable devait servir à simuler la résolution discrète du problème de topologie. Cependant, en dépit du fait que cette loi n'ait aucune base physique et qu'elle ne relaxe pas suffisamment le problème pour assurer l'existence de la solution, Mlejnek (1991, 1993) et ses collaborateurs, Rozvany (1991, 1992, 1993b), Zhou (1991) et leurs collaborateurs ont montré que les matériaux SIMP s'imposaient par leur simplicité pour résoudre de nombreuses applications pratiques. Enfin le principe de la pénalisation des densités intermédiaires n'est plus limité aux matériaux isotropes depuis que Maute et Ramm (1994) ont proposé un matériau orthotrope dont les propriétés varient en fonction de la puissance de deux paramètres internes.

C'est en suivant une motivation identique à celle qui les avaient poussés à employer les matériaux SIMP que Mlejnek et ses collaborateurs (1993a, 1993b) ont proposé d'utiliser des propriétés effectives de raideur qu'on détermine par une méthode énergétique approchée. Les propriétés mécaniques équivalentes sont alors liées à la densité relative par une relation fonctionnelle dont la non-linéarité est plus forte que celle des matériaux feuilletés de rang 2 de sorte que l'on aboutit à des distributions ayant une plus grande séparation vide-solide, ce qui présente un plus grand intérêt pratique.

La valeur des propriétés optimales des matériaux composites isotropes poreux ainsi que la microstructure optimale qui réalise ces propriétés, restaient des points inconnus. Pour apporter une réponse à ce problème, le modèle des sphères composites ou microstructure de Hashin est présenté simultanément et indépendamment par Gea (1994) et par l'auteur de cette thèse. Non contents du modèle des sphères composites, nous avons également exploré l'utilisation d'autres lois d'homogénéisation issues des travaux de Hashin. Le modèle des cylindres composites de Hashin, que l'on généralise avec la loi de Tsai-Halpin, permet d'établir une nouvelle famille de relations entre la raideur et la densité. Dans cette étude, nous avons aussi imaginé une combinaison des deux microstructures de Hashin en une microstructure orthotrope à deux niveaux. On réunit une matrice poreuse formée sur le modèle des sphères composites et un assemblage des fibres composites faites du matériau de référence.

Signalons aussi qu'il existe des formulations alternatives à la méthode d'homogénéisation pour résoudre le problème de topologie. Deux voies sont intéressantes à rappeler. La *méthode "bubble"* est une méthode heuristique, qui fut introduite par Eschenauer, Kobelev, Schumacher (1994) et Eschenauer, Schumacher et Vietor (1993). La méthode modifie la topologie de la structure en introduisant une succession de nouveaux "*genius topologiques*". Après chaque optimisation de forme paramétrique, la méthode se fonde sur un critère pour introduire et pour positionner de nouveaux trous. Ensuite, on doit mentionner le très important travail effectué par Ambrosio et Buttazzo (1993) pour étudier le problème de topologie avec un périmètre borné. Haber, Jog et Bendsøe (1994) ont alors donné la preuve que l'association de la méthode du périmètre borné et de la méthode d'homogénéisation avec une microstructure suboptimale ou une pénalisation des densités intermédiaires, pouvait fournir un outil de conception puissant. Notre thèse reprend ces travaux et

approfondit la manière dont on peut rechercher efficacement les distributions de matière de périmètre borné.

Parallèlement au développement de nouvelles microstructures et à l'émergence d'approches alternatives, le champ d'application de l'optimisation topologique, fondé sur la méthode d'homogénéisation, n'a pas cessé de s'étendre. Initialement limitée aux membranes et à une seule sollicitation statique dans le travail de Bendsøe et Kikuchi (1988), la méthode d'homogénéisation a été généralisée à d'autres types de structure ainsi qu'à d'autres types d'analyse et à d'autres conditions de conception.

L'extension de la méthode d'homogénéisation aux structures volumiques a été réalisée par Kikuchi et Suzuki (1990), et Suzuki et Kikuchi (1992). Au premier abord, le retour au problème de la conception de plaque de raideur optimale peut être surprenant, puisque ce problème a initialement nourri les premiers développements de l'optimisation topologique. Le paradoxe n'est qu'apparent si on considère les plaques comme un cas particulier de la théorie générale valable dans le cadre de la mécanique des structures. Dans cette optique, Suzuki et Kikuchi (1992), Soto et Díaz (1993a et 1993b), et Díaz, Lipton et Soto (1994) ont adapté les nouveaux développements de la méthode de l'homogénéisation aux problèmes de plaques de Mindlin ou de Kirchhoff.

L'extension de l'optimisation topologique à des structures constituées de la distribution de deux matériaux ou plus, a été réalisée par Thomsen (1992) et Olhoff, Krog et Thomsen (1993). La conception de structures soumises à plusieurs cas de charge est également possible et cela de plusieurs manières. Díaz et Bendsøe (1992) considèrent une somme pondérée des compliances. Pour résoudre le problème angulaire correspondant, Díaz et Bendsøe (1992) ont été obligés de généraliser la solution analytique de Pedersen (1989). Fukushima, Suzuki et Kikuchi (1991), Mlejnek (1993) et l'auteur de cette thèse proposent de minimiser le maximum des compliances. Fukushima, Suzuki et Kikuchi (1991) résolvent le problème "mini-max" sous une forme approchée localement, tandis que Mlejnek (1993) utilise une fonction Kreisselmeier-Steinhauser. Dans cette thèse, le problème "mini-max" est mis sous une forme différentiable en ajoutant une variable (Taylor, 1980), ce qui permet sa résolution de manière exacte grâce à une procédure de programmation séquentielle convexe.

Le problème de conception topologique méritait aussi d'être étendu à d'autres modes d'analyse que l'analyse statique. Les vibrations libres des structures ont été étudiées par Díaz et Kikuchi (1992), Kikuchi, Cheng et Ma (1994), et Kawade et Yosida (1994), tandis que Ma, Kikuchi et Hagiwara (1992) ont optimisé la répartition de matière en fonction de la réponse à une excitation périodique. Le renforcement optimal de structure pour en améliorer la stabilité de l'équilibre a été traité par Neves, Guedes et Rodrigues (1993). Quant au comportement thermoélastique, il a été considéré par Rodrigues et Fernandes (1993a, 1993b, 1995)

Dans un nombre grandissant de nouvelles publications sur l'optimisation de structures, on considère le problème de conception dans son sens le plus large en incluant simultanément la distribution du matériau et l'optimisation des propriétés matérielles. Dans ce cas, le problème de conception structurale rassemble l'optimisation de la forme, de la topologie, mais aussi de la distribution des propriétés des matériaux. Ce but est atteint en prenant comme variables de conception les propriétés du tenseur d'élasticité dont la seule contrainte est d'appartenir à l'ensemble des tenseurs semi définis positifs. Les problèmes statiques à un ou plusieurs cas de charge a été traité par Bendsøe, Haber, Guedes, Pedersen et Taylor (1993), Bendsøe, Díaz, Lipton et Taylor (1994), Bendsøe, Guedes, Plaxton et Taylor (1993), Bendsøe et Díaz (1993, 1994), Ringertz (1993), tandis que le problème de vibration a été abordé par Bendsøe (1985). Parallèlement, la synthèse de matériaux de propriétés extrêmes ou de propriétés thermoélastiques quelconques s'étalant dans tout l'ensemble prévu par la thermodynamique est un sujet d'importance croissante. La solution mathématique de ce problème a été traitée par Milton et Cherkaev



(1993) avec des composites formés d'un matériau infiniment rigide et d'un autre très souple. De manière plus pratique, Sigmund (1994a, 1994b, 1994c) a étudié le problème en résolvant numériquement le problème inverse de l'homogénéisation avec une méthode de topologie.

Les critères de conception retenus par l'optimisation topologique sont généralement des fonctions structurales globales : la compliance, les fréquences propres... Dans ce contexte, il est naturel de compléter le processus de conception par d'autres techniques d'optimisation. L'intégration de l'optimisation topologique à l'aide de la méthode d'homogénéisation et de la conception de forme classique a été étudiée par Papalambros et Chirehdast (1990, 1993), Bendsøe et Rodrigues (1991), Bremicker *et al.* (1992), Olhoff, Bendsøe et Rasmussen (1992), Olhoff, Thomsen et Rasmussen (1993), Rasmussen, Thomsen et Olhoff (1993), Maute et Ramm (1994).

La résolution numérique du problème d'optimisation proprement dit n'est pas une chose facile, à cause du très grand nombre de variables de conception. Aussi longtemps que le problème du minimum de la compliance n'introduit qu'une seule contrainte sur le volume, les critères d'optimalité sont très avantageux car ils sont très faciles à mettre en oeuvre. Dans les premiers travaux d'optimisation topologique, Bendsøe et Kikuchi (1988), Bendsøe (1989), Suzuki et Kikuchi (1991) utilisent un critère d'optimalité pour la modification des variables de microstructure et pour la remise à jour des angles d'orthotropie. Mais la méthode révèle vite ses limitations et ses faiblesses. Un grand nombre de cycles d'optimisation est souvent nécessaire avant d'arriver aux conditions de stationnarité. Ma *et al.* (1993) remarquent que la convergence des itérés peut même devenir difficile dans les problèmes vibratoires. La prise en compte de plusieurs contraintes ou de plusieurs fonctions objectifs n'est pas facile, de sorte que le problème comprenant plusieurs cas de charge ne peut être résolu qu'en formant une fonction objectif unique (Díaz et Bendsøe, 1992). De même, dans la méthode du périmètre (Haber *et al.*, 1994), la contrainte supplémentaire est prise en compte par une technique de pénalité. Tout impose alors l'emploi d'une méthode plus générale, fondée sur des approximations convexes, ainsi que la résolution du problème d'optimisation approché par une technique de programmation mathématique. Mlejnek *et al.* (1992, 1993a) proposent d'une part, une approximation de la famille des asymptotes mobiles et d'autre part, l'utilisation d'approximations du second ordre. Mais, compte tenu du très grand nombre de variables primales et du nombre réduit de contraintes, la solution la plus économique semble être l'adoption des approximations convexes séparables et la résolution du problème par une méthode duale, comme cette thèse le démontrera. La sélection d'approximations de haute qualité est un atout pour atteindre rapidement une solution stationnaire. Duysinx *et al.* (1995) ont mis en évidence que cet effet peut être obtenu avec des méthodes de BFGS pour matrices diagonales et avec des approximations des asymptotes mobiles du second ordre.

L'outil d'optimisation topologique est maintenant arrivé à une maturité suffisante pour que l'on puisse voir les premières applications industrielles. Le problème de la poutre dite "MBB" qui a été traité par Olhoff, Bendsøe et Rasmussen (1992) est certainement une des premières applications de taille réaliste. A l'heure actuelle, ce sont principalement le domaine aéronautique et plus encore le secteur de l'automobile qui semblent être les principaux champs d'application de l'optimisation topologique. Plusieurs applications concrètes sont rapportées par Olhoff, Bendsøe et Rasmussen (1992), Fukushima, Suzuki et Kikuchi (1993), Chirehdast *et al.* (1994), Kikuchi, Cheng et Ma (1995), Hörlein (1995).

Pour conclure cette brève revue de la littérature consacrée aux techniques d'optimisation topologique, nous pouvons encore préciser que l'élasticité n'est pas le seul champ d'application des distributions optimales de matériau, de la méthode d'homogénéisation et de la recherche de bornes optimales des propriétés des composites. L'optimisation topologique de conducteurs électriques a été réalisée dans les travaux de Goodman, Kohn et Reyna (1986), Strang et Kohn (1988)... Un problème de conception similaire à celui qui nous préoccupe aujourd'hui a été rapporté par Kohn et Vogelius (1987) lors du calcul de l'impédance dans le problème de tomographie. Enfin, Achdou (1993) a également résolu la

conception optimale d'une cellule photoélectrique en utilisant une approche similaire au modèle d'épaisseur variable.

## 1.5 A propos de cette thèse

### 1.5.1 Les buts de la thèse et ses hypothèses

Un des objectifs principaux de notre travail a été de maîtriser les concepts de l'optimisation topologique et de les appliquer à la réalisation d'un code de calcul puissant capable de gérer et de résoudre des problèmes d'optimisation topologique de taille industrielle.

Pour atteindre cet objectif concret, nous nous sommes aperçus qu'il fallait comprendre et assimiler de nombreux concepts théoriques et mathématiques qui forment les fondements de la méthode d'homogénéisation. Si on ne domine pas ces notions ou si on n'est pas capable de les comprendre, il n'est pas possible de faire un travail rigoureux en optimisation topologique. Comme nous avons pu nous en rendre compte, la maîtrise de l'outil de distribution de matière passe par l'*apprentissage d'outils mathématiques comme l'analyse fonctionnelle, l'analyse convexe et la programmation mathématique*. Cependant après s'être familiarisé avec ce formalisme qui a priori peut sembler lourd, le travail se trouve simplifié et on peut accéder à une recherche de pointe. Etant donné la complexité de l'optimisation topologique, aucun point ne peut être abordé de manière simple ou réductrice. Le traitement de chaque problème exige d'être étudié de manière rigoureuse en employant, le plus souvent, des outils mathématiques puissants sans lesquels il est impossible de construire une méthode de calcul efficace et robuste.

De manière plus ponctuelle, nous avons tenté de répondre : soit à des questions qui surgissaient lors de la mise au point d'un outil d'optimisation topologique, soit à des problèmes que notre curiosité nous poussait à explorer et à approfondir. Le premier point qui a attiré notre attention concerne *les microstructures* que l'on peut utiliser pour relaxer le problème et le transformer en une distribution de densité continue. Peut-on obtenir une même topologie quelle que soit la microstructure? Quelle influence joue la pénalisation des densités intermédiaires sur la distribution de matière? Est-il encore possible de trouver de nouvelles microstructures poreuses qui permettent de résoudre le problème de topologie? Existe-t-il une microstructure isotrope de raideur optimale? Si oui, quelle est-elle? Enfin, quelles sont les lois donnant la raideur en fonction de la densité qui, en pratique, sont les plus utiles pour étudier la topologie de structures et dans quelles situations?

Le deuxième point auquel nous nous sommes naturellement intéressés concerne *la résolution numérique du problème d'optimisation proprement dit*. Pour cela, nous voulions remplacer les techniques de critère d'optimalité, qui avaient été employées jusque-là pour résoudre le problème d'optimisation, par une procédure plus générale comprenant la formulation d'approximation convexe et la résolution par méthode duale. Les difficultés que nous avons rencontrées sont liées à plusieurs caractéristiques de la méthode d'homogénéisation. Le nombre de variables de conception mis en jeu, qui est généralement compris entre 1.000 et 10.000, est très élevé par rapport aux nombres de variables que l'on avait abordés jusque-là dans des problèmes d'optimisation. Le nombre d'itérations nécessaires à l'obtention d'une solution stationnaire est souvent élevé, puisqu'il faut souvent plus de 50 à 100 itérations pour atteindre la solution. Pour accélérer la vitesse de convergence, nous avons voulu mettre au point des approximations structurales de très haute qualité. Cet objectif passe par la sélection automatique des paramètres de courbure sur la base d'information du premier ordre. Pour la famille des approximations MMA, la question était restée en suspens depuis la fin des années 1980.

Le troisième point concerne la préparation d'un outil d'optimisation topologique capable de gérer avec efficacité tous les types de maillage et d'élément fini. Très tôt, nous avons pensé qu'il serait profitable de pouvoir gérer des maillages libres incluant des éléments de quadrangle ou de triangle. Ces maillages sont d'abord très utiles pour discrétiser des domaines intervenant dans des applications industrielles. Ensuite, on peut penser que bientôt nous serons à même de pouvoir introduire des techniques de maillage adaptatif pour connaître la distribution de matière avec un effort minimum de calcul. Malheureusement, les maillages libres et les éléments basés sur des champs de déplacement de faible degré introduisent deux difficultés numériques. La première difficulté est l'apparition de modes de distributions parasites comme les modes en damier. Le second obstacle est la dépendance de la solution avec le maillage. Ces deux problèmes nuisent à la résolution de la distribution de matière. Pour y pallier, nous avons exploré plusieurs solutions. La méthode du contrôle du périmètre a cependant retenu toute notre attention.

Pour aborder le problème de conception topologique, nous sommes partis de la formulation fondée sur la méthode d'homogénéisation de Bendsøe et Kikuchi (1988). Cependant, nous ne nous sommes pas cantonnés à la méthode d'homogénéisation au sens le plus orthodoxe. Nos recherches nous ont conduits à envisager plusieurs modifications. Nous sommes prêts à introduire des microstructures suboptimales et même des lois de nature artificielle qui simulent les relations fonctionnelles entre la raideur et la densité provenant du processus d'homogénéisation. Dès lors, le vocable de méthode d'homogénéisation sera compris au sens le plus large. Enfin, nous compléterons la méthode d'homogénéisation par la méthode de contrôle du périmètre. Nous avons pu constater que la méthode d'optimisation topologique qui résulte du métissage des méthodes d'homogénéisation et du contrôle du périmètre constitue un outil de conception topologique fort puissant.

La formulation du problème d'optimisation topologique reste celle qui a été proposée initialement par Bendsøe et Kikuchi (1998) et Kikuchi et Suzuki (1990). Le problème de topologie, tel que nous l'avons envisagé, est fondé sur des critères globaux. La recherche de la structure plane de compliance minimale et de volume donné, qui constitue l'énoncé fondamental du problème d'optimisation topologique, sert de support pour nos développements. Cependant, les résultats sont directement généralisables aux problèmes plans ou tridimensionnels en analyse dynamique ou en analyse statique, avec un ou plusieurs cas de charge. Nous montrerons comment on aborde ce type de problèmes au moyen d'exemples.

Nous sommes également amenés à poser certaines hypothèses de travail qui définissent le cadre de la thèse.

- On étudie les structures continues de sorte que le comportement du milieu est modélisé par des membranes ou des milieux volumiques.
- Le milieu matériel se comporte de manière élastique linéaire, qu'il s'agisse du matériau de base ou des matériaux composites poreux qui peuvent être construits avec ce solide de référence. Comme on reste dans le cadre de la théorie des petits déplacements, le comportement du milieu est élastique linéaire. Ce fait ne signifie évidemment pas que le problème d'optimisation soit linéaire, bien au contraire!
- Les conditions limites statiques et cinématiques du problème sont fixées sur le domaine de conception et ne sont pas altérées par la distribution de matière. Il n'est pas possible de considérer des charges qui suivent la frontière du matériau comme les charges de pression.
- Le comportement de la structure est calculé par la méthode des éléments finis. L'approche sélectionnée est celle d'éléments de type déplacement.

Pour terminer, il est encore intéressant de souligner qu'il est plus adéquat de parler d'optimisation topologique que d'optimisation de topologie. La dernière dénomination voudrait signifier que l'on optimise exclusivement le paramètre de topologie de la structure. Avec l'optimisation topologique, on

recherche une distribution de matière dont nous verrons qu'elle contient une information plus riche sur la structure idéale que la seule donnée de topologie. On peut certes y décoder une topologie adaptée à ses besoins, mais on peut aussi y trouver des suggestions sur la nature des éléments structuraux qui constituent la pièce mécanique, sur une forme grossière du contour, sur les dimensions transversales des éléments, sur la nature des matériaux qui devraient y être mis en jeu... L'optimisation de distribution de matière est donc un outil plus complet que celui qui donne la simple donnée du nombre et de l'arrangement relatif des domaines occupés par le solide.

### **1.5.2 Présentation de la thèse**

Un des buts finaux de notre travail de recherche a toujours été d'être concrétisé par un code de calcul capable de résoudre des applications d'optimisation topologique de taille industrielle. Notre thèse s'articule donc comme une série de sujets que nous avons été amenés à aborder pour réaliser ce code de calcul performant. Chaque chapitre concerne un aspect différent de la problématique de la résolution de l'optimisation topologique. Le chapitre 2 précise la formulation du problème alors que le chapitre 3 est destiné à éclaircir les principes de la résolution et l'analyse de sensibilité. Le chapitre 4 fait le point sur la modélisation et l'homogénéisation des composites poreux. La formulation des approximations convexes de haute qualité ainsi que la description des algorithmes d'optimisation constituent le but du chapitre 5. Le chapitre 6 est articulé autour de la méthode du périmètre. Cette méthode permet de remédier simultanément au phénomène de dépendance des solutions vis-à-vis du maillage et à l'apparition des distributions parasites de densité. Quant au chapitre 7, il replace le nouvel outil dans la phase préliminaire de la chaîne de conception et plusieurs applications y sont fournies pour démontrer les qualités de notre outil d'optimisation topologique. Finalement, la thèse se termine avec le chapitre 8 qui nous livre quelques perspectives d'avenir en optimisation topologique.

Le chapitre 2 sera donc consacré à la formulation du problème de topologie et de distribution de matière. La formulation du problème devra être soignée car elle fera appel à des concepts mathématiques qui, pour un ingénieur, mériteront d'être approfondis et compris physiquement. Le problème fondamental du minimum de la compliance d'une distribution de matière de volume fixé sera justifié et comparé à d'autres critères de conception. L'énoncé fondamental sera ensuite remanié pour tenir compte de plusieurs cas de charge. Le problème de conception des structures en vibration sera également considéré. Nous montrerons ainsi que l'on est à même de considérer des processus de conception basés sur des problèmes aux valeurs propres.

Au chapitre 3, il s'agira d'établir les principes avec lesquels on pourra résoudre numériquement le problème d'optimisation topologique avec le minimum d'efforts possible. Le chapitre 3 sera articulé autour des conditions d'optimalité du problème de distribution de matière. L'analyse de sensibilité sera nécessaire pour écrire les conditions satisfaites par l'optimum contraint. L'analyse de sensibilité des grandeurs énergétiques et des valeurs propres méritera un traitement particulier qui permettra des simplifications importantes pour en exploiter au mieux les avantages lors de la résolution numérique. L'établissement des conditions d'optimalité mettra alors en lumière un schéma de résolution itératif où le problème d'optimisation des variables de microstructure sera découplé, au premier ordre, du problème relatif aux variables d'angle. La résolution du problème angulaire sera confiée à une technique de critère d'optimalité qui découlera de l'étude de la solution du problème d'orientation optimale.

Le problème de conception relaxé introduit des matériaux composites poreux dans la solution, de sorte que la solution du problème de topologie demandera d'être capable de modéliser proprement ces matériaux. Le chapitre 4 sera consacré à l'homogénéisation des matériaux poreux impliqués dans le problème de topologie. D'abord, nous passerons en revue les principaux résultats disponibles dans la

littérature sur les matériaux optimaux de rang  $N$ . Ensuite, nous aborderons le problème des microstructures isotropes suboptimales. A cet effet, nous étudierons en premier lieu les microstructures basées sur les modèles de Hashin : le modèle des sphères composites et le modèle des cylindres composites. En deuxième lieu, nous proposerons un modèle très intéressant de microstructure à deux niveaux, basé sur les deux précédents modèles de Hashin. Finalement, nous présenterons les matériaux SIMP fondés sur un modèle purement numérique. La relation de type puissance entre la raideur et la densité offrira une grande facilité d'utilisation dans les applications pratiques. Au cours du chapitre, une attention toute particulière sera portée à l'analyse des propriétés de la relation fonctionnelle qui relie la raideur et la densité relative et sur l'influence de la pénalisation des densités intermédiaires sur la distribution de matière. L'étude se terminera par une comparaison des différentes microstructures sur la base d'un exemple de distribution de matière.

Le chapitre 5 sera entièrement consacré à la résolution numérique du problème d'optimisation relatif aux variables de microstructure. Nous remplacerons les techniques de critère d'optimalité par une approche plus générale basée sur une procédure de programmation mathématique. Dans cette procédure, nous formerons un sous-problème d'optimisation avec des approximations convexes séparables des réponses structurales et on le résoudra par un algorithme de type dual. La résolution numérique sera fortement soulagée avec une méthode de maximisation Lagrangienne, car la dimension de l'espace dual est beaucoup plus petite que celle de l'espace des variables de conception. Outre l'utilisation d'approximations structurales classiques, nous présenterons deux nouvelles approximations de haute qualité dans lesquelles nous injecterons une information de courbure estimée avec une procédure de BFGS diagonal. Pour la méthode des asymptotes mobiles généralisées, la solution originale apportée constituera une première réponse au problème des asymptotes sur la base des dérivées premières.

Le chapitre 6 regroupera deux difficultés d'origines différentes, mais qui se manifestent de façon similaire dans la solution numérique. La première difficulté est relative à la présence de zones en damier. La présence des distributions parasites est liée à une mauvaise modélisation par éléments finis de la raideur locale ou, vue sous un autre angle, à une interaction entre les approximations des champs de déplacements et du champ de densité. La seconde difficulté provient de la non-convergence des solutions avec le maillage. Dans les deux cas, la qualité de la distribution de matière est fortement dégradée par la présence de régions où la densité varie rapidement. Dans les deux cas, il s'agit de problèmes d'origine purement numérique. Les deux phénomènes seront d'autant plus liés dans notre travail de recherche que nous aurons pu montrer que la méthode de limitation du périmètre, initialement développée pour assurer l'indépendance de la solution vis-à-vis du maillage, permettait de résoudre simultanément les deux difficultés. Il existe encore une autre difficulté qui est liée à la résolution numérique des problèmes vibratoires et que nous pourrions mettre en évidence au chapitre 7 : il s'agit de l'apparition de modes de vibration locaux dans les régions de faible densité. Nous montrerons que ces modes de vibration "parasites" peuvent être soit fixés, soit filtrés pour nous consacrer aux modes de vibration physique de la structure.

Par ailleurs, le chapitre 7 sera principalement consacré à l'utilisation du système d'optimisation topologique qui aura été mis au point. Son rôle ne pourra être quelconque. Son application comme outil préliminaire dans la chaîne de conception sera d'abord discutée. L'interprétation des résultats de distribution de densité sera ensuite abordée et nous verrons de quelle manière de nombreux procédés de conception structurale pourront être retrouvés de manière rationnelle avec l'optimisation topologique. Tous ces concepts seront enfin illustrés sur plusieurs applications réalistes où nous démontrerons les fonctionnalités de notre code de calcul d'optimisation topologique.

Au chapitre 8, la thèse se terminera sur les perspectives d'avenir qui se dessinent, à brève et à longue échéance.

## 1.6 Conclusion

Aujourd'hui les techniques d'optimisation des structures élastiques linéaires sont capables de maîtriser les problèmes de conception dont les variables sont des dimensions transversales et des paramètres de forme. De nombreuses applications industrielles sont venues prouver la maturité des codes de calcul qui en résultent. Par contre, la détermination rationnelle et l'optimisation de la topologie restent des domaines largement inexplorés.

Bien que quelques tentatives furent élaborées pour optimiser la topologie des structures, peu d'entre elles ont été couronnées de succès pour optimiser le domaine occupé par la matière. L'optimisation du sous-ensemble occupé par la matière rencontre plusieurs difficultés.

L'optimisation de forme classique est inutilisable pour cette tâche, car on ne peut modifier la fonction caractéristique du domaine avec une transformation homéomorphe.

L'idée est d'optimiser la fonction indicatrice de la présence du matériau dans le domaine de conception. Malheureusement, sous cette forme, le problème de conception est mal posé parce qu'il s'agit d'un problème d'optimisation d'un paramètre distribué appartenant à un espace non réflexif. On ne peut démontrer ni l'existence ni l'unicité de la solution de ce genre de problème d'optimisation. On ne peut pas non plus trouver de solution numérique stable. Pour remédier à ces difficultés, il faut relaxer le problème. Pour cela, il faut élargir l'ensemble des conceptions admissibles et il faut introduire les matériaux composites poreux dans le problème. En contrepartie, pour pouvoir calculer la solution, il faut être capable de modéliser correctement les propriétés de ces matériaux, de sorte qu'on fait appel à la théorie de l'homogénéisation.

L'application de ces idées novatrices à l'optimisation topologique en mécanique des milieux continus élastiques est l'oeuvre de Bendsøe et Kikuchi (1988). La méthode qui en résulte est connue sous le nom de méthode d'homogénéisation. Celle-ci a connu depuis ses origines un développement rapide.

Les travaux qui font l'objet de cette thèse s'inscrivent dans le même courant d'idée. Les hypothèses sur lesquelles nous avons travaillé ont été rappelées. Nous ne nous sommes pas limités à la méthode d'homogénéisation strictement orthodoxe, mais nous avons préféré y associer d'une part des microstructures suboptimales ou des lois de substitution pour déterminer la relation entre la raideur et la densité et d'autre part des éléments issus de la méthode du périmètre borné, dont les fondements mathématiques ont été établis par Ambrosio et Buttazzo (1991). La procédure numérique d'optimisation est rendue aussi générale que possible grâce à une résolution numérique du problème d'optimisation fondée sur la formation d'approximations convexes séparables et sur une méthode de résolution dans l'espace dual.

Nous ne pouvons pas mieux conclure et synthétiser cette introduction qu'en citant Murat et Tartar (1985a): "*Dans de nombreux problèmes d'optimisation, on rencontre des difficultés lorsque l'on cherche à suivre la méthode classique du calcul des variations : celle-ci consiste d'abord à démontrer l'existence d'une solution optimale en utilisant une suite minimisante (lorsqu'il s'agit d'un problème de minimisation), ensuite à calculer la dérivée de la fonction coût, de manière à pouvoir donner des conditions nécessaires d'optimalité (...).*"

*La première difficulté survient lorsque l'on recherche à démontrer l'existence : pour nombre de problèmes il n'existe pas de solution optimale dans la classe que l'on a considérée a priori, et les suites optimisantes (minimisantes) convergent vers quelque chose que l'on peut appeler "solution généralisée" et qu'il est important de définir de façon précise.*

*La seconde difficulté survient lorsque l'on cherche à dériver la fonction coût pour obtenir des conditions nécessaires d'optimalité (et mettre en oeuvre des méthodes numériques telles que les méthodes de descente) ; dans certains problèmes l'ensemble sur lequel on optimise n'a pas de propriété de convexité (ou plus généralement n'est pas localement une variété) de sorte qu'on ne peut faire de variations ou d'accroissements sans sortir de l'ensemble considéré a priori : c'est le cas de l'optimisation de domaine où l'on recherche une fonction caractéristique et où il n'y a pas de chemin naturel pour aller d'une fonction caractéristique à une autre en restant dans l'ensemble des fonctions caractéristiques ( $t\chi_1 + (1-t)\chi_2$  n'est pas une fonction caractéristique pour  $0 < t < 1$  si  $\chi_1 \neq \chi_2$ ). On peut, bien sûr, construire certains chemins particuliers de façon simple ; par exemple en suivant l'idée d'Hadamard (1905) qui consiste à faire varier la frontière du domaine en la faisant varier le long de la normale, ceci permet d'obtenir certaines conditions d'optimalité mais non toutes celles-ci puisque par exemple, on ne peut de cette façon créer un trou ou faire apparaître un ensemble dans une région où il n'en existait pas.*

*La manière de résoudre la première difficulté a été trouvée par L.C. Young dans les années 40. La manière de résoudre la deuxième difficulté est due à Pontryaguin : elle consiste à s'apercevoir qu'on peut en tirer un problème sur un convexe et à calculer les dérivées sur cet ensemble. On désigne sous le nom général de relaxation le procédé qui consiste à fabriquer les solutions généralisées (...).*

*Les résultats (...) sont issus d'un travail commun sur certains problèmes d'optimisation de domaine qui a commencé au début des années 70. Nous avons été amenés à introduire la "bonne" classe de solutions généralisées : les domaines homogénéisés, qui sont analogues à des matériaux composites ; cela permet de surmonter les difficultés liées aux problèmes de non-existence et dans cette classe (qui a une structure sous-jacente d'espace vectoriel : celui des matrices  $N \times N$  à coefficients  $L^\infty$ ), on peut écrire facilement les conditions d'optimalité. Il est important de ne pas confondre l'homogénéisation telle que nous l'utilisons ici avec les techniques de développement asymptotiques étudiées notamment par Sanchez-Panlencia (1980) et Benoussan-Lions-Papanicolaou (1978) : il n'y a pas de structure périodique dans les problèmes considérés. (...)."*

## **Chapitre 2 :**

# **FORMULATIONS DU PROBLEME D'OPTIMISATION TOPOLOGIQUE DES MILIEUX CONTINUS**

### **2.0 De la nécessité de décrire et de justifier les formulations du problème de topologie des milieux continus**

Ce chapitre a pour but de développer les formulations des différents problèmes qui font l'objet de ce travail. La première partie du chapitre dresse, cependant, une synthèse assez rapide des équations de la mécanique des milieux continus. Bien que ces équations soient déjà largement connues, le formalisme extrait de l'analyse fonctionnelle est souvent moins répandu. Il est, par contre, omniprésent dans la littérature liée à l'optimisation topologique. Loin d'être ésotérique, il permet d'introduire un cadre mathématique en dehors duquel il est difficile de travailler avec rigueur.

La seconde partie pose le problème qui nous intéresse dans ce travail. Le problème de topologie est formulé comme une distribution optimale de matière. L'existence de la solution des problèmes avec paramètres distribués n'est pas triviale. Une formulation adéquate s'obtient en relaxant le problème par l'introduction de matériaux composites poreux. La complexité de la formulation requiert une explication soignée des fondements théoriques qui soutiennent la méthode. Tout en suivant une approche historique, nous insisterons particulièrement sur la compréhension physique de ces nouvelles notions. Nous y accorderons la plus grande importance en réalisant ici une synthèse des principaux résultats disponibles pour la résolution théorique et numérique du problème.

Le problème du minimum de la compliance d'une structure de volume de matière fixé est la pierre angulaire du problème de topologie. Il mérite, dès lors, le titre de problème fondamental de la topologie. Le critère de compliance, comme tous les critères énergétiques, n'est pas un critère de conception familier; son utilisation mérite donc d'être justifiée. Pour enrichir notre compréhension du critère de la compliance minimale, nous pouvons comparer ce critère à d'autres critères plus habituels tels que le critère de la contrainte maximale. La similitude entre ces deux notions permet, d'une part, d'étayer le choix d'un critère énergétique global et d'autre part, d'éclaircir la notion, un peu moins intuitive, de la compliance. Nous montrerons, aussi, que le problème fondamental mérite d'être généralisé, modifié ou complété pour pouvoir s'adapter à d'autres problèmes de conception. Ainsi, nous pouvons aborder les problèmes comportant des conditions limites de déplacement non homogène, la formulation équilibre ou l'introduction de structures de périmètre borné.

Le problème de topologie mérite également d'être étendu aux structures soumises à plusieurs cas de charge distincts. Historiquement, le choix d'une formulation à adopter dans cette situation ne fut pas chose aisée. Pour notre part, nous avons opté pour une formulation de type "min-max".

Enfin, il est clair que le problème de topologie ne doit pas être restreint au comportement statique. La dernière partie du chapitre est, ainsi, consacrée à la formulation du problème de distribution de matière pour optimiser le comportement vibratoire de la structure. La réponse fréquentielle libre étant généralement complexe, les façons d'aborder le problème sont également multiples. Nous proposons, donc, plusieurs énoncés de problèmes types, reconnus pour leur utilité pratique.



## 2.1 Rappel des équations du comportement mécanique du solide élastique linéaire

### 2.1.1 Les équations locales de l'élasticité linéaire

Considérons un solide déformable que l'on suppose être un milieu continu (figure 2.1). Le corps occupe un domaine  $\Omega$  de l'espace délimité par une frontière notée  $\Gamma$  de normale  $\mathbf{n}$ . Le contour  $\Gamma$  peut être divisé en deux parties disjointes  $\Gamma_u$  et  $\Gamma_\sigma$  compte tenu de la nature des conditions aux limites que l'on y stipule. La partie  $\Gamma_u$  est un fermé sur lequel les déplacements  $\bar{u}_i$  sont imposés tandis que  $\Gamma_\sigma$  regroupe les parties du contour où les tractions de surfaces  $\bar{t}_j = n_i \sigma_{ij}$  sont imposées (la barre désignant les valeurs prescrites).

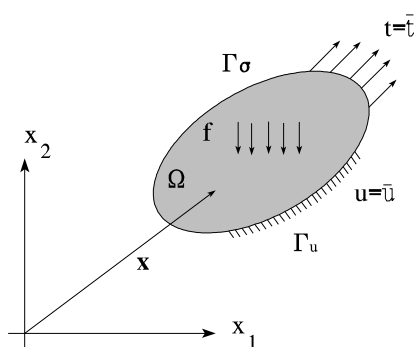


Figure 2.1 : Définition du problème élastique

Compte tenu de l'hypothèse de continuité, le problème mécanique consiste à rechercher le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  sur le corps  $\Omega$ . Les équations locales du comportement mécanique peuvent être rassemblées en trois groupes :

- Les *équations de compatibilité* décrivent la cinématique. L'expression du tenseur des déformations de Green linéarisées relie les déformations aux déplacements :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{sur } \Omega \quad (2.1)$$

Sur la frontière  $\Gamma_u$ , les déplacements prennent les valeurs prescrites par les conditions aux limites cinématiques :

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (2.2)$$

• Les *équations d'équilibre* décrivent la statique. Le champ du tenseur de contrainte et les forces de volume  $\mathbf{f}$  sont en équilibre si on a :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad (2.3)$$

alors que sur  $\Gamma_\sigma$ , les tractions de surface sont associées à leur valeur imposée :

$$t_i = n_j \sigma_{ij} = \bar{t}_i \quad \text{sur } \Gamma_\sigma \quad (2.4)$$

• Les *équations constitutives*, qui décrivent le comportement du milieu, rendent compte de la relation entre les tensions et les déformations. Pour un solide élastique linéaire, la loi de Hooke établit une relation linéaire entre les contraintes et les déformations :

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \Leftrightarrow \varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad \text{sur } \Omega \quad (2.5)$$

Les coefficients de raideur  $E_{ijkl}$  sont ceux du tenseur de Hooke, tandis que le tenseur de souplesse  $S_{ijkl}$  est l'inverse du tenseur de Hooke. On définit également la densité d'énergie de déformation élastique locale qui s'écrit, dans ce cas:

$$u_e(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (2.6)$$

La densité d'énergie complémentaire exprimée en termes des tensions est, quant à elle, donnée par:

$$u_e^c(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \quad (2.7)$$

La relation entre les deux énergies est donnée par la transformation de Legendre :

$$u_e^c(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - u_e(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.8)$$

Dans le cas élastique linéaire, la transformation est triviale et on voit que les deux énergies élastiques ont des valeurs numériques identiques.

Etudier le comportement mécanique de la structure revient à déterminer simultanément les champs de déplacement, de déformation et de contrainte sur le corps. La **solution forte** des équations de l'élasticité passe par la résolution du système des équations (2.1) à (2.5) en chaque point du solide  $\Omega$ .

### 2.1.2 Formulation faible des équations de l'élasticité linéaire

La résolution forte ou locale des équations aux dérivées partielles de l'élasticité linéaire est souvent délaissée au profit d'une **résolution faible ou globale**. Celle-ci se fonde sur une forme intégrée des équations. Si l'on admet a priori les équations de compatibilité (2.1) et (2.2) ainsi que les équations de comportement (2.5), il est possible de présenter une forme faible des équations d'équilibre au moyen du principe dit des travaux virtuels.

*Définition des espaces fonctionnels*

Comme nous utiliserons à de nombreuses reprises les formes faibles des équations aux dérivées partielles et leurs approximations en éléments finis, nous ferons constamment appel aux espaces de Sobolev. Il est dès lors opportun de les définir précisément. Ils sont basés sur l'espace des fonctions mesurables de carré intégrable sur le domaine  $\Omega$  :

$$L^2(\Omega) = \left\{ v \mid \int_{\Omega} |v|^2 d\Omega = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 < +\infty \right\} \quad (2.9)$$

L'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  se définit alors comme l'espace des fonctions dont la valeur et toutes les dérivées partielles premières (au sens des distributions) sont de carré intégrable :

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \mid v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \forall i \right\} \quad (2.10)$$

Ces deux espaces possèdent encore les propriétés des espaces de Hilbert. Un espace de Hilbert est un espace linéaire muni d'un produit scalaire et d'une norme. De plus, cet espace linéaire est complet, ce qui signifie que toute suite de Cauchy dans l'espace est convergente dans ce même espace.

Pour caractériser les coefficients des opérateurs différentiels, il est encore nécessaire de définir l'ensemble des fonctions bornées presque partout :

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ v \mid \sup_{p.p.} v < +\infty \right\} \quad (2.11)$$

Contrairement à  $L^2(\Omega)$  et  $H^1(\Omega)$ , l'espace  $L^\infty(\Omega)$  n'est pas un espace de Hilbert. Il s'agit d'un espace de Banach non réflexif.

*Ensemble des déplacements admissibles*

Nous précisons maintenant la nature mathématique des champs de déplacement ainsi que leur approximation admissible. Les champs de déplacement qui sont admissibles satisfont aux conditions aux limites essentielles portant sur la cinématique. De plus, afin d'assurer l'existence de toutes les formes énergétiques indispensables par la suite, il est nécessaire que le déplacement et toutes ses dérivées premières soient de carré intégrable sur le domaine. En conséquence, l'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles est défini par :

$$V_{\bar{u}} = \{ \mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i \text{ avec } v_i \in H^1(\Omega) : v = \bar{u} \text{ sur } \Gamma_u \} \quad (2.12)$$

tandis que l'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles satisfaisant à des conditions aux limites rendues homogènes sur  $\Gamma_u$  est donné par :

$$V_0 = \{ \mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i \text{ avec } v_i \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_u \} \quad (2.13)$$

*Formes bilinéaire et linéaire d'énergie*

Conformément à la théorie des formes faibles des équations elliptiques, l'énoncé du principe des travaux virtuels (PTV) introduit une forme bilinéaire et une forme linéaire. La forme bilinéaire  $a(u, v)$

exprime le travail virtuel des forces élastiques internes engendrées par le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  lors d'une perturbation cinématiquement admissible  $\mathbf{v}$  :

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} E_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{v}) d\Omega \quad (2.14)$$

La forme  $l(\mathbf{v})$  représente le travail virtuel des forces extérieures c'est-à-dire les forces de volume  $\mathbf{f}$  et les tractions de surface imposées  $\bar{\mathbf{t}}$  en présence du champ de déplacement  $\mathbf{v} \in V_0$  :

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{t}_i v_i d\Gamma \quad (2.15)$$

### Principe des travaux virtuels

Dès lors, il est possible d'énoncer la forme intégrée des équations d'équilibre (2.4) et (2.5), connue sous le nom de **principe des travaux virtuels** (PTV) : *tout champ de déplacement  $\mathbf{u}$  satisfaisant à l'équilibre de la structure est tel que les travaux virtuels effectués par les forces internes et externes du système en équilibre sont identiques pour tout déplacement virtuel cinématiquement admissible  $\mathbf{v}$  de valeur nulle sur  $\Gamma_u$  :*

$$\mathbf{u} \in V_{\bar{u}} \quad : \quad \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \quad (2.16)$$

On définit encore l'énergie potentielle totale du système comme la somme de l'énergie potentielle élastique et de l'énergie potentielle des charges appliquées:

$$\Pi(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{v}) \quad (2.17)$$

Si on est en présence d'une forme bilinéaire symétrique, ce qui est vérifié ici, le principe des travaux virtuels correspond aux conditions d'optimalité du problème du **minimum de l'énergie potentielle totale** du système structural. Ainsi, il est strictement équivalent de rechercher le champ  $\mathbf{u}$ , solution du problème de minimum suivant :

$$\Pi(\mathbf{u}) = \underset{\mathbf{v} \in V_{\bar{u}}}{\text{Min}} \quad \Pi(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{v}) \quad (2.18)$$

Dans le cas particulier où toutes les conditions aux limites sur les déplacements sont homogènes,

$$\mathbf{f} \neq \mathbf{0} \quad \text{sur } \Omega \quad , \quad \bar{\mathbf{t}} \neq \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_{\sigma} \quad , \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (2.19)$$

les ensembles  $V_0$  et  $V_{\bar{u}}$  sont identiques et le PTV admet, comme corollaire, l'égalité entre le double de l'énergie potentielle élastique et le potentiel des charges extérieures à l'équilibre:

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = l(\mathbf{u}) \quad (2.20)$$

En conséquence, on peut encore écrire à l'équilibre :

$$\Pi(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2}l(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{u}) \quad (2.21)$$

Inversement, si la structure est soumise à des déplacements non homogènes tout en étant libre de toute force de volume et de traction de surface imposée,

$$\mathbf{f}=\mathbf{0} \text{ sur } \Omega \quad , \quad \bar{\mathbf{t}}=\mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_{\sigma} \quad , \quad u=\bar{u} \text{ sur } \Gamma_u \quad (2.22)$$

il est possible de montrer que:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_u} t(\mathbf{u})\bar{u} \, d\Gamma \quad (2.23)$$

### 2.1.3 Conditions d'existence des formes faibles

Il est maintenant nécessaire de clarifier les conditions sous lesquelles l'étude du comportement mécanique du solide continu est bien posée. On les obtient en examinant les conditions d'existence des fonctionnelles (2.14) et (2.15) ainsi qu'en déterminant les conditions pour que la solution du problème existe et soit unique.

Les déplacements élastiques sont choisis parmi l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$ , de sorte que les déplacements et toutes les combinaisons de leurs dérivées partielles du premier ordre (donc les déformations) soient de carré intégrable. Cette condition est satisfaite par les choix de  $V_{\bar{u}}$  et de  $V_0$ .

Par le théorème d'inclusion de Sobolev, on sait, cependant, que  $H^1(\Omega)$  n'est pas inclus dans  $C^0(\Omega)$ , de sorte que tous les champs de déplacement ne sont pas assurément continus.

On remarque, aussi, que, si la frontière est suffisamment régulière, le champ  $\bar{u}$  sur  $\Gamma_u$  est plus que continu et appartient à un espace noté par les mathématiciens  $H^{1/2}(\Gamma_u)$ .

On se donne aussi des forces de volume et des tractions de surface de carré intégrable :

$$\mathbf{f} \in L^2(\Omega) \quad , \quad \bar{\mathbf{t}} \in L^2(\Gamma_{\sigma}) \quad (2.24)$$

Cette condition est plus que nécessaire, puisqu'il suffirait que les forces et les tractions de surface appartiennent aux espaces duaux :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega) & \text{si } \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \in H^{-1/2}(\Omega) & \bar{\mathbf{t}} \in H^{-1/2}(\Gamma_{\sigma}) \quad \text{si } \bar{\mathbf{t}} \neq \mathbf{0} \end{array} \quad (2.25)$$

Il est également nécessaire que l'énergie de déformation soit finie, ce qui est toujours vérifié si les coefficients élastiques  $E_{ijkl}(\mathbf{x})$  sont bornés :

$$E_{ijkl} \in L^{\infty}(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{pp} E_{ijkl} < \infty \quad (2.26)$$

Selon le théorème de Lax-Milgram, le problème défini par le Principe des Travaux Virtuels admet une solution unique, si la forme bilinéaire  $\mathbf{a}(u, v)$  est continue et  $V_0$  elliptique :

$$\begin{aligned} (\exists M > 0), (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}) : \quad \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\leq M \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \\ (\exists \alpha > 0), (\forall \mathbf{v}) : \quad \mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &\geq \alpha \|\mathbf{v}\|^2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

et que la forme linéaire  $l(\mathbf{u})$  est continue :

$$(\exists N > 0), (\forall \mathbf{v}) : \quad l(\mathbf{v}) \leq N \|\mathbf{v}\| \quad (2.28)$$

Concrètement, la forme  $\mathbf{a}(u, v)$  est  $V_0$  uniformément elliptique, si le tenseur des coefficients élastiques satisfait aux conditions de coercitivité :

$$\exists \alpha > 0 : \quad E_{ijkl} e_{ij} e_{kl} > \alpha e_{ij} e_{ij} \quad \forall e_{ij} = e_{ji} \quad (2.29)$$

Il existe une condition nécessaire et suffisante pour avoir un tenseur  $\mathbf{E}$  défini positif : il faut vérifier que tous les déterminants principaux de la forme quadratique  $E_{ijkl} e_{ij} e_{kl}$  sont positifs. Dans le cas bidimensionnel, cette condition s'écrit de la manière explicite suivante :

$$\begin{aligned} E_{1111} > 0, E_{2222} > 0, E_{1212} > 0, \\ E_{1111} E_{2222} - E_{1122}^2 > 0, E_{1111} E_{1212} - E_{1112}^2 > 0, E_{2222} E_{1212} - E_{2212}^2 > 0, \\ E_{1111} E_{2222} E_{1212} + 2 E_{1112} E_{2212} E_{1122} - E_{1212} E_{1122}^2 - E_{2222} E_{1112}^2 - E_{1111} E_{2212}^2 > 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

On démontre encore que le Principe des Travaux Virtuels est équivalent au minimum de la fonctionnelle énergie potentielle totale si la forme bilinéaire  $\mathbf{a}(u, v)$  est symétrique :

$$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \quad \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad (2.31)$$

Etant donné que le tenseur de déformation, le tenseur de contrainte et la forme quadratique de l'énergie de déformation élastique sont symétriques, le tenseur de Hooke possède également la même propriété de symétrie :

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk} = E_{klij} \quad (2.32)$$

Cette symétrie multiple réduit le nombre de coefficients indépendants de 81 à 21 au plus.

Des considérations similaires à l'existence des forces d'inertie par unité de volume montrent que la masse volumique  $\rho$  doit être bornée presque partout, ce qui s'écrit :

$$\rho \in L^\infty(\Omega) \quad (2.33)$$

### 2.1.4 Résolution des équations du solide élastique par la méthode des éléments finis

L'approche énergétique présentée au point précédent se prête à une méthode de résolution numérique puissante connue sous le nom de méthode aux éléments finis. On crée une partition finie du domaine  $\Omega$  en sous-domaines de forme simple (triangles ou quadrangles) sur lesquels on suppose que l'évolution des inconnues se fait selon une loi simple. Selon cette loi d'approximation, le champ du déplacement est complètement déterminé par les valeurs des champs aux noeuds de la partition du domaine structural. Ces nouvelles inconnues en nombre fini sont les degrés de liberté du problème "discrétisé". Dans la suite, on peut développer, sans perte de généralité, les équations principales de cette méthode numérique pour le cas bidimensionnel.

#### Expression matricielle des équations de l'élasticité

Afin de soulager l'écriture, on adopte les notations matricielles. Pour un problème bidimensionnel, on introduit les notations suivantes pour le champ de déplacement, le tenseur déformation et le tenseur contrainte :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T &= \{u_x, u_y\} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^T &= \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, 2\varepsilon_{xy}\} \\ \boldsymbol{\sigma}^T &= \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}\} \end{aligned} \quad (2.34)$$

En procédant de la même façon, on peut rassembler les coefficients élastiques non nuls dans une matrice de Hooke réduite  $\mathbf{D}$  :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1112} \\ E_{1122} & E_{2222} & E_{2212} \\ E_{1112} & E_{2212} & E_{1212} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Sous ce formalisme, les relations entre les tensions et les déformations deviennent :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.36)$$

tandis que la forme bilinéaire du travail virtuel élastique et la forme linéaire du travail virtuel des charges s'écrivent :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \\ l(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f}^T \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.37)$$

#### Méthode aux éléments finis

L'expression du champ de déplacement  $\mathbf{u}$  après discrétisation en éléments finis est donnée par :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{q} \quad (2.38)$$

où la matrice  $N(\mathbf{x})$  contient les fonctions de forme de l'approximation en éléments finis et où le vecteur  $\mathbf{q}$  regroupe les degrés de liberté généralisés du système.

Les déformations linéarisées regroupées au sein du vecteur  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sont obtenues par application de l'opérateur de dérivation  $\boldsymbol{\partial}$  aux déplacements discrétisés :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q} \quad \text{avec} \quad \mathbf{B} = \boldsymbol{\partial}N \quad (2.39)$$

L'énergie potentielle élastique du système s'écrit en faisant appel à son expression matricielle :

$$\frac{1}{2}\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \mathbf{K}\mathbf{q} \quad (2.40)$$

où l'on définit la matrice de raideur  $\mathbf{K}$  du système discrétisé :

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} \, d\Omega \quad (2.41)$$

Si on introduit les forces généralisées  $\mathbf{g}$  énergétiquement conjuguées aux déplacements  $\mathbf{q}$  :

$$\mathbf{g} = \int_{\Omega} N^T \mathbf{f} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} N^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad (2.42)$$

l'énergie potentielle des charges externes est fournie par l'expression :

$$l(\mathbf{u}) = \mathbf{g}^T \mathbf{q} \quad (2.43)$$

Le problème du minimum de l'énergie potentielle totale en termes des degrés de liberté généralisés s'énonce alors comme suit :

$$\min_{\mathbf{q}} \Pi(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{g}^T \mathbf{q} \quad (2.44)$$

Puisqu'il s'agit d'un problème quadratique, sa solution est déterminée par le système linéaire :

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{g} \quad (2.45)$$

Les tensions se déduisent alors par la loi de Hooke :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}\mathbf{q} \quad \text{avec} \quad \mathbf{T} = \mathbf{D}\mathbf{B} \quad (2.46)$$



## 2.2 Position du problème d'optimisation topologique

### 2.2.1 L'optimisation topologique formulée comme une distribution de matière

Le but de l'optimisation topologique est de déterminer le sous-domaine  $\Omega^m$  occupé par la matière constitutive d'un corps, sans a priori sur sa topologie c'est-à-dire sur la nature et la connectivité des éléments qui le composent. La recherche du domaine structural  $\Omega^m$  s'effectue au sein d'un domaine de référence  $\Omega$  plus vaste, inclus dans le plan  $\mathbb{R}^2$  ou dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Ce domaine de référence, qui est parfois choisi en fonction de l'encombrement maximal admissible, doit surtout permettre de spécifier l'ensemble des conditions aux limites (chargements et fixations possibles) nécessaires à la définition de la fonction structurale du composant mécanique. Afin de laisser la plus grande liberté de conception possible, il s'agit bien souvent des seules spécifications permettant de définir les conditions de service. Quant aux critères de conception, ils sont habituellement simples : la raideur ou l'énergie potentielle de la structure sert de critère de performance tandis que le volume de matière mis en jeu est une fonction de coût naturelle.

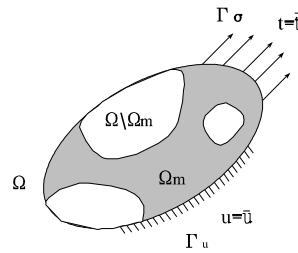


Figure 2.2 : Définition du problème de topologie

La recherche de la forme, indépendamment de tout a priori sur sa topologie, est un problème difficile. Pour un milieu continu, l'approche la plus répandue à l'heure actuelle consiste à dégager le domaine structural au moyen d'une *répartition optimale de matière*. On transforme le problème de topologie en une recherche de distribution du tenseur des coefficients élastiques  $E_{ijkl}$  sur le domaine de référence devenu domaine de conception. L'évolution des propriétés élastiques  $E_{ijkl}(\mathbf{x})$  et de la densité  $\rho(\mathbf{x})$ , variable en chaque point du domaine de référence, permet de dégager la forme et la topologie de la structure.

Compte tenu de leur nature physique, les propriétés mécaniques et massiques ne sont cependant pas totalement arbitraires, car le problème mécanique doit rester bien posé. Les 21 termes indépendants du tenseur élastique recherché  $E_{ijkl}(\mathbf{x})$  sont bornés. Les tenseurs admissibles doivent, également, satisfaire aux conditions de symétrie et de coercitivité, de sorte que le sous-ensemble des tenseurs élastiques admissibles  $E_{ad} \subset (L^\infty(\Omega))^{21}$  soit celui qui remplit simultanément les conditions (2.26), (2.29) et (2.32).

La recherche d'une distribution optimale de la matière généralise le concept d'optimisation de forme classique. En déplaçant les frontières mobiles, l'optimisation de forme paramétrique permet de modifier

un domaine structural dont la topologie est fixée. Le concept de distribution de matière permet de relaxer cette restriction sur la topologie de sorte que le vocable d'*optimisation de forme généralisée*, introduit par certains auteurs, trouve ici sa justification. Par ailleurs, il est aussi permis d'établir une analogie entre le formalisme du problème de topologie et celui du problème de dimensionnement. En poussant le parallélisme, il est permis d'interpréter la conception topologique de structures planes comme l'étude de la distribution de l'épaisseur hors plan de la pièce.

### 2.2.2 Echec de l'approche purement discrète et de la conception de type vide-solide

Etant donné un matériau de référence caractérisé par les propriétés  $E_{ijkl}^0$  et  $\rho^0$ , les caractéristiques en un point du domaine  $E_{ijkl}(\mathbf{x})$  et  $\rho(\mathbf{x})$  dépendent de la présence ou non du solide en ce point. On introduit une fonction indicatrice  $\chi(\mathbf{x})$  définie pour repérer la présence du matériau au sein du domaine. Celle-ci est unitaire là où se trouve le solide et est nulle ailleurs :

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^m \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega^m \end{cases} \quad (2.47)$$

On peut, alors, écrire les données locales :

$$\begin{aligned} E_{ijkl}(\mathbf{x}) &= \chi(\mathbf{x}) E_{ijkl}^0 \\ \rho(\mathbf{x}) &= \chi(\mathbf{x}) \rho^0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Tel qu'il vient d'être posé, ce problème peut être résolu par une formulation purement discrète. Puisque chaque point  $\mathbf{x}$  de l'espace est constitué de vide ou de solide, une solution numérique s'obtiendrait, alors, en discrétisant le domaine en éléments finis, et ensuite, en utilisant des algorithmes d'optimisation discrets.

Si on veut obtenir une résolution géométrique suffisante, la discrétisation de la distribution de matière introduit inévitablement un grand nombre de variables de conception. La résolution de ce problème est loin d'être évidente, car le traitement d'aussi grands problèmes en variables discrètes n'est pas encore complètement résolu de nos jours. La résolution du problème purement discret a cependant été tentée, mais elle n'a pas abouti. En effet, il a été constaté que sous cette formulation, le problème n'est pas bien posé. Il en résulte que les solutions numériques obtenues sont instables vis-à-vis du choix du maillage et des éléments. Les solutions numériques du problème sont non convergentes. Une augmentation de la discrétisation et un raffinement du maillage altèrent la solution au lieu d'en augmenter la résolution géométrique. Ce phénomène est commun à tous les problèmes d'optimisation avec des paramètres distribués. Il est similaire à celui qui a été observé par Cheng et Olhoff (1981) lors de la conception de plaques de raideur maximale. En optimisation topologique, on observe l'apparition de zones de matériaux composites constituées par un mélange de solide et de vide (voir par exemple Goodman *et al.*, 1986). Au fur et à mesure que l'on affine le maillage, ces zones ont tendance à reproduire au niveau macroscopique la formation d'une microstructure de plus en plus fine. L'importance du phénomène peut être telle qu'elle entraîne également des bifurcations dans la topologie générale de la structure: divisions de certains membres structuraux, apparitions de nouvelles cavités.

On peut s'étonner que la solution "optimale" calculée varie avec l'échelle du maillage et qu'il n'y ait pas de convergence évidente lorsque la taille des éléments tend vers zéro. Le phénomène peut être

compris intuitivement en imaginant l'expérience de Kohn (1989). On veut minimiser la masse d'une structure dont la raideur est donnée. On considère la forme optimale de la structure avec un trou, ensuite avec deux trous, et ainsi de suite avec un nombre de trous de plus en plus grand. Il est évident que plus le nombre de trous augmente, plus la masse diminue, quantitativement en relation avec le problème envisagé. A la limite, lorsque le nombre de trous devient infini, on trouve un optimum global qui ne correspond plus aux conceptions conventionnelles d'où on est parti. A la place, on est en présence d'une structure faite de matériaux composites éventuellement orthotropes obtenus par une infinité de perforations.

Ce type de solution est, cependant, naturel et les exemples ne manquent pas pour illustrer ce concept d'une manière intuitive. Prenons l'exemple d'un domaine rectangulaire soumis à des forces de traction appliquées uniformément sur deux de ses côtés. On recherche la forme optimale de la structure permettant de relier les deux faces opposées sollicitées. Le volume de matière est borné à 50 % du volume du domaine de conception. Le solide de base est un matériau isotrope. Si on accepte de rechercher la solution parmi l'ensemble des structures possédant un nombre infini de perforations, la configuration optimale est celle où le domaine entier est recouvert par une infinité de fibres alignées perpendiculairement aux faces chargées, avec une proportion de vide et de solide donnée par la borne sur le volume de matière admissible. La structure optimale n'appartient plus aux structures conventionnelles formées de matériaux isotropes. En effet, bien qu'au niveau microscopique, la structure soit constituée de deux matériaux isotropes distincts, au niveau macroscopique, l'observateur voit un matériau composite orthotrope de densité intermédiaire constitué de fibres unidirectionnelles. D'un point de vue géométrique, le périmètre des solutions augmente avec le nombre de trous, pour tendre vers l'infini lorsque le nombre de trous devient lui-même arbitrairement grand.

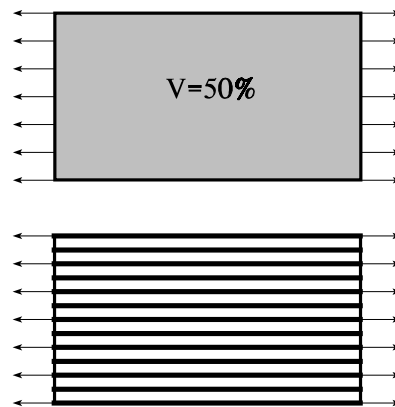


Figure 2.3 : Exemple de structure optimale orthotrope obtenue à partir d'une distribution de matière isotrope

### ***2.2.3 Régularisation du problème par l'introduction de matériaux composites obtenus par perforation***

L'impossibilité de calculer une solution numérique stable n'est que le reflet d'un problème théoriquement mal posé. Il est corrélativement impossible d'établir une théorie mathématique d'existence et d'unicité de la solution du problème tel qu'il est posé, compte tenu de l'impossibilité d'atteindre la limite des conceptions classiques. Pour s'assurer de l'existence de la solution optimale, il faut considérer la nouvelle classe des structures faites de composites perforés. Si on est prêt à

envisager des conceptions comportant un nombre infini de trous, on doit aussi pouvoir atteindre leur limite. On en arrive donc à considérer une nouvelle classe de problèmes d'optimisation dont le but serait de trouver la meilleure utilisation possible de la matière, soit un optimum global. Dans ce cas, on doit inclure, a priori, dans l'espace de conception, toutes les structures faites de matériaux composites réalisables par perforation de matériau de base. L'énoncé du problème n'est pas altéré si on ne considère que les structures obtenues par perforations et si l'on s'engage à les modéliser de manière appropriée. D'un autre côté, le problème est un peu différent, puisque, initialement, on n'admet qu'un seul matériau (ou son absence) alors qu'au contraire, maintenant, on autorise un continuum de matériaux, chacun représentant un composite perforé avec des microgéométries différentes.

L'introduction de matériaux composites comme conception généralisée est un processus de *relaxation* du problème de conception qui a été étudié par de nombreux groupes de chercheurs. Lurie *et al.* (1982) se sont intéressés au problème des plaques de raideur maximale. Ils ont montré que la convergence des variables de conception ne peut être attendue que dans un ensemble plus large où l'on admet a priori l'existence possible de raidisseurs composites. Seuls, les chercheurs comme Murat et Tartar (1985), Goodman *et al.*, (1986), Kohn et Strang (1986), Kohn (1989-1990) etc... se penchent sur les problèmes d'optimisation de domaine. Le résultat de leurs études rejoint la conclusion approchée intuitivement : la convergence ne peut être attendue que dans l'ensemble des structures constituées de matériaux composites obtenus par microperforation.

La construction d'une *théorie mathématique d'existence et d'unicité* de la solution du problème de la topologie optimale (Kohn, 1990) requiert encore l'appoint de deux ingrédients. Premièrement, la considération de matériaux composites poreux revient à introduire une *microstructure*. Deuxièmement, il est nécessaire de modéliser cette microstructure avec soin. Très tôt, Murat et Tartar (1985) ont suggéré que la présence d'une microstructure n'allait pas sans l'utilisation de la *théorie de l'homogénéisation* qui est l'outil rigoureux pour cette tâche.

D'un point de vue pratique, la relaxation apporte plusieurs avantages. Le principal est d'assurer l'existence et l'unicité d'une conception optimale c'est-à-dire que la solution numérique converge lorsque le maillage devient de plus en plus fin. On comprend que l'introduction des composites se justifie puisque les solutions génèrent spontanément des zones constituées par une juxtaposition microscopique de solide et de vide. De plus, leur présence est parfaitement compatible avec la formulation variationnelle des équations de la mécanique des milieux continus. Mais, il y a encore d'autres avantages pratiques pour l'ingénieur. Travailler avec des matériaux de porosité variable permet d'ôter le caractère "tout ou rien" de la distribution de matière. On remplace une résolution en variables discrètes par un problème en variables continues, ce qui est toujours plus intéressant. La nature purement discrète de la distribution est repoussée du domaine de conception macroscopique à l'échelle microscopique, ce qui, physiquement, assure l'existence d'une solution stable. Néanmoins, le solide et le vide du problème initial, sont toujours inclus parmi la famille des candidats matériaux composites. Il existe des choix particuliers des paramètres pour lesquels  $\rho = 0$  et  $\rho = 1$  représentent respectivement le vide et le solide de référence, tandis que les microperforations pour lesquelles  $0 < \rho < 1$  introduisent des matériaux poreux. Dans le contexte du calcul par éléments finis, l'introduction des composites améliore aussi les performances de la solution numérique obtenue pour un maillage donné. D'autre part, la relaxation facilite la recherche de l'optimum global car elle a tendance à élargir l'espace de conception et à *détruire les minima locaux*.

La difficulté de la nouvelle formulation réside dans la nécessité de modéliser avec soin les matériaux perforés. Pour déterminer les propriétés macroscopiques moyennes du matériau, il faut recourir à la *théorie de l'homogénéisation* qui se trouve être l'outil mathématique rigoureux capable d'accomplir cette tâche. Un autre problème consiste à déterminer l'ensemble des matériaux composites optimaux

que l'on va retrouver dans la solution. En d'autres mots, il faut déterminer la relation entre les coefficients élastiques homogénéisés, la densité locale, l'état de contrainte et le critère de conception. C'est le *problème du G-Closure*. Malheureusement, ce problème n'est que partiellement résolu pour l'élasticité.

Il existe encore un autre inconvénient lié à l'introduction de matériaux composites. La conception optimale obtenue est parfois difficile, voire impossible à usiner, à cause de la présence de microstructures complexes. Les solutions théoriques peuvent alors être exploitées comme point de départ vers une conception suboptimale de type classique avec un nombre fini de trous et un matériau homogène. Les solutions théoriques peuvent encore être utilisées comme "*benchmarks*" pour comparer des solutions produites avec différents algorithmes conventionnels.

#### 2.2.4 La méthode d'homogénéisation pour résoudre le problème de topologie

##### *Les concepts de microstructure et de théorie de l'homogénéisation*

Le concept du processus de relaxation est simple : on réécrit le problème de conception sous une forme qui autorise le matériau perforé. La réalisation pratique demande la connaissance des propriétés des matériaux composites obtenus par perforation. Pour cela, on considère des matériaux composites avec microstructure et, notamment, la famille des matériaux avec microperforations périodiques.

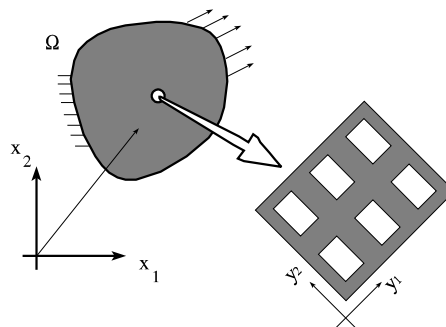


Figure 2.4 : Introduction de microstructures et de micro-perforations

Les matériaux avec des microstructures périodiques constituent un domaine généralisé. Leur étude a fait l'objet de nombreuses recherches rassemblées sous le nom de la théorie de l'homogénéisation (Sanchez-Palencia, 1980, Bensoussan *et al.*, 1978, Bergman *et al.*, 1983). L'annexe A présente une synthèse de quelques résultats utiles pour l'optimisation topologique. Le lecteur s'y référera utilement. Très tôt, Murat et Tartar (1985) ont suggéré le rôle que devrait jouer la théorie de l'homogénéisation en optimisation topologique. La théorie de l'homogénéisation permet de déterminer les propriétés macroscopiques moyennes du matériau en fonction de sa microstructure. Un des avantages de l'homogénéisation de microstructures est qu'on ne génère que des tenseurs effectifs satisfaisant aux conditions de symétrie, de bornation et de coercitivité (2.26-29-32). Les tenseurs d'élasticité sont donc toujours admissibles.

Il est important de voir que l'utilisation des propriétés homogénéisées est consistante avec la formulation discrète du problème de topologie. Pour s'en convaincre, on considère une suite minimisante de conceptions de type  $[0,1]$  et on suppose que chaque distribution de matière de la suite

est formée de microcellules de forme choisie et d'échelle  $\delta > 0$ . A la limite, lorsque le paramètre d'échelle tend vers 0 c'est-à-dire  $\delta \rightarrow 0$ , la suite de structures a un comportement qui est gouverné par les propriétés homogénéisées. En effet, il s'agit d'une propriété fondamentale du processus d'homogénéisation que les déplacements  $\mathbf{u}^\delta(\mathbf{x})$  de la suite de structures convergent *faiblement* vers le déplacement  $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$  de la structure homogénéisée. Lorsque la fonctionnelle est une fonction continue des déplacements, ceci implique également la convergence des valeurs de la compliance. On peut en conclure que l'inclusion de matériaux homogénéisés dans la formulation n'introduit pas de saut dans les propriétés, mais qu'elle permet au contraire d'inclure une fermeture de l'espace de conception c'est-à-dire qu'on considère aussi les limites des propriétés admissibles. En outre, le processus d'homogénéisation permet de décrire le problème en termes de variables continues en lieu et place de variables discrètes.

Il est évident que l'ensemble de tous les tenseurs admissibles représentatifs de matériaux poreux ne peut être généré qu'en considérant l'entière des configurations microstructurales possibles. Si on n'emploie qu'une famille de microstructures, on se limite à un sous-ensemble, de sorte qu'on s'expose au risque de n'obtenir qu'une *configuration suboptimale*. Kohn (1990), interprète l'emploi de microstructures suboptimales comme une *relaxation partielle* du problème. Il existe cependant une situation où il est licite de ne considérer qu'un sous-ensemble de microstructures. Il s'agit du cas où l'on connaît la *forme du G-closure* des matériaux poreux satisfaisant au critère de conception retenu. Avellaneda (1987) a montré que pour toutes les densités, il existe un matériau feuilleté de rang 3 ou 4 en état tridimensionnel de contrainte et un matériau feuilleté de rang 2 en état plan qui réalisent les extrema d'énergies de déformation. Ainsi, pour une structure plane et pour une sollicitation unique, on sait que pour toute densité, on peut trouver un matériau feuilleté de rang 2 qui minimise ou qui maximise la densité d'énergie de déformation locale. Le problème plan du minimum de la compliance pour un volume de matière fixé peut être étudié en se restreignant au sous-ensemble des tenseurs élastiques des matériaux feuilletés de rang 2.

Cette méthode de résolution du problème de topologie optimale est généralement appelée *méthode d'homogénéisation* parce qu'elle est basée sur l'emploi des propriétés homogénéisées de microstructures perforées.

#### *La procédure de résolution numérique*

Bendsøe et Kikuchi (Bendsøe et Kikuchi, 1988 et Bendsøe, 1989) furent les premiers à exploiter l'homogénéisation pour résoudre numériquement le problème de génération de topologies optimales. La première étape de la procédure consiste à choisir une microstructure et à décrire ses propriétés en fonction de ses paramètres microgéométriques; la seconde à déterminer leur valeur optimale afin de connaître la distribution de matière au sein du domaine de conception.

Comme on l'a signalé, il n'est pas possible de considérer l'entière des microstructures, dans un processus numérique. Au risque de ne relaxer le problème de conception que partiellement, on fixe son choix sur une microgéométrie que l'on suppose entièrement décrite par un nombre fini de paramètres. Selon le choix du modèle microscopique, les paramètres de la microstructure ont plusieurs significations. Dans les matériaux feuilletés de rang 2 (figure 2.5b), ils représentent les épaisseurs relatives des lamelles des différents étalements. Pour des microperforations rectangulaires (figure 2.5a), les paramètres sont les dimensions de la perforation de la cellule de base. Il faut évidemment que le type de microstructure choisie soit capable de générer des tenseurs d'élasticité dont la porosité s'étale depuis le vide jusqu'au solide de référence en passant par toutes les densités intermédiaires.

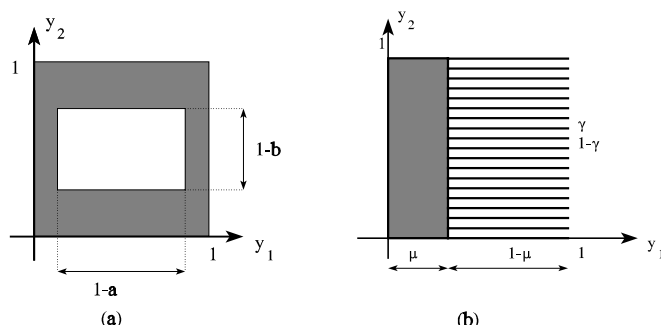


Figure 2.5 : Exemple de microstructures périodiques : (a) perforations rectangulaires (b) matériau feuilleté de rang 2

Dans le cas où l'on ne peut évaluer analytiquement les propriétés homogénéisées, les équations de la théorie de l'homogénéisation doivent être résolues numériquement. Pour établir une relation fonctionnelle entre la densité, les caractéristiques mécaniques équivalentes  $E_{ijkl}^H$  et les paramètres de microstructure du matériau perforé, on répète le calcul pour différentes microperforations de géométrie connue. Une interpolation numérique des résultats se montre, alors, souvent satisfaisante pour approcher la loi réelle pour tous les paramètres. Dans le cas d'une microstructure non périodique, on peut encore utiliser une analyse micromécanique adéquate afin de déterminer les propriétés moyennes du composite en fonction de sa porosité. Le chapitre 4 montrera de quelle manière on peut réaliser une modélisation soignée des propriétés homogénéisées de différentes microstructures poreuses. Celles-ci seront, par la même occasion, comparées quant à leur utilisation en topologie.

Si l'on a préalablement établi les relations fonctionnelles qui associent à chaque ensemble de paramètres microscopiques les coefficients macroscopiques moyens, le problème de la distribution optimale de microstructure poreuse se réduit à déterminer les paramètres régissant la microgéométrie locale. Il s'agit là des véritables inconnues du problème d'optimisation. En les déterminant, on connaît de manière univoque les valeurs homogénéisées du tenseur de Hooke  $E_{ijkl}(\mathbf{x})$  et de la densité locale  $\rho(\mathbf{x})$ . Si les propriétés homogénéisées sont orthotropes, l'angle d'orthotropie intervient également dans la valeur du tenseur de Hooke en axes structuraux via les formules de repère :

$$E_{ijkl}^s(\rho, \theta) = E_{pqrs}^H(\rho) R_{pi}(\theta) R_{qj}(\theta) R_{rk}(\theta) R_{sl}(\theta) \quad (2.49)$$

Puisque la raideur locale dépend fortement de l'angle d'orthotropie  $\theta(\mathbf{x})$ , il faut l'adjoindre aux variables microstructurales. En définitive, c'est l'ensemble de ces paramètres de microstructure et l'angle d'orthotropie que le processus d'optimisation aura pour mission de déterminer.

Dans le contexte d'une solution numérique par éléments finis, on effectue une partition du domaine de référence macroscopique en éléments finis. La distribution des variables de microstructure est approchée en conséquence, et le problème de topologie est traité comme la recherche de la distribution optimale de paramètres de microstructure locale (discrétisée en éléments finis) sur le domaine de conception macroscopique.

La forme numérique du problème d'optimisation topologique ressemble formellement à un problème

de dimensionnement automatique. Les paramètres de microstructure jouent le même rôle que les dimensions transversales du problème de dimensionnement. L'avantage est alors de pouvoir profiter de l'expérience acquise pour la résolution de ce type de problème. Le chapitre 3 de cette thèse établira la stratégie générale de résolution sur la base de l'inspection des critères d'optimalité du problème. Le chapitre 5 sera entièrement consacré à l'adaptation des techniques de résolution issues de l'optimisation structurale au problème de la topologie.

Un autre atout est, évidemment, de pouvoir résoudre le problème avec *un maillage fixe*. On évite les difficultés liées au travail sur des domaines avec des frontières variables. On évite ainsi les difficultés de l'optimisation de forme paramétrique. On peut, notamment, se passer de loi de champ de vitesse, de remaillage entre les itérations, etc...

#### *Remarque sur la résolution par une paramétrisation libre du tenseur d'élasticité*

On remarquera qu'une alternative à la définition de microstructures consisterait à déterminer les différentes composantes du tenseur d'élasticité local sur le domaine de conception. Ce qui, pour un matériau orthotrope, requiert 4 variables indépendantes pour un problème plan et 9 variables pour un problème en 3 dimensions, auxquelles il est nécessaire d'ajouter l'angle d'orthotropie local. Il faut rendre le tenseur défini-positif en ajoutant les inégalités (2.30) en chaque point, ce qui n'est pas chose facile. En état plan, la positivité du tenseur d'élasticité génère 3 inégalités. Cette manière de faire semble, de prime abord, plus compliquée. En outre, il faudrait établir la relation entre la densité locale (fonction de coût dans le problème d'optimisation) et les composantes du tenseur élastique.

Le problème de topologie avec une paramétrisation libre du tenseur d'élasticité a, néanmoins, été étudié par Bendsøe, Haber, Guedes, Pedersen et Taylor (1993) pour un cas de charge unique, par Bendsøe, Díaz, Lipton et Taylor (1993) pour des cas de charge multiples, et par Bendsøe (1995) pour le problème des vibrations. Moyennant l'abandon du volume comme fonction de coût et le choix d'une nouvelle fonction basée sur un invariant du tenseur d'élasticité, la solution du problème peut être largement développée de façon analytique et sa résolution s'avère plus facile qu'il n'y paraît au premier abord. Le problème se transforme en un problème formellement semblable à celui de l'optimisation topologique de treillis.

Le problème de topologie avec paramétrisation libre du tenseur d'élasticité n'est, cependant, pas étudié dans le cadre de cette thèse. Nous nous restreignons à l'étude des problèmes de topologie par la méthode d'homogénéisation.

### **2.2.5 Variables de conception du problème de topologie - exemple des matériaux feuilletés de rang 2**

Pour analyser les variables de conception du problème de topologie, on choisit de considérer le matériau feuilleté de rang 2 dont la microstructure est décrite par les densités relatives  $\gamma$  et  $\mu$ , comme nous le verrons au cours du chapitre 4. Le choix des matériaux feuilletés de rang 2 n'enlève rien à la généralité des résultats énoncés car ceux-ci restent valables, à un changement de notations près, pour n'importe quel type de microstructure. Compte tenu de l'orthotropie des matériaux feuilletés de rang 2, il faut considérer le triplet de variables de conception  $\gamma$ ,  $\mu$  et  $\theta$  pour le problème d'optimisation de forme généralisée.

Parce que la microstructure évolue d'un point à l'autre du domaine  $\Omega$ , les paramètres  $\gamma$ ,  $\mu$  et  $\theta$  sont aussi des fonctions des coordonnées  $x$  :



$$\gamma = \gamma(\mathbf{x}) \quad \mu = \mu(\mathbf{x}) \quad \theta = \theta(\mathbf{x}) \quad (2.50)$$

On peut aussi se demander quel est le degré de continuité de ces fonctions. Les variables microstructurales sont intimement liées aux coefficients élastiques  $E_{ijkl}$  et à la densité  $\rho$  dont les valeurs sont bornées presque partout dans  $\Omega$ . Il est évident que l'on peut transférer les conditions (2.26) sur les variables microgéométriques  $\mu$  et  $\gamma$  :

$$\gamma \in L^\infty(\Omega) \quad \mu \in L^\infty(\Omega) \quad (2.51)$$

Dans le cadre des éléments finis, on peut supposer que l'évolution des variables de conception est suffisamment régulière au sein de chaque élément fini " $e$ " de domaine  $\Omega^e$  pour écrire :

$$\gamma \in H^1(\Omega^e) \quad \mu \in H^1(\Omega^e) \quad (2.52)$$

De son côté,  $\theta$ , l'angle d'orthotropie, est naturellement associé à l'angle  $\theta_p$  des directions principales du tenseur de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ . On peut espérer maintenir les mêmes propriétés de continuité pour l'angle d'orthotropie. On suppose donc que l'angle d'orthotropie est continu partout sur  $\Omega$  excepté sur un ensemble de points de mesure nulle :

$$\theta \in C^0(\Omega) \quad \text{p.p.} \quad (2.53)$$

Dans la suite des développements numériques, nous ferons cependant l'hypothèse que  $\gamma$ ,  $\mu$  et  $\theta$  possèdent une évolution suffisamment douce pour pouvoir supposer que la microstructure qu'ils décrivent est conservée dans un petit voisinage autour de tout point  $x$  de  $\Omega$ , afin de pouvoir appliquer la théorie de l'homogénéisation nécessaire à l'établissement des propriétés équivalentes locales. Cette hypothèse ne veut certes pas dire que la microstructure soit constante sur tout le domaine de conception. Au contraire, il est indispensable que la microstructure évolue de point en point macroscopique afin de générer la forme de la structure recherchée.

## 2.3 Formulations du problème de la topologie

### 2.3.1 Enoncé du problème fondamental de la topologie

Le problème fondamental de la topologie s'intéresse au problème de la détermination de la topologie d'une structure soumise à un chargement statique unique.

On suppose, de surcroît, que les conditions aux limites cinématiques sur  $\Gamma_u$  sont toutes homogènes. Le principe des travaux virtuels s'énonce alors comme suit :

$$\mathbf{u} \in V_0 \quad : \quad a_E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \quad (2.54)$$

Les notations utilisées ont été introduites au début du chapitre. L'indice E dans la forme bilinéaire du travail virtuel des forces élastiques est destiné à rappeler la dépendance du travail élastique vis-à-vis du choix de la distribution du tenseur d'élasticité.

Le volume de matière utilisé pour la structure se définit par l'intégrale de la densité locale  $\rho(\mathbf{x})$  sur le volume de référence :

$$\text{Volume} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \, d\Omega \quad (2.55)$$

Le choix du volume de matière de la structure semble être le critère de coût naturel. D'un autre côté, la formulation minimale du problème de topologie met aussi en jeu un critère de performance permettant d'évaluer l'aptitude de la structure à remplir sa mission : supporter les charges appliquées. On cherche à maximiser la raideur structurale, que l'on peut envisager sous plusieurs critères pratiques.

■ Le travail des forces appliquées ou compliance :

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}^T \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_g} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{u} \, d\Gamma \quad (2.56)$$

■ Le déplacement moyen sur un sous-domaine  $\Omega_1$  du domaine de conception :

$$\int_{\Omega_1} |\mathbf{u}| \, d\Omega \quad (2.57)$$

■ La limitation de la contrainte locale  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  sur un sous-domaine  $\Omega_0$  du domaine de conception, excluant un certain voisinage autour des points singuliers de mise en charge ou de fixation :

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega_0} \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\| \quad (2.58)$$

Le choix du critère de raideur pour le problème fondamental s'est porté sur la *compliance*. Plusieurs arguments plaident en faveur d'un critère énergétique. D'abord, le problème de distribution optimale de matière est un problème coûteux. L'obtention d'une solution avec une bonne résolution géométrique nécessite une discrétisation assez fine et donc un grand nombre de variables de conception. Les évaluations de la valeur et de la sensibilité de l'énergie potentielle de la structure sont peu coûteuses, alors que la considération d'un critère local demande une évaluation locale et donc un calcul beaucoup plus lourd. Ensuite, avec un peu d'expérience, l'énergie potentielle des charges extérieures  $l(\mathbf{u})$  est un critère de raideur suffisamment représentatif. En outre, il permet de traiter indistinctement et objectivement différentes conditions de mises en charge et il est, de surcroît, cohérent avec la formulation faible utilisée pour la résolution des équations du comportement mécanique de la structure. Enfin, on dispose de résultats théoriques sur le *G-closure* du problème énergétique alors qu'il n'en existe pas pour les contraintes locales, du moins pour le moment.

En résumé, le problème fondamental d'optimisation topologique consiste à minimiser la souplesse de la structure avec un volume de matière limité. En termes mathématiques, on recherche la distribution de matériau qui respecte l'équilibre et qui minimise la compliance  $l(\mathbf{u})$  avec une borne supérieure sur le volume. Il est plus rare d'y adjoindre d'éventuelles contraintes de conception : limitations des contraintes, des déformations, de certains déplacements locaux...

$$\begin{aligned}
& \min_{E_{ijkl} \in E_{ad}} && l(\mathbf{u}) \\
& \text{avec} && \cdot \text{Volume} \leq \bar{V} \\
& && \cdot \mathbf{a}_E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \\
& && \cdot \text{autres contraintes de conception.}
\end{aligned} \tag{2.59}$$

De manière alternative, on peut également envisager la configuration optimale comme étant celle qui minimise le volume de matière utilisé avec une borne supérieure sur la souplesse :

$$\begin{aligned}
& \min_{E_{ijkl} \in E_{ad}} && \text{Volume} \\
& \text{avec} && \cdot l(\mathbf{u}) \geq \bar{l} \\
& && \cdot \mathbf{a}_E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \\
& && \cdot \text{autres contraintes de conception.}
\end{aligned} \tag{2.60}$$

### 2.3.2 Exemple des matériaux feuilletés de rang 2

On sait que les matériaux feuilletés de rang 2 sont optimaux pour le problème plan avec une seule sollicitation. Dans ce sens, ils sont parfois qualifiés de *smart materials*. Pour les problèmes plans, on peut donc se limiter à cette famille. La microstructure des matériaux feuilletés de rang 2 (figure 2.4a) est décrite par les densités relatives  $\gamma$  et  $\mu$ . Compte tenu de l'orthotropie du matériau, il faut considérer le triplet de variables de conception  $\gamma$ ,  $\mu$  et  $\theta$  pour le problème d'optimisation de forme généralisée.

Une simple inspection des matériaux feuilletés de rang 2 permet de tirer l'expression de la densité moyenne de ce composite puisque les paramètres  $\mu$  et  $\gamma$  représentent physiquement les densités relatives des différentes couches. Le matériau est fabriqué en deux étapes. La première couche est composée de lamelles avec une proportion relative de matière  $\gamma$ . La seconde étape se situe à une échelle supérieure, de sorte que la première couche y intervient au travers de ses propriétés moyennes. Dans ce second niveau, on assemble des lamelles de matière en proportion  $\mu$  et des lamelles du premier matériau construit en proportion  $(1-\mu)$ . Les lamelles du premier niveau sont orientées perpendiculairement au second étalement. D'après la construction, il est facile de déduire que la proportion globale de solide dans le matériau final est :

$$\rho = [(1-\mu)\gamma + \mu] \rho^0 = [\mu + \gamma - \mu\gamma] \rho^0 \tag{2.61}$$

De plus, par leur sens physique, les variables de conceptions sont astreintes aux contraintes de bornes suivantes :

$$0 \leq \gamma, \mu \leq 1 \tag{2.62}$$

Le problème fondamental d'une distribution de matériau feuilleté de rang 2 sur le domaine de référence, s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \min_{\gamma, \mu, \theta} \quad l(\mathbf{u}) \\
 & \text{avec} \quad \cdot \int_{\Omega} (\mu + \gamma - \mu \gamma) d\Omega \leq \bar{V} \\
 & \quad \cdot \mathbf{a}_E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \\
 & \quad \cdot 0 \leq \gamma, \mu \leq 1.
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

### 2.3.3 Compliance ou énergie potentielle totale ?

#### 2.3.3.1 Critère de l'énergie potentielle totale

##### Conditions limites de déplacement homogène

La formulation de l'optimisation topologique telle qu'elle a été présentée au paragraphe précédent est basée sur l'hypothèse que la structure est soumise à des conditions aux limites homogènes sur les déplacements i.e.  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$  sur  $\Gamma_u$ . Dans ce cas de figure particulier, mais relativement courant en pratique, la fonction objectif sélectionnée est l'énergie potentielle des charges appliquées, encore appelée compliance. On veut généraliser le critère de compliance pour relaxer l'hypothèse des conditions limites de déplacement homogène. Pour cela, on fait appel à la notion d'énergie potentielle totale du système. L'énergie potentielle totale se définit par la somme des énergies potentielles de déformation et des charges appliquées :

$$\Pi(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{v}) \tag{2.64}$$

On sait qu'en présence de conditions limites homogènes sur les déplacements, les différentes énergies potentielles du système à l'équilibre sont liées par la relation :

$$\Pi(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2} l(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \tag{2.65}$$

En conséquence, il est équivalent de rechercher le *minimum de la compliance*, le minimum de l'énergie de déformation élastique, ou bien le maximum de l'énergie potentielle totale d'une structure uniquement soumise à des conditions aux limites homogènes sur les déplacements. Et le problème d'optimisation (2.59) peut donc se réécrire à l'aide de l'énergie potentielle totale :

$$\begin{aligned}
 & \min_{E_{ijkl} \in E_{ad}} \quad l(\mathbf{u}) & \quad \quad & \max_{E_{ijkl} \in E_{ad}} \quad \Pi(\mathbf{u}) \\
 & \text{avec} \quad \cdot V \leq \bar{V} & \quad \quad & \text{avec} \quad \cdot V \leq \bar{V} \\
 & \quad \cdot \mathbf{a}_E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0. & \quad \Leftrightarrow & \quad \cdot \mathbf{a}_E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0.
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

##### Conditions limites de déplacement non homogène

Dans le cas où la structure est soumise à des déplacements imposés non nuls sur la frontière  $\Gamma_u$ , la

formulation présentée en (2.59) est incomplète car il n'est pas tenu compte du travail effectué par les réactions relatives aux déplacements imposés. Pour simplifier le raisonnement, on considère une structure libre de toutes forces de volume ou de tractions imposées sur la surface. L'unique mise en charge résulte de l'application de déplacements non nuls sur la frontière. En l'absence de forces de volume ou de tractions de surface, le travail des forces extérieures est identiquement nul. Intuitivement, dans cette situation, la structure la plus raide est celle qui *maximise* le travail des réactions engendrées par les déplacements imposés. En effet, la raideur de la structure est fonction de la résistance que la structure oppose aux déplacements et aux déformations auxquels on l'astreint. Autrement dit, la structure la plus rigide est celle qui produit les plus grandes tractions de surface  $\mathbf{t}(\mathbf{u})$  sur  $\Gamma_u$ , de sorte qu'un critère de raideur moyen équivalent à la compliance est donné par le travail des réactions :

$$\int_{\Gamma_u} \mathbf{t}(\mathbf{u}) \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma \quad (2.67)$$

En notant que dans le cas présent, la propriété (2.23) permet encore de relier les différentes énergies mises en jeu :

$$\int_{\Gamma_u} \mathbf{t}(\mathbf{u}) \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma = \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 2\Pi(\mathbf{u}) \quad (2.68)$$

Il s'ensuit qu'en présence de déplacements imposés non nuls, le problème de raideur maximale consiste à *maximiser l'énergie potentielle de déformation* ou à maximiser l'énergie potentielle totale du système.

#### *Une approche unifiée des différentes formulations*

Dès lors, une contradiction apparaît dans le choix de la fonction objectif à adopter. La compliance n'est utilisable qu'en présence de conditions aux limites cinématiques homogènes (fixations). L'énergie potentielle élastique doit être tantôt minimisée tantôt maximisée, de sorte qu'il n'est pas possible de l'utiliser pour une structure soumise à la fois à des déplacements et à des tractions de surface non nuls. La seule grandeur qui permette de réconcilier les deux approches est l'énergie potentielle totale  $\Pi(\mathbf{u})$ . Son utilisation permet d'unifier les formulations et de ne plus s'interroger sur le sens physique d'une maximisation ou d'une minimisation, puisque dans tous les cas, la structure la plus raide est celle qui maximise la quantité  $\Pi(\mathbf{u})$ . En conséquence, on adopte dans tous les cas la formulation suivante pour le problème de topologie :

$$\begin{aligned} \max_{E_{ijkl} \in E_{ad}} \quad & \Pi(\mathbf{u}) \\ \text{avec} \quad & \cdot V \leq \bar{V} \\ & \cdot \mathbf{a}_E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0. \end{aligned} \quad (2.69)$$

En relaxant la condition d'équilibre et en l'incluant dans le problème d'optimisation, on peut encore écrire le problème d'analyse et de conception simultanée :

$$\begin{aligned} \max_{E_{\text{mat}} \in E_{\text{ad}}} \quad & \min_{\mathbf{v} \in V_{\bar{u}}} \quad \Pi(\mathbf{v}) \\ \text{avec} \quad & . \quad V \leq \bar{V} \end{aligned} \quad (2.70)$$

### 2.3.3.2 Compliance généralisée

Pour être exhaustif, il faut signaler que, dans certains cas (par exemple Jog, Haber et Bendsøe, 1993), on préfère définir la fonctionnelle compliance généralisée de la structure, mesure de sa flexibilité :

$$J(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \mathbf{t}(\mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma \quad (2.71)$$

Quelles que soient les circonstances de la conception, la structure de raideur maximale correspond à celle qui minimise  $J(\mathbf{u})$ . En effet, le principe de superposition nous permet de décomposer toute mise en charge en une sollicitation par des forces et des tractions de surfaces imposées avec des déplacements nuls sur la frontière, suivie d'une sollicitation par des déplacements non homogènes. La simple addition des deux critères de raideur permet alors de retrouver l'expression (2.68) de  $J(\mathbf{u})$ .

On remarque que cette formulation, faisant appel à la compliance généralisée  $J(\mathbf{u})$ , ne contredit pas celle qui est basée sur l'énergie potentielle totale  $\Pi(\mathbf{u})$ . En réalité, il ne s'agit que d'une écriture équivalente au potentiel de l'énergie totale puisque le théorème de Clapeyron stipule qu'on a à l'équilibre :

$$\Pi(\mathbf{u}) = -J(\mathbf{u}) / 2 \quad (2.72)$$

Et l'on retrouve le problème du maximum de l'énergie potentielle totale énoncé plus haut.

### 2.3.4 Formulation équilibre du problème de conception

Dans l'approche cinématiquement admissible que nous avons adoptée jusqu'à présent, les déplacements élastiques sont les variables d'état du problème. Il est néanmoins tout à fait possible d'envisager le problème d'analyse sous son approche duale et de le réécrire en termes des contraintes. On se base sur l'égalité numérique (au signe près) qui existe entre l'énergie potentielle totale de déformation et l'énergie potentielle totale complémentaire écrite en fonction des contraintes :

$$\Pi(\mathbf{u}) = U - \mathbf{P} = -(U^c - \mathbf{P}^c) = -\Pi^c(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.73)$$

Celle-ci se démontre facilement à partir de la transformation de Legendre entre les densités d'énergie élastique  $u^c(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon} - u(\boldsymbol{\epsilon})$  et en appliquant le théorème de la divergence de Gauss.

Dès lors, de manière équivalente à la formulation (2.69) en approche déplacement, on a le problème de conception topologique en approche équilibre :

$$\begin{aligned} \min_{S_{ijkl} \in S_{ad}} \quad & \Pi^c(\boldsymbol{\sigma}) \\ \text{avec} \quad & \cdot V \leq \bar{V} \\ & \cdot \int_{\Omega} S_{ijkl} \sigma_{ij} \tau_{kl} d\Omega = \int_{\Gamma_u} n_j \tau_{ij} \bar{u}_i d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in S. \end{aligned} \quad (2.74)$$

L'ensemble  $S$  désigne l'ensemble de tous les tenseurs de contraintes symétriques en équilibre :

$$S = \left\{ \boldsymbol{\tau} \mid \tau_{ij} = \tau_{ji}, \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ sur } \Gamma_{\sigma} \right\} \quad (2.75)$$

On peut encore se débarrasser de la condition de minimum de l'énergie potentielle totale complémentaire en l'incluant dans le problème d'optimisation:

$$\begin{aligned} \min_{S_{ijkl} \in S_{ad}} \quad & \min_{\boldsymbol{\tau} \in S} \Pi^c(\boldsymbol{\tau}) \\ \text{avec} \quad & \cdot V \leq \bar{V}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

L'avantage de la formulation équilibre est qu'elle introduit deux minimisations, ce qui permet d'échanger le travail de minimisation sur la microstructure et sur les champs statiquement admissibles. Cette formulation est utilisée dans de nombreuses études théoriques pour démontrer l'existence et l'unicité du problème relaxé (Kohn, 1990, Allaire et Kohn, 1993a, 19993b). Un résumé de cette approche sera donné au chapitre 4.

### 2.3.5 Critère local ou critère global ?

Il est maintenant intéressant de justifier le choix d'un critère de raideur global. La structure de topologie optimale pourrait reposer sur le respect d'un critère local de rupture ou de plastification de la matière. On pourrait concevoir que la structure de meilleure topologie soit celle qui uniformise l'état de tension sur le domaine de conception.

Supposons que l'on puisse définir un critère de contrainte local caractérisé par une contrainte équivalente  $\tilde{\sigma}$ , le problème de conception est la recherche de la distribution de matière qui réduit le maximum de la contrainte équivalente de von Mises avec un volume de matière donné :

$$\begin{aligned} \min_{E_{ijkl} \in E_{ad}} \quad & \max_{\forall \mathbf{x} \in \Omega} \tilde{\sigma}(\mathbf{x}) \\ \text{avec} \quad & \cdot V \leq \bar{V} \\ & \cdot \mathbf{a}_E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \end{aligned} \quad (2.77)$$

On peut également définir la structure de topologie optimale comme étant la distribution de matière dont le volume est minimal et dont les tensions équivalentes sont bornées en tout point par une valeur admissible  $\sigma_{\max}$  :

$$\begin{aligned} \min_{E_{ijkl} \in E_{ad}} \quad & V \\ \text{avec} \quad & \cdot \tilde{\sigma}(\mathbf{x}) \leq \sigma_{\max} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ & \cdot \mathbf{a}_E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \end{aligned} \quad (2.78)$$

La première difficulté qu'il convient de résoudre dans ce cas est de définir un critère de contrainte locale de façon adéquate. En général, le matériau composite poreux est macroscopiquement orthotrope, de sorte qu'il est naturel de définir un critère de contrainte équivalente pour un matériau orthotrope. Une telle définition ne va pas cependant sans difficultés. On peut choisir un critère de rupture tel que Tsai-Hill. On ne possède cependant aucune information pour savoir si les critères de rupture habituels sont représentatifs de la ruine des matériaux composites poreux. On ne sait donc pas si la solution qui en ressort a une quelconque signification. A ce jour, la définition d'un critère macroscopique objectif n'est pas disponible.

D'autre part, il faut encore se demander si un critère macroscopique a un sens pour une distribution de microstructure. Il n'est pas exclu que l'on doive évaluer le critère au niveau microscopique, puisque la microstructure introduit une répartition non uniforme des tensions. Dans cette situation, le retour aux contraintes microscopiques augmente singulièrement la complexité du travail à fournir. Pour chaque état de déformation macroscopique, il est nécessaire de déterminer un état de contrainte au niveau local ainsi que le lieu et la manière d'évaluer le critère recherché.

Enfin, si tout ceci était possible et si l'on disposait d'une contrainte équivalente adéquate, il faudrait encore rechercher le *G-closure* de l'ensemble des matériaux composites pour ce critère de conception, c'est-à-dire les bornes optimales qui relient les propriétés homogénéisées effectives à la densité locale, à l'état local de contrainte et au critère de contrainte équivalente dans l'ensemble des composites poreux. Le problème du *G-closure* n'étant pas encore résolu pour le critère de l'énergie de déformation locale, a fortiori, il n'est pas envisagé à l'heure actuelle pour un critère de contrainte.

Malgré toutes ces questions sans réponses, il est possible de tirer certaines informations sur le problème de la contrainte maximale, en faisant certaines hypothèses simplificatrices. Dans le cadre de ces hypothèses, Bendsøe, Díaz et Kikuchi (1993) ont montré qu'il est possible de relier le critère moyen de la compliance minimale à la distribution des tensions locales dans la structure et que, dès lors, en pratique, elles sont concordantes et elles conduisent à des topologies très semblables.

On suppose que le matériau composite poreux reste dans le sous-ensemble des matériaux isotropes homogènes pour lequel on utilise le critère de von Mises. Ce qui signifie qu'on recherche la distribution de matière qui réduit le maximum de la contrainte équivalente de von Mises pour un volume de matière donné.

L'expression de la contrainte équivalente de Von Mises est donnée en fonction des valeurs des trois contraintes principales  $\sigma_p = \{\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}\}$  :

$$\tilde{\sigma}_{VM}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_p^T \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_p} \leq \sigma_{\max} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.79)$$



où  $\sigma_{\max}$  est la contrainte limite admissible et la matrice  $\mathbf{M}$  permet de calculer le critère :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

Par facilité, on raisonne sur une structure soumise à des fixations homogènes. A l'équilibre, la compliance et l'énergie de déformation sont identiques à un facteur près et on peut écrire :

$$l(\mathbf{u}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_p^T \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma}_p \, d\Omega \quad (2.81)$$

où  $\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1}$  est la matrice des souplesses, inverse de la matrice des coefficients élastiques, écrite pour les contraintes principales. Si le matériau est isotrope élastique linéaire caractérisé par un module de Young  $E$  et par un coefficient de Poisson  $\nu$ , elle est donnée par :

$$\mathbf{C} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

On peut établir les relations de bornation suivantes entre l'énergie de déformation et le critère :

- pour un problème tridimensionnel :

$$\begin{aligned} \cdot \frac{1}{E} \frac{2(1+\nu)}{3} \boldsymbol{\sigma}_p^T \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_p &\leq \boldsymbol{\sigma}_p^T \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma}_p \leq \frac{1}{E} \frac{1}{\nu} \boldsymbol{\sigma}_p^T \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_p & \text{si } \nu \neq \frac{1}{2} \\ \cdot \frac{1}{E} \boldsymbol{\sigma}_p^T \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_p &\leq \boldsymbol{\sigma}_p^T \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma}_p & \text{si } \nu = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.83)$$

- pour un problème en état plan de tension :

$$\frac{1}{E} \frac{2(1+\nu)}{3} \boldsymbol{\sigma}_p^T \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_p \leq \boldsymbol{\sigma}_p^T \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma}_p \leq \frac{1}{E} 2(1-\nu) \boldsymbol{\sigma}_p^T \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_p \quad (2.84)$$

- pour un problème en état plan de déformation :

$$\frac{1}{E} \frac{2(1+\nu)}{3} \boldsymbol{\sigma}_p^T \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_p \leq \boldsymbol{\sigma}_p^T \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma}_p \leq \frac{1}{E} \frac{2(1-\nu+6\nu^2)}{(1+2\nu)^2} \boldsymbol{\sigma}_p^T \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_p \quad (2.85)$$

Pour le problème tridimensionnel, on peut alors montrer qu'en tout point de  $\Omega$ , la contrainte de comparaison locale est bornée par une expression faisant intervenir la densité d'énergie de déformation.

$$\tilde{\sigma}_{VM} \leq \sqrt{\frac{3E}{4(1+\nu)} \boldsymbol{\sigma}_p^T \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma}_p} \quad (2.86)$$

On injecte cette relation dans la forme de l'énergie interne de déformation afin de relier la compliance et le critère de von Mises local :

$$\int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{VM}^2 d\Omega \leq \frac{3E}{4(1+\nu)} \int_{\Omega} \sigma_p^T C \sigma_p d\Omega \leq \frac{3E}{4(1+\nu)} l(\mathbf{u}) \quad (2.87)$$

En supposant que la solution soit caractérisée par une distribution uniforme de tension sur la structure générée (c'est-à-dire que le *fully stressed design* soit l'optimum recherché), on est à même de calculer pour la compliance une valeur cible cohérente avec la borne imposée sur les tensions locales :

$$\bar{l} = \frac{4(1+\nu)}{3E} \sigma_{\max}^2 \text{mes}(\Omega) \quad (2.88)$$

expression dans laquelle  $\text{mes}(\Omega)$  est la mesure du domaine de conception c'est-à-dire la surface de  $\Omega$  en deux dimensions.

Il faut cependant savoir que si on minimise la compliance, la tension locale ne doit pas obligatoirement être uniforme sur la structure. Dans une approche par un critère moyen, la tension peut dépasser localement la borne  $\sigma_{\max}$  même si la valeur cible de la compliance est petite. En fait, une formulation intégrée ne peut pas garantir les valeurs locales, ce qui peut être un inconvénient. Toutefois, on doit aussi envisager le revers de la médaille des critères locaux. La formulation locale est pénalisée par la présence des concentrations de contraintes ou des singularités introduites par la modélisation des charges concentrées ou des fixations ponctuelles. Dans ce cas, les concentrations de contraintes relèvent le niveau moyen, de sorte que la valeur locale admissible est renforcée partout dans la structure. La conception qui en résulte est alors dominée par les pics locaux et conduit habituellement à l'apparition de structures constituées d'éléments concentrés (de type treillis de barres ou portiques), alors que les formulations intégrées sont plus favorables à la génération de formes bidimensionnelles ou tridimensionnelles. Pour éviter les inconvénients liés à la présence de charges et de supports concentrés, on peut exclure les voisinages des points de concentration de tension et ne considérer qu'un domaine  $\Omega_0$  plus restreint excluant le voisinage des singularités. On ne considère alors la contrainte de tension que sur  $\Omega_0$  :

$$\tilde{\sigma}_{VM}(\mathbf{x}) \leq \sigma_{\max} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_0 \subset \Omega \quad (2.89)$$

D'autre part, on remarque qu'en pratique, la condition de *fully stressed design* est généralement bien approchée par la solution de la compliance minimale, hormis peut-être en certaines régions singulières. Cette constatation peut facilement se comprendre, étant donné qu'une quantité relativement importante d'énergie de déformation est présente dans les zones de forte concentration de contrainte. Ces zones deviennent, dès lors, indésirables pour la minimisation de l'énergie et le processus d'optimisation a naturellement avantage à les éliminer. Enfin, on peut signaler que l'on peut ajuster la valeur cible de la souplesse donnée en (2.88) en supprimant le voisinage des singularités pour atteindre la valeur limite sur  $\Omega_0$ .

On conclut de deux façons.

D'abord, il faut remarquer que la formulation intégrée basée sur la compliance et les approches locales peuvent être réconciliées. En pratique, les deux approches conduisent à des topologies globalement semblables. Le respect de bornes locales sur les tensions peut être satisfait dans une large partie de la structure en excluant éventuellement certaines singularités. Il est donc difficile de rejeter la formulation basée sur la valeur intégrée de la souplesse au profit d'une approche locale et vice versa.

Ensuite, le résultat de topologie basé sur le minimum de la compliance est un point de départ de très

bonne qualité pour une optimisation de forme paramétrique, même si l'optimisation de forme est basée sur la considération de critères différents : le critère de von Mises local par exemple.

### 2.3.6 Introduction d'une borne sur le périmètre de la solution

Si l'introduction de matériaux composites poreux permet de régulariser le problème fondamental de la topologie (minimum de la compliance pour un volume de matière donné), il existe une autre manière pour s'assurer de l'existence de la solution. La régularisation du problème peut être réalisée de façon élégante par la considération d'une restriction supplémentaire portant sur le périmètre de la distribution de matière. Si le périmètre est borné, c'est-à-dire si la longueur totale des frontières de la structure est limitée, on limite également l'ensemble des domaines de matière admissibles. Dans cet ensemble de solutions de périmètre borné, Ambrosio et Buttazzo (1993) ont pu démontrer que la solution existe et est unique même si le problème de conception est résolu de manière discrète avec les valeurs 0-1.

Si  $\Omega_m$  est le domaine occupé par la matière au sein du domaine de conception  $\Omega$ , le périmètre du domaine rempli par le solide se définit par :

$$|\partial\Omega_m| = \text{Per}(\Omega_m, \Omega) = \left\{ \int_{\Omega_m} \text{div } \boldsymbol{\varphi} \, d\Omega \mid \boldsymbol{\varphi} \in C_c^1(\Omega, \mathbf{R}^n), |\boldsymbol{\varphi}| \leq 1 \right\} \leq \bar{P} \quad (2.90)$$

Cette restriction ne modifie en rien la nature discrète du problème et ne change en rien les difficultés énormes liées à sa résolution par des algorithmes discrets. La théorie a, néanmoins, été mise à l'honneur par Haber, Jog et Bendsøe (1994) eu égard à son aptitude à contrôler les solutions obtenues dans lesquelles les densités intermédiaires sont pénalisées de manière artificielle. On sait que la régularisation du problème n'est assurée que si la relaxation du problème est complète. Dès lors, l'emploi d'une microstructure suboptimale peut rendre à nouveau le problème instable. La limitation ou la pénalisation du périmètre empêche l'apparition d'oscillations spatiales rapides de la solution lorsque l'on raffine le maillage, phénomène marquant la résurgence de microstructures au niveau macroscopique. En effet, la variation rapide des propriétés matérielles introduit une forte augmentation du périmètre de la solution. Dans la méthode d'homogénéisation, la densité varie de manière continue et l'on doit substituer à la définition précédente une nouvelle définition du périmètre basée sur la différentielle totale de la densité :

$$\text{Per}(\boldsymbol{\rho}, \Omega) = \left\{ \int_{\Omega} \boldsymbol{\rho} \, \text{div } \boldsymbol{\varphi} \, d\Omega \mid \boldsymbol{\varphi} \in C_c^1(\Omega, \mathbf{R}^n), |\boldsymbol{\varphi}| \leq 1 \right\} \leq \bar{P} \quad (2.91)$$

On résout alors le problème du minimum de la compliance ou de l'énergie potentielle totale en général sous les contraintes d'un volume et d'un périmètre bornés. La résolution du problème de topologie avec une contrainte de périmètre sera abordée au chapitre 6.

$$\begin{aligned}
& \max_{E_{ijkl}, \rho \in U_{ad}} \quad \Pi(\mathbf{u}) \\
& \text{avec} \quad \cdot V(\rho) \leq \bar{V} \\
& \quad \cdot P(\rho) \leq \bar{P} \\
& \quad \cdot \mathbf{a}_E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0.
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Nous montrerons également que le contrôle du périmètre est favorable à l'obtention de solutions numériquement stables, exemptes de distribution de densité parasite telle que la distribution en damier.

### 2.3.7 Utilisation de fonctions de coût autres que la densité locale et le volume de matière

Même si la densité locale et le volume sont des fonctions de coût fort pratiques pour l'ingénieur, il est possible d'en imaginer et d'en utiliser d'autres. On peut évidemment considérer le coût de fabrication de matériau par unité de volume. On peut y inclure une pénalisation des matériaux poreux de densités intermédiaires par un coût supplémentaire de production consécutif à leur microstructure. Mais ces variantes de la densité locale ne changent guère les traits fondamentaux du problème et par conséquent de la solution.

Pour le problème de topologie avec paramétrisation libre du tenseur d'élasticité, il n'est pas possible de lier les composantes du tenseur au volume. Il faut envisager une autre fonction de coût. Bendsøe *et al.* (1993) et Bendsøe *et al.* (1994) ont proposé différentes fonctions exprimées directement en termes du tenseur de raideur. Ces coûts sont fonctions des invariants du tenseur, afin d'être indifférents à la définition du repère. Ainsi, il est proposé de choisir comme coût local soit la trace de  $\mathbf{E}$  ou soit sa norme Frobenius :

$$\begin{aligned}
\Psi_A(\mathbf{E}) &= \rho_A = E_{ijij} = E_{1111} + E_{2222} + 2E_{1212} \\
\Psi_B(\mathbf{E}) &= \rho_B^2 = E_{ijkl}E_{ijkl} = E_{1111}^2 + E_{2222}^2 + 2E_{1122}^2 + 4E_{1212}^2 + 4E_{1112}^2 + 4E_{2212}^2
\end{aligned} \tag{2.93}$$

Le problème d'optimisation modifié s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
& \max_{E \geq 0} \quad \min_{\mathbf{v} \in V_{\bar{u}}} \quad \Pi(\mathbf{v}) \\
& \text{avec} \quad \int_{\Omega} \Psi(\mathbf{E}) d\Omega \leq \bar{V}
\end{aligned} \tag{2.94}$$

La contrainte de coût est linéaire dans le cas A et quadratique dans le cas B.

Pour ces fonctions de coût, Bendsøe *et al.* (1993) et Bendsøe *et al.* (1994) ont établi l'ensemble des tenseurs d'élasticité optimaux pour tout champ de déformation donné et pour une densité locale fixée. Le problème d'optimisation se transforme alors en un problème de distribution optimale de densité dont le formalisme est tout à fait similaire à celui que l'on obtient lors de l'optimisation de treillis (Ben-Tal, Bendsøe, 1992 et Achtziger *et al.* 1991). La présente formulation peut être vue comme une unification des problèmes d'optimisation topologique de structures continues et des problèmes de topologie de treillis. Fait encore plus remarquable, on montre également qu'il s'agit d'un des très rares exemples de problèmes de conception avec paramètres distribués où la solution du problème existe

dans  $L^\infty(\Omega)$ . On ne doit recourir à aucun procédé de régularisation que ce soit sous la forme d'une relaxation, de l'introduction d'une microstructure ou d'une restriction de l'espace de conception. Le problème de paramétrisation libre du tenseur d'élasticité permet alors de dégager une borne minimale absolue sur les performances de toute structure soumise à des charges et à des conditions limites sur un domaine de conception donné. Dans le même temps, on en retire une borne supérieure variationnelle sur les modules effectifs de tous matériaux élastiques.

## 2.4 Illustration numérique de différentes formulations du problème de topologie

Une comparaison entre les différentes façons de poser le problème de topologie peut être illustrée sur le problème de conception suivant. On désire construire une structure capable de supporter une charge répartie parallèle aux fondations et située à une distance de 1.0 m de celles-ci. Les données géométriques du problème sont représentées à la figure 2.6. Le solide de référence est de l'acier. La charge par unité de longueur  $p_0$  choisie vaut -1000 N/m. Les données sont en unités internationales MKS. La matière travaille en cisaillement. La solution est intuitivement évidente: elle est constituée de deux membres structuraux orientés à  $\pm 45^\circ$  par rapport à la fondation comme un treillis deux barres à  $\pm 45^\circ$ .

Le domaine est discrétisé par 50x20 éléments finis. La microstructure choisie est un matériau feuilleté de rang 2, qui donne une microstructure optimale pour un seul cas de charge statique, comme il sera montré plus tard. Le problème d'optimisation comporte 3000 variables de conception. La figure 2.7a représente la solution du problème du minimum de la complianc pour un volume de matière limité à 30% du volume de référence. Après 90 itérations, la complianc de la distribution optimale vaut  $l^* = 0.6215E-2$  Nm. Le même problème est résolu en minimisant le volume

de matière avec une borne supérieure sur la complianc, de valeur identique à celle obtenue lors de la première optimisation. Comme le montre la figure 2.7b, la conception est strictement équivalente ainsi que l'on pouvait s'y attendre. Enfin, à la figure 2.7c, on visualise la carte des contraintes de von Mises. On y voit une distribution assez uniforme des contraintes équivalentes sur les deux membres structuraux. Le niveau de contrainte est cependant beaucoup plus élevé dans un triangle autour de la mise en charge. Dans les zones de faible densité, ce sont les contraintes de borne sur la densité minimale qui sont actives et la solution n'y est plus gouvernée par la contrainte équivalente maximale. On peut calculer l'estimation du niveau de contrainte moyen équivalent à l'aide de la formule (2.88) et de la valeur de la complianc optimale. On trouve:  $\sigma_{\max} = 0,5488$  MPa. Si maintenant, on ne considère que la partie de la solution qui contient de la matière, soit 30% environ, et si l'on rentre pour le volume du domaine de conception  $0.3 \cdot \text{mes}(\Omega)$ , on trouve une meilleure estimation de la contrainte:  $\sigma_{\max} = 1,002$  MPa. Cette valeur est une corrélation très satisfaisante avec le résultat numérique obtenu si l'on tient compte des différents facteurs défavorables qui entachent cette valeur numérique : la concentration de contrainte autour de la charge, le fait que le critère de von Mises n'est pas significatif pour un matériau feuilleté de rang 2 orthotrope poreux, l'existence de larges zones résiduelles de densité intermédiaire et le fait que dans les endroits de très faible densité la solution est gouvernée par la borne minimale sur la densité.

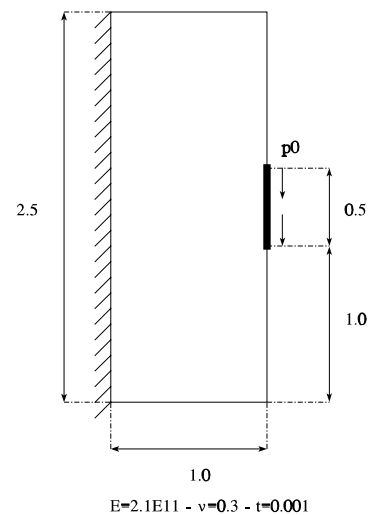


Figure 2.6 : Problème du treillis 2 barres

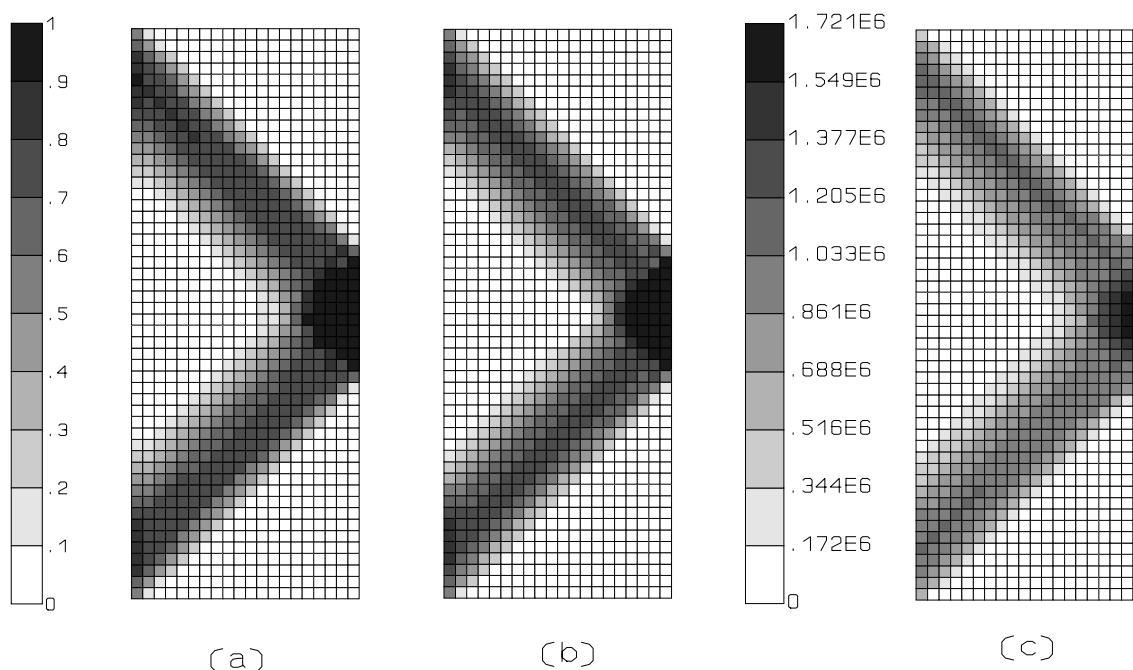


Figure 2.7: Distribution de la densité: (a) et (b) et de la contrainte de von Mises (c) pour le problème du treillis 2 barres

## 2.5 Extension du problème fondamental de la topologie à d'autres problèmes de conception

### 2.5.1 Extension du problème fondamental de la topologie aux problèmes avec plusieurs cas de charge

#### 2.5.1.1 Position du problème

Le problème fondamental de la topologie s'intéresse à une structure sous un chargement statique unique. L'extension du problème fondamental au traitement de structures soumises à plusieurs conditions de chargement se révèle particulièrement intéressante à plusieurs égards. Tout d'abord, il est fréquent, dans la pratique de l'ingénieur, de devoir effectuer la conception d'un composant mécanique sollicité de plusieurs manières fondamentalement différentes. Il est tout à fait improbable que la meilleure topologie soit la topologie optimale pour chacun des cas de charge pris séparément. De plus, il n'est pas inhabituel de rencontrer des topologies optimales pour un chargement unique qui soient statiquement déterminées pour les charges imposées, mais hypostatiques pour d'autres sollicitations. Ce fait a été largement mis en évidence par Kirch (1989) pour les treillis. La prise en compte de différentes sollicitations lève généralement cette instabilité. D'autre part, le passage d'un chargement unique à des chargements multiples soulève un intérêt théorique. Les difficultés rencontrées lors de la résolution de ce nouvel énoncé ont mis l'accent sur les faiblesses et les lacunes de la formulation. Le défi des cas de charges multiples a alors relancé le débat et a permis d'approfondir la connaissance des phénomènes mécaniques mis en jeu.

### 2.5.1.2 Formulation du problème fondamental de la distribution optimale de matière en dynamique des structures continues

Considérons une structure sollicitée par des chargements en nombre  $nc$ . Notons les grandeurs relatives à chaque cas de chargement par un indice supérieur. Le cas de charge  $k$  ( $k=1,..,nc$ ) est caractérisé par les charges  $f^k, \bar{t}^k$  qui donnent lieu à la compliance :

$$l^k(\mathbf{u}^k) = \int_{\Omega} f_i^k u_i^k d\Omega + \int_{\Gamma_o} \bar{t}_i^k u_i^k d\Gamma \quad (2.95)$$

Díaz et Bendsøe (1992) proposent de minimiser une combinaison linéaire convexe des compliances relatives à chaque sollicitation pour un volume de matière donné :

$$\begin{aligned} \min_{E_{ijkl} \in E_{ad}} \quad & \sum_{k=1}^{nc} w^k l^k(\mathbf{u}^k) \\ \text{avec} \quad & \cdot \text{Volume} \leq \bar{V} \\ & \cdot a_E(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) = l^k(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \quad (k=1, nc) \end{aligned} \quad (2.96)$$

Cependant, il n'existe aucune manière objective de sélectionner les coefficients de poids  $w^k$ . De plus, nous pensons que les facteurs de poids et les facteurs d'échelle des charges appliquées font double emploi. Nous savons, en effet, que la compliance est proportionnelle au carré des facteurs d'échelle des charges, tandis que les poids  $w^k$  sont des coefficients dans la combinaison linéaire. De la sorte, la fonction objectif n'est nullement altérée si on augmente toutes les charges par un facteur  $f$  et que l'on divise le poids par  $f^2$ . Pour notre part, nous préférons recourir à une formulation de type "min-max" :

$$\begin{aligned} \min_{E_{ijkl} \in E_{ad}} \quad & \max_{k=1, nc} l^k(\mathbf{u}^k) \\ \text{avec} \quad & \cdot \text{Volume} \leq \bar{V} \\ & \cdot a_E(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) = l^k(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \quad (k=1, nc) \end{aligned} \quad (2.97)$$

Nous montrerons, au chapitre 3, que les conditions d'optimalité du problème de type min-max conduisent à un problème d'optimisation identique à celui généré par (2.96), mais en déterminant, cette fois, de manière objective la valeur des coefficients de poids en fonction des multiplicateurs de Lagrange associés au problème. La forme non différentiable du problème "min-max" peut encore être levée en introduisant une variable auxiliaire  $\beta$  (Taylor, 1980).

C'est sous cette forme que nous résolvons le problème :

$$\begin{aligned}
 & \min_{E_{ijk} \in E_{ad}} \quad \beta \\
 & \text{avec} \quad . \text{Volume} \leq \bar{V} \\
 & \quad . l^k(\mathbf{u}^k) \leq \beta \quad (k=1,nc) \\
 & \quad . a_E(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) = l^k(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \quad (k=1,nc)
 \end{aligned} \tag{2.98}$$

Il faut signaler, aussi, que la formulation (2.97) a été citée pour la première fois par Fukushima, Suzuki et Kikuchi (1993), mais, à notre connaissance, ils ne l'ont jamais utilisée, car elle est inexploitable avec l'approche par critère d'optimalité qu'ils utilisent. L'originalité de notre démarche est d'aborder et de résoudre le problème de "min-max" grâce à une technique d'optimisation basée sur un algorithme de programmation mathématique. Pour être complet, il nous faut encore dire que Mlejnek (1993) utilise également la formulation (2.97), mais il emploie la formulation "min-max" moyennant l'approximation différentiable de Kreisselmeier-Steinhauser du problème de max. Enfin, récemment, Bendsøe, Lipton, Díaz et Taylor (1994) ont utilisé la formulation (2.97) pour la résolution théorique du problème d'optimisation topologique sous chargement multiple en travaillant avec une paramétrisation libre du tenseur d'élasticité.

Pour des conditions de chargement avec des conditions aux limites non homogènes sur les déplacements, on peut encore passer à l'énergie potentielle totale dans chaque cas de charge :

$$\begin{aligned}
 & \min_{E_{ijk} \in E_{ad}} \quad \max_{k=1,nc} \quad (-\Pi^k(\mathbf{u}^k)) \\
 & \text{avec} \quad . \text{Volume} \leq \bar{V} \\
 & \quad . a_E(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) = l^k(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \quad (k=1,nc)
 \end{aligned} \tag{2.99}$$

### 2.5.1.3 Exemple

Considérons à nouveau le domaine rectangulaire, encastré d'un côté et chargé le long du milieu du côté opposé. Si on applique une charge parallèle au bord, la structure est sollicitée en cisaillement et on a vu que la solution optimale est semblable à un treillis 2 barres. Intuitivement, on sait que si la charge est dirigée perpendiculairement à la paroi, la structure optimale est constituée par une sorte de colonne sous la charge. La structure optimale pour une combinaison des deux cas de charge est moins évidente à déterminer de façon précise. Si les charges de traction et de cisaillement ont des résultantes de même amplitude  $P$ , la solution est identique à la solution en cisaillement, car dans les deux cas de figures, l'effort repris dans la structure composée de deux membres à  $\pm 45^\circ$  est de  $\pm P/\sqrt{2}$  et les énergies potentielles des deux cas de charge sont identiques. Si la charge de traction est supérieure à la charge de cisaillement, les deux membres structuraux se rapprochent de la verticale. L'application numérique est basée sur une charge de traction qui vaut le double de la charge de cisaillement. La figure 2.8a reprend la distribution optimale pour la traction seule tandis que la figure 2.8b montre la configuration pour le cisaillement seul. Si on considère les deux cas de charge dans un même problème, la structure qui minimise le maximum des compliances est reprise à la figure 2.8c. L'angle intérieur formé par les membres structuraux et la fondation est cette fois supérieur à  $45^\circ$ , reflétant le compromis établi entre les solutions de traction et de cisaillement.



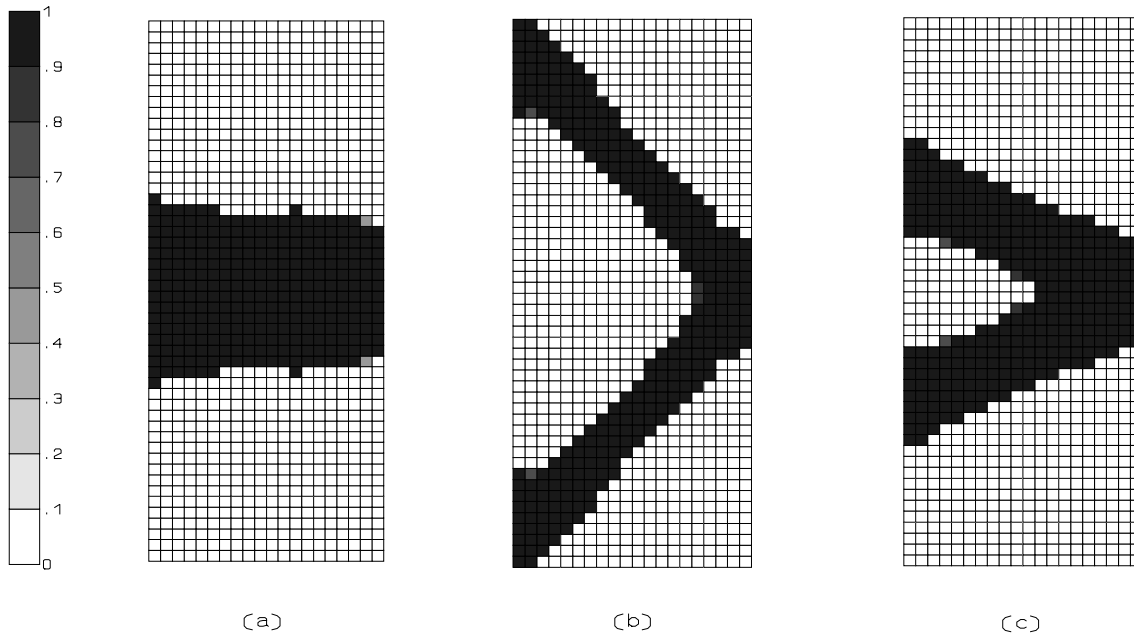


Figure 2.8: Solutions du treillis 2 barres pour une sollicitation en extension (a), en cisaillement (b), et une sollicitation combinée (c)

## 2.5.2 Formulation du problème d'optimisation topologique pour les structures en vibration

### 2.5.2.1 Position du problème

La prédiction de la topologie des structures peut être examinée sous son aspect vibratoire. Dans bien des situations, le comportement vibratoire d'un composant mécanique est primordial. Lorsqu'il est confronté à ce type de problème, l'ingénieur est, par exemple, amené à relever la fréquence propre fondamentale d'une structure. Le problème de conception peut aussi se poser en termes de relocalisation du comportement fréquentiel afin d'exclure certaines bandes de fréquence. Le choix d'une topologie structurale appropriée ou du renforcement optimal d'une pièce existante est une question d'un intérêt pratique crucial à laquelle l'optimisation topologique peut apporter une réponse originale.

### 2.5.2.2 Rappel des équations des problèmes dynamiques et vibratoires en mécanique des solides

#### Principe de d'Alembert

Lorsque l'on étudie le comportement élastodynamique des structures, les déplacements élastiques varient cette fois dans l'espace et dans le temps.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (2.100)$$

Les équations locales ne sont guère modifiées si ce n'est qu'en l'absence de frottements, l'équilibre dynamique des solides déformables s'obtient en appliquant le principe de d'Alembert.

On ajoute les forces d'inertie aux forces de volume.

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{t}) = -\rho \ddot{\mathbf{u}}_i + \bar{\mathbf{f}}_i(\mathbf{t}) \quad (2.101)$$

### Principe de Hamilton

Comme pour le principe des travaux virtuels, il est nécessaire de définir les différentes énergies du système. L'énergie cinétique du système est notée :

$$T(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}_i \dot{\mathbf{u}}_i \, d\Omega \quad (2.102)$$

Bien qu'elle puisse varier au cours du temps, l'énergie potentielle élastique totale  $\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{t})$  est toujours la somme de l'énergie potentielle de déformation et du travail des charges extérieures  $\Pi = U - P$ . L'énergie de déformation élastique est toujours donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} E_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}(\mathbf{t})) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}(\mathbf{t})) \, d\Omega \quad (2.103)$$

et l'énergie des charges externes par :

$$P = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}}_i(\mathbf{t}) u_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{\mathbf{t}}_i(\mathbf{t}) u_i \, d\Gamma \quad (2.104)$$

Comme dans le cas statique, on peut encore trouver une forme faible des équations de comportement connue sous le nom de **principe de Hamilton**. Parmi toutes les trajectoires admises pour le système, soumises aux conditions restrictives :

$$\delta \mathbf{u}(t_1) = \delta \mathbf{u}(t_2) = \mathbf{0} \quad (2.105)$$

aux extrémités de l'intervalle temporel considéré  $[t_1, t_2]$ , la trajectoire réelle du système est celle qui rend stationnaire l'action au sens de Lagrange et Hamilton :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T(\mathbf{u}, \mathbf{t}) - \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{t})) \, dt = 0 \quad (2.106)$$

Si on impose des déplacements non homogènes sur  $\Gamma_{\mathbf{u}}$ , les champs de déplacement doivent vérifier a priori ces conditions aux limites cinématiques. Ils doivent également être suffisamment continus. Ils sont donc choisis parmi l'ensemble  $V_{\bar{\mathbf{u}}}$  :

$$V_{\bar{\mathbf{u}}} = \{ \mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i \text{ avec } v_i \in H^1(\Omega) : \mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}} \text{ sur } \Gamma_{\mathbf{u}} \} \quad (2.107)$$

On peut également définir l'ensemble  $V_0$  des déplacements cinématiquement admissibles satisfaisant uniquement à des conditions aux limites homogènes sur  $\Gamma_u$  :

$$V_0 = \{ \mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i \text{ avec } v_i \in H^1(\Omega) : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_u \} \quad (2.108)$$

### Vibrations libres

En l'absence de charges extérieures, les vibrations libres du système sont des solutions périodiques de type sinusoïdales. On recherche donc des solutions du type:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \quad (2.109)$$

Les pulsations propres  $\omega^2$  et les modes propres  $\mathbf{u}$  du système sont les solutions propres de l'équation aux valeurs propres. Le principe de Hamilton se transforme sous une autre forme variationnelle faisant appel aux formes bilinéaires d'énergie:

$$\mathbf{u} \in V_{\bar{u}} \quad \mathbf{a}_E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \omega^2 \mathbf{b}_\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \quad (2.110)$$

La forme bilinéaire  $\mathbf{a}_E(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  représente le travail virtuel des forces élastiques internes:

$$\mathbf{a}_E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \quad (2.111)$$

tandis que la forme  $\mathbf{b}_\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  introduit le travail virtuel des forces d'inertie :

$$\mathbf{b}_\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{v} d\Omega \quad (2.112)$$

Les vecteurs propres  $\mathbf{u}$  n'étant définis qu'à un facteur multiplicatif près, il est habituel de définir une norme au moyen de la convention de la masse généralisée unitaire :

$$\mathbf{b}_\rho(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1 \quad (2.113)$$

### Discrétisation en éléments finis

Comme pour un problème statique, on discrétise la solution spatiale en éléments finis :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{q} \quad (2.114)$$

L'énergie de déformation génère une matrice de raideur identique à sa forme statique. La discrétisation de la forme  $\mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  représentative du travail virtuel des charges d'inertie introduit la matrice de masse du système :

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad (2.115)$$

L'équation du comportement dynamique du solide est l'équation différentielle :

$$\mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{g}(t) \quad (2.116)$$

L'équation aux valeurs propres des vibrations libres prend la forme connue :

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.117)$$

### 2.5.2.3 Formulation du problème fondamental de la distribution optimale de matière en dynamique des structures continues

Dans un premier temps, il est instructif de considérer le problème fondamental dans lequel on cherche à relever la fréquence propre fondamentale d'une structure continue en limitant le volume de matière utilisé. Compte tenu du fait que la masse de la structure est fixée, la structure recherchée est la structure la plus raide selon le critère dynamique sélectionné. Sous cet aspect, cette formulation fournit une alternative au critère de compliance minimale. Le problème d'optimisation topologique s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \max_{E_{ijkl}, \rho \in E_{ad}} \quad \omega_{\min}^2 \\ & \text{avec} \quad . \text{Volume} \leq \bar{V} \\ & \quad . a_E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \omega_{\min}^2 b_\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \\ & \quad . \text{autres contraintes de conception.} \end{aligned} \quad (2.118)$$

De manière équivalente, on peut rechercher la structure de volume minimum dont la première fréquence propre soit supérieure à une limite imposée :

$$\begin{aligned} & \min_{E_{ijkl}, \rho \in E_{ad}} \quad \text{Volume} \\ & \text{avec} \quad . \omega_{\min}^2 \geq \underline{\omega}^2 \\ & \quad . a_E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \omega_{\min}^2 b_\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \\ & \quad . \text{autres contraintes de conception.} \end{aligned} \quad (2.119)$$

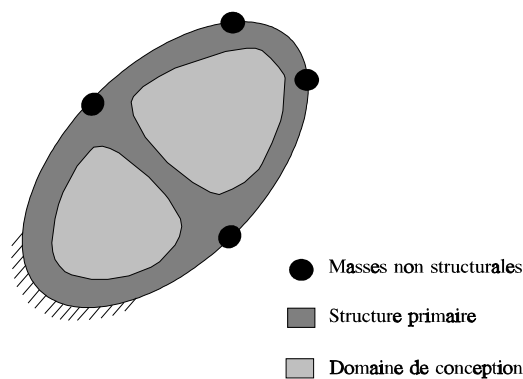


Figure 2.9: Problème de renforcement structural en vibration

Le problème de topologie se pose généralement comme un *problème de renforcement optimal*. On veut renforcer une structure primaire prédéfinie, parfois chargée par des masses non structurales. On dispose d'un volume de matière que l'on désire placer de manière optimale pour déplacer le comportement vibratoire du système vers les hautes fréquences. Ce problème possède l'avantage d'être bien posé et bien conditionné pour l'optimisation parce qu'il existe des raideurs et des masses inchangées durant la conception.

#### 2.5.2.4 Problème de topologie optimale sous forme d'une distribution de microstructure avec un matériau feuilleté de rang 2

Tout comme pour la conception des structures sollicitées statiquement, le problème de distribution de matière se transforme en une recherche de la répartition optimale des paramètres de microstructure sur le domaine de conception. Pour une seule fréquence propre, on peut utiliser la microstructure des matériaux feuilletés de rang 2. La densité de ce matériau est donnée par  $\rho(\mathbf{x}) = (\mu + \gamma - \mu\gamma)\rho^0$  où  $\rho^0$  est la masse volumique du solide. Ce problème de conception s'énonce alors comme suit :

$$\begin{aligned}
 & \max_{\gamma, \mu, \theta} \quad \omega_{\min}^2 \\
 & \text{avec} \quad \cdot \int_{\Omega} (\mu + \gamma - \mu\gamma) d\Omega \leq \bar{V} \\
 & \quad \cdot a_E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \omega_{\min}^2 b_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \\
 & \quad \cdot 0 \leq \gamma, \mu \leq 1.
 \end{aligned} \tag{2.120}$$

#### 2.5.2.5 Résolution des problèmes de croisement de fréquences propres

Il est possible qu'au cours du processus d'optimisation, le mode propre de la fréquence fondamentale soit modifié. Par exemple, il n'est pas rare de voir l'ordre des modes de flexion et de torsion s'inverser entre deux itérations du processus de conception. Ce phénomène peut introduire un ralentissement du processus de conception et même conduire à une instabilité de la convergence. On peut prévenir ce risque en considérant l'évolution des autres fréquences propres potentiellement dangereuses. Ces dernières sont incluses dans le problème d'optimisation par une formulation "min-max" similaire au traitement des problèmes statiques avec plusieurs cas de charge :

$$\begin{aligned}
 & \max_{E_{ijkl} \in E_{ad}} \quad \min_{k=1, nc} \quad \omega^k(\mathbf{u}^k) \\
 & \text{avec} \quad \cdot Volume \leq \bar{V} \\
 & \quad \cdot a_E(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) = \omega_k^2 b(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \quad (k=1, nc)
 \end{aligned} \tag{2.121}$$

On poursuit alors un développement similaire aux cas de charge multiples.

#### 2.5.2.6 Résolution des problèmes d'exclusion de bandes de fréquence

Il est également intéressant de rejeter la signature fréquentielle du composant mécanique en dehors des bandes de fréquence où les fréquences naturelles du système pourraient être excitées par d'autres pièces ou des sollicitations extérieures. On propose alors de résoudre le problème de type renforcement sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 & \min_{E_{ij} \in E_{ad}} \text{Volume} \\
 & \text{avec} \quad \cdot \underline{\omega}_k^2 \leq \omega_k^2 \leq \bar{\omega}_k^2 \quad (k=1, nf) \\
 & \quad \cdot a_E(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) = \omega_k^2 b(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \quad (k=1, nf)
 \end{aligned} \tag{2.122}$$

Le développement des conditions d'optimalité de ce problème sera effectué au cours du chapitre 3.

### 2.5.2.7 Exemple

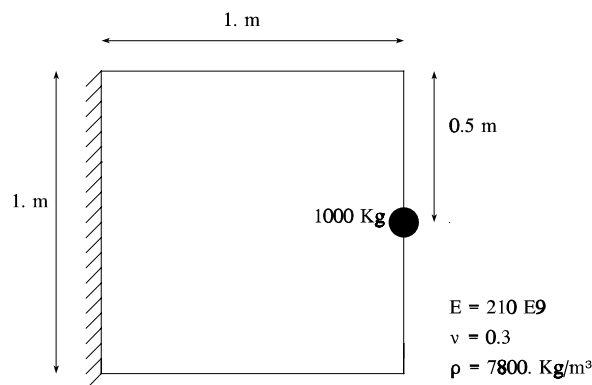


Figure 2.10 : Géométrie du problème de vibration avec renforcement optimal

Nous proposons d'illustrer la formulation du problème d'optimisation topologique des structures vibrantes par la recherche du renforcement optimal d'une plaque carrée. La structure primaire est constituée d'une plaque carrée de surface unitaire dont un des côtés est encastred et dont le côté opposé supporte, en son milieu, une masse concentrée de 1000 kg. Cette tôle est faite d'acier ( $E^0=210\text{E9 N/m}^2$ ,  $\nu=0.3$  et  $\rho^0=7800 \text{ kg/m}^3$ ) et a une épaisseur  $t=1\text{mm}$ . Le problème consiste à déterminer le renforcement optimal de la tôle de base par l'adjonction d'un ensemble de raidisseurs de masse limitée pour relever le comportement vibratoire du système. Le domaine de conception est obtenu en recouvrant le réseau des noeuds par un second maillage d'éléments finis au sein desquels la porosité sera variable. Les éléments de raidisseur ont une épaisseur de  $t=1\text{cm}$  et le solide de référence est toujours de l'acier. La densité moyenne du matériau à redistribuer dans le domaine de conception est de 30%, ce qui donne une masse de 23,4 kg à répartir de manière optimale pour augmenter le minimum des fréquences propres.

Le maillage comporte deux fois 400 éléments finis de membranes du second degré. Le matériau poreux est un matériau isotrope avec pénalisation des densités intermédiaires selon une loi cubique ( $p=3$ ). Le problème d'optimisation proprement dit comporte 400 variables de conception. On prend en compte les cinq premières fréquences propres de vibration pour éviter le croisement des fréquences propres. A posteriori, la procédure de min-max se révèle inutile, car le comportement fréquentiel est bien séparé et le reste durant l'optimisation. La première fréquence propre correspond au premier mode de flexion de la structure. Le second mode est un mode d'extension et le troisième mode est le deuxième mode de flexion. La figure 2.11 montre la distribution de matière optimale obtenue après

20 itérations avec les déplacements du mode de vibration fondamental. La distribution optimale de matière génère un système de raidisseurs en forme de V reliant la masse non structurale à la fondation.

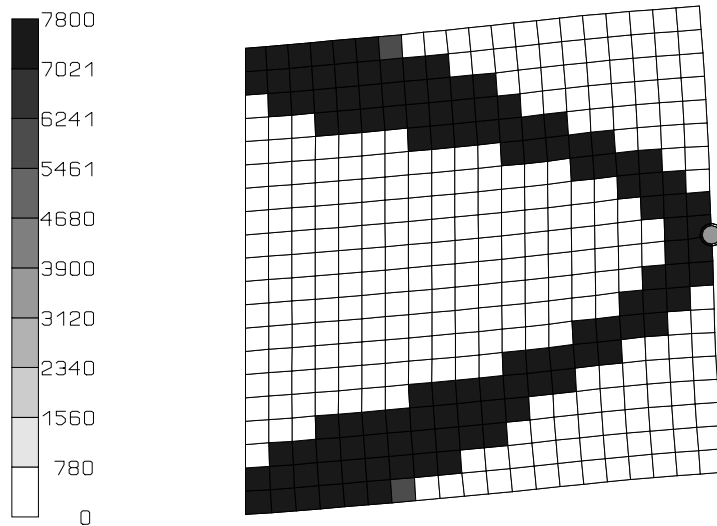


Figure 2.11 : Distribution optimale de matière et mode fondamental de vibration

Comme cela arrive souvent, le processus d'optimisation permet de relever simultanément tout le comportement fréquentiel. La première fréquence propre passe de 26,89 Hz à 52,11 Hz soit un facteur de 1,94 et un facteur de 3,73 sur la valeur propre fondamentale (carré de la pulsation propre). L'évolution des autres fréquences propres est similaire comme le montre le tableau 2.1.

Mode propre	Fréquences propres avant optimisation (Hz)	Fréquences propres après optimisation (Hz)
1	26,89	52,11
2	43,89	88,26
3	540,03	820,98
4	817,92	1394,22
5	860,40	1583,39

Tableau 2.1 : Fréquences propres de vibration avant et après optimisation

## 2.6 Conclusion

La première partie de ce chapitre nous a permis d'introduire les équations de la mécanique des solides élastiques sous un formalisme issu de l'analyse fonctionnelle et qui est, de ce fait, moins familier aux ingénieurs. Ce formalisme est cependant nécessaire pour placer l'optimisation topologique dans un cadre de travail rigoureux.

La seconde partie nous a permis de justifier la formulation du problème de topologie qui constitue l'objet de cette thèse. L'étude de la structure optimale, sans a priori sur sa topologie, est envisagée sous la forme d'une distribution de matière. Le problème fondamental de la topologie est l'étude de la distribution de compliance minimale sous l'action d'un ensemble des charges lorsque le volume du matériau est borné. Nous nous sommes particulièrement attachés à la justification des nouveaux concepts présentés et nous avons essayé de privilégier la compréhension physique des éléments du problème.

Nous avons vu ensuite comment l'énoncé du problème fondamental peut être généralisé ou complété pour répondre aux caractéristiques d'autres problèmes de conception réels. Le problème à plusieurs cas de charge est notamment crucial et il a fait l'objet de nombreuses controverses dans la littérature. Nous avons, pour notre part, adopté une formulation de type "min-max". A notre connaissance, la résolution du problème avec chargements multiples est originale lorsqu'elle est abordée sous cette forme.

Les problèmes vibratoires méritent, eux aussi, notre attention. Nous avons montré comment nous pouvions traiter ces problèmes à l'aide d'une distribution optimale de matière. Les problèmes de croisement de fréquences peuvent être ramenés à une procédure de type "max-min". Nous avons, aussi, proposé une solution au problème de placement du comportement vibratoire en dehors de certaines plages de fréquence.

Enfin, rappelons que nous avons essayé d'illustrer les différentes formulations introduites par une série d'exemples ou d'applications numériques simples afin de fixer ces nouveaux concepts de manière concrète.



# Chapitre 3 :

## ANALYSE DE SENSIBILITE, CONDITIONS D'OPTIMALITE ET PRINCIPES DE LA RESOLUTION DU PROBLEME D'OPTIMISATION TOPOLOGIQUE

### 3.0 Introduction

Après avoir posé le problème d'optimisation topologique des structures et en avoir esquissé les fondements généraux, nous allons maintenant nous pencher sur les principes de la résolution numérique. Le schéma de la résolution numérique est lié à l'examen de la nature de l'optimum et à l'analyse des conditions d'optimalité du problème de distribution de matière.

Pour formuler les conditions d'optimum, on doit d'abord aborder *l'analyse de sensibilité* des restrictions structurales impliquées dans le problème. Dans la première partie du chapitre, nous rappellerons donc brièvement la sensibilité des déplacements généralisés ainsi que la sensibilité d'une réponse structurale quelconque. Les dérivées des grandeurs énergétiques, comme la compliance méritent un soin tout particulier, compte tenu de leur importance en topologie. Pour ces grandeurs, on montrera, analytiquement, que les dérivées premières n'exigent pas la résolution de cas de charge additionnel, ce qui soulage fortement leur évaluation numérique. Outre l'analyse de sensibilité du premier ordre, qui est maintenant devenue classique, on présentera aussi l'estimation des dérivées secondes. En effet, l'émergence d'algorithmes du second ordre nécessite que l'on s'attache désormais à leur évaluation. Enfin, nous décrirons la manière dont nous avons mis en oeuvre l'analyse de sensibilité au sein de notre module de calcul.

La seconde partie du chapitre est consacrée à l'écriture des *conditions d'optimalité* et à l'étude de la nature de l'optimum pour différents énoncés du problème de topologie : d'abord, le problème fondamental, ensuite, le problème de cas de charges multiples et, enfin, le cas des bandes d'exclusion de fréquences. L'examen de ces conditions montre que, lorsqu'on linéarise le problème avec des approximations du premier ordre ou avec des approximations séparables du second ordre, le problème d'optimisation relatif aux variables de microstructure est découplé du problème d'optimisation relatif aux variables d'angle d'orthotropie. Ceci suggère, dès lors, une résolution séparée du problème pour les deux groupes de variables de conception. Le problème d'optimisation partiel dans lequel on considère les variables de microstructure est généralement complexe. Heureusement, ce problème d'optimisation est de nature semblable à l'optimisation de dimensionnement des structures minces, de sorte qu'on le traite au moyen de schémas classiques de résolution : remplacement des restrictions par leur approximation convexe séparable et résolution du problème approché par la méthode duale. La nature du problème angulaire est plus délicate. La littérature suggère de résoudre ce dernier problème d'optimisation par une technique de critère d'optimalité.

La troisième partie du chapitre présente une revue des résultats théoriques établis pour le *choix de l'angle d'orthotropie* correspondant à la raideur maximale. En état plan, la solution du problème de raideur maximale en présence d'un champ de déformation donné a été établie par Pedersen (1989, 1990) ainsi que par Gibiansky et Cherkaev (1988). L'extension de cette solution à une combinaison linéaire d'énergie de déformation est, par contre, attribuée à Díaz et Bendsoe (1992). En raison de leur importance en optimisation, un résumé de ces deux solutions sera présenté.

### 3.1 Analyse de sensibilité du premier et du second ordre en optimisation topologique

#### 3.1.1 Le problème statique

##### 3.1.1.1 Dérivées des déplacements généralisés

Nous abordons, à présent, l'évaluation des dérivées premières et secondes des réponses structurales en régime statique linéaire lorsqu'on modélise la structure par éléments finis. La théorie de ce type d'analyse de sensibilité est maintenant bien établie comme le prouve la synthèse fort complète que l'on peut trouver chez Haftka et Gürdal (1992) ou chez Haftka et Adelman (1993).

L'équilibre statique de la structure discrétisée en éléments finis est régi par l'équation

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{g} \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice de raideur du système discrétisé,  $\mathbf{q}$  représente les déplacements généralisés, inconnues du problème, et  $\mathbf{g}$  les charges conjuguées. La structure est décrite par  $n$  variables de conception que l'on note  $z$ . En optimisation topologique, chacune des variables de conception peut représenter indifféremment une variable d'angle ou un paramètre de microstructure.

La *dérivée première des déplacements généralisés* s'obtient facilement en différentiant chaque membre de l'équation d'équilibre par rapport à la variable de conception  $z_i$ . Pour chaque dérivée, on résout le système additionnel :

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z_i} = \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_i} \mathbf{q} \right) \quad (3.2)$$

L'évaluation de toutes les dérivées premières des déplacements généralisés requiert  $n$  substitutions arrières.

Les *dérivées secondes* s'obtiennent en dérivant deux fois les deux membres de l'équilibre :

$$\mathbf{K} \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial z_i \partial z_j} = \left( \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial z_i \partial z_j} - \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial z_i \partial z_j} \mathbf{q} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_i} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z_j} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_j} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z_i} \right) \quad (3.3)$$

Le calcul de toutes les dérivées secondes des déplacements généralisés demande pour sa part  $n(n+1)/2$  nouvelles substitutions arrières.

##### 3.1.1.2 Dérivées des grandeurs structurales

Après avoir été le sujet de nombreuses recherches, les principes de l'analyse de sensibilité des réponses structurales sont maintenant devenus presque classiques. Sous forme discrétisée, une évaluation économique des dérivées premières et secondes est due à Haftka (1982). On examine les dérivées premières et secondes des  $m$  contraintes portant sur des réponses structurales que comporte le problème. Chaque contrainte dépend des variables de conception et des déplacements généralisés :

$$c(\mathbf{z}, \mathbf{q}) \geq 0 \quad (3.4)$$

La différentiation en chaîne de l'équation de la contrainte permet d'obtenir

$$\frac{dc}{dz_i} = \frac{\partial c}{\partial z_i} + \mathbf{b}^T \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z_i} \quad (3.5)$$

où le vecteur  $\mathbf{b}$  rassemble les dérivées partielles de l'expression de la contrainte par rapport aux déplacements généralisés  $\mathbf{b}_i = \partial c / \partial \mathbf{q}_i$ . Sous cette forme, l'évaluation de la dérivée de la contrainte structurale demande d'abord la résolution des dérivées des déplacements généralisés, ce qui requiert  $n$  substitutions arrières.

Toutefois, lorsqu'il y a beaucoup plus de variables de conception que de restrictions, il est plus avantageux d'adopter la *méthode des charges virtuelles*. On définit la solution adjointe  $\mathbf{\Lambda}$  comme la solution du système :

$$\mathbf{K} \mathbf{\Lambda} = \mathbf{b} \quad (3.6)$$

On utilise alors la symétrie de la matrice de raideur pour obtenir une nouvelle expression des dérivées de la restriction :

$$\frac{dc}{dz_i} = \frac{\partial c}{\partial z_i} + \mathbf{\Lambda}^T \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_i} \mathbf{q} \right) \quad (3.7)$$

Pour la résolution de l'équation adjointe, la méthode des charges virtuelles demande une substitution arrière par contrainte, soit  $m$  substitutions arrières pour l'ensemble des contraintes.

Les *dérivées secondes* de la restriction peuvent s'obtenir en différentiant encore une fois l'équation de la contrainte :

$$\frac{d^2 c}{dz_i dz_j} = \frac{\partial^2 c}{\partial z_i \partial z_j} + \frac{\partial \mathbf{q}^T}{\partial z_j} \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z_i} + \frac{\partial \mathbf{b}^T}{\partial z_i} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z_j} + \frac{\partial \mathbf{b}^T}{\partial z_j} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z_i} + \mathbf{b}^T \frac{d^2 \mathbf{q}}{dz_i dz_j} \quad (3.8)$$

La matrice  $\mathbf{R}$  regroupe les dérivées partielles du second ordre de l'expression de la restriction par rapport aux déplacements généralisés :  $\mathbf{R}_{ij} = \partial^2 c / \partial \mathbf{q}_i \partial \mathbf{q}_j$ . L'expression des dérivées secondes, telle qu'elle vient d'être écrite, exigerait le nombre de  $n+(n+1)/2$  substitutions arrières. Haftka (1982) a fourni une expression beaucoup plus économique dans beaucoup de cas en introduisant l'expression des dérivées secondes des déplacements généralisés dans cette expression :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 c}{dz_i dz_j} = & \frac{\partial^2 c}{\partial z_i \partial z_j} + \frac{\partial \mathbf{q}^T}{\partial z_j} \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z_i} + \frac{\partial \mathbf{b}^T}{\partial z_i} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z_j} + \frac{\partial \mathbf{b}^T}{\partial z_j} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z_i} \\ & + \mathbf{\Lambda}^T \left( \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial z_i \partial z_j} - \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial z_i \partial z_j} \mathbf{q} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_i} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z_j} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_j} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z_i} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Cette dernière écriture n'exige plus que la résolution des systèmes (3.2) et (3.6) donnant, pour le premier, les dérivées premières des déplacements généralisés et, pour le second, l'évaluation des déplacements virtuels. Pour  $n$  variables de conception, ceci requiert  $n+1$  substitutions arrières pour une

restriction, et  $n+m$  substitutions arrières pour  $m$  contraintes.

### 3.1.1.3 Dérivées des grandeurs énergétiques

Il serait peu économique d'appliquer aux grandeurs énergétiques, les résultats généraux du paragraphe précédent. En effet, l'énergie de déformation n'exige aucun cas de charge additionnel de sorte que l'évaluation des dérivées peut être faite de façon plus efficace et plus économique. Les grandeurs énergétiques méritent un soin tout particulier, compte tenu de leur importance en optimisation topologique. Les résultats remarquables, concernant leur analyse de sensibilité, ne s'en trouvent que plus valorisés.

#### Dérivées des grandeurs énergétiques sous forme discrète

Il y a plusieurs grandeurs énergétiques : d'abord, l'énergie potentielle de déformation  $U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}$ , ensuite, la *compliance* ou énergie potentielle des charges  $\mathbf{P} = \mathbf{g}^T \mathbf{q}$ , enfin, l'énergie potentielle totale de la structure  $\Pi(\mathbf{q}) = U(\mathbf{q}) - \mathbf{P}(\mathbf{q})$ . A l'équilibre toutes ces grandeurs sont liées par la relation de Clapeyron :

$$\Pi(\mathbf{q}) = -U(\mathbf{q}) = -\frac{1}{2} \mathbf{P}(\mathbf{q}) \quad (3.10)$$

On se limite au développement des dérivées de l'énergie potentielle de déformation sachant que l'on peut facilement adapter ces résultats de dérivées aux autres grandeurs énergétiques.

Si l'on dérive l'expression de l'énergie potentielle de déformation et si l'on tient compte de la symétrie de la matrice de raideur, on a :

$$\frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial z_i} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_i} \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z_i} \quad (3.11)$$

Il serait prématuré de s'arrêter à cette expression, car il est nécessaire de déterminer les dérivées de déplacements généralisés pour connaître la valeur des dérivées de l'énergie. En poursuivant, on introduit la valeur des dérivées des déplacements (3.2) dans cette équation. On obtient alors une expression beaucoup plus intéressante qui ne demande plus aucune substitution arrière :

$$\frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial z_i} = -\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_i} \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z_i} \quad (3.12)$$

L'énergie étant une grandeur globale, mais localisée :  $U = \sum U_e$ , on peut évaluer les dérivées de l'énergie élément fini par élément fini. Si, de plus, la variable de conception  $z_i$  ne porte que sur un seul élément d'indice "e", alors la dérivée première de l'énergie admet l'expression suivante qui permet le calcul au niveau de l'élément :

$$\frac{\partial U_e(\mathbf{q})}{\partial z_i} = -\frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial z_i} \mathbf{q}_e + \mathbf{q}_e^T \frac{\partial \mathbf{g}_e}{\partial z_i} \quad (3.13)$$

Ce résultat est généralement connu sous le nom de *principe de localisation des dérivées de l'énergie*.

La formulation qui vient d'être exposée, et qui est souvent trop peu connue, permet de gagner un

temps de calcul considérable lors de l'analyse de sensibilité. Ce gain est très appréciable compte tenu de la discrétisation assez fine qui est nécessaire à la résolution du problème de topologie.

Les dérivées des autres grandeurs énergétiques s'obtiennent facilement par la relation de Clapeyron à l'équilibre. Pour la compliance et l'énergie potentielle des charges extérieures ainsi que pour l'énergie potentielle totale, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(\mathbf{q})}{\partial z_i} &= 2 \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial z_i} = -\mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_i} \mathbf{q} + 2 \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z_i} \\ \frac{\partial \Pi(\mathbf{q})}{\partial z_i} &= -\frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial z_i} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_i} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z_i}\end{aligned}\quad (3.14)$$

Pour avoir les *dérivées secondes*, on dérive une nouvelle fois l'équation donnant les dérivées premières :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z_i \partial z_j} = \frac{\partial \mathbf{q}^T}{\partial z_j} \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_i} \mathbf{q} \right) - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial z_i \partial z_j} \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial z_i \partial z_j} \quad (3.15)$$

Cette fois, la dérivée seconde exige le calcul des dérivées premières des déplacements généralisés et par conséquent l'exécution de  $n$  substitutions arrières. Le calcul des courbures est donc beaucoup plus onéreux.

On remarque par ailleurs que ce résultat est parfaitement en accord avec l'évaluation de Haftka (1982) pour une réponse structurale quelconque, car il s'agit simplement du cas particulier où  $m=0$  c'est-à-dire que le système adjoint est trivial et ne demande pas à être résolu. On a en effet :

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\Lambda} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{K}\mathbf{q} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{q} \quad (3.16)$$

Il s'agit tout simplement du cas particulier  $\boldsymbol{\Lambda}=\mathbf{q}$  dans l'approche du travail virtuel. La généralité de ce résultat est cependant plus large, puisque nous allons montrer qu'il reste valable pour toute structure continue faite d'un matériau hyperélastique.

#### *Formulation continue des dérivées de l'énergie potentielle élastique*

Les résultats remarquables que l'on vient d'obtenir ne sont pas une caractéristique de la formulation discrète. On peut démontrer un résultat identique pour des structures continues à partir de l'équation du principe des travaux virtuels :

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \quad (3.17)$$

Soit en développant :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}}^T \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_c} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{v} \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \quad (3.18)$$

En différenciant l'équation du principe des travaux virtuels et en tenant compte que  $\partial v / \partial z_i = \mathbf{0}$ , on a :

$$\int_{\Omega} \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}) \mathbf{H} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}{\partial z_i} + \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z_i} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \right\} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^T}{\partial z_i} \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \frac{\partial \bar{\mathbf{t}}^T}{\partial z_i} \mathbf{v} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \quad (3.19)$$

On recherche maintenant la dérivée de la forme bilinéaire de l'énergie de déformation :

$$\frac{\partial U}{\partial z_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{\partial z_i} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ 2 \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \mathbf{H} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}{\partial z_i} + \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z_i} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \right\} d\Omega \quad (3.20)$$

Après introduction de la dérivée du principe des travaux virtuels, on obtient la forme espérée :

$$\frac{\partial U}{\partial z_i} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z_i} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^T}{\partial z_i} \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \frac{\partial \bar{\mathbf{t}}^T}{\partial z_i} \mathbf{u} d\Gamma \quad (3.21)$$

#### Dérivées de l'énergie potentielle d'un matériau hyperélastique

Pedersen (1991) a également démontré que ce résultat reste valable dans le cadre plus général des matériaux hyperélastiques. On part de l'égalité des énergies potentielles totales directes et complémentaires :

$$U(\mathbf{h}, \boldsymbol{\varepsilon}) + U^c(\mathbf{h}, \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{P}(\mathbf{h}, \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{P}^c(\mathbf{h}, \boldsymbol{\sigma}) \quad (3.22)$$

Dans cette expression,  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{P}^c$  sont les travaux physiques et complémentaires des charges appliquées, tandis que  $U$  et  $U^c$  sont les énergies élastiques de déformation et de contrainte (énergie potentielle élastique complémentaire). Le paramètre  $z$  représente le champ des paramètres de conception alors que  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  sont les champs de déformation et de contrainte. On évalue la dérivée totale de cette équation par rapport au champ de variable de conception :

$$\frac{dU}{dz} - \frac{d\mathbf{P}}{dz} = -\frac{dU^c}{dz} + \frac{d\mathbf{P}^c}{dz} \quad (3.23)$$

En se souvenant que la variation des paramètres de conception possède un effet direct et un effet indirect par une modification des champs de déformation et de contrainte, on trouve par dérivation en chaîne :

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial z} = -\frac{\partial U^c}{\partial z} - \frac{\partial U^c}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{P}^c}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{P}^c}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial z} \quad (3.24)$$

On fait maintenant intervenir le principe des travaux virtuels, valable pour tout solide en équilibre. Pour les grandeurs physiques, le principe des travaux virtuels s'écrit en termes des variations du champ de déformation :

$$\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.25)$$

tandis que pour les énergies complémentaires, on considère une variation des contraintes :

$$\frac{\partial U^c}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \mathbf{P}^c}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.26)$$

En insérant les principes des travaux virtuels dans l'équation (3.24), on obtient enfin :

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial z} = - \left( \frac{\partial U^c}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{P}^c}{\partial z} \right) \quad (3.27)$$

Maintenant, on suppose (c'est la seule hypothèse que l'on a faite jusqu'à présent) que les charges sont mortes c'est-à-dire que les charges sont insensibles aux paramètres de conception  $\partial \mathbf{P} / \partial z = \mathbf{0}$  et  $\partial \mathbf{P}^c / \partial z = \mathbf{0}$ . On retrouve alors la relation de Masur (1970) liant les dérivées de l'énergie potentielle et de l'énergie potentielle complémentaire :

$$\left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{\boldsymbol{\epsilon}} = - \left( \frac{\partial U^c}{\partial z} \right)_{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.28)$$

Pour poursuivre les développements, il est nécessaire de connaître la forme de la relation entre l'énergie potentielle élastique et le travail des charges mortes. Supposons que cette relation s'exprime par une simple constante  $c$  :

$$U = cP \quad (3.29)$$

Dans le cas de l'élasticité linéaire, on a, évidemment,  $c=2$  et en général on a  $c>1$ , ce qui signifie qu'on dissipe de l'énergie. On dérive cette relation entre  $U$  et  $P$  :

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial z} = c \frac{\partial U}{\partial z} + c \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial z} \quad (3.30)$$

Si on suppose à nouveau que les charges sont mortes et si l'on injecte ce résultat dans l'équation du principe virtuel, on a :

$$\frac{\partial P}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial z} = \frac{c}{1-c} \frac{\partial U}{\partial z} \quad (3.31)$$

On obtient le résultat attendu pour la dérivée totale de l'énergie potentielle :

$$\frac{dU}{dz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial z} = \frac{1}{1-c} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (3.32)$$

Dans le cas de l'élasticité linéaire  $c=2$ , on retrouve le résultat obtenu précédemment :

$$\frac{dU}{dz} = - \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{\boldsymbol{\epsilon}} = \left( \frac{\partial U^c}{\partial z} \right)_{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.33)$$

En élasticité non linéaire, il est courant de rencontrer un modèle unidimensionnel non linéaire de type puissance, comme pour les alliages d'aluminium par exemple :

$$\sigma = E \varepsilon^p \quad (3.34)$$

Si les charges sont mortes, on identifie facilement le coefficient de proportionnalité de la relation (3.29) :  $c = 1+p$  et la sensibilité de l'énergie potentielle vaut :

$$\frac{dU}{dz} = -\frac{1}{p} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{\varepsilon} = \frac{1}{p} \left( \frac{\partial U^c}{\partial z} \right)_{\sigma} \quad (3.35)$$

En outre, les dérivées de l'énergie possèdent toujours la propriété d'être *localisées*. En effet, puisque l'énergie potentielle totale est la somme des énergies individuelles de chaque élément  $U = \sum U_e$ , la dérivée de l'énergie par rapport aux paramètres locaux  $z_e$ , comme ceux qui définissent les propriétés élastiques, peut être évaluée localement :

$$\frac{dU}{dz_e} = \frac{1}{1-c} \left( \frac{\partial U}{\partial z_e} \right) \quad (3.36)$$

### 3.1.2 Analyse de sensibilité des problèmes aux valeurs propres

#### 3.1.2.1 Dérivées premières des modes propres et des valeurs propres

Le problème de la sensibilité des valeurs propres et des vecteurs propres des problèmes de vibration et de stabilité a recueilli très tôt l'attention de la communauté scientifique. Le premier résultat connu est probablement l'insensibilité du quotient de Rayleigh vis-à-vis des modes propres. De même, l'étude de la sensibilité du quotient de Rayleigh a été faite par Wittrick dès 1962. Ceci explique la quantité des résultats disponibles et, de là, le fait qu'il ne nous est pas possible de fournir une revue exhaustive de ce problème. Nous nous contenterons de fournir un résumé en nous basant sur le travail de Kill et Gérardin (1984), de Haftka et Gürdal (1992) et de Haftka et Adelman (1993).

Les vibrations libres ou les charges critiques d'instabilité de la structure sont déterminées par une équation générale aux valeurs propres du type :

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.37)$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice de raideur discrétisée, où  $\mathbf{M}$  est soit la matrice de masse, soit la matrice de stabilité, et où les valeurs propres  $\lambda$  et les vecteurs propres  $\mathbf{q}$  sont les solutions propres du problème. Pour le problème des vibrations libres, les valeurs propres s'interprètent comme le carré des pulsations propres du système et les vecteurs propres représentent les modes propres de vibration. En analyse de stabilité, la valeur propre correspond au facteur de charge pour lequel le flambement de la structure survient avec un mode donné par le vecteur propre associé.

Comme les modes propres ne sont connus qu'à un facteur multiplicatif près, on les norme généralement au moyen d'une matrice définie positive  $\mathbf{W}$ . Pour le problème des vibrations, c'est souvent la matrice de masse qui sert à définir la norme des vecteurs propres :



$$\mathbf{q}^T \mathbf{W} \mathbf{q} = 1 \quad (3.38)$$

Dans une analyse simplifiée, on suppose que les valeurs propres sont toutes distinctes et rangées par ordre croissant :

$$0 < \lambda^{(1)} < \lambda^{(2)} < \dots < \lambda^{(n)} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}, \dots, \mathbf{q}^{(n)}$$

Pour connaître les dérivées premières des valeurs et des modes propres, on dérive successivement l'équation aux valeurs propres :

$$(\mathbf{K} - \lambda^{(k)} \mathbf{M}) \frac{\partial \mathbf{q}^{(k)}}{\partial z_i} = \frac{\partial \lambda^{(k)}}{\partial z_i} \mathbf{M} \mathbf{q}^{(k)} - \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_i} - \lambda^{(k)} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z_i} \right) \mathbf{q}^{(k)} \quad (3.40)$$

et l'équation de normalisation :

$$\mathbf{q}^{(k)T} \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{q}^{(k)}}{\partial z_i} = -\frac{1}{2} \mathbf{q}^{(k)T} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial z_i} \mathbf{q}^{(k)} \quad (3.41)$$

Il faut garder à l'esprit que la dérivation de ces équations n'a de sens que lorsque toutes les fréquences sont distinctes. Dans le cas où il existe des fréquences propres confondues, le problème est non différentiable et on ne peut plus parler que de dérivée directionnelle. Nous laisserons cependant de côté ce problème qui sort du cadre de cet exposé; on peut trouver dans la littérature des développements plus élaborés que ceux qui sont exposés ici (par exemple Haug, Komkov et Choi, 1983, ou, de manière plus simplifiée, Haftka et Adelman, 1993).

Les dérivées des valeurs propres se déduisent en prémultipliant la première des équations par le mode propre  $k$  :

$$\frac{\partial \lambda^{(k)}}{\partial z_i} = \frac{1}{m^{(k)}} \mathbf{q}^{(k)T} \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_i} - \lambda^{(k)} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z_i} \right) \mathbf{q}^{(k)} \quad , \quad m^{(k)} = \mathbf{q}^{(k)T} \mathbf{M} \mathbf{q}^{(k)} \quad (3.42)$$

Le nombre  $m^{(k)}$  est la masse généralisée du mode  $k$ , souvent normée à l'unité. Tout comme dans le calcul de l'énergie de déformation, on constate que la dérivée première de la valeur propre (la pulsation propre de vibration ou la charge critique d'instabilité) ne nécessite rien d'autre que la connaissance des dérivées des matrices de raideur, de masse ou de stabilité. Le calcul de la valeur propre  $k$  ne fait pas intervenir les autres modes propres; elle se détermine en fonction des seules caractéristiques du mode  $k$  : le mode propre  $k$  et la valeur propre  $k$ .

Si les dérivées des modes propres sont demandées, on combine les deux équations et on résout les deux systèmes sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \lambda^{(k)} \mathbf{M} & -\mathbf{M} \mathbf{q}^{(k)} \\ -\mathbf{q}^{(k)T} \mathbf{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}^{(k)}}{\partial z_i} \\ \frac{\partial \lambda^{(k)}}{\partial z_i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_i} - \lambda^{(k)} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z_i} \right) \mathbf{q}^{(k)} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{q}^{(k)T} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial z_i} \mathbf{q}^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

Si la résolution de ce système permet de trouver les dérivées des vecteurs et des valeurs propres du

mode propre  $k$ , il faut toutefois constater que la matrice  $(\mathbf{K} - \lambda^{(k)}\mathbf{M})$  est singulière. Son degré de singularité est égal à la multiplicité de la valeur propre  $k$ . Plusieurs stratégies ont été développées dans la littérature pour lever cette singularité (Cardini et Mantegazza, 1982). Parmi celles-ci, la méthode des liaisons temporaires de Nelson (1976) semble la plus populaire.

### 3.1.2.2 Dérivées secondes des valeurs propres

L'analyse des dérivées secondes des valeurs propres est moins courante. On peut trouver les principes de l'évaluation des dérivées secondes chez Mlejnek, Jehle et Schirmacher (1992). Les dérivées secondes des valeurs propres découlent d'une nouvelle dérivation de l'équation aux valeurs propres :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \lambda^{(k)}}{\partial z_i \partial z_j} = & \mathbf{q}^{(k)T} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial z_i \partial z_j} - \frac{\partial \lambda^{(k)}}{\partial z_i} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z_j} - \frac{\partial \lambda^{(k)}}{\partial z_j} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z_i} \right) \mathbf{q}^{(k)} \\ & + \mathbf{q}^{(k)T} \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_i} - \frac{\partial \lambda^{(k)}}{\partial z_i} \mathbf{M} - \lambda^{(k)} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z_i} \right) \frac{\partial \mathbf{q}^{(k)}}{\partial z_j} + \mathbf{q}^{(k)T} \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_j} - \frac{\partial \lambda^{(k)}}{\partial z_j} \mathbf{M} - \lambda^{(k)} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z_j} \right) \frac{\partial \mathbf{q}^{(k)}}{\partial z_i} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Contrairement aux dérivées premières des valeurs propres, les dérivées secondes nécessitent la connaissance des dérivées premières des modes propres associés.

### 3.1.2.3 Similitude entre la sensibilité de l'énergie de déformation et des valeurs propres

Nous devons relever la similitude évidente entre la sensibilité de l'énergie potentielle et la sensibilité des valeurs propres. Aucune de ces caractéristiques structurales ne nécessite de cas de charge additionnel pour l'évaluation de leurs dérivées premières. Les courbures demandent, par contre, l'évaluation des sensibilités des déplacements généralisés ou des modes propres.

## 3.1.3 L'analyse de sensibilité des problèmes de topologie au sein d'un code de calcul

La réalisation pratique de l'analyse de sensibilité au sein d'un code de calcul mérite que l'on s'y arrête brièvement.

Le code de calcul que nous avons réalisé fait partie intégrante du module d'optimisation OPTI du progiciel SAMCEF. Il hérite donc des avantages et des inconvénients de la structure du module OPTI. Néanmoins, notre étude nous a permis d'acquérir une certaine expérience sur la mise en oeuvre de l'analyse de sensibilité. Nous pouvons maintenant dégager certaines conclusions générales.

Tout d'abord, il est important de rappeler les objectifs à atteindre pour avoir une bonne analyse de sensibilité. En premier lieu, l'analyse de sensibilité doit être *précise* afin que la convergence du processus d'optimisation soit bonne et que la solution obtenue soit valable. En effet, la rapidité avec laquelle les conceptions successives convergent vers la solution, dépend de la qualité des approximations structurales basées sur les dérivées premières et éventuellement secondes. Enfin, la qualité de l'optimum dépend aussi de la précision des gradients intervenant dans la condition de Karush-Kuhn-Tucker.

En deuxième lieu, l'analyse de sensibilité doit être *efficace et rapide*. Ceci signifie qu'elle doit être effectuée de la façon la plus *économique* possible. Ce point est particulièrement crucial lorsqu'on traite des problèmes comprenant un très grand nombre de variables de conception.

L'économie des efforts numériques et la précision semblent s'opposer, mais ils peuvent être

réconciliés. Une bonne organisation des calculs est toujours favorable aux deux critères. L'économie et l'efficacité de l'analyse de sensibilité impliquent que l'on puisse tirer parti de toutes les caractéristiques du problème. Il est notamment important de connaître la structure de la matrice de raideur, de la matrice de masse et des charges implicites en fonction des variables de conception pour épargner des efforts de calcul précieux. Par certains aspects, le critère d'efficacité est antagoniste aux critères de "généralité" et de "maintenabilité" du code de calcul chers aux ingénieurs impliqués dans l'industrie du logiciel. A notre avis, dans le cas de l'optimisation topologique, il est nécessaire de sacrifier une part de la généralité de la procédure de calcul des sensibilités des matrices d'éléments, au profit de la performance. Dans le cas contraire, on risquerait de posséder un logiciel incapable de résoudre des problèmes industriels réalistes.

On divise les méthodes d'évaluation des dérivées en trois familles : les méthodes analytiques, les méthodes semi-analytiques et les méthodes numériques par différences finies. Les méthodes par différences finies passent par la réalisation d'une nouvelle analyse par éléments finis pour chaque dérivée. La technique des différences finies est donc inadaptée aux caractéristiques de l'optimisation de distribution de matériau où le nombre de variables de conception est élevé.

Que ce soit avec les méthodes analytiques ou semi-analytiques, le calcul des dérivées est basé sur les équations présentées au début de ce paragraphe. La distinction entre la méthode analytique et la méthode semi-analytique provient de la manière d'évaluer les dérivées de la matrice de raideur  $\mathbf{K}$ , des charges  $\mathbf{g}$  implicites en analyse statique et de la matrice de masse  $\mathbf{M}$  en vibration. Dans les méthodes semi-analytiques, la dérivation des matrices est réalisée par différences finies, alors que la dérivation est faite de façon tout à fait symbolique dans la méthode analytique.

### 3.1.3.1 La méthode semi-analytique

La méthode semi-analytique est basée sur une évaluation par différences finies de la matrice de raideur et de la matrice de masse et des charges implicites. Pour effectuer une "différence avant" sur la variable de conception, il est nécessaire de réaliser une génération supplémentaire de l'élément avec les données matérielles relatives au paramètre perturbé. On calcule alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z} &\approx \frac{\mathbf{K}(z + \delta z) - \mathbf{K}(z)}{\delta z} \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z} &\approx \frac{\mathbf{g}(z + \delta z) - \mathbf{g}(z)}{\delta z} \\ \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} &\approx \frac{\mathbf{M}(z + \delta z) - \mathbf{M}(z)}{\delta z} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Pour épargner les efforts de calcul, il est nécessaire de faire usage, aussi souvent que possible, des propriétés de calcul local c'est-à-dire au niveau de l'élément. Comme Zhang (1991) l'a signalé, il est également préférable de rejeter la division par le facteur de perturbation  $\delta z$  en dehors des produits matriciels, afin de diminuer le nombre d'opérations de division. L'évaluation des dérivées de l'énergie ou des fréquences propres au niveau de l'élément ne permet pas d'employer la simplification complète proposée par Zhang (1991), où l'on tient compte de la relation d'équilibre  $\mathbf{K}\mathbf{q}=\mathbf{g}$ .

Par exemple, on évaluera la quantité suivante issue de la dérivée de l'énergie de déformation en commençant par les parenthèses les plus intérieures :

$$\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_e} \mathbf{q} \approx \frac{1}{2} \{ \mathbf{q}_e^T [ \mathbf{K}_e(z_e + \delta z_e) - \mathbf{K}_e(z_e) ] \mathbf{q}_e \} / \delta z_e \quad (3.46)$$

Si on veut réaliser l'analyse de sensibilité du second ordre, il faut effectuer deux générations supplémentaires, une avec une différence finie avant, l'autre avec une différence finie arrière. On obtient, par exemple, pour les dérivées secondes diagonales :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial z^2} \approx \frac{\mathbf{K}(z+\delta z) + \mathbf{K}(z-\delta z) - 2\mathbf{K}(z)}{2\delta z^2} \quad (3.47)$$

Nous avons employé la méthode semi-analytique dans bon nombre d'applications en topologie. Le plus souvent, elle s'est révélée suffisamment efficace. Pour obtenir une précision satisfaisante sur le gradient, nous avons adopté une perturbation de  $10^{-4}$  sur la valeur relative des variables de conception. Par défaut, c'est la méthode semi-analytique qui est toujours choisie pour l'analyse de sensibilité du premier ordre. Par contre, l'analyse de sensibilité du second ordre par une méthode semi-analytique est trop coûteuse; nous ne l'emploierons pas pour ce motif.

Quand cela est possible, nous avons cependant remarqué que l'on pouvait économiser du temps de calcul en recourant à l'évaluation analytique des dérivées. Par la même occasion, on gagne une plus grande précision sur les résultats numériques.

### 3.1.3.2 La méthode analytique

Etant donné qu'en optimisation topologique le maillage est fixe, le calcul des dérivées des matrices de l'élément est abordable par la voie analytique. Le calcul analytique est également possible parce que les coefficients d'élasticité interviennent de la même manière dans toutes les différentes contributions de la matrice de raideur : la raideur en extension  $\mathbf{A}$ , la raideur en flexion  $\mathbf{D}$ , le couplage extension-flexion  $\mathbf{B}$ . Ce fait est évident pour les membranes et les éléments de volume. Pour les coques et les plaques, il suffit d'examiner la structure des matrices de raideur d'extension  $\mathbf{A}$ , de couplage  $\mathbf{B}$  et de flexion  $\mathbf{D}$ , pour remarquer que la matrice de Hooke des coefficients élastiques intervient de la même manière, au contraire de l'épaisseur qui introduit des contributions proportionnelles aux puissances  $t$ ,  $t^2$  et  $t^3$ .

#### Cas où les dérivées de la matrice de Hooke sont connues analytiquement

Supposons que les dérivées de la matrice des coefficients élastiques  $\mathbf{D}$  soient connues analytiquement. On veut calculer la dérivée de la matrice de raideur :

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_e(\mu_i^e) \mathbf{B} d\Omega \quad (3.48)$$

La dérivation sous le signe intégrale est licite si l'intégrand est dérivable et si la dérivée de l'intégrand peut être bornée par une fonction intégrable ne dépendant que des variables d'intégration lorsque les paramètres appartiennent à tout compact du domaine de conception. Pour de nombreuses microstructures, l'expression de la matrice de Hooke est suffisamment régulière pour que sa dérivée existe et soit intégrable. Puisque la matrice des déformations  $\mathbf{B}$  ne dépend pas des variables de microstructure, on peut écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \mu_i^e} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{D}_e(\mu_i^e)}{\partial \mu_i^e} \mathbf{B} d\Omega \quad (3.49)$$

De même, si l'expression de la densité en fonction des paramètres de microstructure possède les

propriétés de régularité suffisantes, ce qui est généralement le cas, on trouve l'expression de la dérivée des charges implicites et de la matrice de masse :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{g}_e}{\partial \mu_i^e} &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \frac{\partial \bar{f}_e(\mu_i^e)}{\partial \mu_i^e} d\Omega \\ \frac{\partial \mathbf{M}_e}{\partial \mu_i^e} &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \frac{\partial \rho_e(\mu_i^e)}{\partial \mu_i^e} d\Omega\end{aligned}\quad (3.50)$$

Le calcul de la dérivée analytique requiert que l'on effectue une nouvelle évaluation des matrices de l'élément en remplaçant la matrice de Hooke et la masse volumique par leur dérivée. Le coût numérique de cette procédure est quelque peu réduit par rapport à la méthode semi-analytique, parce que le calcul de la différence finie des matrices et des charges n'est plus nécessaire. L'avantage principal de la méthode est l'amélioration de la précision du résultat.

La dérivation des matrices de Hooke par rapport aux paramètres de microstructure est possible lorsque son expression analytique est connue. C'est le cas de la microstructure feuilletée de rang 2, de la microstructure des sphères composites et de la microstructure des cylindres composites. Par ailleurs, les programmes de dérivation symbolique favorisent l'utilisation de cette méthode car ils permettent de soulager le calcul fastidieux des dérivées.

*Les matériaux isotropes avec une pénalisation de type puissance des densités intermédiaires (SIMP)*

On suppose, à présent, que seul le module de Young dépend des paramètres de microstructure. Pour les matériaux que nous appellerons, par la suite, *Simply Isotropic Material with Penalization (SIMP)*, le module de Young est proportionnel à une puissance  $p$  de la densité relative :

$$\begin{cases} E = \mu^p E^0 \\ \rho = \mu \rho^0 \end{cases}\quad (3.51)$$

Le problème de topologie est alors semblable à un problème de plaque. Il est connu que, dans ce cas, le facteur de densité peut être mis en évidence dans la matrice de raideur :

$$\mathbf{K}_e = \mu_e^p \bar{\mathbf{K}}_e\quad (3.52)$$

La matrice  $\bar{\mathbf{K}}_e$  est la matrice de raideur de l'élément évaluée avec le module de Young  $E^0$  du solide. On peut, également, mettre en évidence la densité relative, dans l'expression des charges dépendant de la masse volumique et dans l'expression de la matrice de masse :

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_e &= \mu_e \bar{\mathbf{g}}_e \\ \mathbf{M}_e &= \mu_e \bar{\mathbf{M}}_e\end{aligned}\quad (3.53)$$

Les charges implicites  $\bar{\mathbf{g}}_e$  et la matrice de masse  $\bar{\mathbf{M}}_e$  sont évaluées avec la masse volumique  $\rho^0$  du solide.

Les dérivées des caractéristiques de l'élément sont immédiates.

On trouve les dérivées premières :

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_e}{\partial \mu_e} &= p \mu^{p-1} \bar{K}_e = \frac{p}{\mu_e} K_e \\ \frac{\partial \mathbf{g}_e}{\partial \mu_e} &= \quad \bar{\mathbf{g}}_e = \frac{1}{\mu_e} \mathbf{g}_e \\ \frac{\partial M_e}{\partial \mu_e} &= \quad \bar{M}_e = \frac{1}{\mu_e} M_e\end{aligned}\tag{3.54}$$

Les dérivées secondes des charges implicites et de la matrice de masse sont nulles, tandis que les dérivées secondes de la matrice de raideur sont très faciles à obtenir :

$$\frac{\partial^2 K_e}{\partial \mu_e^2} = p(p-1) \mu^{p-2} \bar{K}_e = \frac{p(p-1)}{\mu_e^2} K_e\tag{3.55}$$

L'analyse de sensibilité ne requiert pas d'évaluation supplémentaire des matrices de l'élément. Le calcul de sensibilité demande seulement quelques opérations de division sur les matrices d'élément. Par souci d'efficacité, on organise le calcul pour effectuer les divisions après les opérations de calcul matriciel. Par exemple pour le calcul de la dérivée de l'énergie de déformation, on évaluera la quantité suivante en commençant par le calcul de l'énergie, ce qui donne un scalaire, ensuite on effectue l'opération de division :

$$\mathbf{q}^T \frac{\partial K}{\partial \mu_e} \mathbf{q} = \{ \mathbf{q}_e^T K_e \mathbf{q}_e \} * \{ p / \mu_e \}\tag{3.56}$$

Compte tenu des particularités des lois constitutives, l'analyse de sensibilité des matériaux SIMP est donc la plus économique, ce qui constitue un des avantages de ces matériaux.

### 3.1.3.3 Remarque sur l'analyse de sensibilité du second ordre

La mise au point et l'utilisation d'approximations structurales du second ordre exige l'estimation des dérivées secondes. Pour les approximations séparables, seules les dérivées secondes diagonales sont nécessaires, ce qui réduit considérablement le coût du calcul. Le calcul des courbures reste cependant très cher pour un grand nombre de variables. Ce coût provient principalement de l'évaluation des déplacements généralisés et des modes propres de vibration. L'analyse de sensibilité est toutefois disponible dans notre module de calcul pour les matériaux SIMP, compte tenu des facilités de calcul des dérivées secondes des matrices d'élément. Ainsi, nous avons pu mener à bien quelques expériences numériques sur l'évaluation de la sensibilité du second ordre. Voici quelques conclusions que nous avons pu en tirer. Lorsque le nombre de variables de conception est aussi élevé qu'en topologie, le temps nécessaire pour effectuer un cycle d'optimisation avec le calcul des courbures est doublé (ou plus!) par rapport au temps CPU d'un cycle où l'on ne fait qu'une analyse de sensibilité du premier ordre. Même si l'utilisation d'approximations du second ordre réduit modérément le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre une précision donnée, ce gain n'est généralement pas suffisant pour compenser le coût supplémentaire de l'analyse de sensibilité. Ce fait avait déjà été constaté par Mlejnek Jehle et Schirmacher (1993). Notre expérience confirme donc les conclusions de ces auteurs. Dans la suite de cette thèse, nous montrerons que l'analyse de sensibilité exacte peut être avantageusement remplacée par une estimation de bonne qualité obtenue par une méthode de Quasi-Newton pour matrices diagonales. Les résultats originaux de cette recherche seront développés dans

le chapitre 5.

### 3.2 Conditions d'optimalité pour le problème d'optimisation topologique

Revenons à présent à l'étude du problème de la distribution optimale de matière d'une structure continue. En vue de dégager un schéma itératif efficace pour le résoudre, il est intéressant d'examiner les conditions d'optimalité auxquelles la solution du problème doit satisfaire.

Pour les problèmes avec une sollicitation unique, nous n'entachons pas la généralité du raisonnement et des conclusions en travaillant sur le problème plan et sur les matériaux feuilletés de rang 2. Par contre, lorsque l'on considère plusieurs sollicitations, les matériaux feuilletés de rang 2 deviennent instables et ils ne sont plus adéquats. Il faut employer d'autres microstructures dont la description requiert un plus grand nombre de paramètres.

Les propriétés matérielles (les coefficients d'élasticité  $E_{ijkl}$  et la densité locale  $\rho$ ) dépendent en définitive des paramètres géométriques définissant la microstructure qui constituent les véritables variables de conception. La raideur du matériau feuilleté de rang 2 est complètement décrite par les paramètres de densité relative  $\gamma$  et  $\mu$ , dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1, et par l'orientation  $\theta$  du repère matériel local vis-à-vis du repère structural. On recherchera donc les conditions d'optimalité de la distribution de matière par rapport aux variables  $\mu$ ,  $\gamma$  et  $\theta$ .

#### 3.2.1 Conditions d'optimalité pour le problème fondamental de la topologie

On reprend d'abord le problème fondamental de la topologie des structures élastiques, c'est-à-dire la distribution optimale de matière en présence d'un cas de charge unique. On considère le cas où toutes les conditions aux limites cinématiques sont homogènes. En utilisant les notations introduites au chapitre 2, le problème fondamental d'une distribution de matériau feuilleté de rang 2 s'écrit :

$$\begin{aligned} \min_{\gamma, \mu, \theta} \quad & l(\mathbf{u}) \\ \text{avec} \quad & \cdot V \leq \bar{V} \\ & \cdot \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \\ & \cdot 0 \leq \gamma, \mu \leq 1. \end{aligned} \quad (3.57)$$

On utilise le formalisme matriciel plus concis :

$$\begin{aligned} \min_{\gamma, \mu, \theta} \quad & \int_{\Omega} \mathbf{f}^T \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_0} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{u} \, d\Gamma \\ \text{avec} \quad & \cdot \int_{\Omega} (\mu + \gamma - \mu \gamma) \, d\Omega \leq \bar{V} \\ & \cdot \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}^T \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_0} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{v} \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \\ & \cdot 0 \leq \gamma, \mu \leq 1. \end{aligned} \quad (3.58)$$

On forme la fonction Lagrangienne associée à ce problème d'optimisation avec contraintes. On définit les multiplicateurs de Lagrange associés au problème.  $\Lambda$  désigne le multiplicateur associé à la contrainte de volume;  $\lambda_{\gamma}^{+}(x)$ ,  $\lambda_{\gamma}^{-}(x)$ ,  $\lambda_{\mu}^{+}(x)$ ,  $\lambda_{\mu}^{-}(x)$  sont les multiplicateurs introduits pour tenir compte

des contraintes de borne sur les variables de densité;  $\mathbf{w} \in V_0$  est le champ des multiplicateurs pour les équations d'équilibre de la structure.

$$\begin{aligned}
L(\gamma, \mu, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \Lambda, \lambda_\gamma^+, \lambda_\gamma^-, \lambda_\mu^+, \lambda_\mu^-) = & \int_{\Omega} \mathbf{f}^T \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_o} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{u} \, d\Gamma + \Lambda \left\{ \int_{\Omega} (\gamma + \mu - \gamma \mu) \, d\Omega - \bar{V} \right\} \\
& - \left\{ \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}^T \mathbf{w} \, d\Omega - \int_{\Gamma_o} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{w} \, d\Gamma \right\} \\
& + \int_{\Omega} \lambda_\gamma^+ (\gamma - 1) - \lambda_\gamma^- (\gamma) + \lambda_\mu^+ (\mu - 1) - \lambda_\mu^- (\mu) \, d\Omega
\end{aligned} \quad (3.59)$$

En faisant l'hypothèse que la forme bilinéaire  $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  soit uniformément elliptique, les conditions nécessaires du problème Lagrangien s'obtiennent facilement.

On remarque d'abord que les conditions d'optimalité par rapport au champ  $\mathbf{w}$  restituent le principe des travaux virtuels :  $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0$ , tandis que la variation du champ  $\mathbf{u}$  permet d'identifier la valeur des multiplicateurs  $\mathbf{w}$  au champ de déplacement de la structure en équilibre :  $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ .

Les variations des variables de conception requièrent l'utilisation des résultats de l'analyse de sensibilité développés au paragraphe précédent. Tous calculs faits, on obtient les conditions d'optimalité en chaque point du domaine de conception :

$$\begin{aligned}
-\boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mu} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + 2 \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mu} + \Lambda(1-\gamma) + \lambda_\mu^+ - \lambda_\mu^- &= 0 \\
-\boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \gamma} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + 2 \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \gamma} + \Lambda(1-\mu) + \lambda_\gamma^+ - \lambda_\gamma^- &= 0 \\
-\boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) &= 0
\end{aligned} \quad (3.60)$$

Les conditions d'optimalité sont assorties des conditions de non-rigidité complémentaire premièrement sur les contraintes de borne :

$$\begin{aligned}
0 \leq \gamma \leq 1 \quad \lambda_\gamma^+ \geq 0 \quad \lambda_\gamma^- \geq 0 \quad \lambda_\gamma^+ (\gamma - 1) = 0 \quad \lambda_\gamma^- (\gamma) = 0 \\
0 \leq \mu \leq 1 \quad \lambda_\mu^+ \geq 0 \quad \lambda_\mu^- \geq 0 \quad \lambda_\mu^+ (\mu - 1) = 0 \quad \lambda_\mu^- (\mu) = 0
\end{aligned} \quad (3.61)$$

et deuxièmement sur la restriction de volume :

$$\int_{\Omega} (\gamma + \mu - \gamma \mu) \, d\Omega \leq \bar{V} \quad , \quad \Lambda \geq 0 \quad , \quad \Lambda \left\{ \int_{\Omega} (\gamma + \mu - \gamma \mu) \, d\Omega - \bar{V} \right\} = 0 \quad (3.62)$$

#### Conditions d'optimalité sous forme discrétisée

Dans le contexte d'une résolution numérique par la méthode des éléments finis, il est intéressant de voir ce que deviennent les conditions d'optimum lorsqu'on résout le problème sous forme discrète. Si le champ des variables de conception prend une valeur constante par élément fini, on obtient des conditions d'optimalité pour chaque élément fini.



On obtient facilement les conditions d'optimalité équivalentes aux conditions (3.60) :

$$\begin{aligned}
 -\mathbf{q}_e^T \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \mu_e} \mathbf{q}_e + 2 \mathbf{q}_e^T \frac{\partial \mathbf{g}_e}{\partial \mu_e} + \Lambda (1 - \gamma_e) V_e + \lambda_{\mu_e}^+ - \lambda_{\mu_e}^- &= 0 \\
 -\mathbf{q}_e^T \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \gamma_e} \mathbf{q}_e + 2 \mathbf{q}_e^T \frac{\partial \mathbf{g}_e}{\partial \gamma_e} + \Lambda (1 - \mu_e) V_e + \lambda_{\gamma_e}^+ - \lambda_{\gamma_e}^- &= 0 \\
 -\mathbf{q}_e^T \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \theta_e} \mathbf{q}_e &= 0
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

Quant à la contrainte de volume, elle est donnée par la somme des densités par élément multipliées par le volume  $V_e$  des éléments, de sorte que l'on a les conditions de complémentarité sur la contrainte:

$$\sum_e (\mu_e + \gamma_e - \mu_e \gamma_e) V_e \leq \bar{V} \quad , \quad \Lambda \geq 0 \quad , \quad \Lambda \left\{ \sum_e (\mu_e + \gamma_e - \mu_e \gamma_e) V_e - \bar{V} \right\} = 0 \tag{3.64}$$

### 3.2.2 Analyse des conditions d'optimalité du problème fondamental

Si nous analysons les conditions d'optimalité (3.60) ou (3.63), on s'aperçoit que les variables associées à la microstructure et les variables d'angle d'orthotropie jouent un rôle différent.

D'abord, les conditions d'optimalité associées aux variables d'angle ne portent que sur la raideur locale, car la densité locale  $\rho$  et les forces de volume ne dépendent pas de l'orientation d'orthotropie  $\theta$ . Dès lors, la troisième condition d'optimalité ne porte que sur la fonction objectif et elle correspond à l'optimum d'un problème non contraint. Puisqu'il s'agit des dérivées de l'énergie de déformation, la condition d'optimum pour les angles d'orthotropie correspond au minimum de l'énergie potentielle de déformation pour ces variables.

Ensuite, les conditions d'optimalité relatives aux variables de microstructures sont les plus complexes. Elles font intervenir à la fois l'énergie, la fonction objectif, la contrainte de volume et les contraintes de borne. L'ensemble des conditions d'optimalité relatives aux variables de la microstructure sont le reflet d'un optimum contraint.

Enfin, les paramètres de microstructure  $\mu$  et  $\gamma$  n'apparaissent pas explicitement au sein de la troisième condition d'optimalité de l'angle d'orthotropie et réciproquement, la variable  $\theta$  est absente du système formé par les conditions d'optimum des variables microstructurales. Les conditions d'optimum des variables de densité et d'orthotropie sont évidemment couplées par la dépendance implicite des déplacements élastiques et de la matrice de raideur par rapport à toutes les variables de conception. Mais, si on "linéarise" le problème au premier ordre ou au second ordre, c'est-à-dire si on remplace chaque fonction du problème d'optimisation par une approximation séparable, le problème d'optimisation des variables d'angles est découplé du problème d'optimisation des variables de microstructure.

En conséquence, il est fort tentant de résoudre séparément les problèmes pour les deux groupes de variables, comme le suggère l'examen des conditions d'optimalité.

Lors des premiers travaux sur l'optimisation topologique (Kikuchi et Bendsøe, 1988 ou Bendsøe, 1989), la résolution du problème d'optimisation était effectuée simultanément pour les variables de

conception microstructurales et les variables angulaires. En raison de la nature fondamentalement différente des conditions d'optimum, cette approche a rencontré de nombreuses difficultés. La littérature rapporte que la procédure de résolution unique donnait des résultats médiocres caractérisés notamment par une convergence assez lente (principalement des variables d'angle). Il est apparu plus raisonnable de séparer la résolution itérative et d'envisager une autre procédure dans laquelle les problèmes relatifs aux variables de densité ( $\gamma$  et  $\mu$ ) et aux variables d'angle ( $\theta$ ) sont traités parallèlement. A chaque étape de la résolution, on ignore le couplage implicite entre les problèmes partiels. Chaque problème partiel est résolu de façon isolée par la méthode la plus appropriée.

Le problème d'optimisation en termes des variables de microstructures est le plus complexe. C'est un problème d'optimisation non linéaire et non explicite avec une contrainte. En conséquence, il est naturel d'aborder la résolution de ce problème d'optimisation avec un algorithme de programmation mathématique. En outre, la nature du problème d'optimisation est fort semblable à un problème de dimensionnement de structure. On peut tirer parti du savoir-faire disponible pour résoudre ce type de problème d'optimisation.

Comme on l'a remarqué, les conditions d'optimalité pour les angles d'orthotropie se présentent sous une forme relativement simple; elles sont équivalentes au minimum de l'énergie potentielle de déformation locale. La nature périodique des variables d'angle ainsi que la nature fortement non linéaire des formules de changement de repère (les coefficients élastiques forment un tenseur d'ordre quatre) constituent des difficultés majeures pour la résolution numérique de cette équation. Elles introduisent plusieurs extremums relatifs. Bendsøe et Kikuchi (1988) décrivent une expérience numérique dans laquelle la solution des équations liées aux variables d'angle est effectuée avec une procédure de type Newton-Raphson. Cependant, la convergence des variables de conception est souvent difficile en raison de la présence de nombreux optimums locaux. La solution au problème provient de l'étude approfondie des extremums de l'énergie potentielle de déformation en état plan qui a été menée à bien, parallèlement, par Pedersen (1989, 1990 et 1993) ainsi que par Gibiansky et Cherkasov (1988). Cette analyse a abouti à l'établissement d'une solution analytique remarquable. Bendsøe (1989), ensuite Suzuki et Kikuchi (1991) ont adopté cette solution comme base de la remise à jour de l'angle d'orthotropie local, selon une méthode de type critère d'optimalité. Cette technique donne des résultats très satisfaisants et l'algorithme converge rapidement vers une solution stationnaire.

### 3.2.3 Conditions d'optimalité pour le problème de cas de charges multiples

Soit  $n_c$  sollicitations à prendre en compte pour la conception d'une structure. En se référant aux notations introduites au chapitre 2, on affecte les grandeurs d'un indice supérieur relatif au numéro du cas de charge considéré. Ainsi,  $\mathbf{u}^k$ ,  $\mathbf{f}^k$ ,  $\bar{\mathbf{t}}^k$  sont respectivement les déplacements et les charges de la sollicitation  $k$ , tandis que sa compliance est

$$l^k(\mathbf{u}^k) = \int_{\Omega} \mathbf{f}_i^k u_i^k d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{t}}_i^k u_i^k d\Gamma \quad (3.65)$$

Lorsqu'on est en présence de plusieurs cas de charge, la microstructure plane des matériaux feuilletés de rang 2 avec des couches orthogonales et la microstructure tridimensionnelle des matériaux de rang 3 avec des couches orthogonales ne sont plus optimales. Si on veut rester dans la famille des matériaux de rang  $N$ , il faut considérer les matériaux de rang 3 avec des couches non orthogonales à deux dimensions et les matériaux de rang 6 avec des couches non orthogonales à trois dimensions. On peut aussi utiliser des microstructures suboptimales. Quelle que soit la microstructure, on suppose qu'elle est complètement décrite par  $np$  paramètres:  $\mu_i (i=1, \dots, np)$ , auxquels il faut adjoindre l'angle

d'orthotropie  $\theta$ .

Comme il est expliqué au chapitre 2, on traite le problème sous une formulation "min-max" dont la forme différentiable introduit la variable additionnelle  $\beta$  :

$$\begin{aligned} \min_{\mu_i, \theta, \beta} \quad & \beta \\ \text{avec} \quad & . V \leq \bar{V} \\ & . l^k(\mathbf{u}^k) \leq \beta \quad (k=1, \dots, nc) \end{aligned} \quad (3.66)$$

On forme encore une fois la fonction Lagrangienne du problème :

$$\begin{aligned} L(\mu_i, \theta, \beta, \mathbf{v}, \Lambda) = & \beta + \sum_{k=1}^{nc} v^k (l^k(\mathbf{u}^k) - \beta) + \Lambda (V - \bar{V}) \\ & + \sum_{i=1}^{np} \int_{\Omega} \{ (1 - \mu_i) \lambda_{\mu_i^+} - \mu_i \lambda_{\mu_i^-} \} d\Omega \end{aligned} \quad (3.67)$$

Comme la forme  $a(\cdot, \cdot)$  est définie positive, on peut écrire les conditions d'optimalité. Les conditions d'optimalité relatives au champ des variables de conception sont :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{nc} v_k \frac{\partial l^k(\mathbf{u}^k)}{\partial \mu_i} + \frac{\partial V}{\partial \mu_i} + \int_{\Omega} \lambda_{\mu_i^+} - \lambda_{\mu_i^-} d\Omega = 0 \quad (i=1, \dots, np) \\ \sum_{k=1}^{nc} v_k \frac{\partial l^k(\mathbf{u}^k)}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

La variation de la variable  $\beta$  établit une norme des multiplicateurs  $v^k$  :

$$\sum_{k=1}^{nc} v^k = 1 \quad \text{avec} \quad v^k \geq 0 \quad (k=1, \dots, nc) \quad (3.69)$$

Ce qui signifie que  $\sum_{k=1}^{nc} v_k \partial l^k(\mathbf{u}^k) / \partial \mu_i$  est une combinaison linéaire convexe des dérivées des compliances saturées à l'optimum de sorte qu'il s'agit, évidemment, du sous-gradient de la fonction  $\min_k \{l^k\}$ .

Si on "discrétise" le problème de conception, on note respectivement par  $\mathbf{q}^k$  et  $\mathbf{g}^k$  les déplacements et les charges généralisés du cas de charge k. Comme dans le problème fondamental, le champ de variables de conception est également supposé constant par élément fini. Sous cette forme discrète, les conditions d'optimum par rapport aux variables de microstructure et à la variable additionnelle  $\beta$  forment le système d'équations suivant :

$$\sum_{k=1}^{nc} v^k \left\{ -\mathbf{q}_e^{kT} \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \mu_i^e} \mathbf{q}_e^k + 2 \mathbf{q}_e^{kT} \frac{\partial \mathbf{g}_e^k}{\partial \mu_i^e} \right\} + \Lambda V_e \frac{\partial \rho_e}{\partial \mu_i^e} + \lambda_{\mu_i^e}^+ - \lambda_{\mu_i^e}^- = 0 \quad (i=1, \dots, np) \quad (3.70)$$

$$\sum_{k=1}^{nc} v^k = 1 \quad \text{avec} \quad v^k \geq 0$$

On a également la condition de non-rigidité sur la contrainte de volume :

$$V = \sum_e \rho_e V_e \leq \bar{V} \quad , \quad \Lambda \geq 0 \quad , \quad (V - \bar{V})\Lambda = 0 \quad (3.71)$$

Parallèlement, la condition de stationnarité par rapport à la variable d'angle d'orthotropie  $\theta_e$  correspond à la résolution du problème non contraint suivant :

$$\sum_{k=1}^{nc} v^k \left\{ -\mathbf{q}_e^{kT} \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \theta_e} \mathbf{q}_e^k \right\} = 0 \quad (3.72)$$

#### Analyse des conditions d'optimalité et principe de la résolution numérique

L'analyse des conditions d'optimalité du problème fondamental est transposable au problème impliquant plusieurs chargements. Les conclusions restent donc les mêmes. Dès lors, on suggère de traiter de façon séparée le problème relatif aux variables de microstructure (plus la variable auxiliaire  $\beta$ ) et le problème relatif aux variables d'angle d'orthotropie. En premier lieu, on résout le problème de microstructure par une technique de programmation mathématique :

$$\begin{aligned} \min_{\mu_i^e, \beta} \quad & \beta \\ \text{avec} \quad & \cdot l^k(\mathbf{u}^k) \leq \beta \quad (k=1, \dots, nc) \\ & \cdot V \leq \bar{V} \end{aligned} \quad (3.73)$$

On considère, ensuite, la solution du problème d'orthotropie locale. Il est possible de résoudre ce problème par une technique de critère d'optimalité en utilisant la solution générique du problème du maximum d'une combinaison linéaire d'énergies potentielles :

$$\min_{\theta} \sum_{k=1}^K w^k U(\varepsilon_{11}^k, \varepsilon_{22}^k, \varepsilon_{12}^k) \quad (3.74)$$

Sa solution en deux dimensions est due à Díaz et Bendsøe (1992). Pour se conformer à la forme standard de la solution de Díaz et Bendsøe, on identifie les coefficients de pondération avec les multiplicateurs de Lagrange associés à chaque restriction de compliance du problème :

$$w^k = v^k \quad (3.75)$$

L'approche "min-max" offre donc un critère de choix naturel et objectif des poids  $w^k$ .

### 3.2.4 Conditions d'optimalité pour le problème de comportement vibratoire

Etudions, à présent, le problème de conception d'une structure de masse minimale dont on veut exclure le comportement fréquentiel hors de certaines bandes de fréquence. On considère  $nf$  pulsations propres de valeur  $\omega_k^2$ . La microstructure est toujours supposée être complètement décrite par  $np$  paramètres. Conformément au chapitre 2, on désire résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\mu_i, \theta} \quad & \text{Volume} \\ \text{avec} \quad & \underline{\omega}_k^2 \leq \omega_k^2 \leq \bar{\omega}_k^2 \quad (k=1, nf) \end{aligned} \quad (3.76)$$

La stratégie de résolution est suggérée en passant par les conditions d'optimalité du problème. Pour cela, on forme la fonction de Lagrange du problème :

$$\begin{aligned} L(\mu_i, \theta, \lambda_0, \lambda_k^+, \lambda_k^-) = & \lambda_0 V + \sum_{k=1}^{nf} \{ \lambda_k^- (\underline{\omega}_k^2 - \omega_k^2) + \lambda_k^+ (\omega_k^2 - \bar{\omega}_k^2) \} \\ & + \sum_{i=1}^{np} \int_{\Omega} \{ \lambda_{\mu_i}^+ (1 - \mu_i) - \lambda_{\mu_i}^- \mu_i \} d\Omega \end{aligned} \quad (3.77)$$

On en extrait les conditions de stationnarité par rapport aux variables de conception :

$$\begin{aligned} \lambda_0 \frac{\partial V}{\partial \mu_i} + \sum_{k=1}^{nf} (\lambda_k^+ - \lambda_k^-) \frac{\partial \omega_k^2}{\partial \mu_i} + \int_{\Omega} \lambda_{\mu_i}^+ - \lambda_{\mu_i}^- d\Omega = 0 \quad (i=1, \dots, np) \\ \sum_{i=1}^{nf} (\lambda_k^+ - \lambda_k^-) \frac{\partial \omega_k^2}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \quad (3.78)$$

On passe ensuite à l'expression discrétisée du problème et on injecte les résultats de l'analyse de sensibilité des pulsations propres du mode  $k$ . On note toujours par  $\mathbf{q}^{(k)}$  le mode propre de vibration numéro  $k$  et par  $m^{(k)} = \mathbf{q}^{(k)T} \mathbf{M} \mathbf{q}^{(k)}$  la masse généralisée du mode  $k$ , souvent normée à l'unité. Après calcul, on peut écrire les conditions satisfaites par l'optimum :

$$\begin{aligned} \lambda_0 V_e \frac{\partial \rho_e}{\partial \mu_i^e} + \sum_{k=1}^{nf} \frac{\lambda_k^+ - \lambda_k^-}{m^{(k)}} \mathbf{q}_e^{(k)T} \left( \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \mu_i^e} - \omega_k^2 \frac{\partial \mathbf{M}_e}{\partial \mu_i^e} \right) \mathbf{q}_e^{(k)} + \lambda_{\mu_i^e}^+ - \lambda_{\mu_i^e}^- = 0 \quad (i=1, \dots, np) \\ \sum_{i=1}^{nf} \frac{\lambda_k^+ - \lambda_k^-}{m^{(k)}} \mathbf{q}_e^{(k)T} \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \theta} \mathbf{q}_e^{(k)} = 0 \end{aligned} \quad (3.79)$$

#### Analyse des conditions d'optimalité et principe de la résolution numérique de ce problème

De façon similaire à l'analyse statique, la formulation du problème de vibration que nous venons de présenter se prête à un découpage du problème complet en deux sous-problèmes d'optimisation. Le premier est associé aux variables de densité. Le second permet de retirer les valeurs optimales de l'angle d'orthotropie  $\theta$ . Le second problème s'interprète physiquement comme la recherche du maximum de l'énergie de déformation en présence de champs de déformation constants. Il s'agit, en réalité, d'une combinaison linéaire des énergies de déformations associées aux modes propres de vibration. Tout comme pour les cas de charges multiples, on utilise la solution standard du maximum

d'une combinaison linéaire d'énergies potentielles fournie par Díaz et Bendsøe (1992). Le choix objectif des coefficients de pondération est issu des conditions d'optimalité.

$$w^k = \frac{\lambda_k^+ - \lambda_k^-}{m^{(k)}} \quad (3.80)$$

La résolution du problème angulaire requiert donc la résolution préalable du problème de microstructure.

### 3.3 Principe de la résolution du problème partiel d'optimisation lié aux variables de microstructure

Le problème partiel d'optimisation relatif aux variables de densité est un problème d'optimisation avec contraintes. L'optimum recherché doit satisfaire aux conditions d'optimalité des paragraphes précédents. Les variables d'angle sont figées durant tout le processus d'optimisation sur les variables de densité.

En guise d'illustration, on reprend le problème fondamental. Le problème d'optimisation relatif aux variables de microstructure consiste à minimiser la fonction objectif, c'est-à-dire la compliance, en présence d'une contrainte de volume et de contraintes de borne. Dans le cas particulier d'un matériau feuilleté de rang 2, on doit résoudre le problème :

$$\begin{aligned} \min_{\mu, \gamma} \quad & l(\mathbf{u}) \\ \text{avec} \quad & \cdot \int_{\Omega} (\mu + \gamma - \mu \gamma) d\Omega \leq \bar{V} \\ & \cdot \gamma_{\min} \leq \gamma \leq 1 \quad , \quad \mu_{\min} \leq \mu \leq 1. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Il faut également noter qu'en dehors des méthodes où on réalise simultanément l'analyse et la synthèse de la structure, la résolution du problème de topologie requiert l'assemblage d'une matrice de raideur strictement définie positive (donc inversible). Pour cette raison, il est nécessaire d'ajuster la formulation originale du problème. Les contraintes de borne  $\mu \geq 0$  et  $\gamma \geq 0$  doivent être remplacées par les inégalités  $\mu \geq \mu_{\min} > 0$  et  $\gamma \geq \gamma_{\min} > 0$  où  $\mu_{\min}$  et  $\gamma_{\min}$  sont des bornes inférieures suffisamment petites, mais non nulles, pour que les zones de faible densité n'aient pas d'influence sur le comportement structural global et qu'elles ne perturbent pas la distribution de matière. Typiquement, on prend pour  $\mu_{\min}$  et pour  $\gamma_{\min}$  une valeur numérique comprise entre 0,01 et 0,001. Cette technique a montré numériquement qu'elle pouvait parfaitement lever la singularité de la matrice de raideur sans entraver l'apparition de la topologie.

La difficulté du problème provient du très grand nombre de variables de conception. Une discrétisation réaliste du problème de distribution de matière introduit généralement 1.000 à 10.000 variables de densité. Hormis les contraintes de borne, la formulation du problème fait cependant intervenir assez peu de contraintes. Par exemple dans le problème fondamental, on n'a qu'une seule contrainte sur le volume. Mais on peut avoir une contrainte supplémentaire sur le périmètre pour régulariser l'introduction de microstructures suboptimales. Par ailleurs, si l'on considère plusieurs cas de charge ou plusieurs fréquences propres, la procédure pour lever la non-différentiabilité du problème de "min-max" crée autant de contraintes qu'il y a de fonctions objectifs intervenant dans la fonction multi-

objectif. En résumé, le problème comprend généralement un nombre de contraintes situé entre 1 et 10.

La résolution du problème d'optimisation topologique est très coûteuse. D'une part, le problème comporte un très grand nombre de variables de sorte que l'analyse éléments finis et l'analyse de sensibilité sont onéreuses. D'autre part, on constate que le processus d'optimisation converge lentement. 50 à 100 itérations sont habituellement nécessaires pour arriver à l'optimum avec une précision moyenne ou bonne.

La lenteur de la progression vers l'optimum a plusieurs causes.

Premièrement, l'optimum de la fonction objectif compliance est relativement plat. Autrement dit, la compliance possède des valeurs assez proches de la valeur optimale dans un voisinage relativement étendu autour de l'optimum, ce qui peut s'expliquer par la grande "*hyperstaticité*" du problème. Durant les 10 premières itérations, l'optimisation commence par une forte décroissance de la compliance. Ensuite, la décroissance de la valeur de la compliance se ralentit très fortement et on assiste à une lente progression vers la valeur optimale durant plus de 60% des itérations nécessaires pour arriver à la précision demandée.

Deuxièmement, on recherche une distribution de matière, de sorte qu'on veut déterminer les variables de conception optimales, plutôt que la valeur optimale de la fonction objectif (généralement la compliance). Or la distribution de variables de conception est beaucoup plus lente à établir que la valeur de la fonction objectif.

Troisièmement, on remarque l'influence des approximations structurales sur la vitesse de progression vers l'optimum, de sorte que le choix des approximations mérite d'être soigné. La qualité des approximations structurales n'est pas toujours satisfaisante. Les approximations peuvent être trop convexes ou trop peu conservatives, monotones ou non monotones. L'ajustement des paramètres de l'approximation a une grande importance sur l'histoire de la convergence des itérations vers la solution, comme on le montrera au chapitre 5.

Il faut encore s'inquiéter de la qualité de l'optimum numérique trouvé. L'utilisation de microstructures suboptimales ne relaxe que partiellement le problème de conception. En conséquence, on a constaté la présence de plusieurs optimums locaux qui apparaissent en fonction de la discrétisation, du maillage, de la pénalisation des densités intermédiaires, etc... Il est connu que les approximations du second ordre sont plus sensibles aux optimums locaux, comme nous avons pu le constater nous-mêmes. La nature de ces optimums peut remettre en question la signification des résultats numériques obtenus. La procédure de résolution devra être aussi insensible que possible aux pièges des optimums locaux. Dans ce contexte, la régularisation du problème d'homogénéisation par l'adjonction d'une contrainte de périmètre est un élément favorable. La procédure de continuation, qui consiste à augmenter progressivement la non-linéarité de la pénalisation des densités intermédiaires, est un autre élément qui a été proposé par Haber, Jog et Bendsøe (1994).

Pour résoudre le problème d'optimisation, bon nombre d'auteurs utilisent la technique des *critères d'optimalité* basée sur les conditions d'optimum comme ce fut le cas pour les premiers travaux traitant des méthodes d'homogénéisation (Bendsøe et Kikuchi, 1988, Bendsøe, 1989, Suzuki et Kikuchi, 1991). Même si la technique des critères d'optimalité a produit plusieurs résultats de qualité pour le traitement du problème particulier énoncé ci-dessus, elle a, cependant, révélé ses limitations lors de la généralisation de l'optimisation topologique à d'autres conditions de conception. En effet, les critères d'optimalité ne sont adaptés qu'aux problèmes avec une seule contrainte. Sous certaines conditions, on peut définir une fonction objectif faisant intervenir plusieurs réponses structurales. De la sorte, l'algorithme peut être adapté pour traiter plusieurs cas de charge (Díaz et Bendsøe, 1992) ou pour étudier le comportement vibratoire de la structure (Díaz et Kikuchi, 1992). Néanmoins, la littérature rapporte de nombreuses difficultés inhérentes à la généralisation de l'algorithme et souligne ses diverses limitations (ex. Ma, Kikuchi et Fukushima, 1993).

Pour notre part, nous marquons notre préférence pour une procédure plus générale et plus rigoureuse basée sur un *algorithme de programmation mathématique* que l'on appelle également *programmation convexe séquentielle*. Cette manière de procéder ne présente pas les limitations des critères d'optimalité, parce qu'elle ouvre une porte vers d'autres formulations du problème de conception. Les algorithmes de programmation mathématique sont beaucoup plus souples et ne sont pas limités à la formulation du problème fondamental de la topologie évoqué jusqu'à présent. Il est, au contraire, tout à fait possible de considérer de nouveaux critères de conception, sans entraîner des modifications importantes de la procédure. L'approche par programmation mathématique permet également de bénéficier de l'expérience acquise au cours de la dernière décennie en optimisation structurale. Il est possible de modifier facilement les approximations structurales employées pour les caractéristiques de notre problème. Le choix d'approximations de très haute qualité doit diminuer le nombre d'itérations nécessaires pour arriver à solution du problème. Enfin, avec une approche de programmation mathématique, on dispose d'une méthode de résolution très puissante pour résoudre le problème d'optimisation : les méthodes de maximisation Lagrangienne ou méthodes duales. Il faut remarquer que les méthodes duales ne sont pas un rejet des critères d'optimalité. Les méthodes duales avec formation de sous-problèmes explicites peuvent être perçues comme une généralisation rigoureuse des critères d'optimalité.

Aujourd'hui, on préfère distinguer deux concepts derrière les méthodes de programmation mathématique en conception des structures. D'une part, il y a la phase de formation d'un sous-problème d'optimisation dans laquelle on remplace les différentes fonctions du problème d'optimisation par leur approximation explicite. D'autre part, il y a la phase de résolution proprement dite de ce sous-problème d'optimisation par un algorithme de programmation mathématique (tel que la maximisation lagrangienne). L'adaptation des stratégies d'optimisation au problème de topologie des structures doit donc s'intéresser à ces deux aspects.

La sélection de schémas d'approximation adaptés aux caractéristiques structurales du problème de topologie sera l'objet du chapitre 5. D'ores et déjà, on retiendra le succès et l'efficacité des approximations convexes du premier ordre : linéarisation convexe CONLIN de Fleury et Braibant (1986) et la méthode des asymptotes mobiles M.M.A. de Svanberg (1987). Les approximations du premier ordre offrent une décroissance rapide de la fonction objectif durant les premières itérations, mais la convergence est fortement ralentie dans la phase finale autour de l'optimum. Pour notre part, nous avons contribué à adapter des schémas du second ordre comme le SQP diagonal ou M.M.A. du second ordre proposés par Fleury (1993b) aux problèmes comportant un très grand nombre de variables (Duysinx *et al.*, 1995). Pour cela, nous avons développé une procédure d'estimation des dérivées secondes diagonales selon une technique de type Quasi-Newton. Les approximations du second ordre sont souvent beaucoup plus efficaces dans le domaine d'attraction de l'optimum. Le résultat de ce travail sera présenté au chapitre 5 de cette thèse.

Le second aspect s'intéresse au choix d'algorithmes de résolution capables de gérer un très grand nombre de variables de conception. Pour des problèmes d'optimisation topologique dignes d'intérêt pratique, on sait que l'ordre de grandeur du nombre de variables de conception se situe souvent entre 1000 et 10.000. La résolution de problèmes de très grande taille soulève de nombreuses difficultés de temps de calcul et de taille mémoire... pour lesquels les méthodes de résolution primales se révèlent bien souvent inadaptées. La réponse à cette difficulté se trouve principalement dans le choix d'algorithmes exploitant les méthodes duales. Dans ce cas, l'itération est réalisée dans l'espace des multiplicateurs de dimension beaucoup plus petite.

Même si la problématique des approximations convexes et des algorithmes de programmation mathématique est réservée au chapitre 5, il est cependant possible de préciser que la résolution pratique du problème d'optimisation proprement dit est effectuée avec le programme CONLIN (Fleury, 1989). Moyennant quelques précautions, CONLIN s'est révélé être un outil puissant, souple et fiable pour la résolution du problème des variables de microstructure. Il offre un large choix d'approximations



séparables ainsi qu'une résolution duale ou primale-duale efficace, même pour un très grand nombre de variables.

### 3.4 Résolution du problème partiel d'optimisation par rapport aux variables d'angle

#### 3.4.1 Analyse du problème

Le second problème partiel que l'on doit résoudre est le problème d'optimisation relatif aux variables d'angles d'orthotropie. Si les paramètres de la microstructure  $y$  sont fixés, la solution des conditions d'optimalité du problème de topologie par rapport aux angles d'orthotropie locaux est équivalente à celle du problème du minimum de l'énergie de déformation. Pour le problème fondamental, la condition d'optimalité :

$$-\boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = 0 \quad (3.82)$$

correspond à la solution du problème non contraint :

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} u_e(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (3.83)$$

La solution du problème de la distribution de l'angle d'orthotropie est toujours abordée par le biais de la solution du problème non contraint du minimum de l'énergie élastique locale.

Le problème d'orientation est de nature assez difficile; il possède plusieurs extremums relatifs. La mise au point d'un algorithme de résolution itératif efficace n'est pas chose facile.

Bendsøe et Kikuchi (1988) ont d'abord tenté la résolution à l'aide d'une procédure de type Newton. Pour un problème de minimisation sans contrainte, utiliser une méthode de Newton-Raphson est équivalent à résoudre une séquence d'approximation quadratique locale de la fonction à minimiser. Malheureusement, les méthodes du second ordre sont sensibles aux optimums locaux présents dans cette fonction périodique. Bendsøe et Kikuchi (1988) ont alors constaté que la méthode de Newton ne donne pas entière satisfaction.

Pour dégager un algorithme de résolution plus efficace, il a été nécessaire d'étudier de façon approfondie les caractéristiques théoriques de la solution du problème d'orientation optimale. L'intérêt de la résolution de ce problème n'est pas limité à l'optimisation topologique car on le rencontre également dans d'autres problèmes de conception inhérents aux matériaux composites: l'orientation optimale de plaques et de disques orthotropes. En raison de son importance pratique, la résolution de ce problème continue de faire l'objet de réflexions théoriques (par exemple, Hammer, 1995). L'étude du problème en état plan de contrainte a été menée à bien, indépendamment, par Pedersen (1989, 1990) ainsi que par Gibiansky et Cherkaev (1988). Les études théoriques ont permis de dégager, comme corollaire, la solution analytique du problème d'orientation optimale. Cette solution analytique a été introduite par Bendsøe (1989) dans la résolution du problème de topologie. La solution est donc présentée dans la suite de l'exposé. Jusqu'à présent, la solution théorique complète est disponible uniquement pour le problème plan. Le problème tridimensionnel est toujours à l'étude et seules, des ébauches de solution sont actuellement disponibles (par exemple Cinquini et Rovati 1993).

Si l'on considère plusieurs cas de charge, les conditions d'optimalité auxquelles on aboutit sont équivalentes à la recherche du minimum d'une somme pondérée des énergies potentielles relatives à

chaque cas de charge.

$$\min_{\theta} \quad \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K w^k u_e(\mathbf{u}^k) \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^K w^k = 1 \quad (3.84)$$

La solution analytique de ce problème est également disponible en état plan de contrainte grâce aux travaux de Díaz et Bendsoe (1992). Nous l'avons également résumée à la fin de ce chapitre.

Nous avons montré que l'on peut utiliser la solution du problème standard en identifiant les facteurs de pondération de la théorie générale aux multiplicateurs de Lagrange du problème de microstructure.

### 3.4.2 Orientation optimale des matériaux orthotropes en état plan

Les extremums de l'énergie élastique des matériaux orthotropes en état plan ont été étudiés parallèlement par Pedersen (1989, 1990, 1993) et par Gibiansky et Cherkaev (1988). Cette analyse conduit à une solution analytique pour un cas de charge unique. Ce résultat est de première importance, non seulement en optimisation topologique, mais encore lors de la conception de toute structure en matériau composite.

#### Solution analytique en état plan

L'étude est tout d'abord basée sur la constatation que, dans le cas d'une structure élastique linéaire, la dérivée de l'énergie potentielle élastique peut être effectuée avec un champ de déformation ou de contrainte constant :

$$\frac{dU}{dz} = - \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{\boldsymbol{\varepsilon} \text{ fixés}} = \left( \frac{\partial U^c}{\partial z} \right)_{\boldsymbol{\sigma} \text{ fixés}} \quad (3.85)$$

pour toute variable de conception  $z$ . Si  $\theta_e$  est l'angle d'orthotropie local supposé constant sur le sous-domaine  $\Omega^e$  de volume  $V_e$  et de densité  $u_e$ , la dérivée de l'énergie prend la forme locale :

$$\frac{dU}{d\theta_e} = - V_e \left( \frac{\partial u_e}{\partial \theta_e} \right)_{\boldsymbol{\varepsilon} \text{ fixés}} \quad (3.86)$$

A présent, on dérive les conditions d'optimalité de l'énergie à champ de déformation constant. Dans les axes d'orthotropie (1,2) où les relations tensions-déformations sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.87)$$

On prend la convention d'orienter l'axe de raideur maximale selon l'axe 1, défini par la condition  $D_{11} \geq D_{22}$ .

On exprime l'énergie de déformation dans les axes d'orthotropie :

$$\begin{aligned} u_e &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{D}_{11} \varepsilon_{11}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{D}_{22} \varepsilon_{22}^2 + \mathbf{D}_{12} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + 2 \mathbf{D}_{66} \varepsilon_{12}^2 \end{aligned} \quad (3.88)$$

On développe ensuite les déformations en fonction des déformations principales  $\varepsilon_I$  et  $\varepsilon_{II}$  (avec la convention  $|\varepsilon_I| \geq |\varepsilon_{II}|$ ). La formule de changement de repère fait appel à l'angle  $\psi$  mesurant la rotation qui amène le repère des déformations principales ( $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}$ ) sur le repère d'orthotropie (1,2) comme le montre la figure 3.1.

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{2} (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) + (\varepsilon_I - \varepsilon_{II}) \cos 2\psi \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{2} (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) - (\varepsilon_I - \varepsilon_{II}) \cos 2\psi \\ \varepsilon_{12} = -\frac{1}{2} (\varepsilon_I - \varepsilon_{II}) \sin 2\psi \end{cases} \quad (3.89)$$

On note, par  $\alpha$ , l'angle qui mesure la position du repère des déformations principales par rapport au premier axe structural  $x$  et, par  $\theta$ , l'angle entre le repère matériel et le repère structural. Les trois angles  $\alpha$ ,  $\psi$  et  $\theta$  sont évidemment liés par la relation :

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\alpha} \quad (3.90)$$

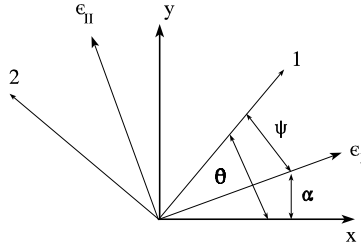


Figure 3.1 : Définition des repères et des angles.

On peut déterminer la dérivée première de l'énergie par rapport à l'orientation du repère d'orthotropie:

$$\frac{\partial u_e}{\partial \boldsymbol{\theta}_e} = \frac{\partial u_e}{\partial \boldsymbol{\psi}_e} \quad (3.91)$$

Lorsqu'elle est exprimée en fonction des déformations principales, il est possible de dériver l'énergie élastique par rapport à l'angle  $\psi$  en maintenant les déformations fixées :

$$\frac{\partial u_e}{\partial \boldsymbol{\psi}_e} = -\frac{1}{2} (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) \sin 2\psi \left[ \boldsymbol{\alpha} (\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) + \boldsymbol{\beta} (\varepsilon_I - \varepsilon_{II}) \cos 2\psi \right] \quad (3.92)$$

avec les paramètres du matériau :

$$\alpha = D_{11} - D_{22} \quad , \quad \beta = D_{11} + D_{22} - 2D_{12} - 4D_{66} \quad (3.93)$$

La dérivée première de l'énergie de déformation s'annule pour les angles suivants :

$$\begin{aligned} \sin \psi = 0 & \Leftrightarrow \psi = 0 \text{ ou } \psi = \pm \frac{\pi}{2} \\ \text{et} & \\ \cos 2\psi = -\gamma & \text{ avec } \gamma = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\epsilon_I + \epsilon_{II}}{\epsilon_I - \epsilon_{II}} \end{aligned} \quad (3.94)$$

L'étude des signes de la dérivée seconde nous renseigne sur la nature des points stationnaires :

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial \psi_e^2} = -(\epsilon_I + \epsilon_{II}) [\alpha (\epsilon_I + \epsilon_{II}) \cos 2\psi + \beta (\epsilon_I - \epsilon_{II}) \cos 4\psi] \quad (3.95)$$

Le signe de la courbure et la nature des points stationnaires dépendent du paramètre  $\beta$ , reflet de l'importance de la raideur en cisaillement du matériau orthotrope. Le tableau 3.1 reproduit la synthèse des caractéristiques de chaque solution telle qu'elle est rapportée par Pedersen (1990).

Angle de stationnarité $\psi$	Faible raideur en cisaillement $\beta > 0$		Forte raideur en cisaillement $\beta < 0$	
	$0 \leq \gamma \leq 1$	$1 < \gamma$	$\gamma < -1$	$-1 \leq \gamma \leq 0$
$0^\circ$	Min. global	Min. global	Min. global	Max. local
$90^\circ$	Min. local	Max. global	Max. global	Max. global
$\cos 2\psi = -\gamma$	Max. global			Min global

Tableau 3.1 : Sélection des arguments optimaux pour le critère d'optimalité du maximum/minimum de l'énergie potentielle élastique (Pedersen, 1990).

Pour de faibles raideurs en cisaillement  $\beta \geq 0$ , le minimum global de l'énergie de déformation est atteint pour l'angle  $\psi = 0$ . Ce résultat intuitif signifie que dans la configuration de raideur maximale, les axes d'orthotropie sont alignés avec les déformations principales. Les matériaux composites poreux intervenant en optimisation topologique possèdent généralement une faible raideur en cisaillement, si bien que, dans ce cas pratique très important, la solution optimale correspond à la solution intuitive du problème.

Pour des matériaux dont la raideur en cisaillement est importante  $\beta \leq 0$ , on choisit selon la valeur du paramètre  $\gamma$ , la solution  $\psi = 0$  ou  $\psi = \pm \frac{1}{2} \arccos(-\gamma)$ .

Enfin, à l'optimum, Pedersen (1990) a également montré que dans tous les cas, les axes d'orthotropie, les axes principaux de déformation et les axes principaux de contrainte coïncident.

### *Solution du problème tridimensionnel*

En élasticité tridimensionnelle, il est nécessaire de recourir à une description à trois paramètres (tels trois angles d'Euler) et la dérivation des conditions d'optimalité devient beaucoup plus ardue. Pour les matériaux employés en optimisation topologique, il est également possible de montrer la stationnarité de l'énergie de déformation lors de l'alignement des axes matériels, des axes principaux de déformation et de contrainte (Cinquini et Rovati, 1993). Cependant, la solution générale du problème tridimensionnel reste toujours un problème ouvert.

### **3.4.3 Algorithme de résolution numérique du problème du minimum de l'énergie élastique**

#### *Résoudre le problème du minimum de l'énergie par un critère d'optimalité*

La solution analytique du problème de l'orientation optimale des matériaux orthotropes pour maximiser leur raideur sert de base à une stratégie de résolution itérative sous la forme d'un critère d'optimalité. Puisque l'on sait qu'à l'optimum, l'orientation du composite est celle des directions principales de déformation, on va remettre à jour l'angle d'orthotropie local suivant l'angle des déformations principales, calculé dans la configuration actuelle. La résolution numérique du problème du minimum de l'énergie de déformation repose sur la procédure itérative suivante :

- 1° Réaliser une analyse éléments finis (E.F.) de la structure.
- 2° Pour les résultats E.F. obtenus, calculer pour chaque élément les directions des déformations principales .
- 3° Si le matériau est faible en cisaillement,  $\psi_{opt}=0$ ,  
sinon évaluer le paramètre  $\gamma$ .
- 4° Sur la base du tableau 3.1, déterminer le nouvel angle matériel par rapport à la déformation principale  $\epsilon_1$ .
- 5° Vérifier un critère de convergence.  
Si le critère n'est pas satisfait, retourner en 1°.

Toutes autres variables fixées, la procédure crée une suite de conception qui converge rapidement vers une solution stationnaire. Selon Pedersen (1993), 5 à 10 itérations sont généralement nécessaires pour satisfaire à un critère d'arrêt peu précis sur les variables. Par contre, la vitesse de convergence des valeurs de l'énergie totale est beaucoup plus rapide.

Il faut encore signaler que, pour un matériau orthotrope donné, le problème de la répartition optimale de son orientation est un problème de paramètre distribué, qui n'est pas bien posé en général. Selon Fedorov et Cherkav (1983), ce problème doit être relaxé par l'introduction d'un laminé dont les couches sont constituées à partir du matériau orthotrope de base dans plusieurs rotations variables. Ce nouveau composite permet d'étendre l'espace de conception, c'est-à-dire l'ensemble des matériaux admissibles, pour atteindre tous les matériaux obtenus à la limite par l'assemblage microscopique de couches d'orientations différentes.

### Résolution du problème d'orientation optimale en optimisation topologique

Ce critère d'optimalité a été utilisé pour résoudre le problème angulaire en optimisation topologique par Bendsøe (1989), ensuite par Suzuki et Kikuchi (1991). Puisque les microstructures employées en optimisation topologique introduisent une faible raideur en cisaillement, la solution optimale correspond simplement à l'alignement des axes d'orthotropie avec les directions des déformations principales. A l'optimum, les directions de déformations principales sont également confondues avec les directions des contraintes principales. L'expérience numérique a montré qu'en pratique, il était beaucoup plus efficace d'aligner l'angle matériel sur le repère des contraintes principales. L'explication que nous pouvons fournir à cette observation tient dans la constatation que le repère des contraintes principales se trouve toujours situé entre le repère d'orthotropie et le repère des déformations principales. En effet, l'anisotropie de la raideur est telle que la présence d'un axe matériel fort "attire" la plus grande contrainte vers l'axe de plus grande raideur. Les modifications de la remise à jour des angles d'orthotropie sont plus douces et la convergence est plus rapide.

Par ailleurs, nous avons essayé de perfectionner ce critère d'optimalité. La remise à jour de l'angle d'orthotropie est effectuée indépendamment des nouvelles valeurs des variables de microstructure puisque les problèmes sont découplés. Nous avons tenté d'introduire un couplage en déterminant la modification au premier ordre de l'angle des contraintes principales consécutivement au changement des valeurs des paramètres de microstructure. Nous avons modifié le critère d'optimalité de sorte qu'on aligne l'angle d'orthotropie avec l'angle corrigé au premier ordre :

$$\Psi \approx \Psi(\mu^0, \gamma^0, \theta^0) + \sum_e \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \mu_e} (\mu_e^* - \mu_e^0) + \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma_e} (\gamma_e^* - \gamma_e^0) \right\} \quad (3.96)$$

La correction du premier ordre est souvent de l'ordre de quelques degrés. Le calcul exige, cependant, l'analyse de sensibilité de l'angle des contraintes principales. Cette évaluation, qui dépend de la sensibilité des contraintes au sein de chaque élément, demande la connaissance des dérivées des déplacements généralisés et donc la résolution de nombreux cas de charges additionnels. Malheureusement, la correction, qui est coûteuse, n'apporte pas un gain de convergence significatif par rapport à l'investissement consacré aux calculs supplémentaires. En conséquence, le critère d'optimalité, corrigé au premier ordre, n'est pas utilisé en pratique dans nos applications.

#### 3.4.4 Minimum d'une combinaison linéaire convexe d'énergies potentielles de déformation

L'introduction de plusieurs cas de charge ou de plusieurs fréquences propres de vibration donne lieu à un problème que l'on peut identifier au problème standard du minimum d'une combinaison linéaire convexe d'énergies de déformation :

$$\Phi = \sum_{k=1}^K w^k u_e(u^k) \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^K w^k = 1 \quad (3.97)$$

Chaque mise en charge  $k$  entraîne un champ de déformation  $\varepsilon_{ij}^k$  au sein de la structure. Il s'agit alors de minimiser la grandeur :

$$\Phi = \sum_{k=1}^K w^k \left[ \frac{1}{2} D_{11} \varepsilon_{11}^{k2} + \frac{1}{2} D_{22} \varepsilon_{22}^{k2} + D_{12} \varepsilon_{11}^k \varepsilon_{22}^k + 2D_{66} \varepsilon_{12}^{k2} \right] \quad (3.98)$$

Il est toujours possible, pour chaque cas de charge, d'exprimer les déformations en termes des déformations principales  $\varepsilon_I^k$  et  $\varepsilon_{II}^k$  (avec toujours la convention  $|\varepsilon_I^k| \geq |\varepsilon_{II}^k|$ ) :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^k = \frac{1}{2} (\varepsilon_I^k + \varepsilon_{II}^k) + (\varepsilon_I^k - \varepsilon_{II}^k) \cos 2\psi^k \\ \varepsilon_{22}^k = \frac{1}{2} (\varepsilon_I^k + \varepsilon_{II}^k) - (\varepsilon_I^k - \varepsilon_{II}^k) \cos 2\psi^k \\ \varepsilon_{12}^k = -\frac{1}{2} (\varepsilon_I^k - \varepsilon_{II}^k) \sin 2\psi^k \end{cases} \quad (3.99)$$

Dans cette expression, on désigne par  $\psi^k$  l'angle de rotation du repère matériel par rapport au repère des déformations principales du  $k^{\text{ième}}$  cas de charge. On est intéressé par la connaissance de l'orientation du repère matériel dans le système de coordonnées de référence, notée par l'angle  $\theta$ , qui maximise l'énergie potentielle pondérée  $\Phi$ . On fait apparaître l'angle  $\psi^k$  par la relation  $\psi^k = \theta - \alpha^k$  où  $\alpha^k$  est l'angle de rotation du  $k^{\text{ième}}$  repère des déformations principales.

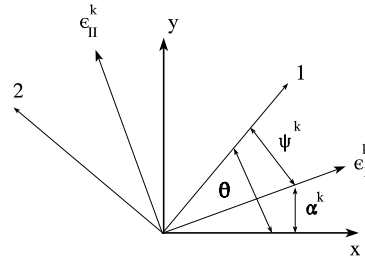


Figure 3.2 : Définitions des repères et des angles

Après avoir introduit ces expressions dans l'équation donnant  $\Phi$  et après avoir dérivé l'expression de  $\Phi$  par rapport à  $\theta$ , on obtient la condition de stationnarité par rapport à  $\theta$  :

$$\sum_{k=1}^K [ -A^k \sin 2(\theta - \alpha^k) + B^k \sin 2(\theta - \alpha^k) \cos 2(\theta - \alpha^k) ] = 0 \quad (3.100)$$

$$\text{avec } A^k = (\varepsilon_I^{k2} + \varepsilon_{II}^{k2}) (D_{11} - D_{22})$$

$$B^k = (\varepsilon_I^k + \varepsilon_{II}^k)^2 (D_{11} + D_{22} - 2D_{12} - 4D_{66})$$

A l'aide de formules de trigonométrie, la condition de stationnarité peut encore être transformée en un polynôme du quatrième ordre en  $\sin 2\theta$  dont on recherche les zéros :

$$P(\sin 2\theta) = a_4 \sin^4 2\theta + a_3 \sin^3 2\theta + a_2 \sin^2 2\theta + a_1 \sin 2\theta + a_0 \quad (3.101)$$

Pour faciliter l'écriture de ce polynôme, on a posé

$$\begin{aligned} a_4 &= z_3^2 + z_4^2, & a_3 &= 2z_1z_4 - 2z_3z_2 \\ a_2 &= z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2, & a_1 &= 2z_2z_3 - 2z_1z_4 \\ a_0 &= \frac{1}{4}z_3^2 - z_1^2. \end{aligned} \quad (3.102)$$

et

$$\begin{aligned} z_1 &= \sum_{k=1}^K w^k A^k \sin 2\alpha^k, & z_2 &= \sum_{k=1}^K w^k A^k \cos 2\alpha^k, \\ z_3 &= \sum_{k=1}^K w^k B^k \sin 4\alpha^k, & z_4 &= \sum_{k=1}^K w^k A^k \cos 4\alpha^k. \end{aligned} \quad (3.103)$$

La fonction  $\Phi$  est périodique de sorte qu'il existe au moins 2 des racines du polynôme P qui soient réelles. Puisque P est du quatrième ordre, on peut en rechercher la solution de manière analytique ou de manière numérique. Le maximum global est trouvé en évaluant  $\Phi$  pour les quatre ou huit angles de stationnarité possibles.

## 3.5 Applications

### 3.5.1 Résolution d'un problème fondamental

Nous allons, maintenant, montrer comment nous appliquons les principes de la résolution du problème de topologie, en résolvant le problème de conception d'une poutre cantilever courte soumise à flexion. Ce problème académique a été abordé par de nombreux auteurs dont Bendsøe, Díaz et Kikuchi (1993). Le domaine de conception est un rectangle de longueur et largeur 16 x 10 m. Un des petits côtés est encastré, tandis que l'autre est chargé en son milieu par une force répartie sur une petite surface. Il n'y a qu'un seul cas de charge et la résultante de la force vaut 11.112 N. L'épaisseur de la tôle est unitaire ( $t=1m$ ) et les propriétés du solide de référence sont :  $E=100$  GPa et  $\nu=0.3$ . On recouvre le domaine de conception avec un maillage de 56x36 éléments finis du second degré. On résout le problème fondamental de la topologie; on minimise la compliance de la structure pour un volume de matière limité à 37,5% du volume du domaine de conception.

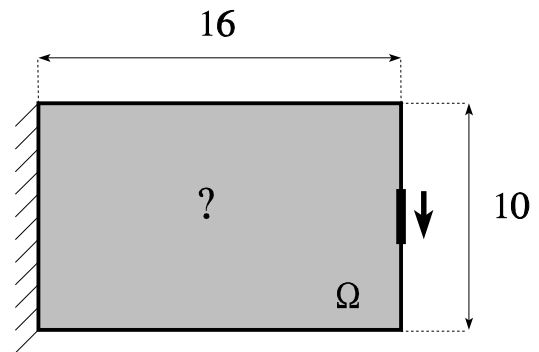


Figure 3.3 : Géométrie du problème de la poutre cantilever courte

La microstructure choisie est une "double microstructure de Hashin" que nous décrirons au chapitre 4. Cette microstructure résulte de l'association de fibres de matière et d'une matrice poreuse. La microstructure est complètement décrite par deux paramètres de densité, mais comme les propriétés macroscopiques sont orthotropes, l'ensemble des variables de conception comprend aussi l'angle d'orthotropie. Le problème d'optimisation comporte 6048 variables de conception.



La distribution initiale de densité est uniforme, mais les propriétés mécaniques sont légèrement orthotropes. La compliance initiale vaut 0,1051 Nm. La décroissance de la compliance est très rapide durant les 10 premières itérations. La valeur de la compliance est à moins de 1% de sa valeur optimale. La distribution de matériau n'est cependant pas encore terminée. Le processus d'optimisation se poursuit très lentement durant encore 40 itérations pour satisfaire à un critère d'arrêt sévère sur les modifications des variables de conception. Après 50 itérations, on arrête l'optimisation alors que la maximale des modifications des variables entre deux itérations est proche de  $0.3E-2$  pour les variables de microstructure et proche de 0.1 degré pour les variables d'angle. La distribution optimale de matière est donnée à la figure 3.4. La compliance optimale vaut à ce moment  $0.5733E-1$  Nm.

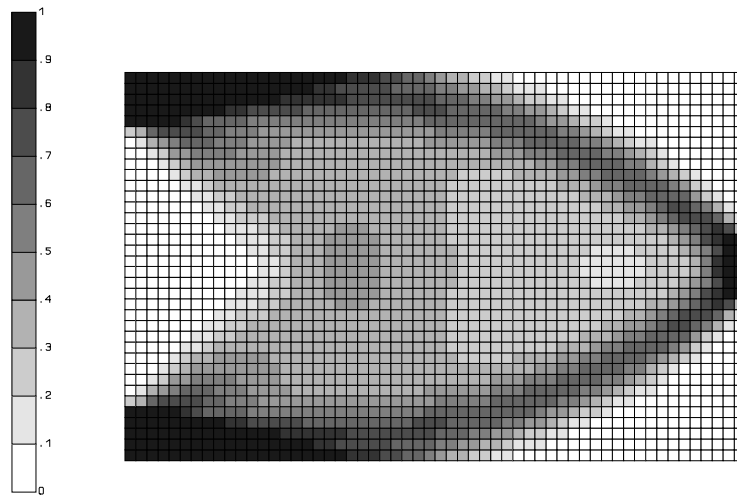


Figure 3.4 : Distribution de matière optimale

A chaque itération on scinde le problème d'optimisation en deux sous-problèmes: le premier pour les variables de microstructure, le second, pour les angles d'orthotropie.

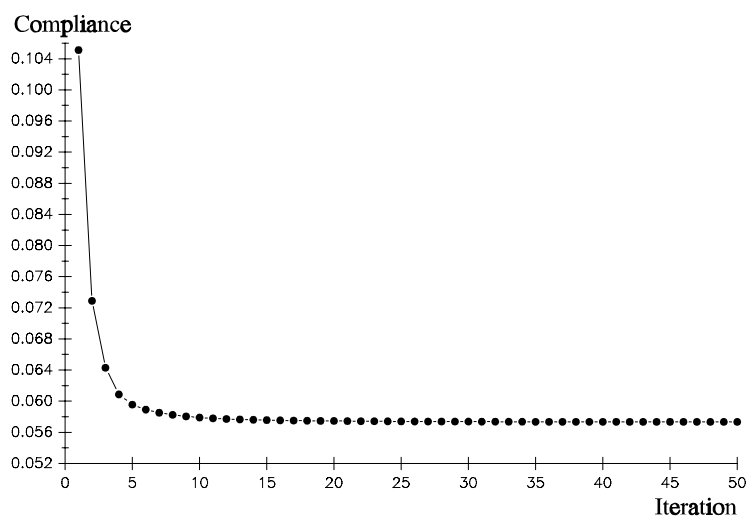


Figure 3.5 : Histoire de la compliance au cours du processus d'optimisation

L'optimisation des 4032 variables de microstructure est effectuée avec le logiciel d'optimisation CONLIN (Fleury, 1989b). Puisque toutes les dérivées de la compliance sont négatives, l'approximation mixte CONLIN restitue l'approximation obtenue en passant aux variables inverses. Au contraire, toutes les dérivées du volume sont positives, de sorte que l'on retrouve l'approximation linéaire. Puisque le problème fondamental ne comporte qu'une seule contrainte, la méthode duale utilisée avec ces deux approximations est équivalente à une technique de critère d'optimalité.

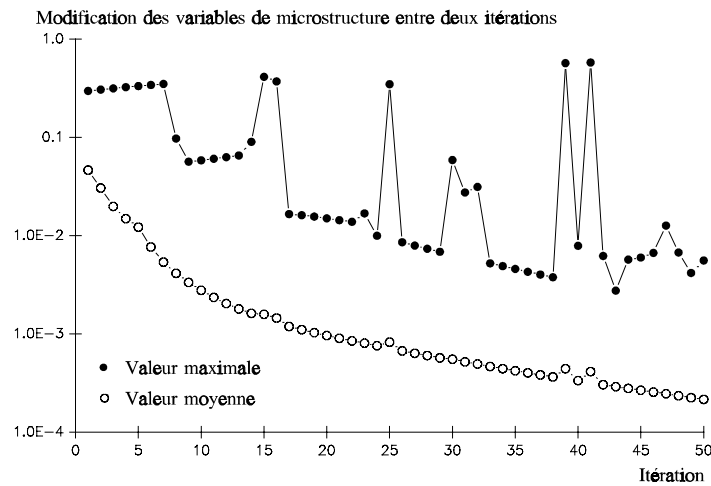


Figure 3.6 : Modification des variables de microstructure entre deux itérations

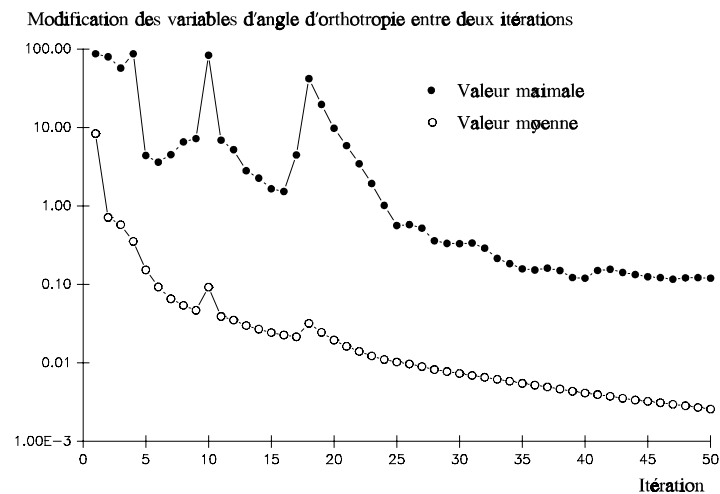


Figure 3.7 : Modification des variables d'angle d'orthotropie entre deux itérations (en degrés)

La figure 3.6 montre que la modification des variables de conception entre deux itérations s'atténue progressivement. La modification moyenne des variables diminue de façon régulière. La modification maximale des variables connaît une évolution moins régulière, mais globalement décroissante.

Le problème d'orientation optimale est résolu en utilisant le critère d'optimalité basé sur la solution analytique de Pedersen (1989). Comme le montre la figure 3.7, la modification moyenne des angles entre deux itérations diminue petit à petit. La diminution de la modification maximale d'une variable quelconque connaît quelques perturbations.

### 3.5.2 Résolution d'un problème de conception avec plusieurs cas de charge

On considère maintenant un problème de conception pour lequel il faut prendre en compte trois cas de charge. Le problème est inspiré d'un problème de dimensionnement de treillis 3 barres résolu par Sheu et Schmit (1972) et ensuite adapté à la topologie par Fukushima, Suzuki et Kikuchi (1993).

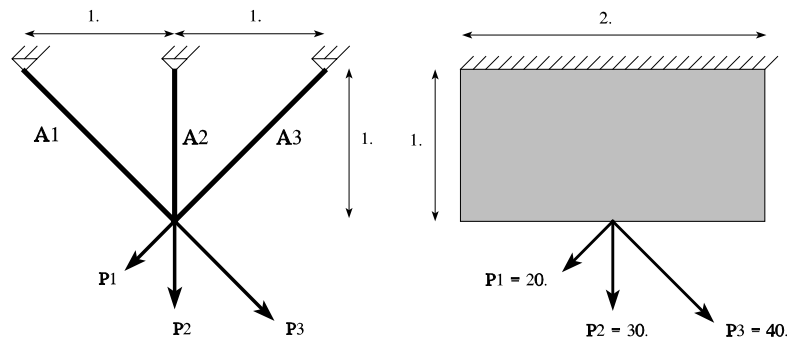


Figure 3.8 : Problème de topologie correspondant au treillis 3 barres

Comme on le voit à la figure 3.8, le domaine de conception est un rectangle de dimensions 2x1m capable de contenir le treillis trois barres de la structure originale. Une des longueurs est encastree tandis que les différents cas de charge sont appliqués au centre du côté opposé. L'intensité des efforts appliqués vaut respectivement  $P_1=20$  N,  $P_2=30$  N et  $P_3=40$  N.

On choisit une loi de raideur-densité très simple dans laquelle la pénalisation des densités intermédiaires est réalisée par une fonction de type puissance:  $E = \mu^p E^0$  et  $\rho = \mu \rho^0$ . Le matériau choisi est un matériau standard de type acier :  $E^0=100$ . GPa et  $\nu=0.3$ .

On minimise la compliance maximale sur les trois cas de charge. Le problème est mis sous sa forme différentiable. Sous cette forme, le problème d'optimisation comprend quatre contraintes et la résolution peut être abordée sans difficulté avec l'optimiseur CONLIN (Fleury 1989b, 1991b). Dans le sous-problème d'optimisation, chaque compliance est remplacée par un développement mixte CONLIN. Comme le matériau est isotrope, il n'y a pas de variable d'angle d'orthotropie et le problème de l'orientation optimale est évité, sans nuire à la qualité du résultat comme nous le verrons.

La figure 3.9 présente l'évolution des fonctions objectives au cours des itérations, alors que la figure 3.10 donne la modification des variables de conception entre deux itérations au cours du processus d'optimisation. La figure 3.11 montre l'évolution de la distribution de densité au fur et à mesure que

l'optimisation progresse. Dans les premières itérations, c'est le cas de charge 3 qui possède la force d'intensité la plus importante et qui est prédominant. Ensuite, l'écart entre les trois compliances se réduit fortement et dès la dixième itération environ, les compliances des cas de charge 2 et 3 sont quasi égales et elles deviennent simultanément actives dans le problème de conception. Quant à la compliance du premier cas de charge, elle est légèrement inférieure à celle des deux autres. Après avoir influencé la distribution de densité au cours des premières itérations, elle n'intervient plus dans la distribution finale.

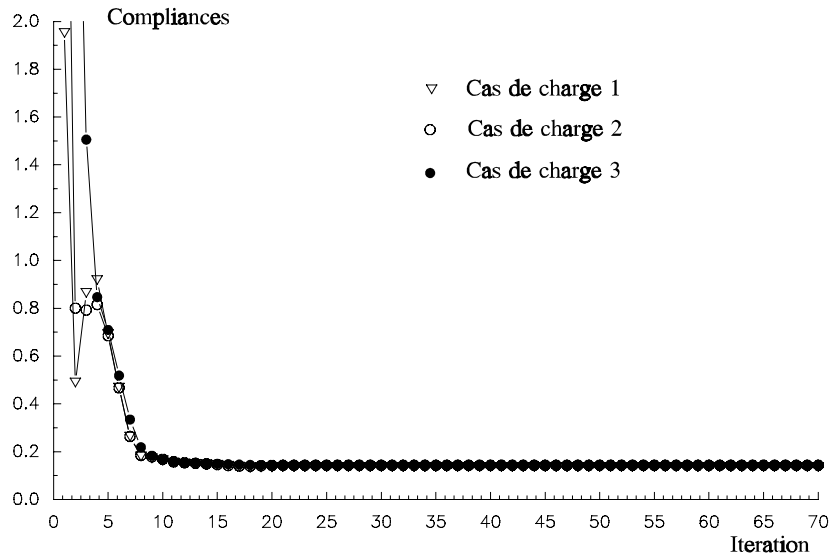


Figure 3.9 : Courbes d'évolution des fonctions objectifs

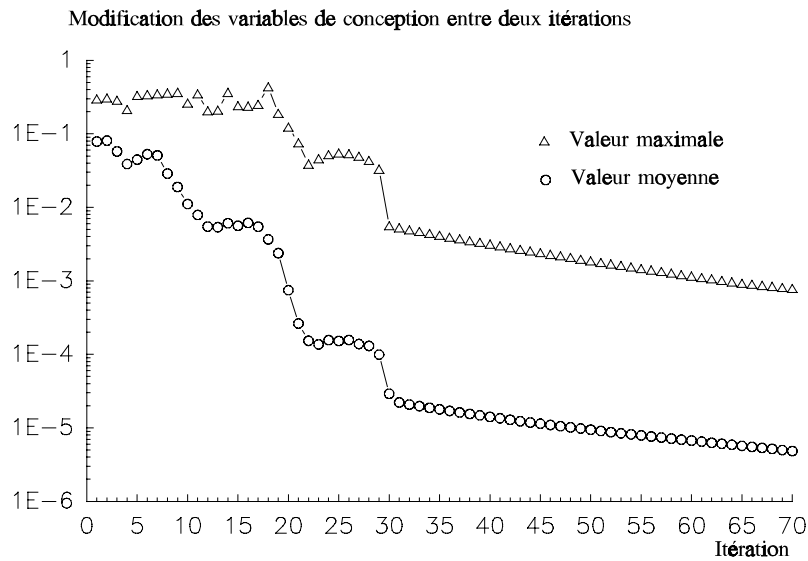


Figure 3.10 : Modifications des variables de conception entre deux itérations

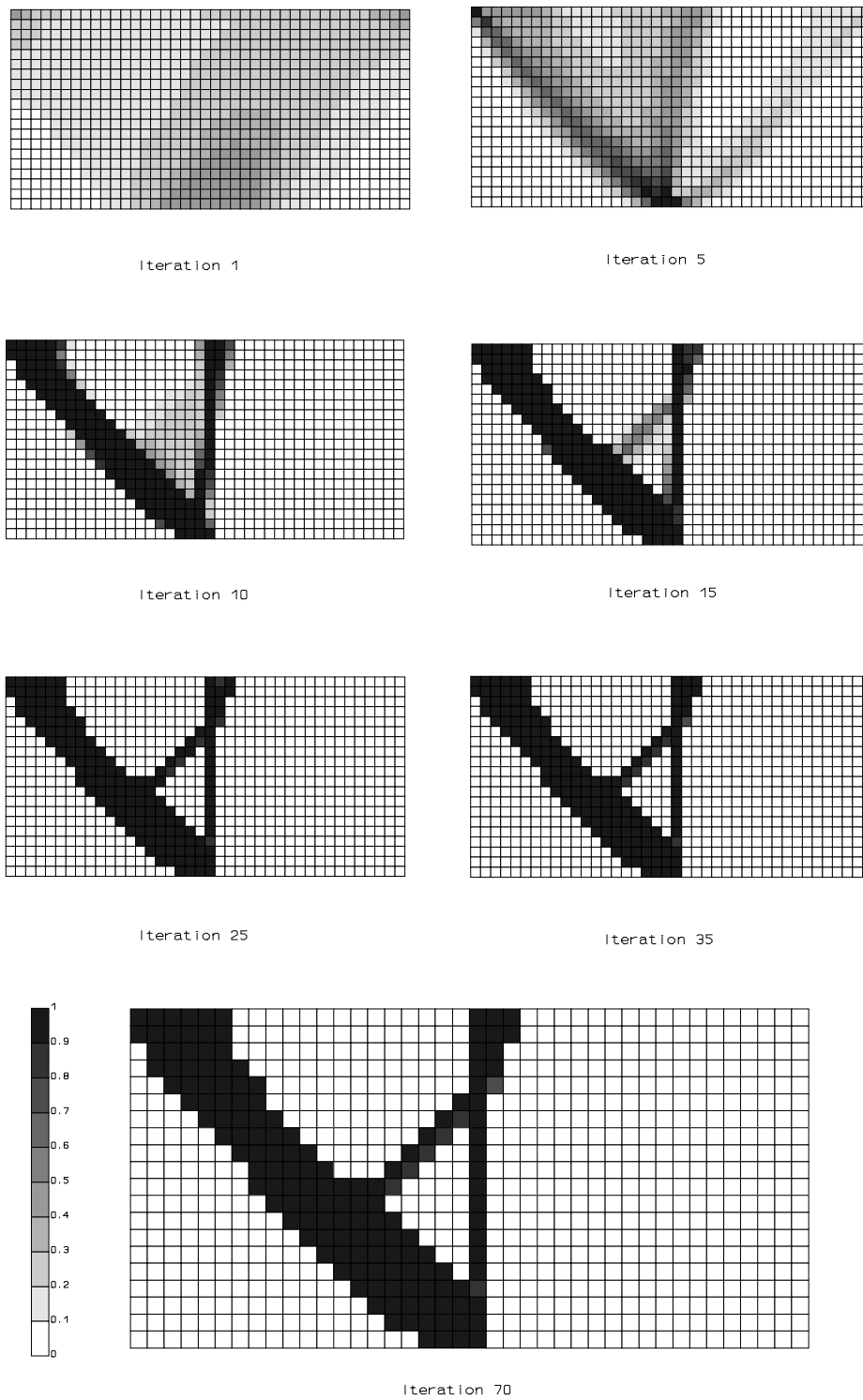


Figure 3.11 : Evolution de la distribution de densité au cours du processus d'optimisation

L'enveloppe du maximum des compliances suit une évolution relativement douce. Par contre, comme on le voit aux itérations 4 à 8, la courbe de chaque compliance est plus accidentée. Après l'itération 20, la valeur des compliances reste quasi stationnaire. A contrario, la courbe d'évolution de la modification des variables de conception diminue lentement et de manière parfois saccadée.

La distribution de matière optimale correspond à un treillis 2 barres; la barre A3 qui est alignée sur le premier cas de charge a disparu. La modification de topologie du treillis 3 barres aurait été impossible par un procédé d'optimisation des dimensions transversales des barres. L'optimisation topologique suggère non seulement d'enlever une barre, mais elle donne aussi une estimation des sections transversales des éléments. En première approximation, on voit que la section A1 est 5 fois plus importante que la section A2.

La présence de la béquille entre les 2 barres est apparue après l'itération 15. Il semble qu'elle se soit formée avec le "nuage" de matière poreuse qui se trouve entre les 2 barres. Il est donc probable que cette barre soit le reflet d'un optimum local.

### 3.6 Conclusion

Le chapitre 3 nous a permis d'exposer les principes de la résolution des problèmes d'optimisation topologique.

Nous avons commencé par aborder l'analyse de sensibilité du premier et du second ordre. Nous avons insisté sur les caractéristiques spécifiques des grandeurs structurales rencontrées en topologie : l'énergie de déformation et les fréquences propres de vibration.

Nous avons ensuite établi les conditions d'optimalité de différents problèmes de topologie. L'analyse des conditions d'optimalité a montré qu'au premier ordre, les problèmes d'optimisation relatifs aux variables de microstructure et aux angles d'orthotropie sont séparés. A partir de cette observation, nous avons adopté un schéma de résolution où ces deux problèmes partiels d'optimisation sont résolus de manière indépendante et séquentielle.

Dans un troisième temps, nous avons décrit les principales caractéristiques du problème d'optimisation relatif aux variables de microstructures. Nous avons proposé de le résoudre par une stratégie dans laquelle on remplace les réponses structurales par une approximation convexe, pour former un sous-problème d'optimisation et ensuite le résoudre par une méthode duale. Les détails de la résolution feront l'objet du chapitre 5.

Le problème d'optimisation des variables d'angle est traité par une technique de critère d'optimalité. Nous avons rappelé les résultats principaux de la solution du problème d'orientation optimale et nous avons montré de quelle manière nous utilisons ce critère de remise à jour des angles d'orthotropie.

Dans ce chapitre, notre contribution a porté essentiellement sur deux points.

- Nous pensons avoir contribué à promouvoir l'approche de programmation mathématique pour la résolution du problème de microstructure en topologie. Nous ne revendiquons pas la paternité exclusive de cette idée qui, de toute évidence, était répandue dans une certaine partie de la communauté scientifique. Il convient de comprendre notre mérite comme celui d'avoir suggéré, d'avoir cru et enfin, d'avoir démontré que l'on pouvait se passer des critères d'optimalité pour des problèmes avec un aussi grand nombre de variables. La programmation séquentielle convexe est loin d'être gênée

par la gestion d'un très grand nombre de variables. Cette approche apporte, par contre, une souplesse beaucoup plus grande pour aborder une grande variété de problèmes de conception.

- Nous avons adapté les schémas que la littérature met à notre disposition pour résoudre les problèmes des angles et des paramètres de microstructure. Nous avons introduit une résolution naturelle et objective des problèmes de conception tels que : le problème des cas de charge multiples ainsi que les problèmes vibratoires impliquant plusieurs fréquences propres. Pour résoudre le problème d'orientation optimale associé à ces deux types de problèmes, nous avons identifié les facteurs de pondération intervenant dans la formulation générale du problème angulaire, en fonction des multiplicateurs de Lagrange issus du problème de microstructure. En traitant ainsi des problèmes plus complexes que le problème fondamental, nous pensons donc avoir participé à rendre l'optimisation topologique plus proche des problèmes de conception pratiques.

## Chapitre 4 :

# HOMOGENEISATION DES MATERIAUX COMPOSITES POREUX

### 4.0 Introduction

L'optimisation topologique envisagée sous la forme d'une distribution optimale de matière est liée à la notion de matériau composite poreux. L'introduction de matériaux de densité intermédiaire entre le vide et le solide constitue d'une part, une facilité pour calculer la solution en variables continues et pour éviter la résolution discrète du problème. Mais, d'autre part, elle est nécessaire pour assurer l'existence de la solution calculée en relaxant le problème original dont l'ensemble de conception se trouve élargi.

L'approche est consistante si on est capable de modéliser les matériaux perforés et d'en décrire les propriétés matérielles en fonction de la densité relative. Dans l'arbitraire, on peut émettre différentes hypothèses sur la géométrie de la perforation microscopique, les propriétés équivalentes sont alors fortement dépendantes du modèle microscopique sélectionné.

Pour la conception des structures, il est surtout intéressant de savoir décrire quelle est l'influence du choix de la microstructure sur la distribution optimale de matière. Pour cela, il faut pouvoir identifier et analyser plusieurs critères caractéristiques ayant des répercussions sur le résultat de l'optimisation. Il est temps de préciser la nature et l'influence de la relaxation introduite par les différents matériaux composites poreux utilisés. On a constaté que la non-linéarité des propriétés élastiques vis-à-vis de la densité relative est un paramètre important du problème en question. Nous y ferons constamment allusion. Les matériaux feuilletés de rang 2 qui sont connus pour offrir une relaxation complète du problème de distribution de matière nous serviront de valeur de référence pour toutes les comparaisons qui seront nécessaires au cours de ce chapitre.

La méthode d'optimisation topologique mise en évidence par Kikuchi et Bendsøe (1988) s'appuie sur l'outil d'homogénéisation des matériaux à microstructures périodiques. Après des premières études basées sur des microperforations rectangulaires périodiques, l'optimisation topologique s'est rapidement tournée vers les *matériaux feuilletés de rang 2* mis en évidence par Bendsøe (1989). Cette classe de matériaux bénéficie de propriétés de raideur extrême parmi l'ensemble de tous les matériaux de même densité (Avellaneda, 1987). Plus tard, Kohn (1990) a montré que ce type de matériaux en couches offrait la *relaxation complète du problème de conception fondamentale* de la topologie et qu'il garantissait ainsi l'existence de la solution. L'emploi de microstructures différentes telles que des microperforations rectangulaires de la cellule de base (Kikuchi et Bendsøe, 1988) peut s'interpréter comme une *relaxation partielle* du problème de conception (Haber, Jog et Bendsøe, 1994).

Sur la base d'une idée originale suggérée par Bendsøe (1989), il est encore possible d'obtenir des résultats de topologie en injectant une approximation différentiable des coefficients matériaux en fonction de la densité relative. La pénalisation des matériaux intermédiaires y est décrite par une relation de type puissance entre les coefficients élastiques de la densité relative. Cette approche est généralement connue sous le vocable de *Simple Isotropic Material with Penalization* (SIMP). Malgré le caractère purement artificiel du matériau, de nombreux résultats probants ont été obtenus par Mlejnek et collaborateurs (1991, 1993) ou par Rozvany et Zhou (1991, 1992, 1993b, 1993c). De notre côté, ce matériau nous a permis d'obtenir des résultats de qualité pour de nombreux exemples pratiques. Cependant, compte tenu de l'absence de toute microstructure, la convergence théorique de



ces résultats vers une solution indépendante du maillage n'existe pas pour le problème fondamental.

Une idée identique à celle que l'on trouve dans le choix des matériaux SIMP est à l'origine des travaux de Mlejnek et de ses collaborateurs (1991, 1993). Pour créer des solutions où le vide et le solide sont nettement séparés, Mlejnek propose une relation fonctionnelle entre les raideurs moyennes et la densité qui soit simple et qui pénalise plus fortement les densités intermédiaires que ne le font les matériaux feuilletés de rang 2. Cette loi d'homogénéisation provient d'une méthode énergétique approchée.

Malgré la littérature abondante sur le sujet, il était alors encore possible de se poser des questions. À côté de ces deux voies présentes dans la littérature, est-il possible de dégager une topologie avec d'autres matériaux ? Quelle est l'influence de la nature de la loi raideur-densité relative sur la conception topologique ? Peut-on trouver d'autres matériaux de porosité variable qui allieraient les avantages d'une microstructure et d'une loi analytique aussi simple que celle de matériaux SIMP ?

Nous pensons que les caractéristiques de différents matériaux formés de vides et de matières pouvaient s'obtenir au moyen de la *théorie de la micromécanique classique*. Ce fait est possible pour certaines microstructures suboptimales ou partiellement optimales. Nous avons émis l'idée qu'un milieu rempli de *micro-inclusions sphériques* était de nature à fournir un moyen de produire des topologies de manière adéquate. Parallèlement à nos travaux, cette hypothèse fut également émise par Gea (1994). Nos propres travaux font cependant plus que confirmer les conclusions de Gea. Nous donnons une analyse plus générale de ce matériau et de l'origine de son aptitude à être utilisé en topologie. Notre approche remplace aussi la structure de Hashin dans le cadre plus général du *G-Closure* et par conséquent elle montre la qualité des hypothèses qui justifient son utilisation en topologie. Nous soulignerons aussi que la pénalisation des densités intermédiaires des inclusions sphériques se rapproche de celle du matériau pseudo-isotrope de rang 2.

Nous montrerons que l'on peut obtenir des résultats de topologie avec des microstructures non optimales. Pour une structure plane, cette thèse montre que l'on peut adopter un modèle de *perforations cylindriques* perpendiculaires au plan de la structure et obtenir des résultats de topologie cohérents. Une famille de lois d'homogénéisation peut être dégagée à partir des lois de Halpin et Tsai (1969). La présence d'un paramètre de renforcement  $\xi$  permet de couvrir un ensemble très complet de relations non linéaires entre la raideur et la densité relative. Encore une fois, on y retrouve le matériau feuilleté pseudo-isotrope de rang 2 comme cas particulier.

Nous avons enfin imaginé une microstructure à 2 niveaux, basée sur les deux microstructures de Hashin. Le matériau orthotrope poreux se compose d'une matrice composite poreuse réalisée avec le modèle des sphères composites et d'un assemblage de fibres faites dans le solide de référence. Cette microstructure inédite possède, elle aussi, des propriétés optimales. Quant à son utilisation numérique, elle se prête très facilement à la résolution numérique où elle donne des résultats très intéressants.

Le chapitre se terminera par une comparaison des différents matériaux sur une application académique classique : la détermination de la topologie d'une poutre cantilever courte. Pour les différents matériaux envisagés au cours du chapitre, on montre clairement la constance de la silhouette de la topologie. Cependant, l'influence de la non-linéarité de la relation entre la raideur et la densité se marque sur la présence de zones de densités intermédiaires et sur la génération d'une silhouette de type vide-solide.

## 4.1 Le concept d'homogénéisation et la modélisation des matériaux composites

### 4.1.1 Définition opérationnelle de la science des matériaux

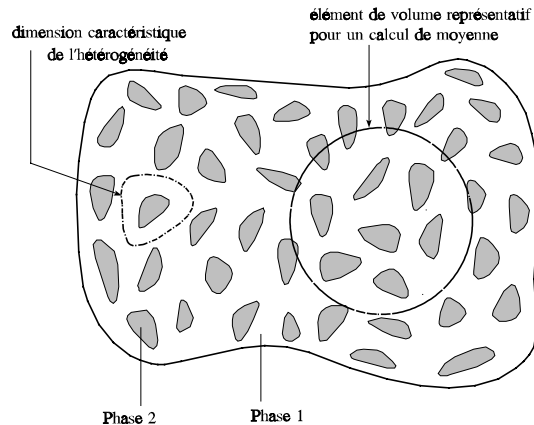


Figure 4.1 : Homogénéisation d'un matériau

A une échelle suffisamment petite, tous les matériaux sont hétérogènes, même les matériaux communément appelés homogènes. Cependant, lors de la conception d'une structure macroscopique, l'échelle est si grande que l'on observe une moyenne statistique des propriétés microscopiques et il est licite de faire l'hypothèse de continuité de la matière. Une fois l'hypothèse de continuité admise, le concept d'homogénéité s'en déduit. Le milieu homogène est celui qui possède des propriétés identiques en chaque point.

Pour l'ingénieur, le concept d'hétérogénéité intervient chaque fois que les propriétés varient en fonction du point. Cette variation peut être soit continue, soit discontinue, ce qui est le cas dans les matériaux composites. Pour un matériau composite, les propriétés ponctuelles subissent des discontinuités au passage des interfaces entre les différentes phases constituantes qui, par contre, sont généralement considérées comme homogènes et isotropes.

Supposons que l'on ait une phase notée 2, dont les inclusions sont dispersées dans une phase notée 1 formant ce qu'on appelle la matrice. Comme représenté sur la figure 4.1, il existe généralement une *dimension caractéristique de l'hétérogénéité*. En pratique, cette distance est une distance moyenne qui est le reflet d'une distribution statistique. Par exemple, pour un composite unidirectionnel, la dimension caractéristique est la distance entre deux fibres. Supposons que l'échelle de la non-homogénéité soit petite en comparaison de l'échelle de la structure et de la distance caractéristique avec laquelle les charges et les conditions aux limites varient. Supposons également que cette échelle reste assez grande pour que l'on puisse toujours appliquer une théorie des milieux continus. On peut alors exhiber *une échelle représentative pour un calcul de moyenne de dimension  $\delta$*  à partir de laquelle les propriétés du matériau peuvent être moyennées avec une bonne précision. Si les propriétés effectives déduites de l'analyse de tout échantillon de dimension  $\delta$  sont indépendantes de l'endroit où il est prélevé, on parle d'*homogénéité statistique*. L'échelle à laquelle on fait le calcul de moyenne se situe entre l'échelle microscopique (les constituants) et l'échelle macroscopique (la structure), de sorte qu'elle est appelée par certains auteurs *échelle mésoscopique ou miniscopique*. Si une telle dimension existe et si on peut parler d'homogénéité statistique, le matériau peut être considéré comme homogène et le calcul de la structure globale peut être réalisé avec ses propriétés moyennes. On parle alors

d'*homogénéité macroscopique*. Le processus par lequel un matériau hétérogène à l'échelle microscopique est "rendu homogène" est encore appelé le processus d'*homogénéisation*.

#### 4.1.2 La théorie micromécanique

L'utilisation des définitions opérationnelles de la science des matériaux pour modéliser et pour calculer la valeur des coefficients homogénéisés fait l'objet de la *théorie micromécanique*. Depuis les années 60, l'analyse micromécanique a fait l'objet de nombreux travaux dont les principaux résultats peuvent être trouvés dans plusieurs ouvrages de synthèse : Hashin (1983), Christensen (1979) ou Aboudi (1991) par exemple. L'approche micromécanique étudie le comportement d'un élément de volume représentatif au moyen des outils de la mécanique des solides en faisant éventuellement des hypothèses simplificatrices ou des modélisations.

On distingue deux approches possibles pour déterminer les coefficients moyens. Dans l'*approche directe*, les coefficients élastiques moyens  $E_{ijkl}^*$  et  $S_{ijkl}^*$  sont ceux qui relient les déformations moyennes  $\bar{\epsilon}_{ij}$  et les contraintes moyennes  $\bar{\sigma}_{ij}$  sur un volume représentatif de dimension  $\delta$  :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij} &= E_{ijkl}^* \bar{\epsilon}_{kl} \\ \bar{\epsilon}_{ij} &= S_{ijkl}^* \bar{\sigma}_{kl}\end{aligned}\quad (4.1)$$

Pratiquement, on les détermine en appliquant des conditions de contrainte ou de déformation sur la frontière appelées *conditions aux limites "homogènes"*, c'est-à-dire des conditions aux limites qui produiraient des champs de déformation ou de contrainte homogènes dans un corps homogène. Le théorème de la déformation moyenne (Aboudi, 1991) montre que l'application de conditions "homogènes" de déformation sur la frontière d'un échantillon de référence de volume  $V$  produit une déformation moyenne identique à celle que l'on applique sur la frontière :  $\bar{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij}^0$ . Dans ces conditions, il suffit de calculer les contraintes moyennes pour des déplacements homogènes bien choisis, pour déterminer les coefficients élastiques moyens. On obtient un résultat similaire, connu sous le nom de théorème de la contrainte moyenne, lorsqu'on applique des conditions aux limites "homogènes" sur les contraintes :  $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^0$ .

La seconde manière de procéder est de passer par les grandeurs énergétiques. L'*approche énergétique* se base sur le théorème du travail virtuel, écrit dans le cas particulier de conditions aux limites homogènes :

$$\begin{aligned}U_e &= \frac{1}{2} E_{ijkl}^* \bar{\epsilon}_{ij} \bar{\epsilon}_{kl} = W_e V \\ U_\sigma^c &= \frac{1}{2} S_{ijkl}^* \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{kl} = W_\sigma^c V\end{aligned}\quad (4.2)$$

où  $W_e$  et  $W_\sigma^c$  sont les densités d'énergie calculées par unité de volume de référence de volume  $V$ . Il suffit alors d'appliquer des conditions aux limites homogènes bien choisies et de calculer l'énergie élastique sur le volume de référence pour déterminer les coefficients homogénéisés. On peut démontrer que l'approche énergétique est équivalente à l'approche directe.

### 4.1.3 Homogénéisation et modélisation mathématique des matériaux composites

Plus récemment, l'étude des modules effectifs a attiré l'attention de la communauté des mathématiciens. Ceci a permis de donner des fondements mathématiques solides à la notion d'homogénéisation et d'en étendre le sens avec, notamment, la notion de *G-convergence*. Ces nouveaux développements ont pu montrer toute leur puissance pour le problème qui nous préoccupe: l'optimisation topologique de structures.

Le composite est une idéalisation du comportement du matériau lorsque le rapport  $\varepsilon = \delta/D$  entre la dimension caractéristique de la microstructure et celle de la structure macroscopique tend vers zéro. Pour déterminer le comportement asymptotique de la structure lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , il existe plusieurs théories distinctes qui diffèrent par la nature des hypothèses faites pour modéliser la microstructure. La théorie des **composites à microstructure périodique** postule l'existence d'un domaine microscopique constitué par la répétition infinie sur l'espace d'une configuration élémentaire, appelée *cellule de base*. Les **composites à microstructures aléatoire** sont ceux pour lesquels la microstructure est générée par un processus stochastique dont les caractéristiques statistiques sont connues par hypothèse. La troisième approche ne fait aucune hypothèse sur la géométrie microscopique, mais elle fait appel à un théorème de compacité (fermeture) pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles. Cette dernière théorie connue sous le nom de *G-convergence* ou d'**homogénéisation des opérateurs différentiels et des fonctionnelles intégrales** représente peut-être l'approche la plus générale, car elle se base sur la convergence des opérateurs et des fonctions intégrales décrivant le comportement du matériau non homogène.

Pour clarifier les différences qui existent entre les trois théories, on compare quelques caractéristiques de chacune d'elles dans le cas de l'homogénéisation d'un composite comprenant deux phases homogènes. Soit  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$  les tenseurs de Hooke des deux phases. Les propriétés élastiques du composite varient localement. On introduit le paramètre  $\varepsilon$  qui représente l'ordre de grandeur de la microstructure, tout au moins pour les composites périodiques et pour les composites à microstructure aléatoire. On définit la fonction indicatrice de chaque matériau "i" par la fonction  $\chi_i^\varepsilon(\mathbf{x})$  qui vaut 1 sur l'ensemble occupé par le matériau "i" et 0 partout ailleurs. Les fonctions caractéristiques des deux matériaux sont évidemment complémentaires :  $\chi_2^\varepsilon = 1 - \chi_1^\varepsilon$ . Le tenseur local d'élasticité s'écrit :

$$\mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi_1^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}_1 + \chi_2^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}_2 \quad (4.3)$$

Par définition, la microstructure est *périodique* avec une cellule de base spatiale  $Y$ , si  $\chi_i^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi_i(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$  est une fonction du type  $\chi_i(\mathbf{y})$  qui ne prend que les valeurs 0 et 1, et qui est  $Y$ -périodique sur l'espace.

Un arrangement périodique d'inclusions sphériques centrées sur les noeuds d'un réseau cubique de côté  $\varepsilon$  et ayant chacune un rayon égal à  $\varepsilon\rho$  est un exemple de microstructure périodique.

Pour décrire un composite à microstructure *aléatoire*, il faut introduire une variable additionnelle  $\omega$ , appartenant à un espace probabiliste adéquat.  $\chi_i^\varepsilon(\mathbf{x}, \omega) = \chi_i(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \omega)$  est une fonction qui ne prend que les valeurs 0 et 1 et qui décrit un processus stochastique  $\omega \rightarrow \chi_i(\mathbf{y}, \omega)$  défini pour tout  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$  et pour  $\omega$  appartenant à un espace probabiliste approprié. La fonction  $\chi_i$  est invariante par rapport à toute translation, de sorte que  $\omega \rightarrow \chi_i(\mathbf{y} + \mathbf{c}, \omega)$  donne exactement le même processus stochastique pour tout

$\mathbf{c} \in \mathbf{R}^3$ . De plus, les translations sont supposées ergodiques c'est-à-dire que la moyenne sur l'ensemble probabiliste est identique à la moyenne sur l'espace.

Un exemple de modèle aléatoire de microstructure est une famille d'inclusions sphériques de rayons  $\varepsilon\rho$ , qui peuvent éventuellement se recouvrir, et dont les centres ont une position distribuée selon une loi de Poisson, avec laquelle l'espérance mathématique du nombre de sphères dans un cube unitaire est de l'ordre de  $\varepsilon^{-2}$  en état plan ou  $\varepsilon^{-3}$  pour un problème tridimensionnel.

Les hypothèses de microstructures périodiques ou aléatoires sont relativement précises sur la nature de l'échelle microscopique. Au contraire, l'approche de la *G-convergence* ne fait aucune hypothèse semblable.  $\chi_1^\varepsilon(\mathbf{x})$  est une famille de fonctions qui ne prennent que les valeurs 0 et 1, et qui sont paramétrées par  $\varepsilon \rightarrow 0$ . On a en plus  $\chi_2^\varepsilon = 1 - \chi_1^\varepsilon$ .

La notion de *G-convergence* englobe évidemment les microstructures périodiques et les microstructures aléatoires en tant que cas particulier. Mais cette définition est plus générale, car il n'est pas nécessaire que  $\varepsilon$  représente la taille de la microstructure. On pourrait imaginer une suite de fonctions caractéristiques qui répondraient à ces conditions et où il n'y aurait pas de séparation claire entre les échelles macro- et microscopiques. La notion de *G-convergence* contient aussi toute notion raisonnable de matériau composite obtenu par mélange de deux matériaux de base avec une liaison parfaite aux interfaces.

Définissons à présent le tenseur élastique homogénéisé du composite  $\mathbf{E}^*$  au sens mathématique. Il représente simplement le comportement élastique limite du composite lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . En termes des équations du problème, ceci signifie que, pour toute charge  $\mathbf{f}$  indépendante du paramètre  $\varepsilon$ , le déplacement élastostatique  $\mathbf{u}^\varepsilon$  qui satisfait aux équations d'équilibre

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon &= \mathbf{E}^\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon \\ \varepsilon_{kl}^\varepsilon &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^\varepsilon}{\partial x_k} \right) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon &= \mathbf{f} \end{aligned} \quad (4.4)$$

avec des conditions limites adéquates, converge lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  vers  $\mathbf{u}^*$  qui est la solution du système où l'on remplace  $\mathbf{E}^\varepsilon$  par  $\mathbf{E}^*$ .

On compare maintenant les définitions du tenseur homogénéisé propres à chaque théorie. Outre l'aspect de la définition, une question primordiale pour la théorie mathématique est l'existence des modules effectifs  $\mathbf{E}^*$ . Pour une microstructure périodique, le tenseur équivalent peut être défini en fonction de problèmes canoniques sur la cellule de base. Dans cette comparaison, on lui préfère la définition variationnelle équivalente de Suquet (1982) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^* \boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi} &= \min_{\boldsymbol{\phi}} \int_Y \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{y}) (\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi})) : (\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi})) \, d\mathbf{y} \\ \text{avec } \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{y}) &= \chi_1(\mathbf{y}) \mathbf{E}_1 + \chi_2(\mathbf{y}) \mathbf{E}_2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

où  $\boldsymbol{\phi}$  varie parmi tous les champs de déplacements  $Y$  périodiques. La notation  $\mathbf{E}^* \boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\eta}$  représente la contraction  $E_{ijkl}^* \xi_{ij} \eta_{kl}$ .

Pour une *microstructure aléatoire*, la définition du tenseur équivalent  $E^*$  fait appel à la notion d'espérance mathématique notée  $\langle \cdot \rangle$ .

$$E^* \xi : \xi = \min_{\langle \eta \rangle = \xi} \langle \tilde{E} \eta : \eta \rangle \quad (4.6)$$

où  $\eta$  couvre de manière aléatoire tous les champs de déformations de valeur moyenne  $\xi$ .

Pour la théorie de la *G-convergence*, on ne possède pas de définition fonctionnelle aussi explicite. Citons la définition de la *G-convergence* donnée par Jikov *et al.* (1994). La suite de tenseurs élastiques  $E^\epsilon$  est dite *G-convergente* vers  $E^*$  sur un domaine Q si, pour tout chargement  $f \in H^{-1}(Q)$  indépendant de  $\epsilon$ , les solutions  $u^\epsilon$  et  $u^*$  des problèmes de l'élastostatique

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(E^\epsilon \epsilon(u^\epsilon)) &= f & u^\epsilon &\in H^1(Q) \\ \operatorname{div}(E^* \epsilon(u^*)) &= f & u^* &\in H^1(Q) \end{aligned} \quad (4.7)$$

avec des conditions aux limites appropriées, satisfont aux relations de convergence

$$\begin{aligned} u^\epsilon &\rightarrow u^* \text{ dans } H^1(Q) \\ \sigma^\epsilon = E^\epsilon \epsilon(u^\epsilon) &\rightarrow \sigma^* = E^* \epsilon(u^*) \text{ dans } L^2(Q) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Quant à l'existence des coefficients effectifs, elle est assurée par le fait que de toute suite  $\chi_1^\epsilon$  convergente, il est possible d'extraire une sous-suite  $\epsilon' \rightarrow 0$  pour laquelle il existe un tenseur d'élasticité  $E^*$ .

Comme on est souvent intéressé par les bornes du tenseur d'élasticité  $E^*$  en fonction des fractions volumiques des composants, on compare l'expression des fractions volumiques des différents constituants dans chacune des théories. Pour une *microstructure périodique* la fraction volumique du matériau "i" est la proportion qu'il occupe au sein de la cellule de base.

$$\delta_i = \int_Y \chi_i(y) dy \quad (4.9)$$

De manière similaire, dans le *composite aléatoire*, la fraction volumique du matériau "i" est la valeur espérée de  $\chi_i(y, \omega)$  :

$$\delta_i = \langle \chi_i \rangle \quad (4.10)$$

Dans le cadre de la *G-convergence*, la fraction volumique est la limite faible \* dans  $L^\infty$  de  $\chi_1^\epsilon$ .

$$\begin{aligned} \delta_i &= wk^* \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi_i^\epsilon \\ &\Leftrightarrow \\ \forall g \in C^0 : \int \chi_i^\epsilon(y) g(y) dy &\rightarrow \int \delta_i(y) g(y) dy \quad \epsilon \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Toutes ces notions sur les grandeurs effectives sont équivalentes aux notions opérationnelles de la science des matériaux et de la théorie micromécanique. Leur définition précise et leur équivalence avec

les définitions opérationnelles sont très importantes pour la théorie mathématique parce qu'elles rendent possible une définition complètement rigoureuse des propriétés homogénéisées. L'intérêt de ces différentes théories pour l'ingénierie et la science des matériaux est fondé sur le **résultat de densité**: si une relation algébrique peut être établie entre le tenseur des modules effectifs et les fractions volumiques pour toutes les microstructures périodiques possibles, ou pour toutes les microstructures stochastiques possibles, alors cette relation tient aussi dans le cadre plus général de la *G-convergence*. Ainsi, pour les bornes sur les modules effectifs en termes des fractions volumiques seules, ni des perturbations à grande distance, ni une séparation bien définie des échelles n'ont d'importance.

Le rappel sur l'homogénéisation des milieux composites se poursuit par un résumé des théorèmes et des résultats principaux de la théorie micromécanique ainsi que par un rappel des équations fondamentales de l'homogénéisation des milieux à microstructure périodique. Ces deux théories sont en effet particulièrement utiles dans la suite du chapitre.

#### 4.1.4 Quelques formules et théorèmes utiles de la théorie micromécanique des matériaux composites

On donne ici une synthèse de quelques théorèmes utiles pour la suite des développements de ce chapitre. Les démonstrations des résultats, qui sont fournis par la suite, peuvent être trouvés dans Aboudi (1991) ou Christensen (1979).

##### *Approche directe des propriétés homogénéisées*

Soit un élément de volume représentatif  $V$  d'un matériau constitué de deux phases. En présence de conditions de déformations ou de contraintes appliquées sur la frontière  $S$  de l'échantillon de référence de volume  $V$ , les déformations et contraintes moyennes sur le volume représentatif, notées par une barre supérieure, sont :

$$\bar{\mathbf{e}}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}) dV \quad , \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}) dV \quad (4.12)$$

Le problème de l'homogénéisation du matériau composite consiste à rechercher les coefficients élastiques effectifs qui relient déformations et contraintes moyennes sur l'échantillon.

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{E}^* \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \mathbf{S}^* \bar{\boldsymbol{\sigma}} \end{aligned} \quad (4.13)$$

L'utilisation de cette formule pour déterminer les propriétés moyennes constitue l'*approche directe*. Le calcul des propriétés effectives du matériau demande l'évaluation des déformations et des contraintes moyennes pour des conditions aux limites homogènes bien choisies.

##### *Expression des modules effectifs en fonction des matrices de concentration*

Soit les fractions volumiques  $c_1$  et  $c_2$  d'un matériau composite comprenant deux phases. Les deux fractions volumiques sont complémentaires l'une de l'autre:  $c_1 + c_2 = 1$ . On définit la déformation moyenne et la contrainte moyenne du constituant  $\alpha$  par les quantités suivantes évaluées sur la seule phase  $\alpha$ .

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^{(\alpha)} = \frac{1}{V^{(\alpha)}} \int_{V^{(\alpha)}} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) dV \quad , \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}^{(\alpha)} = \frac{1}{V^{(\alpha)}} \int_{V^{(\alpha)}} \boldsymbol{\sigma}_{ij}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) dV \quad (4.14)$$

Les déformations et les contraintes moyennes par constituant sont liées, par les fractions volumiques, aux valeurs moyennes globales sur le volume représentatif :

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} &= c_1 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)} + c_2 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} &= c_1 \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} + c_2 \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)} \end{aligned} \quad (4.15)$$

En chaque point du composite, les relations tensions déformations s'écrivent en termes des matrices de raideur et de souplesse du matériau présent à cet endroit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} &= \mathbf{E}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \quad , \quad \boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \mathbf{E}^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} &= \mathbf{S}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \quad , \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \mathbf{S}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \end{aligned} \quad (4.16)$$

L'utilisation des relations constitutives locales permet de réécrire les lois constitutives équivalentes :

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\sigma}} &= c_1 \mathbf{E}^{(1)} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)} + c_2 \mathbf{E}^{(2)} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} &= c_1 \mathbf{S}^{(1)} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} + c_2 \mathbf{S}^{(2)} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Au sein du volume représentatif, on a une dépendance unique entre les déformations moyennes dans les phases et la déformation moyenne du composite. Soient  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_2$  les matrices de concentration.

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)} = \mathbf{A}_1 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad , \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)} = \mathbf{A}_2 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.18)$$

Elles vérifient évidemment  $c_1 \mathbf{A}_1 + c_2 \mathbf{A}_2 = \mathbf{I}$  où  $\mathbf{I}$  est la matrice unité. La connaissance des matrices de concentration permet de tirer l'expression de la raideur effective :

$$\mathbf{E}^* = c_1 \mathbf{E}^{(1)} \mathbf{A}_1 + c_2 \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{A}_2 \quad (4.19)$$

De manière équivalente, on peut procéder à partir des tensions et des matrices de concentration de tension  $\mathbf{B}_1$  et  $\mathbf{B}_2$  :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} = \mathbf{B}_1 \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad , \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)} = \mathbf{B}_2 \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (4.20)$$

Elles vérifient aussi  $c_1 \mathbf{B}_1 + c_2 \mathbf{B}_2 = \mathbf{I}$ . Et on trouve une expression semblable de la raideur effective

$$\mathbf{S}^* = c_1 \mathbf{S}^{(1)} \mathbf{B}_1 + c_2 \mathbf{S}^{(2)} \mathbf{B}_2 \quad (4.21)$$

#### *Théorème de la déformation moyenne et de la contrainte moyenne*

Si l'on applique un champ de déformation uniforme à la surface extérieure d'un matériau homogène, on engendre, en tous points, un même champ de déformation homogène. Pour un matériau quelconque, on définit par conditions aux limites "homogènes" de déplacement, les conditions aux limites de déplacement qui produiraient un champ de déformation homogène à l'intérieur d'un corps rendu homogène.



Soit

$$u_i(S) = \varepsilon_{ij}^0 x_j \quad (4.22)$$

où  $\varepsilon_{ij}^0$  est une déformation constante. En présence de conditions homogènes de déplacement appliquées à la surface S d'un élément de volume représentatif, le théorème de la valeur moyenne montre que la valeur moyenne du champ de déformation est identique à la déformation constante appliquée sur la frontière S.

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 \quad (4.23)$$

Si on applique à la surface S d'un élément de volume représentatif des conditions de traction

$$t_i(S) = \sigma_{ij}^0 n_j \quad (4.24)$$

où  $\sigma_{ij}^0$  est une déformation constante qui induirait un état de tension homogène dans un corps homogène, le théorème de la valeur moyenne montre que la valeur moyenne de la contrainte est identique à la contrainte constante appliquée sur la frontière S.

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^0 \quad (4.25)$$

#### Relations entre les valeurs moyennes

Si l'on applique un champ de déformation uniforme à la surface extérieure S d'un composite constitué de deux phases, on peut montrer (Aboudi, 1991) que la raideur effective est liée aux raideurs des phases et aux déformations moyennes par la loi suivante :

$$E_{ijkl}^* \varepsilon_{kl}^0 = E_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{kl}^0 + c_2 (E_{ijkl}^{(2)} - E_{ijkl}^{(1)}) \varepsilon_{kl}^{(2)} \quad (4.26)$$

De manière similaire, si l'on applique un champ de traction à la surface extérieure S d'un composite constitué de deux phases, on peut aussi montrer que la souplesse effective est liée aux souplesses des phases et aux contraintes moyennes par la loi suivante :

$$S_{ijkl}^* \sigma_{kl}^0 = S_{ijkl}^{(1)} \sigma_{kl}^0 + c_2 (S_{ijkl}^{(2)} - S_{ijkl}^{(1)}) \sigma_{kl}^{(2)} \quad (4.27)$$

#### L'approche énergétique du calcul des propriétés homogénéisées

L'expression de l'énergie de déformation fournit un procédé alternatif pour l'étude des propriétés homogénéisées. On se fonde sur le théorème du travail virtuel, particularisé au cas où l'on prend des conditions aux limites homogènes (au sens que l'on vient d'énoncer juste avant) :

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} E_{ijkl}^* \bar{\varepsilon}_{ij} \bar{\varepsilon}_{kl} = W_e V \\ U_\sigma &= \frac{1}{2} S_{ijkl}^* \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{kl} = W_\sigma^c V \end{aligned} \quad (4.28)$$

$W_e$  et  $W_\sigma^c$  sont les densités d'énergie calculées par unité de volume de référence et V est le volume de l'élément de volume de référence. Pour déterminer les modules effectifs, il faut appliquer des conditions aux limites homogènes appropriées et, ensuite, calculer l'énergie de déformation

correspondante. On peut démontrer que les approches directes et énergétiques sont équivalentes.

#### 4.1.5 Quelques formules utiles de la théorie de l'homogénéisation des composites périodiques

On donne maintenant un résumé succinct des formules de la théorie de l'homogénéisation des microstructures périodiques qui seront utilisées dans la suite du chapitre. Un développement plus complet de la théorie de l'homogénéisation est présenté à l'annexe A.

On considère un matériau élastique de structure périodique dans l'espace. La microstructure périodique est formée par la répétition d'un motif identique appelé *cellule de base*. Localement, ces périodes s'obtiennent par une homothétie de rapport  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ) de l'ouvert  $\mathbf{Y} = ]\mathbf{0}, \mathbf{Y}_1[ \times ]\mathbf{0}, \mathbf{Y}_2[$ .

Les coefficients élastiques  $\mathbf{E}_{ijkl}^e(\mathbf{x})$  de la structure qui sont de nature périodique découlent de l'application  $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{E}_{ijkl}^e(\mathbf{y})$  définie sur la cellule de base  $\mathbf{Y}$ . En général, les coefficients élastiques sont donnés par une fonction de deux variables spatiales  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ . La variable  $\mathbf{x}$  décrit la variation macroscopique des coefficients élastiques sur la structure, tandis que la variable  $\mathbf{y}$  reflète la variation périodique rapide.

$$\mathbf{E}_{ijkl}^e(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_{ijkl}^e\left(\mathbf{x}, \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \quad (4.29)$$

Supposons à présent que la structure soit soumise à des forces de volume et à des tractions de surface au niveau macroscopique. Le déplacement  $\mathbf{u}^e(\mathbf{x})$  consécutif à l'application de ce chargement subit lui aussi une composante de variation rapide. On développe la solution en série de puissances du paramètre  $\varepsilon$  :

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots, \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \quad (4.30)$$

On peut montrer que le terme  $\mathbf{u}^0$  ne dépend pas de la variable rapide  $\mathbf{y}$ . Il représente le champ de déplacement macroscopique moyen. On démontre également que ce champ de déplacement est celui que l'on obtient en appliquant les forces de volume et les tractions de surface à un corps équivalent, dont les propriétés élastiques homogénéisées sont données par :

$$\mathbf{E}_{ijkl}^H(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} \mathbf{E}_{ijkl} - \mathbf{E}_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_m} d\mathbf{Y} \quad (4.31)$$

Les champs  $\chi^{kl}$  de déformations élémentaires de la cellule de base sont les solutions  $\mathbf{Y}$  périodiques du problème sur la même cellule de base  $\mathbf{Y}$  :

$$\int_{\mathbf{Y}} \mathbf{E}_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_m} \frac{\partial v_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} d\mathbf{Y} = \int_{\mathbf{Y}} \mathbf{E}_{ijkl} \frac{\partial v_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} d\mathbf{Y} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\mathbf{Y}} \quad (4.32)$$

où les champs  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\mathbf{Y}}$  sont des déplacements virtuels,  $\mathbf{Y}$ -périodiques et cinématiquement admissibles.

Pour un problème spatial complet, le calcul des coefficients homogénéisés demande la résolution de 6 problèmes sur la cellule élémentaire. Un problème en état plan n'en introduit que 3. La résolution de ce problème n'est cependant pas chose aisée et il est exceptionnel de trouver une solution analytique. Il est dès lors courant de recourir à une solution numérique telle que la méthode aux éléments finis.

## 4.2 Matériaux feuilletés

Plusieurs travaux ont été consacrés pour déterminer les bornes sur les propriétés homogénéisées des composites obtenus par mélange de deux phases distinctes. Voigt (1889) et Reus (1929) donnent deux premières estimations des bornes sur les coefficients élastiques des composites. Hashin et Shtrikman (1963) établissent ensuite un principe variationnel capable de donner de manière précise les bornes sur les propriétés effectives en fonction des fractions volumiques des constituants. Plus récemment, Avellaneda (1987) a proposé une étude des bornes et des microstructures optimales pour la classe des matériaux composites, étude réalisée à partir des deux composants élastiques linéaires. Il a pu montrer que pour tout champ donné de déformation ou de contrainte, la borne optimale sur l'énergie élastique de déformation par unité de volume est obtenue avec les matériaux feuilletés comprenant un nombre fini de niveaux encore appelés rangs.

La résolution du problème de distribution de compliance minimale est donc liée à l'utilisation des matériaux feuilletés de rang  $N$ , ou de façon plus succincte matériaux de rang  $N$ . Ces matériaux de rang  $N$  possèdent l'avantage de se prêter au calcul de leurs propriétés effectives facilement et même, dans certains cas particuliers, analytiquement. En effet pour chaque rang, on peut évaluer les propriétés homogénéisées de manière récursive avec les formules générales démontrées pour le rang 1.

Les propriétés des matériaux en couches peuvent évidemment être étudiées à l'aide de plusieurs théories mathématiques. Jikov *et al.* (1994) donnent une démonstration basée sur la théorie du *G-convergence*. Mais, pour cet exposé, on préfère employer une approche plus classique basée sur la théorie des microstructures périodiques, ainsi que l'a préconisé Bendsøe (1989).

### 4.2.1 Homogénéisation des matériaux composites feuilletés de rang 1

Les équations de l'homogénéisation peuvent être rarement résolues par voie analytique. Les matériaux feuilletés constituent cependant un cas très intéressant où cela est possible.

La microstructure du matériau est constituée par la répétition selon  $y_1$  de lamelles parallèles et dirigées selon l'axe  $y_2$ . Deux matériaux différents sont ainsi alternés dans la direction  $y_1$  avec des épaisseurs relatives  $\gamma$  et  $1-\gamma$  respectivement. On suppose que les matériaux de base sont homogènes. Les modules de Young  $E^+$  et  $E^-$  sont différents, mais les coefficients de

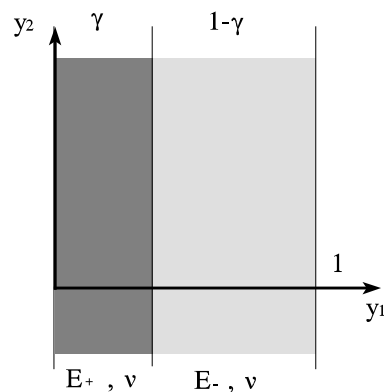


Figure 4.2 : Cellule de base d'un matériau feuilleté de rang 1

Poisson  $\nu$  sont identiques.

Dans ce cas de figure, la cellule de base est constituée par l'intervalle  $[0,1] \times \mathbb{R}$ . Par une simple inspection de la géométrie particulièrement élémentaire du problème, il est permis de faire quelques constatations préalables sur la nature des champs de déformation  $\chi^{kl}$ . D'abord, compte tenu de son extension infinie, le champ  $\chi^{kl}$  est indépendant de la variable  $y_2$ . Ensuite, on voit aisément que les directions d'orthotropie du matériau composite coïncident avec les directions des lamelles.

On note aussi que l'expression des coefficients élastiques homogénéisés fournis dans l'équation (4.31) ne nécessite pas la connaissance des champs de déformation  $\chi^{kl}$  pris isolément. La déformation élémentaire de la cellule de base n'y intervient que sous la forme combinée  $E_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \partial \chi_p^{kl} / \partial y_q$ . Ce terme est, quant à lui, déterminé en résolvant le problème associé (4.32) qui décrit les déformations de la cellule de base sous l'effet de sollicitations macroscopiques élémentaires.

Dès lors, en se servant de déplacements virtuels bien choisis, on peut déterminer analytiquement les termes non nuls de la matrice de Hooke homogénéisée. On commence par le terme  $k=1, l=1$  et on essaie le champ de déplacement virtuel  $\mathbf{v} = (\phi(y_1), \mathbf{0})$  que l'on l'introduit dans l'équation (4.32) donnant le champ de déplacement à l'intérieur de la cellule de base. On en déduit :

$$E_{1111} \frac{\partial \chi_1^{11}}{\partial y_1} = E_{1111} + c_1 \quad (4.33)$$

La constante  $c_1$  est déterminée par la condition de périodicité sur la cellule de base :

$$\frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{\partial \chi_1^{11}}{\partial y_1} dY = \frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{E_{1111} + c_1}{E_{1111}} dY = 0 \quad (4.34)$$

Pour simplifier l'écriture, il est pratique de définir la notation  $M(f)$  qui désigne la moyenne d'une fonction  $f$  sur la cellule de base :

$$M(f) = \frac{1}{|Y|} \int_Y f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (4.35)$$

Avec cette notation, on peut écrire le résultat sous la forme suivante :

$$E_{1111} \frac{\partial \chi_1^{11}}{\partial y_1} = E_{1111} - \left[ M \left( \frac{1}{E_{1111}} \right) \right]^{-1} \quad (4.36)$$

Pour le terme  $k=2, l=2$ , le même choix de déplacement virtuel donne :

$$E_{1212} \frac{\partial \chi_2^{12}}{\partial y_1} = E_{1212} - \left[ M \left( \frac{1}{E_{1212}} \right) \right]^{-1} \quad (4.37)$$

Finalement, pour le terme  $k=1$  et  $l=2$ , on utilise le déplacement virtuel  $\mathbf{v} = (\mathbf{0}, \phi(y_1))$  et on obtient :

$$E_{1111} \frac{\partial \chi_1^{22}}{\partial y_1} = E_{1122} - M \left( \frac{E_{2222}}{E_{1111}} \right) \left[ M \left( \frac{1}{E_{1111}} \right) \right]^{-1} \quad (4.38)$$

Puisque les directions d'orthotropie coïncident avec les directions des lamelles, les seuls termes non nuls du tenseur des coefficients élastiques sont  $E_{1111}$ ,  $E_{2222}$ ,  $E_{1212}$  et  $E_{1122}$ , de sorte que l'information donnée ci-dessus est suffisante pour calculer les modules élastiques homogénéisés. Les propriétés homogénéisées se déterminent à partir de l'équation (4.31). On obtient *les formules de calcul des coefficients homogénéisés d'un composite feuilleté*.

$$\begin{aligned} E_{1111}^H &= \left[ M \left( \frac{1}{E_{1111}} \right) \right]^{-1}, & E_{1122}^H &= M \left( \frac{E_{1122}}{E_{1111}} \right) \cdot \left[ M \left( \frac{1}{E_{1111}} \right) \right]^{-1} \\ E_{2222}^H &= M(E_{2222}) - M \left( \frac{E_{2211}^2}{E_{1111}} \right) + \left[ M \left( \frac{E_{2211}}{E_{1111}} \right) \right]^2 \cdot \left[ M \left( \frac{1}{E_{1111}} \right) \right]^{-1} \\ E_{1212}^H &= \left[ M \left( \frac{1}{E_{1212}} \right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Si on sélectionne des couches de matériaux isotropes homogènes de coefficient de Poisson  $\nu$  identique, mais de modules de Young différents  $E^+$  et  $E^-$  et, si les épaisseurs respectives sont  $\gamma$  et  $(1-\gamma)$ , le tenseur de Hooke homogénéisé en état plan de contrainte s'écrit :

$$\begin{aligned} E_{1111}^H &= I_1 \\ E_{2222}^H &= (1-\nu^2) I_2 + \nu^2 I_1 \\ E_{1212}^H &= \frac{1-\nu}{2} I_1 \\ E_{1122}^H &= \nu I_1 \end{aligned} \quad \text{où} \quad \begin{cases} I_1 = \frac{E^- E^+}{\gamma E^- + (1-\gamma) E^+} \\ I_2 = \gamma E^+ + (1-\gamma) E^- \end{cases} \quad (4.40)$$

En état plan de contrainte, il est habituel de travailler avec la matrice de Hooke homogénéisée sous forme matricielle :

$$D^H = \begin{bmatrix} J_1 & \nu J_1 & 0 \\ \nu J_1 & J_2 + \nu^2 J_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu) J_1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} J_1 = \frac{1}{1-\nu^2} \frac{E^- E^+}{\gamma E^- + (1-\gamma) E^+} \\ J_2 = \gamma E^+ + (1-\gamma) E^- \end{cases} \quad (4.41)$$

En vue d'étudier la répartition optimale de vide et de matière en optimisation topologique, il est utile de considérer le cas particulier dans lequel on laisse tendre le matériau faible vers zéro :  $E^- \rightarrow 0$ .

Il découle :

$$\mathbf{D}^H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma E^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Les propriétés s'expliquent par la construction du composite. Le composite est constitué a priori de lamelles de matière et de vide, de sorte que les bandes sont susceptibles de se mouvoir les unes par rapport aux autres. Lorsque  $\gamma=1$ , le matériau feuilleté de rang 1 n'est plus constitué que de vides symboliques, mais il n'est pas possible de restituer la raideur du matériau de base. Pour  $\gamma=1$ , la raideur perpendiculaire aux bandes de matières et la raideur en cisaillement s'annulent. Il n'est pas possible, non plus, de retrouver la raideur  $E/(1-\nu^2)$  selon l'axe des fibres.

#### 4.2.2 Matériaux feuilletés de rang 2

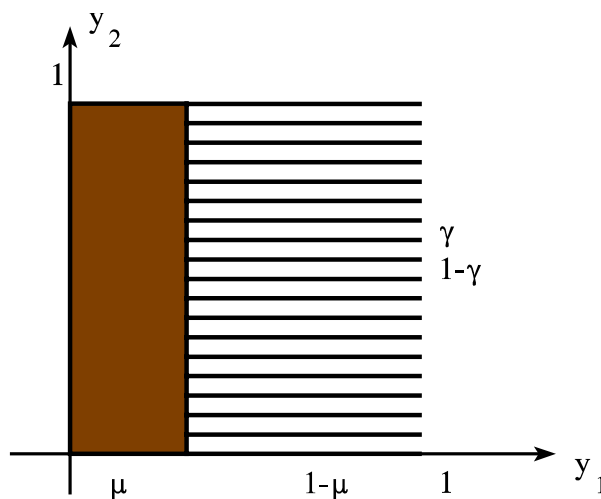


Figure 4.3 : Cellule de base d'un matériau feuilleté de rang 2.

Après avoir établi les propriétés homogénéisées des étalements unidirectionnels, on dispose de toutes les formules nécessaires pour élaborer des matériaux feuilletés de rang quelconque. En effet, les matériaux feuilletés de rang  $k+1$  s'obtiennent par association de bandes de matériau de rang  $k$  et de bandes de matériau de base. L'échelle du matériau de rang  $k$  est supposée beaucoup plus petite que celle du niveau  $k+1$ , de sorte que le matériau de rang  $k$  intervient au niveau  $k+1$  sous la forme d'un composite homogénéisé. En conséquence, pour déterminer les propriétés effectives du matériau feuilleté de rang  $N$ , on applique  $N$  fois les formules (4.39) en se servant des matériaux obtenus dans les étapes précédentes. En particulier pour des matériaux feuilletés de rang 2, il suffit d'appliquer les formules d'homogénéisation (4.39) au matériau de base et au matériau de rang 1 dont les propriétés sont données par (4.41).

En optimisation topologique, le composite que l'on recherche est un mélange de vide et de matière. Les propriétés mécaniques moyennes du constituant de rang 1 constitué de bandes de vide et du matériau isotrope de base sont fournies par le corollaire (4.42).

Pour fabriquer le matériau feuilleté de rang 2, la première étape consiste à construire un matériau feuilleté de rang 1 intermédiaire avec des bandes de matériau fort et de vide d'épaisseurs relatives  $\gamma$  et  $1-\gamma$  au sein de la cellule de base. Après homogénéisation, ce matériau est ensuite utilisé dans un deuxième étalement (étalement de rang 2). La cellule de base du matériau feuilleté de rang 2 est illustrée à la figure 4.2. Elle résulte de l'assemblage de couches d'épaisseur relative  $\mu$  du matériau fort et de couches d'épaisseur  $1-\mu$  du matériau feuilleté de rang 1 créé préalablement. La direction du second étalement est perpendiculaire à la direction d'étalement des couches dans le rang 1. Moyennant la connaissance des densités relatives  $\gamma$  et  $\mu$ , on peut utiliser les formules disponibles et exhiber les propriétés mécaniques homogénéisées du composite global en employant deux fois les formules (4.39).

Pour le matériau composite de rang 2, formé de vide et de solide, en état plan de contrainte, il est facile d'obtenir les coefficients élastiques homogénéisés. On prend la convention comme dans la figure 4.3, d'étaler les bandes de matériau de base selon la direction  $y_2$ . On applique successivement les formules (4.42) et (4.39). Après quelques manipulations algébriques, on obtient l'expression analytique de la matrice de Hooke homogénéisée :

$$D^H(\gamma, \mu) = \frac{E}{(1-\mu) + \mu \gamma (1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \gamma & \mu \gamma \nu & 0 \\ \mu \gamma \nu & \mu (1-\mu(1-\gamma)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Quant à la densité moyenne du matériau, elle est donnée par :

$$\rho = (\mu + (1-\mu)\gamma) \rho^0 = (\mu + \gamma - \mu \gamma) \rho^0 \quad (4.44)$$

### 4.2.3 Quelques propriétés des matériaux feuilletés de rang 2

On présente maintenant quelques réflexions sur les propriétés des matériaux feuilletés de rang 2 qui se sont avérées utiles lors de leur mise en oeuvre en optimisation topologique.

#### *Angle d'orthotropie et rigidité en cisaillement*

Les matériaux feuilletés de rang 2 sont intrinsèquement orthotropes et l'orientation des axes d'orthotropie dans le repère structural est un paramètre important de la raideur locale. Il convient d'ajouter l'angle  $\theta$ , mesuré entre l'axe matériel fort et le repère structural, parmi les variables de conception. En chaque point, il convient de spécifier trois données ( $\gamma$ ,  $\mu$ ,  $\theta$ ) pour définir complètement le matériau feuilleté de rang 2.

L'orientation des matériaux feuilletés de rang 2 est d'autant plus importante que ces matériaux ne possèdent aucune raideur en cisaillement, puisque  $D_{66}^H = 0$ . Cette caractéristique indique intuitivement que l'utilisation d'un matériau de ce type n'est viable que dans le cas où les directions principales du champ de déformation local coïncident avec les directions d'orthotropie du matériau. En pratique, cette condition ne pourra être réalisée au mieux qu'à la fin du processus d'optimisation. Au cours des itérations, il est donc indispensable de lever cette singularité de la raideur en plaçant un terme adéquat, c'est-à-dire une raideur non nulle mais négligeable. Pratiquement, on peut, par exemple, ajuster le terme de raideur en cisaillement en fonction des autres termes de la diagonale de la matrice de Hooke.

$$\mathbf{D}_{66}^H = \epsilon (\mathbf{D}_{11}^H + \mathbf{D}_{22}^H)/2 \quad \epsilon \ll 1 \quad (4.45)$$

Cette technique, validée par l'expérimentation numérique, permet de lever la singularité de la matrice de raideur sans pour autant modifier de manière significative la raideur et le comportement du matériau. Une alternative plus physique consiste à remplacer le vide du matériau composite par un matériau très souple. On prend  $E^- \ll E^+$  et on utilise, cette fois, la formule (4.41) au lieu de la formule (4.42) pour le processus d'homogénéisation de rang 1. On poursuit le processus d'homogénéisation de rang 2 avec la formule (4.39). Dans ce cas, on perd le caractère analytique de l'expression des propriétés effectives. Cependant, les deux méthodes donnent des résultats similaires pour lever la singularité.

*Analyse des coefficients élastiques homogénéisés et de la non-linéarité de la raideur vis-à-vis de la densité relative*

Si une des deux densités relatives est nulle, c'est-à-dire si  $\gamma=0$  ou si  $\mu=0$ , le matériau feuilleté de rang 2 dégénère en un matériau de rang 1 et la formule (4.43) restitue évidemment la raideur (4.42). On voit que pour le matériau feuilleté de rang 1, la raideur est *linéaire* en la densité relative.

En ce qui concerne l'étude de la raideur du laminé de rang 2 général, l'analyse se révèle beaucoup plus complexe, car le matériau est orthotrope. Néanmoins, pour fixer les idées, on étudie le taux de non-linéarité de la raideur en fonction de la densité de la classe particulière des **matériaux pseudo isotropes** pour lesquels les termes diagonaux de la matrice raideur sont identiques :  $\mathbf{D}_{11} = \mathbf{D}_{22}$ . Les deux paramètres de microstructures sont liés de sorte que la relation entre la raideur et la masse volumique ne dépend plus que d'un seul paramètre :

$$\mathbf{D}_{11}^H(\gamma, \mu) = \mathbf{D}_{22}^H(\gamma, \mu) \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\mu}{1 + \mu} \quad (4.46)$$

En introduisant cette relation dans l'expression générale de la raideur, on obtient :

$$\tilde{\mathbf{D}}_{11} = \tilde{\mathbf{D}}_{22} = \frac{\mu E}{1 - \nu^2 \mu^2}, \quad \tilde{\mathbf{D}}_{12} = \frac{\nu \mu^2 E}{1 - \nu^2 \mu^2} \quad (4.47)$$

Il faut immédiatement remarquer que les coefficients de raideur ne vérifient pas la relation qui existe entre les modules de raideur en extension et en cisaillement des matériaux isotropes:  $\mathbf{D}_{11} - \mathbf{D}_{12} = 2\mathbf{D}_{66}$ . En effet, pour toute densité, on a :

$$\tilde{\mathbf{D}}_{11} - \tilde{\mathbf{D}}_{12} = \frac{\mu E}{1 + \nu \mu} \neq \tilde{\mathbf{D}}_{66} = 0 \quad (4.48)$$

Cette remarque justifie pleinement la dénomination de matériau de rang 2 pseudo-isotrope. En outre, elle permet de conclure que le matériau de rang 2 ne dégénère jamais en un matériau isotrope. Le matériau isotrope n'est donc pas inclus dans la classe des matériaux de rang 2. On peut, cependant, continuer l'analogie avec le matériau isotrope en déterminant un coefficient de Poisson et un module de Young équivalents :

$$\tilde{\nu} = \tilde{\mathbf{D}}_{12} / \tilde{\mathbf{D}}_{11}, \quad \tilde{E} = \tilde{\mathbf{D}}_{11} (1 - \tilde{\nu}^2) \quad (4.49)$$

Pour le matériau pseudo-isotrope, la densité, le module de Young et le coefficient de Poisson effectifs



s'écrivent :

$$\tilde{\rho} = \frac{2\mu}{1+\mu} \rho \quad (4.50)$$

$$\tilde{E} = \mu E \quad , \quad \tilde{\nu} = \mu \nu$$

En éliminant la variable de microstructure, on trouve la relation analytique très simple qui lie raideur et densité relative  $\delta$  que soit le coefficient de Poisson du matériau de base :

$$\tilde{E} = \frac{\delta}{2-\delta} E \quad , \quad \tilde{\nu} = \frac{\delta}{2-\delta} \nu \quad , \quad \delta = \frac{\tilde{\rho}}{\rho} \quad (4.51)$$

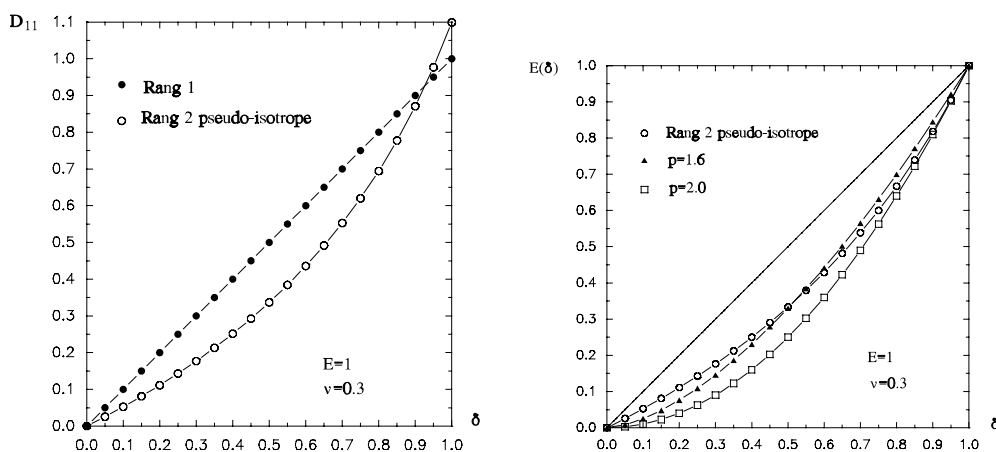


Figure 4.4: Non-linéarité des matériaux feuilletés de rang 2 et de rang 1

En conclusion, la raideur des laminés de rang 2 est donc linéaire à faiblement non linéaire en la densité. Pour les matériaux pseudo-isotropes, les relations raideurs-densités (4.51) montrent que les densités intermédiaires se trouvent (faiblement) pénalisées. L'utilisation des laminés de rang 2 en optimisation topologique se différencie donc de l'approche adoptée par Rossow et Taylor (1973) dans laquelle l'introduction d'une épaisseur de plaque variable (dépendance linéaire de la raideur vis-à-vis de la densité) n'introduit aucune pénalisation des densités intermédiaires. Dans la suite, on montre que plusieurs autres microstructures suboptimales peuvent restituer cette même non-linéarité. Dans une moindre mesure, une pénalisation *quadratique* ou, mieux encore, une pénalisation d'exposant  $p=1.6$  constituent une bonne approximation de l'expression présentée en (4.51).

#### *Etude de quelques cas particuliers*

Ainsi que nous l'avons indiqué au paragraphe précédent, l'introduction de  $\gamma=0$  ou  $\mu=0$  dans la formule (4.43) donnant la raideur du matériau de rang 2 restitue les caractéristiques du matériau de rang 1 fournies par (4.42).

Le cas particulier  $\mu=1$  représente la situation où le matériau de base envahit toute la cellule de base lors de l'étalement de rang 2. Dans ce cas de figure, la raideur en état plan de contrainte est donnée

par (4.53) où l'on voit que la raideur devient indépendante de la valeur du paramètre de densité  $\gamma$  dans le premier étalement :

$$\mathbf{D}^H(\gamma, \mu=1) = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

La raideur de ce matériau est identique à la raideur du matériau isotrope de base hormis le terme de raideur en cisaillement. La disparition du module de Coulomb est inhérente à la construction du matériau en couches, où l'on superpose des bandes de matière susceptibles de glisser les unes sur les autres. Le mouvement relatif des bandes de matière provient de l'incapacité des bandes de matériau de rang 1 à reprendre un effort de cisaillement.

Dans l'hypothèse  $\gamma=1$ , le matériau de rang 1 n'est plus constitué que de vides symboliques. Les caractéristiques mécaniques du matériau en fonction du seul paramètre  $\mu$  sont fournies par la formule (4.23) :

$$\mathbf{D}^H(\gamma=1, \mu) = \frac{E}{(1-\mu\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu\nu & 0 \\ \mu\nu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Selon la valeur du paramètre de microstructure  $\mu$ , il est possible de retrouver une famille de matériaux qui s'étale depuis le matériau de rang 1, lorsque  $\mu=0$ , au matériau décrit en (4.53), lorsque  $\mu=1$ . Il est toutefois intéressant de voir que, quel que soit  $\mu$ , le terme  $D_{11}$  de la raideur est toujours supérieur au terme  $D_{22}$ .

#### Formules de transformation

Lorsque l'on travaille avec des matériaux orthotropes, on adopte souvent la convention de diriger l'axe de raideur forte dans la direction de l'axe 1, c'est-à-dire  $D_{11}^H \geq D_{22}^H$ . Dans le cas d'un matériau de rang 2, cette condition peut être vérifiée ou non selon le choix particulier des paramètres de microstructure  $\gamma$  et  $\mu$  sélectionnés.

On peut extraire la condition entre  $\gamma$  et  $\mu$  pour que cette convention soit vérifiée :

$$D_{11}^H(\mu, \gamma) \geq D_{22}^H(\mu, \gamma) \Leftrightarrow \gamma \geq \frac{\mu}{1+\mu} \Leftrightarrow \mu \leq \frac{\gamma}{1-\gamma} \quad (4.54)$$

Il arrive qu'au cours du processus itératif, le choix des paramètres de microstructure conduise à violer cette condition. Néanmoins, fait intéressant, il est possible de montrer que pour tout matériau feuilleté de rang 2 de paramètres  $\gamma$  et  $\mu$ , on peut exhiber un autre matériau de rang 2 de paramètres  $\gamma^*$  et  $\mu^*$

dont les propriétés matérielles sont identiques, mais après rotation de  $90^\circ$  :

$$\begin{aligned} \forall \mu, \gamma \quad \exists \mu^*, \gamma^* : D_{11}^H(\mu, \gamma) &= D_{22}^H(\mu^*, \gamma^*) , D_{22}^H(\mu, \gamma) = D_{11}^H(\mu^*, \gamma^*) , \\ D_{12}^H(\mu, \gamma) &= D_{12}^H(\mu^*, \gamma^*) \\ \rho^H(\mu, \gamma) &= \rho^H(\mu^*, \gamma^*) \end{aligned} \quad (4.55)$$

Par identification des propriétés matérielles, et après quelques manipulations algébriques, on trouve la formule de relation entre les paramètres  $\gamma$  et  $\mu$  et les paramètres  $\gamma^*$  et  $\mu^*$  :

$$\mu^* = \frac{\gamma}{1 - \mu(1 - \gamma)} , \quad \gamma^* = (1 - \gamma)\mu \quad (4.56)$$

La validité de ces formules est limitée pour les cas où  $\gamma < 1$ . En effet, si  $\gamma = 1$ , quelle que soit la valeur de  $\mu$ , les formules de transformation (4.56) font correspondre erronément tout couple  $(\gamma = 1, \mu)$  à l'unique couple  $(\gamma^* = 0, \mu^* = 1)$ . En réalité seul le couple original  $(\gamma = 1, \mu = 1)$  possède des caractéristiques mécaniques équivalentes au couple  $(\gamma^* = 0, \mu^* = 1)$ . En d'autres mots, pour les couples de valeur  $(\gamma = 1, \mu)$ , il est impossible de trouver un couple  $(\gamma^*, \mu^*)$  restituant les mêmes propriétés mécaniques dans un repère orthogonal. Néanmoins, compte tenu de nos conventions, les propriétés mécaniques (4.53) correspondant à  $(\gamma = 1, \mu)$  satisfont toujours à la convention plaçant l'axe matériel fort suivant la direction 1, de sorte qu'il n'est jamais fait usage des formules de transformation dans ce cas de figure.

*Identification des paramètres de microstructure d'un matériau de rang 2 de propriétés matérielles connue*

Le problème de l'identification des paramètres  $\gamma$  et  $\mu$  d'un laminé de rang 2 de matrice de Hooke et de densité connues nécessite la connaissance des caractéristiques du matériau de base. Si on connaît les modules de Young  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$  et la masse volumique  $\rho$  du matériau de construction, on peut extraire les fractions volumiques de rang 1 et de rang 2 du matériau. En effet, par simple manipulation algébrique des équations (4.43) et (4.44) on obtient :

$$\mu = \frac{1}{\nu} \frac{D_{12}^H}{D_{22}^H} \quad (4.57)$$

et connaissant l'épaisseur relative des lamelles de rang 2 au sein de la cellule de base, on trouve l'épaisseur des lamelles de rang 1 :

$$\gamma = \frac{\rho^H / \rho - \mu}{1 - \mu} \quad (4.58)$$

Remarquons que si  $\mu = 1$ , les caractéristiques homogénéisées ne dépendent plus de la densité relative  $\gamma$ . Dans ce cas, il n'est plus possible d'identifier le paramètre de densité relative de rang 1.

#### 4.2.4 Matériaux feuilletés de rang $N$

Ce paragraphe est consacré à l'étude des matériaux composites construits par une succession de processus de construction en lamelles. Comme on l'a dit précédemment, l'élaboration d'un matériau de rang  $N$  est un processus itératif produisant une microstructure avec plusieurs ordres de grandeur. On dispose de deux matériaux élastiques isotropes et homogènes de raideur  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$ . Les deux matériaux isotropes sont bien ordonnés, c'est-à-dire que les matériaux sont caractérisés respectivement par des modules de cisaillement  $G_1$  et  $G_2 > G_1$  et des modules de compressibilité cubique  $\kappa_1$  et  $\kappa_2 > \kappa_1$ .

Un laminé de rang 1 est obtenu en étalant perpendiculairement à une direction spécifiée des bandelettes de deux matériaux isotropes en proportions données. Lorsque l'ordre de grandeur  $\varepsilon_1$  des bandelettes tend vers zéro, le comportement élastique homogénéisé est décrit par le tenseur d'élasticité  $\mathbf{H}_1$ . Un laminé de rang 2 est obtenu par étalement de deux composites de rang 1 selon une normale et des proportions données. Si  $\varepsilon_2$  est l'ordre de grandeur des bandelettes de rang 2 et si  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ , alors le comportement élastique est décrit par le tenseur d'élasticité  $\mathbf{H}_2$  lorsque  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_1$  tendent vers zéro. On peut poursuivre le processus indéfiniment. En général un matériau de rang  $r$  est construit par étalement de deux matériaux de rang  $r-1$  en proportions données et perpendiculairement à une direction précisée. Lorsque les dimensions caractéristiques  $\varepsilon_r \gg \varepsilon_{r-1} \gg \dots \gg \varepsilon_1$  des lamelles tendent vers zéro, le tenseur  $\mathbf{H}_r$  décrit le comportement élastique du matériau.

Pour établir les propriétés homogénéisées, on établit d'abord la formule de base donnant les propriétés effectives d'un composite obtenu par étalement du matériau fort de raideur  $\mathbf{E}_2$  et d'un autre composite quelconque de raideur  $\mathbf{B}$ . En effet, il n'est pas restrictif de supposer qu'à chaque étape de la construction, l'un des deux matériaux de l'étalement soit toujours le matériau isotrope fort. On suppose que les couches ont une direction normale au vecteur unitaire  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$  (où  $d$  est la dimension de l'espace dans lequel on travaille) et que les couches ont respectivement des proportions relatives  $\rho_2$  et  $\rho_B = 1 - \rho_2$ . Dans ce cas, Francfort et Murat (1986) ont pu démontrer que le tenseur effectif  $\mathbf{H}$  du matériau composite qui résulte de cet assemblage satisfaisait à la relation suivante pour tout tenseur symétrique  $\boldsymbol{\sigma}$  :

$$\rho_B(\mathbf{E}_2 - \mathbf{H})^{-1}\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{E}_2 - \mathbf{B})^{-1}\boldsymbol{\sigma} - \rho_2 f(\mathbf{v})\boldsymbol{\sigma} \quad (4.59)$$

Dans cette expression, la quantité  $f(\mathbf{v})\boldsymbol{\sigma}$  est une loi de Hooke dégénérée. Elle est définie pour tout vecteur unitaire  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$  par :

$$f(\mathbf{v})\boldsymbol{\sigma} = \frac{d}{d\kappa_2 + 2(d-1)G_2} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}:\mathbf{v}) \mathbf{v} \odot \mathbf{v} + \frac{1}{G_2} [(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}) \odot \mathbf{v} - (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}, \mathbf{v}) \mathbf{v} \odot \mathbf{v}] \quad (4.60)$$

On note  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = \mathbf{vw}^T$  le produit tensoriel de deux vecteurs de  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbf{v} \odot \mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{v})$  leur produit tensoriel symétrique.

On considère maintenant la séquence  $\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots$  de tenseurs homogénéisés où  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{E}_1$  est constituée du matériau isotrope faible. Pour  $r \geq 1$ , le composite de propriétés effectives  $\mathbf{H}_r$  est obtenu par un mélange de lamelles de matériau isotrope  $\mathbf{E}_2$  et du matériau de rang  $r-1$  de propriétés  $\mathbf{H}_{r-1}$  dans les proportions respectives  $\alpha_r$  et  $1-\alpha_r$  et suivant une normale  $\mathbf{v}_r$  donnée.

On recherche maintenant les propriétés effectives du matériau composite de rang  $r$ .

La fraction volumique du matériau fort  $\mathbf{E}_2$  est donnée par :

$$\beta_r = 1 - \prod_{i=1}^r (1 - \alpha_r) \quad r \geq 1 ; \quad \beta_0 = 0 \quad (4.61)$$

Quant aux propriétés mécaniques effectives  $\mathbf{H}_r$ , on les obtient par application récursive de la formule de base développée précédemment :

$$(1 - \beta_r)(\mathbf{E}_2 - \mathbf{H}_r)^{-1} = (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)^{-1} - \sum_{i=1}^r (\beta_i - \beta_{i-1}) f(\mathbf{v}_i) \quad (4.62)$$

Si la séquence s'arrête en  $r=N$ , on identifie  $\delta_2 = \beta_N$  à la fraction volumique totale de  $\mathbf{E}_2$ ,  $\delta_1 = 1 - \beta_N$  à la fraction volumique totale de  $\mathbf{E}_1$ , tandis que  $\mathbf{E}^* = \mathbf{H}_r$  représente la matrice de Hooke effective associée aux composites de rang  $N$ .

Par la formule (4.62), on voit aussi que toute séquence  $m_i = (\beta_i - \beta_{i-1}) / \beta_N$ ,  $1 \leq i \leq N$ , de nombres non-négatifs et de somme égale à 1 peut être réalisée par un choix approprié d'une séquence de paramètres  $\{\alpha_i\}_{i=1}^N$ . Ceci revient à montrer que pour tout entier  $N \geq 1$ , pour toute suite de vecteurs unitaires  $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^N$  de  $\mathbb{R}^d$ , pour toute suite  $\{m_i\}_{i=1}^N$  de nombres réels positifs avec  $0 \leq m_i \leq 1$  tels que  $\sum m_i = 1$  et pour tout réel  $\delta_2$ , compris entre 0 et 1, on donne naissance à un composite qui est construit par des étalements successifs de matériaux de propriétés  $\mathbf{E}_1$  et de  $\mathbf{E}_2$  en proportions globales respectives  $\delta_1 = 1 - \delta_2$  et  $\delta_2$  et dont les propriétés élastiques homogénéisées  $\mathbf{E}^*$  sont caractérisées par :

$$\delta_1 (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}^*)^{-1} = (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)^{-1} - \delta_2 \sum_{i=1}^N m_i f(\mathbf{v}_i) \quad (4.63)$$

Pour montrer maintenant l'optimalité de matériaux de rang  $N$ , il faut dégager une nouvelle borne sur l'énergie potentielle de déformation, et montrer que pour chaque tenseur de déformation  $\xi$ , celle-ci est saturée pour un choix particulier de paramètres  $\{\mathbf{v}_i, m_i\}_{i=1}^N$ .

#### 4.2.5 Borne sur les modules homogénéisés et optimalité des matériaux feuilletés de rang $N$ et de rang 2

*Borne supérieure sur l'énergie élastique des matériaux composites*

On connaît la borne de Paul (1960) sur l'énergie élastique des matériaux composites comprenant deux phases :

$$(\mathbf{E}^* \xi : \xi) \leq \delta_1 (\mathbf{E}_1 \xi : \xi) + \delta_2 (\mathbf{E}_2 \xi : \xi) \quad (4.64)$$

où  $\delta_i$  est la fraction volumique du matériau  $i$ . Cette borne est précise dans le sens que pour le choix de certains champs de déformations  $\xi$ , il existe une microstructure dont les propriétés effectives  $\mathbf{E}^*$  saturent la borne. Toutefois, pour la plus grande majorité des champs de déformation  $\xi$ , il n'y pas de

microstructures qui donnent lieu à l'égalité.

On recherche une nouvelle borne de la forme :

$$(\mathbf{E}^* \boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi}) \leq F(\delta_1, \delta_2, \mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2, \boldsymbol{\xi}) \quad (4.65)$$

Cette borne doit être optimale, ce qui veut dire que pour tout champ  $\boldsymbol{\xi}$ , elle doit être saturée par un matériau composite de microstructure faisant intervenir les deux matériaux donnés. La nouvelle borne est basée sur le principe variationnel de Hashin-Shtrikman (1963) et elle demande que les matériaux soient bien ordonnés c'est-à-dire que  $\boldsymbol{\kappa}_1 \leq \boldsymbol{\kappa}_2$  et  $\mathbf{G}_1 \leq \mathbf{G}_2$ . L'établissement de la formule peut être réalisé pour tous les composites de microstructure périodique (Kohn et Milton, 1988 ou Kohn, 1988). Si  $\boldsymbol{\sigma}$  désigne un champ de contrainte arbitraire périodique sur la cellule de base, on trouve :

$$F = (\mathbf{E}_2 \boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi}) + \delta_1 \cdot \min_{\boldsymbol{\sigma}} \{ -2(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\xi}) + ((\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)^{-1} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}) - \delta_2 \min_{|\nu|=1} (f(\nu) \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}) \} \quad (4.66)$$

#### Optimalité des matériaux feuilletés de rang N

Kohn (1988) montre que l'on peut trouver un matériau de rang N, avec N fini, qui sature la borne quel que soit le champ de déformation  $\boldsymbol{\xi}$  donné. En d'autres mots, pour tout tenseur de déformation  $\boldsymbol{\xi}$  donné, on peut trouver un choix de paramètres  $\{\mathbf{v}_i, \mathbf{m}_i\}_{i=1}^N$  tels que  $\mathbf{E}^*$  défini par la formule (4.63) satisfasse  $(\mathbf{E}^* \boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi}) = F$  où  $F$  est la borne (4.66).

#### 4.2.6 Utilisation des matériaux composites de rang 2 en optimisation topologique

Les matériaux feuilletés de rang 2 et de rang N en général occupent une place importante dans la théorie de l'optimisation topologique par la méthode d'homogénéisation. Leurs propriétés et leur utilisation en topologie ont suscité de nombreux travaux, qu'il serait trop long de citer ici de manière extensive. On envisage deux aspects de leur rôle en topologie : l'utilisation des matériaux de rang N dans l'étude théorique et mathématique du problème et leur utilisation pratique pour la résolution numérique de problèmes de conception réalistes.

D'un point de vue théorique, on sait que les matériaux de rang N sont optimaux, c'est-à-dire qu'il existe une séquence de lamelles à N niveaux qui fournit l'énergie de déformation la plus importante que l'on puisse attendre de tous les matériaux composites de même densité relative. Avellaneda (1987) a ensuite montré que le nombre N de rangs n'était pas quelconque. Pour le problème tridimensionnel, N est au plus égal à 6 et pour le problème plan, il est réduit à 3 au plus. En réalité, comme Bendsøe (1989) l'a montré, pour le problème plan et un seul cas de charge, la classe des matériaux de rang 2 est optimale. D'autres études portant sur les bornes d'énergie optimales et des microstructures associées ont permis d'établir la synthèse suivante (Bendsøe, 1995) qui est reprise au tableau 4.1.

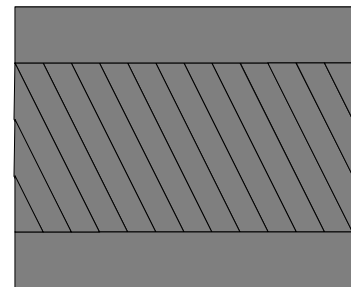


Figure 4.5: Schéma d'un matériau feuilleté de rang 3

	Espace de dimension 2	Espace de dimension 3
Cas de charge unique	Matériaux de rang 2 avec des couches orthogonales co-alignées sur les directions principales de contrainte et de déformation	Matériaux de rang 3 avec des couches orthogonales co-alignées sur les directions principales de contrainte et de déformation
Cas de charge multiple	Matériaux de rang 3 avec des couches non orthogonales (figure 4.4)	Matériaux de rang 6 avec des couches non orthogonales

Tableau 4.1: Microstructures optimales de rang N en élasticité

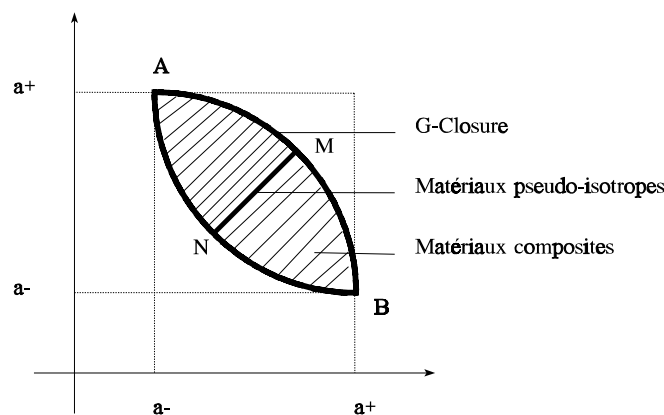


Figure 4.6: Problème du *G-closure*

La figure 4.6 symbolise le *G-closure* de l'ensemble des matériaux composites de fraction volumique donnée. On reporte les matériaux composites en fonction des valeurs propres de la raideur. Tous les points de la zone hachurée sont des matériaux composites qui résultent de l'assemblage des deux matériaux de base. La frontière du domaine est le *G-closure* pour le critère adopté, ici l'énergie de déformation. Il s'agit donc des composites les plus raides. Pour chaque point de la frontière, il existe une configuration de rang 2 qui réalise ces propriétés. Les points A et B, caractérisés par une raideur maximale "a+" selon une direction et minimale "a-" selon l'autre axe, sont deux matériaux de rang 1. Les points de la droite NM ont une raideur identique selon les deux directions principales. Les points M et N sont des matériaux de rang 2 pseudo-isotropes. Il existe des matériaux de rang 2 qui ne sont pas sur la frontière, mais toute la frontière peut être réalisée avec des matériaux de rang 2.

Puisque l'optimalité des matériaux de rang N signifie que cette famille de matériaux contient la fermeture de l'ensemble de matériaux composites, pour le critère de l'énergie de déformation extrême, le rôle des matériaux lamellaires en optimisation topologique a été suggéré très tôt (Kohn, 1988). Par la suite, Kohn (1990) et Allaire et Kohn (1993) ont montré que le problème de distribution de matière est complètement relaxé par l'introduction des matériaux de rang 2, 3 ou 6 selon le cas. En pratique, ceci signifie que le choix des microstructures optimales conduit à des résultats numériques

de distribution de matière qui sont indépendants du maillage.

Cette famille de matériaux a servi de base à de nombreux travaux théoriques. Comme on le présentera au paragraphe suivant, Allaire et Kohn (1993) et Jog, Haber et Bendsøe (1993) ont montré que le problème de conception topologique avec les matériaux de rang 2 était équivalent à un problème d'élasticité non linéaire avec des matériaux auto-adaptatifs. L'étude du problème relaxé avec les matériaux lamellaires a également permis de situer d'autres approches du problème de topologie par rapport au problème d'homogénéisation. Ainsi, Bendsøe et Haber (1993) ont montré que l'optimisation des treillis de barres, au sens du critère de Michell (1904), correspondait à la solution du problème de compliance minimale avec des matériaux de rang 2, lorsque la fraction volumique de matière dans le volume de conception devient très faible. Parallèlement, une grande concordance a aussi été observée entre les résultats obtenus par la méthode d'optimisation numérique avec homogénéisation et les résultats théoriques de Michell (1904), Hemp (1973), Prager (1974) et Rozvany et ses collaborateurs (1992, 1993b, 1993c).

Pour le calcul numérique de solutions numériques, les matériaux de rang 2 sont fort intéressants pour déterminer la distribution optimale dans des problèmes plans, comme on peut le voir dans les travaux de Bendsøe (1989) et de Bendsøe, Díaz et Kikuchi (1993). En effet, les matériaux de rang 2 permettent d'introduire facilement un matériau homogénéisé en optimisation topologique des structures élastiques, puisque les propriétés mécaniques possèdent une expression analytique. Avec cette expression analytique, nous avons montré qu'il est possible d'identifier les paramètres internes d'un laminé de rang 2 ou encore de trouver un autre laminé de propriétés équivalentes dans un repère orthogonal. En outre, le choix de ce matériau ne requiert pas l'emploi d'un calcul d'homogénéisation préalable. L'évaluation des caractéristiques mécaniques s'effectue avec facilité et avec précision sans devoir recourir à un procédé d'interpolation. De plus, la microstructure de rang 2 étant optimale, le problème admet une solution stable qui ne dépend pas du maillage employé pour le calcul.

Il arrive que de nombreux problèmes réels se posent de façon moins académique que le problème de compliance minimale. Pour des problèmes tridimensionnels et pour plusieurs cas de charges, le matériau de rang 2 doit être remplacé par un matériau de rang N. L'utilisation numérique de ces microstructures n'est plus aussi simple et Bendsøe (1995) suggère d'adopter une paramétrisation de la microstructure en termes d'autres grandeurs appelées *moments*. Le recours à ces nouveaux paramètres semble beaucoup plus intéressant pour la résolution numérique du problème d'optimisation.

Le caractère optimal de la raideur des laminés de rang 2 peut encore posséder d'autres inconvénients. Il est fréquent de constater que les matériaux de rang 2 des solutions comportent une large proportion de zones de densité intermédiaire. Ces solutions aux contours très doux sont cependant parfois difficiles à interpréter en vue de la prédiction d'une topologie bien contrastée. Dans le cas où l'on recherche la forme d'une structure, l'emploi de microstructures suboptimales (telles que des perforations rectangulaires) se révèle plus approprié, car il est plus facile de distinguer le contour des domaines occupés par la matière. Un autre problème posé par les microstructures de rang N est la question de leur stabilité. Par exemple, la distribution de matériau de rang 2 est optimale uniquement pour le cas de charge considéré. Bien plus grave, pour une autre mise en charge, la distribution de microstructure de rang 2 est instable, ce qui a pour conséquence de limiter très fortement l'utilité pratique du matériau. En outre, il est peu envisageable de pouvoir produire ces microstructures où interviennent plusieurs niveaux de construction.



### 4.2.7 Matériaux de rang 2 auto-adaptatifs

Comme expliqué précédemment, des études récentes commencées par Avellaneda (1987) ont été consacrées à l'estimation des bornes des propriétés matérielles effectives de composites avec deux phases en état plan. Pour un état de contrainte ou de déformation unique et un problème plan, on a pu montrer que les matériaux composites les plus raides sont les matériaux de rang 2. Le matériau de rang 2 réalise la relaxation complète du problème de distribution de matière de compliance minimale. Sur la base des seules considérations théoriques, les matériaux de rang 2 devraient être la seule microstructure à introduire pour optimiser la topologie de structures planes avec un seul cas de charge.

La résolution analytique qui suit est donc basée sur l'emploi de la seule famille des matériaux de rang 2. On traite successivement le problème plan en formulation équilibre, et en formulation déplacement.

En formulation équilibre, le problème de conception est un problème "min-min" dont on peut permuter les différentes minimisations. On va montrer comment on peut résoudre algébriquement le problème d'optimisation des propriétés effectives du matériau pour un champ de tension fixé, de sorte qu'on pourra obtenir un problème équivalent exprimé en fonction des tensions seules :

$$\min_{\sigma \in \mathcal{S}} \min_{\substack{\text{microstructure} \\ \int \rho \, d\Omega = \bar{v}}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \, d\Omega \quad (4.67)$$

En formulation déplacement, il est possible d'obtenir un problème réduit en fonction des déplacements et de la densité locale du matériau. En effet, pour ce problème "max-min", on ne peut plus permuter que la maximisation des paramètres de microstructure à densité constante avec le problème d'équilibre. Il restera alors à résoudre le problème de conception :

$$\max_{\substack{\rho \\ \int \rho \, d\Omega = \bar{v}}} \min_{v \in \mathcal{V}} \frac{1}{2} a(v, v) - l(v) \quad (4.68)$$

#### Solution en formulation équilibre

L'obtention de la solution du problème en formulation équilibre a été décrite par Kohn et Allaire (Kohn, 1990, Allaire et Kohn, 1993) en relaxant directement le problème original. La démarche que nous suivons ici est celle de Jog, Haber, Bendsøe (1993) où l'on détermine d'abord la microstructure optimale. Les propriétés homogénéisées du matériau de rang 2 sont :

$$E_{1111} = \frac{\gamma E}{\mu \gamma (1 - \nu^2) + (1 - \mu)}, \quad E_{2222} = \mu E + \mu^2 \nu^2 E_{1111}, \quad E_{1122} = \mu \nu E_{1111}, \quad E_{1212} = 0 \quad (4.69)$$

où E et  $\nu$  sont le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau de référence.

On se sert d'abord, du résultat de Pedersen (1989, 1990) qui montre que la compliance minimale s'obtient en alignant les directions d'orthotropie et les tensions principales, de sorte que l'on peut écrire l'énergie potentielle complémentaire sous la forme :

$$\Pi^c(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{|D|} [E_{1111}\sigma_I^2 + E_{2222}\sigma_{II}^2 - 2E_{1122}\sigma_I\sigma_{II}], \quad D = E_{1111}^2 + E_{2222}^2 - E_{1122}^2 \quad (4.70)$$

Cet alignement des directions d'orthotropie avec directions principales de tension est cohérent avec l'absence de raideur en cisaillement. Pour une densité  $\rho = \mu + \gamma - \mu\gamma$  donnée, on recherche les densités caractéristiques  $\mu, \gamma$  qui minimisent cette énergie potentielle complémentaire. On trouve :

$$\mu = \frac{\rho |\sigma_{II}|}{|\sigma_{II}| + (1-\rho)|\sigma_I|}, \quad \gamma = \frac{\rho |\sigma_I|}{|\sigma_I| + |\sigma_{II}|} \quad (4.71)$$

Ce résultat est valable pour  $\gamma$  et  $\mu$  compris entre 0 et  $\rho$ , sinon la solution correspond au solide complet ou à un matériau unidirectionnel de rang 1. Ce résultat indique que, selon la valeur numérique des tensions, le signe de  $\sigma_I \cdot \sigma_{II}$  partage le choix du matériau optimal en deux domaines où le matériau est de rang 2.

Fait remarquable, dans chacune de ces régions, le matériau est élastique linéaire, quasi isotrope avec une matrice de compliance donnée par :

$$\mathbf{C}_I'' = \frac{1}{E\rho} \begin{bmatrix} 1 & -(1-\rho+\nu\rho) & 0 \\ -(1-\rho+\nu\rho) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(2-\rho+\nu\rho) \end{bmatrix} \quad \text{si } \sigma_I \cdot \sigma_{II} < 0 \quad (4.72)$$

ou

$$\mathbf{C}_{II}'' = \frac{1}{E\rho} \begin{bmatrix} 1 & 1-\rho-\nu\rho & 0 \\ 1-\rho-\nu\rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\rho(1+\nu) \end{bmatrix} \quad \text{si } \sigma_I \cdot \sigma_{II} > 0 \quad (4.73)$$

Pour la région occupée par le matériau de rang 1, le comportement correspond à celui d'un matériau hyperélastique et non linéaire. On peut lui associer une matrice de raideur sécante dont l'expression sort du cadre de ce bref exposé.

Il faut maintenant tenir compte de la contrainte de volume. On minimise  $\Pi^c + \lambda\rho$  avec  $\lambda \geq 0$  pour un champ de tension donné. La densité locale est liée aux tensions :

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\lambda E}} (|\sigma_I| + |\sigma_{II}|) \quad (4.74)$$

Ce résultat a été obtenu par Allaire et Kohn (1993) en relaxant directement le problème initial. En injectant la valeur de la densité locale dans l'expression des paramètres  $\gamma$  et  $\mu$ , on trouve :

$$\mu = \frac{|\sigma_{II}|}{\sqrt{\lambda E} - |\sigma_I|}, \quad \gamma = \frac{|\sigma_I|}{\sqrt{\lambda E}} \quad (4.75)$$

On a montré que le problème d'optimisation topologique est équivalent à un problème d'élasticité non linéaire et non différentiable :

$$\min_{\substack{\boldsymbol{\sigma} \\ \text{div } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} S''_{ijkl}(\boldsymbol{\sigma}) \sigma_{ij} \sigma_{kl} d\Omega \quad (4.76)$$

dans lequel  $S''_{ijkl}(\boldsymbol{\sigma})$  est l'énergie de déformation du matériau de rang 2 auto-adaptatif. Celle-ci s'obtient en utilisant les expressions de  $\gamma$  et  $\mu$  et de  $E_{ijkl}$  en fonction du champ de tension et du multiplicateur de Lagrange dont la valeur est déterminée pour satisfaire à la restriction sur le volume :

$$\int_{\Omega} \min\left(\frac{|\sigma_I| + |\sigma_{II}|}{\sqrt{\lambda E}}, 1\right) d\Omega = V \quad (4.77)$$

Quant aux détails de la résolution numérique, on peut les trouver chez Allaire et Francfort (1993) et Jog, Haber et Bendsøe (1993). On peut cependant dire que la résolution possède deux difficultés majeures. D'abord, il s'agit d'un problème d'élasticité non linéaire, non différentiable. Ensuite, la formulation équilibre demande l'utilisation d'éléments statiquement admissibles de haut degré pour avoir une bonne connaissance du champ de tension. En pratique, la résolution du problème se révèle donc fort onéreuse, de sorte que la formulation déplacement reste intéressante même s'il n'est pas possible d'éliminer entièrement les variables de conception.

#### Formulation déplacement

L'étude du problème se déroule selon une démarche similaire à l'analyse en termes des contraintes, mais les détails de calcul sont beaucoup plus compliqués. En premier lieu, le problème angulaire est résolu en alignant les axes d'orthotropie sur les déformations principales (Pedersen, 1989a et 1989b). En second lieu, on réalise analytiquement l'optimisation de la microstructure pour une densité locale constante et pour un champ de déformation fixe. Ceci nous conduit à exprimer les densités  $\mu$  et  $\gamma$  en fonction de la densité  $\rho$  et des déformations principales  $\boldsymbol{\varepsilon}_I, \boldsymbol{\varepsilon}_{II}$  et du coefficient de Poisson  $\nu$ . Le résultat laisse apparaître trois zones. On trouve encore deux régions de rang 2, appelées mode I et mode II :

$$\mu = \frac{(1 + \nu \rho - \rho) \boldsymbol{\varepsilon}_I + \boldsymbol{\varepsilon}_{II}}{\nu \boldsymbol{\varepsilon}_I + (2 - \rho - \nu + \nu \rho) \boldsymbol{\varepsilon}_{II}}, \quad \gamma = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_I + (1 + \nu \rho - \rho) \boldsymbol{\varepsilon}_{II}}{(1 - \nu)(\boldsymbol{\varepsilon}_I - \boldsymbol{\varepsilon}_{II})}, \quad \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_I + \boldsymbol{\varepsilon}_{II}}{(1 - \nu) \boldsymbol{\varepsilon}_I} < \rho \leq 1 \quad (4.78)$$

et

$$\mu = \frac{(\nu \rho + \rho - 1) \boldsymbol{\varepsilon}_I + \boldsymbol{\varepsilon}_{II}}{\nu \boldsymbol{\varepsilon}_I + (2 - \rho + \nu - \nu \rho) \boldsymbol{\varepsilon}_{II}}, \quad \gamma = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_I + (1 + \nu \rho - \rho) \boldsymbol{\varepsilon}_{II}}{(1 + \nu)(\boldsymbol{\varepsilon}_I - \boldsymbol{\varepsilon}_{II})}, \quad \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_I - \boldsymbol{\varepsilon}_{II}}{(1 + \nu) \boldsymbol{\varepsilon}_I} < \rho \leq 1 \quad (4.79)$$

La troisième région, ou mode III, est occupée par un matériau de rang 1.

$$\mu = 0, \quad \gamma = \rho, \quad 0 \leq \rho \leq \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_I + \boldsymbol{\varepsilon}_{II}}{(1 - \nu) \boldsymbol{\varepsilon}_I} \quad \text{et} \quad 0 \leq \rho \leq \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_I - \boldsymbol{\varepsilon}_{II}}{(1 + \nu) \boldsymbol{\varepsilon}_I} \quad (4.80)$$

On retrouve un résultat similaire à celui que nous avons obtenu avec l'approche de type équilibre : le matériau est élastique linéaire par morceaux et on peut mettre en évidence les matrices de raideur des matériaux du mode I :

$$\mathbf{D}_I'' = \frac{E}{(1-\nu)(2-\rho+\nu\rho)} \begin{bmatrix} 1 & 1-\rho+\nu\rho & 0 \\ 1-\rho+\nu\rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(2-\nu)}{2}\rho \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

et du mode II :

$$\mathbf{D}_{II}'' = \frac{E}{(1+\nu)(2-\rho-\nu\rho)} \begin{bmatrix} 1 & -(1-\rho-\nu\rho) & 0 \\ -(1-\rho-\nu\rho) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(2-\rho-\nu\rho) \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

Quant au mode III, il définit un matériau hyperélastique, non linéaire, pour lequel on peut déterminer une matrice de raideur sécante, mais dont la recherche sort du cadre de ce résumé.

On résout alors le problème d'optimisation avec contrainte :

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq \rho \leq 1} \quad & \min_{\nu \in \mathcal{V}} \quad \Pi''(\nu) \\ & \int_{\rho} d\Omega = \bar{\nu} \end{aligned} \quad (4.83)$$

L'énergie potentielle totale  $\Pi''$  est celle d'un matériau adaptatif de rang 2. Physiquement, ce matériau composite perforé adapte, en chaque point, son orientation et les paramètres de sa microstructure pour suivre l'évolution des déformations et de la densité moyenne. Les détails de la résolution numérique sont disponibles chez Jog, Haber et Bendsøe (1993).

### 4.3 Microperforations rectangulaires

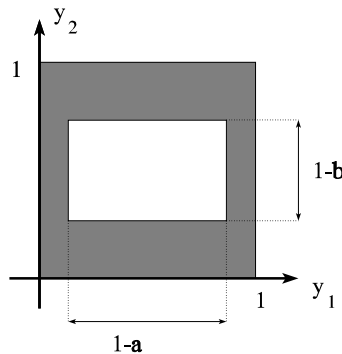


Figure 4.7 : Microstructures avec perforations rectangulaires

Historiquement, la microstructure périodique, dont la porosité est réalisée avec des perforations rectangulaires de la cellule de base, a une grande importance, puisqu'il s'agit de la première microstructure utilisée par Kikuchi et Bendsøe (1988) pour résoudre le problème d'optimisation topologique avec la méthode d'homogénéisation. Dans son concept, ce matériau est très

simple, de sorte qu'il sert souvent de support à l'élaboration de démonstrations. La densité locale dépend de la géométrie des microperforations rectangulaires. Si  $1-a$  et  $1-b$  sont les dimensions de la perforation dans la cellule de base unitaire, la densité locale s'écrit :

$$\rho = a + b - ab \quad (4.84)$$

Par contre, l'expression du tenseur d'élasticité homogénéisé est plus difficile, puisqu'elle ne peut être obtenue que de manière numérique. Le problème d'homogénéisation est d'abord résolu numériquement par éléments finis pour différentes combinaisons des variables  $a$  et  $b$ . On tient compte de ce que la combinaison  $(a,b)$  et  $(b,a)$  donne les mêmes valeurs des modules homogénéisés après une rotation de  $90^\circ$ , ce qui réduit le nombre d'études par éléments finis. On reconstruit ensuite l'évolution des coefficients élastiques pour différentes valeurs des paramètres  $a$  et  $b$  par un procédé d'interpolation sur le réseau de points de calcul, en utilisant des fonctions de Legendre par exemple.

Lorsque l'on compare les coefficients homogénéisés obtenus avec les perforations rectangulaires et les matériaux de rang 2 (Bendsøe, Díaz et Kikuchi, 1993), on voit que les perforations rectangulaires pénalisent plus fortement les densités intermédiaires. Cette non-linéarité plus forte explique le caractère vide-solide plus marqué des solutions que l'on obtient. La clarté des résultats obtenus est certainement responsable d'une partie du succès de la méthode d'homogénéisation.

## 4.4 Microperforations sphériques et microstructure de Hashin

On imagine maintenant un matériau composite contenant des micro-inclusions sphériques. Si la répartition statistique des centres et des tailles des inclusions est uniforme, ce matériau est évidemment isotrope. Il est, par conséquent, suboptimal parmi l'ensemble des matériaux composites orthotropes de fraction volumique donnée. On peut cependant rechercher analytiquement ses propriétés élastiques homogénéisées en fonction de la fraction de vide. La théorie de la micromécanique s'est penchée longuement sur la détermination des modules élastiques effectifs. Un premier modèle de microstructure pour les inclusions sphériques a été imaginé par Hashin (1962). Ce modèle prédit de façon correcte le module de compressibilité cubique. On peut montrer que la microstructure de Hashin réalise les bornes du module de compressibilité cubique des matériaux composites isotropes poreux. Il n'en est pas de même du module de cisaillement. Son estimation précise reste toujours un problème ouvert. Outre l'existence de bornes sur le module de cisaillement homogénéisé, on peut recourir à une théorie approchée comme la théorie de Mori et Tanaka qui, par ailleurs, confirme la valeur du module de compressibilité cubique.

### 4.4.1 Introduction

Le modèle des sphères composites aboutit, de par sa symétrie, à un matériau composite macroscopiquement isotrope. La loi constitutive d'un matériau composite isotrope est déterminée par deux paramètres : d'une part, le module de cisaillement homogénéisé  $G^*$  et d'autre part, le module de compressibilité cubique homogénéisé  $\kappa^*$  ou le premier coefficient de Lamé  $\lambda^* = \kappa^* - 2/3 G^*$  :

$$\bar{\sigma}_{ij} = \lambda^* \bar{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2 G^* \bar{\varepsilon}_{ij} \quad (4.85)$$

Si on distingue les parties hydrostatiques  $\bar{\sigma}$  et  $\bar{\epsilon}$  et les parties déviatoriques  $\bar{s}_{ij}$  et  $\bar{e}_{ij}$  des tenseurs de contrainte et de déformation, la loi de comportement élastique peut encore s'écrire de manière équivalente :

$$\bar{\sigma} = 3 \kappa^* \bar{\epsilon} \quad ; \quad \bar{s}_{ij} = 2 G^* \bar{e}_{ij} \quad (4.85)$$

L'approche directe du calcul des propriétés effectives d'un matériau repose sur la particularisation des formules (4.26) et (4.27) dans le cas des matériaux isotropes :

$$\begin{aligned} \kappa^* &= \kappa_1 + (\kappa_2 - \kappa_1) \frac{\bar{\epsilon}^{(2)}}{\bar{\epsilon}} c_2 \\ G^* &= G_1 + (G_2 - G_1) \frac{\bar{e}_{ij}^{(2)}}{\bar{e}_{ij}} c_2 \end{aligned} \quad (4.86)$$

Les indices 1 et 2 représentent les deux phases du composite et  $c_2$  est la fraction volumique de la phase 2. Les valeurs moyennes  $\bar{\epsilon}$  et  $\bar{e}_{ij}$  sont produites par des conditions limites "homogènes" au sens défini par la théorie de la micromécanique :

$$u_i(S) = \bar{\epsilon} x_i \quad ; \quad u_i(S) = \bar{e}_{ij} x_j \quad (4.87)$$

#### 4.4.2 Approximation diluée

On recherche d'abord les modules effectifs de compressibilité cubique et de cisaillement d'une phase continue contenant une très faible proportion de particules sphériques. Etant donné la très grande distance entre deux particules, l'interaction entre deux inclusions peut être négligée. On utilise la solution élastique du problème d'une particule sphérique isolée incluse dans un milieu infini.

*Module de compressibilité cubique  $\kappa^*$*

On considère une inclusion sphérique de rayon "a" composée du matériau isotrope noté 2 au sein d'un milieu infini également isotrope homogène noté 1. Le milieu 1 (la matrice) est soumis à une pression hydrostatique  $\epsilon_{kk}^0$  à l'infini. Compte tenu de la symétrie sphérique du problème, la solution générale du déplacement radial  $u_r$  est de la forme :

$$u_r^{(1)} = A r + B / r^2 \quad u_r^{(2)} = C r \quad (4.88)$$

Les trois constantes sont déterminées par les conditions aux limites et les conditions de continuité à l'interface :  $u_r^{(1)} = u_r^{(2)}$  et  $\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)}$  en  $r = a$  ainsi que  $\epsilon_{rr}^{(1)} = \epsilon_{rr}^{(2)} = \epsilon_{rr}^0$  en  $r = \infty$ . Ceci fournit le rapport (Aboudi , 1991) :

$$\frac{\epsilon_{kk}^{(2)}}{\epsilon_{kk}^0} = \frac{3 \kappa_1 + 4 G_1}{3 \kappa_2 + 4 G_1} \quad (4.89)$$

On en déduit le module de compressibilité cubique homogénéisé pour de faibles concentrations en

particules de la phase 2 :

$$\kappa^* = \kappa_1 + (\kappa_2 - \kappa_1) \frac{(3\kappa_1 + 4G_1)}{(3\kappa_2 + 4G_1)} c_2 \quad (c_2 \ll 1) \quad (4.90)$$

Module de cisaillement  $G^*$

On essaie une solution de nature similaire à celle qui est obtenue pour un milieu homogène en état de déformation de cisaillement pur, exprimée en coordonnées sphériques. On recherche donc une solution du type :

$$\begin{aligned} u_r &= \tau U_r(r) \sin^2\theta \cos 2\phi \\ u_\theta &= \tau U_\theta(r) \sin\theta \cos\theta \cos 2\phi \\ u_\phi &= \tau U_\phi(r) \sin\theta \sin 2\phi \end{aligned} \quad (4.91)$$

où  $U_r$ ,  $U_\theta$ ,  $U_\phi$  sont des fonctions à déterminer pour satisfaire à l'équilibre, aux conditions limites à l'infini ainsi qu'aux conditions de continuité des déplacements et des tractions à l'interface en  $r=a$ . Après quelques longues manipulations algébriques (Christensen, 1979), on obtient :

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{12}^{(2)}}{\varepsilon_{12}^0} = \frac{15(1 - \nu_1)}{(7 - 5\nu_1)G_1 + 2(4 - 5\nu_1)G_2} \quad (4.92)$$

Le module de cisaillement effectif est obtenu en faisant usage de la relation entre les déformations et les propriétés moyennes, ce qui donne :

$$G^* = G_1 + \frac{15(1 - \nu_1)(G_2 - G_1)}{7 - 5\nu_1 + 2(4 - 5\nu_1)\frac{G_2}{G_1}} c_2 \quad (c_2 \ll 1) \quad (4.93)$$

#### 4.4.3 Le modèle des sphères composites ou microstructure de Hashin

Le modèle des sphères composites fut introduit par Hashin en 1962. Ce modèle considère des particules sphériques, de tailles graduellement décroissantes, baignées dans une matrice continue. La distribution des différentes tailles de sphère n'est cependant pas aléatoire, mais au contraire, elle suit des caractéristiques bien déterminées par la construction du modèle. A cette fin, on considère une collection de sphères composites, toutes constituées d'un coeur sphérique, la particule, et d'une couronne concentrique, la matrice. Il est supposé, par construction, que le rapport " $a/b$ " entre les rayons des particules et des couronnes est identique pour toutes les sphères composites et cela, quelle que soit leur taille. Le corps de volume  $V$  ou de surface  $S$  est rempli progressivement par des sphères composites de tailles décroissantes jusqu'à l'infini. Celles-ci ne se recouvrent pas, mais elles sont en contact tangentiel les unes avec les autres. On peut montrer que l'on peut remplir de manière dense tout le volume ou toute la surface disponible sans créer de double recouvrement. De par sa nature, ce modèle ne permet pas de tenir compte de manière raisonnable de résultats obtenus pour des composites réels qui ne contiennent que des particules d'une seule taille à haute concentration. Toutefois, cette

microstructure permet, non seulement, de trouver une solution exacte pour le module de compressibilité effectif, mais aussi, comme on le verra plus tard, de réaliser la raideur maximale ou minimale de tout composite isotrope composé de deux phases.

L'avantage du modèle est de réduire le problème à l'étude d'une sphère de composite isolée. Les équations du champ de déplacement radial autour d'une inclusion sphérique sont encore applicables pour une sphère composite de rayon intérieur " $a$ " et de rayon extérieur " $b$ ", soumise à une pression hydrostatique " $p$ " sur sa surface extérieure:  $\sigma_{rr} = p$  en  $r=b$ .

Sous l'action de la pression hydrostatique  $p$ , le déplacement élastique sur la surface extérieure de la sphère composite est donnée par :

$$u^*(b) = p \frac{b}{3\kappa^*} \quad (4.94)$$

où  $\kappa^*$  découle d'une analyse similaire à celle qui a été effectuée pour une particule isolée. La valeur du coefficient  $\kappa^*$  est une fonction des propriétés du coeur et de la couronne ainsi que du rapport géométrique " $a/b$ ". Pour un observateur extérieur, la sphère composite se comporte comme une sphère homogène de module de compressibilité  $\kappa^*$ . Si le corps est en état de compression purement radial, on peut remplacer la sphère composite par une sphère de matériau équivalent sans perturber l'état de tension dans son entourage. Comme ce remplacement peut être effectué pour toutes les sphères de différentes tailles, mais de même rapport " $a/b$ " et donc ayant le même module  $\kappa^*$ , la compressibilité cubique, homogénéisée du composite entier, est donnée par celle d'une seule sphère. En identifiant les déplacements sur la sphère homogénéisée et sur la sphère composite en  $r=b$ , on obtient le module de compressibilité cubique homogénéisé de la microstructure de Hashin :

$$\kappa^* = \kappa_1 + \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)(4G_1 + 3\kappa_1)c_2}{(3\kappa_2 + 4G_1) - 3(\kappa_2 - \kappa_1)c_2} \quad (4.95)$$

où la  $c_2 = (a/b)^3$  est la fraction volumique des inclusions sphériques.

Contrairement au module de compressibilité cubique, l'obtention d'une estimation du module de cisaillement  $G^*$  avec le modèle des sphères composites est un problème toujours ouvert. Jusqu'à présent, on n'a pas pu dégager de champ de déplacement vérifiant la cinématique et l'équilibre. En effet, une sphère composite en cisaillement ne se comporte pas comme une sphère homogène et le schéma de remplacement n'est plus valable. L'estimation du module de cisaillement équivalent peut être approchée, soit, par des bornes précises, soit par des approximations (approximation auto-consistante de Christensen et Lo (1979) ou approximation de Mori et Tanaka (1973)).

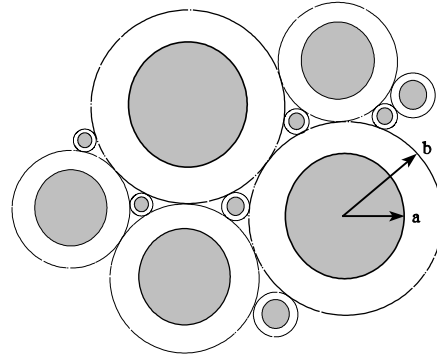


Figure 4.8 : Modèle des sphères composites



#### 4.4.4 Bornes variationnelles sur les modules équivalents

Des bornes sur les coefficients équivalents peuvent être trouvées au moyen des expressions de l'énergie de déformation et de l'énergie potentielle complémentaire :

$$\begin{aligned} W^e &= \frac{1}{2} (9 \kappa^* \bar{\epsilon}^2 + 2 G^* \bar{e}_{ij} \bar{e}_{ij}) \\ W^\sigma &= \frac{1}{2} (\bar{\sigma}^2 / \kappa^* + \bar{s}_{ij} \bar{s}_{ij} / 2 G^*) \end{aligned} \quad (4.96)$$

L'évaluation des bornes sur  $\kappa^*$  et sur  $G^*$  s'obtient en imposant des conditions aux limites homogènes adéquates. Les bornes de Paul (1960) sont basées sur cette approche.

##### Bornes de Hashin-Shtrikman

Sans faire d'hypothèse sur la géométrie des matériaux constitutifs, on peut trouver des bornes plus précises des propriétés de matériaux isotropes en utilisant le principe variationnel de Hashin et Shtrikman (1962). A partir de ce principe variationnel, Hashin et Shtrikman (1963) ont montré que les propriétés effectives d'un composite à deux phases sont bornées par les expressions suivantes où l'on suppose que  $\kappa_1 < \kappa_2$  et  $G_1 < G_2$  :

$$\begin{aligned} \kappa_{(-)}^* &= \kappa_1 + \frac{c_2}{1/(\kappa_2 - \kappa_1) + 3c_1/(3\kappa_1 + 4G_1)} \\ \kappa_{(+)}^* &= \kappa_2 + \frac{c_1}{1/(\kappa_1 - \kappa_2) + 3c_2/(3\kappa_2 + 4G_2)} \end{aligned} \quad (4.97)$$

$$\begin{aligned} G_{(-)}^* &= G_1 + \frac{c_2}{1/(G_2 - G_1) + 6c_1(\kappa_1 + 2G_1)/5G_1(3\kappa_1 + 4G_1)} \\ G_{(+)}^* &= G_2 + \frac{c_1}{1/(G_1 - G_2) + 6c_2(\kappa_2 + 2G_2)/5G_2(3\kappa_2 + 4G_2)} \end{aligned} \quad (4.98)$$

Dans le cas où  $\kappa_1 > \kappa_2$  et  $G_1 > G_2$ , ce qui est la cas des inclusions poreuses par exemple, les bornes supérieures et inférieures sont inversées.

Fait remarquable, la comparaison de la borne inférieure (4.98) et du module de compressibilité des sphères composites (4.96) montre que les deux expressions sont identiques. Puisque la borne est réalisée par le module des sphères composites, qui donne un résultat exact, cette borne est la meilleure borne inférieure que l'on puisse trouver pour un matériau isotrope à deux phases. La borne supérieure est également la meilleure que l'on puisse dégager puisqu'elle correspond à un matériau composite de matrice 2 et d'inclusions faites du matériau 1. On n'a jamais pu démontrer que les bornes sur le module de cisaillement possèdent les mêmes propriétés exceptionnelles, car on n'a jamais pu exhiber de microstructure qui la réalise. Malgré tout, on pense qu'il s'agit aussi des bornes optimales.

On peut aussi montrer (Jikov *et al.*, 1994, p. 405), par la théorie de la *G-convergence*, que la structure de Hashin est *optimale* pour le module de compressibilité, mais qu'elle ne réalise pas les bornes sur le module de cisaillement. Elle n'est pas optimale pour ce module et on montre que

$$G_{(-)}^* < G_{Hashin}^* < G_{(+)}^*.$$

Borne de Herve-Soltz-Zaoui

Les bornes générales de Hashin et Shtrikman ont une signification pratique quand le rapport de raideur entre les deux phases est situé en dessous de 10. Pour des rapports supérieurs à 10, comme dans le problème de porosité, l'erreur devient trop grande. Par exemple, dans le cas d'un milieu poreux, la borne inférieure tend vers 0. Dans ces cas extrêmes, il est compréhensible que la géométrie des différentes phases joue un rôle capital. Aussi, pour améliorer les bornes, il faut abandonner l'hypothèse d'une géométrie quelconque et construire des bornes pour un modèle spécifique.

Pour le cisaillement, le modèle de Hashin ne permet plus la substitution rigoureuse des sphères composites en sphères homogénéisées. On peut, néanmoins, utiliser la solution cinématiquement admissible d'une sphère composite dans le principe variationnel et en extraire une borne supérieure assez précise du module de Coulomb. Bien qu'une première borne sur le module de cisaillement ait été établie par Hashin (1962b), on présente une borne plus précise obtenue plus récemment par Herve, Soltz et Zauoi (1991). Celle-ci utilise l'hypothèse additionnelle d'isotropie de l'assemblage des sphères composites. La borne de Herve, Soltz et Zauoi (1991) se lit alors :

$$G_{(+)}^{HSZ} = G_1 (1 + c_2 F(c_2, \gamma, \gamma)) \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{G_2}{G_1} \quad (G_2 \leq G_1) \quad (4.99)$$

avec la fonction :

$$F(c, \gamma, \gamma_0) = \left( \frac{2}{5} (1-c) + \frac{1}{\gamma-1} - \frac{c(1-c^{2/3})^2}{\frac{10}{21} \frac{19(1-\gamma)}{16+19\gamma} c^{7/3} + \frac{10}{21} + \frac{25}{24(\gamma_0-1)}} \right)^{-1} \quad (4.100)$$

4.4.5 Modèle à trois phases de Christensen et Lo (1979)

Une autre manière de dégager une estimation du module de cisaillement est d'élaborer un modèle approché. Le modèle à trois phases ou modèle généralisé auto consistant (Christensen et Lo, 1979) est une extension du modèle des sphères composites. La sphère d'inclusion est d'abord entourée par une couronne du matériau de la matrice, elle-même recouverte d'une autre couronne constituée du matériau homogénéisé dont on recherche les propriétés.

L'application de ce modèle à l'estimation du module de compressibilité cubique restitue la valeur obtenue par le modèle des sphères composites, ce qui est une preuve de sa qualité. En ce qui concerne le module de cisaillement, le modèle généralisé auto consistant (Christensen et Lo, 1979) permet de déduire une estimation  $G^*$ . Cette estimation est, néanmoins, plus compliquée et elle dépend de manière complexe des propriétés de l'inclusion et de la matrice. La solution présentée par Christensen et Lo demande la résolution d'une équation du second degré où la valeur de  $G^*$  est découplée de  $\kappa^*$ . La formulation de Herve, Soltz et Zauoi (1991)

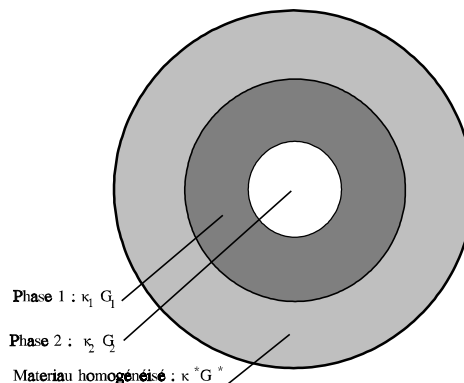


Figure 4.9 : Modèle à trois phases

permet de réécrire le résultat dans une expression équivalente où il faut résoudre l'équation implicite :

$$\frac{G_{3\phi}^*}{G_1} = 1 + c_2 F(c_2, \frac{G_2}{G_1}, \frac{G_{3\phi}^*}{G_1}) \quad (4.101)$$

#### 4.4.6 Approximation de Mori et Tanaka

A l'origine, les travaux de Mori et Tanaka (1973) étaient destinés au calcul des tensions internes moyennes dans une matrice contenant des précipités en état de déformation propre. Cette théorie a, cependant, été le point de départ d'une série de développements concernant la détermination des propriétés effectives des matériaux composites. Plus récemment, Benveniste (1987) a synthétisé une bonne part des travaux réalisés sur le sujet et il a formulé la théorie en élucidant l'approximation qui y est incluse.

Le point de départ est, encore une fois, la relation entre les raideurs homogénéisées et les concentrations de contraintes pour un composite à deux phases. Si on note encore la matrice avec un indice 1 et les inclusions avec un indice 2, on a pour les raideurs :

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E}^{(1)} + c_2 (\mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)}) \mathbf{A}_2 \quad (4.102)$$

tandis que pour les souplesses, on a :

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{S}^{(1)} + c_2 (\mathbf{S}^{(2)} - \mathbf{S}^{(1)}) \mathbf{B}_2 \quad (4.103)$$

Les matrices  $\mathbf{A}_2$  et  $\mathbf{B}_2$  sont, respectivement, les matrices de concentration de contraintes et de déformations dans les inclusions quand on impose des conditions limites homogènes de déformation ou de tension sur la frontière S.

On se sert du problème auxiliaire d'une particule unique dans une matrice infinie qui a été utilisé pour l'approximation diluée. En conséquence, pour le problème avec déformations imposées, on suppose que l'on peut faire l'approximation :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)} \approx \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.104)$$

tandis qu'on peut émettre la même hypothèse pour le problème avec des conditions limites sur les contraintes :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} \approx \boldsymbol{\sigma}^0 = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (4.105)$$

Dans cette situation, les matrices de concentration de contraintes sont celles d'une particule isolée dans un milieu infini. Dans la réalité, la concentration volumique n'est pas infinitésimale et ces relations ne sont plus valables, parce que les contraintes moyennes dans la matrice et les inclusions sont influencées par les interactions entre particules. La méthode de Mori et Tanaka ignore l'interaction entre les particules, et on fait l'hypothèse simplificatrice que la déformation moyenne  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)}$  dans les particules d'inclusions peut être approchée par celle d'une particule isolée dans un milieu infini soumis à une déformation uniforme dans la matrice  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)}$ . Cette hypothèse est illustrée à la figure 4.10(a) qui montre que le problème à résoudre selon le modèle proposé est celui d'une particule unique incluse dans un certain volume assez large  $V$  de surface extérieure  $S$  et soumis aux conditions limites de

déformation sur  $S'$  :  $\mathbf{u}(S') = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)} \mathbf{x}$ .

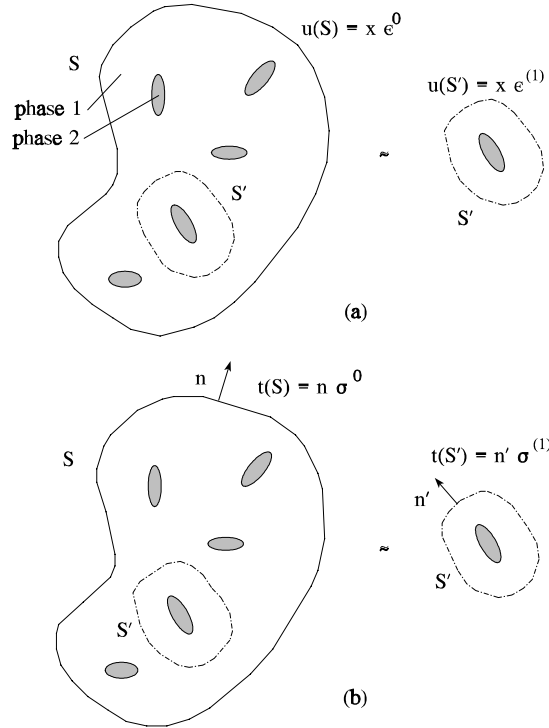


Figure 4.10 : Représentation de l'approximation de la théorie de Mori et Tanaka

Dès lors, la relation entre les déformations moyennes dans la matrice et l'inclusion est donnée par :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)} = \mathbf{T} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)} \quad (4.106)$$

où la matrice  $\mathbf{T}$  est déterminée par la solution d'une particule isolée dans un milieu infini soumis aux mêmes conditions limites à l'infini.

On introduit cette relation dans l'équation de mélange des déformations moyennes :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = c_1 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)} + c_2 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 \quad (4.107)$$

pour établir la relation entre la déformation moyenne de la matrice munie d'inclusions et la déformation moyenne du composite :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = (c_1 \mathbf{I} + c_2 \mathbf{T})^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \quad (4.108)$$

ce qui permet d'identifier la matrice de concentration de contrainte :

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{T}(c_1 \mathbf{I} + c_2 \mathbf{T})^{-1} \quad (4.109)$$

En conséquence, la raideur effective du composite est donnée par :

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E}^{(1)} + c_2 (\mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)}) \mathbf{T} (c_1 \mathbf{I} + c_2 \mathbf{T})^{-1} \quad (4.110)$$

Une procédure similaire peut être employée avec des conditions limites de contrainte, ce qui permet d'obtenir une estimation de la souplesse du composite  $\mathbf{S}^*$ :

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{S}^{(1)} + c_2 (\mathbf{S}^{(2)} - \mathbf{S}^{(1)}) \mathbf{W} (c_1 \mathbf{I} + c_2 \mathbf{W})^{-1} \quad (4.111)$$

où  $\mathbf{W}$  est le facteur de concentration de contraintes d'une inclusion isolée.  $\mathbf{W}$  est reliée à  $\mathbf{T}$  par :

$$\mathbf{W} = \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{T} \mathbf{S}^{(1)} \quad (4.112)$$

Benveniste (1987) a montré que les deux résultats sont consistants dans le sens où :

$$\mathbf{S}^* = (\mathbf{E}^*)^{-1} \quad (4.113)$$

Appliquons les relations de Mori et Tanaka à la prédiction des modules élastiques d'une matrice élastique contenant des particules isotropes dispersées. Les deux phases sont supposées isotropes. On reprend la solution d'une particule isolée en état de compression hydrostatique.

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{kk}^{(2)}}{\bar{\varepsilon}_{kk}^{(1)}} = \frac{3\kappa_1 + 4G_1}{3\kappa_2 + 4G_1} \quad (4.114)$$

Il s'ensuit que le module de compressibilité cubique du composite suivant la théorie de Mori-Tanaka est donné par :

$$\kappa^* = \kappa_1 + \frac{c_2 (\kappa_2 - \kappa_1) (3\kappa_1 + 4G_1)}{(1 - c_2) (\kappa_2 - \kappa_1) + (3\kappa_1 + 4G_1)} \quad (4.115)$$

Cette expression est identique au modèle des sphères composites de Hashin et donc également à la borne de raideur maximale de Hashin et Shtrikman.

Pour le module de cisaillement homogénéisé, on reprend la solution d'une particule isolée :

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{12}^{(2)}}{\bar{\varepsilon}_{12}^{(1)}} = \frac{15(1 - \nu_1)}{(7 - 5\nu_1)G_1 + 2(4 - 5\nu_1)G_2} \quad (4.116)$$

En appliquant une nouvelle fois la théorie de Mori et Tanaka, on trouve l'estimation du module de cisaillement effectif :

$$\mathbf{G}^* = \mathbf{G}_1 + \frac{c_2 (\mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1) \mathbf{G}_1}{(1 - c_2) (\mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1) \frac{6(\kappa_1 + 2G_1)}{5(3\kappa_1 + 4G_1)} + \mathbf{G}_1} \quad (4.117)$$

Ce résultat restitue la borne maximale sur le module de cisaillement.

On remarque que les résultats (4.116) et (4.118) sont identiques à ceux obtenus par Weng (1984).

#### 4.4.7 Application de la microstructure de Hashin à l'optimisation topologique

Lorsqu'on envisage d'utiliser cette microstructure avec des inclusions sphériques en optimisation topologique, on suppose que l'on ne manipule que des matériaux composites poreux isotropes, c'est-à-dire, que le matériau faible possède des propriétés négligeables. La matrice est constituée du solide de référence dont les propriétés sont repérées par un indice 0. Si le matériau a une densité moyenne notée  $\delta$ , la proportion des inclusions sphériques de vide est  $1-\delta$ . Les relations raideur-densité du matériau poreux découlent des relations de l'approximation de Mori et Tanaka lorsque l'on annule les propriétés de l'inclusion :

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{4G^0\kappa^0\delta}{4G^0 + 3\kappa^0(1-\delta)} \\ G &= \frac{G^0(9\kappa^0 + 8G^0)\delta}{(9\kappa^0 + 8G^0) + (1-\delta)(6\kappa^0 + 12G^0)}\end{aligned}\quad (4.118)$$

Le module de Young et le coefficient de Poisson s'obtiennent alors par une simple transformation entre les différents coefficients élastiques :

$$E = \frac{9\kappa G}{3\kappa + G}, \quad \nu = \frac{3\kappa - 2G}{6\kappa + 2G}\quad (4.119)$$

Après les simplifications algébriques, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{E}{E^0} &= \frac{2(7-5\nu^0)\delta}{(\nu^0+1)(15\nu^0-13)\delta - 3(\nu^0-1)(5\nu^0+9)} \\ \nu &= \frac{(\nu^0+1)(5\nu^0-3)\delta - 3(\nu^0-1)(5\nu^0+1)}{(\nu^0+1)(15\nu^0-13)\delta - 3(\nu^0-1)(5\nu^0+9)}\end{aligned}\quad (4.120)$$

Il est intéressant de comparer différents modèles possibles pour estimer les propriétés effectives des composites poreux. Les figures 4.11 et 4.12 présentent une comparaison de l'approximation de Mori et Tanaka qui est confondue avec la borne du principe variationnel, de la borne de Herve *et al.* et de la borne du modèle à trois phases. Les relations raideur-densité sont illustrées pour un module de Young du  $E=1$  Pa et  $\nu = 0.3$ .

La figure 4.11a montre que le module de compressibilité cubique est unique quel que soit le modèle ou la borne adoptés. On examine ensuite la courbe du module de cisaillement effectif. Si l'on fait abstraction de l'imprécision numérique de la résolution numérique de l'équation implicite du modèle à trois phases, la borne du principe variationnel est toujours plus élevée que les deux autres estimations. Le modèle à trois phases est toujours plus raide que la borne de Herve *et al.*. Ceci s'explique par la plus grande sophistication du modèle qui introduit une estimation implicite du module, alors que la borne de Herve *et al.* est explicite. Les mêmes conclusions sont valables pour l'analyse du module de Young relatif aux différents modèles. Les courbes du coefficient de Poisson en fonction de la densité sont, par contre, beaucoup plus variées et la grande dispersion des courbes reflète toute l'imprécision des différentes estimations. Aucun modèle ne prédit un coefficient de Poisson constant en fonction de la densité. La borne de raideur maximale issue de l'approximation de Mori et Tanaka donne lieu à une courbe monotone croissante avec la densité. Les estimations de Herve

*et al.* du modèle trois phases engendrent des courbes non monotones. Le fait le plus étonnant concerne l'estimation du coefficient de Poisson lorsque la densité du matériau devient celle du vide. Le modèle de Mori et Tanaka prédit une valeur proche de 0.240 inférieure au coefficient de Poisson du solide de référence, alors que l'estimation de Herve *et al.* donne une valeur d'environ 0.350 et que le modèle à trois phases donne une estimation de 0.330. Il n'est pas possible de confirmer l'intuition qui voudrait que le coefficient de Poisson du composite constitué de vide tende vers 0 ou qu'il reste de valeur égale à celui du solide initial. On remarque que, pour le matériau de rang 2 pseudo-isotrope, la formule (4.51) prédit un coefficient de Poisson équivalent qui décroît vers 0 lorsque la densité diminue.

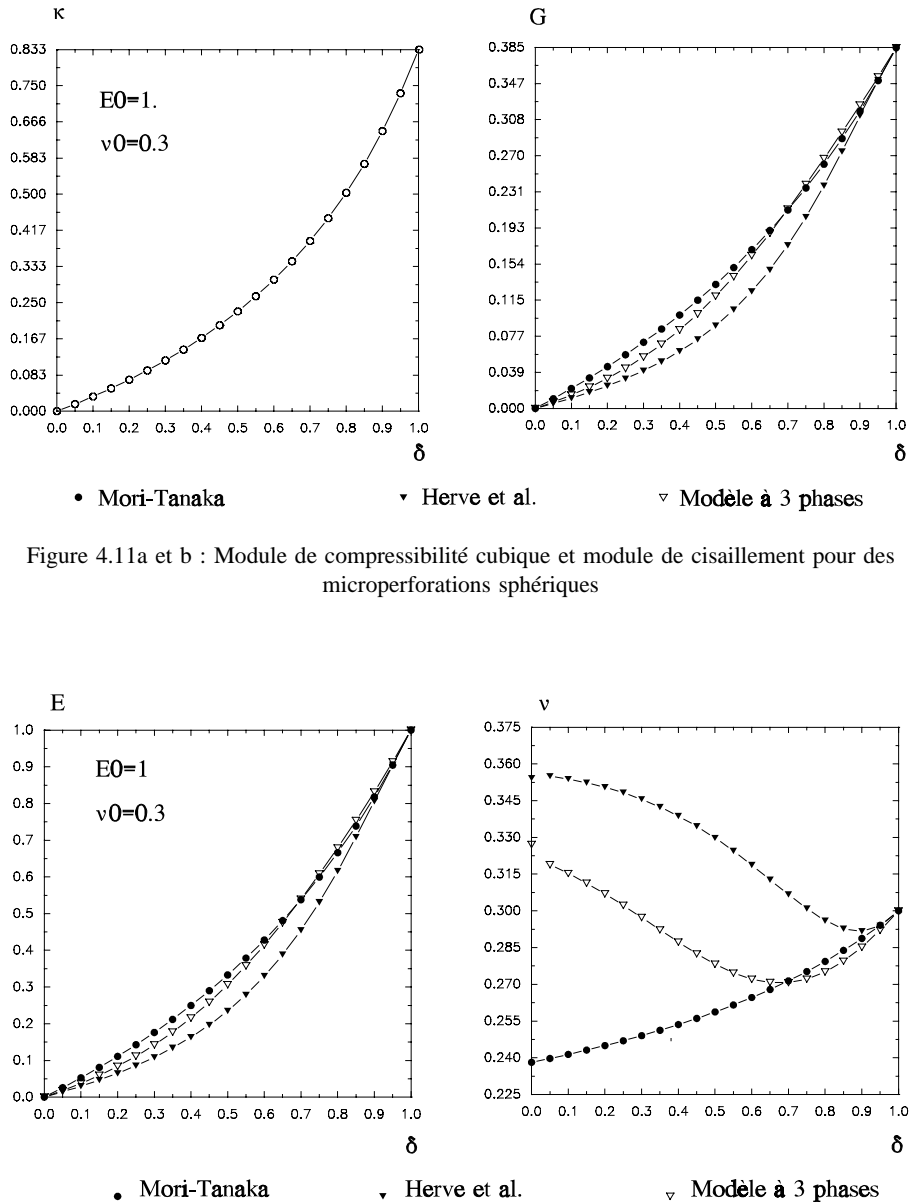


Figure 4.11a et b : Module de compressibilité cubique et module de cisaillement pour des microperforations sphériques

Figure 4.12a et b : Module de Young et coefficient de Poisson pour des microperforations sphériques

Si on examine la non-linéarité de la loi de raideur en fonction de la densité, on voit qu'elle est fort proche de celle des matériaux pseudo-isotropes de rang 2. En effet, il est intéressant de constater que

si on adopte  $\nu^0=1/3$ , on retrouve la loi raideur-densité relative du matériau pseudo-isotrope de rang 2.

$$E = \frac{\delta}{2-\delta} E^0 \quad (4.121)$$

Ainsi, en dépit du fait qu'on choisisse une microstructure isotrope, le matériau restitue une non-linéarité semblable à celle introduite par le matériau feuilleté de rang 2, de sorte que les résultats obtenus avec les deux matériaux lors d'une optimisation topologique donnent des résultats similaires au point de vue de la séparation vide-solide.

La microstructure des sphères composites se prête parfaitement à l'optimisation topologique. Néanmoins, il faut garder à l'esprit que la sélection d'une telle microstructure repose sur une hypothèse restrictive importante. On choisit délibérément de travailler dans la famille des matériaux composites poreux isotropes en ignorant tous les matériaux composites orthotropes. On se place donc, a priori, dans un cadre de travail où l'on n'obtient qu'une solution suboptimale, car la microstructure est elle-même suboptimale.

Nos hypothèses étant admises, la microstructure de Hashin possède plusieurs avantages.

En premier lieu, la microstructure de Hashin permet de modéliser facilement le matériau poreux en question et d'en *connaître ses propriétés équivalentes de façon analytique*.

En second lieu, le modèle de Mori et Tanaka est *optimal pour la classe des matériaux composites poreux isotropes*, puisque cette estimation des propriétés effectives réalise les deux bornes du principe variationnel de Hashin et Shtrikman pour les composites isotropes. Dès lors, le *G-Closure* des matériaux composites isotropes étant atteint par notre matériau, on ne peut trouver de meilleure solution qu'en faisant l'hypothèse selon laquelle le matériau poreux reste isotrope. Remarquons qu'on abandonne partiellement la microstructure de Hashin, puisqu'on sait que ce modèle est optimal pour le module de compressibilité cubique, mais qu'il ne réalise pas le module de cisaillement optimal. Par contre, si on choisit l'approximation de Mori et Tanaka, on utilise une estimation du module de Coulomb qui est erronée par rapport au module équivalent de la microstructure de Hashin mais qui réalise néanmoins la borne de raideur maximale en cisaillement.

Il peut paraître surprenant que nous utilisions les relations de l'approximation de Mori et Tanaka tout en sachant qu'elles ne correspondent pas à l'expression réelle du module de cisaillement de la microstructure des sphères composites. A notre avis, cette démarche est cohérente avec la constatation que le fait important pour le calcul numérique de la topologie n'est pas que la microstructure existe ou pas, mais bien qu'on puisse paramétrer de manière correcte les propriétés optimales en fonction des variables de microstructure.

Par ce fait, nous pensons que la microstructure des sphères composites et l'étude des bornes de Hashin-Shtrikman des matériaux composites poreux apportent une réponse rigoureuse et originale à deux problèmes restés ouverts. Le premier problème concerne la mise en évidence des propriétés optimales des composites isotropes poreux et de leur microstructure. Le second problème concerne la recherche d'une justification de l'utilisation des matériaux isotropes en topologie.

Il faut encore signaler que l'utilisation de la microstructure de Hashin a également été proposée par Gea (1994) sur la base des résultats de Weng (1984). Les travaux de Gea (1994) sont totalement indépendants des nôtres. Nos conclusions concernant l'utilisation de la microstructure de Hashin en optimisation concordent avec celles de Gea (1994), mais elles les renforcent et les complètent. On peut, en effet, mener une comparaison plus poussée entre les deux recherches et cette confrontation



tourne à l'avantage des résultats qui sont présentés dans notre thèse. Nos travaux semblent plus complets, car, même si Gea fournit les propriétés homogénéisées en fonction de la densité, il ne fournit aucune analyse claire des propriétés d'optimalité des microstructures de Hashin, propriétés essentielles qui justifient l'introduction du modèle des sphères composites en optimisation topologique. Gea (1994) ne semble pas connaître le caractère quasi optimal de la microstructure parmi les matériaux composites poreux isotropes. De plus, Gea (1994) ne signale pas les approximations nécessaires à l'établissement des formules d'homogénéisation.

## 4.5 Microperforations cylindriques

La théorie micromécanique a obtenu des résultats intéressants pour d'autres microstructures que celle des inclusions sphériques et des matériaux composites isotropes. Elle s'est abondamment intéressée au comportement élastique des matériaux composites unidirectionnels qui sont si importants en pratique. Le composite à fibres unidirectionnelles est composé de fibres longues et parallèles disposées dans une matrice. Ce type de matériau constitue la configuration idéalisée des plis unidirectionnels, mais ce modèle est suffisamment réaliste et précis pour produire des résultats intéressants. La cellule élémentaire d'un tel matériau peut être constituée, en première approximation, par un cylindre de matrice à base circulaire ou hexagonale entourant une fibre cylindrique concentrique. Les fibres possèdent un axe de symétrie de révolution noté 1. La direction parallèle aux fibres est encore appelée *direction longitudinale* et notée L. L'influence de la raideur des fibres sur le matériau composite s'exerce principalement suivant cet axe. Toute direction normale aux fibres est dénommée *direction transversale*. On suppose généralement que le matériau composite est transversalement isotrope. En conséquence, le repère du plan transverse est défini par deux directions normales 2, 3, également notées T et T'.

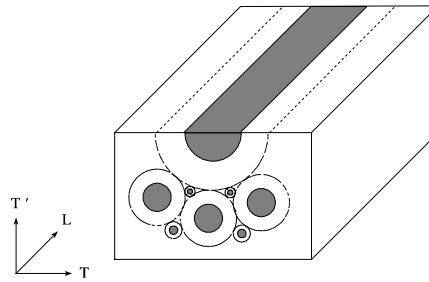


Figure 4.13 : Modèle des cylindres composites

Les fibres et la matrice sont toutes deux supposées isotropes et homogènes. Les propriétés d'indices  $f$  et  $m$  sont respectivement les propriétés des fibres et de la matrice. La fraction volumique des fibres, qui est notée  $V_f$ , est reliée à celle de la matrice par la relation de complémentarité  $V_f = 1 - V_m$ .

Le comportement mécanique d'un composite transversalement isotrope est complètement décrit par la connaissance de 5 coefficients indépendants (Hashin, 1983 et Berthelot, 1992). Pour les matériaux composites transversalement isotropes, l'écriture des résultats est simplifiée par l'introduction du *module de compressibilité latérale*, noté  $K$ , qui représente l'effet d'une compression isostatique ( $\epsilon_{22} = \epsilon_{33}$ ) selon les directions transversales 2,3, mais à déformation longitudinale nulle ( $\epsilon_{11} = 0$ ). Si les constituants sont isotropes, leur module de compressibilité latérale est lié au module de cisaillement et de compressibilité cubiques par la relation suivante :

$$K = \kappa + G/3. \quad (4.122)$$

En termes des modules de Young et de Coulomb, on a :

$$K = \frac{E}{2(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (4.123)$$

#### 4.5.1 Solutions exactes pour le modèle des cylindres composites

Pour déterminer les coefficients élastiques effectifs, on procède comme nous l'avons fait pour le modèle des sphères composites, c'est-à-dire par application successive de conditions aux limites "homogènes". Pour effectuer analytiquement le calcul, le seul modèle disponible est le modèle de l'assemblage des cylindres composites de Hashin et Hill symbolisé à la figure 4.13. Les arrangements périodiques et réguliers de fibres identiques, comme l'arrangement hexagonal, sont des modèles parfaitement acceptables et capables de rendre compte de l'isotropie transverse, mais leur traitement doit être fait par voie numérique. Nous ne les considérerons donc pas ici.

L'assemblage de cylindres composites est l'analogue bidimensionnel de la structure de Hashin décrite au paragraphe précédent. L'élément de base est un long cylindre composite formé d'une fibre de section circulaire placée à l'intérieur d'une gaine concentrique de matrice. Lors de certaines conditions de chargement ou de déformation, le cylindre composite possède un comportement identique, pour un observateur extérieur, à un cylindre composite homogénéisé. Cette substitution est possible lorsque l'on considère des contraintes ou des déplacements radiaux dans le plan transverse, une extension uniforme dans la direction axiale, un déplacement de cisaillement ou de traction uniforme dans le sens longitudinal. Toutefois, il n'en est pas de même pour un cisaillement ou pour une traction uniaxiale dans le plan transverse. Il est, dès lors, possible de déterminer les propriétés élastiques  $K^*$ ,  $E_L^*$ ,  $\nu_L^*$  et  $G_L^*$ , mais pas  $E_T^*$ ,  $\nu_T^*$  et  $G_T^*$ . L'assemblage de cylindres composites est construit en remplissant la section transversale avec des cylindres composites de différents rayons dont les fractions volumiques et les matériaux constituants sont toujours les mêmes. Si on note par  $r_f$  le rayon de la fibre cylindrique et par  $r_m$  le rayon de la gaine de matrice, dans chaque cylindre composite, les carrés de ces rayons sont dans le même rapport:  $V_f = r_f^2/r_m^2$ . L'approche analytique fait appel à la théorie de la mécanique des solides déformables, pour déterminer les déplacements élastiques en présence des différentes conditions aux limites "homogènes". Après remplissage de la section transverse selon la structure de Hashin, les modules  $K^*$ ,  $E_L^*$ ,  $\nu_L^*$  et  $G_L^*$  de l'assemblage sont ceux d'un seul cylindre composite. L'estimation des valeurs du module longitudinal, du coefficient de Poisson, du module de cisaillement longitudinal et du module de compressibilité latérale sont le fruit des travaux de Hill (1964), de Hashin et Rosen (1964) et de Hashin (1966).

Comme pour le modèle des sphères composites, le module de cisaillement transversal ne peut être obtenu avec ce modèle. Son estimation repose sur des approximations comme le modèle à trois phases de Christensen et Lo (1979a et 1979b) développé à partir des travaux de Hermans (1967). Dans ce modèle, la cellule cylindrique élémentaire est entourée d'un troisième cylindre de grande dimension constitué d'un matériau équivalent homogénéisé et possédant les propriétés effectives homogénéisées que l'on recherche. Cette approximation est l'adaptation bidimensionnelle du modèle auto consistant à trois phases développé pour les composites isotropes.

On présente les résultats de la solution analytique en passant les démonstrations que le lecteur peut trouver en détail chez Berthelot (1992). Comme il est montré par Hashin (1983) et Berthelot (1992), le comportement homogénéisé du composite à fibres longues est complètement décrit par les 5 modules indépendants :

- Le module longitudinal :

$$E_L = E_f V_f + E_m (1 - V_f) + \frac{V_f (1 - V_f) (v_f - v_m)^2}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1}{G_m} + \frac{1 - V_f}{K_f}} \quad (4.124)$$

- Le coefficient de Poisson :

$$v_{LT} = v_f V_f + v_m (1 - V_f) + \frac{V_f (1 - V_f) (v_f - v_m) \left( \frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_f} \right)}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1}{G_m} + \frac{1 - V_f}{K_f}} \quad (4.125)$$

- Le module de cisaillement longitudinal :

$$G_{LT} = G_m \frac{G_f (1 + V_f) + G_m (1 - V_f)}{G_f (1 - V_f) + G_m (1 + V_f)} \quad (4.126)$$

- Le module de compression hydrostatique latéral :

$$K_L = K_m + \frac{V_f}{\frac{1}{K_f - K_m} + \frac{1 - V_f}{K_m + G_m}} \quad (4.127)$$

- Le module de cisaillement transversal :

$$G_{TT'} = G_m + \frac{G_m V_f}{\frac{G_m}{G_f - G_m} + \frac{K_m + 2G_m}{2K_m + 2G_m} (1 - V_f)} \quad (4.128)$$

Les valeurs des autres coefficients élastiques sont donnés en fonction des relations de dépendances entre les modules élastiques (Hashin, 1983 et Berthelot, 1992).

- Le module de Young transversal :

$$E_T = \frac{2}{\frac{1}{2K_L} + \frac{1}{2G_{TT'}} + \frac{2v_{LT}^2}{E_L}} \quad (4.129)$$

- Le coefficient de Poisson transversal :

$$v_{TT'} = \frac{E_T}{2G_{TT'}} - 1 \quad (4.130)$$

### 4.5.2 Bornes variationnelles de Hashin et Hill

L'élaboration de bornes variationnelles pour les composites à fibres présente de nombreuses similitudes avec les développements effectués pour les composites statistiquement isotropes. Dans une approche de type déplacement, le théorème de l'énergie potentielle permet de trouver une borne supérieure, alors que le théorème de l'énergie potentielle complémentaire permet, dans le cadre d'une approche statiquement admissible, d'accéder aux bornes inférieures. Ces bornes ne sont cependant pas d'importance pratique, car elles ne sont pas assez serrées. Des bornes plus précises sur  $K_L^*$ ,  $E_L^*$  et  $\nu_L^*$  ont été données par Hill (1964a), tandis que Hashin (1965b) trouvait celles sur  $K_L^*$ ,  $G_L^*$  et  $G_T^*$ . Après examen, il apparaît que ces bornes sont confondues avec les expressions (exactes) des modules obtenus avec l'assemblage de cylindres composites et avec l'approximation du module de cisaillement transverse dérivant du modèle à trois phases. Ainsi, si le matériau de la matrice est noté 1 et celui des fibres 2, alors les bornes supérieures sont celles données par les expressions (4.127) à (4.129), tandis que les bornes inférieures sont obtenues en permutant le matériau de la matrice et des fibres, c'est-à-dire en considérant un composite où les fibres seraient constituées du matériau utilisé précédemment pour la matrice et où, inversement, la matrice serait formée avec le matériau des fibres.

Les bornes de Hashin et Hill ne dépendent pas de la géométrie particulière, car elle sont établies pour un arrangement quelconque de fibres de fraction volumique fixée, sans se soucier du diamètre des fibres et de leur répartition. Les bornes sur  $K_L^*$ ,  $E_L^*$ ,  $G_L^*$ ,  $\nu_L^*$  sont également les meilleures que l'on puisse espérer, puisqu'elles sont réalisées par la structure des cylindres composites. On peut penser que de manière analogue, la borne sur  $G_T^*$  soit également optimale. En conséquence, le matériau composite, dont la microstructure est formée de cylindres composites, est optimale parmi la classe de matériaux composites transversalement isotropes.

### 4.5.3 Equations de Halpin-Tsai

De nombreux résultats théoriques et expérimentaux sont disponibles pour estimer et décrire les propriétés des composites à fibres unidirectionnelles longues. Sans être exhaustif, nous disposons de résultats de plusieurs types dont nous pouvons résumer quelques contributions. Nous disposons d'abord, de bornes précises sur les modules effectifs qui résultent des travaux de Hashin (1965) et Hill (1964). Ces bornes sur 5 modules d'élasticité indépendants du composite montrent que les propriétés moyennes du composite ne peuvent varier de manière totalement arbitraire. Ensuite, nous savons que d'autres études basées sur l'approche classique de la théorie des solides déformables, ont permis de dégager des solutions exactes pour des arrangements particuliers de fibres. Le paragraphe précédent résume les résultats analytiques obtenus pour un modèle de cylindre composite. Pour ce même problème, on connaît également des estimations pratiques des modules et des coefficients homogénéisés obtenus par une approche simplifiée résultant de la mise en série ou en parallèle des fibres et de la matrice. On dispose, enfin, de résultats de simulations numériques des propriétés homogénéisées.

En se fondant sur tous ces résultats, Halpin et Tsai (1969) ont proposé des équations destinées à réaliser une formulation synthétique simple. Cette loi empirique propose d'admettre qu'une bonne approximation des modules effectifs d'un matériau composite unidirectionnel est donnée par la loi suivante:

- les modules  $E_L$  et le coefficient  $\nu_{LT}$  obéissent à la loi des mélanges :

$$\begin{aligned} E_L &= E_f V_f + E_m (1 - V_f) \\ \nu_{LT} &= \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) \end{aligned} \quad (4.131)$$

- les autres modules  $E_T$ ,  $G_T$  et  $\nu_{TT}$  sont donnés par la formule empirique :

$$\frac{M}{M_m} = \frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad (4.132)$$

$$\text{avec } \eta = \frac{M_f/M_m - 1}{M_f/M_m + \xi}$$

où  $M$ ,  $M_f$  et  $M_m$  désignent respectivement le module effectif du composite, le module des fibres et le module de la matrice. Le facteur  $\xi$  est une mesure du renforcement (ou de l'affaiblissement) apporté par les fibres. Sa valeur dépend de la géométrie et de l'arrangement des fibres.

#### 4.5.4 Application des équations de Halpin-Tsai à l'optimisation topologique

Pour des fibres remplies de vide  $M_f = 0$ , on exprime maintenant la loi de Halpin-Tsai en fonction de la fraction volumique de matrice  $V_m$ .

$$\eta = -1/\xi$$

$$\frac{M}{M_m} = \frac{\xi V_m}{1 + \xi - V_m} \quad (4.133)$$

Pour utiliser ce modèle en optimisation topologique des structures planes, on imagine que la microstructure est constituée de microperforations cylindriques perpendiculaires au plan du problème. On suppose encore que la loi qui donne la raideur de ce matériau perforé est fournie par la formule des raideurs transversales de Halpin-Tsai. Le matériau composite qui en résulte est un matériau isotrope dans le plan de la structure, et son module de Young est donné par la dernière formule. Le coefficient de Poisson devrait être régi par une loi semblable. Cependant à la suite d'expériences numériques, on s'est aperçu qu'on obtient des résultats numériques tout aussi valables en prenant une valeur constante du coefficient de Poisson. Quant à la masse volumique, elle suit simplement une évolution linéaire.

Nous proposons donc la loi :

$$\frac{E}{E^0} = \frac{\xi \delta}{1 + \xi - \delta}, \quad \nu = \nu^0$$

$$\rho = \delta \rho^0 \quad (4.134)$$

Dans cette équation, le paramètre  $\xi$  représente toujours un paramètre de renforcement consécutif aux inclusions. Suivant la valeur de  $\xi$ , on retrouve différentes "lois de mélange" :

- $\xi = 0$                       Loi de mélange avec série des constituants;
- $\xi = \infty$                     Loi de mélange avec mise en parallèle des constituants;
- $\xi = 1$                       La formule permet de retrouver la raideur diagonale d'un matériau de rang 2 pseudo-isotrope ( $D_{11}=D_{22}$ );

$$\xi = \frac{1}{2(1-\nu^2)}$$

La loi restitue l'estimation analytique (4.129) de la raideur d'un assemblage de cylindres composites;

$$\xi = \frac{1-\nu}{2(1+\nu)}$$

La loi rencontre l'estimation analytique de la raideur moyenne d'un assemblage de cylindres composites donnée par Tsai (1964) (cité par Jones (1975), p 111).

Comme le montre la figure 4.14, on peut modifier la non-linéarité de la relation raideur-densité en jouant sur le paramètre de renforcement  $\xi$ . En optimisation, la loi de Halpin-Tsai introduit toute une famille de courbes de raideur dont la non-linéarité de la raideur relative en fonction de la densité relative est inversement proportionnelle au paramètre  $\xi$ .

A notre connaissance, l'utilisation de cette relation en topologie est originale. D'après notre expérience numérique, elle produit de bons résultats. Comme on le verra par la suite, les topologies que l'on obtient avec des distributions de matériaux contenant des perforations cylindriques sont concordantes avec les topologies obtenues avec d'autres microstructures. Pour  $\xi=1/2(1-\nu^2)$ , la loi correspond à la microstructure des cylindres composites, qui est optimale dans la classe restreinte des matériaux composites fabriqués avec des perforations cylindriques perpendiculaires au plan de la structure, puisque ces modules vérifient les bornes de Hill et de Hashin. Evidemment, elle est suboptimale pour le problème général de topologie. Malgré cela, l'utilisation de la loi de Halpin possède l'avantage de pouvoir être formulée analytiquement. De plus, on peut jouer sur le paramètre de renforcement  $\xi$  pour contrôler la séparation vide-solide de la distribution de matière.

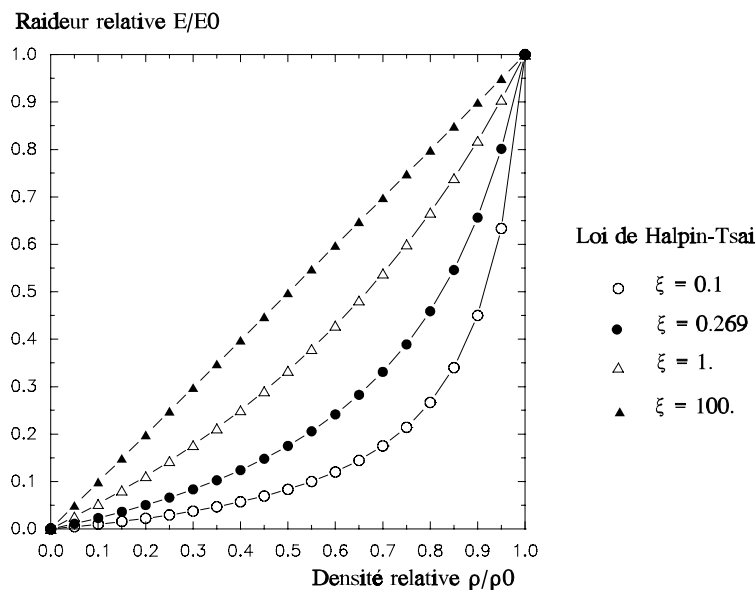


Figure 4.14 : Influence du paramètre  $\xi$  sur la loi de Halpin-Tsai

## 4.6 Microstructure de Hashin à deux niveaux

Jusqu'à présent, on n'a utilisé pour l'optimisation topologique que des structures de Hashin dont les propriétés mécaniques équivalentes sont isotropes. Or, on sait que la solution du problème de distribution de matière est généralement orthotrope au niveau macroscopique. Nous proposons donc une approche originale qui combine les deux microstructures de Hashin pour donner naissance à un matériau composite orthotrope poreux. Comme pour les matériaux feuilletés de rang 2, sa microstructure fait appel à une construction à deux niveaux. Au niveau le plus bas, on construit une matrice poreuse

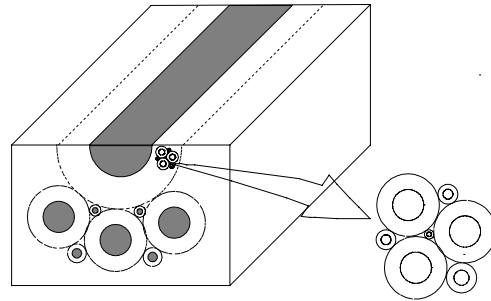


Figure 4.15 : Double structure de Hashin

de densité  $\delta_1$  relative connue. Le vide est présent sous forme de micro-inclusions sphériques. Dans un second niveau, on forme un composite unidirectionnel dont la structure transversale est ordonnancée selon la seconde structure de Hashin. La matrice est formée du matériau poreux construit dans la première étape. Les fibres sont constituées du solide de référence. La fraction volumique des fibres  $\delta_2$  constitue le second paramètre de la microstructure, de sorte qu'au total, la microstructure est décrite par deux paramètres comme le matériau de rang 2. Puisque le matériau est orthotrope, les variables de conception du matériau composite poreux sont au nombre de 3 si on y inclut l'angle d'orthotropie local. A notre connaissance, il s'agit d'une idée originale que de construire une telle microstructure à deux niveaux, basée sur le modèle des sphères composites et sur le modèle des cylindres. Nous l'appelons du nom de *double microstructure de Hashin* en l'honneur de ce célèbre micromécanicien dont de nombreux travaux ont été consacrés à l'étude des deux microstructures élémentaires qui sont nécessaires à la formation de ce composite.

### *La première microstructure de Hashin : la matrice*

La matrice est constituée du solide de référence où l'on trouve des micro-inclusions sphériques réparties selon la structure de Hashin. Le matériau est poreux et sa densité relative est  $\delta_1$ . Les propriétés homogénéisées de la matrice poreuse sont celles de la microstructure de Hashin décrite précédemment. Le matériau de la matrice est semi-optimal puisque le module de compressibilité de la microstructure de Hashin réalise la borne maximale admissible pour un composite isotrope. Le module de cisaillement pose plus de problèmes comme on le sait. Pour conserver le caractère optimal, on préfère adopter les estimations selon l'approximation de Mori et Tanaka. Quoique erronée, cette estimation sature également la borne variationnelle de la raideur en cisaillement. En définitive, les modules effectifs de la matrice sont donnés par les formules (4.119) à (4.121).

### *La seconde microstructure de Hashin : un matériau à fibres unidirectionnelles*

Le second niveau de la microstructure est un matériau composite à fibres unidirectionnelles obtenu en assemblant la matrice poreuse précédemment créée et des fibres formées avec le solide de référence. Soit  $\delta_2$  la fraction volumique des fibres. La structure transversale de l'unidirectionnel est celle d'un composite de Hashin. Bien entendu, on suppose que l'échelle  $\varepsilon_1$  de la microstructure de la matrice est bien inférieure à l'échelle  $\varepsilon_2$  de l'unidirectionnel, elle-même bien inférieure à l'échelle de la structure. L'homogénéisation s'obtient en appliquant les formules de Hashin et Hill décrites précédemment de

(4.125) à (4.131).

La densité totale du composite est facile à obtenir. Elle est donnée par :

$$\rho/\rho_0 = \delta_1(1-\delta_2) + \delta_2 = \delta_1 + \delta_2 - \delta_1\delta_2 \quad (4.135)$$

Cette expression est identique à la formule de la densité des matériaux feuilletés de rang 2 ou aux micro-inclusions rectangulaires.

La raideur est plus difficile à obtenir sous forme analytique, mais pour une application numérique, les coefficients d'élasticité homogénéisés s'obtiennent facilement en utilisant les formules d'homogénéisation de l'approximation de Mori et Tanaka pour le premier niveau, et les formules de Hill et Hashin, pour le second niveau. Pour l'état plan de contrainte, la matrice de Hooke est alors donnée par :

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 E_T/E_L} & D_{12} &= \frac{\nu_L E_L}{1 - \nu_{LT}^2 E_T/E_L} \\ D_{22} &= \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}^2 E_T/E_L} & D_{66} &= G_{LT} \end{aligned} \quad (4.136)$$

Lorsqu'on représente graphiquement les termes de raideur effective en fonction des paramètres de la microstructure, on est frappé par la douceur des courbes de la relation fonctionnelle. On remarque aussi que la double microstructure de Hashin possède une raideur non nulle en cisaillement. Enfin, on constate que la présence des fibres de matière renforce toujours la raideur dans la direction des fibres. Ceci signifie que, contrairement aux matériaux feuilletés de rang 2, la direction d'orthotropie de raideur forte reste toujours dirigée selon l'axe des fibres. Ces caractéristiques de la raideur ont une influence très positive sur le processus d'optimisation numérique. D'abord, nous avons constaté que, dans les applications numériques, la vitesse de convergence du processus d'optimisation est beaucoup plus grande que celle que l'on obtient avec les matériaux de rang 2. La remise à jour de l'angle d'orthotropie est notamment beaucoup plus rapide. Ensuite, la convergence est très monotone. En conclusion, le matériau se prête bien à l'optimisation numérique.

D'un point de vue théorique, la microstructure est formée de composites optimaux dans leur classe. La matrice poreuse est optimale parmi tous les matériaux composites isotropes. Les propriétés de la microstructure formée des fibres unidirectionnelles de matière et de la matrice poreuse correspondent aux bornes de Hashin et Hill. Dès lors, bien que nous ne puissions pas démontrer ce fait autrement que par ce raisonnement, nous pensons que le composite résultant de la double microstructure de Hashin est quasi optimale pour les problèmes plans. Nous avons pu constater que les valeurs des compliances de la distribution de matériau de rang 2 et de double microstructure de Hashin sont très voisines, de sorte qu'à tout le moins, la double microstructure de Hashin représente une très bonne approximation des performances optimales.

On peut également montrer que le choix  $\delta_1=0$  et  $\delta_2=\gamma$  conduit à  $D_{11}=\gamma E$  et  $D_{22}=D_{12}=D_{66}=0$ , ce qui restitue le matériau de rang 1. Par contre, le choix  $\delta_1=1$ , quel que soit  $\delta_2$  restitue le matériau de référence.

Contrairement aux matériaux feuilletés de rang 2, la double microstructure de Hashin possède une raideur en cisaillement, ce qui veut dire qu'elle peut être utilisée en présence de plusieurs cas de charge sans être instable.



Enfin, comme le montrent Berthelot (1992) et Christensen (1979), les microstructures de Hashin représentent, de manière réaliste, les propriétés des composites avec des inclusions sphériques ainsi que les propriétés des matériaux composites unidirectionnels réels. En conséquence, on peut espérer que l'optimisation topologique avec la double microstructure de Hashin pourra suggérer, non seulement la topologie, mais aussi une distribution de microstructure que l'on pourra réaliser avec des matériaux unidirectionnels réels. Cette microstructure offre donc un intérêt pratique.

## 4.7 Matériaux artificiels avec pénalisation des densités intermédiaires (SIMP)

### 4.7.1 Définition des propriétés matérielles

Toutes les relations entre les propriétés matérielles et la densité relative du matériau qui ont été données jusqu'à présent reposent sur un modèle de microstructure. Si l'on relaxe le problème de conception à l'aide d'une microstructure périodique, l'homogénéisation des propriétés macroscopiques ne peut être résolue que très rarement de manière analytique (comme pour les matériaux feuilletés de rang 2). L'obtention des propriétés matérielles nécessite souvent l'emploi d'une méthode numérique telle que la méthode des éléments finis. On aboutit à une relation généralement complexe et implicite entre les propriétés homogénéisées et les paramètres microscopiques. Pour éviter de nombreux calculs d'homogénéisation aux cours du processus numérique d'optimisation, on crée un modèle approché et explicite des relations entre la raideur et la densité par un procédé d'interpolation (Bendsøe et Kikuchi, 1988). En plus de la relaxation du problème de conception, on se souvient que l'introduction du matériau composite poreux a un second rôle : il permet de lever la nature purement discrète du problème de conception. Une manière très simple de procéder fut introduite par Bendsøe (1989). Elle consiste à utiliser une loi de "type puissance" pour relier la densité et les propriétés mécaniques du matériau. Si l'exposant 0 désigne les propriétés du solide de référence, il est possible d'exprimer les propriétés matérielles d'un solide isotrope artificiellement poreux au moyen de l'introduction d'un paramètre interne  $\mu$ .

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}) &= \mu(\mathbf{x})^p E^0 \\ \rho(\mathbf{x}) &= \mu(\mathbf{x}) \rho^0 \\ 0 \leq \mu(\mathbf{x}) \leq 1 \quad \text{et} \quad p > 1 \end{aligned} \tag{4.137}$$

Cette loi permet de tenir compte de densités comprises entre le vide et le solide tout en pénalisant les densités intermédiaires. Pour ces valeurs, le matériau donne une raideur faible pour un coût déraisonnable. Le choix approprié de l'exposant  $p$ , généralement entre 2 et 4, permet d'ajuster la pénalité et influence la présence plus ou moins grande de zones de densités intermédiaires dans la solution topologique.

En agissant de la sorte, on est libre de construire une loi aussi simple ou aussi plaisante qu'on le désire. On abandonne évidemment toute notion de microstructure au risque de ne plus pouvoir assurer une relaxation suffisante du problème de conception et de s'exposer ainsi au risque de ne plus pouvoir faire converger la solution avec le maillage. Dans son idée première, cette loi devait servir à simuler la résolution discrète du problème de topologie. Aussi, à l'origine, Bendsøe (1989) n'y voyait seulement qu'un procédé agréable mais "artificiel" fournissant une approximation différentiable susceptible de lever le caractère purement discret de la distribution de matière. Cependant, en dépit du fait qu'il s'agit d'une loi artificielle et que cette loi ne relaxe pas suffisamment le problème pour garantir l'indépendance des solutions vis-à-vis du maillage, l'utilisation du matériau SIMP a connu un vif succès qui a dépassé largement son champ d'application initial pour résoudre des applications en pratique.

Mlejnek et ses collaborateurs (1991 et 1993), Rozvany et ses collaborateurs (1991, 1992, 1993b) ainsi que Zhou (1991) ont montré que ce matériau représentait un outil efficace pour la prédiction de topologie en mécanique lorsqu'on se place du point de vue pratique. Les solutions sont principalement constituées de vide et de solide avec des bords bien définis, dépourvus de concentration de contrainte. Le matériau est simple à utiliser et sa mise en oeuvre dans un programme de calcul est facile. De plus, l'utilisation d'un matériau isotrope peut être un avantage pour la compréhension du comportement mécanique d'une structure et, a fortiori, pour le choix de sa topologie. Dans cette thèse, le matériau SIMP est l'une des relations raideur-densité les plus employées pour les applications.

Par ailleurs, Rozvany (1992) tente de justifier la signification physique de la loi de type SIMP. Lorsqu'on essaie de tenir compte d'un surcoût de fabrication dû à la présence des trous en plus du coût intrinsèque du matériau, on obtient une loi qui est fort proche de la loi des matériaux SIMP.

Lorsqu'on cherche une interprétation physique de la loi SIMP, il est clair que l'on pense aussi au problème de conception d'une structure d'épaisseur variable dont les épaisseurs intermédiaires sont pénalisées. Pour les problèmes plans, cette interprétation a un sens, car la troisième dimension correspond à l'épaisseur hors plan. Pour  $p=3$ , le problème est celui des plaques de Kirchoff étudié par Cheng et Olhoff (1981). Mais lorsqu'on étudie des structures tridimensionnelles, cette interprétation physique n'est plus possible et il est plus difficile de donner une signification aux zones de densité intermédiaire.

Le caractère de la simplicité de la loi SIMP ne doit cependant pas cacher l'inconvénient majeur du matériau : il ne relaxe pas suffisamment le problème de conception pour assurer l'indépendance de la solution vis-à-vis du maillage. En effet, il n'existe aucune preuve de la stabilité des résultats relatifs à différents maillages, car il ne s'agit pas d'un matériau obtenu par l'utilisation d'une microstructure. Au contraire, le problème de conception est similaire au problème de conception en variables discrètes [0:1] et au problème de plaque de raideur maximale rapporté par Cheng et Olhoff (1981). Dès lors, il est certain que, pour nombre de problèmes, les solutions obtenues ne puissent converger avec le raffinement du maillage. Dans ce cas, les solutions tendent à reproduire, au niveau macroscopique, des structures composites c'est-à-dire des zones où le vide et la matière alternent rapidement. A contrario, la relaxation introduite par une microstructure permettrait de rejeter ce phénomène au niveau microscopique et d'assurer la convergence des résultats au niveau d'une discrétisation de l'espace de conception macroscopique.

On remarque encore que le choix  $p=1$  reproduit le cas particulier de la conception optimale des structures d'épaisseur variable décrit par Rossow et Taylor (1973). Pour cette loi linéaire, on montre que l'absence de pénalisation des épaisseurs intermédiaires ne conduit pas à une structure de type vide-solide et qu'elle n'est donc pas appropriée à la génération de forme et de topologie pour les structures bidimensionnelles. Par contre, Bendsøe (1995, p. 57) a montré que, dans le cas  $p=1$ , la solution du problème d'optimisation avec paramètre distribué, existe et est stable.

Pour  $p=1$ , il est encore possible de voir la solution du problème de conception comme la distribution optimale d'un matériau dont le module de Young varie de façon linéaire et dont le coefficient de Poisson est fixé. La contrainte de volume est alors plus artificielle. Malgré l'existence de la solution et de sa calculabilité, on ne prédit pas de solution nettement définie car il n'y a pas de pénalisation des densités intermédiaires. En outre, on sait que la solution du problème discret [0:1] contient des matériaux composites qui ne sont pas introduits par cette paramétrisation du tenseur d'élasticité. En réalité, nous imaginons un problème, dans lequel on introduit des matériaux composites ainsi qu'une relation linéaire entre la raideur et la densité. Hélas, la solution de ce problème n'est pas si simple; Bendsøe, Haber, Guedes, Pedersen et Taylor (1993), ainsi que Bendsøe, Díaz, Lipton et Taylor (1994) qui l'ont étudié, ont établi que la solution requiert la paramétrisation libre du tenseur d'élasticité.

Pour être complet, signalons que Bendsøe (1995, p.61) a également démontré qu'il est possible d'obtenir l'existence de la solution du problème de pénalisation en limitant plus fortement les variations de la fonction artificielle de densité locale. Si on abandonne l'hypothèse la plus générale dans laquelle  $\mu(\mathbf{x}) \in L^\infty(\Omega)$ , la solution du problème existe si on prend :

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{x}) &\in H^1(\Omega) \\ \|\mu\|_{H^1(\Omega)} &= \left[ \int_{\Omega} (\mu^2 + \sum_i \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_i}\right)^2) d\Omega \right] \leq M \\ 1 < p < n/(n-2) \quad (\Omega \subset \mathbb{R}^n, n=2,3) \end{aligned} \quad (4.138)$$

Pour terminer la présentation des matériaux SIMP, on peut présenter une généralisation prometteuse de la loi isotrope de Bendsøe. Celle-ci est basée sur la constatation que les microstructures périodiques donnent lieu à des raideurs orthotropes. Maute et Ramm (1994) suggèrent d'étendre l'approche directe isotrope à un modèle orthotrope en prenant la matrice de Hooke en état plan qui suit :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu\sqrt{E_1 E_2} & 0 \\ \nu\sqrt{E_1 E_2} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\sqrt{E_1 E_2} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} E_1 = \mu_1^p E^0 \\ E_2 = \mu_2^p E^0 \end{cases} \quad (4.139)$$

tandis que la densité locale vaut :

$$\rho = (\mu_1 + \mu_2 - \mu_1 \mu_2) \rho^0 \quad (4.140)$$

Selon Maute et Ramm, le caractère orthotrope du matériau possède l'avantage de mieux s'adapter aux distorsions du maillage et de mieux se conformer aux efforts de la structure, compte tenu de l'existence des trois paramètres indépendants affectés à chacun des éléments. La relation décrite est fort similaire à celle que l'on obtient dans le cas de microperforations rectangulaires par exemple. Ceci explique les bons résultats que l'on obtient en optimisation topologique. La nature de la relaxation introduite est, semble-t-il, parfaitement apte à engendrer des résultats peu sensibles au maillage et à son raffinement.

#### 4.7.2 Les matériaux SIMP en pratique

##### Coûts de calcul et souplesse d'utilisation

Quand on se place dans la perspective des applications pratiques du calcul de topologie, le matériau "artificiel" s'impose comme un outil très intéressant. Généralement, on constate plusieurs avantages.

D'abord, étant isotrope, le matériau n'introduit qu'une seule variable de conception par élément, le paramètre de simili-densité  $\mu$ . La réduction du nombre de variables de conception diminue les coûts de calcul à toutes les étapes du cycle d'optimisation. Simultanément, on réduit l'effort de calcul de l'analyse de sensibilité, le travail de l'algorithme d'optimisation ainsi que tous les coûts informatiques (CPU, I/O, mémoire) nécessaires à la gestion de ce type de problème de grande taille.

Ensuite, il faut remarquer que les matériaux SIMP se prêtent au traitement d'une large variété de

critères de conception : compliance, plusieurs cas de charge, contraintes équivalentes locales, fréquences propres de vibration, bandes d'exclusion de fréquence, charge critique d'instabilité ... Cette approche est donc très attractive par sa souplesse. Un tel matériau permet d'envisager l'application de l'optimisation topologique avec beaucoup de simplicité et de robustesse.

Enfin, l'implantation de cette loi de raideur-densité dans un code de calcul est très facile, de sorte que le calcul de topologie, dans une forme élémentaire, est accessible avec de nombreux programmes d'optimisation structurale.

#### *Qualité des résultats obtenus*

Indépendamment des coûts de calcul, les expérimentations numériques que nous avons réalisées avec ce type de matériau montrent que cette approche simplifiée marche bien et que les topologies prédites sont généralement très satisfaisantes. La difficulté est évidemment la dépendance possible des solutions avec le maillage. En réalité, cela ne pose pas souvent de difficulté pour des discrétisations adoptées pour des problèmes de conception concrets, et les solutions obtenues pour les problèmes "réalistes" se sont révélées stables. Par contre, le phénomène de résurgence de microstructures composites au niveau du maillage macroscopique est visible lorsque l'on raffine le réseau de mailles.

En outre, les topologies prédites avec les matériaux "artificiels" concordent avec les distributions de densité que l'on obtient en utilisant des matériaux homogénéisés (donc pourvus de microstructure). Pour des problèmes où le volume de matière disponible est très faible, on retrouve également une bonne concordance avec les travaux analytiques de Michell (1904) ou de Hemp (1973). Néanmoins, il est important de noter qu'une comparaison stricte est impossible dans la mesure où une approche de type milieu continu pénalisera toujours les concentrations de contraintes à la jonction de membrures.

#### *Choix du paramètre $p$ et processus de continuation*

Le choix de l'exposant  $p$  de la loi (4.137) conditionne fortement les résultats. Vue sous un autre angle, l'existence d'un paramètre offre une plus grande souplesse à l'utilisateur pour ajuster la pénalité des densités intermédiaires et, par là même, la possibilité de modifier la sévérité des contours de la solution. Lors de nos expériences numériques, le choix de  $p$  s'est souvent porté sur des valeurs entières comprises entre 2 et 4 inclus.

La valeur  $p=4$  permet de pénaliser fortement les densités intermédiaires et elle conduit à des solutions très contrastées de type vide-solide. Il est facilement compréhensible que les valeurs élevées de  $p$  dégagent des topologies dominées par des éléments concentrés (structures de type treillis de barres ou de poutres). D'après notre expérience, augmenter la valeur de  $p$  au delà de 4 ne modifie pas sensiblement la topologie, alors qu'elle favorise les distributions parasites de densité comme le mode en damier dont nous reparlerons au chapitre 6.

Le choix de la valeur  $p=2$  rencontre aussi de nombreux succès. Les solutions qui sont obtenues avec une pénalisation quadratique se caractérisent par des contours généralement doux et des zones de densité intermédiaire, plus étendues. Ce choix est propice à créer des formes constituées de structures mélangeant des voiles, des membranes et des renforts structuraux. En d'autres termes, la silhouette de la structure est constituée de parties pleines, renforcées par des éléments concentrés. La conception de ce type de structure demande à être complétée par une optimisation de forme.

Pour les applications planes, le choix de l'exposant  $p=3$  semble souvent être le plus judicieux, car il représente un bon compromis pour la pénalisation des raideurs intermédiaires. La plupart des applications que nous ferons avec le matériau SIMP sont réalisées avec ce choix du paramètre. Avec

$p=3$ , on a des distributions dont la séparation vide-solide est nette, de sorte que la topologie s'en déduit sans ambiguïté. En outre, nous avons constaté qu'avec  $p=3$ , la vitesse de convergence des algorithmes était généralement très bonne. Le problème de conception se prête souvent très bien aux nouveaux schémas d'approximation convexes que nous proposerons au chapitre 5.

Avec ces microstructures suboptimales, on a souvent observé l'apparition de nombreux optimums locaux dont la topologie est différente de la solution de compliance minimale. Pour échapper à ces solutions, Jog (Haber, Jog et Bendsøe, 1994) et Sigmund (1994), à sa suite, proposent d'employer un *processus de continuation*. Le processus de continuation consiste à augmenter progressivement la pénalisation des densités intermédiaires depuis l'unité jusqu'à la valeur souhaitée. Après avoir essayé la procédure, nous proposons de prendre la suite de puissances  $p= 1.; 1.5; 2.; 2.5; 3.$ , mais la séquence plus courte 1.6; 2.; 2.5; 3. donne aussi de bons résultats. Evidemment, la procédure de continuation augmente le nombre d'itérations nécessaires pour résoudre le problème. Cependant, on n'est pas obligé de résoudre complètement le problème pour les plus petits exposants. En outre, lorsqu'on considère une contrainte sur le périmètre, la convergence est plus lente, de sorte que, dans ce cas, nous avons constaté que le processus de continuation peut se justifier, car il n'entraîne pas d'accroissement du nombre total de cycles d'optimisation.

Comme nous l'avons fait pour toutes les microstructures, nous pouvons comparer les matériaux avec pénalisation des densités intermédiaires, au matériau pseudo-isotrope de rang 2 ( $D_{11}=D_{22}$ ). La figure 4.16 montre la comparaison de différents choix de l'exposant  $p$ . Le choix de l'exposant quadratique est intéressant car, parmi toutes les puissances entières, la non-linéarité de la courbe avec  $p=2$  se rapproche le plus de celle des matériaux feuilletés de rang 2. Ce fait peut être constaté intuitivement sur la figure 4.16, mais pour une comparaison objective des lois de raideur spécifique, on calcule l'erreur quadratique moyenne sur l'intervalle  $[0,1]$  :

$$E = \left\| x^p - \frac{x}{2-x} \right\|_{L^2(0,1)} = \int_0^1 \left( x^p - \frac{x}{2-x} \right)^2 dx \quad (4.141)$$

Ce critère correspond à la norme de l'écart entre les deux fonctions dans l'espace d'Hilbert  $L^2(]0,1[)$ . Pour des exposants quelconques, un calcul plus approfondi montre que le minimum est donné par  $p=1.6$ . Quelques résultats numériques pour diverses valeurs de  $p$  sont synthétisés au tableau 4.2.

p	$\int_0^1 \left( x^p - \frac{x}{2-x} \right)^2 dx$
1	1.5567 10 <sup>-2</sup>
1.6	0,7978 10 <sup>-3</sup>
2	0.3723 10 <sup>-2</sup>
3	2.2892 10 <sup>-2</sup>
4	4.3769 10 <sup>-2</sup>

Tableau 4.2: Comparaison des lois de puissance et des matériaux de rang 2 pseudo-isotropes

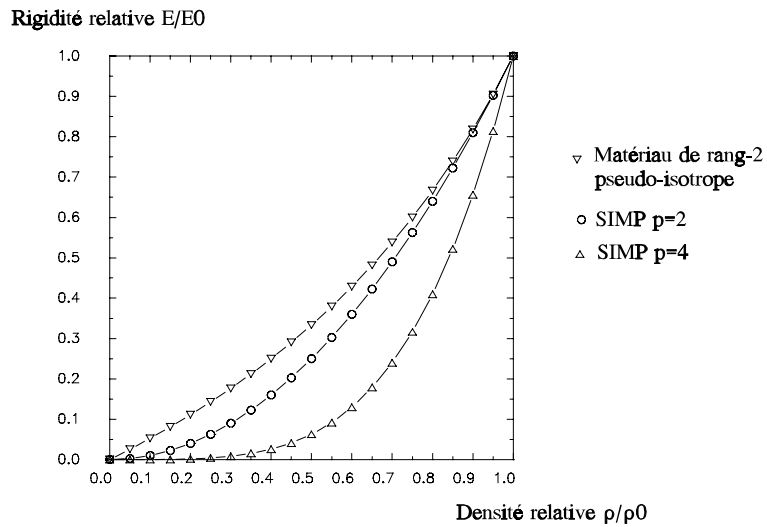


Figure 4.16 : Comparaison des lois SIMP quadratique et quadrique avec le matériau pseudo-isotrope

Compte tenu de son caractère de meilleure approximation au sens des moindres carrés, la loi quadratique est tout indiquée pour comparer les résultats obtenus avec un matériau artificiel et la famille des matériaux feuilletés de rang 2. Après plusieurs expérimentations numériques, la confrontation des résultats est très concluante. Malgré quelques légères différences, les distributions de matériaux sont fort voisines. Pour être précis, les connectivités des domaines structuraux sont généralement identiques à quelques détails près, tandis que les formes précises des contours sont différentes dans la mesure où l'on compare un matériau orthotrope et un matériau isotrope. L'obligation de réaliser une optimisation de forme paramétrique sur la base de la topologie générée relativise encore l'importance de ces variations locales de géométrie.

## 4.8 Utilisation comparée de différentes lois microstructurales pour l'optimisation topologique

On compare maintenant les différents matériaux sur le critère de leur utilisation en optimisation topologique. La comparaison des différentes microstructures est effectuée sur un *benchmark* très classique dans la littérature relative à l'optimisation topologique. Il s'agit d'une poutre cantilever courte dont les dimensions sont données à la figure 4.17. Toutes les données sont exprimées en unités MKS. Le module de Young et le coefficient de Poisson du solide valent respectivement  $E=100\text{GPa}$  et  $\nu=0.3$ . On adopte un maillage régulier de  $56 \times 36$  éléments finis du second degré, soit 6048 ou 2014 variables de conception respectivement pour les matériaux orthotropes avec deux paramètres de microstructure et un angle d'orthotropie (ex. matériau feuilletés de rang 2 ou la double microstructure de Hashin) ou un seul paramètre de microstructure (ex. matériau avec des inclusions sphériques, cylindriques, ou matériau SIMP). On prend une borne de 37.5% sur le volume total admissible.

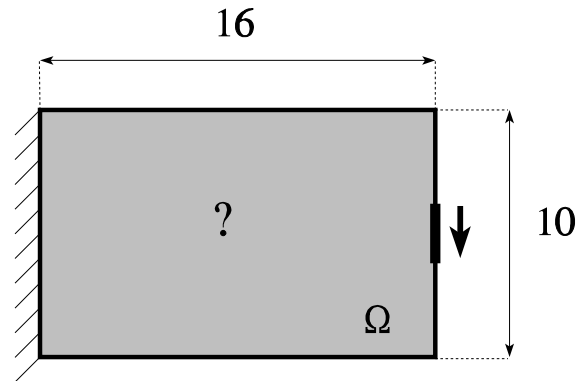


Figure 4.17 : Problème de la poutre cantilever courte

On réalise la même procédure d'optimisation pour les différentes microstructures et les différentes lois reliant la raideur et la densité relative. Le problème d'optimisation est résolu en utilisant le logiciel CONLIN et en choisissant une approximation convexe mixte (CONLIN) pour la compliance et une approximation linéaire du volume.

Hormis les microperforations rectangulaires, on passe en revue toutes les microstructures et toutes les lois de raideur-densité présentées au cours du chapitre. De manière exhaustive, on prend, successivement, les matériaux feuilletés de rang 2 (Figure 4.18), la double microstructure de Hashin (Figure 4.19), la microstructure des inclusions sphériques (Figure 4.20), la microstructure avec des microperforations cylindriques décrite par une loi de Halpin-Tsai avec  $\xi=1.0$  (Figure 4.21),  $\xi=0.269$  (Figure 4.22),  $\xi=0.1$  (Figure 4.23), les matériaux SIMP avec une pénalisation  $p=2$  (Figure 4.24),  $p=3$  (Figure 4.25) et  $p=4$  (Figure 4.26). En plus des distributions de matière, on fournit également un tableau récapitulatif des compliances optimales relevées pour les différentes microstructures.

Lorsqu'on examine les différentes distributions de densité, on remarque que les silhouettes sont concordantes et qu'elles prédisent une topologie identique. Même si les résultats particuliers demandent à être analysés, la topologie de la distribution de matière suggère, *grosso modo*, quatre trous. Les contours de la structure suivent d'abord les bords horizontaux, puis ils s'infléchissent et ils se rejoignent sous le point d'application de la charge. La matière est absente de la partie centrale de l'encastrement, de sorte que seuls les points extrêmes sont utilisés pour la fixation de la structure. Dans la partie intérieure, l'effort chemine le long de deux systèmes de renforts croisés, plus ou moins diffus selon la microstructure employée. Le croisement des deux membres structuraux intérieurs s'effectue avec un angle proche de  $90^\circ$ . Les plus grosses différences entre les distributions de matière se situent sous la pointe de la structure. Si la pénalisation des densités intermédiaires est faible, on trouve une large zone poreuse qui reprend l'effort à la manière d'un voile et le contour de la structure est alors courbe. Si la pénalisation est plus forte, la matière est absente et le contour de la structure est rectiligne.

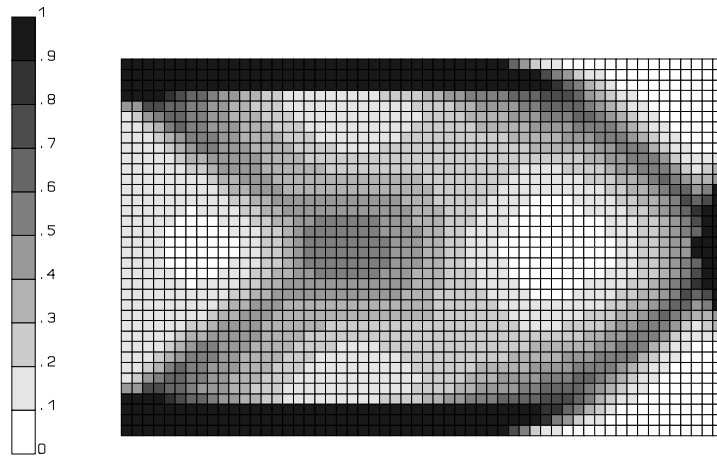


Figure 4.18 : Matériau feuilleté de rang 2

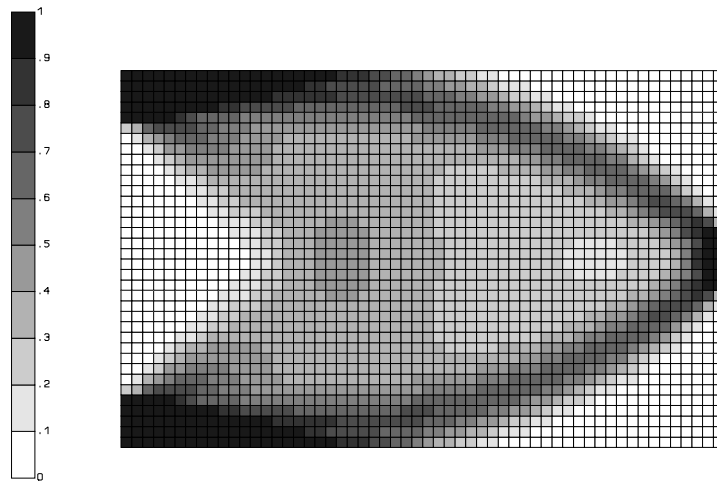


Figure 4.19 : Double microstructure de Hashin

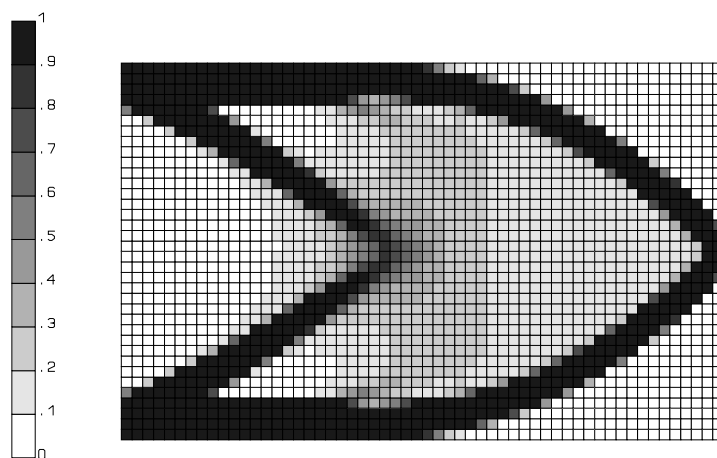


Figure 4.20 : Microperforations sphériques (approximation de Mori-Tanaka)



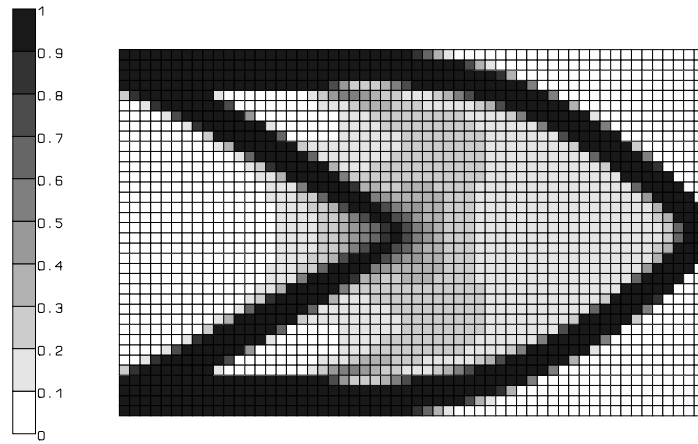


Figure 4.21 : Microperforations cylindriques (loi de Halpin-Tsai,  $\xi= 1.0$ )

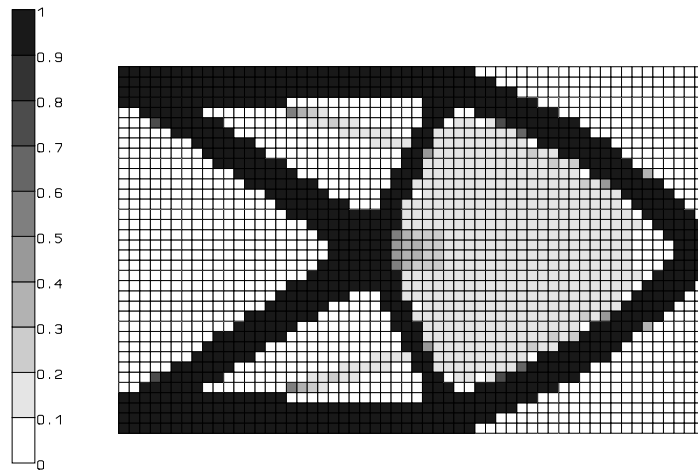


Figure 4.22 : Microperforations cylindriques (loi de Halpin-Tsai,  $\xi= 0.269$ )

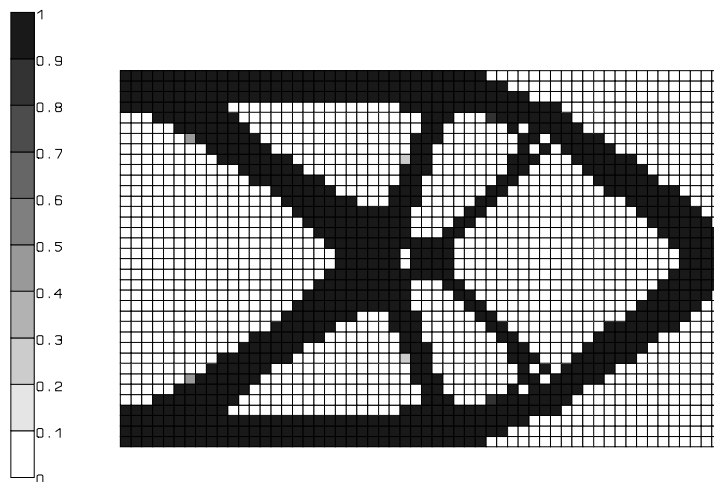


Figure 4.23 : Microperforations cylindriques (loi de Halpin-Tsai,  $\xi =0.1$ )

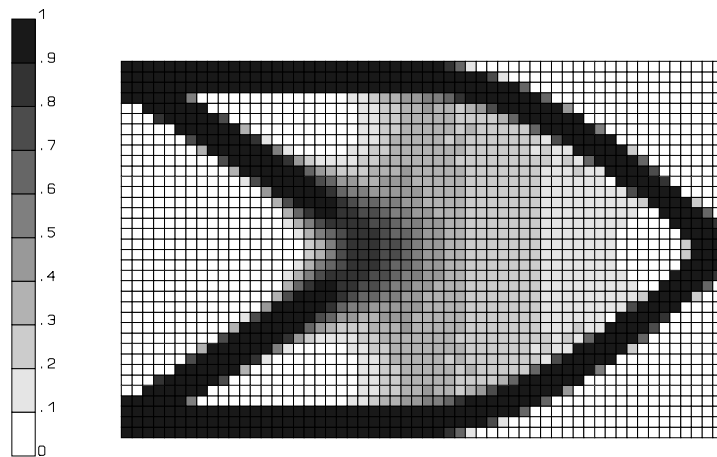


Figure 4.24 : Matériau SIMP avec pénalisation  $p=2$

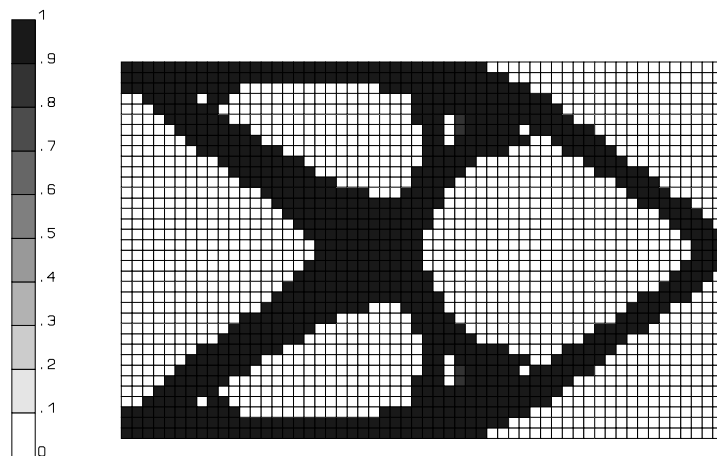


Figure 4.25 : Matériau SIMP avec pénalisation  $p=3$

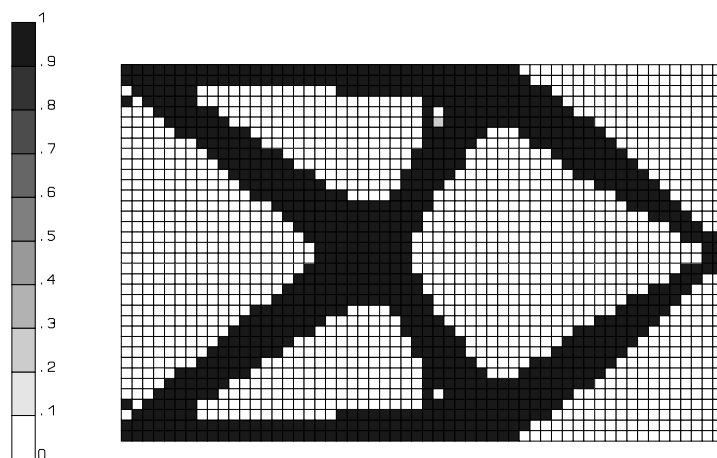


Figure 4.26 : Matériau SIMP avec pénalisation  $p=4$

Microstructure ou loi de raideur densité	Compliance optimale (nombre de cycles d'optimisation)
Matériau feuilleté de rang 2	57,38 (59) 56,97 (117)
Double microstructure de Hashin	57,33 (50) 57,33 (100)
Micro-inclusions sphériques (approximation de Mori et Tanaka)	62,02 (51)
Microperforations cylindriques (Loi de Halpin avec $\xi=1.$ )	62,51 (51)
Microperforations cylindriques (Loi de Halpin avec $\xi=0.549$ )	67,08 (51)
Microperforations cylindriques (Loi de Halpin avec $\xi=0.269$ )	68,71 (51)
Microperforations cylindriques (Loi de Halpin avec $\xi=0.1$ )	68,73 (51)
Matériau SIMP avec $p=2$	71,97 (30)
Matériau SIMP avec $p=3$	77,29 (30)
Matériau SIMP avec $p=4$	77,88 (25)

Table 4.3: Compliance optimale pour les différentes microstructures dans le problème de la poutre cantilever courte

Tout d'abord, la comparaison montre l'effet d'une pénalisation des densités intermédiaires croissantes sur la génération de topologie. La séparation vide-solide est fortement influencée par la pénalisation. Lorsqu'elle est assez faible (matériau feuilletés de rang 2, double microstructure de Hashin, inclusions sphériques, inclusions cylindriques  $\xi \geq 1$ , SIMP avec  $p=2$ ), il existe de larges zones de matériaux perforés dans la solution optimale. On peut les interpréter dans une solution pratique comme des voiles minces diffusant le cisaillement. Au contraire, une plus forte pénalisation des densités intermédiaires (inclusions cylindriques  $\xi \leq 1$ , SIMP avec  $p=3, 4...$ ) conduit à des structures constituées d'éléments massifs.

Ensuite, on peut comparer les microstructures orthotropes et les microstructures isotropes. Pour les deux microstructures orthotropes, la faible pénalisation des densités intermédiaires et l'utilisation de l'angle d'orthotropie conduisent à une distribution dont la topologie est moins claire. Les zones de densité intermédiaire sont remplies d'un matériau composite dont les fibres de matière suivent localement les directions de l'effort. L'organisation de la matière au niveau de la microstructure étant mieux réalisée que dans les matériaux isotropes, la compliance des deux solutions orthotropes est nettement plus basse que celle des autres distributions. Par contre, si le choix d'une microstructure isotrope pénalise fortement les performances de la distribution, la séparation vide-solide qui en résulte donne des résultats dont la clarté est de la plus grande utilité pour l'interprétation de la distribution de densité. Les matériaux et les microstructures isotropes nous semblent donc plus appropriés pour guider le choix d'une topologie. Néanmoins, les microstructures orthotropes optimales ou quasi optimales servent de valeurs de référence auxquelles il convient de comparer les résultats obtenus avec d'autres microstructures suboptimales. En outre, il faut espérer qu'un jour, nous serons capables de fabriquer une pièce en composite dont la distribution de microstructure aura été suggérée par une

distribution de matériau de double microstructure de Hashin par exemple. Malheureusement, comme nous ne sommes pas encore à même d'exploiter toute la richesse de l'information de la distribution optimale, et comme la topologie de la structure est souvent la seule donnée recherchée, les microstructures orthotropes optimales ou quasi optimales sont supplantées par des matériaux suboptimaux dans les applications pratiques.

On peut comparer les matériaux feuilletés de rang 2 et la double microstructure de Hashin. On note d'abord, que les compliances obtenues avec ces deux microstructures sont presque identiques, ce qui vient corroborer l'hypothèse que la microstructure de Hashin ne serait pas équivalente au matériau de rang 2, mais quasi optimale. Les deux distributions de densité sont un peu différentes. La distribution de matériaux de rang 2 laisse apparaître clairement quatre trous, ce qui peut s'expliquer par le plus grand nombre d'itérations réalisées pour avoir ce résultat. Par ailleurs, la qualité de la distribution de la double microstructure de Hashin est confirmée par sa ressemblance avec la distribution de matériaux feuilletés de rang 2 obtenue par Bendsøe, Díaz et Kikuchi (1993, p. 187) au moyen d'un autre code de calcul et d'une technique de critère d'optimalité. On peut se demander s'il ne s'agit pas là de deux optimums locaux voisins.

En dépassant le cadre de cet exemple, il est encore possible de comparer les deux microstructures en introduisant, en plus, l'expérience que nous avons acquise en utilisant les deux matériaux. Dans les applications numériques, nous préférons généralement la double microstructure de Hashin, car nous avons constaté qu'elle se prête mieux à l'optimisation numérique. Ainsi, on voit au tableau 4.3 qu'après 50 cycles d'optimisation, la compliance de la double microstructure de Hashin est plus basse que celle des matériaux de rang 2. A notre avis, ce meilleur comportement numérique est imputable à trois caractéristiques de la relation fonctionnelle entre la raideur et les paramètres de microstructure: la douceur des propriétés de raideur en fonction des paramètres de densité, l'existence d'un axe matériel fort unique et la présence de la raideur en cisaillement.

On peut encore envisager l'aspect de la réalisation concrète et de la fabrication des solutions obtenues avec ces deux matériaux. Les matériaux de rang 2 sont une création mathématique qu'on ne pourra probablement jamais réaliser physiquement. De plus, l'utilisation des matériaux de rang 2 est inévitablement limitée parce que cette microstructure est instable pour toutes les mises en charge différentes de la sollicitation qui a servi à l'optimisation. Par contre, la double microstructure de Hashin possède une raideur en cisaillement et elle est capable de supporter d'autres sollicitations que celle pour laquelle elle est optimisée. En outre, la microstructure de Hashin nous laisse espérer qu'il serait possible de la fabriquer avec des matériaux composites unidirectionnels. En conclusion, nous préférons la double microstructure de Hashin dans la perspective de réalisations concrètes.

Même si nous savons que la pénalisation des densités intermédiaires joue un rôle favorable pour l'interprétation de la topologie de la distribution de matière, il convient maintenant de préciser cet effet bénéfique et d'établir les limites de son action positive. Au fur et à mesure que la pénalisation augmente, on remarque une diminution des zones de densité intermédiaire. Cependant, au-delà d'une certaine pénalité, la distribution de matière est peu modifiée, alors que la distribution devient d'une part, de plus en plus sujette à l'apparition de modes parasites tels que les distributions en damier et d'autre part, propice à la création de topologies représentatives d'optimums locaux du problème. Cette constatation est nettement visible pour la loi de Halpin-Tsai et pour les matériaux SIMP. Pour la loi de Halpin-Tsai, les densités intermédiaires sont largement présentes quand  $\xi=1.0$  alors qu'elles ont presque totalement disparu pour  $\xi=0.269$ . Par contre, le choix  $\xi=0.1$ , qui donne une très forte pénalisation, introduit d'une part une topologie différente résultant d'un optimum local et d'autre part, des distributions en damier. On arrive aux mêmes conclusions avec les matériaux SIMP. Les zones de matériaux poreux qui remplissent la partie droite de la structure lorsque  $p=2$  disparaissent lorsque l'on augmente l'exposant  $p$  à 3 ou 4. Après  $p=3$ , la nature de la solution ne change plus guère, mais on s'expose aux distributions en damier qui sont visibles dans la solution  $p=4$ . Bien que ce ne soit pas

le cas dans cette solution, on a observé également la présence d'optima locaux de plus en plus nombreux avec l'accroissement de l'exposant  $p$ . Pour remédier à cet inconvénient, on peut recourir à une procédure de continuation où l'on augmente progressivement la pénalité des densités intermédiaires. Cette procédure peut être utilisée aussi bien pour l'exposant  $p$  des matériaux SIMP que pour le coefficient  $\xi$  de la loi de Halpin-Tsai. Cette procédure allonge évidemment le processus de conception.

De nombreuses expériences numériques nous ont montré que la vitesse de convergence du processus d'optimisation est plus rapide avec une pénalité des densités intermédiaires élevée. Dans le cas de notre application, la vitesse de convergence la plus rapide est obtenue avec le matériau SIMP où  $p=3$ . Les microstructures avec des inclusions sphériques, la loi de Halpin-Tsai avec  $\xi=1.0$  et toutes les microstructures orthotropes sont plus lentes. En général, pour arriver à un résultat satisfaisant, on doit compter sur 25 à 50 itérations avec les matériaux SIMP avec  $p=3$  ou 4, sur 30 à 50 itérations avec la loi de Halpin-Tsai avec  $\xi < 0.5$ , sur 50 à 70 itérations avec les microstructures des inclusions sphériques, et les lois de pénalité semblable et sur 50 à 100 itérations ou plus pour les microstructures orthotropes.

Dans la méthode d'homogénéisation strictement orthodoxe, les microstructures suboptimales ne peuvent être que tolérées, car elles ne relaxent pas complètement le problème de conception. Les distributions de matière qui en découlent peuvent donc être dépendantes du maillage. Comme nous le verrons au chapitre 6, l'emploi des microstructures suboptimales peut être justifié avec la méthode du périmètre. Avec une borne adéquate sur le périmètre, la solution du problème existe et la conception de structure placée dans la perspective de l'ingénieur trouve un fondement théorique rigoureux. En conséquence, il convient de donner un sens large à la méthode d'homogénéisation, puisqu'on introduit des lois de raideur artificielle ou suboptimale et que l'on ajoute éventuellement une restriction sur le périmètre de la distribution de matière.

Pour la résolution des problèmes réels, les microstructures isotropes sont plus que jamais intéressantes parce qu'elles sont utilisables dans tous les types de formulation. On peut employer les composites isotropes tant pour les problèmes statiques plans, que pour les problèmes volumiques, avec un ou plusieurs cas de charge, et même pour les problèmes de vibration. Dans les problèmes avec plusieurs cas de charge, la gestion des microstructures orthotropes est fastidieuse, de sorte qu'on préfère les éviter. En outre, on peut penser que, plus les cas de charge sont nombreux et variés, plus la microstructure locale devient isotrope. Dans les problèmes tridimensionnels, la solution du problème d'orientation optimale n'est que partiellement connue, ce qui nous conduit à n'utiliser que des microstructures isotropes.

Il existe aussi deux autres arguments plus pragmatiques qui plaident en faveur de l'utilisation des composites isotropes. *Primo*, on possède une meilleure compréhension des structures isotropes. *Secundo*, la pièce mécanique à construire est généralement fabriquée en matériau isotrope, de sorte qu'on peut penser qu'il est préférable d'adopter ce type de matériau depuis le début du processus de conception.

Tous ces arguments expliquent pourquoi, nous adoptons fréquemment les microstructures isotropes pour la résolution de problèmes réels.

D'après notre expérience, c'est le matériau SIMP avec  $p=3$  qui constitue le matériau poreux le plus pratique pour un très grand nombre d'applications en état plan, aussi bien en analyse statique qu'en analyse dynamique. Il combine plusieurs avantages. Il donne lieu à une bonne vitesse de convergence. Il convient aussi bien pour un que pour plusieurs cas de charge et pour les problèmes de vibration. Il produit des distributions de matière où il y a une bonne séparation vide-solide, ce qui facilite le travail d'interprétation.

Si on désire prendre une loi d'homogénéisation, nous sélectionnons souvent les micro-inclusions sphériques ou la double microstructure de Hashin.

Pour les applications tridimensionnelles, nous préférons une pénalisation des densités intermédiaires plus modérée. Généralement, nous adoptons l'approximation de Mori et Tanaka ou bien un matériau SIMP de pénalité  $p=2$ .

## 4.9 Conclusion

La résolution du problème de topologie sous la forme d'une distribution de matière requiert l'introduction de matériaux composites poreux. En conséquence, ce chapitre a été consacré à la modélisation précise des propriétés homogénéisées des matériaux. Nous avons d'abord étudié plusieurs microstructures largement utilisées dans la littérature : les matériaux feuilletés de rang  $N$  et particulièrement les matériaux feuilletés de rang 2, les microperforations rectangulaires. Dans un travail de recherche original, nous avons ensuite proposé trois autres microstructures basées sur des travaux effectués en micromécanique : la microstructure des sphères composites, la microstructure des cylindres composites et la loi de Halpin-Tsai, la double microstructure de Hashin obtenue par une combinaison à deux niveaux des deux précédents types de microperforation. Enfin, bien qu'il s'agisse d'une loi de raideur-densité artificielle, nous avons aussi présenté les matériaux SIMP qui représentent aujourd'hui un des moyens les plus utilisés pour résoudre le problème de distribution de matière sous forme continue.

L'étude des différentes lois d'homogénéisation a été axée sur plusieurs points importants pour l'optimisation topologique : le caractère optimal de la microstructure pour le critère de l'énergie de déformation, la non-linéarité de la relation fonctionnelle entre la raideur et la densité, la facilité d'utilisation en topologie et la qualité des distributions de matière.

La modélisation des matériaux composites poreux est une condition *sine qua non* pour résoudre le problème de distribution de matière. L'étude des propriétés homogénéisées a fait l'objet de nombreux travaux. Depuis les années 60, l'analyse micromécanique réalise la modélisation et la prédiction des propriétés effectives des matériaux composites sur la base de la définition opérationnelle de la science des matériaux et de la théorie de la mécanique des solides déformables. Plus récemment, l'étude des modules effectifs a attiré l'attention de la communauté des mathématiciens. Avec la théorie de l'homogénéisation des microstructures périodiques et des microstructures stochastiques, il a été possible de donner des fondements mathématiques solides à la notion d'homogénéisation. Les mathématiciens ont élaboré la théorie de l'homogénéisation des microstructures périodiques et la théorie de l'homogénéisation des microstructures stochastiques. Ils en ont ensuite étendu le généralité avec la théorie de la *G-convergence*. Ces nouveaux développements montrent toute leur puissance dans les développements théoriques du problème d'optimisation topologique.

L'étude des matériaux feuilletés de rang  $N$ , et particulièrement des matériaux de rang 2, est intéressante dans le cadre de l'optimisation topologique, car on sait que cette famille de matériaux réalise les bornes de l'énergie de déformation. Les propriétés effectives s'obtiennent par récurrence : les matériaux de rang  $k$  sont formés avec des lamelles de matériau feuilleté de rang  $k-1$  et du matériau de base. Nous avons rappelé les propriétés des matériaux de rang 1 et de rang 2. Nous avons ensuite donné le principe de calcul des propriétés des matériaux de rang  $N$  et nous avons montré comment il existe toujours une microstructure feuilletée de rang  $N$  qui réalise les bornes du principe de Hashin-Shtrikman. Nous avons tenté d'analyser de manière plus approfondie les propriétés des matériaux de rang 2 et nous nous sommes attachés aux aspects de leur mise en oeuvre dans un programme

d'optimisation numérique.

L'étude des micro-inclusions sphériques selon le modèle des sphères composites de Hashin a fourni une réponse originale au problème des matériaux composites poreux. Cette microstructure réalise la borne de raideur sur le module de compressibilité cubique, mais le module de cisaillement optimal ne peut être atteint avec cette microstructure. Par contre, l'approximation des propriétés effectives des micro-inclusions sphériques avec l'approximation de Mori et Tanaka donne lieu à la loi de raideur optimale d'un composite isotrope. Le procédé est cohérent avec l'idée que le fait important pour le calcul numérique de la topologie n'est pas que la microstructure existe ou soit usinable, mais bien que l'on puisse paramétrer les propriétés optimales en fonction des variables de microstructure.

Le modèle des cylindres composites est un autre modèle de Hashin qui sert à l'étude des composites unidirectionnels à fibres longues. Pour ce type de matériau composite, nous avons présenté un ensemble de lois d'homogénéisation qui vérifient les bornes de raideur maximale de Hill et Hashin. Pour l'optimisation topologique des structures planes, on peut imaginer des microperforations cylindriques perpendiculaires au plan de la structure. Pour étendre la relation de raideur-densité, nous avons proposé d'utiliser la loi de Halpin-Tsai pour créer toute une famille de relations fonctionnelles dont la non-linéarité dépend d'un paramètre de renforcement  $\xi$ .

Enfin, nous avons imaginé et proposé une troisième microstructure originale. Celle-ci résulte de l'assemblage d'une matrice poreuse isotrope formée sur le modèle des micro-inclusions sphériques et de fibres de matière distribuées selon le modèle des cylindres composites. Nous lui avons donné le nom de double microstructure de Hashin en hommage à ce célèbre chercheur. Cette microstructure orthotrope possède des propriétés très favorables pour l'optimisation topologique. Pour les applications pratiques et les calculs numériques, cette microstructure s'est montrée plus attrayante que les matériaux de rang 2.

Finalement, les matériaux SIMP reposent sur une relation artificielle dans laquelle la raideur des densités intermédiaires est pénalisée au moyen d'une loi de type puissance. En dépit du fait qu'on ne puisse pas relaxer complètement le problème de distribution de matière, cette loi s'est avérée extrêmement séduisante pour résoudre les applications pratiques. Les exposants  $p=2$  et surtout  $p=3$  sont généralement les plus prisés. L'utilisation des matériaux artificiels en topologie nous amène à revoir la notion d'homogénéisation au sens le plus strict.

Le chapitre s'est terminé sur une utilisation comparée des différentes microstructures en optimisation topologique.

## Chapitre 5 :

# SCHEMAS D'APPROXIMATION CONVEXE ET ALGORITHMES DE RESOLUTION

### 5.0 Introduction

Le but de ce chapitre est de décrire une méthode de résolution efficace du problème d'optimisation topologique. Mathématiquement, le problème à traiter est un problème d'optimisation non linéaire que l'on peut ramener à la forme générale :

$$\begin{aligned} \min_{\substack{x_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \\ i=1, \dots, n}} \quad & \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ \text{avec} \quad & \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j=1, \dots, m \end{aligned} \quad (5.1)$$

Les  $n$  variables  $x_i$  sont les variables de conception du problème. Leur valeur est comprise entre la borne minimale  $\underline{x}_i$  et la borne maximale  $\bar{x}_i$ . La fonction objectif est notée  $\mathbf{g}_0(\mathbf{x})$  tandis que les  $m$  contraintes sont représentées par les fonctions  $\mathbf{g}_j(\mathbf{x})$ .

Dans les problèmes de topologie, la fonction objectif et les contraintes désignent habituellement des réponses structurales globales, comme une compliance ou une fréquence propre, ou bien des caractéristiques géométriques telles que la masse et le périmètre. Le problème de topologie présente les difficultés propres aux problèmes d'optimisation structurale. Toutes les restrictions sur le comportement mécanique sont généralement des fonctions implicites et fortement non linéaires des variables de conception. Le coût numérique de leur évaluation, et a fortiori celui de leurs dérivées, est fort onéreux puisqu'il requiert une analyse de la structure par éléments finis.

Bien qu'il implique peu de restrictions, le problème de topologie se distingue par un nombre très important de variables de conception, ce qui amplifie la difficulté de sa résolution. Il est courant d'introduire 1.000 à 10.000 variables de conception pour résoudre un problème réel. Par contre, le nombre de contraintes est variable : il passe d'une seule contrainte sur le volume pour le problème fondamental à une dizaine de restrictions lorsque l'on traite des problèmes avec plusieurs cas de charge ou plusieurs fréquences propres.

Il est également apparu que la valeur des variables de conception à l'optimum est tout aussi importante que la valeur de la fonction objectif, puisque le but poursuivi est de déterminer la distribution de densité. Par la même occasion, il est important de remarquer que la vitesse de convergence de la distribution de densité est beaucoup plus lente que celle de la valeur de la fonction objectif. Pour que la convergence des variables de conception soit bien établie, il est courant de dépasser les 50 analyses. Par ailleurs, l'effort le plus important est souvent consacré à la phase finale de la convergence. Après une phase de convergence rapide des distributions de matière et des valeurs de la compliance, on observe une progression très lente du processus d'optimisation pour arriver aux contours définitifs de la structure. Dès lors, le but sera d'accélérer très fortement la vitesse de convergence en réduisant cette phase terminale. Cet objectif pourra être atteint en choisissant de manière soignée les approximations structurales des restrictions. Comme nous n'étions pas entièrement satisfaits des approximations structurales classiques, nous nous sommes mis en quête de nouvelles techniques d'approximation de



très haute qualité.

Comme ce fut le cas pour Bendsøe et Kikuchi (1988), Bendsøe (1989), Suzuki et Kikuchi (1991), on peut utiliser une technique de critère d'optimalité pour résoudre le problème d'optimisation. Le critère d'optimalité repose sur un algorithme de type point fixe construit à partir des conditions d'optimalité du problème. Hélas, même si cette stratégie a donné lieu à des résultats de bonne qualité pour plusieurs applications, elle se heurte aux limitations des critères d'optimalité : les critères d'optimalité ne sont réellement adaptés qu'aux problèmes de conception qui ne comportent qu'une seule contrainte. Dès lors, nous nous sommes tournés vers les techniques de programmation mathématique, qui sont plus souples et plus générales. L'intégration d'une nouvelle contrainte sur le périmètre ou la gestion des cas de charge multiples devient alors facile.

Dans ce chapitre, nous voulons adapter, à l'optimisation topologique, la stratégie classique de résolution basée sur les notions d'approximation explicite séparable, de sous-problèmes convexes et de la résolution de ces sous-problèmes d'optimisation par une méthode de programmation mathématique. L'utilisation de cette stratégie est fructueuse en optimisation de dimensionnement et en optimisation de forme.

Suivant une idée émise par Fleury (1973), ainsi que par Schmit (1973) et ses collaborateurs, on remplace le problème implicite d'optimisation des structures par une séquence de sous-problèmes explicites de structure algébrique simple. On résout le problème implicite (5.1) de manière itérative. De manière simplifiée, on décompose la résolution du problème complet selon les étapes principales suivantes :

- 1° Effectuer une analyse de la structure par éléments finis pour une conception donnée  $\mathbf{x}^k$ ;
- 2° Compléter l'analyse de la structure par une analyse de sensibilité du premier ou du second ordre;
- 3° Former un problème d'optimisation approché sur la base des données de sensibilité disponibles

$$\begin{aligned} \min_{\substack{x_i \leq \bar{x}_i \\ i=1, \dots, n}} \quad & \tilde{\mathbf{g}}_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}^k) \\ \text{avec} \quad & \tilde{\mathbf{g}}_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^k) \leq 0 \quad j=1, \dots, m \end{aligned} \quad (5.2)$$

où on prend la convention de désigner par  $\tilde{\mathbf{g}}$  l'approximation de la restriction  $\mathbf{g}$  autour du point de conception courant  $\mathbf{x}^k$ ;

- 4° Résoudre le problème approché explicite, convexe et séparable au moyen d'une méthode de résolution appropriée (généralement en formulation duale);
- 5° Mettre la conception structurale à jour sur la base de la solution du problème de conception approché;
- 6° Examiner un critère de convergence et, s'il n'est pas satisfait, reprendre le processus d'optimisation à l'étape initiale.

Aujourd'hui, le concept de sous-problème est clarifié et généralisé par la notion de programmation séquentielle convexe (SCP). Chaque restriction est remplacée par une approximation convexe de haute

qualité. Les problèmes d'optimisation convexe auxquels on aboutit génèrent une suite convergente de points de conception. La force et le succès de cette approche résident dans la possibilité d'obtenir une solution admissible de meilleure qualité en plus ou moins 10 analyses éléments finis.

Il est particulièrement intéressant de décomposer la solution en sous-problèmes si l'on a des algorithmes de programmation mathématique performants pour les résoudre. Pour résoudre directement les sous-problèmes, on dispose de méthodes puissantes et efficaces telles que les algorithmes de programmation quadratique séquentielle ou SQP (Belegundu et Arora, 1984, Schittkowski, 1985). Mais la démonstration du concept de résolution efficace est principalement acquise depuis que Fleury (1979) a suggéré d'y appliquer les méthodes duales. L'aspect très attractif des méthodes Lagrangiennes consiste à échapper au problème primal contraint comportant un très grand nombre de variables et à le remplacer par le problème dual de dimension beaucoup plus faible. En passant dans l'espace des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes linéarisées, on transforme le problème d'optimisation en une maximisation quasi non contrainte de la fonction duale. Toute la puissance et l'efficacité de l'algorithme de maximisation Lagrangienne proviennent alors de la possibilité de travailler dans un sous-espace dont la dimension est limitée au nombre de contraintes actives. Le gain de l'approche duale est réel si le problème primal est convexe et séparable. Auquel cas, la formation de la fonction duale est peu coûteuse. Avec l'arrivée des approximations de haute qualité, les méthodes de résolution les plus performantes (Fleury, 1991a) combinent les approches SQP et duales. Dans cette stratégie, le sous-problème primal est lui-même résolu en créant une suite de sous-problèmes quadratiques. Si les approximations des restrictions sont toutes séparables, les problèmes quadratiques de la suite le sont aussi et ils se prêtent bien à une résolution par méthode duale.

Parfaitement adaptées aux problèmes comportant un très grand nombre de variables, les méthodes de résolution duale et primale-duale se sont imposées pour résoudre le sous-problème d'optimisation topologique. Au cours des applications numériques, il sera démontré avec quelle aisance les algorithmes de résolution du "solver" CONLIN ont pu être utilisés dans les problèmes de topologie.

Il était naturel de se demander quel type de linéarisation conviendrait le mieux aux caractéristiques des restrictions du problème de topologie. D'une manière étonnante, la littérature rapporte peu d'études rigoureuses et exhaustives consacrées à la sélection d'approximations convexes séparables pour la résolution du problème de topologie. Ce chapitre commence donc par une revue des principaux types d'approximation disponibles en optimisation structurale.

Après avoir expérimenté les approximations les plus courantes de l'optimisation structurale, nous avons cherché à adapter une approximation de haute qualité, en vue d'accélérer sensiblement la convergence finale des variables dans le problème de conception topologique. Cet objectif a été atteint grâce au développement et à la mise au point d'une approximation de haute qualité basée sur des informations du second ordre. Pour estimer les courbures avec le moins d'efforts possibles, nous avons mis au point une technique de type Quasi-Newton qui n'engendre que des mises à jour diagonales. En utilisant ces courbures dans la méthode des asymptotes mobiles, on peut sélectionner automatiquement les asymptotes sur la base des dérivées premières. A notre connaissance, notre thèse apporte, ainsi, une réponse à un problème resté ouvert depuis plus de cinq années.

En vue de valider les nouvelles approximations de haute qualité, nous les avons testées sur quelques problèmes classiques d'optimisation de treillis. Même si ces petites applications sortent du cadre de l'optimisation topologique, elles sont nécessaires pour montrer la qualité du travail sur les approximations. Par la suite, nous reviendrons à l'optimisation topologique puisque le chapitre se terminera par l'application des différents schémas de linéarisation à l'optimisation de la distribution de matière d'une poutre cantilever courte.

Enfin, le chapitre examinera les caractéristiques des différentes restrictions structurales et géométriques. Sur cette base, nous réfléchirons sur le choix des approximations les plus appropriées à chacune des contraintes et nous synthétiserons l'expérience que nous avons acquise en la matière.

## 5.1 Schémas d'approximation convexe du premier et du second ordre

Puisque nous voulons résoudre le problème de topologie par une suite de sous-problèmes d'optimisation, il est nécessaire de formuler une approximation explicite pour chacune des restrictions. Chaque approximation doit être convexe pour être conservative et séparable afin que la résolution duale soit avantageuse. La littérature actuelle comporte plusieurs types d'approximation dont les plus connues seront passées brièvement en revue dans ce chapitre.

Pour structurer l'exposé, nous classerons les différentes approximations selon l'ordre des informations nécessaires à leur formation. Les schémas du premier ordre sont basés sur la valeur de la restriction et des dérivées premières. Les approximations du second ordre nécessitent des informations supplémentaires sur les courbures. Les schémas d'approximation du premier ordre se déduisent par un développement en série de Taylor du premier ordre moyennant un changement de variable préliminaire.

La qualité des approximations est comparée en considérant un certain nombre de critères parmi lesquels on peut citer : la séparabilité, la convexité, la conservativité ou la précision. On doit également s'interroger sur la qualité des sous-problèmes d'optimisation. On aimerait savoir si la suite des candidats optimums issus des sous-problèmes d'optimisation converge globalement. Les sous-problèmes sont-ils susceptibles de produire un quasi optimum en une dizaine d'itérations ? Quels sont les efforts nécessaires à leur génération ? Se prêtent-ils à une résolution efficace ?

### A. APPROXIMATIONS DU PREMIER ORDRE

La diversité des approximations du premier ordre provient d'un choix de plus en plus élaboré de variables intermédiaires de linéarisation. La linéarisation en fonction des variables inverses est une des clés des techniques de linéarisation en dimensionnement et en optimisation des structures élastiques. La seconde clé est certainement la recherche d'approximations convexes et conservatives.

#### 5.1.1 Approximation linéaire

L'approximation linéaire est l'approximation du premier ordre la plus simple que l'on puisse imaginer. Elle s'obtient par un développement en série de Taylor limité au premier ordre autour du point de conception  $\mathbf{x}^0$  :

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}^0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) \quad (5.3)$$

Le choix de cette approximation s'impose lorsqu'il correspond à la nature de la restriction étudiée. Pour des choix particuliers des variables de conception, la linéarisation simple est exacte pour certaines restrictions comme la masse de structures minces. Cette linéarisation est également indispensable pour le traitement des restrictions d'égalité au sein de problèmes convexes.

Etant donné que les restrictions linéaires n'introduisent aucune courbure, la linéarisation élargit le domaine de conception, de sorte que les solutions intermédiaires sont souvent inadmissibles et le processus de convergence est, soit trop lent ou soit, au contraire, oscillant. De plus, pour un nombre de contraintes actives inférieures au nombre de variables de conception, la solution est non bornée et on doit imposer des bornes artificielles appelées "move-limits" pour confiner l'optimum de chaque sous-problème dans une région de confiance. La précision de la solution est acquise en relaxant progressivement la tolérance sur ces bornes. Pourtant, la résolution du problème d'optimisation structurale au moyen de la programmation linéaire séquentielle (SLP) semble intéressante, parce que les sous-problèmes de programmation linéaire peuvent être résolus efficacement par l'algorithme du SIMPLEX.

### 5.1.2 Approximations en fonction des variables inverses

Une grande variété d'approximations structurales est obtenue en développant les contraintes ou la fonction objectif en termes de variables intermédiaires. La linéarisation en fonction des variables inverses est une technique d'une importance capitale en optimisation des structures élastiques.

$$\tilde{g}(x) = g(x^0) + \sum_{i=1}^n -(x_i^0)^2 \frac{\partial g(x^0)}{\partial x_i} \left( \frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_i^0} \right) \quad (5.4)$$

La justification intuitive du succès de cette technique repose sur le fait que les déplacements et les contraintes de structures isostatiques sont des fonctions linéaires exactes de l'inverse des sections transversales des éléments constitutifs. Suggéré initialement par Fleury (1973), ainsi que par Schmit et ses collaborateurs (par exemple Schmit et Farshi, 1974) pour le dimensionnement des structures minces, ce choix de variables intermédiaires a été étendu avec succès aux problèmes d'optimisation de forme où il ne possède cependant aucune justification théorique. Néanmoins on a remarqué que dans le cas de structures hyperstatiques ou dans le cas des variables de forme, ce changement de variable réduit fortement la non-linéarité des contraintes et qu'il a, par là, un effet très bénéfique sur le processus d'optimisation. Une stratégie efficace pour résoudre les problèmes de dimensionnement des treillis ou des structures minces en extension, s'obtient en linéarisant la masse en fonction des variables directes, tandis que les restrictions de déplacement et de tension sont approchées avec les variables inverses. Ce choix judicieux des variables de linéarisation permet de résoudre ce type de problème de conception avec une bonne précision en quelque 10 analyses.

Fleury et Sander (1983) ont montré que la linéarisation des déplacements et des tensions en fonction des variables intermédiaires devait être généralisée pour les éléments travaillant en flexion. Dans le cas des dimensions transversales des éléments d'extension, la matrice de raideur est une fonction linéaire des variables de conception  $K_e = x_e \bar{K}_e$  et, par conséquent, la non-linéarité des restrictions de déplacement et de tension est réduite par le choix de variables inverses :  $y_e = 1/x_e$ . Dans le cas des éléments de flexion, la raideur des éléments est proportionnelle à une certaine puissance  $p$  de la variable de conception :  $K_e = x_e^p \bar{K}_e$ . Par exemple, la matrice de raideur d'une plaque est proportionnelle au cube de son épaisseur. Dès lors, l'inverse des puissances  $p$  des variables de conception  $y_e = 1/x_e^p$  permet un développement linéaire exact des déplacements et des tensions de structures isostatiques et on obtient une forte réduction de la non-linéarité des réponses de structures hyperstatiques.

$$\tilde{g}(x) = g(x^0) + \sum_{i=1}^n \frac{-1}{p} (x_i^0)^{p+1} \frac{\partial g(x^0)}{\partial x_i} \left( \frac{1}{(x_i)^p} - \frac{1}{(x_i^0)^p} \right) \quad (5.5)$$

La clé de la réussite des variables inverses réside dans l'introduction d'une courbure dans l'approximation. Pour les variables inverses, la dérivée seconde de l'approximation évaluée en  $x^0$  est donnée par :

$$\frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_i^2} = -\frac{2}{x_i^0} \frac{\partial g(x^0)}{\partial x_i} \quad (5.6)$$

Tandis que pour l'inverse de la puissance  $p$  de la variable de conception, la courbure vaut :

$$\frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_i^2} = -\frac{p+1}{x_i^0} \frac{\partial g(x^0)}{\partial x_i} \quad (5.7)$$

Quel que soit l'exposant  $p$  supérieur à -1., on voit que, si la dérivée première est négative, la courbure de l'approximation est positive et l'approximation est convexe. Dans le cas de variables de dimensionnement, les dérivées premières des déplacements et des tensions dans les structures isostatiques sont, de fait, négatives. Hélas, pour des structures hyperstatiques ou pour des variables de forme, le signe des dérivées premières n'est pas fixé et les variables inverses peuvent engendrer des approximations non convexes. Des techniques de linéarisation plus sophistiquées ont été développées en vue de ne produire que des approximations inconditionnellement convexes.

### 5.1.3 Approximations obtenues par linéarisation mixte (CONLIN)

Pour générer uniquement des approximations dont les courbures soient strictement positives ou nulles, la stratégie CONLIN utilise une linéarisation mixte basée sur le signe de la dérivée première. Indépendamment du type de fonction structurale traitée, l'algorithme sélectionne une linéarisation en termes des variables directes si la dérivée est positive, et en termes des variables inverses si la dérivée est négative :

$$\tilde{g}(x) = g(x^0) + \sum_{\frac{\partial g}{\partial x_i} \geq 0} \frac{\partial g(x^0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) - \sum_{\frac{\partial g}{\partial x_i} < 0} (x_i^0)^2 \frac{\partial g(x^0)}{\partial x_i} \left( \frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_i^0} \right) \quad (5.8)$$

Starnes et Haftka (1979) ont montré que ce critère de sélection donne lieu à l'approximation la plus convexe que l'on puisse former parmi toutes les combinaisons de variables mixtes. Comme ce schéma de linéarisation ne crée que des approximations convexes séparables, Fleury (1986) a initialement suggéré le nom de **linéarisation convexe** ou CONLIN. Son application à la fonction objectif et aux contraintes crée un sous-problème convexe séparable qui se prête parfaitement à une résolution duale. Après normalisation des variables autour du point courant  $x^0$ , le problème explicite prend alors la forme simple suivante :

$$\begin{aligned}
 \min_{x_i \leq x_i \leq \bar{x}_i} & \quad \sum_+ c_{i0} x_i - \sum_- \frac{c_{i0}}{x_i} - d_0 \\
 \text{avec} & \quad \sum_+ c_{ij} x_i - \sum_- \frac{c_{ij}}{x_i} \leq d_j
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Dans cette expression,  $\sum_+$  ( $\sum_-$ ) dénote la somme sur les termes positifs (négatifs), tandis que  $c_{ij}$  sont les dérivées normalisées de la fonction objectif et des contraintes évaluées au point courant. Quant aux  $d_j$ , ils collectent les contributions d'ordre zéro du développement en série.

Puisque CONLIN est une stratégie de linéarisation conservative, elle tend à générer une séquence de conceptions strictement réalisables pour un grand nombre de problèmes de conception. Dans ces conditions, CONLIN permet d'obtenir une conception quasi optimale réalisable en quelque 10 analyses. Nguyen, Fleury et Strodriot (1987) ont montré que CONLIN convergeait vers un optimum local sous des hypothèses généralement satisfaites en optimisation des structures.

#### 5.1.4 Approximations basées sur la méthode des asymptotes mobiles (M.M.A.)

Malgré les nombreux cas où l'on a pu appliquer la méthode CONLIN avec succès, la littérature rapporte plusieurs exemples d'échec (par ex. Svanberg, 1987). L'origine de l'échec est imputée à une inadéquation de la courbure de l'approximation par rapport à la courbure réelle. Si la courbure est trop faible, la convergence est oscillante. Lorsqu'elle est surestimée, la convergence est ralentie ou arrêtée prématurément. Les dérivées secondes de l'approximation CONLIN sont fixées et ne peuvent être modifiées. En outre, CONLIN introduit une disparité de traitement des variables : la courbure introduite dépend du signe de la dérivée première et varie pour chaque variable. Si la dérivée est négative, la courbure est donnée par la formule des variables inverses, tandis que le choix d'un développement linéaire n'introduit aucune courbure.

Pour remédier à cette difficulté, Svanberg (1987) a proposé une généralisation appelée *Méthode des Asymptotes Mobiles* (MMA). Pour comprendre la méthode, il faut d'abord remarquer que les linéarisations précédentes correspondent à l'introduction d'asymptotes verticales. La linéarisation inverse introduit une asymptote verticale en  $x=0$ , alors que la linéarisation simple équivaut au placement d'une asymptote à l'infini. Svanberg (1987) propose donc de créer une approximation dans laquelle on place deux séries d'asymptotes verticales de position variable. Pour modifier la conservativité de l'approximation et se rapprocher au mieux de la courbure exacte du problème, on fait varier la position relative des asymptotes inférieures ou supérieures par rapport au point de conception.

Dans le schéma MMA, chaque fonction est remplacée par sa linéarisation en fonction de deux types de variables intermédiaires  $1/(U_i - x_i)$  ou  $1/(x_i - L_i)$ . Les paramètres  $U_i$  et  $L_i$  sont les asymptotes relatives à la variable  $x_i$  et ils satisfont à  $L_i < x_i < U_i$ .

$$\tilde{g}(x) = r^0 + \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{U_i - x_i} + \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{x_i - L_i} \tag{5.10}$$

Les valeurs de  $p_i$ , de  $q_i$  et de  $r_0$  sont ajustées pour que l'approximation restitue les dérivées premières et la valeur de la fonction :

$$p_i = \max \{ 0, (U_i - x_i)^2 \frac{\partial g_j(x^0)}{\partial x_i} \} \quad ; \quad q_i = \max \{ 0, -(x_i - L_i)^2 \frac{\partial g_j(x^0)}{\partial x_i} \} \quad (5.11)$$

$$r^0 = g(x^0) - \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{U_i - x_i^0} - \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{x_i^0 - L_i} \quad (5.12)$$

On peut facilement vérifier que MMA est une approximation monotone croissante ou décroissante et que ses dérivées secondes sont données par :

$$\frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x_i^2} = - \frac{2}{x_i^0 - L_i} \frac{\partial g(x^0)}{\partial x_i} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{U_i - x_i^0} \frac{\partial g(x^0)}{\partial x_i} \quad (5.13)$$

Il est clair que l'écartement des asymptotes mobiles diminue la courbure de l'approximation, tandis qu'à contrario, la courbure augmente si on rapproche les asymptotes du point de linéarisation. Cette propriété permet de ralentir et de stabiliser la convergence ou, au contraire, d'accélérer les mouvements des solutions successives.

Sur la base de cette constatation, Svanberg (1987) propose un schéma heuristique de remise à jour des asymptotes mobiles. Celui-ci est basé sur des informations d'ordre zéro relatives à l'histoire de la convergence. Il faut remarquer que cette procédure attache une paire d'asymptotes  $U_i$  et  $L_i$  à chaque variable  $x_i$ , mais qu'elle utilise les mêmes asymptotes mobiles pour toutes les restrictions du problème.

- Dans les deux premières itérations  $k = 1$  ou  $2$  : on adopte les valeurs par défaut

$$\begin{cases} L_i^k = x_i^k - s_0(\bar{x}_i - \underline{x}_i) \\ U_i^k = x_i^k + s_0(\bar{x}_i - \underline{x}_i) \end{cases} \quad (5.14)$$

où Svanberg conseille de prendre le paramètre  $s_0$  égal à 0.5.

- Après deux itérations  $k > 2$ , on rapproche les asymptotes si le processus oscille, c'est-à-dire si  $(x_i^{k-2} - x_i^{k-1})(x_i^{k-1} - x_i^k) \leq 0$  :

$$\begin{cases} L_i^k = x_i^k - s_1(x_i^{k-1} - L_i^{k-1}) \\ U_i^k = x_i^k + s_1(x_i^{k-1} - U_i^{k-1}) \end{cases} \quad (5.15)$$

Le paramètre  $s_1$  qui doit être strictement inférieur à 1.0, est généralement pris égal à 0.7 ou 0.5.

On écarte les asymptotes si le processus converge de manière monotone, c'est-à-dire si  $(x_i^{k-2} - x_i^{k-1})(x_i^{k-1} - x_i^k) > 0$  :

$$\begin{cases} L_i^k = x_i^k - (x_i^{k-1} - L_i^{k-1})/s_2 \\ U_i^k = x_i^k + (x_i^{k-1} - U_i^{k-1})/s_2 \end{cases} \quad (5.16)$$

Le paramètre  $s_2$ , qui est également strictement inférieur à 1.0, est généralement pris égal à  $s_1$  ou à  $\sqrt{s_1}$  pour rendre le processus plus stable.

## B. APPROXIMATIONS DU SECOND ORDRE

Les schémas d'approximation qui ont été exposés jusqu'à présent, sont basés sur les dérivées premières. La courbure introduite dans l'approximation simule au mieux la courbure réelle des restrictions structurales en se fondant sur l'analyse des propriétés du comportement mécanique des structures. Par construction, ces approximations sont *convexes* et on veut qu'elles soient *conservatives* c'est-à-dire qu'elles aillent dans le sens d'une surestimation locale de la fonction réelle. Dans ces conditions, il est possible de générer une suite convergente de conceptions admissibles toujours améliorées. La linéarisation simple ne possède aucune courbure. Les variables inverses et CONLIN introduisent un degré de conservativité fixé. La méthode MMA est la seule approximation qui offre une certaine flexibilité dans le choix de la convexité en jouant sur les asymptotes mobiles. Néanmoins, la sélection des asymptotes est heuristique et assez rudimentaire. Pour pouvoir obtenir une sélection plus rigoureuse des courbures des approximations, il faut disposer d'informations du second ordre. Les approximations dites du second ordre sont généralement des extensions des schémas classiques : MMA, linéarisation en fonction de la puissance des variables de conception... Elles intègrent cependant les informations de courbure et elles possèdent donc une convexité meilleure. En conséquence, ces approximations sont plus simples à employer puisqu'elles utilisent une sélection automatique des variables intermédiaires. De nombreuses applications numériques ont montré que ces méthodes du second ordre donnent de bons résultats sur un grand échantillon de problèmes.

### 5.1.5 Approximations quadratiques et programmation séquentielle quadratique

#### 5.1.5.1 Approximation quadratique

L'approximation du second ordre la plus naturelle consiste à prendre le développement en série de Taylor limité au deuxième ordre. La fonction est alors remplacée par son approximation quadratique locale :

$$\tilde{g}(x) = g(x_0) + \nabla g(x_0)^T (x - x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^T \nabla^2 g(x_0) (x - x_0) \quad (5.17)$$

Cette approximation n'est cependant pas séparable puisqu'il existe en général des dérivées secondes croisées. Elle peut être coûteuse parce qu'elle demande l'estimation de toutes les dérivées secondes.



### 5.1.5.2 Méthode de Newton-Lagrange et programmation séquentielle quadratique

Si on revient au problème de programmation mathématique avec contraintes, sa solution s'obtient en formant la fonction Lagrangienne associée :

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) \quad (5.18)$$

La solution du problème obéit aux conditions de stationnarité de Karush-Kuhn-Tucker :

$$\begin{cases} \nabla \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \nabla \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} ; \lambda_j \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{0} ; \lambda_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, m) \end{cases} \quad (5.19)$$

La résolution de ce système d'équations peut être effectuée de manière itérative par une procédure de type Newton :

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^2 L(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k) \mathbf{d}^k + \sum_{j \in J} \lambda_j \nabla \mathbf{g}_j(\mathbf{x}^k) = -\nabla \mathbf{g}_0(\mathbf{x}^k) \\ \nabla \mathbf{g}_j(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}^k = -\nabla \mathbf{g}_j(\mathbf{x}^k) \quad j \in J \end{cases} \quad (5.20)$$

où l'on pose  $\mathbf{d}^k = \mathbf{x} - \mathbf{x}^k$  et où l'on définit par  $J$  l'ensemble des contraintes actives :

$$J = \{ j \mid \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda_j > 0 \}$$

Si le Hessian du Lagrangien  $\nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^2 L = \nabla^2 \mathbf{g}_0(\mathbf{x}^k) + \sum_{l=1}^m \lambda_l^k \nabla^2 \mathbf{g}_l(\mathbf{x}^k)$  est défini positif sur le noyau de  $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)$ , ce qui est généralement vérifié au voisinage d'un optimum local, il est équivalent de rechercher le minimum de problème quadratique avec des contraintes linéaires :

$$\begin{aligned} \min_{\substack{\mathbf{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i}} & \frac{1}{2} \mathbf{d}^k{}^T \nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^2 L^k \mathbf{d}^k + \nabla \mathbf{g}_0(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}^k \\ \text{avec} & \mathbf{g}_j(\mathbf{x}^k) + \nabla \mathbf{g}_j(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}^k \leq \mathbf{0} \quad j \in J \end{aligned} \quad (5.21)$$

Dès lors, la procédure itérative de Newton-Lagrange consiste à résoudre une séquence de problèmes quadratiques et à remettre à jour la solution primale et les multiplicateurs de Lagrange à l'aide de la direction de progression  $\mathbf{d}^k$  et des multiplicateurs  $\boldsymbol{\mu}$  du sous-problème.

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{d}^k \\ \boldsymbol{\lambda}^{k+1} = \boldsymbol{\mu} \end{cases}$$

On peut assurer la convergence en recourant à une recherche linéaire  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{d}^k$  avec  $\alpha_k \leq 1$ .

Il existe de nombreuses variantes de l'algorithme SQP original qui vient d'être énoncé. Les stratégies les plus connues sont celles de Han (1976, 1977), de Pschenichny et Danilin (1978) et de Schittkowski (1981, 1985). Généralement, il est nécessaire de tenir compte de situations critiques où le Hessian n'est pas défini positif. En outre, on renonce souvent à calculer le Hessian du Lagrangien soit parce que cela est impossible, soit parce que cette information est trop onéreuse. On le remplace alors par une

approximation définie positive basée sur une technique de type Quasi-Newton.

### 5.1.5.3 Approximation quadratique séparable et méthode SQP diagonal

En optimisation structurale, l'évaluation des sensibilités du second ordre peut devenir onéreuse, puisque le nombre de dérivées secondes à calculer est de  $n(n+1)/2$  où  $n$  est le nombre de variables de conception. En optimisation topologique, et parfois en dimensionnement, le nombre de dérivées à calculer devient vite un obstacle. Les choses ne sont pas plus simples en optimisation de forme où la raideur n'a pas de forme explicite en fonction des variables de conception, de sorte que l'évaluation des dérivées secondes des matrices de raideur y est très difficile. D'un autre côté, l'approximation quadratique complète n'est plus séparable à cause de la présence des termes de dérivées partielles croisées et l'approche de résolution duale devient beaucoup moins attractive. En conséquence, Fleury (1989b) a émis l'idée de se limiter à l'information des dérivées secondes diagonales et de négliger les termes croisés.

La réduction de l'approximation quadratique à une forme séparable consiste à restreindre les termes de courbures aux dérivées secondes diagonales en y ajoutant éventuellement des termes de convexification supplémentaires pour rendre l'approximation convexe ou pour augmenter le caractère conservatif. L'approximation quadratique séparable s'écrit :

$$\tilde{g}(x) = g(x^0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(x^0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 g(x^0)}{\partial x_i^2} + \delta_{ii} \right) (x_i - x_i^0)^2 \quad (5.22)$$

La méthode SQP diagonal s'obtient en utilisant l'approximation quadratique séparable pour la fonction objectif des sous-problèmes quadratiques et en linéarisant les contraintes.

$$\begin{aligned} \min_{x_i \leq x_i \leq \bar{x}_i} \quad & \frac{1}{2} \sum_i a_{ii} (x_i - x_i^k)^2 + \nabla g_0^T (x - x^k) \quad \text{avec } a_{ii} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i^2} + \delta_{ii} \\ \text{avec } \quad & g_j(x^k) + \nabla g_j^{kT} (x - x^k) \leq 0 \quad j \in J \end{aligned} \quad (5.23)$$

Seuls les termes diagonaux du Lagrangien sont retenus dans le sous-problème. Ils sont éventuellement augmentés des termes additionnels  $\delta_{ii}$  afin d'augmenter la convexité du problème et de servir de "move-limits" en établissant une région de confiance autour du point de linéarisation. Par exemple, on calcule la pénalité  $\delta_{ii}$  en obligeant l'optimum non contraint à rester à une distance fixée du point de linéarisation.

$$|x_i^* - x_i^0| = \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} / \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} + \delta_{ii} \right) \right| < \alpha x_i^0 \quad (5.24)$$

### 5.1.6 Méthode des asymptotes mobiles du second ordre

On peut imaginer combiner les potentialités des approximations convexes de haute qualité comme MMA avec les informations du second ordre afin d'ajuster les valeurs de ses paramètres, ici les asymptotes mobiles, de manière automatique. En outre, quoique MMA soit une approximation convexe du premier ordre, on a souvent remarqué que MMA permet d'obtenir une solution de bonne qualité plus rapidement qu'avec une approximation de Taylor du second ordre, parce qu'elle est adaptée aux

particularités du problème de structure. Enfin, on sait aussi qu'une bonne estimation de la courbure de la restriction dans une approximation de haute qualité permet d'accélérer la convergence. Dès lors, il semble intéressant de combiner les avantages de ces deux types d'approches. Pour réaliser cet objectif, Smaoui *et al.* (1988) ont défini une stratégie de sélection des asymptotes mobiles en fonction des dérivées secondes. Les dérivées secondes servent à adapter la courbure de l'approximation afin qu'elle "colle" au mieux au comportement réel du problème. MMA étant séparable, seule la diagonale des dérivées secondes est nécessaire. L'approximation MMA du second ordre autour du point  $x^0$  peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{g}(x) = c_0 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x_i - b_i} \quad (5.25)$$

Les valeurs des paramètres s'obtiennent par identification de la valeur de la restriction, des dérivées premières et secondes diagonales. On obtient les coefficients du numérateur et les asymptotes mobiles

$$\begin{aligned} a_i &= -(x_i^0 - b_i)^2 \frac{\partial g(x^0)}{\partial x_i} \\ b_i &= x_i^0 + 2 \frac{\partial g}{\partial x_i} / \max(\epsilon, \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}) \quad 0 < \epsilon < 1 \end{aligned} \quad (5.26)$$

et le terme d'ordre zéro

$$c_0 = g(x^0) - \sum_{i=1}^n a_i / (x_i^0 - b_i) \quad (5.27)$$

Le terme  $\epsilon$  est un nombre très petit, mais positif destiné à préserver la convexité de l'approximation. Dans le cas d'une courbure négative, on éloigne l'asymptote mobile du point de linéarisation et on retrouve l'approximation linéaire.

Le schéma proposé permet de sélectionner des asymptotes distinctes pour chaque restriction et chaque variable. On parle alors de MMA généralisé ou de GMMA. Lorsque ce schéma d'approximation est employé pour toutes les restrictions du problème, le sous-problème d'optimisation prend la forme explicite suivante :

$$\begin{aligned} \min_{x_i \leq x_i \leq \bar{x}_i} \quad & c_{00} + \sum_{i=1}^n \frac{a_{i0}}{x_i^0 - b_{i0}} \\ \text{avec} \quad & c_{0j} + \sum_{i=1}^n \frac{a_{ij}}{x_i^0 - b_{ij}} \leq 0 \quad j \in J \end{aligned} \quad (5.28)$$

Ce sous-problème peut être résolu par voie duale. Cependant, comme l'algorithme génère une asymptote différente pour chaque variable et chaque restriction, le problème Lagrangien demande une procédure numérique de minimisation unidimensionnelle pour déterminer la relation entre chaque variable primale et les variables duales (Zhang et Fleury, 1994).

### 5.1.7 Approximation de courbures nulles

La plupart des méthodes de linéarisation du premier ordre introduisent des variables intermédiaires. Le choix d'un changement de variable de type puissance

$$z_i = x_i^{p_i} \quad (5.29)$$

nécessite le choix d'un exposant approprié pour simuler de la façon la plus juste possible la courbure réelle. Fleury (1989b) suggère encore d'utiliser les dérivées secondes pour remplacer les critères empiriques et peu flexibles du choix de l'exposant. Les dérivées premières et secondes de la réponse structurale  $\mathbf{g}[x(z)]$  s'obtiennent par dérivation en chaîne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z_i} &= \frac{1}{p_i} x_i^{1-p_i} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial z_i^2} &= \frac{1-p_i}{p_i^2} x_i^{1-2p_i} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_i} + \frac{1}{p_i^2} x_i^{2-2p_i} \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial x_i^2} \end{aligned} \quad (5.30)$$

On choisit les exposants  $p_i$  pour chaque variable dans le but d'annuler les dérivées secondes principales dans l'espace des nouvelles variables de conception. Si l'approximation était réellement séparable, on se placerait ainsi dans l'espace de courbure nulle. On obtient facilement les valeurs des exposants :

$$p_i = 1 + x_i^0 \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial x_i^2} / \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_i} \quad (5.31)$$

## 5.2 Une nouvelle procédure pour former des approximations structurales

Comme le paragraphe précédent l'a rappelé, la combinaison des approximations de haute qualité et des informations du second ordre est à la base des techniques de linéarisation les plus puissantes que l'on possède pour la résolution des problèmes d'optimisation structurale. Cependant, la connaissance des informations de courbure n'est pas une chose facile à obtenir. Rappelons deux difficultés majeures. D'abord, les dérivées secondes sont en nombre  $n(n+1)/2$  ( $n$  étant le nombre de variables de conception), de sorte que les informations à mémoriser et à manipuler dans des problèmes de distribution de matière, prennent rapidement des proportions astronomiques. Ensuite, dès que la forme de la matrice de raideur devient une forme implicite ou explicite compliquée des variables microscopiques, l'évaluation de la dérivée seconde de la matrice de raideur pose un problème de coût numérique important.

Lorsqu'on aborde l'optimisation topologique par le biais d'une distribution de matière, le problème du calcul des dérivées secondes par voie analytique ou semi-analytique devient vite un obstacle numérique. Si les dérivées secondes de la densité volumique sont évidentes, le calcul des dérivées secondes de l'énergie et des fréquences propres est prohibitif. En effet, contrairement aux dérivées premières de la compliance et de la pulsation propre qui n'exigent aucun cas de charge supplémentaire, les dérivées secondes demandent  $n$  chargements additionnels. Dès que le problème comporte quelques

dizaines de variables de conception, il devient beaucoup plus économique de réaliser plusieurs itérations supplémentaires que d'obtenir ces dérivées secondes.

Il est également naturel de penser aux méthodes de Quasi-Newton pour construire une approximation de la matrice Hessienne. Malheureusement, si les techniques de remise à jour sont généralement applicables avec succès aux problèmes de taille modérée, il n'en va pas de même pour les problèmes de grande taille, étant donné que ce type de méthode exige, entre autres, la manipulation et la mémorisation de matrices de dimension  $n \times n$  symétriques à chaque itération. De plus, ces formules n'exploitent absolument pas les caractéristiques de séparabilité des approximations que l'on cherche à construire. Les formules classiques de remise à jour n'engendrent que des approximations "pleines" sans tenir compte du fait que les dérivées secondes diagonales sont les seules données nécessaires. La recherche de remises à jour capables de préserver cette structure diagonale révèle donc un grand intérêt dans notre problème. Une théorie mathématique satisfaisante des problèmes de Quasi-Newton creux est maintenant disponible de sorte qu'il est possible de dégager des remises à jour préservant la structure creuse de la matrice Hessienne réelle. A partir de la théorie générale établie pour les matrices creuses, nous avons participé à l'adaptation de résultats généraux au cas particulier des matrices diagonales. Pour ne pas alourdir l'exposé, nous présenterons dans ce chapitre un rappel succinct des résultats des méthodes de Quasi-Newton diagonal. Un exposé plus complet sera fourni à l'annexe B.

### 5.2.1 Remise à jour de type Quasi-Newton diagonal

Soit  $\mathbf{B}$  une approximation de la matrice Hessienne d'une restriction au point courant  $\mathbf{x}$ . Si le nouvel itéré  $\mathbf{x}^+$  ne satisfait pas le critère de convergence, on cherche à enrichir l'estimation précédente du Hessien par une nouvelle approximation  $\mathbf{B}^+$  à l'aide d'une technique de Quasi-Newton. La formule générale de remise à jour peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{B}^+ = \mathbf{B} + \mathbf{U} \quad (5.32)$$

où  $\mathbf{U}$  est une matrice choisie de telle manière que la nouvelle estimation  $\mathbf{B}^+$  reste symétrique et définie positive. Il existe beaucoup de variantes possibles pour le choix de la formule de mise à jour de la matrice  $\mathbf{B}$ , elles sont cependant toutes basées sur la condition de Quasi-Newton. Si l'on pose

$$\mathbf{s} = \mathbf{x}^+ - \mathbf{x} \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^+) - \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (5.33)$$

la relation de Quasi-Newton s'obtient par développement en série du gradient autour du point  $\mathbf{x}^+$ .

$$\mathbf{B}^+ \mathbf{s} = \mathbf{y} \quad (5.34)$$

La formule de correction qui permet d'obtenir  $\mathbf{B}^+$  à partir de  $\mathbf{B}$  utilise les informations nouvelles obtenues, c'est-à-dire les valeurs des dérivées en ce point. La méthode la plus connue parmi les remises à jour de type Quasi-Newton est la formule de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS).

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{y}\mathbf{y}^T}{\mathbf{s}^T\mathbf{y}} - \frac{\mathbf{B}\mathbf{s}\mathbf{s}^T\mathbf{B}}{\mathbf{s}^T\mathbf{B}\mathbf{s}} \quad (5.35)$$

Comme toutes les formules classiques de remise à jour, celle-ci ne préserve pas la structure diagonale de la matrice initiale. Par ailleurs, on sait aussi qu'il n'est pas automatique de construire une approximation diagonale qui soit définie positive et qui satisfasse à la condition de Quasi-Newton. Une

manière de procéder pour obtenir une remise à jour de type Quasi-Newton qui réponde à toutes ces exigences, consiste à recourir à une minimisation de norme. Toint (1977) a montré qu'il est effectivement possible d'obtenir une version modifiée des formules de remise à jour de Davidon-Fletcher-Powell pour matrices creuses satisfaisant à l'équation de Quasi-Newton, aux conditions de symétrie et de positivité. La formule d'actualisation se définit en trouvant une matrice de correction  $\mathbf{E}$  de telle sorte que la nouvelle estimation  $\mathbf{B}^+ = \mathbf{B} + \mathbf{E}$  qui possède la même structure (creuse ou diagonale) que la matrice originale soit la plus proche possible, au sens de Frobenius, de la matrice non creuse ou non diagonale  $\hat{\mathbf{B}}^+ = \mathbf{B} + \mathbf{U}$  que l'on obtiendrait avec la formule d'actualisation standard. Par une série de théorèmes, Thapa (1981) a montré que les résultats de Toint peuvent être étendus à d'autres schémas de remise à jour symétriques.

La théorie de l'actualisation des matrices Hessiennes diagonales que nous proposons est une adaptation (Haubruge et Nguyen, 1994) de la théorie générale pour matrices creuses de Thapa.

La matrice  $\mathbf{B}$  est supposée diagonale par hypothèse. On note par  $\hat{\mathbf{B}}^+ = \mathbf{B} + \mathbf{U}$  la nouvelle estimation de la matrice Hessienne que l'on obtient par une remise à jour symétrique et non diagonale  $\mathbf{U}$ . Cette matrice n'étant pas diagonale, on définit sa partie diagonale  $\hat{\mathbf{B}}_D^+$  et sa partie non diagonale  $\hat{\mathbf{B}}_{ND}^+$ . On suppose que cette approximation  $\hat{\mathbf{B}}^+$  satisfait à l'équation de Quasi-Newton

$$\hat{\mathbf{B}}^+ s = y \quad (5.36)$$

On recherche une matrice  $\mathbf{B}^+$  qui soit la plus proche de  $\hat{\mathbf{B}}_D^+$  dans la norme de Frobenius et qui satisfasse à la condition de Quasi-Newton. Cette nouvelle estimation diagonale est de la forme

$$\mathbf{B}^+ = \hat{\mathbf{B}}_D^+ + \mathbf{E} \quad (5.37)$$

La matrice diagonale de correction  $\mathbf{E}$  est la solution du système suivant :

$$\begin{aligned} \min \|\mathbf{E}\|_F \\ \text{avec } \mathbf{E} s = \hat{\mathbf{B}}_{ND}^+ s \\ E_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \end{aligned} \quad (5.38)$$

La solution de ce problème est donnée par

$$E_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 2 \lambda_i s_i & (i = j) \end{cases} \quad (5.39)$$

où le vecteur  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  est lui-même solution du système linéaire diagonale

$$\mathbf{Q} \boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{B}}_{ND}^+ s \quad (5.40)$$

dans lequel la matrice  $\mathbf{Q}$  est définie par

$$Q_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 2 s_i^2 & (i = j) \end{cases} \quad (5.41)$$

Il découle de ce résultat que la version de la méthode de Quasi-Newton pour matrices diagonales requiert la solution du système linéaire  $\mathbf{Q}\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{B}}_{ND}^+ \mathbf{s}$ . Toutefois, il est possible de montrer qu'il n'est pas nécessaire de calculer les éléments de  $\mathbf{U}_{ND}$ . En effet, par simple manipulation algébrique à partir de l'équation de Quasi-Newton (5.36) et des contraintes du problème (5.38), on montre facilement la propriété suivante :

$$\hat{\mathbf{B}}_{ND}^+ \mathbf{s} = \mathbf{y} - \mathbf{B}\mathbf{s} - \mathbf{U}_D \mathbf{s} \quad (5.42)$$

On en conclut que seuls les termes diagonaux  $\mathbf{U}_D$  doivent être calculés. Fait remarquable, pour obtenir l'analogue de la remise à jour de type BFGS pour des matrices diagonales, l'application du résultat précédent permet de ne calculer que les éléments diagonaux

$$U_{ii} = \frac{y_i^2}{s^T \mathbf{y}} - \frac{(\mathbf{B}_{ii} s_i)^2}{s^T \mathbf{B} \mathbf{s}} \quad (5.43)$$

Pour les applications pratiques en structures, nous avons préféré utiliser la formule de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) modifiée par Powell (1978). La substitution des deux formules de remise à jour est immédiate.

## 5.2.2 Adaptation de la méthode de BFGS pour matrices diagonales au problème des structures

### 5.2.2.1 Effectuer la remise à jour dans l'espace des variables directes ou variables inverses

La première question est de savoir s'il serait plus efficace de réaliser les remises à jour du Hessien en variables directes ou bien en fonction de variables intermédiaires quelconques susceptibles de réduire la non-linéarité du problème.

On sait que pour le dimensionnement des structures isostatiques, les réponses structurales sont des fonctions exactes des variables inverses ou d'une puissance de ces variables inverses et que la courbure de la réponse structurale est nulle dans cet espace. Pour une structure quelconque, on sait aussi que le passage dans l'espace des variables inverses réduit la non-linéarité des contraintes. Dès lors, en travaillant dans l'espace des variables inverses, on peut espérer accélérer la convergence de la matrice des dérivées secondes.

Avant de répondre à la question, nous rappellerons les formules de transformation qui permettent de passer des grandeurs en variables directes  $x_i$  aux variables inverses  $y_i = 1/x_i$ . Les dérivées premières et secondes dans les deux espaces sont liées par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_i} &= -\frac{1}{x_i^2} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y_i} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial x_i^2} &= \frac{1}{x_i^4} \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial y_i^2} + \frac{2}{x_i^3} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y_i} \end{aligned} \quad (5.44)$$

Les expériences numériques que nous avons pratiquées confirment notre intuition et montrent une convergence plus rapide, plus stable et plus uniforme de la suite des estimations des dérivées secondes dans l'espace des variables inverses. Il en résulte que les approximations obtenues sont généralement

plus conservatives, ce qui donne lieu à un processus d'optimisation où l'on n'a que de faibles violations de contraintes. La convergence des estimations du Hessien y est également moins sensible aux imperfections des courbures initiales, ce qui simplifie un problème délicat, comme nous le verrons au paragraphe suivant.

Néanmoins, cette règle n'est pas absolue et la remise à jour dans l'espace de conception original peut donner également de bons résultats si on prend un soin particulier pour bien choisir la courbure initiale et si on amortit les modifications trop importantes de l'actualisation. Pour les problèmes fortement non convexes (par exemple le treillis 8 barres), l'actualisation dans l'espace de conception original peut accélérer le processus de convergence des estimations des courbures.

### 5.2.2.2 Choix de la matrice des courbures initiales

Il s'agit peut-être du point pour lequel il faut tenir compte, le plus possible, des particularités du problème de structure. L'expérience numérique nous a encore montré que le choix des courbures initiales peut avoir une influence considérable sur la séquence d'itérations nécessaires pour arriver à l'optimum. En effet, la fiabilité des informations fournies sur les courbures se répercute sur la qualité de l'approximation structurale. Si on effectue un mauvais choix de la courbure initiale, la mauvaise qualité des estimations de la courbure dans les premiers itérés entraîne généralement un ralentissement de la vitesse de convergence ou une oscillation du processus, voire une divergence. Les violations de contrainte peuvent être importantes, ce qui peut déstabiliser le processus de convergence. Dans les cas les plus difficiles, Svanberg (1991b) conseille de ne pas se servir des informations du second ordre durant les premiers itérés, même si le processus de Quasi-Newton est enclenché depuis le début, et de n'utiliser les estimations des dérivées secondes qu'au cours de la phase finale de la convergence.

Néanmoins, en tenant compte des propriétés des réponses structurales, nous avons pu mettre au point une stratégie efficace de sélection des courbures initiales qui soient aussi proches que possible des valeurs réelles recherchées. Dans ce cas, le processus d'actualisation du Hessien atteint rapidement de bonnes estimations des courbures et les approximations structurales sont de grande qualité.

Discutons à présent quelques expériences numériques réalisées à ce propos.

Puisqu'on désire une matrice Hessienne diagonale définie positive, la théorie classique des techniques de Quasi-Newton préconise habituellement de sélectionner la matrice unité, notée  $I$ , comme première estimation du Hessien.

$$\mathbf{B}^0 = I \quad (5.45)$$

Quoique cette estimation initiale soit extrêmement simple et qu'elle soit définie positive, elle est à proscrire pour les problèmes structuraux étudiés dans l'espace de conception original. L'ordre de grandeur des dérivées secondes en variables directes est complètement erroné, ce qui entraîne un très mauvais comportement de convergence. Par contre, on remarque que dans l'espace des variables inverses où la non-linéarité est moins forte, cette valeur initiale fournit une bonne estimation initiale et assure une convergence souvent uniforme. Si la structure est faiblement hyperstatique, la non-linéarité dans l'espace des variables inverses est très faible et une valeur unité sur la diagonale peut également être remplacée avec succès par une valeur petite mais positive.

$$\mathbf{B}^0(y_i = 1/x_i) = \epsilon I \quad 0 < \epsilon \ll 1 \quad (5.46)$$

Ce choix peut être transposé en variables directes pour générer, a priori, une bonne estimation de la courbure. En supposant que les courbures soient petites dans l'espace des variables inverses, on adopte



la courbure correspondante dans l'espace des variables directes. Si la dérivée première est positive, l'estimation de la courbure, qui est négative, doit être remplacée par une valeur petite, mais positive. La courbure correspondante revient à choisir l'approximation CONLIN à la première itération.

$$\mathbf{B}_{ii}^0 \approx \max\left(\frac{-2\mathbf{g}_i'}{x_i}, \epsilon\right) \quad \text{avec} \quad \mathbf{g}_i' = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_i} \quad (5.47)$$

Cette dernière option est introduite en standard dans la procédure numérique que nous avons réalisée. Une estimation initiale plus conservative est trouvée en prenant le module de la courbure pour toutes les variables directes quel que soit le signe de la dérivée.

$$\mathbf{B}_{ii}^0 \approx \frac{2|\mathbf{g}_i'|}{x_i} \quad (5.48)$$

Pour trouver une courbure initiale réaliste, on peut aussi se fier au choix de la courbure initiale proposé par Svanberg, (1987, 1991a) pour sélectionner les premières asymptotes mobiles. Pour retrouver ce choix, on prend les courbures initiales :

$$\mathbf{B}_{ii}^0 \approx \frac{2|\mathbf{g}_i'|}{s_0(\bar{x}_i - x_i)} \quad \text{avec} \quad s_0 = 0.5 \quad (5.49)$$

Ce choix de la formule (5.49) donne également de bons résultats comme le prouve l'exemple du treillis 10 barres présenté dans la suite. Elle présente néanmoins, la faiblesse de dépendre d'un choix raisonnable des bornes sur les variables de conception.

### 5.2.2.3 Utilisation d'une procédure de Levenberg-Marquardt pour forcer la définition positive du Hessien

Si on utilise une procédure de Quasi-Newton lors de la résolution d'un problème de minimisation non-contrainte ou au cours d'une procédure de programmation quadratique séquentielle (SQP), il est vital de conserver une matrice Hessienne définie positive pour que le problème quadratique soit convexe et qu'on trouve une direction de descente. Pour rendre l'estimation du Hessien défini positif, on emploie une procédure de Levenberg-Marquardt ou une factorisation de Cholewski et on remplace l'estimation  $\mathbf{B}^k$  par sa correction  $\bar{\mathbf{B}}^k$  définie positive.

Avec les approximations convexes utilisées dans les problèmes de structure, on peut se demander s'il est souhaitable de forcer le caractère défini positif de l'approximation  $\mathbf{B}^k$  au cours des mises à jour et de remplacer l'estimation par une correction rendue définie positive. Nous avons constaté que cette manière de faire était peu efficace. Puisque l'estimation  $\mathbf{B}^k$  est diagonale, la méthode de Levenberg-Marquardt s'impose. Par contre, on constate que la qualité des approximations structurales est moins bonne et que la vitesse de convergence des candidats optimums est plus lente. En effet, l'application de Levenberg-Marquardt a tendance à rendre les approximations trop convexes et à briser la convergence du Hessien diagonal. Notre observation rencontre les constatations de Thapa (1981). En outre, l'expérience numérique que nous avons pratiquée nous a appris qu'il est plus efficace de remettre à jour les approximations successives du Hessien, sans se soucier de savoir si elles sont définies positives ou non, et, ensuite, de remplacer les courbures négatives par une faible valeur positive dans l'approximation structurale.

#### 5.2.2.4 Amortissement des actualisations du Hessien

Parfois, on constate que la procédure de Quasi-Newton diagonal oscille parce que les modifications du Hessien sont très importantes. Pour tempérer les modifications trop violentes du Hessien, on adopte une procédure d'amortissement de l'actualisation :

$$\mathbf{B}^+ = \mathbf{B} + \alpha (\mathbf{U}_D + \mathbf{E}) \quad (5.50)$$

On considère qu'une modification est trop importante si le module de la modification du Hessien  $\Delta\mathbf{B} = \mathbf{U} + \mathbf{E}$  est dix fois supérieur au module du Hessien  $\mathbf{B}$ . On réalise alors un amortissement de la remise à jour proposée. Le coefficient d'amortissement  $\alpha$  vaut :

$$\alpha = \min\left(1., \frac{10.}{\tau}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\sqrt{\sum \Delta\mathbf{B}_{ii}^2}}{\sqrt{\sum \mathbf{B}_{ii}^2}} \quad (5.51)$$

Cette technique est utile lorsque l'on actualise le Hessien dans l'espace de conception directe et que le choix initial de la courbure est éloigné de celui du problème.

### 5.2.3 Utilisation de la méthode de BFGS diagonal avec les approximations MMA et quadratique séparable

Nous proposons maintenant des nouvelles procédures d'approximation qui repose sur l'association d'approximations de haute qualité, comme MMA du second ordre ou l'approximation quadratique séparable, et d'une remise à jour de Quasi-Newton pour matrices diagonales (en abrégé BFGS diagonal).

#### 5.2.3.1 La méthode MMA

Pour l'approximation MMA, nous proposons d'utiliser la formule de sélection automatique des asymptotes mobiles de Smaoui *et al.* (1988) avec de l'estimation faite par BFGS diagonal, de sorte qu'on a :

$$\mathbf{b}_i = x_i^0 + 2 \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_i} / \max(\epsilon, \mathbf{B}_{ii}) \quad (5.52)$$

Etant donné qu'on utilise une méthode de Quasi-Newton, cette méthode permet de sélectionner les asymptotes de manière automatique sur la base des dérivées premières uniquement. La méthode proposée répond donc à une question restée ouverte depuis quelques années. En outre, comme la remise à jour de type BFGS diagonal présente ne nécessite que la manipulation et la mémorisation de vecteurs de dimension  $n$  (nombre de variables de conception), la méthode est très peu coûteuse.

Comme nous le verrons dans les applications, L'idée de cette association donne lieu à plusieurs faits intéressants :

- Dans les premières itérations, la méthode MMA combinée avec un BFGS diagonal donne lieu à une bonne vitesse de convergence, même si la sélection des asymptotes mobiles est relativement grossière. En effet, comme Svanberg (1987) l'a fait remarquer, MMA présente une convergence quasi intacte dans une certaine plage de courbure, de sorte que dans les premières itérations, une estimation relativement rudimentaire de la courbure n'entrave pas la convergence de notre nouvelle

approximation.

Bien au contraire, en introduisant, dans la nouvelle approximation, les courbures initiales que nous avons proposées pour le BFGS diagonal, on retrouve la méthode MMA du premier ordre qui est souvent plus efficace qu'une méthode du second ordre lors des premières étapes de l'optimisation.

■ Dans la phase terminale de la convergence, on a toujours intérêt à retrouver une approximation du second ordre. Les méthodes du premier ordre sont particulièrement handicapées dans le voisinage de l'optimum où elles montrent une convergence trop lente. Ce fait est nettement marqué sur les variables de conception en optimisation topologique; une très faible variation de fonction objectif correspond souvent à une modification de distribution de matière non négligeable.

Or, le BFGS diagonal permet de reconstruire l'information de courbure nécessaire, de sorte qu'à la fin du processus de convergence, on dispose d'une bonne estimation des dérivées secondes et on retrouve un comportement semblable aux méthodes de Newton.

■ La convergence des mises à jour BFGS pour matrices diagonales vers le Hessien réel est souvent plus lente que la convergence de la méthode originale avec des estimations complètes. Néanmoins, l'approximation diagonale offre l'avantage de présenter un effet pondéré des termes non diagonaux en les reportant sur les termes principaux. Loin d'être ignorés, les termes non diagonaux acquièrent une influence croissante lors de la construction de l'approximation séparable.

Remarquons en outre, que le choix d'une bonne courbure initiale a un effet très bénéfique sur la convergence de la mise à jour diagonale.

### 5.2.3.2 L'approximation quadratique séparable

Les courbures estimées par la méthode de Quasi-Newton diagonal peuvent encore être exploitées dans d'autres approximations de haute qualité. Pour le problème de conception structurale, Fleury (1989b) a montré que l'approximation quadratique séparable est une de ces approximations de haute qualité.

$$\tilde{g}(x) = g(x_0) + \nabla g(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \max(B_{ii}, \epsilon) (x_i - x_i^0)^2 \quad (5.53)$$

Nous avons expérimenté la combinaison de cette approximation avec la méthode du BFGS diagonal et nous avons pu voir qu'elle conduit à de bons résultats, particulièrement en optimisation topologique.

Elle est cependant plus sensible aux imperfections des courbures estimées. Dans les exemples de validation que nous présenterons au paragraphe 4, nous avons pu remarquer qu'elle peut être plus instable que la méthode MMA et que, dans ce cas, elle peut entraîner une oscillation des itérés ou une progression plus lente vers l'optimum à la suite d'une surestimation de la convexité. En conséquence, nous lui avons souvent préféré l'approximation des asymptotes mobiles dans les petits problèmes de treillis.

Pour les grands problèmes d'optimisation auxquels nous sommes confrontés en optimisation topologique, l'approximation quadratique avec l'estimation des courbures par la méthode BFGS diagonal s'est montrée généralement tout aussi rapide que la méthode MMA. Nous le verrons dans l'application de topologie présentée à la fin du chapitre. L'approximation quadratique séparable est particulièrement intéressante pour la compliance lorsqu'elle est combinée avec une contrainte de périmètre qui stabilise la convergence.

### 5.3 Une procédure de correction des données du second ordre

Les remises à jour de type Quasi-Newton offrent la possibilité d'exploiter l'information accumulée au cours des estimations successives des dérivées premières et d'enrichir ainsi la connaissance des courbures. La correction des données du second ordre (*Second Order Correction* ou S.O.C. en anglais) se base sur la volonté d'utiliser également la valeur de la fonction au point d'itération précédent afin d'ajuster la précision de l'approximation locale proposée. Si l'on travaille avec une approximation convexe du premier ordre, son degré de conservativité peut être réglé en ajustant sa courbure de manière uniforme. La valeur de la correction  $\kappa$  est alors la solution de l'équation unidimensionnelle :

$$\tilde{\mathbf{g}}^k(\mathbf{x}^{k-1}, \kappa) = \mathbf{g}(\mathbf{x}^{k-1}) \quad (5.54)$$

Selon Luenberger (1984), il est généralement bon de limiter les changements de courbure, de sorte qu'on adopte la règle de bonne pratique :

$$0.2 \leq \kappa \leq 5. \quad (5.55)$$

#### 5.3.1 Approximation quadratique

Pour un schéma d'approximation quadratique, il est possible de faire usage de la valeur de la fonction au point d'itération précédent au moyen d'une procédure suggérée pour la première fois par Longo *et al.* (1991). La méthode consiste à ajuster la courbure estimée par un facteur multiplicatif  $\kappa$  pour permettre à l'approximation de passer par la valeur de la restriction à l'itération  $k-1$ . Ce facteur  $\kappa$  permet d'augmenter ou de diminuer la convexité de l'approximation. Dans les premiers itérés, cette technique permet aussi de déterminer rapidement l'ordre de grandeur de la courbure recherchée si elle était mal estimée initialement.

Emettons l'hypothèse d'une restriction dont on connaît les valeurs et les dérivées premières aux itérations  $k$  et  $k-1$ . Pour l'approximation quadratique, la correction des termes du second ordre s'obtient en modifiant, de manière uniforme, la courbure disponible :

$$\tilde{\mathbf{H}}^k := \kappa^k \mathbf{H}^k \quad (5.56)$$

L'approximation quadratique peut s'écrire :

$$\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \kappa) = \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) + \frac{\kappa}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k)^T \mathbf{H}^k (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \quad (5.57)$$

On détermine le facteur  $\kappa^k$  en identifiant la valeur de la fonction en  $\mathbf{x}^{k-1}$  et la valeur de l'approximation quadratique de sorte que l'on obtient :

$$\kappa^k = \max(\epsilon, \frac{2 \left[ \mathbf{g}(\mathbf{x}^{k-1}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) - \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T (\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^k) \right]}{(\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^k)^T \mathbf{H}^k (\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^k)}) \quad (5.58)$$

où  $\epsilon$  est un nombre petit, mais positif destiné à conserver la convexité de l'approximation. On vérifie ensuite la règle de Luenberger. Il ne reste plus qu'à substituer la courbure corrigée dans le schéma d'approximation.

### 5.3.2 Schémas d'approximation utilisant les asymptotes mobiles

On peut exploiter le procédé d'ajustement des asymptotes mobiles imaginé par Zhang et Fleury (1994) et l'adapter à la correction de la courbure des approximations utilisant des asymptotes mobiles. Ici aussi l'ajustement se base sur une augmentation ou une diminution de la convexité de l'approximation en vue de se rapprocher de la valeur de la restriction connue au point d'itération précédent. Cet effet correspond à un déplacement homothétique de toutes les asymptotes mobiles par rapport au point d'approximation  $\mathbf{x}^k$ . Cette technique peut être également vue comme une extension du schéma heuristique présenté par Svanberg (1987) et repris aux équations (5.15) et (5.16).

Notre procédure ne se base pas sur les asymptotes mobiles de l'itération précédente comme chez Svanberg, car on suppose que l'on est capable de générer un nouvel ensemble d'asymptotes au moyen d'une estimation des dérivées secondes. Ce sont ces estimations des asymptotes mobiles que l'on désire ajuster. En employant le formalisme du schéma généralisé des asymptotes mobiles, l'homothétie des asymptotes  $\mathbf{b}_i$  s'écrit simplement :

$$\mathbf{b}_i := \mathbf{x}_i^k - s\Delta_i^k \quad \text{avec} \quad \Delta_i^k = \mathbf{x}_i^k - \mathbf{b}_i^k \quad (5.59)$$

La courbure de l'approximation est alors multipliée par le facteur  $\kappa = 1/s$ .

En remplaçant l'asymptote par sa valeur paramétrée, on obtient facilement, après développements et simplifications :

$$\tilde{\mathbf{g}}(x,s) = \mathbf{g}(x^k) + \sum_i \frac{\Delta_i^k \frac{\partial \mathbf{g}^k}{\partial x_i} (x_i - x_i^k)}{(x_i - x_i^k) + s\Delta_i^k} \quad (5.60)$$

Pour  $\mathbf{x}$  fixé, l'approximation est une fonction unidimensionnelle monotone et décroissante du paramètre "s":

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}(x,s)}{\partial s} \leq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{g}}(x,s)}{\partial s^2} \geq 0 \quad (5.61)$$

Le paramètre recherché "s\*" correspondant à l'approximation ajustée est obtenu en résolvant l'équation non linéaire qui essaie de faire coïncider au mieux l'approximation et sa valeur calculée au point de linéarisation précédent.

$$\tilde{\mathbf{g}}(x^{k-1}, s) - \mathbf{g}(x^{k-1}) = 0 \quad (5.62)$$

La solution de cette équation se détermine numériquement au moyen d'une méthode de recherche linéaire fiable telle que la méthode de bisection ou la *regula falsi*. Il faut toutefois tenir compte que MMA est une fonction convexe monotone croissante ou décroissante. L'ensemble des facteurs s admissibles pour la solution de cette équation est donné par  $0 < s_{\min} \leq s \leq s_{\max}$ . La borne  $s_{\min}$  est utilisée d'abord, pour prévenir la singularité de l'approximation, ensuite, pour empêcher la courbure de devenir trop importante et, enfin, pour s'assurer que les deux points  $\mathbf{x}^k$  et  $\mathbf{x}^{k-1}$  restent du même côté de l'asymptote. Quant à la borne  $s_{\max}$ , elle sert à limiter la diminution de la convexité. De manière ultime, elle restitue l'approximation linéaire.

L'approximation ajustée est alors obtenue en injectant les nouvelles valeurs des asymptotes mobiles dans l'approximation.

## 5.4 Validation des nouvelles procédures d'approximation

Il est maintenant temps de tester la qualité des approximations obtenues en injectant les estimations des dérivées secondes obtenues par la méthode de Quasi-Newton pour les matrices diagonales dans les schémas convexes du second ordre. La littérature fournit un grand nombre d'exemples classiques permettant d'évaluer les performances d'approximations structurales. Tout d'abord, nous présenterons deux petits problèmes (Svanberg, 1987) qui ont l'avantage d'être disponibles sous forme analytique tout en réunissant les caractéristiques de problèmes plus importants d'optimisation structurale. Les nouveaux schémas d'approximation que nous proposons seront ensuite appliqués à des problèmes habituels d'optimisation de treillis : treillis 4, 8 et 10 barres. Nous pourrions ajuster les paramètres des algorithmes sur des problèmes de petites dimensions. Une fois notre méthode bien rodée, nous pourrions la tester sur des applications plus vastes. Le dernier paragraphe de ce chapitre présentera une comparaison des différents schémas d'approximation sur quelques applications représentatives des difficultés de l'optimisation topologique.

### 5.4.1 Problème de la poutre cantilever

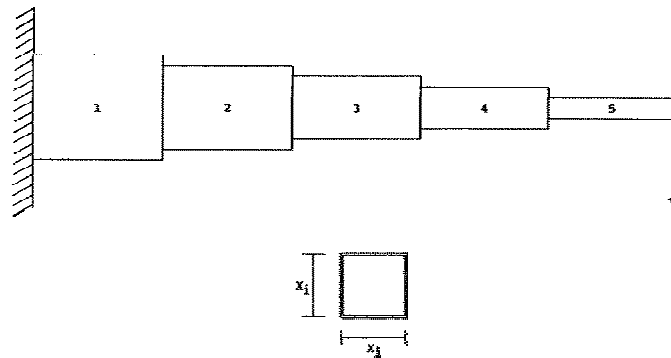


Figure 5.1 : Définition du problème de la poutre cantilever

Le problème d'optimisation représenté à la figure 5.1 a été proposé par Svanberg (1987). Il symbolise une poutre cantilever soumise à une charge concentrée en son extrémité. La poutre est divisée en cinq tronçons creux de section carrée à paroi mince et d'épaisseur donnée. Les variables de conception sont les dimensions de ces sections carrées. Le problème d'optimisation recherche la configuration de masse minimale satisfaisant à une flèche limitée sous la charge. Le problème admet l'expression analytique suivante :

$$\begin{aligned} \min_{x_i \geq 0} \quad & 0.0624 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \\ & \frac{61}{x_1^3} + \frac{37}{x_2^3} + \frac{19}{x_3^3} + \frac{7}{x_4^3} + \frac{1}{x_5^3} \leq 1 \end{aligned} \quad (5.63)$$

La difficulté du problème est liée à la trop faible convexité obtenue en développant la restriction de déplacement en fonction des variables inverses, ce qui conduit à la divergence du processus d'optimisation. Nous allons montrer que cette situation ne se produit pas lorsque l'on emploie une méthode de BFGS diagonal.

L'approximation quadratique séparable est employée successivement avec les dérivées secondes

analytiques ensuite avec leurs approximations par la méthode BFGS diagonal. L'actualisation de l'estimation du Hessien est réalisée dans l'espace de conception directe. L'estimation de la courbure initiale est équivalente à une faible courbure dans l'espace des variables inverses. Le tableau 5.1 donne pour chaque itération la masse de la structure (la fonction objectif) et le facteur de violation de contrainte. La violation de contrainte est définie par le rapport entre la valeur de la restriction et de sa borne supérieure admissible. Une violation de contrainte implique une valeur du critère supérieure à l'unité. Cette valeur donne donc un renseignement sur l'admissibilité de la conception courante. Pour le dimensionnement des structures, cette mesure correspond au facteur d'échelle.

En vue d'une comparaison, on peut adopter les critères d'arrêt proposés par Svanberg (1987). Le processus d'optimisation est arrêté dès que la violation de contrainte est inférieure à 1.001 et que la valeur de la fonction objectif est suffisamment proche de sa valeur optimale soit  $f(x^k) \leq 1.001f^*$ . L'information fournie aux deux tableaux suivants est cependant basée sur un critère plus strict. Les résultats de comparaison sont alors soulignés.

Le problème est étudié, d'une part, en fonction des variables directes, c'est-à-dire tel qu'il est écrit à l'équation (5.63), et, d'autre part, en variables inverses, c'est-à-dire en réécrivant le problème en termes des variables  $y_i=1/x_i$ . Il ne faut pas confondre cette transformation avec la définition de l'espace dans lequel on actualise les estimations du Hessien. Dans ce problème, on remet le Hessien à jour dans l'espace dans lequel on travaille.

It.	Problème écrit en variables directes			Problème réécrit en variables inverses	
	Dérivés secondes analytiques	BFGS diag.	BFGS diag. +SOC	Dérivées secondes analytiques	BFGS diag.
1	1.5600 (1.0000)	1.5600 (1.0000)	1.5600 (1.0000)	1.5600 (1.0000)	1.5600 (1.0000)
2	1.3060 (1.2400)	1.4568 (1.0051)	1.4568 (1.0051)	1.3894 (1.0024)	1.3894 (1.0024)
3	1.3710 (0.9713)	1.3016 (1.1449)	1.3033 (1.1303)	1.3450 (1.0013)	1.3561 (1.0011)
4	1.3423 (0.9967)	1.3209 (1.0536)	1.3336 (1.0152)	<u>1.3399</u> (1.0001)	1.3414 (1.0008)
5	<u>1.3400</u> (0.9999)	<u>1.3411</u> (0.9986)	<u>1.3399</u> (1.0001)	1.3400 (1.0000)	<u>1.3399</u> (1.0001)
6	-	1.3399 (1.0002)	1.3400 (1.0000)	-	1.3400 (1.0000)
7	Masse (Viol.)	1.3400 (1.0000)	-	-	-

Comme il est prévisible, l'emploi de variables inverses réduit la non-linéarité du problème et facilite la convergence de la remise à jour de la matrice Hessienne de la contrainte. Dans l'espace des variables inverses, l'approximation obtenue est plus conservative et la solution optimale s'obtient à peine plus lentement qu'avec l'utilisation des dérivées secondes exactes. En variables directes, la plus forte non-linéarité de la contrainte de déplacement introduit une violation de contrainte plus importante au cours du processus d'optimisation et augmente le nombre d'itérations nécessaires pour arriver à la solution. On peut encore noter l'appoint bénéfique de la procédure de correction des approximations du second ordre (SOC). Elle permet d'accélérer légèrement la convergence en diminuant la violation de contrainte.

Le tableau 5.2 fournit pour le même problème la synthèse des résultats obtenus avec l'approximation des asymptotes mobiles généralisées. L'utilisation d'une procédure de BFGS diagonal donne encore pleine satisfaction. Comme précédemment, la non-linéarité plus forte en variables directes ralentit la

convergence et favorise les violations de contrainte au cours des itérés intermédiaires. On note encore l'appoint favorable de la procédure SOC en variables directes.

It.	Variables directes			Variables inverses	
	Analytique	BFGS diag.	BFGS diag. +SOC	Analytique	BFGS diag.
1	1.5600 (1.0000)	1.5600 (1.0000)	1.5600 (1.0000)	1.5600 (1.0000)	1.5600 (1.0000)
2	1.3784 (0.9668)	1.4921 (1.0045)	1.4921 (1.0045)	1.3784 (0.9672)	1.3784 (0.9672)
3	1.3422 (0.9963)	1.3546 (0.9986)	1.3648 (0.9868)	1.3422 (0.9963)	1.3423 (1.0008)
4	<u>1.3400</u> (1.0000)	1.3142 (1.2643)	1.3243 (1.0940)	<u>1.3400</u> (1.0000)	<u>1.3400</u> (1.0001)
5	-	1.2115 (1.4478)	1.3354 (1.0113)	-	1.3400 (1.0000)
6		1.3351 (1.0368)	<u>1.3395</u> (1.0023)		-
7		<u>1.3401</u> (0.9998)	1.3400 (1.0000)		
8	Masse (Viol.)	1.3400 (1.0000)	-		

#### 5.4.2 Problème du treillis 2 barres

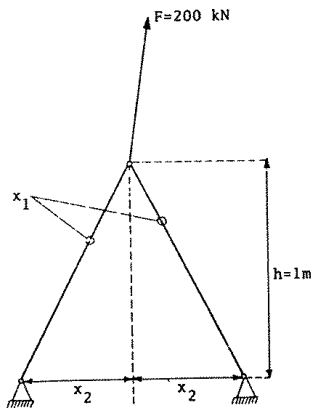


Figure 5.2 : Définition du problème du treillis 2 barres

Le problème du treillis 2 barres de la figure 5.2 a également été introduit par Svanberg (1987). Il est intéressant, car il réunit une variable de dimensionnement  $x_1$ , la section droite en  $\text{cm}^2$  des 2 barres et une variable de forme  $x_2$ , demi-distance entre les noeuds de fondation. Le but de ce problème d'optimisation est de minimiser la masse avec des contraintes sur les tensions lors d'un cas de charge unique  $F_y = 8 \cdot F_x$ .



En se référant à Svanberg (1987), ce problème peut être écrit sous forme analytique.

$$\begin{aligned}
 \min_{x_1, x_2} \quad & x_1 \sqrt{1+x_2^2} \\
 \text{avec} \quad & 0.124 \sqrt{1+x_2^2} \left( \frac{8}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} \right) \leq 1 \\
 & 0.124 \sqrt{1+x_2^2} \left( \frac{8}{x_1} - \frac{1}{x_1 x_2} \right) \leq 1 \\
 & 0.2 \leq x_1 \leq 4.0 \quad \text{et} \quad 0.1 \leq x_2 \leq 1.6
 \end{aligned} \tag{5.64}$$

Le tableau 5.3 reprend l'évolution de la masse et du facteur de violation de contrainte au cours des itérations. Les critères d'arrêt adoptés sont identiques à ceux qui sont développés à l'exemple précédent. Toutes les optimisations présentées ont été réalisées dans l'espace des variables directes. Les résultats (A) et (B) sont obtenus en choisissant l'option standard pour la courbure initiale c'est-à-dire celle qui correspond au choix d'un développement en variables inverses. L'expérience (B) utilise, en plus, la procédure de correction du second ordre (SOC). On peut remarquer que la réduction du nombre d'itérations et l'accroissement de conservativité de l'approximation sont faibles. Le test (C) est le fruit d'un choix plus heureux de la courbure initiale :  $B_{ii}^0 = \text{diag}\{ |g(x^0)| / (x_i^0)^2 \}$ . Cette courbure initiale, plus conservatrice, permet d'atteindre l'optimum en 4 itérations seulement. Tous les résultats de cette comparaison utilisent la technique des *move-limits* suggérée par Svanberg, (1987). L'approximation CONLIN ne converge pas. Les résultats montrent que la sélection des asymptotes mobiles à partir des courbures estimées par la méthode BFGS pour matrices diagonales est aussi performante que la méthode MMA (Svanberg, 1987) et que l'approximation MMA du second ordre dans laquelle on utilise les dérivées secondes évaluées analytiquement. Par contre, la sélection des asymptotes est complètement automatisée et rationalisée avec l'utilisation de la méthode BFGS diagonal. L'adjonction de la correction du second ordre (SOC) est plus efficace avec des approximations MMA qu'avec des approximations quadratiques séparables. Les expériences numériques nous ont également permis de constater qu'une procédure de Levenberg-Marquardt n'apportait rien et, qu'à contrario, elle augmentait le nombre d'itérations.

It.	Analytique	BFGS diag.		
		(A)	(B)	(C)
1	1.68 (0.92)	1.68 (0.92)	1.68 (0.92)	1.68 (0.92)
2	1.50 (1.01)	1.43 (1.11)	1.43 (1.11)	1.52 (1.00)
3	1.51 (0.99)	1.47 (1.03)	1.49 (1.10)	1.51 (1.00)
4	1.51 (1.00)	1.51 (1.00)	1.51 (0.99)	1.51 (1.00)
5	1.51 (1.00)	1.51 (1.00)	1.51 (1.00)	-
6	-	1.51 (1.00)	1.51 (1.00)	-
7	Masse (Viol.)	-	-	-

Tableau 5.4 : Treillis 2 barres : synthèse des résultats avec l'approximation MMA généralisée

It.	CONLIN	MMA (Svanberg 1987)	MMA généralisé analytique	MMA généralisé avec BFGS diag.	
				sans SOC	avec SOC
1	1.68 (0.92)	1.68 (0.92)	1.68 (0.92)	1.68 (0.92)	1.68 (0.92)
2	1.43 (1.11)	1.43 (1.10)	1.43 (1.11)	1.43 (1.11)	1.43 (1.11)
3	1.49 (1.04)	1.37 (1.13)	1.50 (1.00)	1.44 (1.05)	1.51 (1.00)
4	1.43 (1.11)	1.44 (1.10)	1.51 (1.00)	1.51 (1.00)	1.51 (1.00)
5	1.49 (1.04)	1.47 (1.03)	-	1.51 (1.00)	-
6	1.43 (1.11)	1.51 (1.00)	-	-	-
7	....	-	-	-	Masse (Viol.)

### 5.4.3 Problème du treillis 10 barres

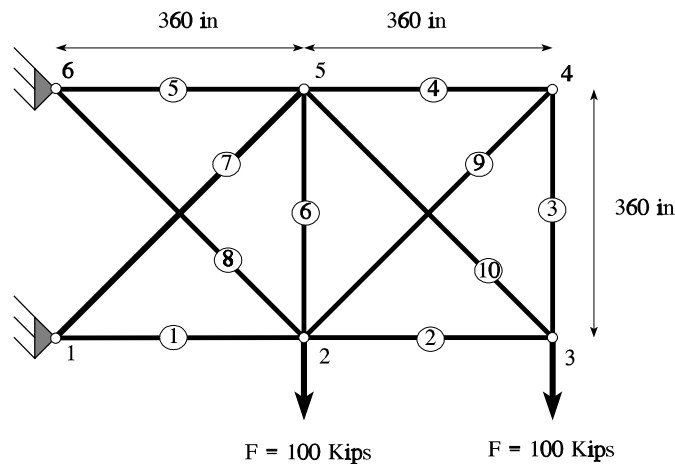


Figure 5.3 : Définition du problème du treillis 10 barres

La confrontation de l'approximation proposée avec l'optimisation de masse du treillis 10 barres est inévitable. Les données du problème sont celles qui sont exposées par Fleury et Braibant (1986). Le "benchmark" le plus célèbre de la littérature fait intervenir quatre contraintes de déplacement sur les noeuds libres ainsi que dix restrictions de tensions dans les barres. On connaît deux optima à ce problème. Le premier optimum, qui a une masse de 5076.67 kg, se caractérise par l'activation des contraintes de déplacement sur les noeuds 4 et 5. Dans le second optimum qui a une masse de 5060.85 kg, d'une part, l'élément central 6 voit simultanément l'activation de la restriction de tension et de la contrainte de borne  $x_6 = \underline{x}_6$  et, d'autre part, la saturation d'une seule contrainte de déplacement.

Au tableau 5.5, la combinaison de l'approximation MMA avec l'estimation des dérivées secondes par la méthode BFGS pour matrices diagonales, en sigle DQNMMA, est confrontée aux meilleures performances de CONLIN et de l'approximation MMA du second ordre. Le tableau permet de

comparer différents choix de courbure initiale. La courbure initiale introduite en (A) restitue la courbure initiale proposée dans la méthode classique des asymptotes mobiles par Svanberg (1987) et donnée à la formule (5.49). Le choix (B) débute avec une courbure initiale identique à celle de l'approximation des variables inverses et qui est donnée par (5.48). Quant aux variantes (C) et (D), elles procèdent par une remise à jour de l'approximation des matrices Hessiennes dans l'espace des variables inverses. Les estimations initiales de la courbure sont respectivement une matrice unité  $\text{diag}\{1.\}$  pour (C) et une matrice de très faible valeur  $\text{diag}\{10^{-6}\}$  pour (D).

Tableau 5.5 : Treillis 10 barres : synthèse des résultats pour la méthode de MMA du second ordre avec BFGS diagonal.						
It.	CONLIN	MMA second ordre analytique	MMA second ordre avec BFGS diagonal			
			(A)	(B)	(C)	(D)
1	8392.9 (0.9849)	8392.9 (.9849)	8392.9 (0.9849)	8392.9 (0.9849)	8392.9 (0.9849)	8392.9 (0.9849)
2	6135.9 (0.9778)	5815.4 (1.0214)	5735.2 (1.0419)	6170.0 (0.9800)	6391.2 (0.9851)	6166.8 (0.9806)
3	5860.3 (0.9888)	5775.7 (0.9923)	5535.4 (1.0796)	5723.7 (1.0009)	6177.4 (0.9913)	5881.8 (0.9873)
4	5738.7 (0.9906)	5658.4 (0.9881)	4965.7 (1.1195)	5466.0 (1.1733)	5847.8 (0.9854)	5743.7 (0.9906)
5	5625.5 (0.9899)	5512.5 (0.9861)	5340.5 (1.0033)	5126.0 (1.1107)	5459.1 (0.9883)	5630.8 (0.9899)
6	5503.1 (0.9888)	5339.6 (0.9826)	5280.9 (0.9998)	5626.2 (1.0090)	4883.2 (1.1633)	5508.8 (0.9889)
7	5366.5 (0.9874)	5138.9 (0.9913)	5240.1 (0.9999)	5238.8 (1.0247)	5056.5 (1.0058)	5373.0 (0.9875)
8	5210.0 (0.9905)	5077.8 (0.9999)	5076.7 (1.0000)	5169.4 (1.0212)	5038.0 (1.0079)	5215.4 (0.9899)
9	5086.8 (0.9961)	5076.7 (1.0000)	5076.7 (1.0000)	5169.6 (1.0059)	5056.3 (1.0013)	5077.7 (0.9999)
10	5077.8 (0.9999)	5076.7 (1.0000)	5076.7 (1.0000)	5094.8 (1.0002)	5061.0 (0.9999)	5076.7 (1.0000)
11	5076.7 (1.0000)	-	-	5062.5 (0.9999)	5060.87 (1.0000)	5076.7 (1.0000)
12	5076.7 (1.0000)			5061.2 (1.0000)	5060.85 (1.0000)	-
13	-			5060.9 (1.0000)	-	
14	Masse (Viol. Contr.)			5060.81 (1.0000)		

On remarque que la convergence vers l'optimum 5060.8 est toujours plus lente, ce qui peut s'expliquer par l'activation simultanée de la contrainte de tension sur la barre 6 et de la contrainte de borne de la section de la même barre. On note également que l'activation de la contrainte de déplacement sur le noeud 5, qui survient toujours entre l'itération 4 et l'itération 6, entraîne momentanément une violation

de contrainte plus importante. Enfin, on voit que l'option de travailler en variables inverses est très profitable pour engendrer des approximations conservatives.

Lorsque l'on atteint l'optimum de 5076. lbs, la nouvelle procédure reproduit au mieux une convergence aussi rapide que la méthode MMA du second ordre. Au plus mal, elle est aussi performante que CONLIN qui est une méthode du premier ordre et qui marche bien pour la résolution de ce problème. On peut encore voir que la remise à jour dans l'espace des variables directes conduit à des approximations moins conservatives que ne le fait la remise à jour dans l'espace des variables inverses. Ce fait explique que l'actualisation en variables donne lieu simultanément d'une part, à la l'obtention de l'optimum, la plus rapide (expérience A) quand tout se passe bien, et d'autre part, au nombre d'itérations, le plus important (expérience B) quand les violations de contrainte sont trop importantes. L'actualisation en variables inverses est plus stable et nous la conseillons, du moins pour les problèmes de type "dimensionnement" optimal, parce qu'elle produit des approximations plus conservatives c'est-à-dire moins sujettes à des violations de contrainte.

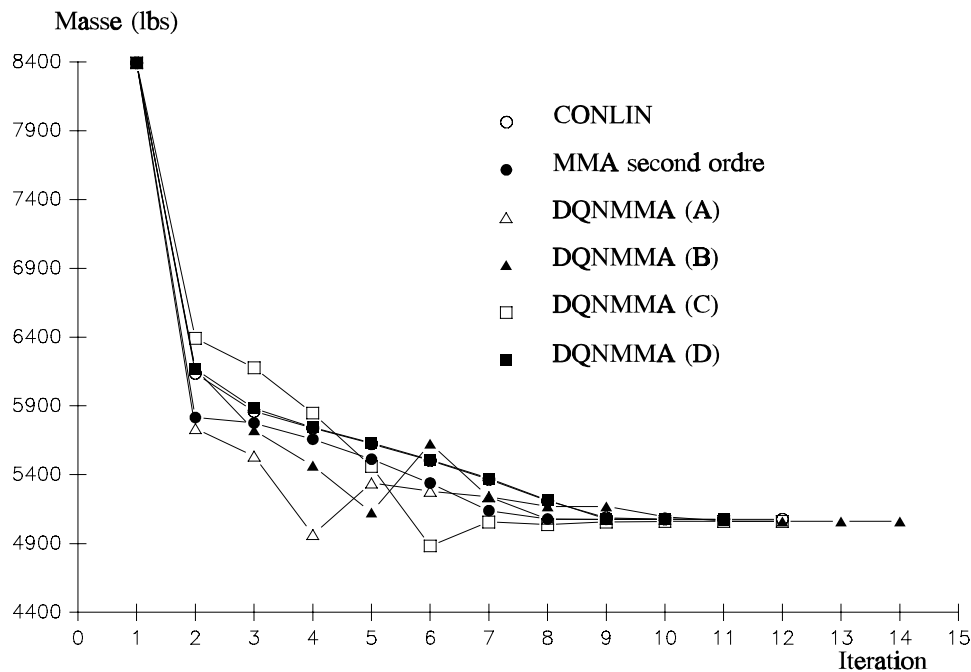


Figure 5.4 : Histoire de la masse pour le treillis 10 barres avec différentes approximations

#### 5.4.4 Problème du treillis 8 barres

Le treillis 8 barres dont la représentation est donnée à la figure 5.5 est devenu un des tests les plus connus pour sa sévérité. Les données complètes concernant la géométrie et les conditions de chargement sont données par Svanberg (1987). Ce problème présente la caractéristique d'être fortement hyperstatique, ce qui expliquerait les propriétés hautement non convexes du problème d'optimisation. On désire y minimiser la masse de la structure tout en maintenant les tensions de traction ou de compression dans chaque barre en-dessous de 100 N/cm<sup>2</sup> sous l'action de la charge placée au noeud libre, situé au sommet.

Ce problème nous donne l'opportunité d'appliquer la technique de correction du second ordre. La méthode des asymptotes mobiles du second ordre est utilisée avec et sans ce procédé afin de démontrer la qualité et les performances de ce type d'approximation. La procédure d'approximation proposée permet de retrouver les mêmes performances que les meilleurs résultats obtenus par Svanberg (1987), mais d'une manière complètement automatique. Le point de conception initial est identique à celui qui est donné par Svanberg (1987), soit  $x_1^0 = 400 \text{ N/cm}^2$  et  $\underline{x}_i = 100 \text{ N/cm}^2$ . Comme l'a signalé Fleury (1989b), il existe plusieurs optima de même masse. Dans nos expériences numériques, nous avons toujours obtenu une solution finale de masse identique aux résultats de Svanberg (1987) et de Fleury (1989b), mais la solution optimale correspondait souvent à une configuration différente :  $x_1=859.6$ ,  $x_2=743.5$ ,  $x_3=241.1$ ,  $x_4=537.4$ ,  $x_5=100.0$ ,  $x_6=100.0$ ,  $x_7=100.0$ ,  $x_8=100.0$  (mm<sup>2</sup>).

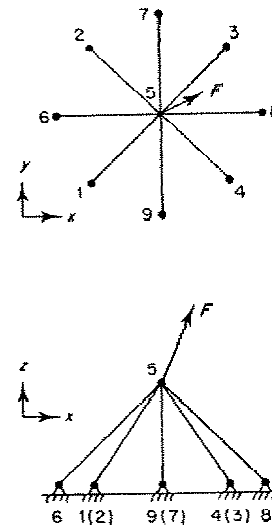


Figure 5.5 : Géométrie du treillis 8 barres

Tableau 5.6 : Treillis 8 barres : synthèse des résultats pour la méthode de MMA du second ordre avec BFGS diagonal					
It.	CONLIN	MMA (meilleur) Svanberg (1987)	MMA généralisé analytique	MMA généralisé BFGS diag.	MMA généralisé BFGS diag. + SOC
1	13.05	13.05	13.05	13.05	13.05
2	12.05	12.10	10.84	12.27	12.37
3	11.66	11.67	11.51	11.67	11.65
4	11.64	11.65	11.58	11.64	11.64
5	11.63	11.61	11.55	11.42	11.25
6	11.61	11.52	11.51	11.30	11.23
7	11.60	11.42	11.47	11.26	11.23
8	11.59	11.28	11.44	11.23	-
9	11.57	11.23	11.40	11.23	
10	11.55	-	11.37	-	
11	11.54		11.34		
...	...		...		
17	11.46		11.23		
...	...		-		
50	11.22				

Le tableau 5.6 résume l'histoire de la masse du treillis avec les différentes approximations. L'approximation CONLIN est trop convexe et elle ne converge que très lentement. La méthode MMA, du second ordre, est relativement lente aussi. Le meilleur résultat de Svanberg (1987) est obtenu en

prenant une approximation aussi peu conservatrice que possible. L'optimum est obtenu aussi rapidement que dans le résultat de Svanberg (1987), mais de manière tout à fait automatique si on emploie la procédure de BFGS diagonal. Le nombre d'itérations est encore diminué si on associe une correction de lissage. On peut analyser le succès de la procédure SOC par la nature fortement non convexe du problème, car on constate que la procédure de lissage a pour effet de diminuer la convexité de toutes les approximations. Cependant, on ne peut pas généraliser l'emploi de la correction SOC, car elle peut parfois déstabiliser la convergence comme dans le treillis 10 barres.

#### 5.4.5 Problème du treillis 4 barres

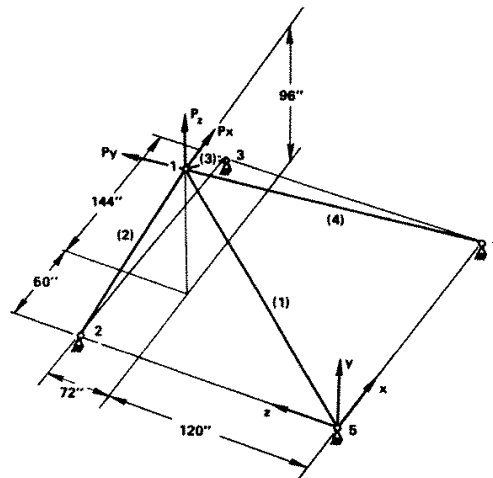


Figure 5.6 : Treillis 4 barres, définition du problème

Noeuds	X (in)	Y (in)	Z(in)
1	0.	0.	0.
2	0.	192.	0.
3	204.	192.	0.
4	204.	0.	0.
5	60.	120.	96.

Eléments	Noeuds	
1	1	5
2	2	5
3	3	5
4	4	5

L'optimisation du treillis 4 barres a été abordée par Venkaya (1971) et Fleury (1976). Il s'agit d'un treillis spatial très simple, composé de quatre barres, dont la géométrie et les dimensions sont données à la figure 5.6. Dans le passé, cet exemple a été employé comme "cas test" pour une grande variété de mises en charge et de contraintes. Nous nous limitons cependant à une mise en charge unique :  $P_x = 10000$ ,  $P_y = 20000$ ,  $P_z = -60000$  en lbs. Le déplacement vertical du noeud situé au sommet est limité à 0.3 inches tandis que la tension maximale admissible dans chaque barre est 25000 psi. La section minimale est de 0.1 in<sup>2</sup>. On adopte des sections initiales 2.4165 in<sup>2</sup>, ce qui constitue un point de conception admissible. Le matériau utilisé est de l'aluminium de module de Young  $E=10^7$  psi et

de masse volumique  $\rho = 0.11\text{lb/in}^3$ . Les données de géométrie et de topologie du problème sont rappelées aux tableaux 5.7 et 5.8.

Une difficulté du problème provient du fait que l'optimum active simultanément deux contraintes (le déplacement vertical du noeud 5 et la tension dans la barre 3) ainsi qu'une contrainte de borne sur la section de la barre 1. Quelles que soient les approximations employées, l'optimum que nous avons obtenu se caractérise par une masse de 120.7 lbs et les sections suivantes :

$$x_1 = 0.100 \quad x_2 = 3.870 \quad x_3 = 0.746 \quad x_4 = 2.524 \text{ (in}^2\text{)}.$$

Tableau 5.9 : Treillis 4 barres - synthèse des résultats					
It.	CONLIN	MMA généralisé avec BFGS diagonal			
		BFGS en var. directes		BFGS en var. inverses	
			avec SOC		avec SOC
1	168.47 (1.0000)	168.47 (1.0000)	168.47 (1.0000)	168.47 (1.0000)	168.47 (1.0000)
2	143.69 (0.9996)	143.69 (0.9996)	143.69 (0.9996)	143.69 (0.9996)	143.69 (0.9996)
3	143.55 (0.9994)	143.47 (0.9989)	143.44 (0.9986)	143.54 (0.9941)	143.54 (0.9941)
4	143.37 (0.9993)	137.49 (2.0602)	136.63 (3.7826)	143.37 (0.9993)	142.56 (0.9898)
5	143.17 (0.9992)	108.07 (1.3621)	87.17 (2.2313)	143.17 (0.9992)	137.93 (0.9265)
6	142.95 (0.9991)	124.37 (0.9742)	119.22 (1.0858)	142.95 (0.9991)	120.21 (1.0870)
7	142.69 (0.9990)	120.86 (0.9997)	119.91 (1.0207)	142.67 (0.9989)	120.57 (1.0024)
8	142.39 (0.9988)	120.73 (1.0000)	120.68 (1.0006)	141.21 (0.9911)	120.73 (1.0000)
9	142.04 (0.9986)	-	120.73 (1.0000)	127.10 (1.0481)	-
10	141.61 (0.9983)		-	120.55 (1.0022)	
11	141.08 (0.9978)			120.73 (1.0000)	
12	140.42 (0.9971)			-	
13	139.54 (0.9961)				
14	138.30 (0.9941)				
15	136.36 (0.9898)				
16	132.68 (0.9754)				
17	123.17 (1.0114)				
18	120.73 (0.9999)				
19	120.73 (1.0000)	Masse (Viol.)			

Le tableau 5.9 résume les différents processus d'optimisation obtenus avec l'approximation CONLIN et quatre variantes de MMA généralisé utilisant différentes remises à jour de type Quasi-Newton diagonal. Pour la plupart des processus d'optimisation avec MMA généralisé, on observe en premier lieu une diminution rapide de la fonction objectif au cours de laquelle seule la contrainte de déplacement est active. Lorsqu'on arrive à une masse approximative de 140 lbs, les contraintes de tension dans les barres 1 et 3 s'activent soudainement, ce qui entraîne souvent une forte violation de

contrainte. La diminution de la fonction objectif est alors éventuellement ralentie, mais il ne s'agit nullement de la fin du processus d'optimisation, car après cette phase de progression lente, la réduction de la masse reprend jusqu'à l'optimum réel de 120.73 lbs. Au cours de cette dernière phase, la contrainte de tension dans la barre 1 devient inactive tandis que sa section tombe à la section minimale admissible. Par contre, on constate l'activation de deux contraintes : la contrainte de déplacement et la restriction de tension dans la barre 3. Pour CONLIN, le processus d'optimisation génère toujours des conceptions admissibles. Le schéma d'approximation est cependant trop peu flexible et engendre, dans cet exemple, des approximations trop conservatives. La masse chute d'abord rapidement jusqu'à une valeur d'environ 143 lbs. La diminution de la masse est alors fortement ralentie et le processus d'optimisation piétine. Après une lente diminution de la fonction objectif, la perte de masse recommence jusqu'à l'optimum. La contrainte de borne et la contrainte de tension ne s'activent, alors, que tout à la fin du processus de convergence.

L'exemple montre également que le procédé SOC peut être soit favorable, soit défavorable. Dans cet exemple, ce procédé a, dans tous les cas, tendance à ouvrir légèrement la courbure de l'approximation, ce qui permet de réduire le palier dans la courbe de convergence quand on travaille avec une remise à jour en variables inverses. A contrario, pour la remise à jour en variables directes, qui génère généralement des approximations moins conservatives, la correction SOC amplifie l'apparition des contraintes de tension et par conséquent, la violation importante de contrainte qui en résulte.

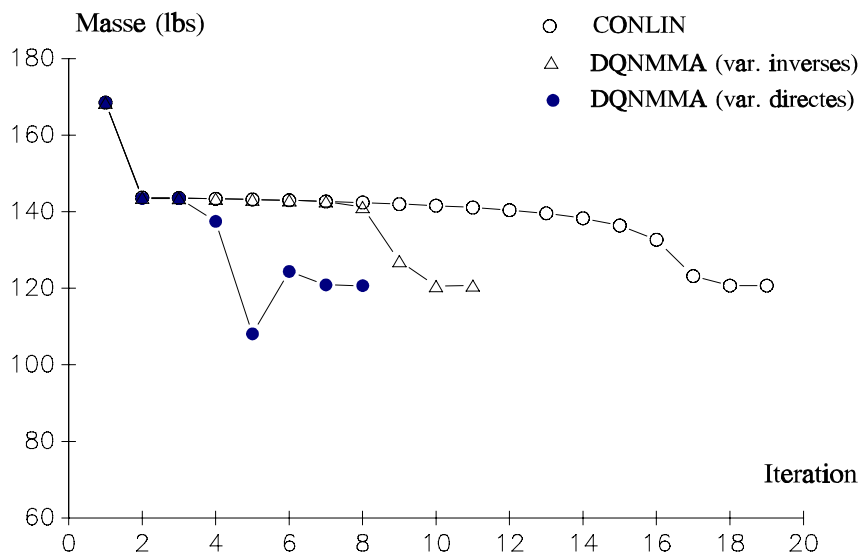


Figure 5.7 : Courbes de convergence pour le problème du treillis 4 barres



## **5.5 Résolution numérique du problème d'optimisation**

### **5.5.1 Les caractéristiques du problème d'optimisation topologique**

En apparence, la résolution numérique du problème fondamental de la topologie peut paraître simple puisqu'elle n'implique qu'une fonction objectif et une seule contrainte. Le nombre de restrictions augmente quelque peu si on veut inclure le contrôle du périmètre de la solution ou si l'on considère plusieurs cas de charge distincts puisqu'il n'excède jamais une dizaine de restrictions. Le problème de conception dynamique est généralement de nature un peu plus compliquée que le problème de conception statique, mais les croisements de fréquences requièrent la prise en compte simultanée de plusieurs fréquences propres lors de l'optimisation. Quoiqu'il en soit, le nombre de restrictions ne constitue pas une difficulté majeure lorsque l'on adopte une procédure faisant appel à la programmation mathématique. Le nombre de restrictions qui apparaissent en optimisation de forme ou en dimensionnement est bien plus important.

L'ordre de grandeur du nombre de variables de conception mis en jeu pour représenter une distribution de matière est, par contre, largement supérieur à tout ce qui est habituellement rencontré en dimensionnement et en forme. Il est courant de modéliser la densité de matière à l'aide de 1.000 à 10.000 variables de microstructure. Si en théorie, l'introduction du contrôle du périmètre de la solution permet d'utiliser une formulation purement discrète (formulation 0-1), on ne dispose pas encore d'algorithme de résolution capable de gérer un aussi grand nombre de variables entières. Les formulations, que l'on considère actuellement, sont basées sur le traitement de variables continues. Mais, même pour ce type de variables, la taille du problème de topologie est exceptionnelle ou inaccessible. Peu d'algorithmes de résolution ont été éprouvés dans ces conditions. Rares sont ceux qui ont été conçus, construits et programmés pour de très grands problèmes.

Nous avons pu constater que l'obtention d'une distribution optimale demande un assez grand nombre d'itérations. La décroissance de la fonction objectif est d'abord très rapide au cours des premières itérations. Hélas, ensuite, la fonction objectif reste quasi stationnaire alors que la distribution des paramètres de microstructure se poursuit lentement durant la plus grande partie du processus d'optimisation. Cette longue phase finale de convergence des variables de conception est importante, car elle est nécessaire pour définir les contours précis de la structure.

Les dérivées premières des restrictions du problème de conception fondamental possèdent des caractéristiques très intéressantes. Les dérivées du volume par rapport aux variables de microstructure sont toujours positives de sorte qu'un développement linéaire constitue une bonne approximation. Les sensibilités de la compliance sont, par contre, toujours négatives de sorte que les développements en fonction des variables inverses sont naturellement convexes.

Lorsqu'il n'y a qu'une seule contrainte, les critères d'optimalité permettent de résoudre facilement un tel problème d'optimisation. Mais, si on veut enrichir l'énoncé du problème de conception, les critères d'optimalité deviennent difficiles à généraliser. Lorsque l'on veut une procédure de résolution suffisamment flexible pour pouvoir s'adapter à une large variété de problèmes, il faut adapter une procédure plus générale basée sur les notions d'approximation séparable, de sous-problème convexe et de résolution par une méthode de programmation mathématique.

## 5.5.2 Deux approches pour résoudre le problème d'optimisation

### 5.5.2.1 Les critères d'optimalité

Lors des premières résolutions du problème de la topologie, Bendsøe et Kikuchi (1988), Suzuki et Kikuchi (1991) ont employé une technique de **critère d'optimalité**. Le critère d'optimalité est un algorithme heuristique basé sur les conditions d'optimalité du chapitre 3. Les conditions de stationnarité peuvent être interprétées comme une sorte de densité d'énergie constante en chaque point de densité intermédiaire, ce qui rappelle le critère du *fully stressed design* en optimisation des structures en plasticité. Cette condition suggère un critère de remise à jour de type point fixe dont les paramètres sont ajustés expérimentalement pour le problème particulier à résoudre.

Le nombre élevé des variables de conception peut être facilement surmonté pour un problème où il n'y a qu'une seule contrainte. Bendsøe et Kikuchi (1988), Suzuki et Kikuchi (1991) ont mis au point un critère d'optimalité pour résoudre efficacement le problème du minimum de la compliance avec une contrainte de volume, tandis que Díaz et Kikuchi (1989) ont établi un critère semblable pour le problème d'optimisation topologique de structures vibrantes.

Les critères d'optimalité possèdent cependant des limitations importantes lorsque le problème possède plusieurs restrictions ou plusieurs fonctions objectifs à cause de la sélection des restrictions actives dont l'ensemble doit être deviné a priori. Le problème des cas de charges multiples devient alors épineux. Lorsqu'on considère plusieurs cas de charge, Fukushima, Suzuki et Kikuchi (1991), Bendsøe et Díaz (1992) ensuite, contournent le problème en rassemblant les compliances des différents cas de charge sous forme d'une somme pondérée qui constitue la fonction objectif unique du problème. Les auteurs ne précisent cependant pas de quelle manière on peut déterminer ces facteurs de pondération. Pour tenir compte de plusieurs charges critiques d'instabilité simultanément, Neves, Guedes et Rodrigues (1993) ont utilisé la formulation "min-max", mais ils doivent prendre en compte la contrainte de volume par une procédure de pénalité.

On connaît également des situations dans lesquelles le critère d'optimalité ne converge pas. Dans le problème de la minimisation de la réponse fréquentielle, Ma, Kikuchi et Fukushima (1993) signalent que le changement de signe des dérivées premières de la réponse fréquentielle entraîne des ruptures du processus de convergence, auxquelles ces auteurs remédient par une modification heuristique du critère d'optimalité.

Une autre difficulté inhérente aux critères d'optimalité réside dans l'obligation de dériver un nouveau critère pour chaque type de problème. On ne peut donc pas aborder la résolution du problème d'une façon relativement détachée des particularités de chaque énoncé, de sorte qu'à notre avis les critères d'optimalité ne s'adaptent pas à la structure ouverte et flexible d'un programme d'optimisation tel qu'on le conçoit aujourd'hui.

Même si ce type d'actualisation fournit des suites de conceptions convergentes, un grand nombre d'itérations est parfois nécessaire pour atteindre la solution. L'examen des résultats de Suzuki et Kikuchi (1991) montre qu'il faut au moins 50 à 100 itérations pour arriver à la stationnarité. Pour le problème de conception de microstructure, Sigmund (1994), qui utilise un critère semblable, doit faire plus de 100 itérations pour obtenir la solution.

### 5.5.2.2 La méthode de programmation convexe séquentielle

Pour perfectionner la résolution du problème de distribution de matière, il faut adopter une formulation combinant la notion d'approximation structurale, de sous-problème et d'algorithme de programmation mathématique. Cette stratégie est souvent regroupée sous le nom de **programmation séquentielle convexe**. Comme Fleury (1978) l'a montré, l'approche duale appliquée à la résolution des sous-problèmes approchés est une généralisation rigoureuse de la technique des critères d'optimalité. Il ne s'agit donc pas d'un rejet des critères d'optimalité utilisés précédemment en topologie.

L'application des approximations convexes et de la résolution du sous-problème d'optimisation par un algorithme de programmation mathématique a fait l'objet de plusieurs études simultanées et indépendantes. A notre connaissance, on doit cependant attribuer à Mlejnek et ses collaborateurs (Mlejnek, 1991, Mlejnek *et al.*, 1992, 1993b) le mérite des premières résolutions du problème de distribution de matière basée sur ce concept. Mais l'idée est présente presque simultanément chez Olhoff, Krog et Thomsen (1993) qui emploient la méthode MMA pour résoudre le problème de distribution optimale de deux matériaux. Pour notre part, nous avons participé à ce mouvement et nous pouvons maintenant revendiquer une participation active au développement de l'application de la programmation convexe séquentielle aux problèmes de topologie (Duysinx *et al.*, 1995).

L'attrait de la programmation séquentielle convexe est multiple.

- La résolution duale permet de résoudre des problèmes d'optimisation avec un très grand nombre de variables de conception. De plus, la résolution duale permet de sélectionner automatiquement les contraintes actives. La maximisation Lagrangienne s'accommode d'un nombre indéterminé de contraintes.
- On peut aborder avec une procédure unique une large variété de problèmes de conception, indépendamment de leur formulation, qu'il y ait une ou plusieurs fonctions objectifs ou plusieurs restrictions. Les problèmes avec plusieurs cas de charge, plusieurs fréquences propres, une contrainte de périmètre... sont donc immédiatement accessibles. Dans l'avenir, on pourra également étudier des distributions de matière sur la base d'autres critères que la minimisation de la compliance, la maximisation de la fréquence propre fondamentale... En effet, la notion d'approximation structurale est indépendante de la nature des restrictions et de l'énoncé du problème, et la résolution duale peut fonctionner de manière fiable, telle une boîte noire, pour une grande variété de problèmes.
- On peut développer et employer de nouvelles approximations convexes de haute qualité utilisant les informations de dérivées secondes en vue d'améliorer la vitesse de convergence du processus d'optimisation.

En conclusion, il nous semble que l'approche de la programmation séquentielle convexe est incontournable pour les développements futurs de l'optimisation topologique : d'abord, pour qu'on puisse continuer à développer la méthode et son champ d'application, ensuite, pour qu'elle devienne une méthode de conception réellement industrielle.

### 5.5.3 Résolution des sous-problèmes d'optimisation par méthode duale

#### 5.5.3.1 De l'avantage de travailler dans l'espace dual

La maximisation Lagrangienne s'impose pour résoudre les sous-problèmes d'optimisation, car le problème d'optimisation dans l'espace des variables primales est transformé en un problème de maximisation quasi non contrainte dans l'espace des multiplicateurs. L'avantage est double. D'abord, on remplace le problème d'optimisation avec contraintes par un problème de maximisation quasi non contrainte. Ensuite, on réduit très fortement la dimension du problème car la dimension de l'espace dual est donnée par le nombre de contraintes actives. En réalité, le grand nombre de variables de conception n'est pas un obstacle dans le problème dual si les relations entre les variables primales et les variables duales sont simples à calculer. C'est généralement le cas lorsqu'on emploie des approximations convexes séparables, car on peut évaluer les relations entre les variables primales et duales de manière découplée pour chaque variable primale. Dans certains cas, on peut même établir une expression analytique et explicite de la relation entre les variables primales et duales.

#### 5.5.3.2 L'optimiseur CONLIN V.2

En pratique, nous travaillons avec le programme d'optimisation CONLIN V.2. CONLIN s'est montré très puissant et fiable au cours des applications que nous avons faites en topologie. Plusieurs fois, nous avons résolu des problèmes de conception comportant jusqu'à 10.000 variables de conception. Malgré ce grand nombre de variables, le *solver* de CONLIN a toujours donné satisfaction pour un coût de calcul très limité. Selon les applications et la difficulté du problème, le temps de calcul passé dans l'optimiseur se situe entre 1 et 5 % du temps de calcul de l'analyse de sensibilité.

L'optimiseur admet six types de restrictions : le développement mixte ou "CONLIN", le développement en variables inverses, l'approximation linéaire, l'approximation quadratique séparable, l'approximation généralisée de la méthode des asymptotes mobiles et le développement en série d'une puissance des variables de conception.

Mathématiquement, le sous-problème est résolu sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \min_{x_i, \delta} \quad & \tilde{g}_0(x) + pds \delta^2 \\
 \text{avec} \quad & \cdot \tilde{g}_j(x) \leq \bar{g}_j + (\delta - 1) \Delta \bar{g}_j \quad j = 1, \dots, m \\
 & \cdot x_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad i = 1, \dots, n \\
 & \cdot 1 \leq \delta \leq 2
 \end{aligned} \tag{5.65}$$

Le vecteur des variables  $x_i$  est le vecteur des variables de conception. La variable  $\delta$  est une variable de conception additionnelle appelée "variable de relaxation". Elle permet de transgresser la borne sur la contrainte au prix d'une pénalisation quadratique dans la fonction objectif avec un facteur de pondération *pds* sélectionné par l'utilisateur. Le domaine de conception initialement vide lorsque la variable  $\delta$  vaut 1, peut être élargi pour  $\delta > 1$  en relaxant les bornes sur les contraintes. Le dépassement de la valeur de la borne  $\bar{g}$  est possible jusqu'à la valeur tolérable admissible  $\Delta \bar{g}$ .

La résolution proprement dite du problème d'optimisation peut être effectuée avec deux stratégies. La première stratégie utilise la linéarisation convexe et une résolution duale pure du premier ou du second ordre. La seconde stratégie, qui est plus générale, procède par une formulation primale-duale.

La première stratégie est basée sur une résolution duale pure du sous-problème convexe. Seules les approximations de type CONLIN ou éventuellement linéaires et en variables inverses sont acceptées. La résolution duale est effectuée en résolvant une suite de sous-problèmes duaux quadratiques. La résolution de chacun de ces sous-problèmes est abordée par un algorithme du premier ou du second ordre. Ce type de résolution est très efficace et il peut supporter un très grand nombre de variables de conception. Malheureusement, l'utilisateur n'exerce pas de contrôle sur la zone de confiance de la solution via l'algorithme de résolution. Ce contrôle passe par la sélection de *move limits* adéquates.

La seconde stratégie, qui est plus générale, est basée sur l'approche primale-duale. Le problème primal, qui peut être formé avec n'importe quelle combinaison d'approximations séparables, est résolu par une suite de sous-problèmes quadratiques. Chacun de ces sous-problèmes quadratiques est séparable parce que toutes les approximations le sont aussi. Quand on regarde le problème dual associé à ce sous-problème, il apparaît qu'il est de forme similaire à ceux qu'on résout dans la première stratégie et il peut être résolu par les mêmes méthodes du premier ou du second ordre. Le contrôle de la région de confiance peut être effectué par un terme convexe de type *proximal*. On ajoute à la fonction objectif une pénalisation quadratique de la distance par rapport au point de linéarisation courant. Bien que la stratégie primale-duale puisse être moins robuste que la stratégie duale, nous avons toujours observé un très bon comportement pour la résolution des problèmes avec un très grand nombre de variables.

#### 5.5.4 Des approximations structurales liées à la nature des restrictions

En optimisation structurale, la notion d'approximation est une composante essentielle de la méthode de programmation convexe séquentielle. Pour utiliser de manière performante les méthodes duales, la séparabilité est très importante afin de pouvoir résoudre des problèmes avec un très grand nombre de variables de conception. L'approximation doit être également convexe pour que le problème d'optimisation soit bien conditionné. Enfin, les approximations doivent être de haute qualité pour augmenter la stabilité et la vitesse de convergence du processus d'optimisation.

Pour une efficacité maximale, il faut choisir l'approximation structurale en fonction des propriétés particulières des réponses structurales mises en jeu. Compte tenu du coût de résolution, la plupart des restrictions du problème de topologie sont des caractéristiques globales de la structure ou des caractéristiques géométriques.

##### 5.5.4.1 Le volume

Dans la plupart des lois microstructurales que nous avons introduites, la densité relative est le seul paramètre de microstructure. Le **volume** total est alors une fonction *linéaire* exacte des variables de conception. Pour les microstructures orthotropes comme le matériau feuilleté de rang 2 ou la double microstructure de Hashin, la densité locale est généralement reliée aux variables de microstructures par une loi du type bilinéaire  $\rho = \mu_1 + \mu_2 - \mu_1 \mu_2$  où  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont deux paramètres de microstructure. Cette expression est une forme concave dont l'approximation linéaire constitue une bonne approximation conservative. Qu'il y ait un ou plusieurs paramètres de microstructure, les premières dérivées du volume par rapport aux variables de conception sont positives.

##### 5.5.4.2 Le périmètre

Pour une discrétisation de la densité constante par élément, le **périmètre** de la solution topologique est une fonction linéaire par morceaux de la densité locale. La fonction périmètre est globalement convexe mais elle est non monotone. La fonction étant linéaire par morceaux, on pourrait l'approcher par son approximation linéaire. Hélas, nous avons constaté que l'approximation linéaire entraîne une violation

de contrainte presque systématique au cours du processus d'optimisation. En effet, le périmètre est une fonction non monotone et le développement linéaire n'est valable que dans un petit voisinage autour du point d'approximation. Pour éviter ce problème on peut, soit adopter des *move limits* très serrées, soit, comme nous l'avons fait, adopter une fonction convexe et fortement conservatrice. Après de nombreuses expérimentations numériques que nous détaillerons au chapitre 6, nous recommandons l'*approximation quadratique séparable*. Le choix heuristique de la courbure est basé sur une analyse approfondie des caractéristiques de la fonction.

#### 5.5.4.3 La compliance

La **compliance** et l'**énergie potentielle totale** de la structure sont deux grandeurs énergétiques. Toutes deux sont évidemment des fonctions non linéaires implicites des variables de conception. Pour une structure qui n'est soumise qu'à des fixations homogènes et à des charges mortes, la compliance  $l(\mathbf{q}) = \mathbf{g} \cdot \mathbf{q}$  se comporte comme les déplacements sous les charges.

On peut raisonner dans le cas d'un matériau isotrope, avec pénalisation des densités intermédiaires (SIMP), pour lequel on a :

$$E = \mu^p E^0 \quad , \quad \rho = \mu \rho^0$$

On est devant un problème équivalent au dimensionnement d'une plaque d'épaisseur variable. Le cas  $p=1$  correspond au dimensionnement des éléments d'extension, tandis que le cas  $p=3$  est similaire à l'optimisation d'une structure en flexion pure. Si la structure était isostatique, la compliance admettrait un développement en série exacte en fonction des variables intermédiaires  $y_i = 1/x_i^p$ . Même si le problème de distribution de matière est en quelque sorte fortement "hyperstatique", nous avons essayé d'adapter cette approximation au problème de topologie. Comme la dérivée de la compliance par rapport à la densité locale est négative, cette approximation, ainsi que toutes celles qui utilisent un développement en fonction d'une puissance des variables inverses, est convexe. Hélas, l'expérimentation numérique nous a montré que cette approximation est trop conservatrice. La courbe de convergence est monotone, mais la vitesse de convergence est trop lente. Il est même arrivé de trouver des optima locaux, parce que les mouvements des variables de conception sont tellement amortis qu'il n'est plus possible d'échapper à l'optimum local le plus proche.

Etant donné que toutes les dérivées sont négatives, CONLIN est identique à la linéarisation en fonction des variables inverses. Cette linéarisation est moins conservatrice et la vitesse de convergence que l'on obtient est plus rapide, surtout dans la phase finale. Malheureusement, elle peut parfois donner lieu à une convergence non uniforme dans les premières itérations. On remédie à ces oscillations indésirables en introduisant une stratégie de *move limits* que l'on écarte progressivement au fur et à mesure des itérations. La stratégie que nous proposons fait l'objet d'un paragraphe séparé.

Les conclusions restent identiques pour les matériaux dont les propriétés sont obtenues par homogénéisation. Pour les matériaux feuilletés de rang 2, on sait que la relation raideur-densité est faiblement non linéaire de sorte que la linéarisation de la compliance, au moyen de variables inverses ou mixtes (CONLIN), constitue un bon choix a priori. CONLIN a été appliqué avec succès dans de nombreux problèmes. La plupart des exemples présentés dans ce volume ont été obtenus avec CONLIN. L'avantage de remplacer la compliance et la contrainte de volume par une linéarisation mixte est de pouvoir utiliser la méthode de résolution duale de l'optimiseur CONLIN qui est, comme nous l'avons dit, très performante et qui peut gérer un très grand nombre de variables de conception.

Nous avons également testé la méthode des asymptotes mobiles avec la stratégie de remise à jour des asymptotes proposées par Svanberg (1987). Comme nous le savons, la méthode MMA permet d'ajuster la courbure de l'approximation pour améliorer la convergence. De fait, nous avons pu nous

rendre compte que MMA donnait une meilleure convergence que CONLIN. Nous avons cependant pu constater qu'avec MMA le processus d'optimisation avait tendance à osciller dans la phase finale de la convergence. Ce phénomène semble aussi avoir été observé par d'autres utilisateurs de MMA lors de la résolution du problème de topologie.

Le principal inconvénient des approximations du premier ordre est que ces approximations sont toujours lentes dans la convergence autour de l'optimum. Pour progresser plus rapidement autour de cet optimum très plat, il faudrait recourir à des méthodes d'ordre 2. La convergence du second ordre permettrait d'obtenir les variables de conception optimales beaucoup plus rapidement. Hélas, les sensibilités du second ordre posent deux difficultés majeures. La taille de la matrice des dérivées secondes est rapidement énorme, car elle est proportionnelle au carré des variables de conception. Et l'analyse de sensibilité requiert un effort de calcul très important. Pour l'énergie potentielle totale, la compliance ou la fréquence propre, seules les dérivées des matrices de raideur et de masse sont utiles. Par ailleurs, tous les calculs de sensibilité peuvent être réalisés au niveau de l'élément et assemblés en scalaire. Au contraire, même restreint à sa diagonale, le calcul des dérivées secondes est très coûteux, puisqu'il demande l'évaluation des dérivées des déplacements ou des modes propres par rapport à toutes les variables de conception, de sorte que le calcul des dérivées secondes est évité autant que possible. Pour les problèmes de forme ou de topologie, Mlejnek, Jehle et Schirmacher (1992) ont montré que le gain obtenu en utilisant des approximations du second ordre est maigre, si l'on compte l'ensemble des efforts de calcul. La diminution du nombre d'itérations et la stabilisation de la convergence ne parviennent pas, en fin de compte, à balancer le coût supplémentaire de l'analyse de sensibilité.

Un compromis très intéressant est d'utiliser les dérivées premières qui sont disponibles pour estimer les courbures par une procédure de type Quasi-Newton. Les mises à jour classiques telles que BFGS engendrent cependant une approximation pleine du Hessien, ce qui réintroduit une partie des problèmes que nous avons voulu éviter. Nous nous sommes alors tournés vers une version modifiée de la mise à jour de type Quasi-Newton, capable de générer une séquence d'estimations diagonales. Parce qu'elle n'utilise que des manipulations de vecteurs, cette mise à jour est très économique. En général, cette procédure de BFGS pour matrices diagonales, que nous appelons de façon contractée BFGS diagonal, prend moins du millièème du temps de calcul nécessaire à l'analyse de sensibilité du premier ordre.

Nous proposons maintenant d'appliquer au problème de topologie la nouvelle procédure d'approximation, dans laquelle on combine des schémas de haute qualité (MMA du second ordre ou l'approximation quadratique séparable) avec la méthode de BFGS diagonal.

Lorsque l'on injecte les courbures estimées par la méthode BFGS diagonal dans une linéarisation convexe de la famille MMA, on obtient une approximation de haute qualité que nous désignons par le sigle DQNMMA. Nous avons constaté que les performances de cette approximation DQNMMA en optimisation topologique étaient tout aussi remarquables qu'elles ne l'étaient pour les petits problèmes. Le nombre d'itérations nécessaires à la phase finale de la convergence est réduit de façon très spectaculaire.

Puisque CONLIN donne une bonne décroissance dans les premières itérations, on propose d'adopter la courbure initiale qui correspond au choix des asymptotes mobiles  $L_i=0$  et  $U_i=+\infty$ . On actualise le Hessien dans l'espace des variables inverses pour rendre l'approximation plus conservative lors des premières itérations. Cependant, nous avons constaté que l'estimation de moins bonne qualité des courbures lors des premières itérations rend le processus de convergence moins stable à ce moment. Aussi, avons-nous ajouté une stratégie de *move limits* pour limiter les déplacements dans l'espace de conception. La stratégie des *move limits*, qui sera décrite au paragraphe suivant, a généralement donné entière satisfaction. Dans le cas où l'estimation des courbures déstabiliserait encore la convergence lors

des premières itérations, on peut conserver l'approximation CONLIN durant les premières itérations, et ensuite seulement commencer à utiliser l'approximation DQNMMA. Généralement, nous avons constaté que 10 à 12 itérations suffisaient pour obtenir une valeur stable du Hessien.

Nous avons également utilisé l'approximation quadratique séparable, combinée aux courbures estimées par la procédure de BFGS diagonal. L'estimation quadratique séparable est plus sensible aux imperfections des estimations de courbure que ne l'est l'approximation MMA. Parfois, la procédure DQNQUA montre une progression plus incertaine ou oscillante, et on a intérêt à freiner les mouvements dans l'espace de conception lors des premières itérations. Puis, au fur et à mesure des itérations, la procédure de BFGS diagonal enrichit l'approximation des courbures et l'approximation DQNQUA se montre aussi attrayante que sa consœur DQNMMA. Par exemple, l'apport des informations du second ordre accélère fortement la progression aux abords de l'optimum. Il faut aussi noter que l'approximation DQNQUA s'est montrée particulièrement efficace lorsqu'elle est associée avec une contrainte de périmètre qui est également approchée par une fonction quadratique séparable. On marie alors la vitesse des méthodes de Quasi-Newton et l'effet modérateur de l'approximation très convexe du périmètre.

Comme toutes les méthodes du second ordre, les approximations DQNMMA et surtout DQNQUA sont très sensibles aux optima locaux. Pour y échapper, il faut ralentir la convergence initiale autant que possible et essayer de maintenir les caractéristiques des méthodes du premier ordre durant les premières itérations. Comme nous l'avons déjà signalé, la méthode du périmètre est très favorable à cet égard.

Jusqu'à présent l'application des méthodes de Quasi-Newton aux microstructures orthotropes n'est pas satisfaisante, et nous ne sommes pas parvenus à reproduire les performances que nous avons obtenues avec les matériaux isotropes qui ne comportent pas de variables d'angle. Avec les microstructures orthotropes, la remise à jour doit tenir compte des modifications des variables d'orthotropie et de leur influence sur la courbure. Ceci n'est pas facile pour deux raisons : d'abord, les variables d'angles ont une nature complètement différente des variables de microstructure et leur influence sur la raideur est périodique et ensuite, les problèmes d'optimisation relatifs aux deux types de variables sont résolus séparément.

Cette difficulté n'est pas trop importante en pratique, car les microstructures isotropes et, en particulier, la loi SIMP sont les plus utilisées pour résoudre les applications. Les approximations DQNMMA et DQNQUA, utilisant le Quasi-Newton diagonal, restent donc les approximations les plus performantes et les plus avantageuses pour résoudre le problème d'optimisation topologique.

#### 5.5.4.4 Les fréquences propres

La problématique de l'approximation des fréquences propres de vibration est un peu plus délicate qu'elle ne l'est pour la compliance. D'une part, le signe des dérivées des fréquences propres est indéfini. D'autre part, le phénomène de croisement de fréquences peut rendre inapplicable la méthode de Quasi-Newton, car il faut être sûr que l'on applique toujours l'actualisation sur le même mode de vibration. Il en résulte que nous utilisons, soit l'approximation CONLIN, soit la méthode MMA du premier ordre. Ces deux approximations donnent entière satisfaction. Ce fait peut s'expliquer facilement lorsque les masses non structurales sont importantes. L'influence des variables de conception intervient alors principalement au travers de la raideur et le problème d'optimisation se comporte comme un problème d'optimisation de déplacement ou de compliance. Si le problème de compliance est approché de façon réaliste par l'approximation CONLIN, cette même approximation donnera des résultats semblables pour le problème de vibration et pour le problème de la compliance minimale.



### 5.5.5 Une stratégie de "move limits"

Lorsque l'approximation est peu conservative, la courbe de convergence peut osciller dans les premières itérations, et les trop grands mouvements des variables de conception sont une source de violation des contraintes. En freinant les trop grandes modifications de variables de conception, on remédie facilement à cet inconvénient. La stratégie des *move limits* consiste à imposer des bornes minimales et maximales plus restreintes sur les variables. Les *move limits* permettent de rester dans une région de confiance limitée autour du point de linéarisation. Pour ne pas entraver la convergence finale, on écarte progressivement les *move limits* en fonction des itérations. Sur la base de nos expériences numériques, nous proposons la stratégie suivante :

$$\begin{cases} x_i^{\min} = \max \{ \underline{x}_i, x_i^0 - f(\bar{x}_i - \underline{x}_i) \} \\ x_i^{\max} = \min \{ \bar{x}_i, x_i^0 + f(\bar{x}_i - \underline{x}_i) \} \end{cases} \quad (5.66)$$

Le facteur de relaxation  $f$  permet d'ouvrir progressivement les *move limits* selon une loi exponentielle décroissante :

$$\begin{aligned} f &= f_\infty \left( 1 - \exp\left(-\frac{\text{iter} - a}{b}\right) \right) \\ a &= 1 + b \ln(1 - f_0) \\ b &= \frac{i_2 - 1}{\ln(1 - f_0) - \ln(1 - f_2)} \end{aligned} \quad (5.67)$$

où l'on exige que le facteur de relaxation prenne la valeur  $f_0$  à la première itération et la valeur  $f_2$  à l'itération  $i_2$ . Habituellement, on suggère  $f_0 = 0.3$ ,  $f_2 = 2f_0$  et  $i_2 = 30$  à  $50$ . De bons résultats ont été obtenus à l'aide de ces valeurs numériques.

## 5.6 Utilisation comparée des approximations structurales en optimisation topologique

Nous reprenons à nouveau le problème de la poutre cantilever courte pour illustrer l'utilisation des différentes approximations convexes en optimisation topologique. On considère, cette fois, une discrétisation plus large du domaine de conception, car on prend un maillage régulier de  $40 \times 26$  éléments finis du second degré. On sélectionne une loi matérielle artificielle de type puissance (SIMP) avec un exposant  $p=3$ , parce qu'elle est très souvent utilisée pour résoudre les applications pratiques. La densité étant supposée constante sur chaque élément, le problème d'optimisation comporte 1040 variables de conception pour la discrétisation introduite. Pour la contrainte de volume, on sélectionne naturellement l'approximation linéaire qui est exacte pour ce type de microstructure. On réalise l'optimisation topologique avec différentes

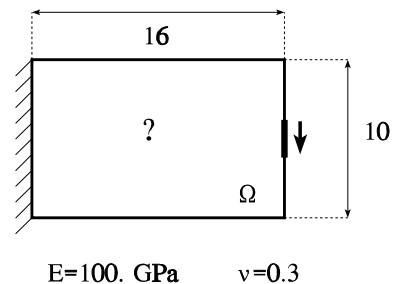


Figure 5.8 : Enoncé du problème de la poutre cantilever courte

différentes

approximations convexes de la compliance et on compare les différentes courbes de convergence.

Dans la première comparaison, on oppose trois approximations de la compliance. On utilise d'abord l'approximation CONLIN, qui est équivalente, ici, au développement en variables inverses  $y = 1/x$ , étant donné que toutes les dérivées premières sont négatives. Ensuite, on utilise la similitude qui existe entre le problème de distribution de matière et le dimensionnement d'une plaque d'épaisseur variable, de sorte qu'on essaie un développement en fonction des variables intermédiaires  $y = 1/x^3$ . Enfin, on fait la même expérience avec le schéma MMA généralisé muni d'une estimation des dérivées secondes par un BFGS diagonal en variables inverses (DQNMMA). Les courbes de convergence de la compliance sont présentées à la figure 5.9 tandis que l'histoire de la modification des variables de conception est étudiée aux figures 5.10 et 5.11.

L'approximation DQNMMA avec estimation des dérivées secondes par BFGS diagonal est l'approximation la plus performante. La fonction objectif est quasi stationnaire dès la 23<sup>ème</sup> itération. Le processus a complètement convergé après 27 itérations, car la modification maximale tombe en dessous de 1.E-6. Dans les premières itérations, la courbe de convergence de l'approximation DQNMMA présente quelques cassures consécutives à des estimations encore un peu incertaines des dérivées secondes, mais la convergence vers la diagonale des dérivées secondes semble fiable malgré le grand nombre de variables de conception. On note aussi que la convergence finale est semblable à celle d'une méthode d'ordre 2, ce que l'on peut constater dans le gain de chiffres significatif.

CONLIN montre également des performances fort intéressantes. L'histoire de la convergence est parfaitement monotone et la vitesse de convergence est rapide, surtout dans les premières itérations. La fonction objectif est quasi stationnaire après 25 itérations. La convergence aux abords de l'optimum est cependant beaucoup plus lente, ce qui peut s'expliquer par le fait que l'on utilise ici un schéma du premier ordre. A partir de la 25<sup>ème</sup> itération, la résolution du sous-problème d'optimisation devient de plus en plus difficile et le processus d'optimisation est arrêté à la 30<sup>ème</sup> itération. On ne peut obtenir une modification des variables de conception inférieure à 1.E-2. Cette toute petite oscillation des valeurs des variables de conception est probablement due, d'une part, à une trop faible convexité de l'approximation CONLIN et, d'autre part, au fait que CONLIN est une approximation d'ordre 1.

L'emploi de la puissance inverse de la variable crée une approximation beaucoup trop conservative. La courbe de convergence est très douce, mais la vitesse de convergence est fortement pénalisée par rapport aux deux approximations précédentes. Après 30 itérations, la fonction objectif est toujours à 10 % de sa valeur optimale et la convergence est loin d'être terminée.

Dans la seconde comparaison, on reprend les approximations CONLIN et MMA avec l'estimation des dérivées secondes par la méthode de BFGS pour matrices diagonales. On y ajoute l'approximation MMA "pure" avec une sélection des asymptotes mobiles selon la stratégie proposée par Svanberg (1987) et l'approximation quadratique séparable combinée avec la méthode BFGS diagonal. La figure 5.12 donne la courbe de convergence de la compliance. Les figures 5.13 et 5.14 donnent les courbes d'évolution des modifications des variables de conception entre deux itérations.

La méthode MMA originale est un peu plus rapide que CONLIN. Par ailleurs, la compliance de la configuration optimale, qui correspond à la solution MMA, est un peu plus basse que celle qui est obtenue avec DQNMMA et CONLIN. Comme toutes les approximations du premier ordre, la convergence finale est lente. On peut même distinguer une oscillation des variables de conception. Le niveau moyen de la modification des variables de conception descend cependant progressivement en dessous de 1.E-4.

La méthode quadratique séparable avec l'estimation des dérivées secondes par la méthode BFGS

diagonal présente une courbe de convergence assez semblable à celle de la méthode DQNMMA. On remarque une instabilité du processus lors de la troisième itération. Après cette période d'instabilité, l'approximation DQNQUA donne lieu à la décroissance de la fonction objectif la plus rapide de toutes celles qui ont été présentées. La compliance finale est cependant légèrement supérieure à celle de la solution CONLIN et DQNMMA. En réalité, elle correspond à un optimum local relativement différent présenté à la figure 5.17. Cette constatation est une première illustration de la sensibilité des approximations utilisant la méthode de Quasi-Newton pour matrices diagonales par rapport aux optima locaux. Après un palier dans la convergence situé entre la 22<sup>ème</sup> et la 30<sup>ème</sup> itération, la modification des variables de conception décroît très fortement comme l'approximation soeur DQNMMA.

La distribution de matière obtenue avec l'approximation DQNMMA est donnée à la figure 5.15. Elle présente de nombreuses zones de distribution en damier dans lesquelles la méthode a été "piégée". Si on fait abstraction des distributions parasites, elle est très semblable à la distribution de la méthode CONLIN et même de la méthode MMA "pure" (figure 5.16). Par contre, la méthode DQNQUA (figure 5.17) est tombée dans un optimum local de configuration fortement différente, mais dont la compliance obtenue est relativement proche. Cette expérience fournit une seconde preuve que les méthodes utilisant les estimations des courbures par la méthode BFGS pour matrices diagonales sont plus sensibles aux optima locaux. Par ailleurs, nous avons constaté que le fait de freiner les mouvements des variables de conception dans les premières itérations était très favorable pour diminuer la sensibilité de ces algorithmes aux optima locaux. L'expérience que nous avons présentée a été faite en n'ajoutant pas de terme de convexification supplémentaire lors de la résolution (c'est-à-dire en prenant un CVX grand dans CONLIN). Nous avons, ensuite, renouvelé la même expérience en prenant un facteur de convexification additionnel (CVX=1.) et nous avons obtenu la distribution de la figure 5.18 qui est une distribution toujours suboptimale, mais plus proche de l'optimum global. La décroissance de la fonction de la compliance est également beaucoup plus régulière, sans pour autant augmenter le nombre d'itérations. Une alternative à l'utilisation du terme de convexification supplémentaire CVX consiste en l'introduction d'une restriction de périmètre. Cette restriction limite d'une part, les solutions admissibles et, d'autre part, freine les mouvements des variables de conception.

Comparativement à l'approximation quadratique séparable, la sensibilité de MMA aux optima locaux est moindre, car nous avons constaté que l'approximation des asymptotes mobiles est plus robuste, c'est-à-dire moins sensible au choix des courbures. Nous avons pu expérimenter le rôle indispensable des *move-limits* et du facteur de convexification supplémentaire lors de la résolution. En conséquence, nous recommandons d'ajouter un terme de convexification supplémentaire lorsqu'on utilise les méthodes de Quasi-Newton pour matrices diagonales.

On évalue enfin les coûts numériques des différentes opérations lors d'un cycle d'optimisation où l'on utilise l'approximation MMA et l'estimation des dérivées secondes par la méthode BFGS pour matrices diagonales. Sur une machine DEC $\alpha$  4000-700, 31.53 secondes ont été nécessaires pour l'analyse statique linéaire, 47.60 secondes pour l'analyse de sensibilité, 0.60 seconde dans CONLIN pour la résolution elle-même et 0.02 seconde pour la procédure de Quasi-Newton diagonal. Le temps passé dans la phase d'optimisation proprement dite est de l'ordre de 1 à 2% du temps CPU nécessaire à l'analyse de sensibilité. Quant à la procédure de BFGS diagonal, elle prend l'équivalent d'environ 3% du temps nécessaire à CONLIN, ou 0.01% de l'analyse de sensibilité. On en conclut que l'estimation des dérivées secondes diagonales demande un coût numérique insignifiant. Par contre, l'utilisation de la nouvelle procédure permet de gagner plusieurs itérations par rapport aux meilleures méthodes du premier ordre.

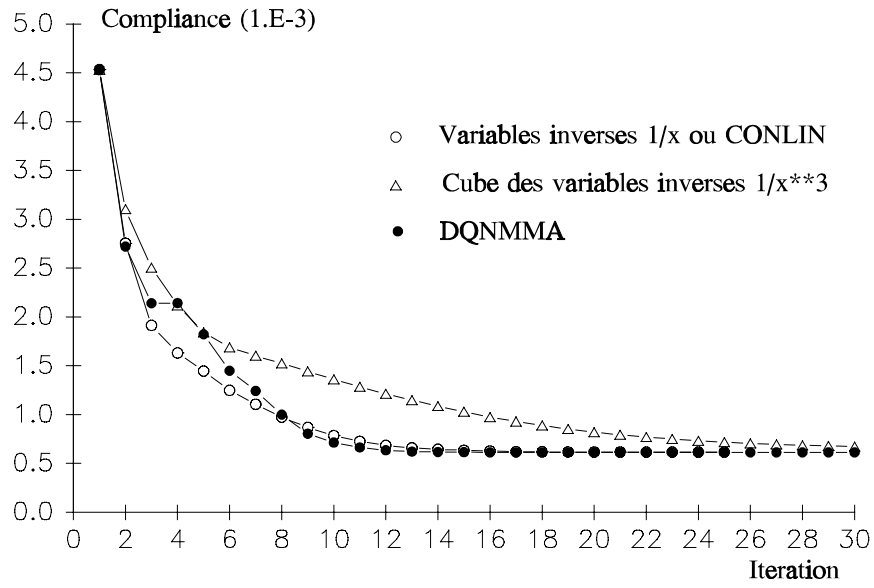


Figure 5.9 : Courbes de convergence pour différents schémas d'approximation

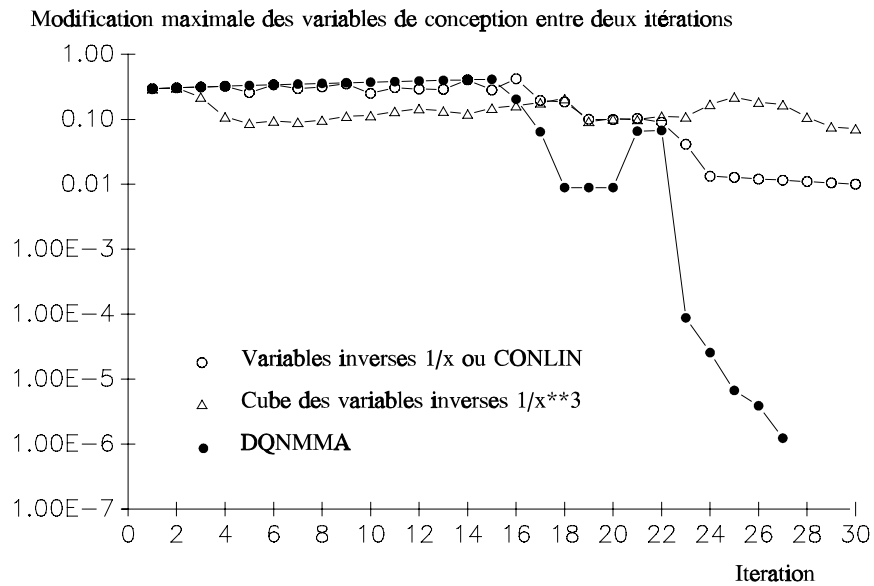


Figure 5.10 : Modification maximale des variables de conception au cours de l'optimisation avec CONLIN, le cube des variables inverses et DQNMMA

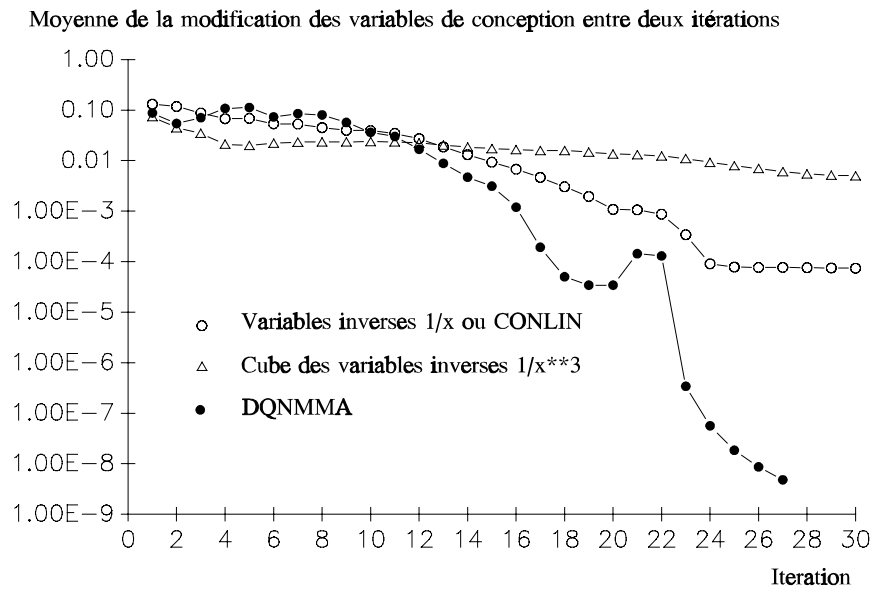


Figure 5.11 : Moyenne des modifications des variables de conception avec CONLIN, le cube des variables inverses et DQNMMA

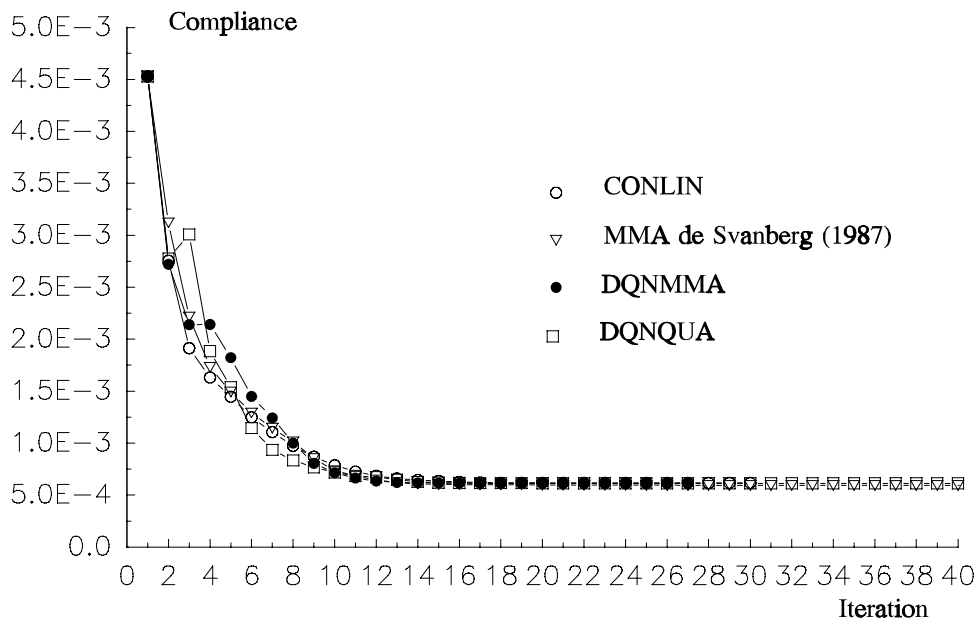


Figure 5.12 : Courbe de convergence de CONLIN, MMA, DQNMMA et DQNQUA

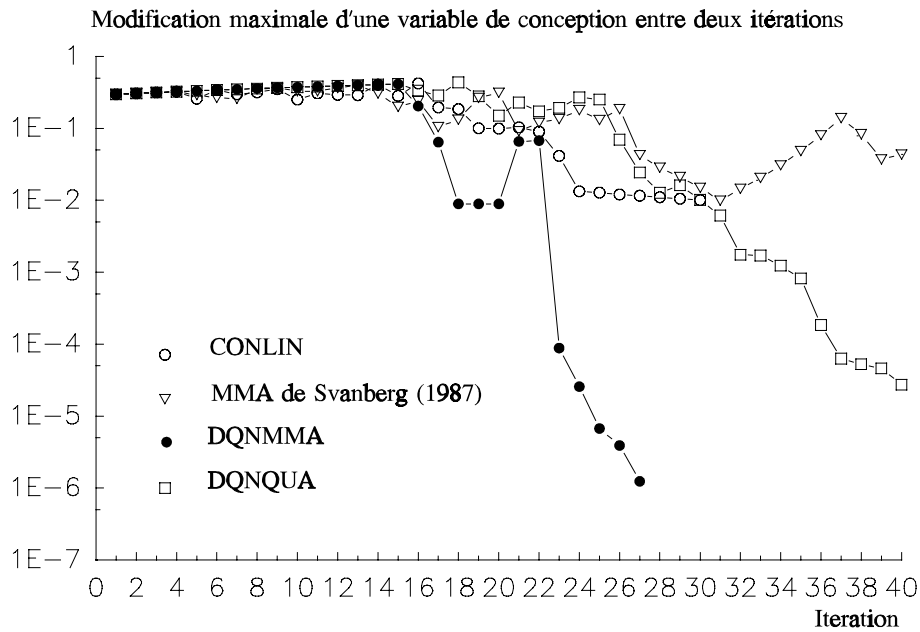


Figure 5.13 : Modification maximale des variables de conception entre deux itérations pour CONLIN, MMA, DQNMMA et DQNQUA

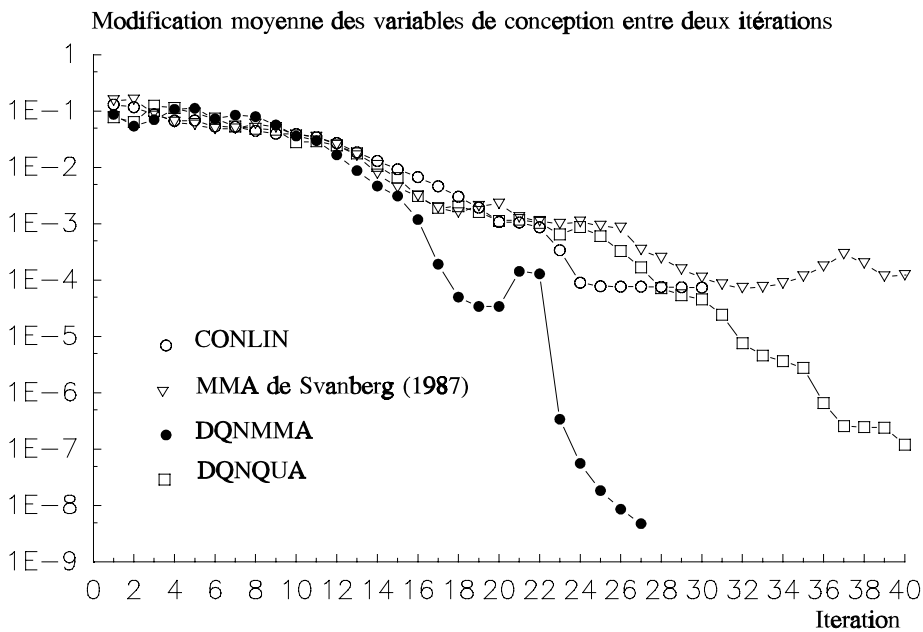


Figure 5.14 : Modification moyenne des variables de conception entre deux itérations pour CONLIN, MMA, DQNMMA, DQNQUA

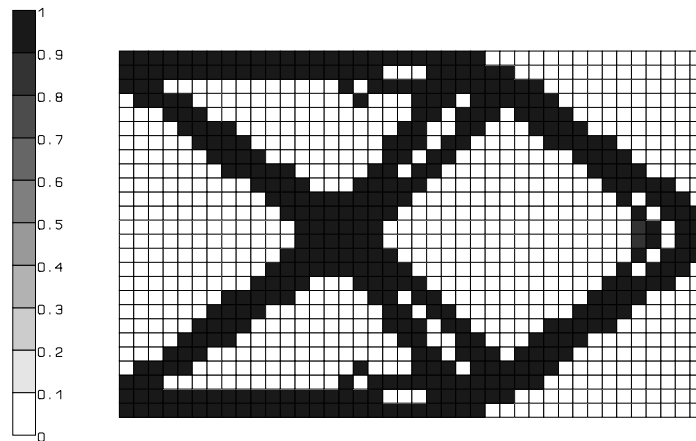


Figure 5.15 : Distribution de matière avec DQNMMMA

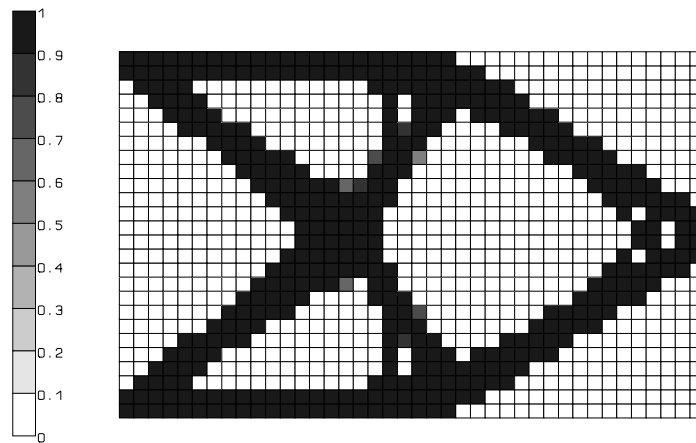


Figure 5.16 : Distribution de matière avec l'approximation MMA

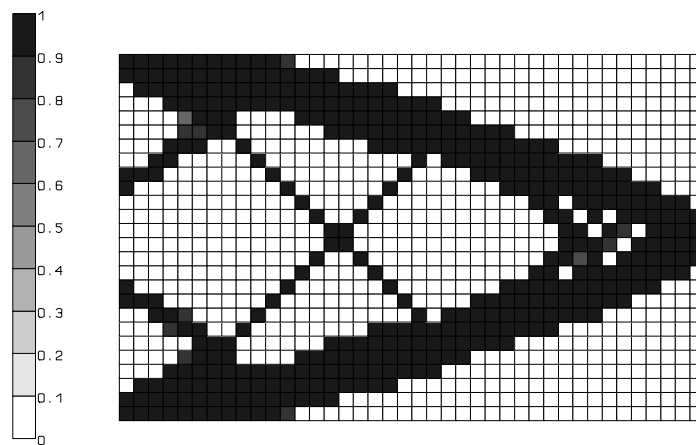


Figure 5.17 : Distribution de matière avec DQNQUA

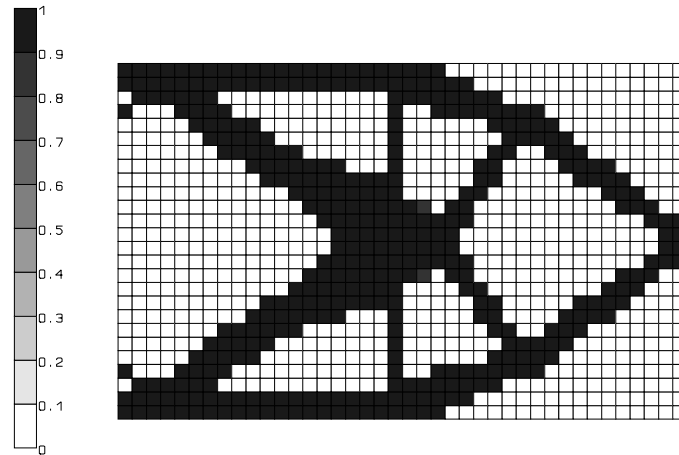


Figure 5.18 : Distribution de matière avec DQNQUA (CVX=1)

## 5.7 Conclusion

Le chapitre 5 nous a permis de présenter notre contribution à la problématique de la résolution numérique des problèmes d'optimisation des distributions de matière. Les résultats du travail de recherche que nous avons accompli peuvent être regroupés selon quatre axes.

Pour élargir le champ des problèmes de conception de distribution de matière et pour accélérer la résolution numérique du problème d'optimisation, nous avons d'abord proposé d'abandonner les critères d'optimalité, et de résoudre le problème d'optimisation par une procédure de programmation séquentielle convexe. Dans celle-ci, on remplace le problème original d'optimisation par une suite de sous-problèmes convexes formés d'approximations séparables que l'on résout par une méthode duale. Si les approximations sont séparables, la méthode duale permet de s'affranchir du très grand nombre de variables de conception et de résoudre le problème avec un effort de calcul très modéré.

Après avoir constaté que la vitesse de convergence des solutions partielles dépendait fortement du choix de l'approximation structurale adopté pour la compliance ou la fréquence propre, nous avons repris les approximations structurales les plus connues à l'heure actuelle et nous avons comparé leur emploi en optimisation topologique. Parmi les approximations du premier ordre, ce sont les approximations CONLIN et MMA "pure" qui conduisent aux meilleurs résultats.

Nous avons ensuite mis au point une méthode de BFGS diagonal capable d'engendrer une séquence rapidement convergente de matrices Hessiennes de structure diagonale. A partir des résultats plus généraux établis par Toint (1977) et Thapa (1981) sur la remise à jour pour des matrices creuses, Haubridge et Nguyen (1994) ont proposé une théorie des méthodes de Quasi-Newton pour matrices diagonales. L'adaptation aux problèmes de structures est notre travail personnel. Nous avons décrit les aménagements de la méthode générale qui sont nécessaires pour créer une séquence d'estimations de la courbure rapidement convergente. En outre, cette méthode d'actualisation est très économique en efforts de calcul, parce qu'elle n'utilise que des manipulations de vecteurs.

Nous avons enfin proposé une procédure d'approximation structurale qui combine l'estimation des dérivées secondes par la méthode BFGS diagonal avec deux approximations de haute qualité : la



méthode MMA du second ordre et l'approximation quadratique séparable.

Ces deux procédures d'approximation ont d'abord été validées sur des petits exemples de treillis où nous avons pu détecter leurs très grandes qualités.

*In fine*, nous avons appliqué les nouvelles procédures d'approximation aux problèmes de topologie des structures où nous avons pu constater leur grande efficacité et leurs performances remarquables. Ces nouvelles procédures permettent un gain très net dans la vitesse de convergence.

## **Chapitre 6 :**

# **CONTROLE DU PERIMETRE ET DES MODES DE DISTRIBUTION PARASITE**

### **6.1 Description des problèmes liés à la résolution numérique du problème de topologie**

L'évaluation numérique des solutions du problème de topologie n'est pas aussi simple qu'il n'y paraît. En effet, de nombreuses difficultés surgissent lorsqu'il s'agit de mettre en pratique les principes théoriques dans une procédure numérique.

La première difficulté est relative à la dépendance vis-à-vis du maillage des solutions du problème de distribution de matière. Cette question a été largement abordée lors du chapitre 2. La solution du problème est liée à l'introduction d'une microstructure. Le problème de domaine variable n'est bien posé que s'il est relaxé par l'introduction d'une microstructure poreuse. L'homogénéisation permet alors d'étendre l'espace de conception et d'assurer l'existence d'une solution stable. Malheureusement, la solution du problème qui est relaxé par l'introduction de matériaux feuilletés de rang 2 n'aboutit pas toujours à des solutions claires. La solution optimale contient de larges zones de densité intermédiaire qu'il est difficile d'interpréter. En outre, les perforations et la microstructure qu'elles contiennent sont généralement impossibles à usiner ou à réaliser en pratique. Pour accentuer la séparation vide-solide, on peut pénaliser le matériau perforé dans la solution optimale, que ce soit explicitement par un terme additionnel dans la fonction objectif, ou que ce soit implicitement en utilisant une microstructure suboptimale qui n'introduit, par conséquent, qu'une relaxation partielle du problème. Alors que cette approche conduit bien à des conceptions avec une topologie macroscopique sans ambiguïté, le problème est à nouveau mal posé lorsque la pénalisation des densités intermédiaires est renforcée. Ce qui se manifeste en particulier par le fait que la solution numérique du problème pénalisé est dépendante du maillage, c'est-à-dire qu'un raffinement du maillage altère la solution au lieu d'en améliorer la définition. Ainsi le concepteur est pris dans un dilemme qui le force à choisir entre l'usinabilité et la clarté de la solution d'une part, ou la convergence numérique d'autre part.

Le chapitre comprend la description d'une nouvelle approche très prometteuse permettant de régulariser le problème de conception topologique: le contrôle du périmètre de la solution. Sur la base d'une théorie initiale de Ambrosio et Buttazzo (1993), Haber, Jog et Bendsøe (1994) ont récemment proposé d'adjoindre une borne sur le périmètre de la solution au problème de conception fondamental. Le contrôle du périmètre aboutit à un problème bien posé quel que soit le type de microstructure. Reprenant cette idée de périmètre, nous pouvons confirmer les premiers travaux de Haber *et al.* (1994). Nous les complétons en décrivant comment l'introduction de cette nouvelle contrainte sur la géométrie de la solution peut être prise en compte dans une procédure basée sur la programmation mathématique. Contrairement à ce qui a été rapporté dans les premières tentatives de résolution par Haber *et al.* (1994), l'utilisation d'une approximation adéquate sur le périmètre stabilise la convergence du processus d'optimisation numérique.

La seconde difficulté est plus directement liée à l'analyse numérique du problème. Pour des maillages carrés ou rectangulaires, le phénomène est généralement connu sous le nom de "structure en damier". Il peut apparaître même avec des microstructures optimales de rang 2, mais nous l'avons également constaté avec des matériaux artificiels SIMP ou d'autres microstructures suboptimales. Dans une distribution en damier, la densité du matériau dans des éléments finis contigus varie de manière

périodique, à la manière des cases noires et blanches dans le jeu de dames. La figure 6.1 représente ce motif sur un maillage carré. Ce phénomène est clairement visible dans la solution présentée à la figure 6.15. La densité  $y$  varie de manière répétitive comme expliqué plus haut.

Très tôt, nous avons été sensibilisés au problème d'instabilité de la solution. D'abord, ce phénomène dégrade considérablement la qualité des résultats numériques que nous obtenions. Ensuite, les damiers apparaissent avec force lorsqu'on essaie de déterminer des distributions de matière sur des maillages libres.

L'explication complète du phénomène de damier n'est pas encore totalement connue. Ce chapitre fait le point sur différentes théories récentes. Plusieurs stratégies pour éliminer les damiers de la solution sont passées en revue et comparées.

D'une part, nous replaçons, dans ce cadre, quelques expériences que nous avons menées, en montrant comment les conclusions partielles que nous avons pu en retirer sont concordantes et sont généralisées par des études postérieures plus élaborées.

D'autre part, nous exposons deux points sur lesquels nous pensons avoir contribué de façon originale. Le premier porte sur l'utilisation d'éléments finis de degré élevé. Dès nos premières recherches en topologie, nous avons pu en constater l'effet favorable sur les phénomènes d'instabilité. La seconde contribution est venue en constatant que la limitation du périmètre de la solution défavorisait l'apparition des damiers. Nous avons alors pu montrer que l'on peut obtenir des solutions exemptes de damier en bornant le périmètre de façon appropriée.

Bien qu'étant différents par leur cause, les deux problèmes d'instabilité numérique, que l'on vient de présenter, conduisent à un résultat pratique semblable : une détérioration de la distribution optimale de matière. Les structures en "damier", aussi bien que la résurgence d'une sorte de "microstructure" au niveau du maillage macroscopique rendent, toutes deux, plus difficile l'interprétation des résultats de topologie. La similitude des symptômes se traduit également par une similitude des remèdes numériques : élévation du degré du champ d'approximation du déplacement, contrôle du périmètre, filtrage ou incorporation des modes de variation rapide de la distribution de matière... Sans pour autant confondre ces deux phénomènes totalement distincts, ce sont les similitudes qui existent entre les manifestations de ces deux phénomènes qui nous ont conduits à les rassembler dans un même chapitre.

## 6.2 Contrôle du périmètre de la solution

### 6.2.1 Régularisation du problème de topologie par l'introduction d'une borne sur le périmètre

#### 6.2.1.1 Description de la méthode du périmètre

Lorsqu'on formule le problème de topologie comme un problème discret, chaque point du domaine de conception peut posséder soit les propriétés du vide, soit celles du solide. Il a été longuement expliqué au chapitre 2 que l'on ne pouvait pas espérer résoudre le problème posé sous cette forme. Le problème est mal posé; ceci se manifeste par le fait que le calcul de la solution n'est pas chose aisée (Goodman *et al.*, 1986) et que les solutions dépendent fortement du maillage. La dépendance des distributions de matière vis-à-vis du maillage signifie, entre autres, que la densité dans les différentes solutions "oscille" de plus en plus vite au sein du domaine de conception.

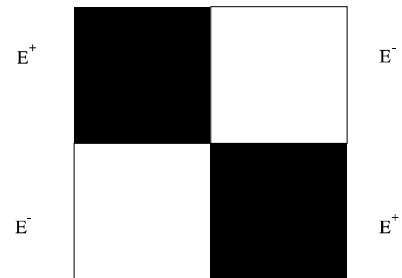


Figure 6.1 : Arrangement en damier

La régularisation introduite par la méthode d'homogénéisation ne cherche pas à exclure les solutions rapidement variables sur l'espace. Bien au contraire, la présence de ces variations est prise en compte par l'introduction d'un matériau composite avec une microstructure. La méthode d'homogénéisation permet, d'autre part, de connaître les propriétés effectives de cette distribution microscopique en fonction des paramètres de microgéométrie. Au niveau macroscopique où l'on traite le problème de conception, on résout un problème d'optimisation exprimé en termes de variables de microstructure qui évoluent de manière continue, de sorte que la résolution du problème d'optimisation s'en trouve facilitée. Pour que le problème relaxé soit bien posé, il exige l'utilisation d'une microstructure optimale comme les matériaux feuilletés de rang  $N$ . Malheureusement, les microstructures optimales engendrent des solutions stables mais souvent irréalisables en pratique, ou impossibles à usiner. La présence de larges zones de composite de densité intermédiaire rend la solution obtenue ambiguë et, donc, difficile à interpréter en vue d'en extraire une conception classique.

L'emploi de microstructures suboptimales, ou bien l'addition d'un terme de pénalisation supplémentaire des densités intermédiaires, apporte une réponse partielle au problème en augmentant la séparation vide/solide dans les solutions. La distribution optimale constituée principalement de vide et de solide permet d'extraire plus facilement une topologie exploitable et réalisable en pratique. Malheureusement, une pénalisation grandissante des densités intermédiaires réintroduit le phénomène d'oscillation des solutions. L'existence d'une solution stable ne peut plus être démontrée de sorte que les solutions obtenues dépendent du maillage adopté, comme nous l'avons constaté en pratique.

Pour régulariser le problème de topologie sous forme discrète, Ambrosio et Buttazzo (1993) ont montré qu'il n'était pas obligatoire d'introduire une microstructure poreuse. Le problème doit tout de même être modifié. Pour que la solution macroscopique du problème existe, il faut que le périmètre de la solution soit borné. On complète donc le problème fondamental du minimum de la compliance en introduisant une restriction sur le périmètre de la solution :

$$\begin{aligned}
 & \min_{E_{ijkl} \in E_{ad}} l(\mathbf{u}) \\
 & \text{avec} \quad \cdot \mathbf{a}_E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \\
 & \quad \cdot \int_{\Omega} \rho(\chi) d\Omega \leq \bar{V} \\
 & \quad \cdot P(\chi) \leq \bar{P}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

D'une manière plus générale, on peut encore recourir à la formulation faisant appel à l'énergie potentielle totale :

$$\begin{aligned}
 & \max_{E_{ijkl} \in E_{ad}} \min_{\mathbf{u} \in V_{\bar{u}}} \Pi(\mathbf{u}) \\
 & \text{avec} \quad \cdot \int_{\Omega} \rho(\chi) d\Omega \leq \bar{V} \\
 & \quad \cdot P(\chi) \leq \bar{P}
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Dans ces expressions,  $P(\chi)$  désigne le périmètre de la solution et  $\bar{P}$  sa borne maximale admissible pour la conception. La borne  $\bar{P}$  choisie arbitrairement par le concepteur détermine la solution vers laquelle la suite des distributions de matière converge. Théoriquement, le problème avec périmètre pourrait être abordé dans le cadre d'une résolution purement discrète. Malheureusement, toute discrétisation un peu réaliste de la distribution de matière introduit une grande quantité de variables de conception et la résolution d'un problème 0-1 de si grande taille est (pour l'instant tout au moins) hors de question.

Comme le problème discret peut être considéré comme une méthode d'homogénéisation où la pénalisation des densités intermédiaires serait infinie, on préfère souvent le remplacer par un problème différentiable approché et le résoudre par un algorithme d'optimisation continu. La distribution discrète est remplacée par une densité artificiellement variable  $\rho$  :  $0 < \rho < 1$ , et on peut résoudre le problème de distribution par un algorithme d'optimisation continu. Dès lors, Haber, Jog et Bendsøe (1994) ont émis l'idée que l'on pourrait également limiter le périmètre de la solution obtenue par une méthode d'homogénéisation. La méthode d'homogénéisation, avec une microstructure suboptimale ou bien une pénalisation additionnelle des densités intermédiaires, est légitimée puisqu'elle constitue une approximation différentiable du problème discret (Bendsøe, 1989) dont l'existence de la solution est garantie.

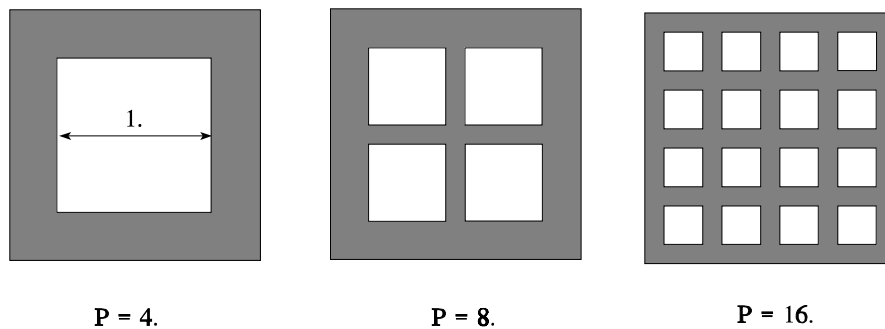


Figure 6.2 : Influence du nombre de perforations sur le périmètre

On peut comprendre facilement le rôle de la contrainte sur le périmètre. Le problème est régularisé en excluant, de l'espace de conception, les oscillations et les variations à haute fréquence de la fonction caractéristique de la distribution de densité. La figure 6.2 présente trois solutions avec le même rapport vide-solide. Les perforations en nombre croissant présentent la même surface totale. Le périmètre total de la solution augmente avec le nombre de trous et, de manière équivalente, il décroît avec leur taille. Cet exemple élémentaire montre que les solutions avec une faible valeur du périmètre possèdent des trous de grande taille tandis que des distributions de densité qui oscillent rapidement sur l'espace, introduisent un grand périmètre. Si la distribution de matière donne lieu à l'apparition d'une microstructure au niveau du maillage macroscopique, le périmètre total augmente. A la limite, lorsque la taille des perforations devient de plus en plus fine, le périmètre de la solution devient infini. Il est évident qu'une borne finie sur le périmètre de la solution exclut les distributions de microperforations de l'espace de conception. En outre, la valeur du périmètre maximal autorise un contrôle sur le nombre et la taille des trous présents dans la topologie optimale, sans pour autant influencer leur forme propre et leur disposition relative.

Lorsque la densité varie dans un continuum de valeurs comprises entre le vide et le solide, la mesure élémentaire du périmètre doit être remplacée par une mesure compatible avec l'hypothèse de continuité. Haber, Jog et Bendsøe (1994) proposent de considérer la *variation totale* de la fonction de densité  $\rho$ . Cette dernière mesure converge à la limite vers la valeur du périmètre géométrique lorsque le volume de matière de densité intermédiaire  $0 < \rho < 1$  tend vers zéro (Evans et Gariépi, 1992). La variation totale d'une fonction scalaire comme la densité peut encore s'écrire comme l'intégrale du module de son gradient (Weedon et Zygmund, 1977).

Cette fonction n'est pas dérivable et on la remplace par l'approximation suivante, valable pour une fonction de densité continue par morceaux :

$$P(\rho) = \int_{\Omega \setminus \Gamma_j} \sqrt{\nabla \rho^T \nabla \rho + \left(\frac{\epsilon}{h}\right)^2} - \frac{\epsilon}{h} d\Omega + \int_{\Gamma_j} \sqrt{\langle \rho \rangle^2 + \epsilon^2} - \epsilon d\Gamma \quad (6.3)$$

$\Gamma_j$  désigne l'ensemble des points où la densité  $\rho$  subit une discontinuité.  $\langle \rho \rangle$  est le saut de densité  $\rho$  à travers  $\Gamma_j$ . Le paramètre  $\epsilon$  garantit la différentiabilité de la fonction périmètre; il s'agit d'un nombre petit mais positif  $0 < \epsilon \ll 1$ . Le paramètre  $h$  représente une dimension caractéristique du maillage tel que le diamètre d'un élément fini.

### 6.2.1.2 Comparaison de la méthode du périmètre et de la relaxation du problème à l'aide de microstructures optimales

Puisque le contrôle du périmètre nous assure l'existence de la solution du problème, les distributions de matière obtenues avec différents maillages convergent, même si la microstructure sélectionnée est suboptimale. Le périmètre est donc une alternative à l'emploi de microstructures optimales de rang  $N$  par exemple.

Dans la méthode d'homogénéisation proprement dite, seules les microstructures optimales assurent la relaxation complète du problème et par là, l'indépendance de la solution vis-à-vis du maillage. Cependant, de par sa nature, la microstructure optimale est telle qu'elle permet à la matière de reprendre les efforts de manière optimale afin d'offrir localement la raideur maximale pour les conditions de sollicitations. La structure obtenue est l'optimum absolu du problème de conception, compte tenu des critères retenus. Cependant, la pénalisation des matériaux composites dont la densité est située entre le vide et le solide, est faible. Et dans la distribution de matière optimale, on trouve de larges zones de densité intermédiaire. Dans l'état actuel de notre technologie, il est impossible de fabriquer la distribution optimale de matière et les microstructures qui sont utilisées. On recourt donc à une solution approchée de type classique. L'interprétation de la solution n'est pas chose facile lorsqu'on se trouve en présence de larges zones où le vide et la matière sont intimement mélangés.

Il nous semble que le périmètre apporte une réponse satisfaisante à cette difficulté. La solution de périmètre borné est une solution rationnelle et mathématiquement correcte au problème de conception posé par l'ingénieur. La méthode du périmètre constitue donc un outil performant pour la recherche pratique de la topologie de structures mécaniques. En limitant le périmètre de la solution, il est légitime de pénaliser les densités intermédiaires, de manière à n'engendrer que des structures où les zones occupées par le vide et la matière sont nettement distinctes.

Il est évident que l'optimum contraint avec le périmètre est le meilleur compromis entre le critère de la compliance minimale et le respect de la borne sur les restrictions. L'optimum avec périmètre aura toujours une performance inférieure à la structure formée d'une microstructure optimale. Toute restriction entraîne une perte de coût sur la fonction objectif. Plus la borne sur le périmètre sera exigeante, plus la compliance de la structure sera pénalisée. Pour générer des conceptions qui débouchent sur des réalisations pratiques, il faut sacrifier une partie de la raideur. A la limite, on pourrait néanmoins retrouver l'optimum absolu sans périmètre, en augmentant la borne jusqu'à l'infini (cette convergence des distributions de matières s'effectuant au sens faible). L'optimum de la solution homogénéisée prend alors une valeur de référence ou de comparaison.

La pénalisation des densités intermédiaires est réalisable de deux façons. On peut ajouter un terme de

pénalité à la fonction objectif. Francfort et Kohn (1993) ont suggéré d'ajouter, à la fonction objectif, le terme :

$$\alpha \rho (\rho - 1)$$

On peut, également, recourir à des microstructures suboptimales pour lesquelles la pénalisation des densités intermédiaires est plus importante que les matériaux de rang  $N$ . La loi la plus connue est sans doute la pénalisation de type puissance (SIMP), mais nous avons aussi présenté les matériaux avec des perforations cylindriques que l'on peut décrire avec une loi de Tsai-Halpin où la pénalité varie avec le coefficient de renforcement  $\xi$ .

Si la borne sur le périmètre régularise la convergence du processus d'optimisation, elle permet également de contrôler la topologie et la connectivité de la solution. Une borne élevée du périmètre autorise un grand nombre de perforations du domaine structural. Une réduction du périmètre diminue le nombre de trous et de membres structuraux, qui deviennent corollairement plus massifs, le volume de matière étant supposé constant. En ajustant les bornes du problème et la pénalisation des densités, le concepteur peut jouer sur la complexité de la distribution de matière et orienter la solution selon les contraintes technologiques de fabrication, de production, ou autres.

En conclusion, la borne sur le périmètre nous semble donc un outil de très haute qualité pour la conception de structures dans la pratique industrielle.

## **6.2.2 La procédure de résolution adoptée dans cette thèse pour résoudre le problème de compliance minimale avec un périmètre borné**

### *6.2.2.1 Choix de la microstructure et de l'approximation différentiable du problème discret*

Le problème de topologie dont le périmètre est borné est un problème régularisé, même si on emploie des microstructures suboptimales. Haber *et al.* (1994) ont démontré la validité de cette affirmation à l'aide d'une microstructure de matériau feuilleté de rang 2 auto-adaptatif dont on pénalise les densités intermédiaires. La convergence du problème est garantie par le périmètre de la solution.

Nous ne nous sommes pas attardés sur l'utilisation conjointe de la contrainte de périmètre et de différentes microstructures suboptimales, comme cela avait été le cas au chapitre 4, puisque les choses sont claires depuis les travaux de Haber *et al.* (1994). A notre avis, il est beaucoup plus intéressant de se pencher sur l'emploi des matériaux SIMP. On peut invoquer plusieurs raisons :

- Comme l'a expliqué Bendsøe (1989), une pénalisation des densités intermédiaires selon une loi de puissance, constitue une approximation différentiable et continue de bonne qualité du problème discret. Lorsque l'on augmente l'exposant  $p$  de pénalisation, on élimine progressivement toutes les zones de densités intermédiaires et on retrouve le problème vide-solide. En pratique, un exposant  $p$  choisi égal à 3 ou 4 donne des résultats de bonne qualité, formés de vide et de solide.
- Dans la pratique de l'ingénieur, les matériaux SIMP sont intéressants pour étudier la topologie de structures. Les matériaux SIMP se prêtent à des applications de très grande taille. Leur analyse de sensibilité est peu coûteuse, car elle peut être faite analytiquement et il n'y a qu'une seule variable par élément fini. Enfin, la loi SIMP est facile à mettre en oeuvre dans un code de calcul.

Nous avons donc consacré notre effort principal sur l'utilisation de la contrainte de périmètre combinée avec des matériaux de type SIMP.

## 6.2.2.2 Résolution du problème par une approche de programmation mathématique

Lorsque l'on utilise un critère d'optimalité, il n'est pas évident de considérer une seconde contrainte sur le périmètre. En effet, le succès des critères d'optimalité pour la résolution du problème de topologie est principalement lié au fait qu'il n'y a qu'une seule contrainte active. Haber, Jog, et Bendsøe (1994), qui utilisent un critère d'optimalité, introduisent le périmètre en ajoutant un terme de pénalité à la fonction objectif :

$$\beta [(P(\rho) - P^*)^2 + (\eta P^*)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (0 < \eta < 1) \quad (6.4)$$

Le terme  $P^*$  représente la valeur cible du périmètre que l'on désire atteindre. Cette valeur n'est d'ailleurs pas forcément réalisée à la fin du processus d'optimisation avec ce type de formulation. Comme on peut le voir dans les applications de Haber *et al.* (1994), il est même difficile de conserver strictement la même valeur du périmètre dans la solution obtenue pour des maillages différents. Plus récemment, Haber *et al.* (1995) ont introduit une fonction de barrière pour tenir compte de la contrainte de borne et générer une solution qui respecte la valeur cible.

Au contraire, si on utilise une procédure de résolution basée sur une méthode de programmation mathématique comme nous le faisons, il est relativement aisé de considérer une contrainte supplémentaire sur le périmètre. La résolution duale est à peine plus longue. Elle détermine de manière rigoureuse la valeur des multiplicateurs de Lagrange associés à chaque contrainte, ce qui n'est pas garanti avec un critère d'optimalité.

La procédure pratique repose sur les fonctionnalités présentes dans le programme de résolution CONLIN (Fleury, 1989). Pour pouvoir imposer soit une borne stricte, soit une valeur cible avec une pénalisation dans la fonction objectif, on joue sur la possibilité de relaxer les contraintes. Mathématiquement, le problème est traité sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \min_{E_{ijkl}, \rho, \delta} \quad & -\Pi(u) + pds \delta^2 \\ \text{avec} \quad & \cdot \int_{\Omega} \rho \, d\Omega \leq \bar{V} \\ & \cdot P(\rho) \leq \bar{P} + (\delta - 1) \Delta \bar{P} \\ & \cdot 1 \leq \delta \leq 2 \end{aligned} \quad (6.5)$$

La variable  $\delta$  est une variable additionnelle appelée "variable de relaxation". Elle permet de transgresser la borne sur la contrainte au prix d'une pénalisation quadratique dans la fonction objectif avec un facteur de pondération  $pds$ . La relaxation introduit un dépassement de la valeur cible du périmètre d'un accroissement allant de 0 à 100% de la valeur tolérable admissible  $\Delta \bar{P}$ .

En jouant sur le facteur de pondération  $pds$ , la procédure permet soit d'imposer le respect d'une borne stricte sur le périmètre, soit d'imposer une valeur cible avec une pénalisation quadratique dans la fonction objectif. Lorsque le facteur  $pds$  est important, la violation de la borne du périmètre est quasi inexistante et l'on satisfait à  $\bar{P}$ . Lorsque la valeur de  $pds$  diminue, on tolère de plus en plus facilement une transgression de la borne sur le périmètre  $\bar{P}$  qui devient plutôt une valeur cible.



### 6.3.3 Approximation de la restriction sur le périmètre

L'emploi d'une procédure de programmation mathématique implique la définition d'une approximation convexe de la nouvelle restriction portant sur le périmètre. La sélection d'une approximation adéquate est très importante. D'une part, la qualité de l'approximation est très importante pour la vitesse de convergence du processus itératif d'optimisation. D'autre part, la conservativité de l'approximation est essentielle pour pouvoir respecter une borne spécifiée. Cette caractéristique est impérative pour générer des solutions indépendantes du maillage et pour éliminer les modes parasites de la distribution de matière. Le succès de ces deux stratégies dépend, de façon vitale, de notre aptitude à réaliser cet objectif. Nous présentons maintenant la solution entièrement originale que nous avons développée dans cette thèse. Elle est une des clefs de voûte des réflexions que nous avons élaborées précédemment.

La mise en oeuvre d'une approximation de haute qualité exige d'abord une analyse précise de la restriction. Nous analyserons successivement les dérivées du périmètre et le choix des paramètres de différentiabilité. Nous exposerons ensuite trois stratégies qui peuvent être complémentaires et que nous avons mises au point pour produire une approximation de haute qualité du périmètre.

#### 6.3.3.1 Expression différentiable du périmètre et de ses dérivées

Nous nous placerons dans l'hypothèse où la densité est constante par élément fini. Dans ce cas, l'expression du périmètre est simple. Elle ne fait intervenir que le saut de densité aux interfaces des éléments. Pour un problème plan, on désigne par  $k$  un interface de longueur  $l_k$ . L'expression différentiable du périmètre s'écrit alors :

$$P = \sum_k l_k \left( \sqrt{\langle \rho \rangle_k^2 + e^2} - e \right) \quad (6.6)$$

où  $\langle \rho \rangle_k$  est le saut de densité à travers l'interface  $k$ .

Comme la forme analytique est relativement simple, il est aisé de déterminer la dérivée du périmètre si on connaît la sensibilité des densités d'élément. La dérivée première du périmètre par rapport à la variable de densité  $\mu_i$  est donnée par :

$$\frac{\partial P}{\partial \mu_i} = \sum_k l_k \frac{\langle \rho \rangle_k}{\sqrt{\langle \rho \rangle_k^2 + e^2}} \frac{\partial \langle \rho \rangle_k}{\partial \mu_i} \quad (6.7)$$

Cette expression n'est évaluée, en pratique, que sur les éléments touchés par la variable  $\mu_i$  et sur les interfaces de ces éléments qui sont touchés par cette variable de densité.

Les dérivées secondes sont tout aussi simples à évaluer :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \mu_i \partial \mu_j} = \sum_k l_k \left[ \frac{e^2}{\sqrt{(\langle \rho \rangle_k^2 + e^2)^3}} \frac{\partial \langle \rho \rangle_k}{\partial \mu_i} \frac{\partial \langle \rho \rangle_k}{\partial \mu_j} + \frac{\langle \rho \rangle_k}{\sqrt{\langle \rho \rangle_k^2 + e^2}} \frac{\partial^2 \langle \rho \rangle_k}{\partial \mu_i \partial \mu_j} \right] \quad (6.8)$$

Pour les approximations séparables, les dérivées diagonales sont souvent les seules courbures calculées. Si la densité est constante par élément fini et s'il n'y a qu'un seul paramètre de microstructure, les dérivées secondes de la densité et du saut de densité sont nulles.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \mu_i^2} = \sum_k l_k \frac{\epsilon^2}{\sqrt{(\langle \rho \rangle_k^2 + \epsilon^2)^3}} \left( \frac{\partial \langle \rho \rangle_k}{\partial \mu_i} \right)^2 \quad (6.9)$$

La courbure possède une valeur très faible sauf au voisinage des points où les sauts de densité s'annulent. En ces points, la courbure est dominée par un terme en  $1/\epsilon$ .

### 6.3.3.2 Choix du paramètre de différentiabilité $\epsilon$

Il est maintenant important de discuter le choix de la valeur du paramètre  $\epsilon$  qui est important pour la résolution numérique.

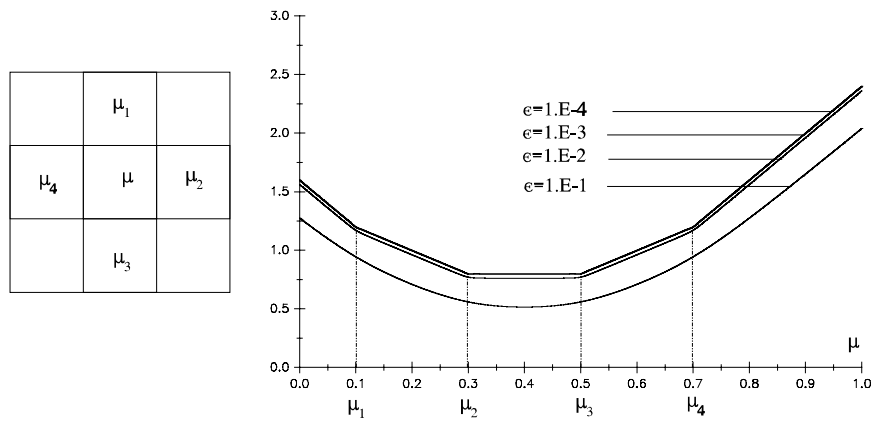


Figure 6.3 : Influence du paramètre  $\epsilon$  sur l'approximation différentiable du périmètre

Le paramètre  $\epsilon$  doit être petit devant l'unité. Lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, on retrouve l'expression de la valeur absolue. Le périmètre devient, alors, une loi linéaire par morceau. D'une part, une trop petite valeur restitue un comportement quasi non différentiable, ce qui entraîne une variation très rapide de la dérivée première et une courbure très importante dans un petit voisinage des points d'annulation du saut de densité. D'autre part, une valeur trop grande de  $\epsilon$  déforme l'évolution de la courbe du périmètre. La figure 6.3 illustre ce problème. On considère un maillage d'éléments carrés de côté unitaire. La courbe donne l'évolution de la contribution au périmètre relative à l'élément central. Les valeurs des densités des éléments voisins sont fixées respectivement à 0.1, 0.3, 0.5 et 0.7. La courbe donne l'évolution du périmètre en fonction de la densité relative  $\mu$  de l'élément central pour différents choix de  $\epsilon$  (1.E-1, 1.E-2, 1.E-3, 1.E-4). La courbe approchée est toujours placée sous la courbe initiale du module. L'approximation différentiable obtenue avec  $\epsilon=1.E-1$  offre une courbe très douce, mais elle est relativement éloignée de la courbe initiale. Les courbes obtenues avec  $\epsilon=1.E-3$  et  $\epsilon=1.E-4$  sont presque confondues et constituent de très bonnes approximations de la courbe non différentiable utilisant le module. En pratique, nous en concluons qu'un bon compromis entre la douceur de la courbe et la précision peut être obtenu en choisissant le paramètre  $\epsilon$  entre 1.E-2 et 1.E-3.

### 6.3.3.3 Approximation du périmètre

#### Choix de l'approximation

Il apparaît également sur la figure 6.3 que le périmètre est une fonction très compliquée des variables de conception. En généralisant la courbe unidimensionnelle à un espace où toutes les variables de conception peuvent être modifiées, on peut imaginer une fonction constituée d'une multitude de facettes. La fonction est une caractéristique globalement non linéaire qu'il est très difficile d'approximer avec les schémas de linéarisation classiques pour plusieurs raisons.

- Le périmètre est une fonction non monotone. Les approximations monotones comme CONLIN, MMA ou l'approximation linéaire ne constituent pas une bonne approximation du périmètre, car elles conduisent à une convergence oscillatoire, caractérisée par de fortes violations de la borne sur le périmètre. Les variables de conception oscillent entre les bornes minimales et maximales à chaque itération.
- Le périmètre est une fonction fortement non linéaire où il existe un couplage très important entre les variables de conception qui sont attachées à des éléments voisins. Le domaine de validité des approximations séparables est donc limité à un petit voisinage situé autour du point de linéarisation.

Pour surmonter ces difficultés, on doit, d'une part, limiter le domaine de confiance de l'approximation et, d'autre part, utiliser une approximation non monotone comme l'approximation quadratique.

Pour limiter le domaine de confiance de l'approximation, on peut recourir à des "move-limits" fort rapprochées. Avec l'optimiseur CONLIN, il est possible également de jouer sur le paramètre de convexification interne (CVX) afin de limiter les déplacements dans l'espace de conception.

Quant au choix du schéma d'approximation, nous avons sélectionné l'**approximation quadratique séparable** pour linéariser le périmètre. Nous supposons que l'approximation quadratique séparable du périmètre est de la forme générale suivante :

$$\tilde{P}(\boldsymbol{\mu}) = P(\boldsymbol{\mu}^0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial P}{\partial \mu_i} (\mu_i - \mu_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i (\mu_i - \mu_i^0)^2 \quad (6.10)$$

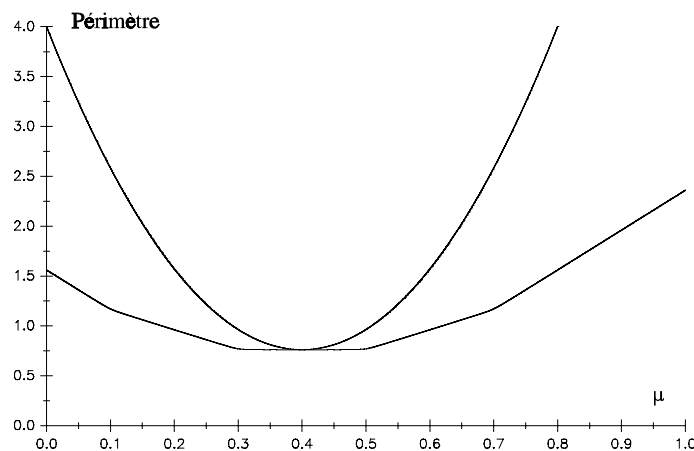


Figure 6.4 : Approximation quadratique du périmètre

Le choix se justifie facilement. D'abord, cette approximation est non monotone, ce qui signifie qu'elle est apte à rendre compte de l'allure de la courbe réelle. Ensuite, la séparabilité permet d'utiliser facilement la résolution duale du problème d'optimisation. Malheureusement, le couplage des variables est tel que le domaine de validité de l'approximation s'en trouve restreint et on est contraint d'adopter une approximation très conservative afin de respecter la borne sur la contrainte. La convexité de l'approximation a un effet favorable de *move-limits* sur l'optimisation. Le processus d'optimisation converge plus lentement vers une solution stationnaire, mais avec une stabilité accrue.

Le choix de la convexité à introduire dans l'approximation est un problème crucial pour le succès de la procédure d'optimisation. Nous proposons de développer les solutions que nous avons testées et adoptées.

On remarque d'abord que la valeur exacte des dérivées secondes diagonales ne peut fournir une approximation conservative à souhait. En effet, si on se trouve dans la partie quasi-linéaire de la fonction périmètre, la convexité est trop faible pour assurer la conservativité voulue. Au contraire, si on se trouve au voisinage d'un point où le saut de densité s'annule, la dérivée seconde est localement très importante et l'on crée une approximation trop convexe.

Il est nécessaire d'évaluer, de manière approchée, les courbures  $\alpha_i$  capables de générer des approximations suffisamment conservatives du périmètre. Nous proposons plusieurs méthodes pour estimer les coefficients de convexité.

#### *Une première estimation heuristique de la courbure*

La courbure que nous avons adoptée est basée sur une analyse de la contribution de chaque variable au périmètre. En bornant cette contribution, il est possible d'estimer une courbure raisonnable qui donne une convexité satisfaisante.

On raisonne sur la fonction unidimensionnelle représentant la contribution d'une seule variable  $\mu_i$  au périmètre, toutes les autres variables de densité étant supposées fixées. La contribution de cette variable est approchée par la fonction quadratique séparable :

$$\tilde{P}_i(\mu_i) = P_i(\mu_i^0) + \frac{\partial P}{\partial \mu_i}(\mu_i - \mu_i^0) + \frac{1}{2} \alpha_i (\mu_i - \mu_i^0)^2 \quad (6.11)$$

Au point de référence, la contribution de la variable  $\mu_i$  à la valeur du périmètre  $\tilde{P}_i^0(\mu_i^0)$  est donnée par la quantité :

$$P_i(\mu_i^0) = \sum_{k \in K(\mu_i)} l_k \left( \sqrt{\langle \rho \rangle_k^2 + \epsilon^2} - \epsilon \right) \quad (6.12)$$

où  $K(\mu_i)$  représente l'ensemble des éléments qui ont une frontière commune avec l'élément portant la variable  $\mu_i$ . Le cas le plus défavorable correspond à la situation où tous les sauts de densité deviendraient maximums et prendraient une valeur unitaire. Dans ce cas le plus défavorable, la contribution  $\tilde{P}_i(\mu_i)$  vaut  $\sum_{k \in K} l_k$ . On suppose à présent que cette contribution maximale est réalisée en un point  $\mu_i^*$  et on injecte cette valeur dans l'approximation quadratique pour obtenir une estimation de la convexité en fonction du nouveau paramètre  $\mu_i^*$  :

$$a_i = 2 \frac{\sum_{k \in K} l_k - P_i(\mu_i^0) - \frac{\partial P}{\partial \mu_i}(\mu_i^* - \mu_i^0)}{(\mu_i^* - \mu_i^0)^2} \quad (6.13)$$

Il reste à trouver le point  $\mu_i^*$  où l'on va évaluer l'approximation de la dérivée seconde. D'après notre expérience, choisir le point  $\mu_i^*$  aux bornes de l'intervalle admissible de  $\mu_i$  donne une approximation trop peu convexe, compte tenu du couplage avec les variables de densité d'éléments voisins.

La solution consiste à se servir de  $\mu_i^*$  comme d'une *move-limits* placée entre la variable  $\mu_i$  et les variables associées aux éléments voisins. Elle permet de pénaliser fortement la permutation des valeurs des variables de conception entre éléments voisins et d'empêcher l'oscillation des variables de conception. Nous proposons de prendre :

$$\mu_i^* = \mu_i^0 \pm \alpha (\bar{\mu}_i - \underline{\mu}_i) \quad \alpha = 0.4 \quad (6.14)$$

L'expérience numérique que nous avons menée sur plusieurs exemples et plusieurs maillages, montre que le choix suivant est un bon compromis entre une conservativité minimale et une surestimation de la convexité de l'approximation. Rappelons qu'un bon choix de la convexité de la contrainte de périmètre joue un rôle favorable de *move-limits* durant la convergence. En pratique, cet effet bénéfique provient d'un amortissement des mouvements trop rapides des variables de conception, ce qui entraîne une stabilisation de la convergence.

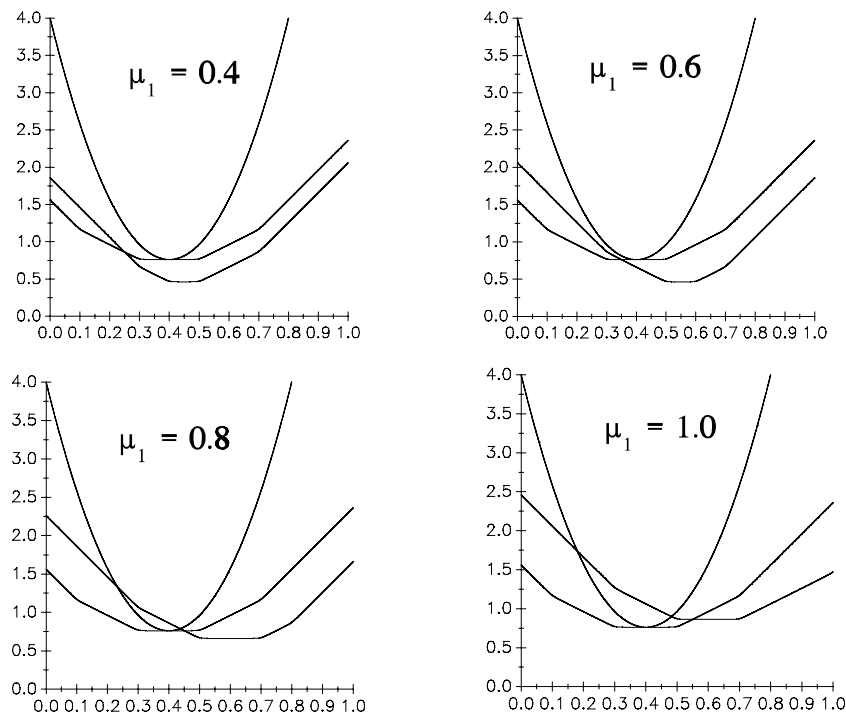


Figure 6.5 : Domaine de validité de l'approximation quadratique séparable

La figure 6.5 montre comment la variation d'une des variables du voisinage modifie fortement la courbe du périmètre. On modifie ici la variable  $\mu_1$  qui vaut initialement 0.1. Toutes les figures

montrent la courbe initiale du périmètre et l'approximation quadratique avec l'approximation préconisée. Sur chacune des figures, on superpose ensuite la nouvelle courbe du périmètre obtenue en prenant  $\mu_1$  égal à 0.4, 0.6, 0.8 et 1. On voit clairement que, pour  $\mu_1$  égal à 0.8 et 1., l'approximation même fortement convexe est mise en défaut. Elle n'est plus conservative pour un intervalle important domaine de conception de  $\mu$ .

*Une approximation utilisant la méthode de lissage*

Nous proposons aussi d'estimer de la courbure de l'approximation en utilisant une technique de lissage semblable à celle que Zhang et Fleury (1994) ont suggérée. On donne à l'approximation une courbure uniforme qui est ajustée pour lisser la valeur de la fonction périmètre qui est connue au point de conception précédent.

On suppose que l'approximation quadratique séparable est de la forme générale :

$$\tilde{P}(\boldsymbol{\mu}) = P(\boldsymbol{\mu}^0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial P}{\partial \mu_i} (\mu_i - \mu_i^0) + \frac{1}{2} \kappa \sum_{i=1}^n (\mu_i - \mu_i^0)^2 \quad (6.15)$$

Le facteur de convexité  $\kappa$  de l'approximation en  $\boldsymbol{\mu}^k$  est déterminé par la valeur du périmètre à l'itération précédente  $\boldsymbol{\mu}^{k-1}$  :

$$\kappa = \frac{P(\boldsymbol{\mu}^{k-1}) - P(\boldsymbol{\mu}^k) - \sum \frac{\partial P}{\partial \mu_i} (\mu_i^{k-1} - \mu_i^k)}{\frac{1}{2} \sum (\mu_i^{k-1} - \mu_i^k)^2} \quad (6.16)$$

Pour améliorer les estimations heuristiques de la courbure, on peut utiliser la méthode de correction du second ordre (SOC) pour les approximations quadratiques, méthode présentée au chapitre 5. Cette stratégie permet d'améliorer l'estimation de la courbure si elle est trop peu convexe.

*Estimation d'une courbure par une technique de BFGS diagonal*

La technique de Quasi-Newton, que nous avons mise au point pour des réponses structurales quelconques, peut être utilisée également pour la fonction périmètre. La technique de BFGS diagonale, que nous avons exposée dans un cadre général au chapitre 5, a été utilisée pour estimer la courbure du périmètre. Nous avons constaté que la procédure générale donne des résultats satisfaisants, mais la convexité est généralement un peu trop faible pour remplir pleinement les objectifs que nous nous sommes fixés, pour le contrôle des zones en damier comme nous le verrons dans la suite du chapitre. On arrive rapidement à une solution stationnaire, mais les conceptions intermédiaires violent systématiquement la borne sur le périmètre de quelques dixièmes de pour 100 à 1 pour 100. Quoique faible, cette violation suffit à laisser apparaître quelques motifs de distribution parasite.

Pour tenter de remédier à ce manque de conservativité, nous avons adapté la stratégie sur plusieurs points. D'abord, nous préférons choisir, comme courbure initiale de la séquence, une estimation plus réaliste. La courbure heuristique présentée précédemment est bien adaptée à cette tâche. Ensuite, nous pouvons augmenter artificiellement la convexification au sein de l'algorithme d'optimisation. Pratiquement, pour l'optimiseur CONLIN, on diminue le facteur "CVX". Une alternative à l'utilisation du facteur "CVX" consiste à augmenter uniformément la convexité de l'approximation par un processus similaire à celui de la procédure "SOC", en se basant sur la valeur de la restriction à l'itération précédente ou tout autre critère défini par l'utilisateur.

## 6.3 Les distributions en "damier" et autres modes parasites

### 6.3.1 Introduction

Rappelons que les distributions de densité dites en "damier" sont des régions où la densité de la solution dans des éléments finis contigus, varie de manière périodique et alternée entre deux densités, généralement le vide et le solide. Si le maillage est formé de carrés ou de rectangles, la distribution ressemble à l'arrangement des cases noires et blanches dans un jeu de dames ou dans un jeu d'échecs, d'où le nom de "*checkerboards patterns*" ou de "*chess-board patterns*" en anglais. Le damier "pur" correspond à la distribution 1-0-1-0 où chaque élément de l'assemblage est formé de vide et de solide comme on le voit sur la figure 6.6. La densité moyenne du damier pur est égale à la moitié de celle du solide. Il est cependant commun de rencontrer des "damiers gris" (figure 6.6). Le damier gris est formé par une composante de distribution de densité uniforme à laquelle se superpose une fraction de la distribution en damier pur.

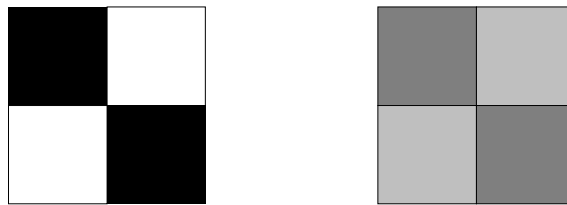


Figure 6.6 : Damier "pur" et damier "gris"

S'il est fréquent de rencontrer le phénomène d'instabilité avec des maillages carrés ou rectangulaires, il est certain que le phénomène n'est pas limité à ce type de géométrie de maillage. Comme nous le montrerons dans les applications à la fin de ce chapitre, nous avons constaté l'apparition de nouveaux modes de densité parasite avec des maillages triangulaires ou des maillages libres. Avec ces maillages où il y a peu de symétrie, le phénomène est généralement encore plus crucial.

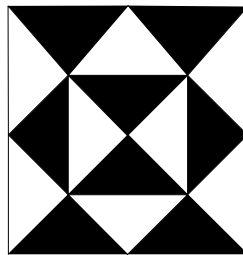


Figure 6.7 : Un mode parasite avec des triangles

#### 6.3.1.1 Origine des distributions en damier et des distributions parasites

Les modes parasites soulèvent deux types de questions. D'abord, il est intéressant de connaître l'origine des phénomènes d'instabilité et le mécanisme par lequel ils prennent naissance. Enfin, il est nécessaire de mettre au point des stratégies efficaces pour contrer leur formation et générer des solutions exemptes de tous ces modes parasites.

L'origine des distributions en damier (ou damiers, en abrégé) n'est pas encore complètement connue,

mais les recherches les plus récentes ont mis en lumière plusieurs caractéristiques fondamentales que nous tenterons de résumer. Les zones en damier ne peuvent pas être interprétées comme une sorte de microstructure poreuse optimale de densité intermédiaire ainsi que Díaz et Kikuchi (1992) l'avaient initialement suggéré. Plus tard, cette hypothèse fut complètement réfutée par les travaux de Berlyand et Kozlov (1992) sur les propriétés homogénéisées d'une microstructure en damier. En effet, l'analyse détaillée des propriétés homogénéisées d'un assemblage en damier (Berlyand et Kozlov, 1992) montre que la raideur homogénéisée du damier est exactement nulle à cause de la singularité de contrainte située au coin entre les deux régions solides.

Quoique la microstructure intervienne comme un paramètre de la manifestation des damiers, ce problème d'instabilité n'est pas non plus lié à la relaxation du problème. Le problème "des damiers" survient également avec des microstructures optimales telles que les matériaux feuilletés de rang  $N$ . Le phénomène des modes parasites a été amplement mis en évidence par Jog, Haber et Bendsøe (1993) lors de la résolution du problème de topologie avec les matériaux de rang 2 auto-adaptatifs, ainsi que par Bendsøe, Díaz et Kikuchi (1993) à l'occasion d'une étude de synthèse des méthodes d'homogénéisation. L'existence de zones en damier est présente avec tous les types de microstructures.

En réalité, l'origine du phénomène est *purement numérique*. Elle est reliée au calcul numérique de la solution avec une mauvaise approximation par éléments finis. Le phénomène des damiers est de nature similaire à celui qui est observé en mécanique des fluides, où la solution du problème de Stokes par éléments finis subit des variations périodiques de pression. Ce problème s'inscrit en réalité dans le cadre plus large de la stabilité des problèmes de point de selle. Pour le problème des écoulements incompressibles, le traitement numérique relève de la théorie des éléments finis hybrides dont la convergence est régie par les conditions de Babuška-Brezzi, ou conditions LBB. Pour les problèmes d'optimisation de distribution de matière, Jog et Haber (1994,1995) ont montré que les conditions d'application des conditions de Babuška-Brezzi ne sont pas remplies puisque l'espace des densités n'est pas un espace réflexif comme un espace de Hilbert. On est alors dans une situation non couverte par les théories de Babuška-Brezzi. Pour pallier à cette lacune, Jog et Haber (1994,1995) ont réalisé la première étude de stabilité du problème de topologie en vue de mettre en évidence des conditions de stabilité similaires à celles de Babuška-Brezzi pour les problèmes de "min-max" rencontrés en optimisation topologique. En pratique, ces deux auteurs proposent un *patch test* afin de détecter la stabilité des schémas d'approximation. Mais, la stabilité des schémas numériques employés en optimisation topologique fait encore actuellement l'objet de nombreuses recherches.

Parallèlement à l'*approche de stabilité globale* entreprise par Jog et Haber, Díaz et Sigmund (1994) ont étudié le phénomène des damiers sous une *approche locale*. Le but est de comprendre la raison physique pour laquelle le processus d'optimisation a tendance à générer ce type d'arrangement en damier en présence d'éléments de faible degré. Les résultats de cette étude seront décrits dans la suite de ce chapitre.

### 6.3.1.2 Critères de comparaison des stratégies d'élimination des distributions parasites

Pour générer des solutions sans distribution parasite, il existe plusieurs stratégies pour éliminer les damiers et les instabilités numériques. Plusieurs d'entre elles seront présentées par la suite. Leur comparaison peut être faite sur la base de plusieurs critères. Nous proposons ici une liste des critères qui nous paraissent les plus importants :

- Les zones en damier et les modes parasites doivent avoir complètement disparu après l'application de l'algorithme de prévention;
- Le coût de calcul nécessaire à l'algorithme de prévention doit rester aussi bas que possible;



- La stratégie doit être la plus simple possible à réaliser au sein d'un code de calcul et les modifications doivent y être aussi limitées que possible;
- La modification ne doit pas détruire la stabilité de l'algorithme d'optimisation;
- La stratégie de prévention doit être applicable à tout domaine de conception, quel que soit le maillage adopté, qu'il soit régulier ou libre;
- La stratégie de prévention peut être appliquée aux solutions après chaque cycle d'optimisation, ce qui transforme généralement les distributions en damier en zones "grises". L'élimination des damiers peut être faite directement au niveau de l'algorithme de sorte que la solution respecte les conditions du problème. Dès lors, l'intégration de l'élimination des damiers dans le processus d'optimisation nous paraît préférable.

### 6.3.2 Analogie avec le problème de Stokes et le problème d'élasticité incompressible

Jog, Haber et Bendsøe (1993) ainsi que Bendsøe, Díaz et Kikuchi (1993) ont suggéré que le problème des distributions en damier est de nature similaire à celui qui est observé en mécanique des fluides où la solution du problème de Stokes par éléments finis subit des variations périodiques de pression.

La forme mathématique des deux problèmes est similaire. En effet, lorsque l'on résout le problème de topologie selon une formulation déplacements, on est amené à considérer la solution du problème de type "min-max" d'une fonctionnelle de deux variables, les déplacements et la densité :

$$\max_{E_{ijkl} \in E_{ad}} \min_{\mathbf{v} \in V} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} E_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{v}) d\Omega - l(\mathbf{v}) \right\} \quad (6.17)$$

Ensuite, on observe une très grande similitude entre les distributions parasites présentes dans les résultats numériques obtenus pour le problème d'homogénéisation ainsi que pour le problème de Stokes.

Il est bien connu que la résolution par éléments finis de problèmes de type "min-max" peut poser des difficultés. Pour des fonctionnelles quadratiques concaves-convexes sur des espaces de Hilbert (espaces réflexifs), la stabilité de la solution est conditionnée par le respect des conditions LBB ou de Babuška-Brezzi. Plusieurs problèmes bien connus répondent à ces conditions : le problème d'écoulement incompressible ou problème de Stokes, le problème de l'élasticité en présence d'un matériau incompressible. Ces deux problèmes physiques s'inscrivent en réalité dans le cadre plus large de la stabilité des problèmes de point de selle. Leur traitement numérique relève de la théorie des éléments finis hybrides dont la convergence et la stabilité sont régies par les conditions de Babuška-Brezzi, ou conditions LBB. Pour de plus amples informations sur ce problème, on peut consulter, plusieurs ouvrages de synthèse tels que la monographie de Brezzi et Fortin (1991), le chapitre 4 de Hughes et Taylor (1987), ou le chapitre 9 (Partie II) (Oden, éditeur) du Finite Element Handbook (1987).

L'analogie entre le problème de Stokes et le problème de topologie n'est cependant pas complète. Dans le problème de topologie, la fonctionnelle objectif n'est ni convexe-concave, ni quadratique, et les variables de densité n'appartiennent pas non plus à un espace de Hilbert puisqu'elles sont dans  $L^\infty$  qui n'est pas un espace réflexif. Dès lors, on n'est pas dans une situation couverte par les théorèmes standard du point de selle, de sorte que les conditions de Babuška-Brezzi ne sont plus strictement applicables au problème d'homogénéisation.

Bien que les conditions de Babuška-Brezzi soient inapplicables et que l'analogie ne puisse pas être complètement prouvée, on ne peut ignorer la similitude entre les modes d'instabilité des deux types de problème, et il n'est pas interdit de s'inspirer du traitement des problèmes incompressibles pour suggérer des remèdes numériques en vue de prévenir la formation des distributions en damier. L'analogie avec le problème de Stokes permet, par exemple, de suggérer que certaines combinaisons de discrétisation en éléments finis des champs de déplacement et de densité seront stables ou instables.

Plusieurs combinaisons de type d'approximation du champ de déplacement et du champ de densité ont été testées. Conformément à notre expérience et à celle de la communauté scientifique, l'élément cinématiquement admissible de quadrangle à quatre noeuds (Q4) avec un champ de déplacement bilinéaire et une densité constante, s'est révélé instable; il entraîne l'apparition de zones en damiers. Notre expérience nous a appris que l'élément de triangle cinématiquement admissible avec un champ de déplacement linéaire et une densité constante est également instable. Pour le problème de Stokes, ces deux éléments produisent un champ de pression instable et la constante de la condition de Brezzi-Babuška dépend du maillage. Pareillement, les éléments de déplacement à huit (Q8) et neuf noeuds (Q9) et un champ de densité linéaire continu sont instables, comme ils le sont pour le problème de Stokes.

Pour assurer la stabilité de la solution calculée avec les matériaux de rang 2 auto-adaptatif, Jog, Haber et Bendsøe (1993) ont proposé d'employer des éléments cinématiquement admissibles de quadrangles à 8 et 9 noeuds avec une densité constante. Ces éléments qui ont été reconnus comme les plus stables en topologie sont également stables pour le problème de Stokes, quoique la convergence du champ de vitesse en norme énergétique soit suboptimale ( $O(h)$ ).

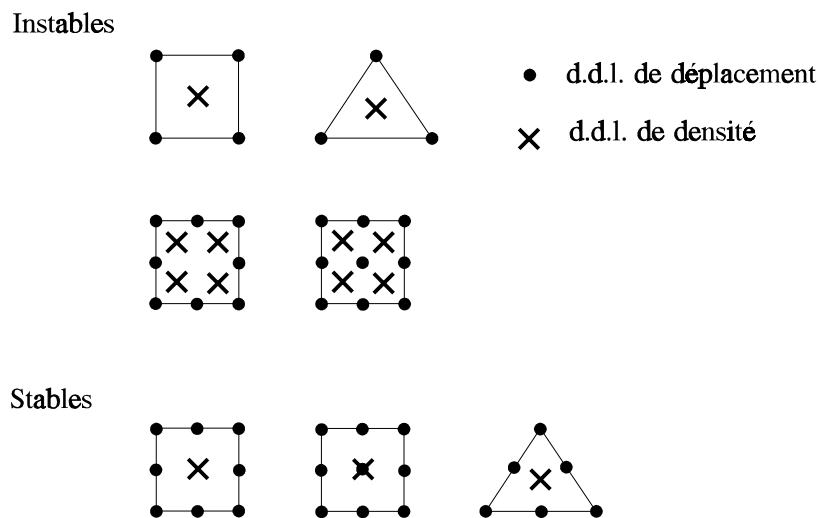


Figure 6.8 : Stabilité de différents éléments finis avec des densités discontinues

Avec ces éléments de second degré, on constate que les damiers et autres modes d'instabilité disparaissent lorsqu'on emploie des microstructures de rang 2, mais aussi des microstructures suboptimales telles que des microperforations rectangulaires, des microperforations sphériques (microstructure de Hashin) ou une microstructure de Hashin à deux niveaux. Nous avons également constaté que la pénalisation des densités intermédiaires favorisait l'apparition des instabilités. Pour les matériaux SIMP et les microperforations cylindriques avec une forte pénalisation des densités intermédiaires, le choix d'éléments du second degré améliore la stabilité, mais il reste parfois des damiers lorsque l'exposant  $p$  est élevé ou que le coefficient  $\xi$  est faible. Pour les matériaux SIMP,

nous proposerons une expérience simplifiée pour montrer l'influence de la pénalisation  $p$ .

Comme nous le verrons dans la suite du chapitre, Bendsøe, Díaz et Kikuchi (1993) ont également adapté une autre stratégie qui s'inspire de la technique des macroéléments. Pour le problème de Stokes, cette technique des macroéléments a été proposée par Johnson et Pitkranta (1982) et justifiée par Kikuchi, Oden et Song (1984). La formation de distributions en damier est contrôlée sur un patch de 4 éléments finis contigus, du premier degré. Les modes parasites sont éliminés de l'espace de conception et la méthode rétablit une convergence d'ordre  $O(h)$ .

La méthode des macroéléments correspond à l'introduction d'un "superélément" constitué de 4 éléments à quatre noeuds. Au total, le superélément possède 9 noeuds de déplacement et un total de 3 degrés de liberté pour décrire la densité. Si on la compare à l'élément du second degré à 9 noeuds (Q9) avec une densité constante, la méthode des macroéléments maintient une plus grande résolution du champ de densité. Cette remarque suggère encore d'essayer, dans le futur, un élément à 9 noeuds (Q9) avec un champ de densité linéaire discontinu. Pour le problème de Stokes, cet élément est inconditionnellement stable et il donne une approximation des champs de vitesse et de pression qui convergent tous deux avec un taux optimal  $O(h^2)$  en norme énergétique. Par analogie, on peut espérer de bonnes performances avec cet élément.

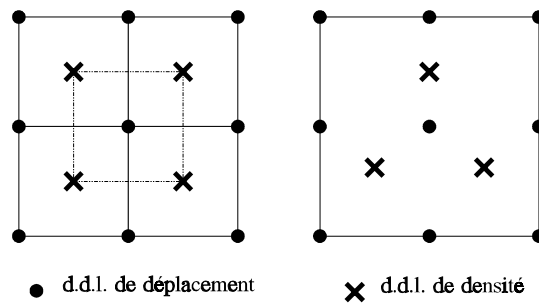


Figure 6.9 : Méthodes des macroéléments et éléments quadratiques avec champ de densité linéaire

### 6.3.3 Une expérience simplifiée sur l'influence du degré du champ de déplacement des éléments finis

Comme on vient de le voir, le recours à des éléments avec un degré d'approximation du champ de déplacement plus élevé favorise la disparition des structures en damier dans la solution numérique. Lorsque la pénalisation des densités intermédiaires est plus faible, les distributions parasites disparaissent complètement. Par contre, la présence des damiers diminue lorsqu'on élève le degré d'approximation du champ de déplacement. Malheureusement, il faut encore constater la présence de certains damiers résiduels. Le phénomène mérite d'être étudié de façon plus poussée pour être compris. Nous proposons d'abord une étude simplifiée sur une structure que l'on recouvre successivement avec une distribution en damier ou avec une distribution continue. Compte tenu de leur importance pratique, seuls les matériaux SIMP sont étudiés dans cette approche. Nous montrerons ensuite, que les conclusions partielles que nous pouvons tirer de cette expérience sont en concordance avec la théorie de Díaz et Sigmund (1995), basée sur les propriétés homogénéisées des assemblages en damier.

On tente d'expliquer le phénomène de manière assez intuitive par une expérience numérique portant sur un domaine rectangulaire similaire à celui d'une poutre cantilever courte. Le domaine est fixé sur un des petits côtés du rectangle tandis que l'autre côté est soumis à deux cas de charge élémentaires.

Le premier consiste en une extension uniforme du domaine. Le second est un cisaillement. On utilise trois types de matériaux SIMP avec des pénalisations croissantes  $p=2$ ,  $p=3$  et  $p=4$ . On couvre le coeur de la structure avec une distribution de densité en damier (de densité 0.01 et 1.) et une distribution uniforme (de densité 0.495). On réalise la même expérience successivement avec des éléments finis de degré 1 et de degré 2. Les tableaux 6.1 et 6.2 reprennent les énergies potentielles de déformation observées. La comparaison graphique des valeurs numériques est présentée aux figures 6.11 et 6.12.

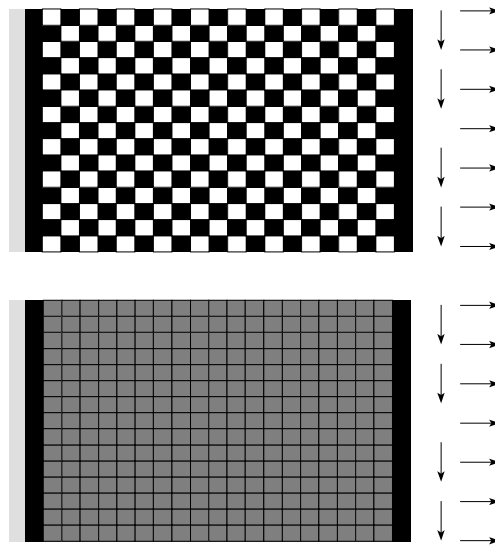


Figure 6.10 : Distribution de densité en damier et distribution de densité uniforme

Pénalisation SIMP	Damier		Uniforme	
	degré 1	degré 2	degré 1	degré 2
$p=2$	3.341976E-3	9.582062E-3	5.998505E-3	6.076625E-3
$p=3$	3.342474E-3	9.592468E-3	1.194392E-2	1.202488E-2
$p=4$	3.342479E-3	9.592572E-3	2.394407E-2	2.402986E-2

Pénalisation SIMP	Damier		Uniforme	
	degré 1	degré 2	degré 1	degré 2
$p=2$	5.035346E-2	1.240005E-1	7.770139E-2	7.920950E-2
$p=3$	5.036866E-2	1.241605E-1	1.540021E-1	1.559295E-1
$p=4$	5.036881E-2	1.241621E-1	3.079483E-1	3.106690E-1

On constate que la richesse du champ de déplacement de l'analyse par éléments finis influence très fortement la valeur de l'énergie de déformation calculée. Ce fait est particulièrement marqué pour les

distributions de densité de type damier où l'on observe une forte variation de l'énergie de déformation calculée en passant du degré 1 au degré 2 (la même conclusion pourrait être établie si on raffina le maillage en gardant une distribution de matière identique). Au contraire, pour la distribution uniforme, le problème numérique est moins critique et les approximations de degré 1 et 2 donnent des résultats fort semblables.

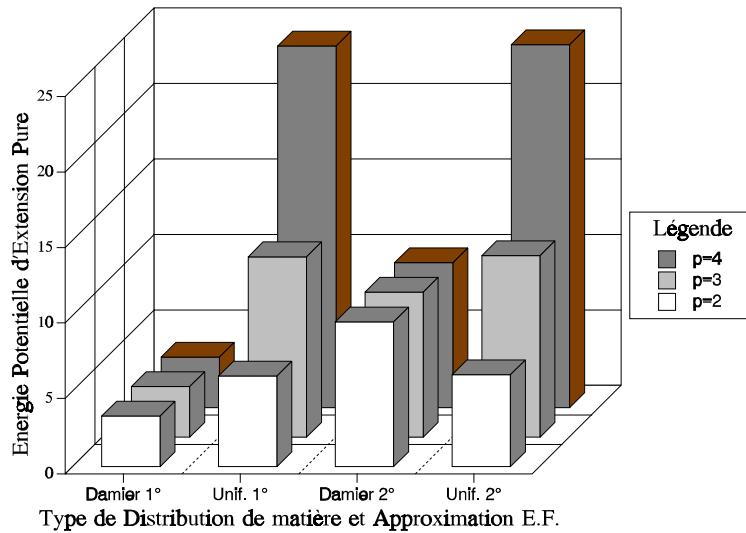


Figure 6.11 : Comparaison des énergies de déformation en extension pour différentes distributions de matière

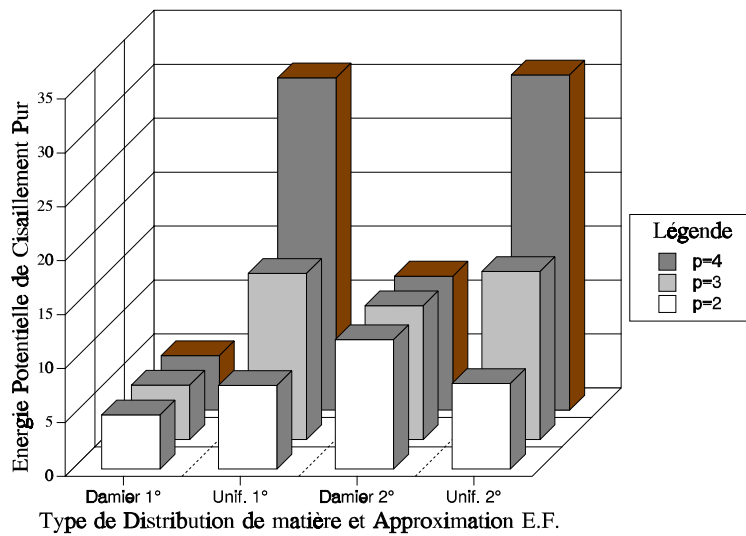


Figure 6.12 : Comparaison des énergies de déformation en cisaillement pour différentes distributions de matière

Si on se souvient maintenant que le problème du minimum de compliance est également équivalent au problème du minimum de l'énergie potentielle, on suspecte que l'optimisation se dirigera chaque fois vers la distribution de matière qui, pour une même densité globale, donnera l'énergie la plus basse. On voit alors clairement que pour une pénalisation quadratique ( $p=2$ ), le choix du degré 1 favorisera artificiellement le choix de la distribution en damier puisque sa valeur numérique calculée semble (faussement) la plus basse. Le passage au degré 2 renverse la situation et la distribution uniforme

redevient l'optimum recherché. Les conclusions sont plus difficiles *pour une pénalisation d'ordre 3* ( $p=3$ ). La distribution en damier est celle qui offre l'énergie la plus basse quel que soit le degré. Cependant la différence d'énergie entre les distributions est fortement réduite en passant au degré 2, au point qu'elles offrent des énergies fort similaires. La présence de zones en damier est alors plus rare. Avec  $p=3$ , le second degré n'élimine pas complètement les modes parasites, mais il est favorable à une réduction importante. En ce qui concerne *le degré 4* ( $p=4$ ), l'énergie de la solution en damier reste de loin la plus basse, quoiqu'un peu réduite par le passage au degré 2. L'élévation de degré est, de ce fait, favorable à la diminution des structures en damier, mais ne peut certes pas empêcher son apparition.

On peut maintenant tenter de comparer les résultats de la sollicitation en cisaillement et en extension; on espère en déduire une influence de l'état de sollicitation sur l'apparition de zones en damier. Lorsque l'on mesure la différence d'énergie entre la distribution en damier et la distribution uniforme, les valeurs sont très semblables pour les deux types de sollicitation. L'apparition de damiers ne serait que peu influencée par l'état de déformation. Cette conclusion paraît surprenante. Elle doit cependant être prise avec précaution. Dans notre expérience simplifiée, la sollicitation de la structure n'est pas "pure". Les conditions limites ne permettent pas de produire un état de cisaillement pur ou une extension pure en tout point de la structure. Dès lors, l'énergie mesurée est un mélange de différents états de sollicitation dont on ne voit qu'une moyenne. Il est alors hasardeux de conclure sur l'influence ou la non-influence précise de l'état de sollicitation local sur la présence de distributions en damier.

#### 6.3.4 Une analyse locale du problème des distributions en damier

L'analyse simplifiée que nous avons présentée n'est pas suffisante pour appréhender complètement l'origine des damiers. Une étude locale plus complète des damiers "purs" a été réalisée plus tard par Díaz et Sigmund (1994). Cette étude, postérieure à notre expérience simplifiée, justifie et quantifie nos conclusions partielles. Nous en résumerons donc les principaux résultats.

L'étude locale des damiers s'intéresse à l'énergie de déformation locale des arrangements en damier par comparaison avec tout autre arrangement de même densité moyenne. On évalue les propriétés homogénéisées d'une disposition en damier et on compare l'énergie de déformation engendrée avec celle d'un matériau de densité macroscopique égale, mais de microstructure de rang 2 ou de perforations rectangulaires. Pour une densité moyenne, et un champ de déformation fixé  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ , l'optimum local est tel qu'il maximise l'énergie de déformation. L'étude porte sur un damier pur. Les résultats sont résumés en deux propositions. La première concerne les matériaux avec une microstructure périodique (matériaux lamellés de rang 2 et perforations rectangulaires). La seconde est consacrée aux matériaux de type SIMP et au modèle de plaque généralisé.

L'ensemble  $X(\rho)$  est l'ensemble de toutes les microstructures dont la densité moyenne vaut la valeur prescrite  $\rho$ . Les tenseurs d'élasticité  $\bar{\mathbf{E}}_{4\text{Noeuds}}^{CH}$  et  $\bar{\mathbf{E}}_{9\text{Noeuds}}^{CH}$  sont respectivement les tenseurs homogénéisés des damiers. Ces propriétés sont celles d'une microstructure en damier lorsqu'on ne considère que des déplacements admissibles concordants avec l'approximation élément fini adoptée. C'est cette contrainte qui introduit une raideur supplémentaire dans l'assemblage en damier, puisque la raideur réelle d'un damier est nulle (Berlyand et Kozlov, 1992).

##### Proposition 1:

■ Calculée avec des éléments à 4 noeuds et de densité constante, l'énergie de déformation apparente d'une microstructure en damier est toujours plus grande que toutes les énergies de déformation obtenue avec n'importe quelle microstructure de même densité moyenne (y compris les matériaux de rang 2).

$$u_{4\text{Noeuds}}^{CH}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \bar{E}_{4\text{Noeuds}}^{CH} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} \geq \frac{1}{2} \max_{a \in X(\rho=1/2)} \bar{E}(a) \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.18)$$

■ Avec des éléments à 9 noeuds et densité constante, il existe des microstructures qui donnent une énergie de déformation supérieure à celle de l'énergie apparente obtenue avec un damier.

$$u_{9\text{Noeuds}}^{CH}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \bar{E}_{9\text{Noeuds}}^{CH} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} < \frac{1}{2} \max_{a \in X(\rho=1/2)} \bar{E}(a) \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.19)$$

Lorsqu'on utilise des éléments cinématiquement admissibles à 4 noeuds, on rigidifie artificiellement l'assemblage en damier, de sorte que cette distribution paraît plus rigide, au moins asymptotiquement, que les matériaux en couches de même densité. Le raidissement introduit par les éléments à 9 noeuds est beaucoup moindre. Etant donné que la microstructure en damier modélisée avec des éléments à 4 noeuds est plus rigide que tout autre distribution de matière, le processus d'optimisation numérique se dirigera spontanément vers leur formation.

Proposition 2:

■ Avec des éléments finis cinématiquement admissibles à 4 noeuds, l'énergie des distributions en damier est toujours supérieure à l'énergie exacte du matériau SIMP ( $p > 1$ ) :

$$\begin{aligned} & u_{4\text{Noeuds}}^*(\boldsymbol{\varepsilon}) = u_{SIMP}^*(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad p = 1 \\ \text{et} & \\ & u_{4\text{Noeuds}}^*(\boldsymbol{\varepsilon}) > u_{SIMP}^*(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad p > 1 \end{aligned} \quad (6.20)$$

■ Avec des éléments finis cinématiquement admissibles à 9 noeuds, l'énergie des distributions en damier est toujours inférieure à l'énergie exacte des matériaux SIMP si  $p < p_1^*(v)$ ; elle est supérieure à l'énergie exacte du matériau si  $p > p_2^*(v)$ ; entre ces deux valeurs, l'énergie des damiers est supérieure à l'énergie exacte pour certaines valeurs du champ de déformation :

$$\begin{aligned} & u_{9\text{Noeuds}}^*(\boldsymbol{\varepsilon}) < u_{SIMP}^*(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad p < p_1^*(v) \\ \text{et} & \\ & u_{9\text{Noeuds}}^*(\boldsymbol{\varepsilon}) > u_{SIMP}^*(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad p > p_2^*(v) \end{aligned} \quad (6.21)$$

où

$$p_1^*(v) = \frac{\log(22/(6-5v))}{\log(2)} \quad p_2^*(v) = \frac{\log(2(6-5v))}{\log(2)} \quad (6.22)$$

La proposition 2 démontre que les éléments du premier degré génère des zones en damier pour tous les exposants et que l'apparition de damiers est même possible pour le problème de membrane ( $p=1$ ). La proposition démontre aussi que les éléments du second degré peuvent renverser la situation pour certains exposants de la pénalisation, mais qu'au delà de certaines valeurs de la pénalisation, l'occurrence de distributions en damier redevient possible. L'apparition des zones en damier devient inévitable lorsque l'exposant dépasse une valeur maximale  $p_2$ .

L'étude locale permet de déterminer l'influence de l'état de sollicitation sur l'occurrence de damiers. Pour toutes les microstructures et pour les matériaux SIMP, l'état de sollicitation le plus favorable est celui dans lequel les déformations principales ont des valeurs (et des signes) identiques, ce qui correspond à un état de mise en charge hydrostatique. L'état de cisaillement pur et l'extension pure sont également favorables à l'apparition des distributions en damier. Le cisaillement est légèrement plus favorable que l'extension. L'état le moins favorable à l'apparition des zones en damier est la traction uniaxiale.

En revenant à notre expérience simplifiée du paragraphe précédent où  $\nu=0.3$ , on a  $p_1 = 2.29$  et  $p_2 = 3.17$ . Comme nous l'avons remarqué alors, pour  $p=2$ , les éléments du premier degré sont instables tandis que les éléments du second degré éliminent les damiers. Pour  $p=3$ , nous nous trouvons dans la zone partiellement stable, partiellement instable de sorte que l'apparition de zones en damier est possible. Dans l'expérience simplifiée où les conditions de sollicitation ne sont pas "pures", c'est-à-dire uniformes sur l'ensemble de la structure, l'énergie de la structure en damier reste supérieure à celle de la distribution uniforme. Quant à  $p=4$ , cette pénalisation est supérieure à  $p_2$  et l'élévation de degré ne peut empêcher la formation des distributions en damier comme nous l'avons constaté. On remarquera enfin que la comparaison entre l'expérience simplifiée est limitée. La théorie de Díaz et Sigmund (1995) est basée sur une microstructure en damier homogénéisée, alors que l'expérience simplifiée travaille avec une distribution macroscopique en damier.

### 6.3.6 La méthode des macroéléments

La similitude avec les problèmes d'instabilité observés dans les écoulements de Stokes a inspiré une méthode heuristique à Bendsøe, Díaz et Kikuchi (1993) pour contrôler la formation de damiers. La technique utilisée est généralement connue sous le nom de *technique des macroéléments*. La méthode a pour but de prévenir les distributions parasites quand le maillage régulier est composé d'éléments finis quadrangulaires avec un champ de déplacement bilinéaire et une densité constante. La stratégie consiste à éliminer les modes parasites sur un macroélément composé de quatre éléments finis contigus. La méthode se contente d'éléments du premier degré et elle permet d'éviter le recours aux éléments du second degré, plus onéreux.

Premièrement, on suppose que le domaine de conception est rectangulaire et qu'il est couvert par un maillage régulier d'éléments carrés avec  $M$  et  $N$  ( $M$  et  $N$  pairs) éléments par bord. Chaque élément  $K$  est identifié par un double indice  $K_{ij}$ .

Deuxièmement, on suppose que la variable est la densité  $\rho$  à l'intérieur de chaque élément. La densité  $\rho$  et ses variations  $\delta\rho$  appartiennent à l'espace de fonctions continues par morceau sur le domaine de conception  $\Omega$ . Comme le montre la figure 6.13, on considère le *patch*  $P_{ij}$  formé par quatre éléments contigus  $K_{ij}, K_{i+1j}, K_{ij+1}, K_{i+1j+1}$ . On décrit la distribution de densité dans le *patch*  $P_{ij}$  à l'aide de 4 fonctions de base  $\phi_{ij}^1, \phi_{ij}^2, \phi_{ij}^3, \phi_{ij}^4$  qui ne prennent que les valeurs  $\pm 1$  dans chaque élément du *patch* et zéro en dehors. Les fonctions  $\{\phi_{ij}^k\}$  forment une base orthogonale.

La distribution de densité parasite en damier est un mode de type 4 pur que l'on doit éliminer sur chaque *patch*, de sorte que l'espace des conceptions admissibles  $\bar{V}_\rho$  pour la densité  $\rho$  est donné par :

$$\bar{V}_\rho = \{ \rho \in \mathcal{R} : \rho(\mathbf{x}) = \sum_{P_{ij}} (\rho_{ij}^1 \phi_{ij}^1 + \rho_{ij}^2 \phi_{ij}^2 + \rho_{ij}^3 \phi_{ij}^3) , (\rho_{ij}^1, \rho_{ij}^2, \rho_{ij}^3) \in \mathcal{R}^3 , \forall \mathbf{x} \in \Omega \}$$



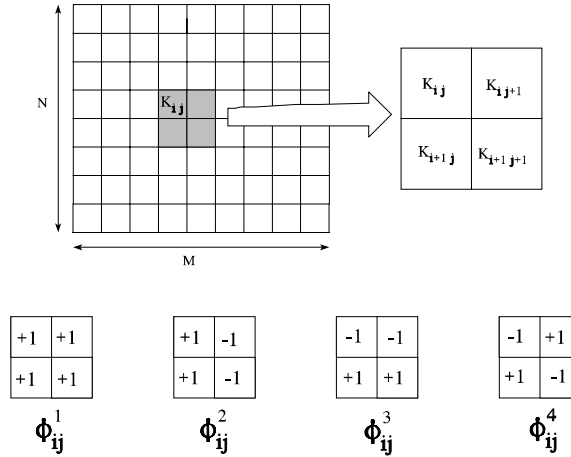


Figure 6.13 : Fonctions de base sur le patch

Les inconnues de la distribution sur le patch deviennent  $\rho_{ij}^1, \rho_{ij}^2, \rho_{ij}^3$ . Les conditions tiennent évidemment pour chaque patch, de sorte que les quatre éléments du patch sont liés. Il est alors difficile d'appliquer les techniques par critère d'optimalité. Si on adopte un algorithme de programmation mathématique, on peut essayer d'effectuer un changement de variables. Dans la situation la plus simple, où la microstructure est décrite par un seul paramètre de densité relative, le lien entre les variables de densité sur le patch réduit le nombre de variables de conception indépendantes par un facteur 3/4. Le changement de variables sur les dérivées est classique et il ne pose pas de problème. La difficulté d'application du changement de variables provient du fait que les contraintes de borne sur les densités d'éléments se transforment en contraintes linéaires :

$$\begin{aligned}
 0 \leq \rho_{ij} &= \rho_{ij}^1 + \rho_{ij}^2 - \rho_{ij}^3 - \rho_{ij}^4 \leq 1 \\
 0 \leq \rho_{i+1j} &= \rho_{ij}^1 + \rho_{ij}^2 + \rho_{ij}^3 + \rho_{ij}^4 \leq 1 \\
 0 \leq \rho_{ij+1} &= \rho_{ij}^1 - \rho_{ij}^2 - \rho_{ij}^3 + \rho_{ij}^4 \leq 1 \\
 0 \leq \rho_{i+1j+1} &= \rho_{ij}^1 - \rho_{ij}^2 + \rho_{ij}^3 - \rho_{ij}^4 \leq 1
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

En manipulant les inégalités, on peut en retirer les bornes sur les nouvelles variables :

$$0 \leq \rho_{ij}^1 \leq 1 \quad -1/2 \leq \rho_{ij}^2 \leq 1/2 \quad -1/2 \leq \rho_{ij}^3 \leq 1/2 \quad -1/2 \leq \rho_{ij}^4 \leq 1/2 \tag{6.24}$$

Le respect des contraintes de borne ne garantit cependant pas le respect des inégalités de départ. La solution du problème d'optimisation requiert donc la prise en compte d'une contrainte linéaire pour chaque élément. Comme à l'optimum, beaucoup de contraintes de bornes sont actives, les contraintes linéaires correspondantes sont actives dans la solution du problème. Si on utilise un algorithme de maximisation Lagrangienne, on est confronté à un problème dual de très grande taille pour lequel on perd largement l'avantage d'une réduction du nombre de variables de conception.

Pour appliquer cette méthode d'élimination des damiers, Bendsøe, Díaz et Kikuchi (1993) proposent de l'appliquer comme un traitement a posteriori de la solution obtenue après l'optimisation afin d'en filtrer les modes parasites. Pour chaque patch  $P_{ij}$ , on élimine les modes parasites de la distribution de densité proposée.

On veut transformer la distribution de densité constante par élément

$$\rho(\mathbf{x}) = r_1 \phi^1 + r_2 \phi^2 + r_3 \phi^3 + r_4 \phi^4 \quad \mathbf{x} \in P_{ij}$$

en une nouvelle distribution de densité constante par élément

$$\bar{\rho}(\mathbf{x}) = \bar{r}_1 \phi^1 + \bar{r}_2 \phi^2 + \bar{r}_3 \phi^3 + \bar{r}_4 \phi^4 \quad \mathbf{x} \in P_{ij}$$

qui soit libre de damiers ( $\bar{r}_4 = 0$ ) et qui conserve le volume dans le *patch* :  $\int_{P_{ij}} \bar{\rho} d\Omega = \int_{P_{ij}} \rho d\Omega$

Parmi tous les choix possibles, on sélectionne la meilleure approximation au sens de  $L^2(P_{ij})$  et satisfaisant aux deux contraintes exprimées précédemment. On trouve alors:

$$\begin{cases} \bar{\rho}_1 = \frac{1}{4} (3\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 - \rho_4) \\ \bar{\rho}_2 = \frac{1}{4} (\rho_1 + 3\rho_2 - \rho_3 + \rho_4) \\ \bar{\rho}_3 = \frac{1}{4} (\rho_1 - \rho_2 + 3\rho_3 + \rho_4) \\ \bar{\rho}_4 = \frac{1}{4} (-\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + 3\rho_4) \end{cases} \quad (6.25)$$

Enfin, on retrouve les paramètres de microstructure à partir des nouvelles densités  $\bar{\rho}_k$ . L'approche la plus simple proposée par Bendsøe *et al.* (1993) est basée sur une simple remise à échelle des paramètres de microstructure à l'aide d'un facteur de proportionnalité pour rencontrer la nouvelle densité.

La méthode a été testée sur une large variété de problèmes. On rapporte cependant que, dans certains problèmes, l'élimination des modes en damier n'est pas totale. Certains modes de damiers peuvent apparaître entre deux *patches* car il n'y a pas de contrôle à ce niveau. Une autre faiblesse réside dans le fait que la méthode n'est applicable qu'aux maillages carrés ou rectangulaires, formés d'un nombre d'éléments pairs. Il n'est pas possible de traiter les maillages libres ou triangulaires qui sont fort pratiques pour les pièces de géométrie compliquée. Enfin, l'application de la stratégie des macroéléments au niveau de l'algorithme est coûteuse ou impossible avec nos algorithmes d'optimisation.

### 6.3.7 La méthode des filtres

Il est possible de regarder le domaine discrétisé et la distribution de matière comme une image digitalisée. Chaque élément représente un *pixel* et la densité au sein de chaque élément peut être associée à une échelle de gris où le blanc représente le vide et le noir, le solide. Les distributions en damier sont alors interprétées comme des bruits indésirables à éliminer. L'épuration de tels bruits peut être réalisée par des techniques de filtres semblables à celles qui sont utilisées en traitement d'image. Les techniques basées sur la transformation de Fourier permettent d'éliminer les distributions parasites de fréquence élevée. Malheureusement, elles sont difficilement applicables en topologie, car elles ne peuvent être utilisées que sur des maillages rectangulaires réguliers. Les filtres par produits de convolution ne possèdent pas ce désavantage, mais la technique est moins intuitive.

### Filtrage des distributions en damier

Pour enlever les damiers, Sigmund (1994) sélectionne une stratégie basée sur un filtre passe-bas. Sigmund adopte le filtre paramétrique 3x3 de réponse impulsionnelle suivante :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{(b+2)^2} \begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ b & b^2 & b \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix} \quad b \in [1, \infty[ \quad (6.26)$$

On identifie la distribution de densité par un double indice. La distribution filtrée est donnée par :

$$\mathbf{G}(i,j) = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \mathbf{F}(m,n) \mathbf{H}(m+i-2, n+j-2) \quad (6.27)$$

La procédure d'application du filtrage consiste à prendre le résultat de l'algorithme d'optimisation et à le soumettre au filtre. Les damiers sont transformés en régions grises. Par contre, après l'élimination des modes de damiers dans la solution issue de l'algorithme d'optimisation, le résultat ne répond plus aux conditions d'optimalité. Il est préférable que la prévention des damiers soit incorporée dans l'algorithme d'optimisation. Pour intégrer le filtre dans la procédure d'optimisation, Sigmund (1984) préconise une méthode heuristique dans laquelle les densités d'énergie sont modifiées selon une pondération issue de la matrice de réponse impulsionnelle.

Pour un matériau SIMP de puissance  $p$ , on trouve l'énergie relative pondérée :

$$\rho_e^p \bar{u}_e^0 = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n_H} H_k^*} \sum_{l=1}^{n_H} H_l^* \rho_l^p u_l^0 \quad (6.28)$$

où  $\rho_e$  est la densité constante par élément,

$u_e^0 = \mathbf{q}_e^T \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{q}_e$  est la densité relative de l'élément solide,

$n_H$  est le nombre d'éléments voisins de l'élément  $e$  qui existent physiquement,

$H_i^* = (b+2)^2 H_i$  est la matrice de réponse impulsionnelle sans le facteur d'échelle.

Sigmund remplace l'énergie de déformation réelle  $\rho_e^p u_e^0$  par la densité d'énergie pondérée  $\rho_e^p \bar{u}_e^0$ . La même démarche est effectuée pour les dérivées de la compliance. Le critère d'optimalité ou l'approximation convexe et l'algorithme de programmation mathématique sont alors appliqués avec ces modifications. Toutes les procédures de calcul restent donc formellement inchangées après la substitution des énergies de densité relative. Bien que la fonction Lagrangienne du problème pondéré ne soit pas connue pour l'instant, l'expérience numérique montre que la procédure génère des structures de compliance décroissante sans damier. Le paramètre  $b$  contrôle la fréquence de coupure du filtre. En dessous d'une certaine valeur de  $b$ , tous les damiers disparaissent de la solution.

### Éliminer la dépendance vis-à-vis du maillage

À l'origine, on constate qu'on génère des solutions avec des membres moins nombreux et plus massifs pour les faibles valeurs paramètres  $b$ , c'est-à-dire pour des fréquences de coupure basses. De plus pour

générer des solutions indépendantes du maillage, il faut un filtrage indépendant du maillage. On modifie le filtre et on l'étend à tous les éléments présents dans une sphère de rayon  $r_{\min}$  autour de l'élément "e". Le rayon  $r_{\min}$  est fixé indépendamment du maillage. Les facteurs de poids du filtre de convolution sont alors :

$$\hat{H}_f = v_f [r_{\min} - \text{dist}(e, f)] \quad \{f \mid \text{dist}(e, f) \leq r_{\min}\} \quad (6.29)$$

où  $\text{dist}(e, f)$  est la distance entre les centres des éléments  $e$  et  $f$ , et  $v_e$  est le volume de l'élément  $e$ . On calcule la densité d'énergie relative pondérée sur les éléments présents dans la sphère de rayon  $r_{\min}$  autour de "e" :

$$\rho_e^p \bar{u}_e^0 = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n_r} \hat{H}_k} \sum_{l=1}^{n_r} \hat{H}_l \rho_l^p u_l^0 \quad (6.30)$$

L'utilisation du filtre introduit une longueur  $r_{\min}$  en deçà de laquelle il n'y a plus de variation structurale. On peut aussi dire que cette technique introduit une certaine séparation entre la discrétisation éléments finis et les variables de conception. Si  $r_{\min}$  est fixé indépendamment du maillage, la variation de densité est indépendante du maillage. La séparation entre le vide et le solide va varier continûment selon une échelle de gris avec une épaisseur égale approximativement à  $r_{\min}$ . Pour  $r_{\min}$  supérieur à environ 1.1 fois la valeur de la taille maximale des éléments, la procédure élimine aussi les damiers.

## 6.4 Le contrôle du périmètre : une nouvelle stratégie pour éliminer les distributions en damier et les autres modes parasites

### 6.4.1 Le principe de la stratégie

La théorie de Ambrosio et Buttazzo (1993) démontre la régularisation du problème de topologie avec un périmètre borné. Le contrôle du périmètre exclut, de l'espace de conception, toutes les distributions de densités qui varient de manière oscillante et il empêche la résurgence d'une microstructure au niveau du maillage macroscopique.

Nous avons constaté qu'une borne sur le périmètre permet également d'éliminer les structures en damier et les modes parasites. L'explication est suggérée à la figure 6.14. On y montre trois distributions de densité de même surface. La première (figure 6.14a), qui est une distribution uniforme de densité 0.5, affiche le périmètre le plus petit. Les deux autres (figure 6.14b et c) sont constituées de deux éléments finis de densité unitaire et de deux autres remplis de vide. La distribution en damier (figure 6.14c) introduit un périmètre très supérieur aux deux autres. Si on ne tient pas compte de la contribution du périmètre extérieur (4a dans les trois distributions), l'accroissement du périmètre est doublé entre la distribution contiguë en ligne et la distribution parasite en damier.

Nous avons constaté qu'en imposant une borne suffisamment basse sur le périmètre, les modes de distribution parasite sont pénalisés de manière telle qu'ils disparaissent de la solution. Si la borne sur le périmètre est **active** dès les maillages les plus grossiers et si les damiers y sont éliminés, nous avons également remarqué que la contrainte de périmètre restait suturée lorsqu'on raffine le maillage et que

les damiers ne réapparaissent pas dans la distribution. La résolution de la distribution de matière est sans cesse améliorée et elle n'est pas perturbée par des modes de distribution parasite.

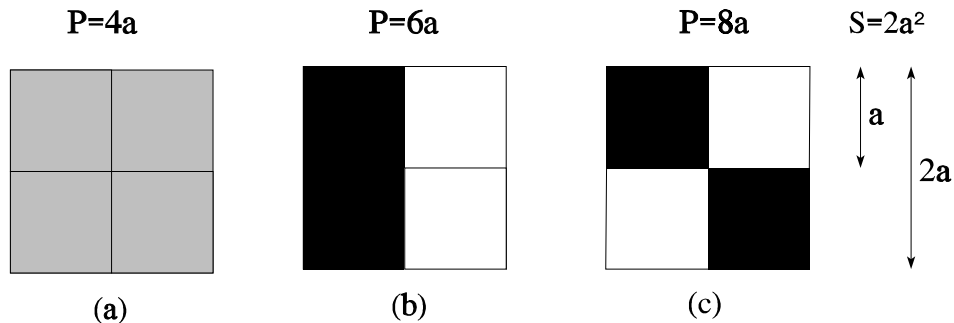


Figure 6.14 : Comparaison du périmètre associé à différentes distributions de densité

D'après notre expérience, on peut résoudre le problème numérique des distributions en damier au moyen d'une borne adéquate sur le périmètre. Même si le but initial de la borne sur le périmètre est de régulariser la solution, cette contrainte de conception peut être adaptée pour prévenir la formation des distributions parasites.

Cette démarche est exactement l'inverse de celle qui a été effectuée par Sigmund (1994a) pour le filtrage des distributions de densité. Il semble que la possibilité de transférer des techniques qui sont destinées à résoudre les problèmes de stabilité de la solution ou à éliminer les zones en damier, n'est qu'une manifestation du fait qu'on se trouve confronté, dans les deux cas, à des problèmes d'origine purement numérique. En outre, la méthode de filtres et la méthode du périmètre sont semblables par leur principe physique. Les distributions parasites et la dépendance de la solution avec le maillage se caractérisent par des variations de densité à haute fréquence. Sigmund (1994a) élimine ces variations spatiales par un filtre passe-bas. La méthode du périmètre pénalise les variations rapides car elles augmentent fortement le périmètre de la distribution.

Jusqu'à présent, nous n'avons pu établir aucune démonstration mathématique de l'élimination des damiers, hormis celle qui existe pour l'indépendance de la solution vis-à-vis du maillage (Ambrosio et Buttazzo, 1993). En raisonnant, nous comprenons que si la borne sur le périmètre est saturée, l'apparition d'un mode parasite augmenterait fortement la longueur de l'isovaleur pour un faible accroissement de l'énergie potentielle. Cependant, puisqu'on suppose que la contrainte sur le périmètre est active, tout accroissement de la longueur du périmètre est impossible de sorte que l'algorithme choisit la distribution de matière qui maximise la raideur pour le périmètre imposé. Cette solution revient à transformer les damiers en zones de densité uniforme.

Dans l'état actuel de nos connaissances, nous ne pouvons pas fournir d'autre démonstration de notre stratégie qui reste en partie intuitive. Néanmoins, nous pensons que la justification mathématique doit être trouvée en étudiant la stabilité des conditions d'optimalité du problème de conception avec un périmètre borné. Après avoir tenu compte du terme additionnel du périmètre dans les conditions d'optimalité, la stabilité des conditions d'optimalité doit être analysée à la manière de Jog et Haber (1994, 1995). Il s'agirait là de la preuve mathématique irréfutable de la stratégie.

Dans la pratique, le succès de la méthode de contrôle du périmètre pour éliminer les distributions parasites dépend fortement de la conservativité de l'approximation du périmètre. La disposition d'une approximation très conservatrice est indispensable pour limiter les modifications de densité et produire

des distributions intermédiaires exemptes de modes parasites. La conservativité de l'approximation amortit les mouvements de permutation des densités entre deux ou plusieurs éléments voisins. On empêche alors une "oscillation" de la distribution de matière entre deux modes parasites, l'un étant le négatif de l'autre.

La figure 6.14 révèle aussi un effet indirect peu favorable de la limitation du périmètre. Un faible périmètre favorise l'apparition de zones de densité intermédiaire, chose que nous voulons proscrire. Pour lutter contre cet inconvénient de la pénalisation du périmètre, il faut défavoriser les densités intermédiaires, par exemple, en augmentant l'exposant  $p$  de la pénalisation de la loi SIMP.

#### **6.4.2 Comparaison de la stratégie du périmètre et des autres méthodes d'élimination des modes de distribution parasite**

En activant la borne sur le périmètre, nous avons constaté que la formation de damiers et des autres modes étaient éliminés de la solution, ce qui nous a inspiré une méthode de contrôle des modes parasites. On peut maintenant comparer les avantages et les inconvénients de cette nouvelle stratégie par rapport aux autres méthodes qui ont été présentées précédemment dans le chapitre : l'élévation du degré d'approximation des déplacements, la technique des macroéléments de Bendsøe, Díaz et Kikuchi (1993) et la méthode des filtres de Sigmund (1994a, 1995).

*La stratégie du périmètre est complètement intégrée dans la phase d'optimisation* comme le filtrage des hautes fréquences et l'utilisation des éléments du second degré. La distribution qui est donnée par l'algorithme d'optimisation tient compte de la borne sur le périmètre et de la pénalisation des damiers. La technique des macroéléments est la seule qui soit appliquée après la phase d'optimisation proprement dite.

*La méthode du périmètre exige peu de temps de calcul supplémentaire* car il s'agit d'une grandeur géométrique. La plupart des informations nécessaires au calcul de sensibilité sont déjà disponibles parce qu'elles sont déjà utilisées pour le volume. Seules les données sur la topologie du maillage doivent être calculées. Pour une plus grande efficacité, ces dernières données peuvent être préparées une fois pour toutes au début des cycles d'optimisation lorsqu'on travaille avec un maillage fixe. En conséquence, le coût de calcul supplémentaire relatif à la contrainte du périmètre se chiffre à quelques pour 100 du temps de calcul de l'analyse de la sensibilité de la compliance.

Ce petit supplément de coût de calcul est largement compensé par le fait que *l'on peut utiliser des éléments du premier degré*. Sur ce point, la stratégie du périmètre, des macroéléments et la méthode des filtres sont totalement comparables. L'utilisation d'éléments du second degré pourrait affecter le coût de calcul par un facteur 16 au plus. Généralement, l'optimisation de la largeur de bande de la matrice de raideur structurale permet de réduire ce facteur dans un niveau plus raisonnable, mais néanmoins, le coût de calcul avec des éléments du second degré reste beaucoup plus élevé.

Comme toutes les autres méthodes d'élimination des damiers, *la stratégie du périmètre laisse inchangée les zones exemptes de damier*. D'après notre expérience, *les modes parasites sont totalement éliminés de la solution finale*.

*Le périmètre est une contrainte "globale" sur la distribution de matière*. C'est la seule stratégie qui fonctionne au niveau de la structure complète. L'enrichissement du champ de déplacement est une stratégie active au niveau des éléments. La technique des macroéléments travaille sur des patches de quatre éléments contigus. La méthode des filtres de convolution considère un voisinage, de rayon déterminé ou d'un nombre fixé d'éléments.

En outre, le niveau auquel les différentes méthodes travaillent est en relation avec leur mode d'action et leur justification. On cite les méthodes en partant du niveau local et en allant vers le niveau global de la structure. L'élévation du degré des éléments est basée sur l'analyse de l'interaction entre les approximations des champs de déplacement et de densité (Jog et Haber, 1994 et Díaz et Sigmund, 1995). La technique des macroéléments procède par élimination des damiers au niveau du *patch* de quatre éléments. Physiquement, la méthode des filtres élimine les distributions spatiales dont les variations sont trop rapides. La méthode, qui fonctionne comme un filtre passe-bas, n'autorise pas de variation dont la longueur descend en dessous d'une distance caractéristique donnée. Enfin, la méthode du périmètre détruit les distributions parasites parce qu'elles augmentent le périmètre global de la solution.

*L'élimination totale des modes d'instabilité n'est garantie qu'à la fin du processus de convergence* car la contrainte de périmètre est une restriction globale dont la satisfaction dépend du processus d'optimisation. Il est possible que les résultats intermédiaires contiennent quelques distributions parasites.

En contrepartie, le contrôle global de la solution, nous permet d'affirmer que si la méthode élimine les modes parasites, *cette élimination est effectuée sur l'entièreté de la structure*. Ce fait n'est pas la propriété de toutes les stratégies. Avec la technique des macroéléments, on obtient des distributions sans damier sur chaque *patch*. On remarque cependant la persistance de damiers "à cheval" sur deux ou plusieurs *patches* car ces modes ne sont pas contrôlés. Avec de fortes pénalisations des densités intermédiaires, Díaz et Sigmund (1995) ont montré que l'occurrence de damiers est toujours possible dans certaines conditions, même avec des éléments du second degré.

*La méthode du périmètre est encore naturellement adaptée à tous les types de maillage* : réguliers, triangulaires ou libres. Si la prise en considération de maillages libres est également immédiate avec les éléments du second degré ou la méthode des filtres, par contre, la technique des macroéléments est dédiée aux réseaux de mailles régulières et rectangulaires.

Enfin, la méthode du périmètre et la méthode des filtres modifiée sont les deux seules techniques qui permettent de *garantir simultanément la convergence de la solution vis-à-vis du maillage*. Ce fait est relativement compréhensible si l'on songe qu'il s'agit des deux méthodes qui travaillent sur une longueur caractéristique indépendante du maillage adopté. Le périmètre travaille sur l'ensemble de la structure. Le filtre modifié considère un voisinage de taille  $r_{\min}$  fixée.

Comme nous l'avons signalé précédemment, les méthodes des filtres et du périmètre fonctionnent avec un principe physique équivalent : les deux méthodes éliminent les variations trop rapides de la distribution de matière. La distinction entre les deux méthodes est basée sur le critère d'élimination.

Une différence existe cependant dans les résultats obtenus avec les deux méthodes. Avec la méthode des filtres, on prescrit une longueur  $r_{\min}$  en deçà de laquelle toute variation structurale ne peut exister. Dès lors, les membres structuraux ne peuvent posséder une épaisseur inférieure à  $r_{\min}$  quelle que soit la taille du maillage. Au contraire, avec la restriction sur le périmètre, qui est une contrainte globale sur la structure, rien n'empêche un membre structural de devenir de plus en plus fin avec le maillage, tout en ne disparaissant pas. En pratique, on observe cependant que le périmètre "assigne", en quelque sorte, une certaine quantité de matière à un membre structural. On constate, par ailleurs, que cette quantité de matière "assignée" au membre semble rester constante quel que soit le maillage, de sorte qu'après un certain niveau de raffinement du maillage, l'épaisseur du membre reste fixée. Lorsque le maillage est grossier, il en résulte souvent qu'un membre devienne "diffus", car le respect du périmètre est favorisé par une transition de densité sur quelques éléments. Lorsque la finesse de maillage augmente, cette transition est conservée sur un nombre identique d'éléments et le membre semble

devenir plus fin. La résolution de son contour devient plus nette et plus précise.

## 6.5 Applications

### 6.5.1 Le problème de la poutre cantilever courte

Le problème de la poutre cantilever courte est maintenant familier. Les données géométriques et matérielles de cet exemple sont identiques à celles du chapitre 4. Le matériau est un matériau SIMP avec une pénalisation quadratique des densités intermédiaires ( $p=2$ ).

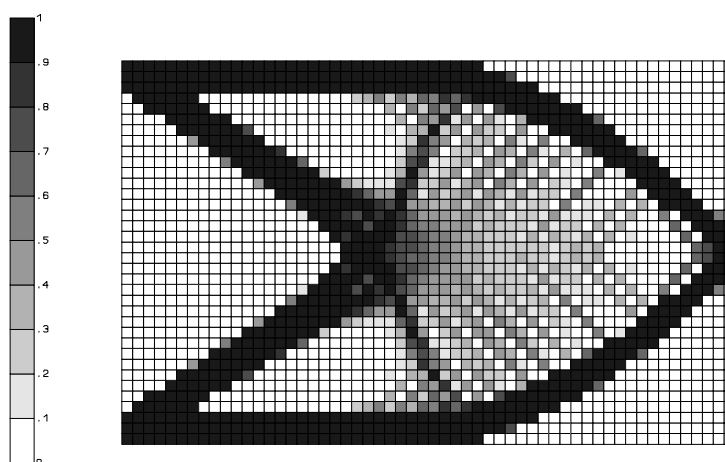


Figure 6.15 : Apparition de figures en damier dans le problème de la poutre courte avec  $p=2$

On adopte d'abord des éléments finis du premier degré. La solution représentée à la figure 6.15 laisse apparaître de très larges zones de damiers. Les damiers ne sont pas exclusivement formés de vide et de solide encore appelés "damiers purs". Les damiers qu'on voit ici sont constitués d'une densité moyenne plus faible et l'on a ce que l'on appelle des damiers "gris". Leur présence est couramment rencontrée dans les zones de densité intermédiaire. Les damiers gris sont notamment souvent présents avec les matériaux feuilletés de rang 2. Les damiers sont largement présents dans la large zone de densité intermédiaire en état de contrainte biaxial (principalement de cisaillement) tandis que les membres plus massifs qui sont sollicités en traction pure ne présentent pas de damier. Cette observation confirme que l'état de contrainte joue un rôle dans l'apparition des instabilités numériques.

On utilise ensuite des éléments du second degré pour éliminer la distribution en damier. L'étude simplifiée avait clairement montré que les distributions continues possédaient l'énergie la plus basse lorsqu'on avait des éléments à 9 noeuds. La figure 6.16 ne contient effectivement plus de zone en damier.

On traite enfin le problème de conception avec des éléments du premier degré et une contrainte sur le périmètre. Le périmètre de la solution dépourvue de zone en damier qui est obtenue avec des éléments du second degré sert de valeur de référence. On impose la même valeur comme borne maximale du périmètre pour cette nouvelle optimisation. Le résultat de la distribution de matière est présenté à la figure 6.17. On constate qu'elle est exempte de damier.



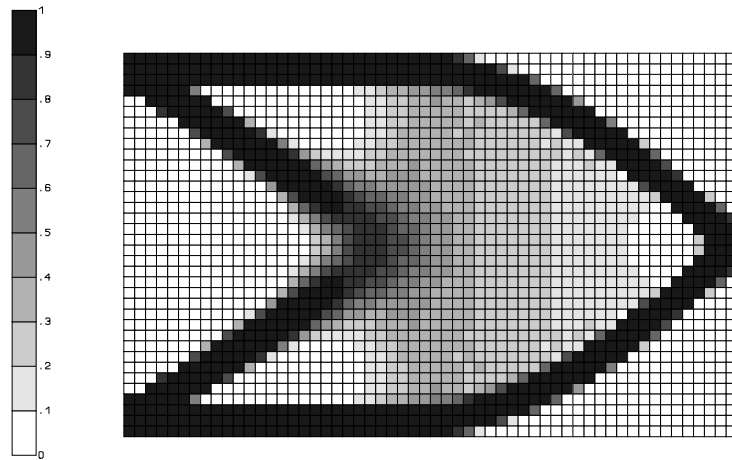


Figure 6.16 : Solution de la poutre cantilever courte ( $p=2$ ) avec des éléments finis de degré 2

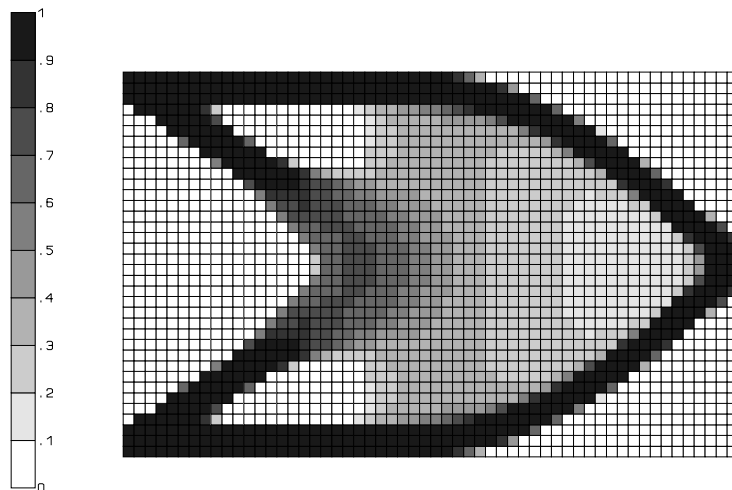


Figure 6.17 : la solution est exempte de damier lorsque le périmètre est borné

### 6.5.2 Le problème du treillis de Michell

Le second exemple est celui d'une poutre courte de longueur 9 m et de largeur 6 m, chargée dans son angle inférieur droit. Ce problème est souvent appelé problème du treillis de Michell car la solution optimale pour un réseau de barres selon la théorie de Michell (1904) y est souvent illustrée. Dans notre cas, la structure est étudiée avec la théorie de la topologie des milieux continus. Le volume maximal de matière vaut 50% du volume du domaine de conception. Les données du matériau sont les suivantes :  $E=100\text{GPa}$ ,  $\nu=0.3$ ,  $\rho^0=1$ . La loi matérielle est le modèle généralisé des épaisseurs ou SIMP avec un exposant de pénalisation cubique ( $p=3$ ). La pénalisation est suffisante pour éliminer la majeure partie des zones de densité intermédiaire.

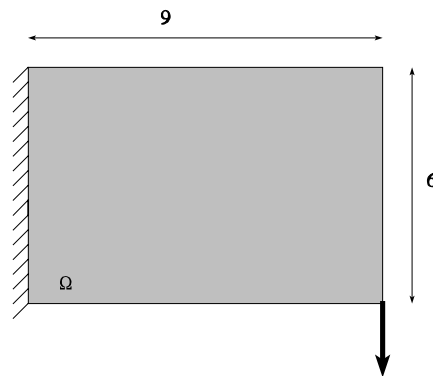


Figure 6.18 : Géométrie du problème de Michell

Lorsque l'on utilise des éléments finis du premier degré et un champ de densité constant, la solution est donnée par la figure 6.19. On y voit clairement apparaître le phénomène de distributions en damier en plusieurs endroits de la structure.

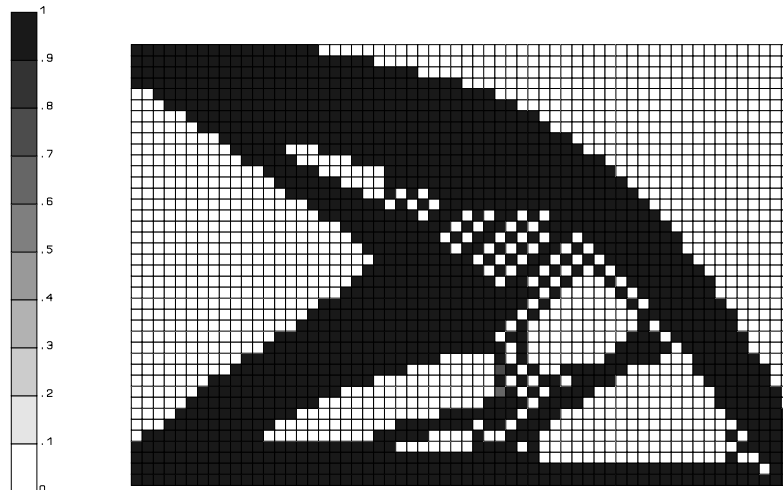


Figure 6.19 : Solution du problème de treillis de Michell avec des éléments finis de degré 1

La figure 6.20 montre la distribution de matière lorsque l'on utilise des éléments quadratiques pour le déplacement. On remarque que les damiers ont très largement disparu. Seules deux petites zones en damier subsistent : la première se trouve sous la charge et la seconde est située au centre de la structure. L'exemple permet de confirmer d'abord l'influence très favorable de l'élévation du degré d'approximation des déplacements. L'exemple montre ensuite que le passage au degré 2 ne garantit pas la disparition totale des structures en damier. Dans certaines conditions plus rares de densité et de sollicitation, il peut subsister quelques motifs instables. Ce fait est une conséquence de l'étude locale de Díaz et Sigmund (1994) et de l'étude de stabilité de Jog et Haber (1995). L'étude simplifiée n'exclut pas non plus l'existence de telles zones résiduelles pour la pénalisation  $p=3$  puisque, pour ce matériau, l'énergie des damiers est comparable à celle de la distribution continue mais toujours légèrement supérieure.

Remarquons aussi que la présence des distributions en damier n'est pas généralisée car la solution est principalement composée de corps du type barre, qui travaillent en état de tension uniaxiale. Or, l'analyse de Díaz et Sigmund (1995) prédit que la traction uniaxiale est la moins favorable à

l'apparition de damiers.

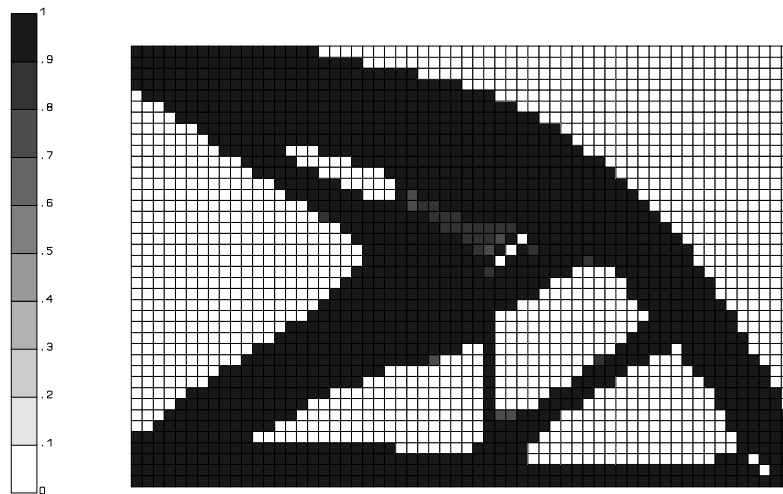


Figure 6.20 : Solution du problème de Michell avec des éléments finis de degré 2

On borne le périmètre de la solution topologique. On mesure un périmètre de 67 dans la solution obtenue avec des éléments du second degré. On impose, de manière heuristique, une borne sur le périmètre de 65. On obtient le résultat donné à la figure 6.24 qui est un résultat de grande qualité, car les zones en damier ont totalement disparu. La distribution de matière est par ailleurs en très bon accord avec la solution des éléments du second degré. L'effort de calcul de la solution du premier degré avec périmètre est par contre beaucoup moindre. Au second degré, une itération, qui comprend une analyse par éléments finis, l'analyse de sensibilité et l'optimisation proprement dite, prend environ 406 secondes CPU sur une station DEC- $\alpha$  4000-700, tandis que la même itération au premier degré avec périmètre borné ne prend en moyenne que 204 secondes. En outre, la résolution du problème avec des éléments du premier degré et un périmètre borné demande un peu moins d'itérations pour arriver à la solution. Nous avons remarqué en effet que l'approximation CONLIN semble beaucoup mieux adaptée au problème réel.

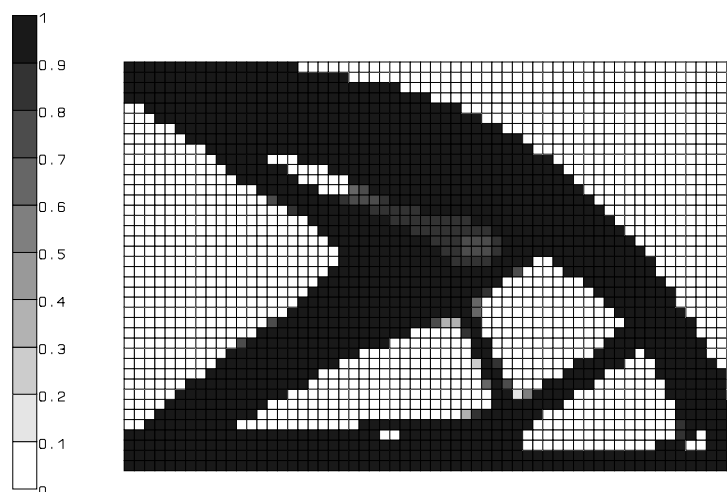


Figure 6.21 : Solution du problème de Michell avec contrôle du périmètre ( $P^*=65$ )

### 6.5.3 Influence de la valeur du périmètre cible sur la topologie

La série d'expériences numériques des figures 6.22, 6.23, 6.24 montre comment la valeur de la borne sur le périmètre influence la topologie de la distribution de matière. La figure 6.22 est à mettre en rapport avec la figure 6.21 où la même expérience est réalisée avec un périmètre  $P^*=65$ . Pour un périmètre élevé ( $P^*=70$ ), on distingue encore quelques damiers résiduels. La topologie comporte deux membres verticaux dans la partie inférieure et une perforation dans la structure supérieure. Lorsque l'on diminue le périmètre, les deux membres inférieurs se rapprochent et se confondent pour  $P^*=50$ . La perforation du domaine structural disparaît également. Pour la pénalisation  $p=3$ , la réunion des deux membres structuraux et la disparition du trou laissent place à des zones de densité intermédiaire. La présence des zones de densité intermédiaire uniforme diminue le périmètre comme cela avait été suggéré à la figure 6.14. Une trop faible borne sur le périmètre a tendance à réintroduire ces zones. Pour les éliminer, il conviendrait maintenant d'augmenter progressivement la pénalisation dans un processus de continuation.

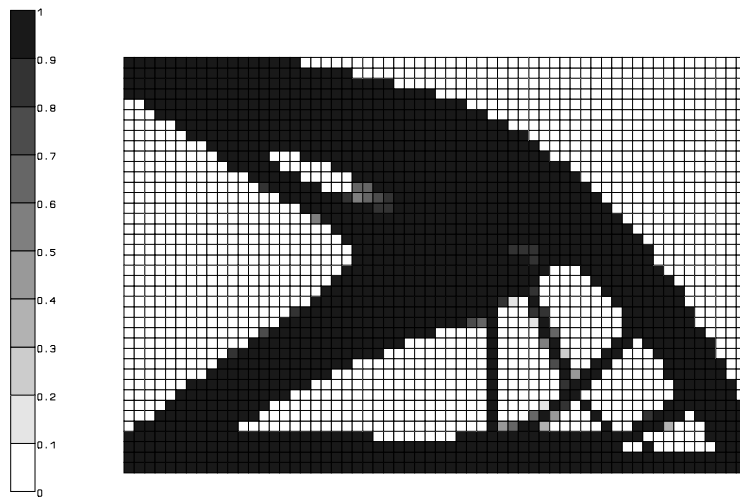


Figure 6.22 : Contrôle du périmètre  $P^* = 70$ .

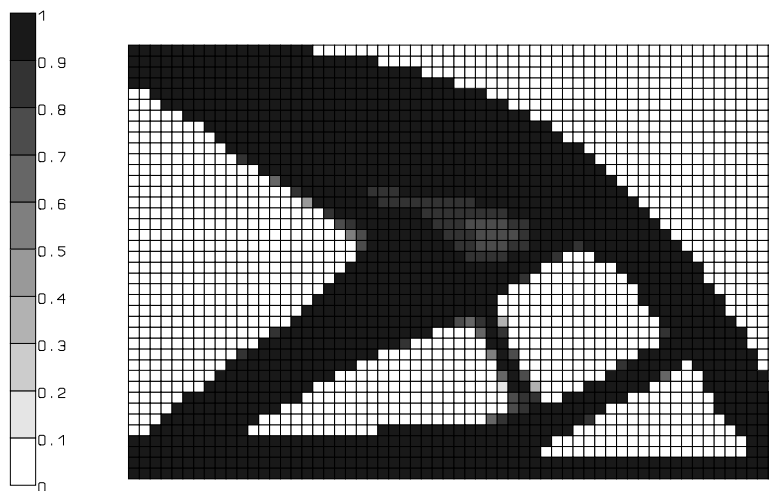


Figure 6.23 : Contrôle du périmètre  $P^* = 60$ .

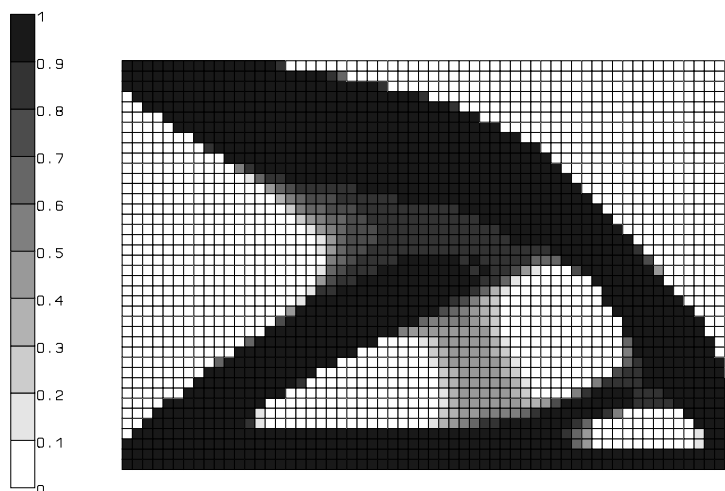


Figure 6.24 : Contrôle du périmètre  $P^* = 50$ .

#### 6.5.4 Contrôle des modes parasites avec des éléments triangulaires

La figure 6.25 présente un exemple des modes de distribution parasite que l'on obtient avec des maillages libres comprenant des triangles du premier degré. Le maillage est généré avec le mailleur Delaunay et il comporte 4448 éléments triangulaires. Les modes de distribution parasite perturbent la solution et ils la rendent très difficile à interpréter.

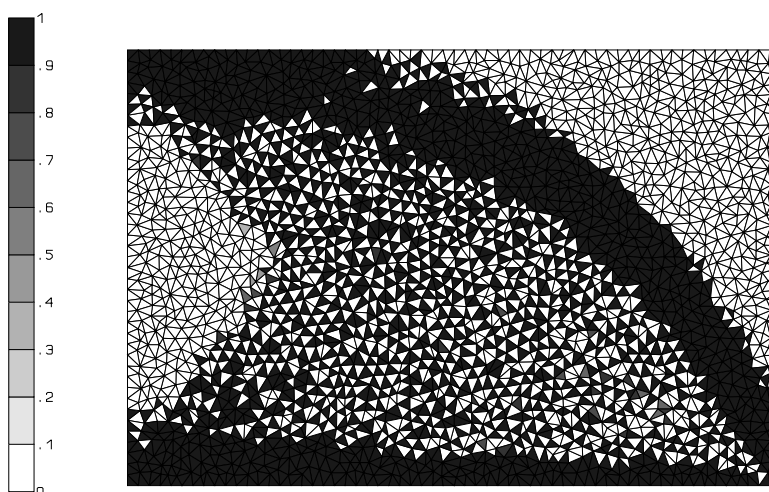


Figure 6.25 : Maillage libre de 4448 triangles de degré 1

La figure 6.26 montre le résultat obtenu en recourant à des triangles du second degré. Certains modes de distribution parasite sont toujours visibles, mais ils sont plus rares. Comme pour les éléments triangulaires, la pénalisation  $p=3$  est trop importante pour que l'utilisation d'un champ de déplacement de degré 2 puisse éliminer totalement les modes d'instabilité. Pour des microstructures suboptimales dont la pénalisation est plus faible, nous avons constaté que le degré 2 est à même d'éliminer la plupart des modes parasites avec des maillages libres. A la figure 6.28, on peut voir le résultat obtenu avec des éléments de degré 1 et avec un périmètre limité à  $P^*=60$ . La distribution présente encore quelques motifs de distribution peu réguliers. Une borne plus faible sur le périmètre permettrait de les éliminer. Il est possible d'incriminer également la mauvaise qualité de l'élément de triangle employé

au premier degré. L'élément type 26 de SAMCEF utilisé au premier degré n'a pas les mêmes performances que l'élément de quadrangle type 15 correspondant.

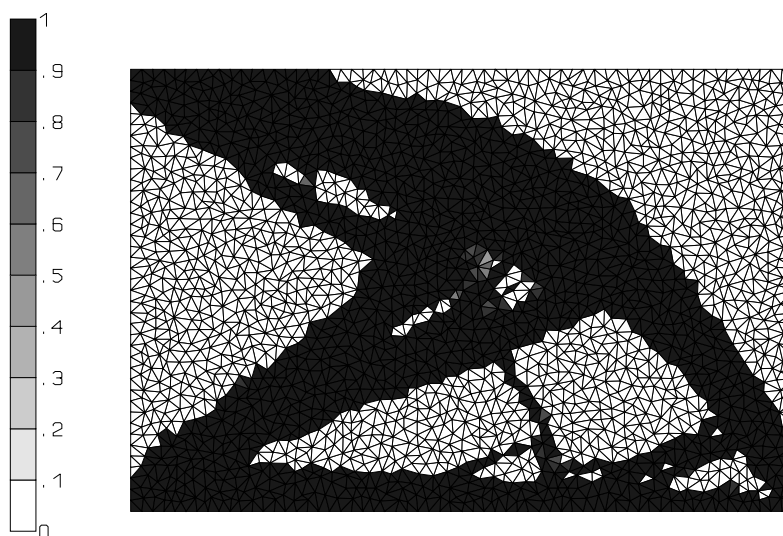


Figure 6.26 : Maillage libre de triangles du degré 2

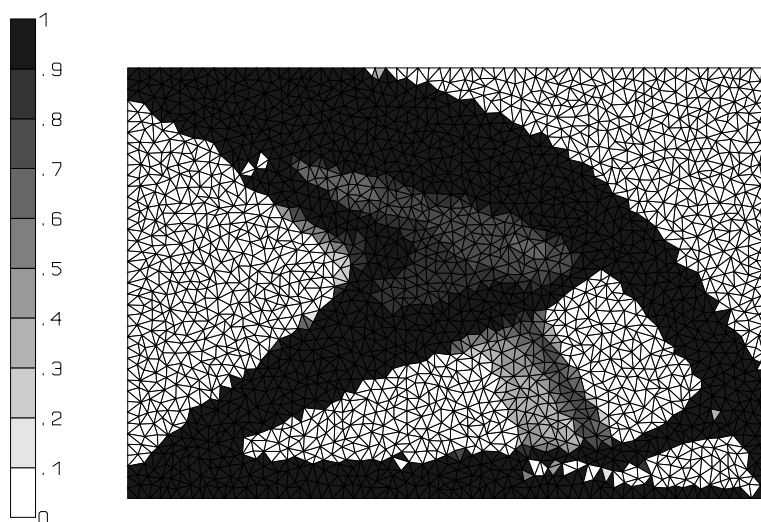
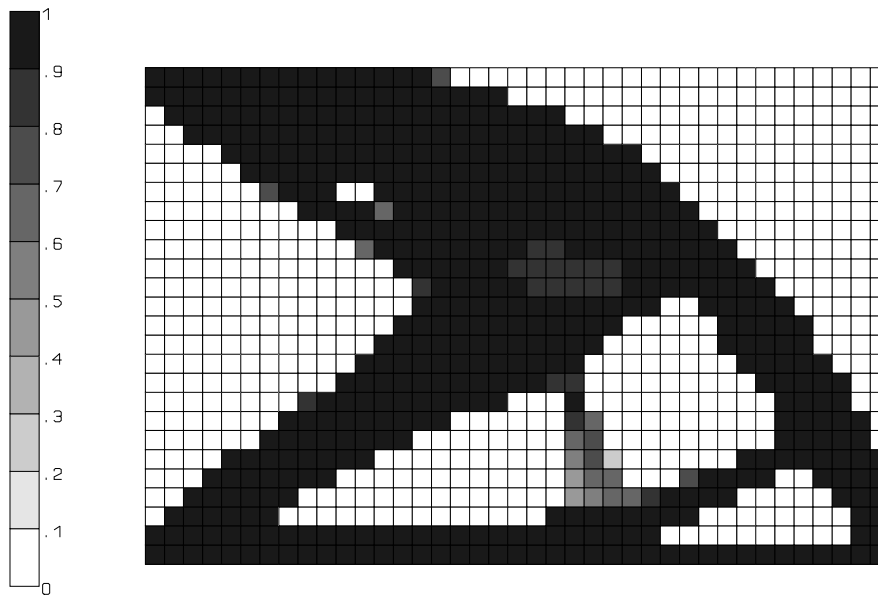
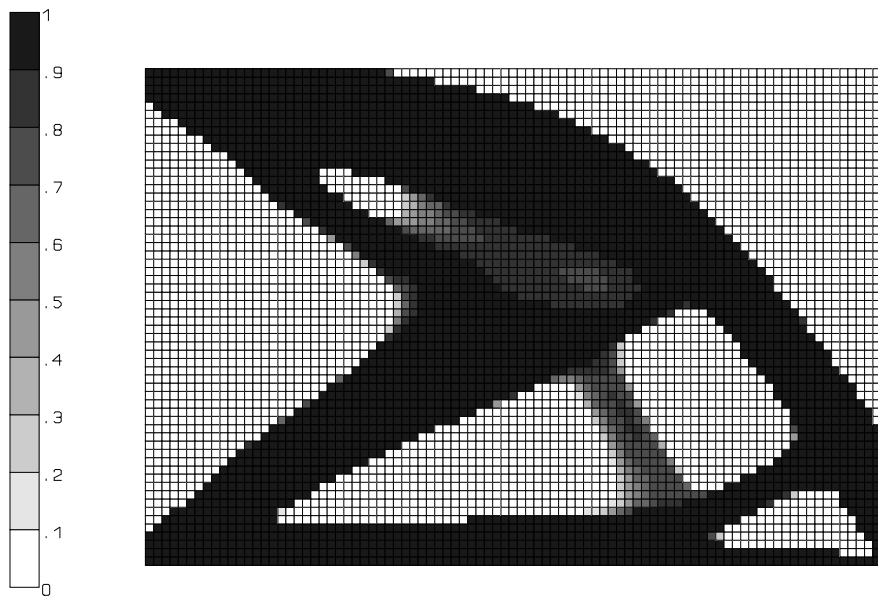


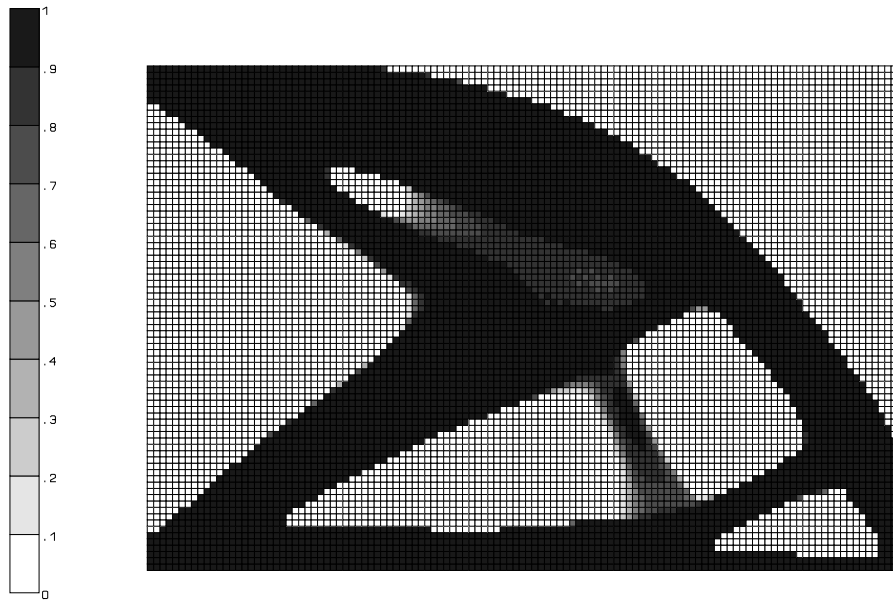
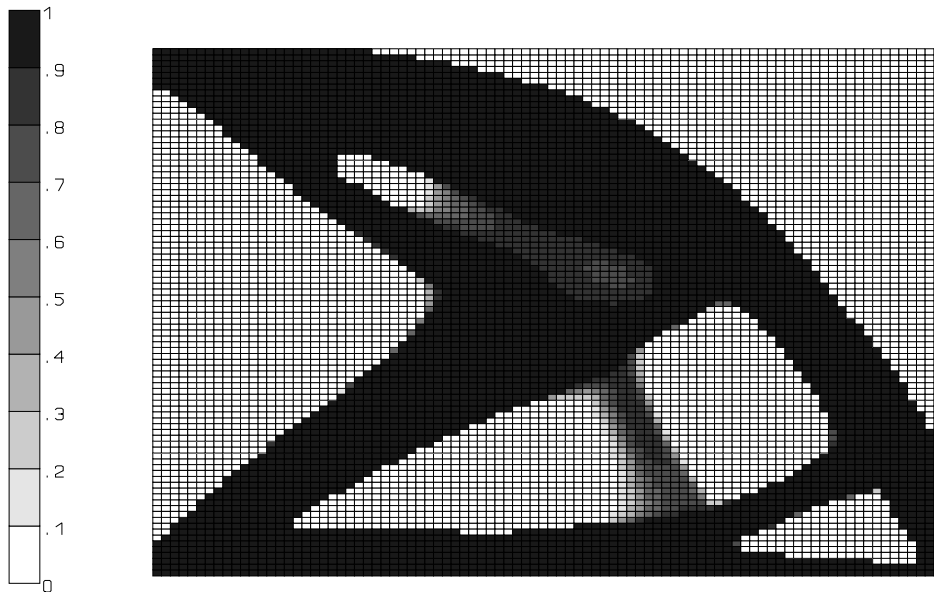
Figure 6.27 : Maillage libre avec un périmètre borné  $P^*=60$

### 6.5.5 Convergence des solutions obtenues avec des microstructures suboptimales vis-à-vis du maillage lorsque le périmètre est borné

Les figures 6.28 à 6.31 montrent l'indépendance des solutions vis-à-vis du niveau de raffinement du maillage. La série peut être complétée par les figures 6.23 et 6.27. Pour toutes ces distributions, on borne le périmètre à  $P^*=60$ . On compare d'abord des maillages réguliers d'éléments carrés :  $39 \times 26 = 1014$  éléments (figure 6.28),  $60 \times 40 = 2400$  éléments (figure 6.23),  $90 \times 60 = 5400$  éléments (figure 6.29),  $120 \times 80 = 9600$  éléments (figure 6.31). La figure 6.32 est réalisée avec un maillage rectangulaire de  $90 \times 90 = 8100$  éléments et la figure 6.27 avec un maillage libre de 4480 triangles. Les éléments du premier degré donnent accès à des maillages fortement raffinés avec un temps de calcul raisonnable.

Figure 6.28 : Solution avec un maillage régulier de  $39 \times 26 = 1014$  élémentsFigure 6.29 : Solution avec un maillage régulier de  $90 \times 60 = 5400$  éléments

Premièrement, on peut remarquer que le raffinement du maillage augmente la précision des contours de la structure sans introduire de modification de la topologie. Deuxièmement, on constate que la borne  $P^* = 60$  sur le périmètre est active depuis le maillage le plus grossier et qu'elle le reste pour tous les maillages envisagés. Les damiers sont éliminés, même avec les maillages les plus grossiers. Pour les maillages les plus raffinés, on peut se rendre compte que les modes parasites sont toujours pénalisés et que les solutions sont exemptes de damier.

Figure 6.30 : Solution avec un maillage régulier de  $120 \times 90 = 9600$  élémentsFigure 6.31 Solution avec un maillage rectangulaire de  $90 \times 90 = 8100$  éléments

On peut remarquer l'évolution du membre structural situé en bas et au centre. Sa définition, relativement diffuse pour les maillages plus grossiers, se précise avec la diminution de la taille des éléments. Le processus d'optimisation semble conserver un volume de matière constant à ce membre. Avec le raffinement du maillage, seule la définition du contour semble changer. La transition vide-solide autour du membre semble s'effectuer sur un nombre constant d'éléments quel que soit le maillage. La transition est donc d'autant plus fine que les éléments sont petits.



On remarquera que la figure 6.30 révèle quelques imperfections dans la distribution de matière. Le processus itératif a été interrompu avant la stationnarité complète. On peut même distinguer de "très légers" damiers qui auraient disparu avec quelques cycles d'optimisation de plus.

## 6.6 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons fait le point sur deux problèmes qui ont attiré notre attention au cours de notre thèse : le problème du contrôle du périmètre et le problème de l'élimination des modes de distribution parasite. Nous pensons avoir contribué à la recherche de solutions originales. Bien que ces deux problèmes soient d'origines différentes, il nous est apparu intéressant de les réunir dans un même chapitre après que nous eûmes constaté que le contrôle du périmètre pouvait apporter une solution à ces deux problèmes.

Nous nous sommes d'abord intéressés au contrôle du périmètre de la solution topologique. Nous avons poursuivi les travaux de Ambrosio et Buttazzo (1993) et Haber, Jog et Bendsøe (1994). Ambrosio et Buttazzo (1993) avaient montré que la restriction du périmètre était une alternative à l'emploi d'une microstructure optimale pour régulariser le problème de la distribution de matière de compliance minimale. Haber, Jog et Bendsøe (1994) avaient ensuite proposé d'adjoindre une borne sur le périmètre de la solution au problème de conception afin de conduire à un problème bien posé, quel que soit le type de microstructure. Nous avons alors démontré que l'on pouvait :

- utiliser des matériaux SIMP avec lesquels on peut ajuster facilement la pénalité des densités intermédiaires;
- employer le périmètre dans une procédure générale de programmation mathématique. L'algorithme dual permet de prendre en compte la restriction de périmètre de façon stricte ou sous forme d'un périmètre cible avec une pénalisation quadratique de l'écart.

Pour introduire cette contrainte de périmètre, nous avons dû mettre au point une procédure d'approximation précise de cette restriction non monotone. Pour arriver à une approximation suffisamment conservative, nous avons :

- sélectionné une approximation quadratique séparable;
- proposé trois procédures de calcul des coefficients de courbure dont la plus efficace est certainement l'estimation heuristique basée sur des considérations géométriques.

Les résultats numériques présentés ont démontré la robustesse de la procédure. Nous nous sommes également rendu compte que la contrainte sur le périmètre avait pour conséquence de jouer un rôle modérateur qui améliore les propriétés de convergence du processus d'optimisation.

La suite du chapitre nous a permis de rassembler l'expérience que nous avons acquise dans le domaine de l'élimination des modes parasites de densité. Les distributions en damier sont les modes parasites les plus connus, mais nous en avons rencontré d'autres lorsque nous avons utilisé des maillages libres et des maillages triangulaires.

Tout en replaçant dans son cadre historique l'originalité de la recherche que nous avons faite dans le domaine des modes parasites, nous avons rapidement établi l'analogie avec les problèmes de Stokes régis par les conditions de Babuška-Brezzi, et nous nous en sommes servis pour guider le choix de combinaisons efficaces des champs d'approximation du déplacement et de la densité. Nous avons ensuite mené des expériences simplifiées qui nous ont permis de confirmer l'hypothèse que le phénomène est fortement lié à l'approximation élément fini. Ces analyses simplifiées montrent que des éléments cinématiquement admissibles dont le degré du champ de déplacement est faible, donnent lieu

à une erreur de modélisation sur le valeur de l'énergie de déformation. Cette erreur introduit artificiellement un optimum local d'énergie avec la configuration en damier. Cette même étude montre aussi que la non-linéarité de la pénalisation des densités intermédiaires joue un rôle important. Le passage à des éléments finis de degré plus élevé (tout en conservant une approximation constante par élément pour la densité) permet parfois d'inverser le phénomène. La solution avec des éléments du second degré est généralement dépourvue de damier. Les travaux plus récents de Díaz et Sigmund (1995) ainsi que de Jog et Haber (1995) ont confirmé les conclusions que nous avons pu tirer.

Nous avons alors fait la constatation originale qu'une borne adéquate sur le périmètre permet de générer des solutions exemptes de damier ou d'un autre mode parasite. Les damiers introduisent des variations à haute fréquence spatiale dans la distribution. Ces dernières sont pénalisées par la borne sur le périmètre qui empêche leur apparition.

Nous avons alors proposé de nous servir de la borne sur le périmètre pour éliminer les damiers. Les premières expériences que nous avons réalisées sont très prometteuses. La comparaison avec d'autres méthodes d'élimination des damiers est également flatteuse pour le périmètre. Notre stratégie semble d'ailleurs fort proche de la méthode des filtres de Sigmund. Comme nous l'avons suggéré, notre étude devra, néanmoins, être complétée dans le futur par une étude théorique.

En conclusion, nous avons montré comment un périmètre borné de manière adéquate constitue un outil de très haute qualité pour la conception. Il résout à la fois les problèmes de convergence de la solution et les modes parasites comme les structures en "damier". Le nouveau problème est donc capable de générer des solutions topologiques réalisables en pratique. Il permet aussi d'obtenir des résultats dont la clarté supprime souvent toute ambiguïté d'interprétation. Nous pensons que le contrôle du périmètre sera un outil capable d'améliorer sensiblement la conception topologique dans nombre d'applications d'ingénierie.

## Chapitre 7 : UN OUTIL DU PROCESSUS DE CONCEPTION DES STRUCTURES

Ce chapitre est destiné à établir la place de l'optimisation topologique dans la chaîne de conception des structures assistée par ordinateur. Le choix d'une topologie structurale adéquate conditionne très fortement les futures performances de la structure. L'optimisation topologique occupe donc certainement une place primordiale dans le processus de décision préliminaire de conception de toute pièce mécanique. L'optimisation topologique peut être vue comme un outil de conception permettant de poser le choix d'une topologie initiale adéquate. Toutefois, ce choix nécessite souvent une dose d'interprétation. L'optimisation topologique intervient comme une aide objective pour la sélection des caractéristiques générales de la structure. Cette étape préliminaire sert de base à l'établissement d'un modèle CAO performant dont on pourra rechercher, par la suite, une conception plus précise au moyen d'un outil d'optimisation plus classique : optimisation de forme paramétrique ou optimisation de dimensionnement.

Nous ferons d'abord une synthèse des différentes approches qui permettent d'inclure l'optimisation topologique dans le processus de conception. On trouvera ensuite un résumé de l'expérience que nous avons acquise au cours de ce travail. Nous donnerons également un aperçu du logiciel de calcul que nous avons entièrement réalisé dans le cadre de cette thèse, car l'optimisation topologique est maintenant bien intégrée au sein du module de calcul OPTI du logiciel SAMCEF. Le chapitre se terminera sur la présentation d'un panel d'exemples où nous étudierons la topologie de structures planes, tridimensionnelles ou en vibration.

### 7.1 La conception des structures et l'optimisation topologique

#### 7.1.1 De la nécessité de l'optimisation topologique dans la conception des structures de haute performance

La topologie est un paramètre très important de la définition d'une structure. Il affecte de façon cruciale la performance que l'on attend du composant mécanique. Un mauvais choix de la connectivité des domaines et des composants élémentaires d'une pièce mécanique pénalise fortement son efficacité. Un choix malheureux de la topologie peut même empêcher l'existence d'une conception qui satisfasse à toutes les exigences du cahier des charges. L'exemple de la poutre dite "MBB" rapporté par Olhoff *et al.* (1992) est la démonstration de ce fait. Dans cette application que nous détaillerons plus largement dans la suite de ce chapitre, on recherche la conception d'une poutre de support d'un plancher d'avion de transport. La première conception proposée comporte six trous décrits par des *splines* fermées ou des cercles. Après le processus d'optimisation de forme, la structure obtenue parvient à remplir toutes les exigences du cahier des charges, mais la masse de la structure reste fort élevée. L'optimisation de la distribution de matière, appliquée au problème, permet alors de suggérer une nouvelle topologie qui donne lieu à une conception largement admissible. Après avoir optimisé sa forme, la structure basée sur cette nouvelle topologie affiche une masse inférieure de 64% à celle qui avait été adoptée avec la première conception trouvée.

Avant la réalisation d'outils d'optimisation topologique, l'ingénieur ne pouvait compter que sur son

intuition et son expérience pour choisir la silhouette générale d'une structure dont il devait créer l'architecture. Il existe donc là une demande pour disposer d'une méthode rationnelle afin de déterminer la connectivité des composants mécaniques. La méthode d'homogénéisation apporte une réponse à cette question.

Etant donnée qu'une répartition optimale de matière a tout le loisir de modifier la topologie, la forme et les dimensions de la structure, les gains que l'on peut espérer de l'optimisation topologique sont largement supérieurs à ceux que l'on obtient en employant les techniques d'optimisation de forme ou de dimensionnement séparément. Si on compare les solutions obtenues avec des techniques d'optimisation, on estime souvent que le dimensionnement automatique permet de gagner 5 à 10% sur la fonction objectif, tandis que l'optimisation de forme peut faire épargner 10 à 30% de la fonction coût. L'amélioration obtenue avec une topologie optimale ou quasi optimale peut se compter jusqu'à 100%. Ces chiffres permettent de conclure que la conception des structures de très haute performance doit passer par l'utilisation de techniques d'optimisation topologique.

### ***7.1.2 De la nécessité actuelle d'interpréter les résultats de l'optimisation topologique et de les compléter par d'autres techniques d'optimisation***

Comme nous le savons, l'optimisation topologique fournit la silhouette brute de la pièce à concevoir. Le processus de conception ne s'arrête cependant pas à ce stade de la conception. La structure est encore loin d'être réalisable en pratique. Le concepteur doit interpréter la distribution de matière et en déduire un autre modèle. Il faut soumettre celui-ci à l'épreuve d'autres moyens de calcul. Il faut aussi en tirer des plans afin de fabriquer et de produire la pièce mécanique souhaitée.

Les résultats de l'optimisation topologique doivent être interprétés et être complétés par d'autres techniques de conception pour plusieurs raisons.

Premièrement, la fabrication des structures comportant des microstructures poreuses est impossible à réaliser dans l'état actuel de notre technologie. Les *microstructures optimales* sont les seules qui permettent d'assurer la relaxation complète du problème de distribution de matière et, par là, l'indépendance de la solution vis-à-vis du maillage. Cependant, de par sa nature, la microstructure optimale est telle que la matière reprend au mieux les efforts afin d'offrir la raideur locale la plus élevée pour les conditions de sollicitation. La structure que l'on formerait avec cette distribution de matière serait la meilleure que l'on puisse imaginer, compte tenu des critères de conception retenus. Dans cette structure idéale, l'organisation microscopique de la matière est si parfaite que la pénalisation des matériaux composites, dont la densité est située entre le vide et le solide, est faible. Et dans la distribution de matière optimale, il est donc normal d'observer, comme on a pu le faire, de larges zones de densité intermédiaire. A l'heure actuelle, il est impossible de produire ces microstructures optimales ou une microstructure qui s'en rapproche fortement. L'analyse de leur microgéométrie et de leurs propriétés montre aussi qu'elles sont instables pour des conditions de sollicitations autres que celles qui ont été envisagées dans la conception, de sorte qu'en pratique, la pièce mécanique, qui serait réalisée en se conformant strictement à la distribution de matière optimale et à sa microstructure, serait inutilisable. Nous avons également utilisé d'*autres microstructures suboptimales* dont la stabilité est meilleure. Malheureusement, pour le moment, la fabrication de ces microstructures n'est pas envisageable non plus.

Deuxièmement, la solution qui ressort du processus d'optimisation topologique n'est optimale que pour les contraintes globales qui ont été prises en compte : compliance, fréquence propre, volume et périmètre. La structure doit encore remplir d'autres contraintes, qui ne peuvent pas être prises en considération par la méthode d'homogénéisation dans l'état de son développement actuel. La

conception finale doit encore satisfaire à des critères locaux de tension, de déplacement ou de stabilité, par exemple. Outre ces contraintes mécaniques, il existe aussi de nombreuses restrictions d'origine technologique. Pour adapter la solution à ces exigences mécaniques et technologiques, il faut poursuivre le processus de conception et soumettre le résultat de l'optimisation topologique à d'autres outils de conception et d'optimisation.

Troisièmement, la distribution de matière "discrétisée" ne possède pas de contours doux et lisses. Pour poursuivre le processus de conception, il faut créer un nouveau modèle de la pièce. Ce modèle est indispensable pour appliquer d'autres outils d'analyse et de conception automatique ou, tout simplement, pour dresser des plans et fabriquer la pièce. Pour cela, il faut retranscrire les contours accidentés de l'image de la distribution de densité en un modèle dont les contours sont décrits au moyen de courbes régulières, dont les propriétés matérielles sont réparties en fonction des domaines, etc.

Ainsi, dans l'état actuel de notre technologie, après la phase d'optimisation de matière, le processus de conception est loin d'être terminé. Le processus de conception se poursuit de manière classique. Mais, si tout ne fait que commencer, on commence, cette fois, sur des bases solides.

### ***7.1.3 La place de l'optimisation topologique dans la chaîne de conception***

L'optimisation topologique a été développée pour pallier les limitations de l'optimisation de dimensionnement et de l'optimisation de forme. La topologie de la structure est figée et elle ne peut être altérée. Le choix de la topologie doit donc être effectué avant les cycles de modification des paramètres de la frontière ou des dimensions transversales. Puisque le choix "rationnel" de la topologie doit se trouver en avant des autres phases de décision, le processus d'optimisation topologique se situe dans la phase de conception préliminaire. Comme nous l'avons expliqué au chapitre 2, la topologie ne met en jeu que des données minimales nécessaires à la définition du problème: les fixations possibles, les cas de charges. Le concepteur peut jouer sur plusieurs paramètres qui influencent partiellement la distribution de matière et donc la topologie: le volume de matière admissible, le périmètre de la solution, la pénalisation des densités intermédiaires. Jusqu'à présent, la phase d'optimisation topologique est dirigée par des critères globaux: volume, périmètre, compliance, énergie potentielle, fréquence propre... Nous savons cependant que la recherche d'une structure rigide est concordante avec un critère de déplacement imposé et que le critère énergétique est en accord avec un critère de tension local. En effet, une structure dont les déplacements locaux sont importants est souple, de même qu'une structure qui possède de fortes concentrations de contrainte augmente sa compliance. Dès lors, le manque de concordance entre les critères adoptés pour l'optimisation topologique et l'optimisation de forme et de dimensionnement, n'est qu'apparent. Il existe une continuité presque "naturelle" entre les processus d'optimisation de topologie, de forme et de dimensionnement.

Toutefois, le résultat issu de l'optimisation topologique se présente sous forme d'une distribution de matière. Le processus d'interprétation, que nous détaillerons plus tard dans ce chapitre, est nécessaire pour dégager un modèle plus précis de la structure qui soit exploitable dans les outils classiques de conception. L'habileté de l'ingénieur et son savoir-faire interviennent ici pour concilier la topologie idéale et un certain nombre de contraintes technologiques explicites ou implicites intervenant dans une "bonne" conception. Par exemple, il est courant que le contour soit décrit à l'aide de morceaux de courbe simple (segments de droite et arcs de cercle), tandis que l'épaisseur des membres est souvent limitée à une jauge minimale.

La chaîne de conception que nous venons de décrire est représentée à la figure 7.1. Elle se présente

sous l'aspect d'un processus linéaire. Il s'agit de compléter l'enchaînement classique de la conception de structure en plaçant l'optimisation topologique en avant des procédures d'optimisation de forme et de dimensionnement. Compte tenu de l'aspect primordial de l'information de topologie, elle est naturellement intégrée dans la phase préliminaire du processus de conception. La description de ce type d'organisation des outils de conception a été abondamment réalisée par Papalambros et Chirehdast (1990), par Bendsøe et Rodrigues (1991), par Olhoff, Bendsøe et Rasmussen (1992), par Bremicker, Chirehdast, Kikuchi et Papalambros (1992) et par Rasmussen, Thomsen et Olhoff (1993). La plupart du temps, on opte pour cet organigramme car il est simple à mettre en oeuvre. Il ne modifie pas la séquence des processus de conception, il la complète.

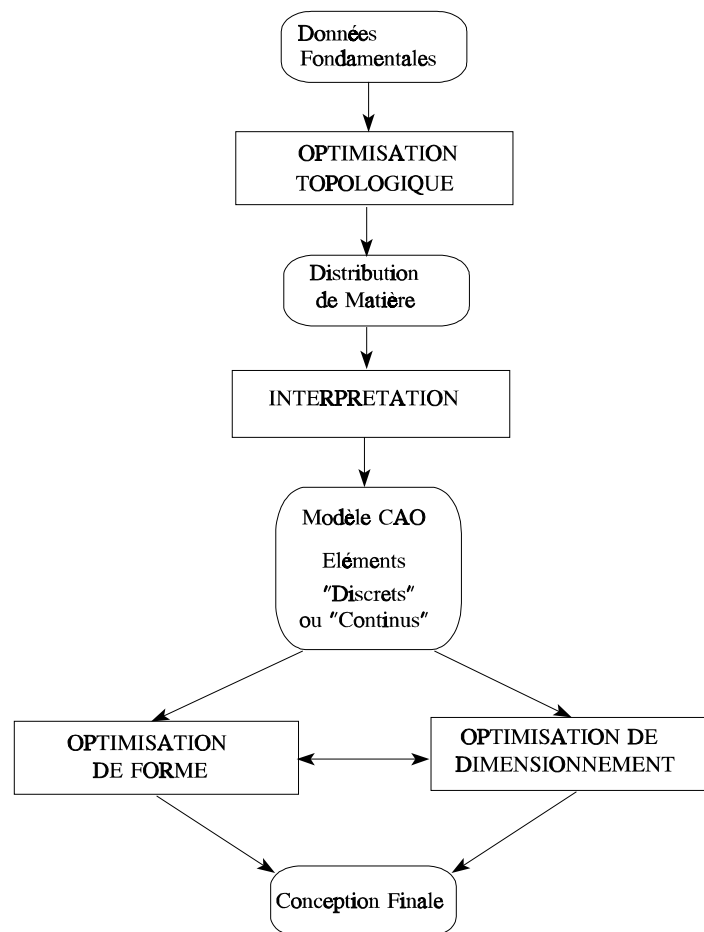


Figure 7.1 : Chaîne de conception intégrant l'optimisation topologique

A l'heure actuelle, on tente d'intégrer plus fortement les processus d'optimisation de forme et de topologie pour aborder des problèmes où la forme et la topologie interagissent fortement. Ce couplage entre la forme et la topologie optimale est présent dans les applications pour lesquelles les charges de pression, par exemple, ou une autre condition limite, varient avec la forme des frontières. La figure 7.2 montre un exemple où il n'est plus possible de figer la définition des charges de pression. On peut effectuer une optimisation topologique et, ensuite, une optimisation de forme de la structure. On ne peut cependant pas affirmer que la structure, dont la surface chargée a été modifiée, possède toujours la topologie optimale. La résolution des problèmes de surface libre doit être abordée avec un processus itératif. On se tourne alors vers un processus d'optimisation formé de deux boucles imbriquées

schématisé à la figure 7.3.

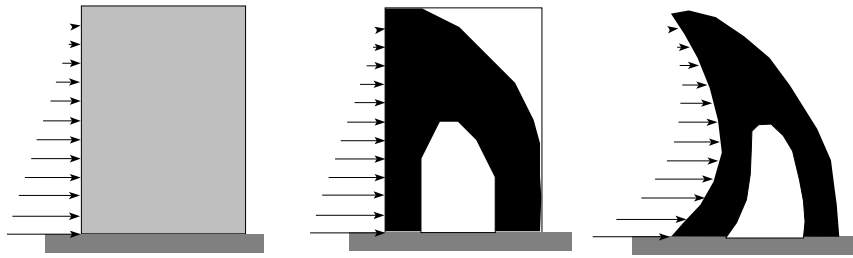


Figure 7.2 : Optimisation de forme et de topologie en présence de charges de pression

Le cycle d'optimisation intérieur détermine la topologie pour une forme donnée du domaine de conception. Ensuite, le cycle d'optimisation de forme est traité comme une boucle extérieure.

La difficulté de l'approche couplée entre la forme et la topologie réside dans le fait que le choix de la topologie optimale est un processus non différentiable par rapport aux variables de forme. Le traitement du problème de topologie et de forme des treillis de barres a été étudié pour la première fois par Ben-Tal, Kočvara et Zowe (1993), Kočvara et Zowe (1995), Bendsøe, Ben-Tal et Zowe (1994).

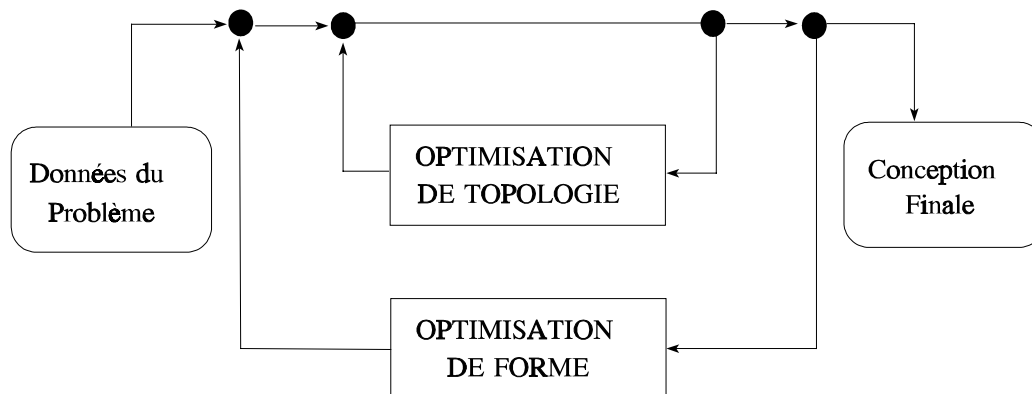


Figure 7.3 : Processus de conception avec double cycle d'optimisation

Pour les structures continues, Maute et Ramm (1994) proposent une autre organisation de la chaîne de conception où l'optimisation de topologie et l'optimisation de forme sont complètement intégrées (Figure 7.4). L'intégration totale des deux types de méthode est basée sur l'existence d'un espace de projection et d'un modèle de conception communs aux deux processus. Après chaque processus d'optimisation, la distribution de matière, qui est issue de l'optimisation topologique ou qui est donnée par la forme optimale, est projetée sur un espace de référence. Au début de chaque processus d'optimisation, l'utilisateur peut choisir entre optimisation de forme et optimisation de topologie. En fonction du type d'optimisation sélectionnée par l'ingénieur, le processus doit créer un "modèle de calcul" approprié. Pour l'optimisation topologique, on génère un maillage dont la densité est fonction de la densité matérielle présente sur l'espace de référence. Cette stratégie de raffinement permet de concentrer les éléments dans les zones où il y a une transition entre le vide et le solide et dans les zones solides afin d'améliorer la résolution de la distribution de matière. Si on choisit l'optimisation de forme classique, le processus crée automatiquement un modèle du contour formé avec des courbes régulières calquées sur une courbe d'isovaleur de la distribution de densité. La position des pôles de définition est ajustée par une technique des moindres carrés. Pour cet outil, le processus

d'interprétation de la distribution de densité doit être complètement automatisé. Cette automatisation est rendue possible grâce à l'utilisation de l'espace de projection unique. La sophistication de l'outil de conception demande un effort de programmation important et cette stratégie n'est pas immédiatement accessible par tous les utilisateurs. Néanmoins, ce type d'outil intégré constitue à notre avis une voie d'avenir.

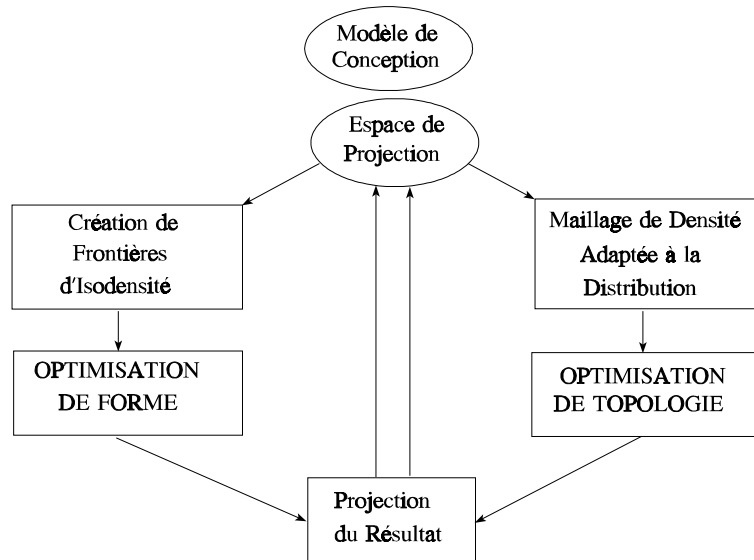


Figure 7.4 : Conception avec espace de projection (Maute et Ramm, 1994)

## 7.2 Résolution du problème de topologie

Il est maintenant nécessaire de préciser la manière dont s'effectue l'optimisation topologique. Nous voulons présenter brièvement l'expérience que nous avons acquise dans le domaine de l'optimisation topologique ainsi que le code de calcul numérique que nous avons réalisé à cet effet.

### 7.2.1 Méthodologie de résolution d'un problème d'optimisation topologique

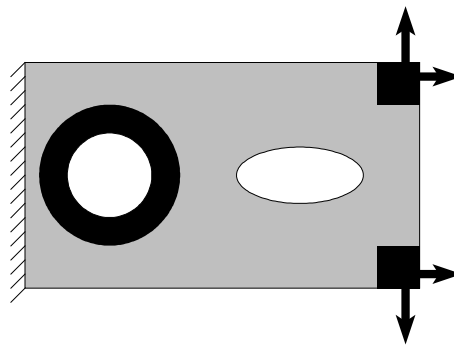


Figure 7.5 : Définition des domaines de conception et des domaines figés dans un problème d'optimisation topologique



Le processus d'optimisation topologique passe par un certain nombre de choix et de décisions. Dans un esprit de rationalisation, la méthodologie de la conception de la topologie d'une structure peut être scindée en plusieurs étapes élémentaires que l'on résume comme suit.

#### *1° Choix d'un domaine de référence approprié*

On choisit un domaine de référence  $\Omega$  adapté à la définition des différentes conditions limites, qu'elles soient cinématiques (fixations ou déplacements imposés) ou statiques (tractions de surfaces). Le choix du domaine  $\Omega$  tient compte de contraintes technologiques comme les contraintes d'encombrement.

#### *2° Identification des domaines de conception*

On effectue une partition du domaine de référence en deux groupes :

- Les domaines de conception où l'on désire déterminer la topologie de la structure.
- Les régions de densité fixée (généralement vide ou solide plein) pour tenir compte d'une structure à renforcer, de contours extérieurs imposés ou de points d'application d'efforts déterminés...

#### *3° Choix d'un matériau composite poreux*

La sélection d'un matériau composite à microstructure poreuse est indispensable à la relaxation du problème de conception. Sans celle-ci, il serait impossible de générer une topologie et d'assurer l'existence d'une solution stable. En outre, la pénalisation des densités intermédiaires conditionne la séparation entre le vide et le solide dans la distribution de matière.

On dispose de différentes familles de matériaux :

- Les matériaux composites de raideur optimale comme les matériaux feuilletés de rang 2.
- Les matériaux composites à microstructure périodique possédant une cellule de base comme les composites avec des microperforations rectangulaires.
- Les matériaux composites basés sur les structures de Hashin : matériaux avec des cavités sphériques ou cylindriques, une double microstructure de Hashin.
- Les matériaux artificiels avec une pénalisation adéquate des densités intermédiaires tels que les SIMP.

#### *4° Etablissement de la loi raideur-densité du matériau*

Le calcul des constantes élastiques ou massiques effectives du matériau peut être mené à bien en utilisant la théorie de l'homogénéisation ou une analyse micromécanique consistante. On génère la relation fonctionnelle entre les paramètres de microstructure du matériau et donc, par corollaire, la densité et les propriétés mécaniques microscopiques. Cette loi de raideur-densité est généralement calculée au préalable et intégrée dans le module d'optimisation. L'utilisateur doit cependant spécifier les paramètres du matériau de référence: module de Young, coefficient de Poisson, masse volumique...

#### *5° Choix d'un modèle éléments finis approprié*

On définit un maillage de densité désirée ainsi que le type des éléments finis.

Le maillage peut être réalisé avec des mailleurs automatiques transfinis ou libres (Delaunay, offset,...). Le degré d'approximation des champs de déplacement permet de contrôler la formation de damiers ou d'autres modes de distribution parasite. Si ce n'était pas le cas, il faut contrôler le périmètre de la solution.

On définit une répartition initiale des propriétés matérielles et de la densité du matériau.

### 6° Définition des caractéristiques du problème d'optimisation

On "discrétise" le problème d'optimisation topologique de manière consistante avec la modélisation en éléments finis. On définit les variables de conception que l'on attache à chaque élément du domaine de conception. On définit également la formulation du problème d'optimisation (fonction objectif, restrictions...).

### 7° Calcul de la distribution optimale de matière sur le domaine de conception

On détermine la distribution optimale de matériau composite par un cycle d'itérations comprenant chacune :

- une analyse éléments finis,
- une analyse de sensibilité,
- une formulation d'un sous-problème sur la base d'approximation structurales,
- une résolution d'un sous-problème d'optimisation convexe avec un algorithme adapté aux caractéristiques du sous-problème d'optimisation : nombre de variables de conception, la nature, le type et le nombre des restrictions...
- une remise à jour des données du modèle.

Actuellement, le processus itératif converge généralement après 25 à 100 cycles d'optimisation.

### 8° Interprétation des résultats et génération d'une topologie concrète

Les résultats produits par le processus d'optimisation sont visualisés en vue d'être interprétés. Le concepteur peut alors dégager une topologie structurale en accord avec toutes les contraintes technologiques ou esthétiques qui lui sont imposées. La phase d'analyse topologique se termine par la génération d'un modèle CAO permettant une analyse complète de la structure. Ce modèle peut ainsi être soumis à un processus d'optimisation de forme classique.

## 7.2.2 Choix des paramètres du problème

On veut maintenant détailler quelques étapes du processus de conception topologique. Les solutions que nous proposons sont le fruit de notre expérience personnelle pour la conception topologique des structures.

Le *choix du domaine de conception* est souvent basé sur des considérations d'encombrement maximal. Les limites du domaine de conception permettent de confiner la matière dans un espace préalablement établi. Le choix du domaine de conception influence donc la solution, mais il doit permettre la spécification de toutes les conditions aux limites cinématiques et statiques. Le domaine doit également épouser les zones qui sont, a priori, remplies de vide ou de solide. Si le domaine de conception n'est pas limité, il n'est cependant pas nécessaire de prendre des domaines trop vastes qui introduisent un trop grand nombre d'éléments. La présence de grandes régions occupées par le vide accroît inutilement l'effort de calcul sans augmenter la résolution de l'image de la topologie. Le domaine de conception le plus économique est le plus petit volume qui puisse contenir la structure naissante sans entraver la distribution de matière. Ce domaine n'étant pas connu avant le calcul de la distribution de matière, il est souvent nécessaire de procéder à quelques essais. Pour cela, nous conseillons d'adopter un maillage relativement grossier, afin de se donner une idée générale de la solution avec une faible dépense de temps de calcul. Dans une optimisation ultérieure, on adopte un domaine de conception plus approprié.

Le *maillage* qui couvre le domaine de conception est généralement un maillage régulier. En effet, on ne connaît généralement pas la nature de la solution et il ne faut pas favoriser une direction plutôt

qu'une autre. La plupart des exemples académiques de l'optimisation topologique utilisent des maillages carrés qui s'adaptent parfaitement aux domaines de conception, de forme rectangulaire. Les maillages transfinis sont alors la solution idéale pour générer les réseaux de mailles et pour discrétiser le domaine de conception. Néanmoins, la géométrie des problèmes rencontrés en pratique n'est pas toujours aussi simple. Les conditions aux limites des problèmes que l'on doit prendre en compte s'expriment souvent sur des courbes comme des arcs de cercle. Dans ce cas, l'utilisation de maillages rectangulaires générés par une technique transfinie est souvent plus difficile. Elle exige tout au moins le découpage du domaine de conception en éléments de conception de forme rectangulaire, ce qui n'est pas toujours facile. Il est alors plus pratique de recourir à des maillages libres. C'est pour cette raison que, très tôt, nous avons développé le calcul de topologie sur des maillages quelconques. L'utilisation de maillages libres est cependant beaucoup plus délicate. L'absence de symétrie du maillage peut introduire de petites perturbations dans la distribution de matière, qui s'atténuent cependant avec la diminution de la taille des éléments. Comme nous l'avons vu au chapitre 6, les éléments triangulaires sont plus difficiles à gérer dans la distribution de matière. On essaie de les éviter autant que possible en recourant au procédé de recombinaison des triangles. Dans les applications, nous montrerons plusieurs exemples de domaines de conception que nous avons discrétisés avec des maillages libres Delaunay ou des maillages par offset.

Le *choix du volume de matière disponible* est également un paramètre important de la solution. Comme nous recherchons généralement une solution avec des éléments massifs, nous considérons, par expérience, des bornes sur le volume comprises entre 20 et 50% du volume du domaine de conception. Plus la borne sur le volume de matière admissible est large, plus la solution est formée de composants structuraux massifs et de zones de membrane. De nouveau, le choix du volume admissible peut être ajusté par essais et erreurs. Généralement, on procède à la résolution du problème sur un maillage grossier pour modifier la borne estimée. Le choix de bornes plus petites que 20% conduit généralement à des solutions avec des éléments concentrés : barres ou poutres. La résolution de ce genre de problème de conception est généralement très coûteuse. D'abord, pour connaître la distribution de matière avec une précision satisfaisante, un faible volume de matière exige un maillage fin. Ensuite, lorsque le volume de matière est faible, on constate que la convergence des algorithmes (critères d'optimalité ou de programmation duale) est plus lente, car la disposition de la matière est beaucoup plus délicate à optimiser. A contrario, lorsque le volume de matière admissible est important, le maillage peut être plus grossier et on obtient la distribution de matière optimale beaucoup plus rapidement. La *distribution initiale de matière* joue évidemment un rôle dans le processus d'optimisation. A priori, il n'existe souvent aucune raison pour favoriser une région de l'espace de conception plutôt qu'une autre. Dès lors, il est d'usage de choisir une répartition initiale uniforme correspondant à la borne sur le volume de matière. La contrainte de volume est saturée et satisfaite dès la première itération, ce qui facilite la convergence de l'algorithme. On peut aussi adopter comme solution initiale, la disposition de matière relative au problème de dimensionnement (matériau SIMP avec  $p=1$ ). En partant de cette distribution, on constate en effet de bons résultats, mais il faut effectuer une optimisation préalable.

Le *contrôle des distributions parasites de densité* peut être réalisé en utilisant des éléments finis de degré 2 ou en bornant le périmètre. Le choix des *éléments du second degré* semble souvent le plus simple. Il est cependant assez onéreux en temps de calcul. Avec les éléments de volume, il est parfois prohibitif. Lorsqu'on ne possède aucune information sur la solution, le choix des éléments du second degré est souvent la meilleure alternative. On détermine alors une solution grossière dont on pourra mesurer le périmètre. Jusqu'à présent, nous ne possédons pas de stratégie permettant d'estimer le périmètre a priori de façon fiable. Dès lors, la *valeur du périmètre* de la solution grossière sert souvent de référence. Par expérience, nous diminuons cette valeur de 10 à 20% pour éliminer les damiers. Une diminution plus importante est un outil de contrôle de la nature de la topologie. En diminuant le périmètre, on influence la présence ou l'absence des plus petits membres structuraux et des plus petits

trous. Appliquer la borne sur le périmètre avec des éléments du second degré permet de contrôler facilement la topologie. Avec la borne sur le périmètre, on préfère cependant utiliser des éléments du premier degré, beaucoup moins coûteux en temps de calcul. L'élimination des damiers requiert quelques itérations supplémentaires qui sont largement compensées par un effort de calcul plus faible par itération.

Le contrôle de périmètre possède aussi l'avantage de régulariser la solution avec des microstructures suboptimales. Le choix des *microstructures optimales* permet de déterminer une solution de référence. Néanmoins, il n'est pas facile de retirer un modèle CAO et cette distribution de matériau n'est pas bien appropriée au passage vers un calcul d'optimisation de forme. Il subsiste souvent de larges zones de densité intermédiaire et la topologie est souvent ambiguë. En pratique, on préfère les *microstructures suboptimales*. Dans la grande majorité des applications pratiques, on recourt aux matériaux SIMP. Le choix  $p=3$  est le plus fréquent. Il élimine la plupart des zones de matériau poreux de la solution. Les algorithmes de résolution du problème de topologie fonctionnent bien avec ce type de matériau. Avec  $p=2$ , on trouve encore des épaisseurs intermédiaires que l'on interprète souvent comme des zones d'épaisseur plus faible. Pour générer des silhouettes avec des barres et des poutres, on prend  $p=4$ .

Le *processus de continuation* consiste à augmenter graduellement la pénalité des densités intermédiaires. Il est souvent employé avec les matériaux SIMP. Cette procédure demande beaucoup plus d'itérations. Elle donne une convergence plus stable et évite souvent bon nombre d'optimums locaux. Elle est utile lorsque la topologie de la solution est compliquée. Nous l'utilisons souvent avec la séquence de puissances  $p=1.6, 2., 2.5, 3.$ . Mais la plupart des applications sont suffisamment bien conditionnées et notre algorithme d'optimisation est suffisamment stable pour que nous puissions souvent nous en passer.

Le choix de l'*algorithme de résolution* conditionne le coût de calcul, de manière très importante. Toute réduction du nombre d'itérations est intéressante. La résolution duale est incontournable compte tenu du grand nombre de variables de conception. Le *schéma de linéarisation* du volume est soit linéaire, soit mixte linéaire-convexe (CONLIN). Pour la compliance, l'approximation mixte linéaire-convexe est généralement le meilleur compromis entre une efficacité satisfaisante et une convergence stable vers un optimum que l'on espère global. Les schémas d'approximation basés sur les courbures obtenues avec la méthode BFGS pour matrices diagonales sont souvent très rapides, mais ils ont parfois tendance à tomber dans des optimums locaux. La modification par rapport à l'optimum global est généralement très minime, mais elle altère un peu la précision de la solution. Avec les approximations du second ordre, la progression aux abords de l'optimum est, par contre, beaucoup plus rapide, de sorte qu'on peut utiliser les approximations du second ordre pour accélérer la phase finale de la convergence. Enfin, le périmètre est approché au mieux par le schéma quadratique séparable avec l'estimation heuristique des courbes ou avec le BFGS diagonal. Le périmètre a un effet très favorable sur la douceur de la convergence. Il est donc recommandé de l'adjoindre au problème d'optimisation.

### 7.2.3 Présentation des résultats

#### 7.2.3.1 Visualisation des distributions de matière

La présentation la plus facile de la distribution de matière est évidemment le vecteur graphique. Le traitement d'une aussi importante masse de données que celui engendré par l'optimisation topologique serait bien ardu si on ne disposait pas de moyens de représentation graphique sur écran. Nous sommes maintenant habitués à la présentation de la distribution de densité avec une palette de couleurs allant du blanc, pour le vide, au noir, pour le solide, en passant par le dégradé des gris, pour les densités intermédiaires. Cette visualisation a alimenté l'analogie entre la distribution de matière et l'image de

la structure sous forme digitalisée.

La distribution de matière peut être représentée avec une valeur constante par élément, ce qui correspond au résultat du calcul. L'image ressemble à celle obtenue avec un processus de digitalisation de la silhouette. On peut aussi voir les lignes d'isovaleur de la densité, ce qui fournit une meilleure idée de la structure décrite par des courbes régulières.

### 7.2.3.2 Comparaison des résultats à l'aide de grandeurs adimensionnelles

La présentation et la comparaison des résultats de topologie ne peut être faite que si l'on précise tous les paramètres qui influencent la distribution de matière. Les grandeurs suivantes peuvent modifier la topologie de la distribution de matière :

- Les propriétés du solide de référence par son *coefficient de Poisson*; par contre, le module de Young intervient comme un facteur d'échelle sur la valeur numérique de la compliance mais pas sur la distribution de matière.
- Les *conditions aux limites* de fixation; le choix de la géométrie des conditions de fixation et leur type: appui simple, encastrement... modifie fortement la topologie.
- Les charges peuvent modifier la topologie dont la *distribution géométrique et la disposition des forces de volume et des tractions de surface*; la topologie reste cependant insensible au facteur d'échelle du chargement.
- La *géométrie du domaine de conception* via le rapport de forme et sa topologie.
- Le volume de matière admissible intervient sous la forme de la *fraction du volumique occupé par la matière* dans le domaine de conception. Lorsque le volume de matière admissible augmente, certains trous sont comblés tandis que certains domaines de matières fusionnent.
- La valeur de la *borne sur le périmètre* qui contrôle le nombre de perforations du domaine structural.

Au contraire, les autres paramètres modifient la valeur numérique de la compliance, mais ils n'altèrent pas la distribution de matière. On sait que la compliance est une fonction :

- croissante du *facteur d'échelle des charges* F;
- croissante de la valeur numérique du *module de Young* E;
- décroissante de l'*échelle des dimensions géométriques* du domaine de conception L ou de l'épaisseur T dans un problème plan.

Si on dénote par C la valeur de la compliance, on peut trouver 3 nombres sans dimension en combinant ces 5 grandeurs dimensionnelles :

$$\pi_1 = \frac{L}{T} \quad \pi_2 = \frac{C}{FL} \quad \pi_3 = \frac{EL^2}{F} \quad (7.1)$$

Fait étonnant, pour les problèmes plans, on peut cependant vérifier qu'une modification des dimensions en plan L ne modifie pas la valeur de l'énergie si on ne change pas l'épaisseur transversale T. Dès lors, on désigne par T l'épaisseur en état plan de contrainte et le facteur d'échelle du domaine

tridimensionnel. On forme une combinaison des trois nombres sans dimension qui permet de détecter l'influence de chaque paramètre sur la valeur numérique de la compliance :

$$C \propto \frac{F^2}{ET} \quad (7.2)$$

La valeur de la compliance est proportionnelle au carré de l'échelle des charges et elle est inversement proportionnelle au module de Young et à l'épaisseur transversale.

Le volume et le périmètre dépendent évidemment des échelles géométriques :

$$\bar{V} \propto L^2 T \quad \bar{P} \propto L \quad (7.3)$$

#### 7.2.4 L'optimisation topologique dans le progiciel SAMCEF

Nos travaux de recherche sur l'optimisation topologique ont débouché sur la création d'un code de calcul implanté dans l'environnement du progiciel SAMCEF. Nous avons entièrement développé et écrit une nouvelle branche du module OPTI afin de traiter l'optimisation des distributions de matière. Ce nouveau code a permis de réaliser toutes les applications présentées dans cette thèse.

Sans vouloir nous attarder sur des détails techniques, nous voulons décrire le processus de conception topologique dans le progiciel SAMCEF. L'organigramme de la procédure d'optimisation topologique est résumé à la figure 7.6. Le processus est basé sur les modules suivants :

- BACON pour la génération des données et du maillage, ainsi que pour le traitement des résultats et leur visualisation.
- ASEF pour l'analyse statique linéaire.
- DYNAM pour l'analyse dynamique linéaire.
- OPTI, complété par nos soins, est chargé de la phase d'optimisation qui comprend l'analyse de sensibilité, l'optimisation des variables de densité, la remise à jour des angles d'orthotropie locaux si le matériau est anisotrope et l'actualisation du modèle de conception.

### 7.3 Analyse et interprétation des distributions de densité

La phase d'interprétation des distributions de matière issues de l'optimisation topologique n'est pas aussi triviale qu'une réflexion trop rapide pourrait le faire croire. L'interprétation des résultats est extrêmement importante pour retirer le plus d'informations possibles de la silhouette de la structure. Lire correctement les topologies et générer une structure qui bénéficiera des données présentes dans la répartition optimale de matière, est capital pour la performance de la conception finale qui ressortira du processus d'optimisation de sa forme et de ses dimensions transversales.

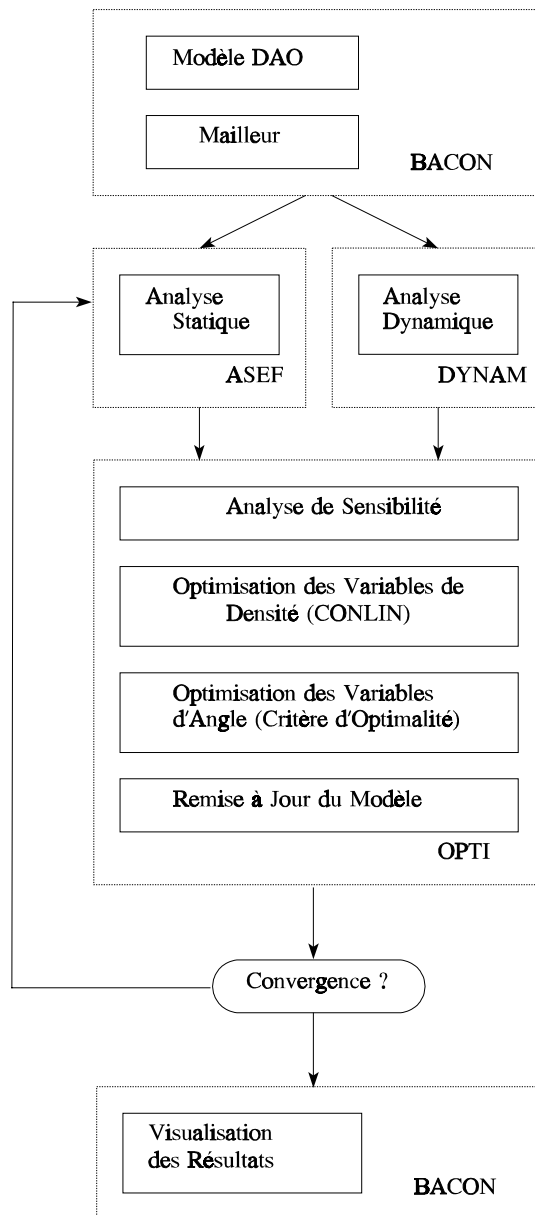


Figure 7.6 : Schéma du processus d'optimisation topologique dans le logiciel SAMCEF

### 7.3.1 Exploitation des résultats de topologie

Pour dégager un modèle pratique, le résultat de l'optimisation topologique doit être retravaillé, analysé, interprété. La distribution de matière est discrétisée en éléments finis. La forme de la structure apparaît sous l'aspect d'une image digitalisée où les éléments de densité variable jouent le rôle de *pixels*, le blanc et le noir représentant respectivement le vide et le solide. La frontière de la structure n'est pas admissible telle quelle. Elle est formée de segments de droite en dents de scie. Même si la frontière n'est pas difficile à distinguer, il faut créer une frontière douce et régulière de la pièce finale. Il est

également nécessaire de préciser tous les paramètres de la structure. Tout d'abord, on doit décider la nature des éléments structuraux qui composeront la pièce: barres, poutres, membranes, plaques, éléments de volume. Ensuite, on doit quantifier les paramètres de sa forme : le type des courbes qui constituent les contours, la valeur des paramètres qui les décrivent. Enfin, on doit également préciser d'autres données (les caractéristiques transversales des éléments, le choix du matériau...) et leur répartition sur la structure.

L'interprétation de la solution n'est pas chose facile. D'une part, on peut se trouver en présence de larges zones où le vide et la matière sont intimement mélangés. D'autre part, le nombre et la taille des perforations peuvent être limités pour le processus de fabrication ou de production en série.

Une première situation intéressante correspond au cas où la présence des zones de matériau poreux est réduite autant que possible. Pour cela, on sait que l'on peut employer des microstructures suboptimales qui pénalisent plus fortement les densités intermédiaires. Avec ces microstructures, il faut cependant introduire une contrainte de périmètre afin de régulariser le problème de conception. Cette contrainte sur le périmètre possède un autre avantage : elle permet de contrôler le nombre et la taille des trous dès la phase d'optimisation topologique.

Néanmoins, l'intervention humaine reste souvent indispensable pour trancher en cas d'ambiguïté lors de la phase d'interprétation et pour orienter la conception en fonction des critères explicites ou implicites de conception.

La précision des contours dépend fortement du raffinement du maillage. Une diminution de la taille des éléments augmente la résolution des détails de la distribution, mais elle accroît rapidement l'effort de calcul. Il convient donc d'acquérir une solide expérience pour analyser les résultats réalisés sur des maillages de taille aussi limitée que possible et, ainsi, épargner des efforts de calcul inutiles.

#### *7.3.1.1 Le processus de décision sur la nature des éléments structuraux*

En fonction du volume relatif de matière admissible et en fonction de la non-linéarité de la loi raideur-densité, le résultat de l'optimisation topologique peut suggérer des éléments structuraux de plusieurs types. Lorsque le volume relatif de matière utilisée est bas, on sait que l'optimisation topologique fournit des résultats que l'on peut facilement interpréter comme des treillis de barres ou de poutres. De même, si la pénalisation des densités intermédiaires est importante, la distribution de matière forme souvent des éléments structuraux concentrés qui font penser à des portiques ou des treillis de barres. Pour adapter la structure à d'autres critères de conception, on utilisera les techniques d'optimisation déjà bien rodées: l'optimisation des sections transversales ou de la position des joints structuraux.

Lorsque l'on introduit une plus grande quantité de matière, la solution topologique présente de larges zones de matière et il est plus intéressant de dégager un modèle de type membrane ou de type plaque de la structure. On peut, alors, créer un modèle paramétrique des frontières de la structure. L'ajustement des paramètres de la description de la géométrie (à topologie fixée) s'obtient en recourant à la technique d'optimisation de forme classique.

Pour une structure tridimensionnelle, des choix semblables peuvent être réalisés. Si la matière se concentre selon des membres dont une des dimensions est beaucoup plus importante que les deux autres, on interprétera la distribution comme une barre ou une poutre. Si la matière vient se placer avec une épaisseur mince, il est préférable d'adopter un modèle de plaque ou de coque. Au contraire, si le solide se rassemble dans une région où il forme un bloc massif, on en déduira un modèle de volume.

L'utilisation de modèles bidimensionnels permet deux sortes d'interprétation des densités



intermédiaires. On peut imaginer que les régions de densité moyenne sont des mousses dont la taille des porosités est variable. Pour une structure plane, la variable de conception peut être aussi regardée comme une dimension hors plan. Cette interprétation de la distribution de matière est particulièrement "naturelle" avec le modèle SIMP qui est équivalent à un problème dont la raideur dépend de la puissance  $p$  de l'épaisseur. Dans ce cas, les zones de densité intermédiaire sont des zones d'épaisseur plus faible. Dans celles-ci, l'épaisseur n'est qu'une fraction de l'épaisseur des membres qui constitue la structure principale. La structure primaire correspond évidemment aux domaines où la densité atteint celle du solide de référence. La partie de la structure que l'on affecte à une épaisseur plus faible joue le rôle structural des âmes et des voiles de cisaillement que l'on rencontre souvent dans d'autres conceptions. D'après notre expérience, ces zones plus minces sont souvent en état de sollicitation biaxial, ce qui renforce encore notre interprétation.

On remarquera que dans le modèle tridimensionnel, les zones de densité intermédiaire ne peuvent plus être interprétées comme des voiles minces. Par contre, dans ce cas, il est tout à fait justifié de penser à une mousse légère comme celle qu'on voit dans les structures sandwiches.

### 7.3.1.2 Extraction d'un modèle paramétrique

Lorsque l'on veut poursuivre la conception d'une pièce massive, il faut définir un modèle paramétrique de la structure sur la base des résultats de l'optimisation topologique. La distribution de matière suggère l'existence et la position relative des différentes perforations de la structure. Il appartient cependant à l'ingénieur de décider d'éliminer ou de rassembler des trous d'importance mineure. Il faut encore préciser la définition exacte de leurs frontières. L'intervention humaine est souvent nécessaire pour choisir la paramétrisation de la frontière en courbes "douces" et régulières. Ce choix est basé sur différentes considérations. Les courbes de Bézier, les *splines*, les *B-splines* ou les *NURBS* offrent une très grande souplesse qui leur permet d'épouser les isovaleurs de la distribution de densité avec précision. Les pôles et les points de contrôle sont les variables de définition de ces courbes. Néanmoins, la pièce qui est décrite par des *splines* ou des *NURBS* pourrait être difficile à fabriquer, surtout pour une production en série. Dans ce cas, on préfère souvent n'utiliser que des courbes simples comme les segments de droite et des arcs de cercle ou d'ellipse. Après avoir choisi la description paramétrique des courbes du contour, il faut choisir la valeur des paramètres de contrôle pour ajuster le contour à la distribution de densité. Plusieurs méthodes sont possibles; on en choisira une en fonction de l'habileté du concepteur, des contraintes technologiques à respecter et des outils de conception disponibles pour interpréter les résultats.

#### *La méthode de manipulation interactive*

La méthode la plus élémentaire consiste à créer le modèle paramétrique par simple manipulation interactive. On positionne, manuellement, les points de contrôle sur la distribution de matière optimale. Puis, par quelques essais et erreurs, on arrive à ajuster facilement les contours lissés aux isovaleurs de la distribution de matière. Cette façon de procéder possède l'avantage d'introduire facilement l'expertise du concepteur, de sorte qu'il est possible d'intégrer, simultanément, la topologie suggérée par le calcul d'homogénéisation, le savoir-faire de l'ingénieur et les contraintes technologiques. Cette méthode conduit à de bons résultats. Notre expérience personnelle confirme les travaux de Bendsøe et Rodrigues (1991) et de Olhoff, Bendsøe et Rasmussen (1992). En pratique, on sélectionne d'abord une description approximative des contours, sur la base de résultats sur écran ou sur impression papier. Ensuite, on modifie légèrement la position des pôles et des paramètres de définition des courbes pour "coller" au mieux à la distribution de matière. En général, on parvient à un résultat satisfaisant en quelques itérations.

Hormis l'habileté de l'ingénieur, la méthode s'appuie principalement sur la puissance de visualisation

graphique et sur les outils de manipulation interactive des entités géométriques disponibles dans l'outil de modélisation et de visualisation. Elle est accessible avec la plupart des logiciels de conception. De plus, elle laisse une bonne part d'initiative au concepteur.

#### *L'ajustement des frontières selon une "méthode des moindres carrés"*

Le processus d'ajustement manuel des courbes peut être perfectionné et automatisé par une procédure de "moindres carrés". Maute et Ramm (1994) sont les premiers auteurs à avoir appliqué le processus automatique de lissage de façon systématique. Le contour de la structure est ajusté à une isovaleur donnée de la distribution de matière. Avec une procédure moins sophistiquée, Rogister (1995) a montré que ce travail peut être effectué avec une précision satisfaisante en lissant un contour de description connue à un certain nombre de points du contour de la structure. Dans un premier temps, on récupère les points de passage par un processus interactif. Dans une étape ultérieure, on exécute un programme informatique pour résoudre le problème des moindres carrés. On détermine les positions des pôles de contrôle des courbes que l'on réintroduira ensuite dans le modèle CAO.

La semi-automatisation du processus de conception soulage une bonne part du travail fastidieux de l'ingénieur. Dans sa version la plus simple, elle ne supprime cependant pas la tâche de construction des contours du modèle. C'est pourtant cette phase de définition des courbes qui est la plus lente et qui exige le plus de tâtonnements. L'outil proposé par Maute et Ramm (1994) est complètement automatisé, mais le développement d'un tel programme d'aide à la conception n'est pas un travail facile. Cet outil possède l'inconvénient inhérent à son automatisation. Le choix des courbes échappe à l'utilisateur. A notre connaissance, la panoplie de courbes accessibles est limitée aux *splines* et aux *NURBS*. On ne peut sélectionner des courbes simples qui seraient bien pratiques dans le modèle final de la structure. Un outil complètement automatique est par contre indispensable si l'on veut avoir une intégration totale des processus d'optimisation de topologie et d'optimisation de forme comme le font Maute et Ramm (1994).

#### *La méthode de reconnaissance d'image*

La distribution de matière peut être interprétée sur la base de l'analogie qui existe avec les images digitalisées. Rappelons que dans cette analogie, chaque élément fini représente un *pixel* de l'image et la densité relative est l'équivalent de l'intensité de l'image. Le blanc est associé au vide, le noir est relatif au solide et les densités intermédiaires sont représentées par le dégradé de gris. Pour interpréter les résultats, Papalambros et ses collaborateurs (Papalambros et Chirehdast, 1990) ont développé une technique basée sur les méthodes de reconnaissance d'image. Ce processus, qui est assez lourd, n'est pas facile à développer. Le résultat demande également à être contrôlé et vérifié. Ainsi, les zones en damier sont transformées automatiquement en zones de densité intermédiaire. L'intégration de l'expérience de l'ingénieur pose problème. La réponse à la question peut être partiellement envisagée avec des techniques d'intelligence artificielle. Il est néanmoins toujours bon que l'intervention humaine ne soit jamais totalement supprimée dans ce type de conception.

### **7.3.2 Exemple**

On désire maintenant illustrer les principes de l'interprétation des distributions optimales de matière. A cette fin, on reprend l'exemple de la poutre cantilever courte. La figure 7.7 montre la distribution de densité issue du processus d'optimisation avec un matériau SIMP dont le paramètre de puissance  $p$  vaut 4. La distribution est principalement constituée de vide et de solide en des régions nettement distinctes.

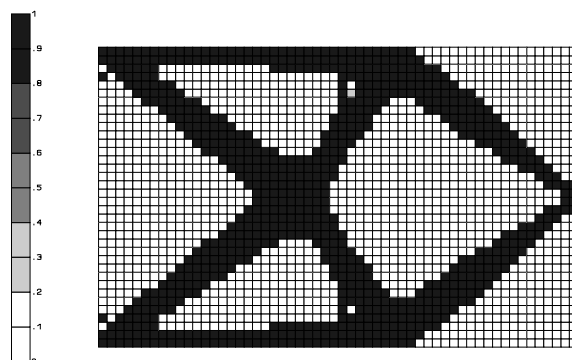


Figure 7.7 : Distribution de matière avec un matériau SIMP  
( $p=4$ )

Plusieurs alternatives se présentent pour interpréter ce résultat. La sélection de l'une d'entre elles dépend d'un choix posé par le concepteur. La structure semble constituée d'éléments concentrés à la manière d'un treillis de barres ou d'un portique. Si ce choix est satisfaisant, on adopte le modèle en treillis de barres qui est proposé à la figure 7.8. La création de ce modèle est très simple à réaliser. On relève manuellement les coordonnées de joints structuraux et on définit ensuite des éléments de barre ou de poutre dont la section est estimée en mesurant l'épaisseur de la distribution de matière. Ici, la distribution de matière suggère que les deux poutres de la partie droite possèdent des sections variables. Le modèle n'est qu'une approximation de la distribution de matière, car on adopte des membres de sections uniformes. A nouveau, les caractéristiques de ce portique peuvent être optimisées pour tenir compte de critères de tensions locales, de déplacements, de stabilité... On dispose de techniques de dimensionnement automatique pour ajuster les sections et moments d'inertie. On peut également modifier la position des joints structuraux. L'optimisation combinée des positions de joints et des sections donne évidemment le meilleur résultat.

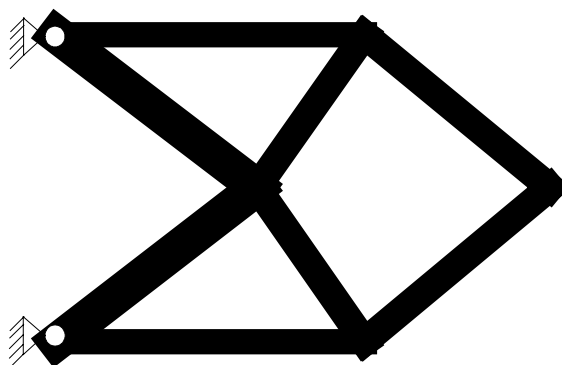


Figure 7.8 : Modèle en éléments de poutre

Une autre possibilité repose sur la formation d'un modèle défini par des contours paramétrés. La structure est formée par un domaine de matière continue dont le comportement est celui d'une membrane. La topologie suggère la présence de trois perforations et d'une encoche dans la fondation. La figure 7.9 montre un exemple de modèle de conception basé sur la distribution de matière 7.7. Les frontières sont formées de segments de droite, d'arcs de cercle et de courbes de Bézier. Le contour extérieur est formé de segments de droite. Les deux perforations symétriques de la partie centrale sont décrites par trois segments de droite tangents à trois cercles. La forme du trou situé à droite est

représentée par deux courbes de Bézier à 6 pôles dont on assure la tangence aux raccordements. Enfin, deux courbes de Bézier à 4 pôles constituent la cavité sous l'encastrement. On ajoute deux congés de raccordement à l'encastrement pour éviter les concentrations de tensions à cet endroit. L'ajustement des paramètres de la forme du modèle CAO est réalisé de façon manuelle et interactive.

Si on considère d'autres critères de conception, comme la tension locale, une forme améliorée de la structure peut être déterminée par une modification des paramètres de forme selon une procédure d'optimisation de forme classique. En imposant la symétrie de la structure, on compte 22 variables pour décrire le modèle de la forme. Pour utiliser un mailleur transfini, on devrait découper le domaine en éléments de conception quadrangulaires; cette opération est souvent compliquée sur des pièces réelles comme celle qui nous intéresse. Au contraire, le maillage de la structure peut être réalisé avec un effort modéré si l'on recourt aux mailleurs libres. Un maillage de ce type est suggéré à la figure 7.10. Quoique grossier par endroit, le maillage peut être raffiné selon une stratégie décrite par Duysinx *et al.* (1994). Les maillages libres exigent cependant une maîtrise particulière du calcul de sensibilité; ce type de réseau ne pose pas de problème à l'heure actuelle grâce aux travaux de Belgundu et Rajan (1988), Beckers P. (1991), Zhang (1991) et Duysinx *et al.* (1993).

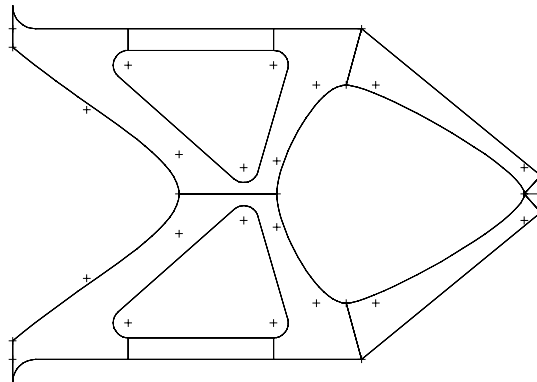


Figure 7.9 : Un modèle CAO après interprétation

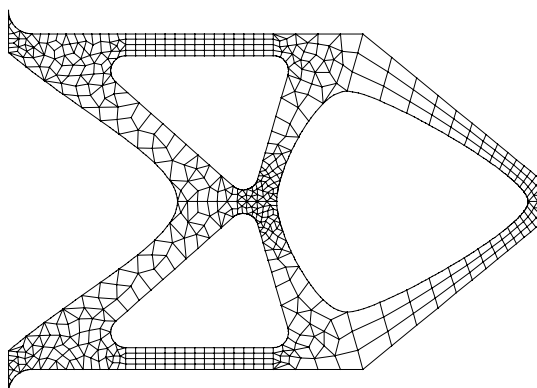


Figure 7.10 : Proposition d'un maillage pour le modèle

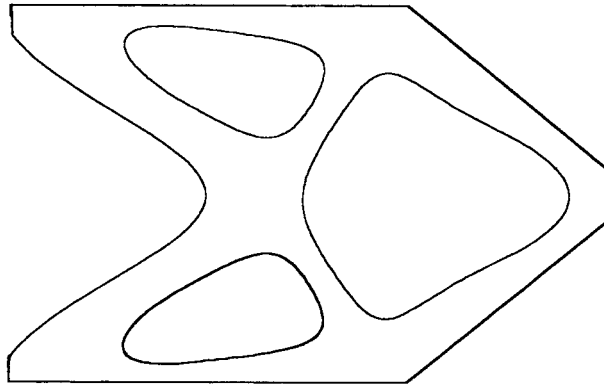


Figure 7.11 : Contours obtenus par la technique des moindres carrés par Rogister (1995)

Outre l'interprétation interactive basée sur la visualisation des résultats, on peut mettre au point une procédure d'ajustement des paramètres selon une méthode des moindres carrés. La figure 7.11 montre un résultat obtenu par Rogister (1995). Les contours lissés sont décrits par des courbes de Bézier. Le contour des perforations intérieures est formé de trois ou de quatre courbes de degré trois. La frontière gauche est approchée par une seule courbe de Bézier de degré quatre. On adapte les frontières à un certain nombre de points de la distribution de densité. Le problème de minimisation non contrainte est résolu avec une méthode de gradient conjugué.

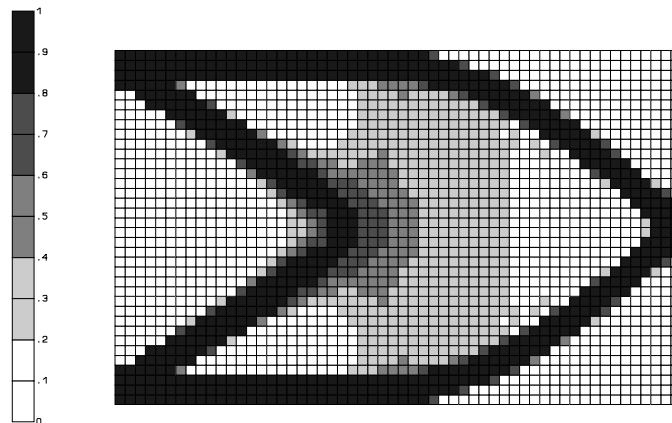


Figure 7.12 : Distribution de matière avec un matériau SIMP ( $p=2$ )

L'interprétation des zones de densité intermédiaire pose généralement des problèmes. En guise d'exemple, on aborde l'étude de la distribution de densité relative au matériau SIMP de puissance  $p=2$ . La répartition de la matière de la figure 7.12 laisse entrevoir une zone poreuse au centre de la structure. Le choix d'une échelle de densité plus large permet à l'œil de séparer plus facilement les zones de différente densité. Puisque la densité et l'épaisseur jouent un rôle identique dans ce problème, on imagine que la figure 7.12 nous donne la répartition de la dimension hors plan. On voit alors apparaître une structure que l'on peut appeler primaire. Au centre, on distingue une structure d'épaisseur plus petite. L'épaisseur relative de cette région est comprise en 0.2 et 0.4 dans sa plus grande majorité, mais on voit aussi une zone de taille non négligeable dont la densité est située entre 0.4 et 0.6. On rassemble cette région de densité moyenne au sein d'une seule zone d'épaisseur

identique, mais de valeur plus petite que celle de la structure primaire. Cette partie de la structure joue le rôle d'un voile mince, composant structural qu'on rencontre dans de nombreuses structures.

On établit un modèle C.A.O. dont la silhouette est reprise à la figure 7.13. Les frontières sont composées uniquement de segments de droite et d'arcs de cercle. Les paramètres de la géométrie (coordonnées, dimensions et rayon) sont ajustés manuellement pour approcher la distribution de densité au mieux. Le modèle fait intervenir deux domaines qui possèdent chacun une épaisseur différente. La répartition des épaisseurs est présentée à la figure 7.13. La même figure montre une proposition de maillage. Pour satisfaire au mieux à des critères différents de la compliance minimale, on peut soumettre ce modèle à un processus d'optimisation de forme.

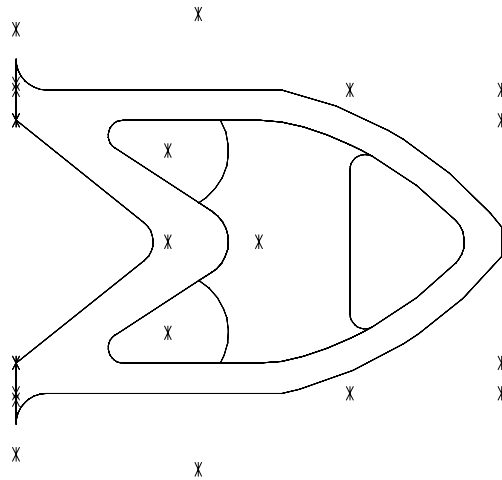


Figure 7.13 : Un modèle CAO de la précédente distribution

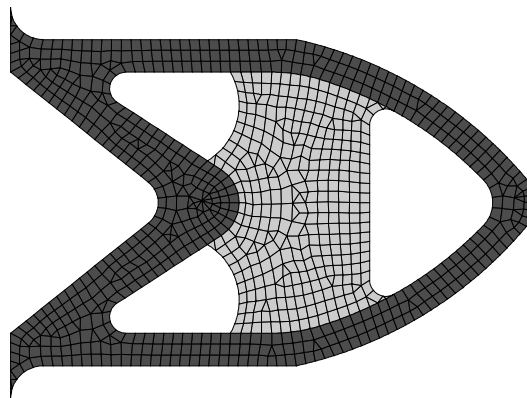


Figure 7.14 : Proposition d'un maillage avec la répartition des épaisseurs sur la structure

## 7.4 Applications

### 7.4.1 Problème de la poutre MBB

Le problème de la poutre MBB (Messerschmitt-Bölkow-Blohm) est un des exemples les plus connus d'application de l'optimisation topologique. Il illustre clairement les avantages du processus d'optimisation en montrant qu'il conduit à des topologies originales. Cette application a été décrite et résolue pour la première fois par Olhoff *et al.* (1992). Le problème concerne l'optimisation d'une poutre de support dans un avion de transport civil produit par un grand constructeur aéronautique allemand. La structure a pour fonction de soutenir le plancher dans le fuselage d'un avion Airbus. Les contraintes de conception sont les suivantes :

- (1) Les surfaces inférieures et supérieures du plancher doivent être planes et leur entre-distance doit rester inchangée;
- (2) La déflexion maximale au centre de la poutre ne peut excéder 9.4 mm pour une charge de 20 kN placée au milieu de la portée;
- (3) La contrainte de von Mises ne peut dépasser 385 N/mm<sup>2</sup>;
- (4) Il doit exister un nombre minimum de trous pour laisser passer le réseau de câblage électrique, hydraulique...

Le but de l'optimisation est de déterminer la forme des trous qui minimise la masse de la poutre tout en respectant les contraintes de conception.

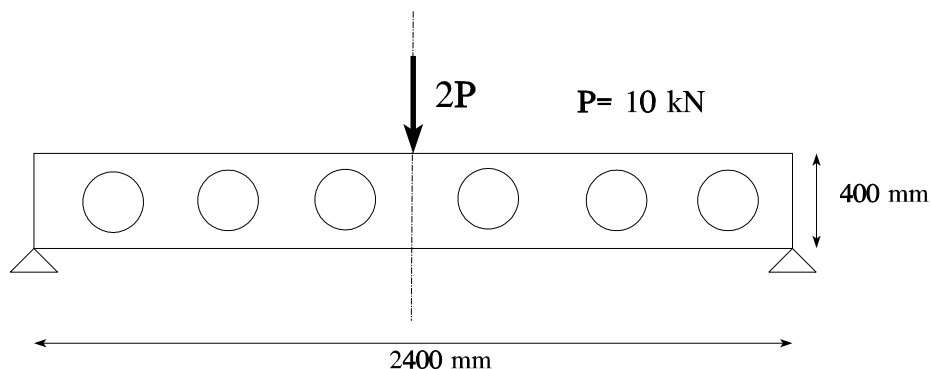


Figure 7.15 : Position du problème de la poutre MBB

Olhoff *et al.* (1992) rapportent qu'on ne peut trouver aucune solution classique avec l'optimisation de forme si on a une topologie composée de trois trous par demi-portée. Par exemple, l'optimisation d'un modèle avec trois trous circulaires ne permet de diminuer la déflexion sous la charge qu'au prix d'une augmentation de masse de plus ou moins 3%, alors qu'une modélisation des trous par des *B-splines* n'apporte qu'un gain de masse de 5,2%. Dans les deux cas, la contrainte de tension n'est pas activée. Pour améliorer sensiblement la solution, une nouvelle topologie est nécessaire.

Compte tenu de la symétrie de la structure, on étudie un modèle de la demi-portée. Le modèle du domaine de conception avec ses conditions aux limites est représenté à la figure 5.15. Le matériau de base est un aluminium de module de Young  $E=70.E9$  Pa, de coefficient de Poisson  $\nu=0.3$ . L'épaisseur de la tôle de la poutre est également donnée :  $t=4.E-3$ m.

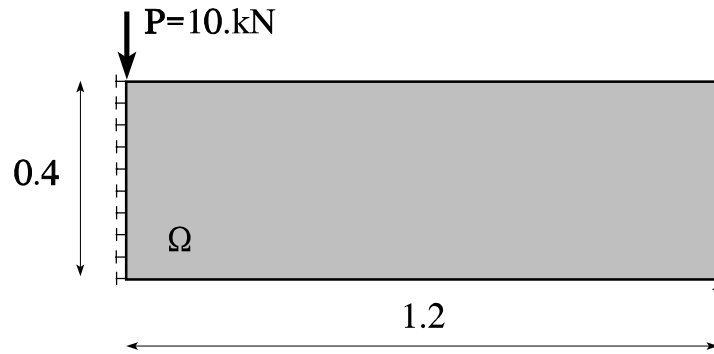


Figure 7.16 : Le domaine de conception avec ses conditions aux limites

Le volume de matière admissible est borné à 50% du volume du domaine de conception, parce que cette densité moyenne correspond environ à la masse de matière présente dans les premiers modèles d'optimisation de forme paramétrique. Le domaine de conception est discrétisé avec un maillage transfini de 75x25 éléments de densité constante.

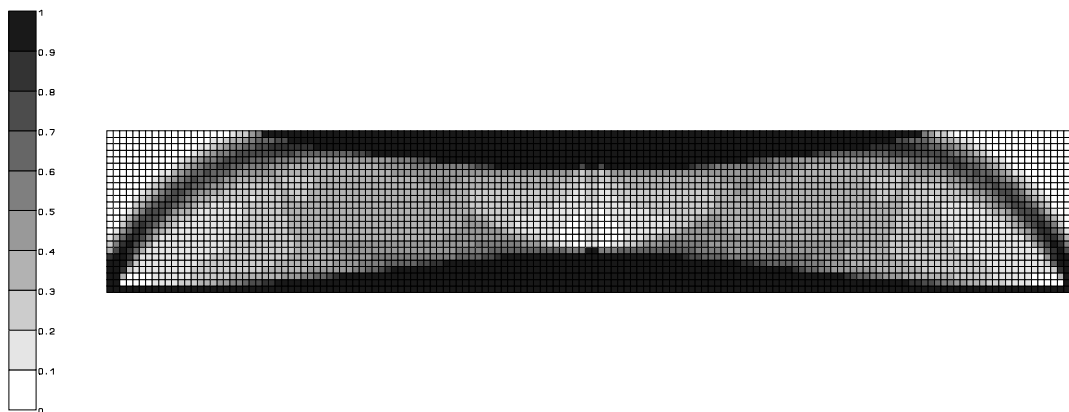


Figure 7.17 : Distribution de matière de double microstructure de Hashin

On réalise d'abord une optimisation topologique avec la nouvelle microstructure orthotrope que nous avons mise en évidence : la double microstructure de Hashin. On prend des éléments finis du second degré pour éviter le problème des distributions en damier. L'approximation de la compliance dans le sous-problème d'optimisation est la linéarisation mixte CONLIN. On obtient la distribution de matière de la figure 7.17. La microstructure est quasi optimale et la pénalisation des densités intermédiaires est faible, ce qui explique la présence d'une vaste étendue de matériaux poreux. La compliance optimale vaut  $l^* = 64,31 Nm$ , ce qui signifie que la déflexion sous la charge est fortement réduite :  $d = 6,4 mm$ .

Cette distribution suggère une structure composée de deux semelles d'épaisseur variable reliées par une âme fabriquée en matériau composite orthotrope. Cette distribution de microstructure correspond à la solution de type analytique donnée par Zhou et Rozvany (1991) reprise à la figure 7.18. Le même genre de solution est obtenu en utilisant une approche du type treillis de barres ainsi que le montre la solution obtenue par M. Beekers et Fleury (1994) à la figure 7.19.



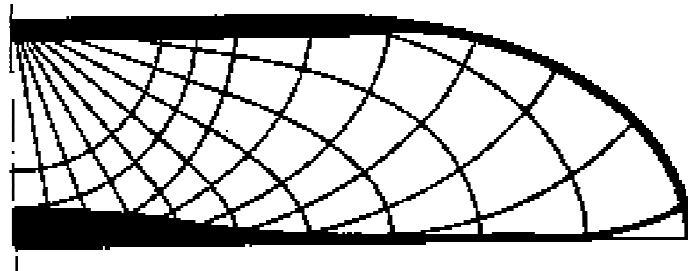


Figure 7.18 : Solution théorique proposée par Zhou et Rozvany (1991)

Malheureusement, la distribution de double microstructure de Hashin ne permet pas de rencontrer les contraintes technologiques relatives à l'existence d'un nombre minimum de trous pour laisser passer les conduites de service. Cette solution pose également un problème de fabrication, car notre technologie actuelle ne nous permet pas de réaliser une distribution de microstructure telle que celle-ci.

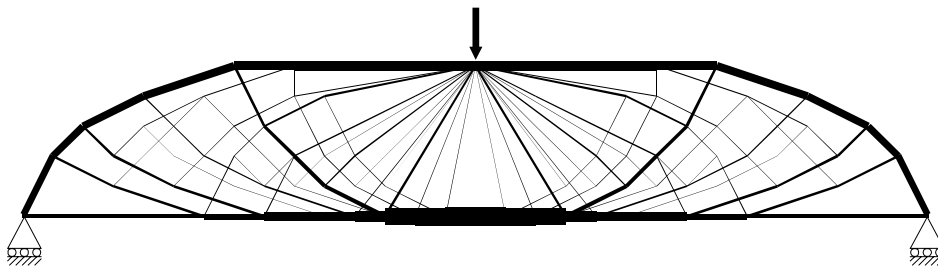
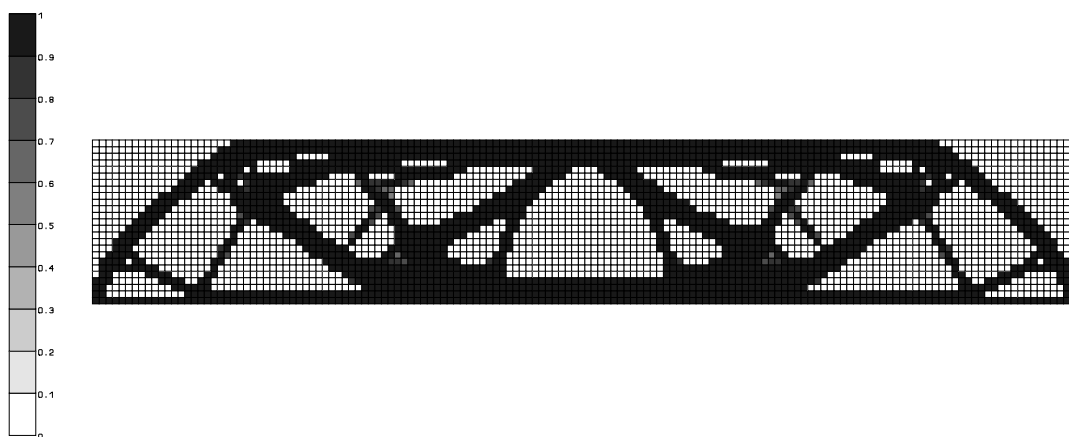


Figure 7.19 : Treillis optimal obtenu par M. Beekers et Fleury (1994)

Pour augmenter la séparation vide-solide et pour créer une distribution plus facile à interpréter, on adopte cette fois une loi raideur-densité de type SIMP avec un exposant cubique  $p=3$ . On conserve le même maillage transfini ainsi que des éléments de degré 2 pour atténuer les distributions en damier. La carte de distribution de densité de la figure 7.20 est obtenue après 75 itérations CONLIN. La compliance optimale vaut  $l^* = 75,60$  Nm soit un déplacement sous la charge de 7,56 mm.

Figure 7.20 : Distribution de densité de matériau SIMP ( $p=3$ )

La distribution de matière suggère maintenant de manière plus précise le réseau courbe de raidisseurs orthogonaux entre eux des figures 7.18 et 7.19. Comme la loi SIMP n'introduit pas une relaxation complète du problème de conception, les distributions de matière que l'on obtiendrait en raffinant de

plus en plus le maillage, seraient telles que l'on verrait apparaître de plus en plus de barres organisées selon le réseau orthogonal suggéré par la solution de Zhou et Rozvany (1991). Par ailleurs, elle est semblable à la distribution de microstructure proposée par Olhoff *et al.* (1992).



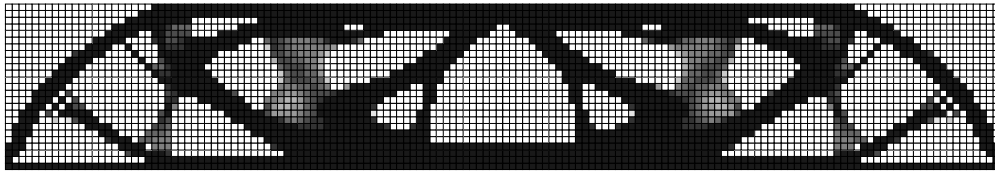
Figure 7.21 : Distribution de matière rapportée par Olhoff *et al.* (1992)

Cette fois, la séparation entre le vide et le solide est bien établie et l'on peut distinguer une topologie précise que l'on pourrait utiliser comme base pour un modèle CAO de la structure à réaliser. La structure optimale qui est suggérée est située entre les membranes et les treillis de barres ou de poutres. On voit aussi que la distribution est encore complexe et qu'elle serait difficile à fabriquer. Pour créer de manière rationnelle une topologie plus facile à utiliser comme base pour un modèle CAO dans une étape ultérieure de la chaîne de conception, on décide de se servir du contrôle du périmètre. La distribution de matière de la figure 7.20 obtenue sans borner le périmètre affiche un périmètre voisin de 7.5 m pour la demi-portée. On essaie donc successivement des bornes  $\bar{P}$  sur le périmètre de 7,5 ; 6,5 ; 5,5 et 4.5. Comme le périmètre est borné, on travaille avec des éléments du premier degré pour alléger le temps de calcul. L'utilisation d'une borne sur le périmètre ralentit toutefois le processus d'optimisation et le nombre d'itérations croît au fur et à mesure que l'on abaisse la borne sur périmètre. On met ainsi 120, 170, 180, 300 itérations pour arriver aux résultats présentés à la figure 7.22.

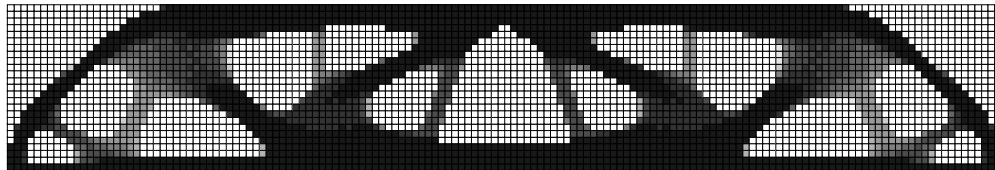
Lorsque le périmètre diminue, le nombre de trous dans le domaine est progressivement réduit. On passe de 17 trous, quand le périmètre n'est pas contrôlé, à 5 trous lorsqu'on impose une borne de 4,5 m. La compliance de la solution augmente également. On passe de 73,08 Nm si  $P=7,5$ ; à 75,01 Nm lorsque  $P=6,5$ , à 81,07 Nm si  $P=5,5$  et finalement à 85,91 Nm si  $P=4,5$ . Il ne faut pas s'étonner que la compliance de la solution avec un périmètre de 7,5m soit inférieure à la compliance de la solution libre de périmètre de la figure 7.20. En effet, la compliance avec le périmètre limité est effectuée avec des éléments du premier degré qui surestiment la raideur et donc la compliance.

On peut remarquer aussi que la distribution de périmètre borné à 7,5m contient encore quelques motifs en damier. A l'exception de quelques damiers gris résultant d'une convergence de l'algorithme encore perfectible, les distributions parasites ont presque totalement disparu des autres solutions.

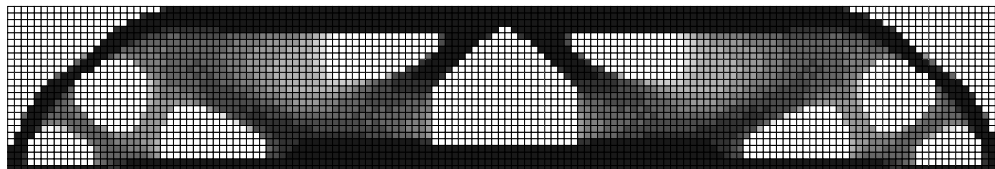
La borne sur le périmètre a aussi un effet indirect indésirable. Lorsqu'on force le périmètre à décroître, on remarque une augmentation des zones de densité intermédiaire. Ce type de distribution constitue une manière artificielle de diminuer le périmètre de la solution. Lorsque l'on impose un périmètre de 4m, un des trous est partiellement bouché par une membrane poreuse. Pour enlever celle-ci, on augmente la pénalisation des densités intermédiaires en prenant  $p=4$ . En repartant de la solution obtenue pour  $p=3$ , on trouve, après 180 nouvelles itérations, la distribution de la figure 7.23 qui est beaucoup plus facile à interpréter. La compliance optimale augmente encore à cause de la pénalisation des densités intermédiaires  $l^*=93,12$  Nm.



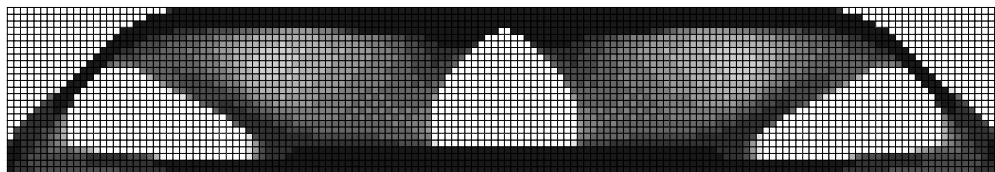
P=7,5



P=6,5



P=5,5



P=4,5

Figure 7.22 : Contrôle du périmètre P=7,5 - P=6,5 - P=5,5 - P=4,5

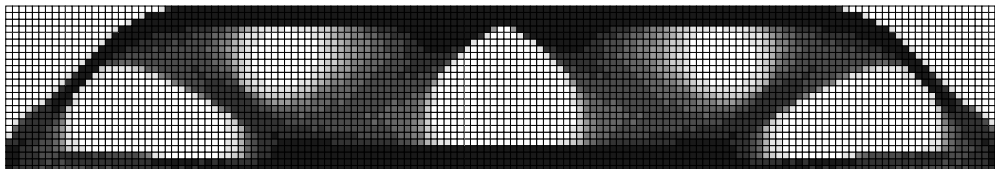


Figure 7.23 : Distribution avec  $P^*=4,5$  et un matériau SIMP avec un exposant  $p=4$

De manière surprenante la topologie obtenue en bornant le périmètre à la valeur de 5.5m est très semblable à celle que nous avons obtenue en choisissant la loi SIMP avec  $p=4$ , en ne limitant pas le périmètre, mais en bornant le volume à 37.5 % du volume du domaine de conception. La distribution de densité relative est présentée à la figure 7.24.

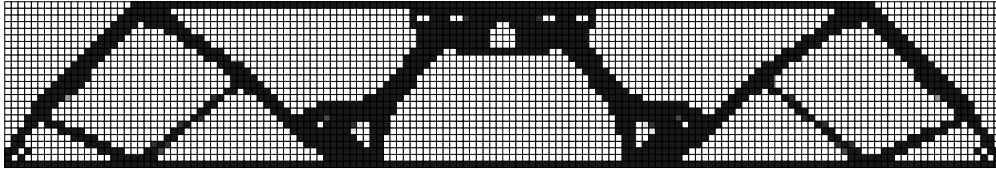


Figure 7.24 : Distribution optimale de matière pour un matériau SIMP ( $p=4$ ) et un volume de 37.5%

Les solutions obtenues en bornant le périmètre donnent lieu à une topologie semblable à celle qui est reprise à la figure 7.25 qui avait été proposée par Olhoff *et al.* (1992) en interprétant la distribution de densité 7.21. Remarquons toutefois que la topologie de Olhoff *et al.* (1992) est semblable, mais pas identique. Le résultat de nos calculs semble donc indiquer que la topologie de la figure 7.25 est suboptimale. Cette remarque démontre toute l'utilité de la méthode du périmètre pour décider d'une topologie concrète sur la base de critères rationnels afin d'éliminer autant que possible une phase hasardeuse dans l'interprétation de la distribution de densité.

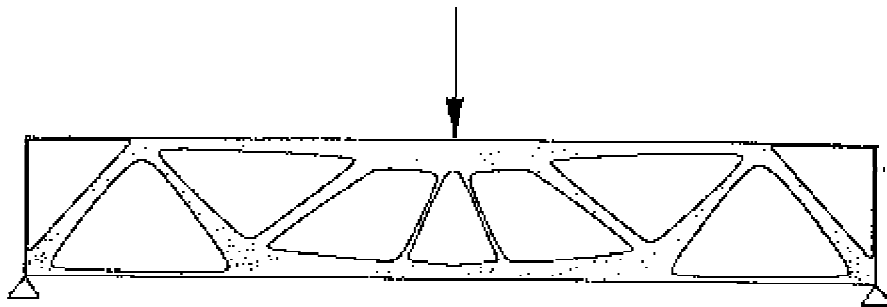


Figure 7.25 : Modèle CAO et topologie de la poutre MBB proposés par Olhoff *et al.* (1992)

#### 7.4.2 Optimisation d'une cage de roulement

Le problème qui nous intéresse consiste à concevoir une cage de roulement à billes ou un support de coussinet. La géométrie et la mise en charge ont été définies par Olhoff, Bendsøe et Rasmussen (1992). L'optimisation topologique a pour but de suggérer la topologie initiale d'une géométrie de bonne qualité afin de servir de point de départ à un processus d'optimisation de forme classique. On limite le volume de matière à 20% du volume de l'espace de conception disponible. La densité initiale est égale à la densité moyenne recherchée, sauf sur le pourtour du roulement où la densité vaut 100% afin de positionner le roulement de manière adéquate. Quatre sollicitations sont considérées pour la conception : une vers le haut, une vers le bas et une dans chaque sens horizontal. Toutes les sollicitations ont une résultante identique sauf celle vers le haut, qui est la sollicitation primaire et qui a une résultante deux fois plus élevée. La modélisation locale des conditions de chargement est réalisée par une distribution bitriangulaire le long de l'abscisse curviligne d'une demi-circonférence. Le socle inférieur est encasturé.

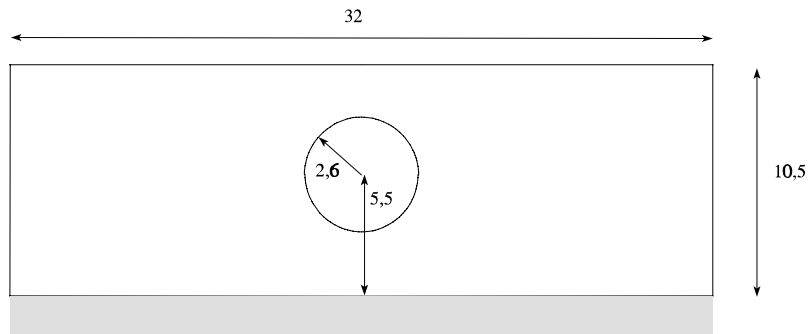


Figure 7.26 : Géométrie du problème du support de roulement

Pour l'optimisation topologique, on choisit une loi de type SIMP avec un exposant  $p$  de valeur 3. Le matériau de base est un matériau isotrope avec un module de Young normalisé de 100 GPa et un coefficient de Poisson  $\nu=0.3$ .

On envisage plusieurs résolutions du problème de topologie. Le premier ne reprend que la sollicitation primaire. Ce calcul est identique à celui qui a été obtenu par Olhoff *et al.* (1992), car ces auteurs ne disposaient que d'une version du module HOMOPT d'optimisation topologique capable de considérer un seul cas de charge. La seconde étude tire parti de la possibilité de notre code de calcul de gérer plusieurs cas de charge. Les quatre sollicitations de problème complet sont prises en compte. Le résultat sera intéressant à comparer avec celui du premier calcul.

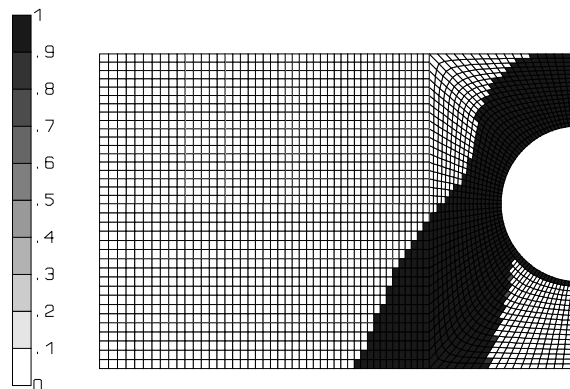


Figure 7.27: Distribution de matière pour la sollicitation primaire

Lorsqu'on ne considère que la sollicitation primaire, la mise en charge et les conditions aux limites sont symétriques, de sorte que l'on peut se limiter à l'étude de la moitié du domaine de conception original. Le demi-domaine est maillé avec 2996 éléments finis du second degré. Le problème comporte 2844 variables de conception. Le résultat de l'optimisation topologique est obtenu assez rapidement avec l'approximation CONLIN, puisque seulement 30 itérations sont nécessaires pour obtenir la solution stationnaire présentée à la figure 7.27. A la figure 7.28, on a reconstitué la distribution de matière par symétrie. La compliance sur le demi-domaine vaut 59.37 Nm. La distribution de matière correspond à celle que l'on aurait pu imaginer intuitivement. Elle forme une sorte de U renversé qui englobe le roulement et qui relie aux fondations. L'optimisation topologique prédit que l'angle formé par les pieds du support avec la fondation vaut approximativement  $45^\circ$ . Ce résultat est parfaitement concordant avec celui obtenu par Olhoff *et al.* (1992) avec une microstructure orthotrope.

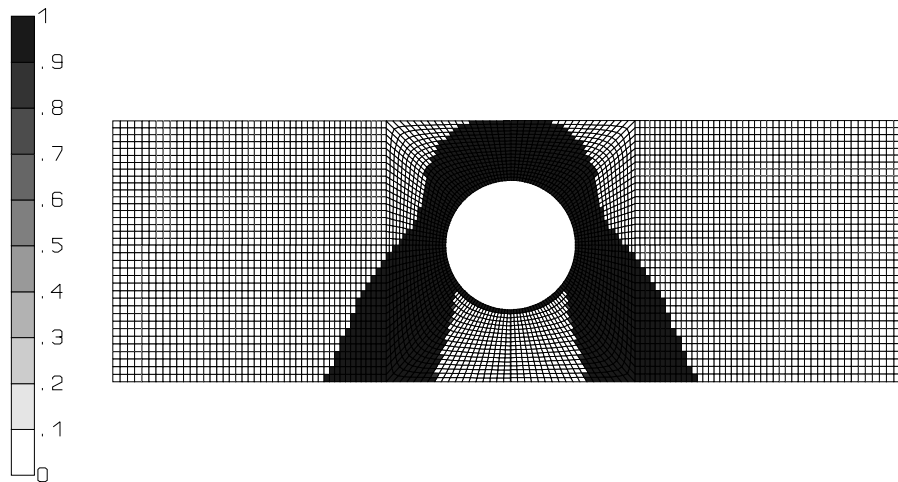


Figure 7.28 : Topologie avec la sollicitation primaire seule

On pourrait penser que la topologie de la solution présentée à la figure 7.28 n'est pas différente de celle que l'on aurait obtenue en variant la géométrie des frontières initiales du domaine de conception et qu'aucun trou n'a été introduit ou retiré. L'optimisation topologique est cependant bien utile. En effet, la disparition de la matière sous le pourtour du roulement n'est possible qu'en considérant une distribution de matière. Une frontière libre apparaît sous le support; il n'aurait pas été possible de la créer ou de la faire disparaître avec l'optimisation de forme paramétrique. Avec l'optimisation de forme, les conditions limites d'encastrement ou de symétrie auraient suivi la frontière, alors qu'avec l'optimisation topologique, la frontière de la matière s'affranchit des conditions limites initiales. Si l'on imagine la structure complète de la figure 7.29, il y a effectivement apparition d'un trou. La topologie initiale a donc bien été modifiée par le processus.

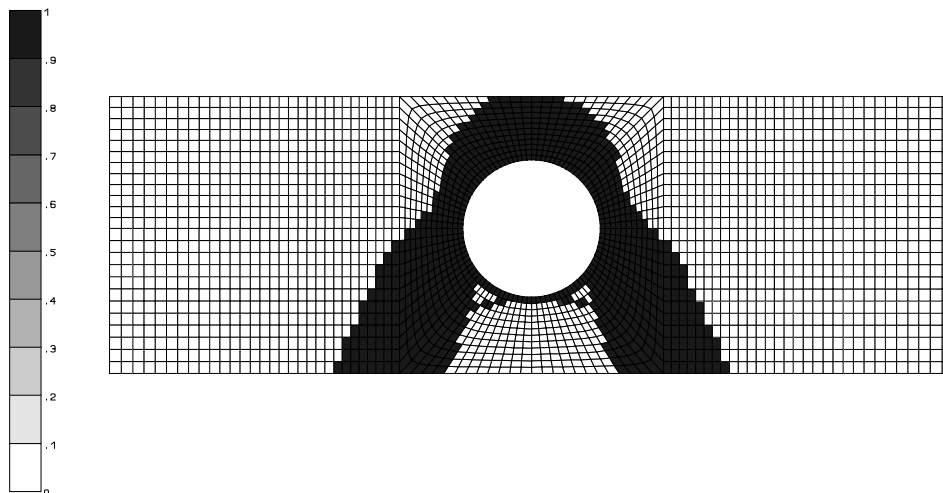


Figure 7.29 : Topologie avec les quatre sollicitations

La seconde optimisation topologique prend en compte la sollicitation primaire ainsi que les trois autres dont les résultantes sont deux fois moins importantes. Le domaine de conception doit cette fois être considéré dans son intégralité. Le maillage comporte 2496 variables de conception. On minimise le maximum des compliances pour chaque cas de charge. A l'optimum, la distribution de matière est légèrement modifiée par rapport à la première expérience. La comparaison des figures 7.29 et 7.30

permet de voir que les deux distributions sont quasi identiques. Le cas de charge primaire est dominant et il régit principalement la solution. La compliance du cas de charge primaire ( $l=125.95$ ) est d'ailleurs fort proche de sa valeur numérique dans la première expérience (après multiplication par deux pour tenir compte des deux demi-parties de la structure). La compliance des sollicitations latérales est plus faible ( $l=95.52$  et  $l=95.09$ ); la prise en considération des cas de charge secondaires n'apportent que peu de modifications à la distribution de matière. La souplesse de la structure dans sa partie inférieure appelle, par contre, quelques modifications. La compliance de la sollicitation vaut  $l=113.088$  Nm. On remarque la présence de deux petits renforts sous le roulement.

Les trois cas de charge additionnels sont importants pour l'optimisation de forme; ils influencent la *forme* finale de la structure, mais ils ne modifient pas le résultat de topologie. Ceci s'explique facilement. Dans le problème d'optimisation de forme, la contrainte équivalente de von Mises est *strictement proportionnelle* à l'échelle des charges, à cause de la linéarité du problème. Par contre, en topologie, la compliance est proportionnelle *au carré* de l'amplitude des forces. Dès lors, pour simuler le résultat de l'optimisation de forme avec la topologie, il ne faudrait pas prendre des cas de charge 2 fois plus petits, mais  $\sqrt{2}$  fois plus faible. C'est ce que nous avons fait.

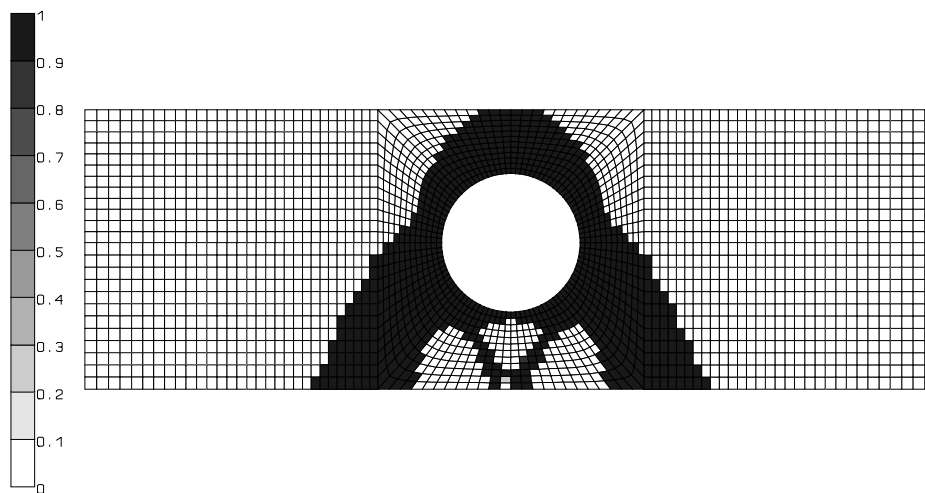


Figure 7.30: Influence du facteur d'échelle des cas de charge secondaires

En augmentant l'importance des cas de charge auxiliaires, la topologie est modifiée. On voit apparaître deux éléments de renfort sous la partie inférieure de la cage. Cette topologie est évidemment moins facile à réaliser.

### 7.4.3 Etude de la topologie d'un support à deux moyeux

L'application que nous proposons maintenant est l'étude de la topologie d'une structure destinée à supporter deux moyeux rigides soumis à plusieurs types de sollicitation. Cette application originale est issue d'un problème d'optimisation de forme, resté sans solution définitive, compte tenu de l'impossibilité de déterminer la topologie idéale. On peut illustrer la puissance de l'outil de la distribution de matière optimale pour choisir une topologie initiale dans un processus d'optimisation de forme.

La géométrie du problème est présentée à la figure 7.31. Toutes les données sont exprimées en unités MKS. Deux moyeux rigides sont disposés à une distance de 0.5 m de la fondation. Les deux moyeux sont séparés l'un de l'autre par 0.3m. Le diamètre de chaque moyeu est de 0.05 m. Pour une question

d'encombrement, on choisit arbitrairement un domaine de conception de hauteur 1.m et de largeur 0.75 m. L'épaisseur du domaine plan est spécifiée :  $t = 5.E-3$  m. Les données du solide de référence sont celles d'un alliage d'aluminium : module de Young  $E = 70.E9$  Pa, coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ .

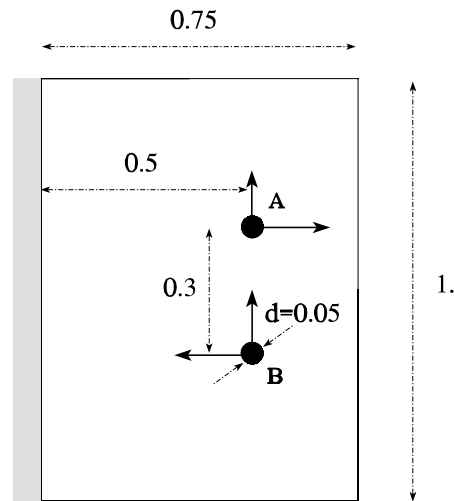


Figure 7.31 : Définition du problème du support à deux moyeux

Les charges sont appliquées par deux moyeux que nous supposons être rigides, de sorte qu'ils seront modélisés par un matériau de module de Young très élevé par rapport au solide de référence. Ce modèle est évidemment imparfait. Une représentation de la mise en charge devrait mettre en jeu un contact entre les moyeux et leur logement. Cependant, le module d'optimisation ne peut prendre en compte les contacts entre solides. Pour rendre compte de façon plus appropriée des charges sur le moyeu, on pourrait aussi créer une distribution de pression variable sur le bord du logement, comme cela est fait pour le problème de cage de roulement à billes. Mais, étant donné la taille des moyeux vis-à-vis de la taille du domaine de conception, nous sommes convaincus qu'une modélisation plus fine de la mise en charge n'apporterait qu'une modification locale de solution, c'est-à-dire seulement une redistribution locale de la matière autour des logements des moyeux.

Le problème comporte plusieurs cas de charge indépendants. Le premier consiste en un cisaillement de la structure perpendiculairement à la fondation. Le moyeu inférieur est tiré vers la fondation pendant que l'autre en est écarté. Le second cas de charge est l'application de deux charges parallèles à la fondation. Il s'agit en quelque sorte du problème du treillis 2 barres montré au chapitre 2, mais avec deux points d'application de la force. La résultante des forces exercées dans le second cas de charge est deux fois plus faible que celle de la première sollicitation.

Cas de charge 1:	$F_x^A = 1.E5$ N	Cas de charge 2:	$F_y^A = 0.5 E5$ N
	$F_x^B = -1.E5$ N		$F_y^B = 0.5 E5$ N

Nous choisissons d'aborder la meilleure conception possible de cette structure par le biais d'une structure de compliance minimale de volume donné. Le problème des cas de charges multiples est traité en minimisant le maximum des deux compliances. La borne sur le volume est fixée à 30% du volume du domaine de conception, soit  $1.12E-3$  m<sup>3</sup>. Tout le domaine de conception est modifiable, sauf une couronne autour des moyeux que l'on suppose être formée par du solide.

Le domaine de conception est maillé en le divisant en cinq éléments de conception. Le premier domaine situé près de la fondation est couvert d'un réseau transfini. Autour des moyeux, le maillage



est plus délicat. Les domaines sont maillés par offset, puis lissés et on recombine les éléments de triangle. Les moyeux sont maillés avec un maillage triangulaire de type Sadek. On compte 1214 éléments finis. La loi de raideur-densité est un matériau SIMP avec une pénalisation cubique ( $p=3$ ). Elle permet une bonne séparation vide-solide. Le matériau étant isotrope, il est facile à utiliser. Pour le traitement des cas de charge multiples, on ne doit pas gérer l'angle d'orthotropie. Le problème des distributions parasites est atténué en prenant des éléments du second degré. On ne possède pas la garantie d'une élimination totale des modes parasites, mais on constate qu'ils sont peu nombreux et qu'ils n'altèrent pas le résultat. L'algorithme d'optimisation sera évidemment fondé sur la résolution duale. Les schémas d'approximation des compliances sont des linéaires-convexes (CONLIN).

Pour mieux comprendre le problème, on recherche la topologie optimale pour chacun des deux cas de charge, traité isolément. La figure 7.32 montre la distribution optimale de matière pour la première sollicitation seule. La compliance optimale vaut  $I^{(1)} = 175.79 \text{ Nm}$ . La distribution de matière est symétrique bien qu'on n'ait aucune contrainte de ce genre. La matière forme un arceau qui relie les deux moyeux à la fondation. La matière semble résister à l'action des charges plaçant deux colonnes, qui transmettent l'effort de traction ou de compression entre la fondation et une poutre épaisse qui relie les deux moyeux. L'action des charges a tendance à faire tourner la poutre autour d'un axe situé entre les deux moyeux. La structure minimise ce mouvement en créant une cavité et en écartant le plus possible les deux colonnes. Cet écartement augmente le moment créé par l'effort repris dans les colonnes.

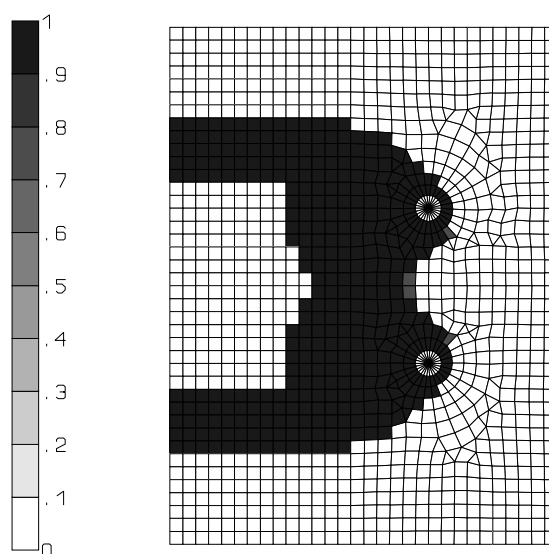


Figure 7.32 : Topologie pour le premier cas de charge seul

A la figure 7.33, on voit la distribution de matière relative au second cas de charge seul. La connectivité de la solution est complètement différente de celle qui est relative au premier cas de charge. La compliance optimale de cette configuration sous l'action des charges est légèrement plus haute que dans le premier cas de charge :  $I^{(2)} = 166.80 \text{ Nm}$ . Le cisaillement du domaine est résolu en adoptant une configuration qui est très semblable à celle que l'on obtiendrait en superposant deux treillis dont les barres font un angle de  $45^\circ$  avec la fondation. La disposition des barres les plus extérieures selon un angle de  $45^\circ$  est cependant rendue impossible par le choix du domaine de conception. La hauteur du domaine de conception n'est pas assez importante pour permettre cette configuration. Les deux membres structuraux les plus extérieurs sont moins couchés que dans la configuration idéale. On remarque aussi le raccordement des membres structuraux à la couronne autour du moyeu. Le contact est presque normal, il semble former une rotule autour du moyeu.

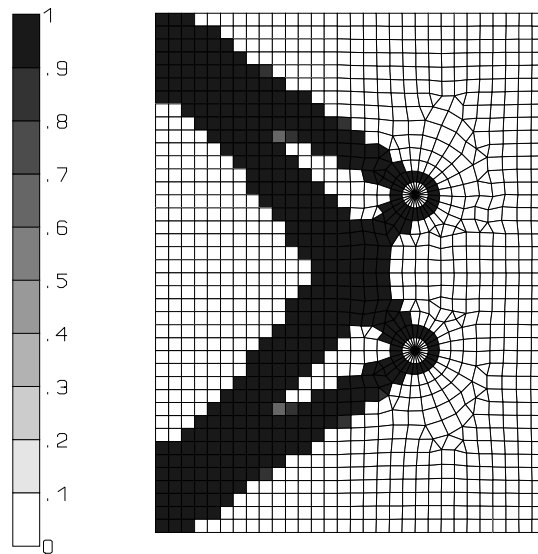


Figure 7.33 : Topologie pour le second cas de charge seul

La figure 7.34 montre maintenant la topologie prédite afin de minimiser le maximum des compliances relatives à chacun des deux cas de charge envisagés. La valeur de la compliance optimale de la structure est évidemment plus élevée que les compliances optimales de chacun des deux cas de charge pris isolément, car elle résulte d'un compromis entre les deux sollicitations. Les deux compliances sont simultanément actives dans la solution car elles ont une valeur identique  $l^{(1)} = l^{(2)} = 199.04 \text{ Nm}$ .

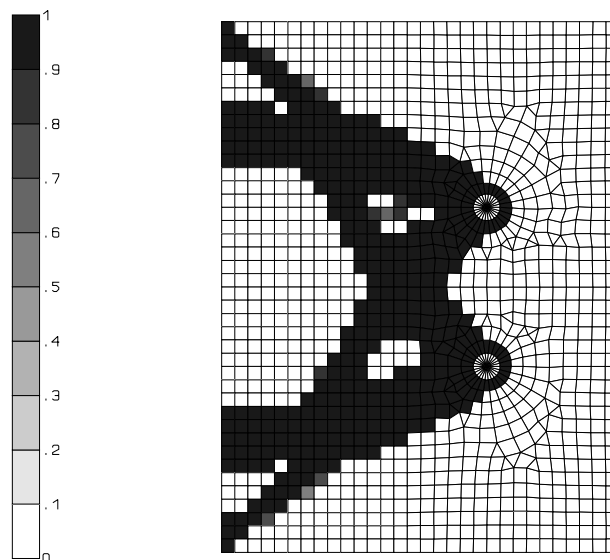


Figure 7.34 : Topologie avec les deux cas de charge

Le compromis entre les deux sollicitations apparaît aussi dans la distribution de matière. On aperçoit la présence des deux colonnes de la topologie optimale du premier cas de charge. La poutre qui relie les deux moyeux est de nature plus complexe, car sa topologie est influencée par le second cas de charge. Néanmoins, la partie située entre les deux moyeux joue un rôle semblable. Moins massive, la poutre centrale est également moins rigide et la compliance est plus élevée pour le premier cas de

charge. Dans la solution, on voit aussi la présence des treillis à 45°. Les deux barres les plus extérieures sont clairement visibles, quoique plus minces. Les deux barres situées au centre du domaine de conception influencent très nettement la nature de la solution entre les deux moyeux. On voit le croisement des deux barres. Ces deux barres disparaissent lorsqu'elles croisent les deux colonnes du premier cas de charge. En quelque sorte, elles sont absorbées par ces deux membres structuraux plus massifs. Au centre de la cavité, située à droite du moyeu supérieur, on détecte une petite imperfection de la solution. Optimum local ou imperfection de la convergence, cette perturbation est probablement causée par l'irrégularité du maillage libre à cet endroit. Le symétrique n'est pas visible dans l'autre cavité, car le maillage y est de meilleure qualité.

Il serait faux de croire que la solution du problème comportant plusieurs cas de charge est la simple superposition des configurations optimales relatives à chacune des sollicitations prises isolément. Dans l'exemple de la cage du roulement et du treillis 3 barres du chapitre 3, nous avons vu que la distribution en présence de plusieurs sollicitations est dominée par les cas de charge, dont les compliances sont les plus basses. Ici, les deux sollicitations introduisent des compliances optimales individuelles d'un ordre de grandeur semblable. Dès lors, les deux mises en charge influencent la solution globale.

Il faut être bien conscient que les conditions de chargement influencent énormément la topologie idéale. Il ne faudrait pas croire que la topologie relative au minimum des cas de charges 1 et 2 soit la topologie sous l'action simultanée de 1 et de 2. La genèse de la topologie est un phénomène fortement non linéaire pour lequel il n'existe aucun principe de superposition. Pour illustrer la forte dépendance de la solution vis-à-vis de la mise en charge, on montre que l'action simultanée des deux cas de charge ne donne absolument pas lieu à la même topologie que le premier ou le second chargement seul, ou que le minimum du maximum des compliances.

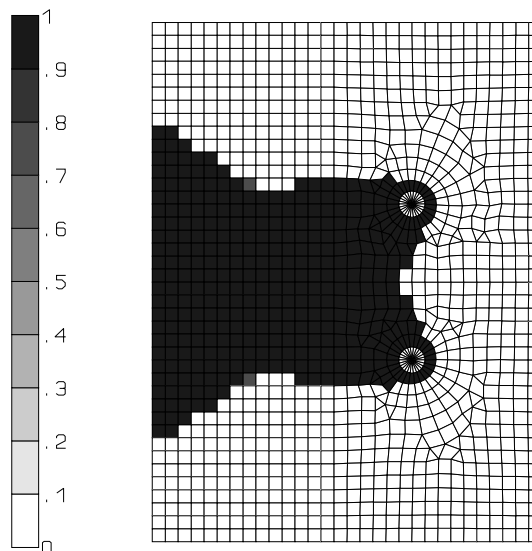


Figure 7.35 : Topologie pour les deux cas de charge agissant simultanément

Si on fait agir les charges 1 et 2 de concert, on trouve la topologie de la figure 7.35. La compliance optimale, qui vaut  $I^{(1)+(2)} = 224.75 \text{ Nm}$ , est évidemment beaucoup plus élevée, puisque les charges le sont aussi. Comme annoncé, cette topologie n'a plus rien à voir avec celles que l'on obtient lorsqu'on considère les deux cas de charge isolément ou lorsqu'on minimise le maximum des deux compliances. On voit que, dans la combinaison (1)+(2), la solution de topologie optimale est un domaine

simplement connexe. Il n'y a donc pas toujours intérêt à créer des trous. On peut chercher à comprendre la topologie de la figure 7.35. Pour cela, il faut regarder la sollicitation combinée (1)+(2) qui est représentée à la figure 7.36. L'extrémité de la colonne formée par la matière est tordue et fléchie. L'état de contrainte est donc dominé par le cisaillement. Nous pensons que l'on peut interpréter la solution avec un domaine connexe comme un compromis entre la poutre, qui reprend l'effort rasant, et la configuration en "X" qui transmet axialement les efforts à la fondation.

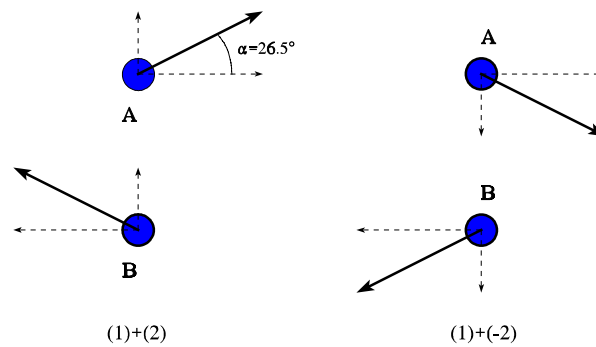


Figure 7.36 : Résultantes des charges pour une combinaison des sollicitations (1)+(2) et (1)+(-2)

Nous envisageons maintenant le cas de charge résultant de la combinaison de la première sollicitation et de la seconde sollicitation agissant en sens inverse, que l'on note (-2). La résultante des efforts sur le moyeu du dessus étire la partie supérieure selon une droite de pente 1/2, tandis que la résultante sur le moyeu le plus bas comprime la matière. On constate, avec surprise, que la distribution optimale de matière donne une structure composée de deux parties disjointes. Chacune des parties est composée d'une colonne qui résiste selon son axe, en traction ou en compression, aux résultantes des charges appliquées aux moyeux.

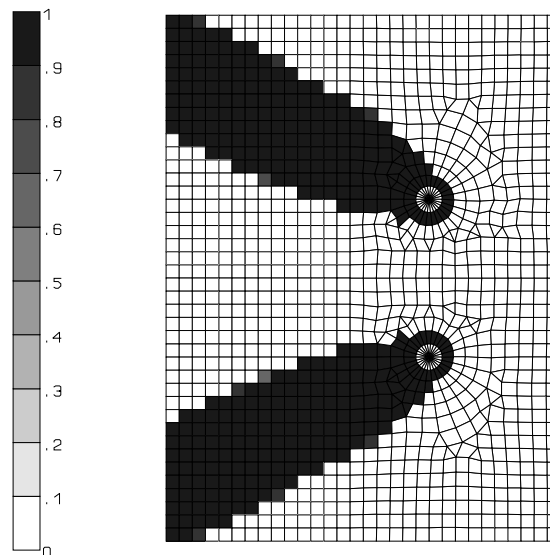


Figure 7.37 : Topologie pour la combinaison des cas de charge (1)+(-2)

#### 7.4.4 Optimisation topologique tridimensionnelle : conception d'une plaque cantilever épaisse

Le problème de distribution de matière de compliance minimale et de volume donné est aussi applicable pour les structures tridimensionnelles. La généralisation de la méthode est immédiate. L'utilisation de microstructure à 3 dimensions est cependant beaucoup plus lourde. Les efforts de calcul sont beaucoup plus conséquents. L'analyse par éléments finis fait appel à des éléments de brique ou de tétraèdre, plus coûteux. La discrétisation du volume de conception demande, rapidement, un nombre important d'éléments. Pour mettre deux fois plus d'éléments par côté, on multiplie le nombre d'éléments par 4 en état plan et par 8 en trois dimensions. Le nombre de variables de conception croît donc rapidement aussi. Pour un matériau orthotrope de rang 3 ou avec des perforations en forme de parallélépipède, on a 3 variables de microstructures et 3 variables angulaires par élément. L'orientation optimale à 3 dimensions reste toujours un problème partiellement ouvert. En conséquence, dans cette thèse, nous nous limiterons aux microstructures suboptimales. On dispose des matériaux SIMP et de la microstructure de Hashin avec des inclusions sphériques.

Pour illustrer l'optimisation topologique de structures tridimensionnelles, on propose d'étudier une plaque cantilever courte soumise à une force de cisaillement. Les dimensions du problème sont reprises à la figure 7.38 en unités MKS. Le domaine est discrétisé avec un maillage régulier de  $32 \times 20 \times 4 = 2560$  éléments de brique du premier degré. Un côté de la plaque est encastré, tandis que l'autre extrémité est soumise à une charge concentrée en son centre. Le volume de matière est limité à une valeur de  $800 \text{ m}^3$  alors que le volume total est de  $2560 \text{ m}^3$ . Le solide de référence est un matériau standard: module de Young  $E = 100 \text{ GPa}$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ .

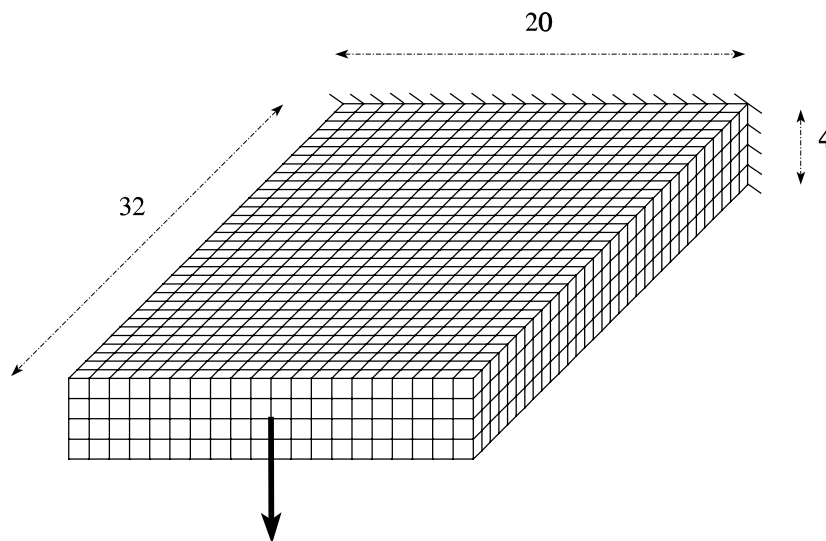


Figure 7.38 : Géométrie du problème de conception d'une poutre tridimensionnelle

Le problème d'optimisation est d'abord abordé avec une loi de raideur-densité de type puissance. On prend une pénalisation cubique  $p=3$ . La distribution de matière s'obtient rapidement, puisque 30 itérations suffisent pour obtenir un résultat stationnaire. La séparation entre le vide et le solide est quasi totale. La visualisation des résultats en trois dimensions est évidemment plus difficile. A la figure 7.39, on montre, d'abord, la distribution de matière suivant des coupes faites selon l'épaisseur en partant de la couche supérieure. Ensuite, la figure 7.40 donne deux vues en perspective dans lesquelles on retire tous les éléments dont la densité relative est inférieure à 90% de la densité du solide de référence.

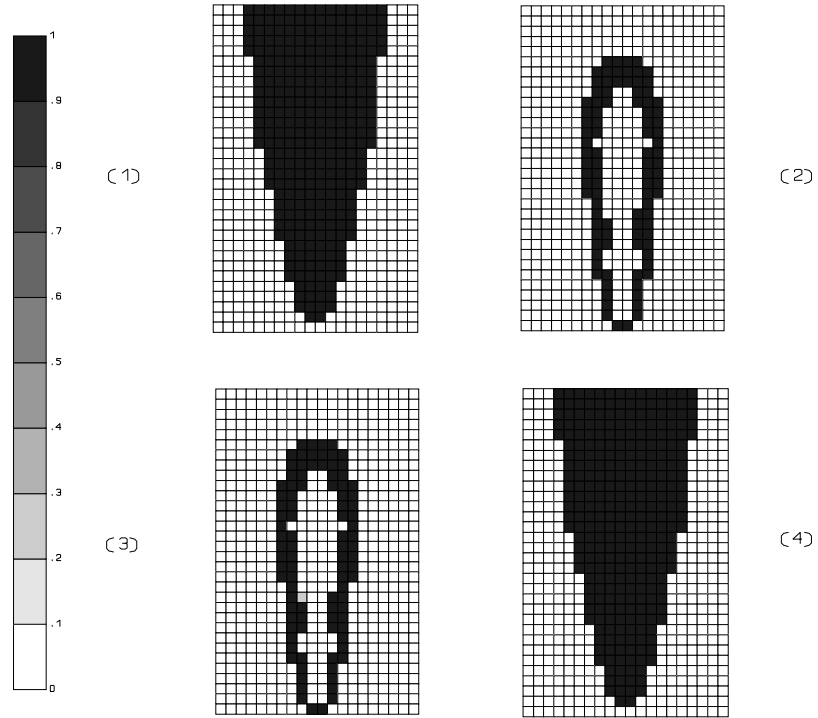


Figure 7.39 : Distribution de la densité - coupes selon l'épaisseur

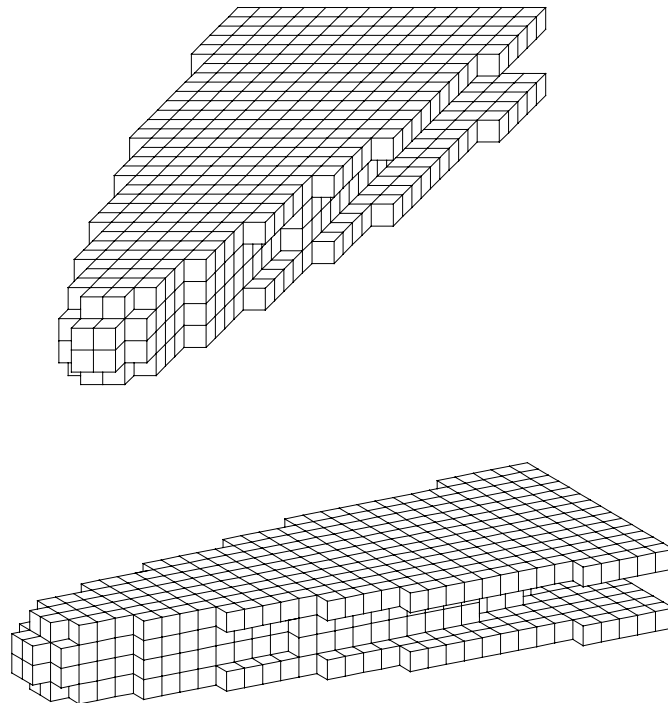


Figure 7.40 : Vue tridimensionnelle de la plaque cantilever

La structure qui est suggérée par la distribution de matière est ce qu'on appelle une poutre caissonnée. Elle se compose de deux semelles pour augmenter la raideur flexionnelle. La matière dans les deux couches intérieures forme un caisson qui relie les deux faces et les tient écartées. En l'absence de torsion, la présence du caisson fait en sorte que la solution optimale peut être assimilée à une plaque sandwich, dont le bon comportement en flexion est réputé. Les semelles ont une forme de largeur croissante, de sorte que le moment d'inertie de la poutre va en augmentant depuis l'emplanture jusqu'au point d'application de la force. La forme du caisson est, elle aussi, surprenante : elle s'évase depuis la pointe puis se referme aux  $2/3$  de la portée. L'encastrement est libre de caissonnage. On pense que la solution libère de la matière à l'encastrement où l'écartement des semelles est maintenu par les conditions de fixation, pour la placer là où elle est plus utile.

On procède à la même expérience numérique, mais en choisissant un matériau poreux dont la microstructure est celle d'un matériau de Hashin. Ce matériau composite possède des propriétés homogénéisées isotropes. La pénalisation des densités intermédiaires est beaucoup plus faible que celle qui résulte de l'exposant  $p=3$ . La convergence avec la microstructure de Hashin est également plus lente. Avec le matériau SIMP et  $p=3$ , on obtient la solution après 30 itérations, tandis que la microstructure de Hashin demande près de 50 itérations pour obtenir une compliance suffisamment stationnaire. En contrepartie, la valeur de la compliance avec la microstructure de Hashin est plus basse:  $l=179$  Nm, alors qu'elle vaut  $l=204$  Nm avec le matériau SIMP. A la figure 7.41, la distribution de matériau est donnée suivant des coupes de même épaisseur, en commençant par le haut. La figure 7.42 donne une vue tridimensionnelle de la structure où on a éliminé tous les éléments dont la densité relative est inférieure à 30% de la densité du solide de référence. La solution est de forme semblable à celle obtenue avec le matériau SIMP. La distribution de matière forme deux semelles de forme triangulaire. A nouveau, les couches intérieures forment un caisson ouvert, et l'on reconnaît une poutre de type sandwich.

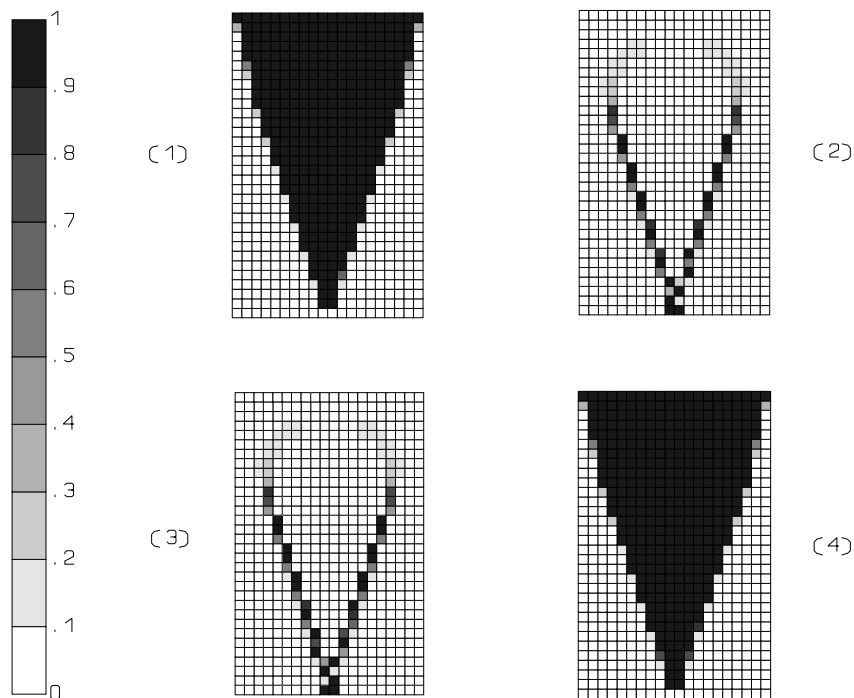


Figure 7.41 : Distribution de la densité - coupes selon l'épaisseur

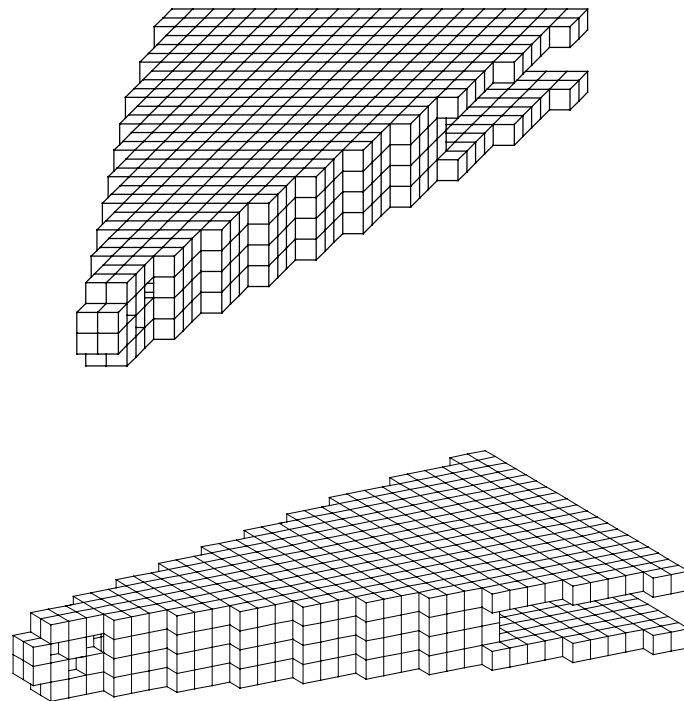


Figure 7.42 : Vue tridimensionnelle de la plaque cantilever

Puisque la distribution a été calculée avec des éléments du premier degré, les distributions parasites sont possibles. A 3 dimensions, les modes de damier existent aussi. On trouve chez Brezzi et Fortin (1991) la trace du même phénomène dans les écoulements incompressibles 3D. Pour un macroélément formé de  $2 \times 2 \times 2$  éléments, on a quatre modes parasites possibles; ils sont représentés à la figure 7.43. On aperçoit la présence du mode (a) de la figure 7.43 dans notre résultat. Il est présent à la pointe de la poutre. La distribution périodique d'éléments blancs et noirs est nettement visible sur les coupes (2) et (3) de la figure 7.41 et sur la vue de côté de la figure 7.42.

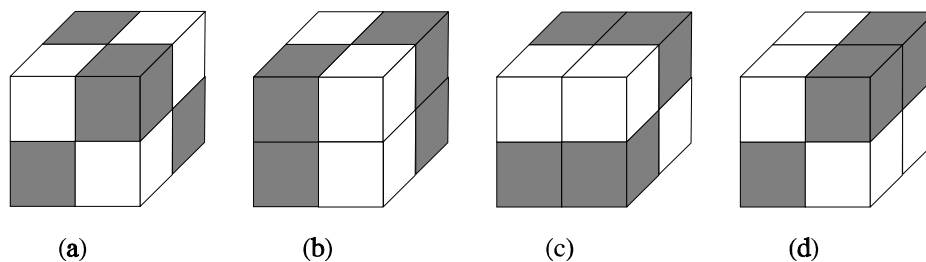


Figure 7.43 : Les modes de distribution en damier en 3 dimensions

L'élimination des damiers tridimensionnels peut être réalisée avec des méthodes semblables à celles qui ont été développées pour les problèmes plans. On pourrait adapter la méthode des macroéléments qui a été établie par Brezzi et Fortin (1991) pour le problème de Stokes. La méthode des filtres de convolution pourrait également être étendue en faisant une pondération sur les éléments voisins présents dans les trois dimensions. La méthode du périmètre devient une méthode de limitation de la surface de la distribution de matière.





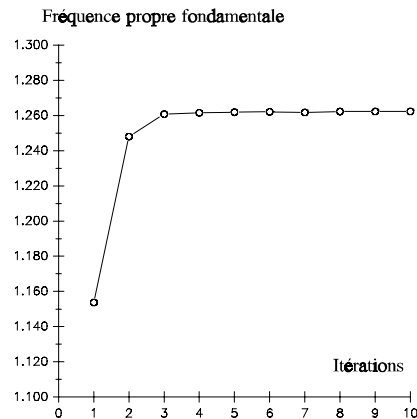


Figure 7.45 : Evolution de la fréquence fondamentale

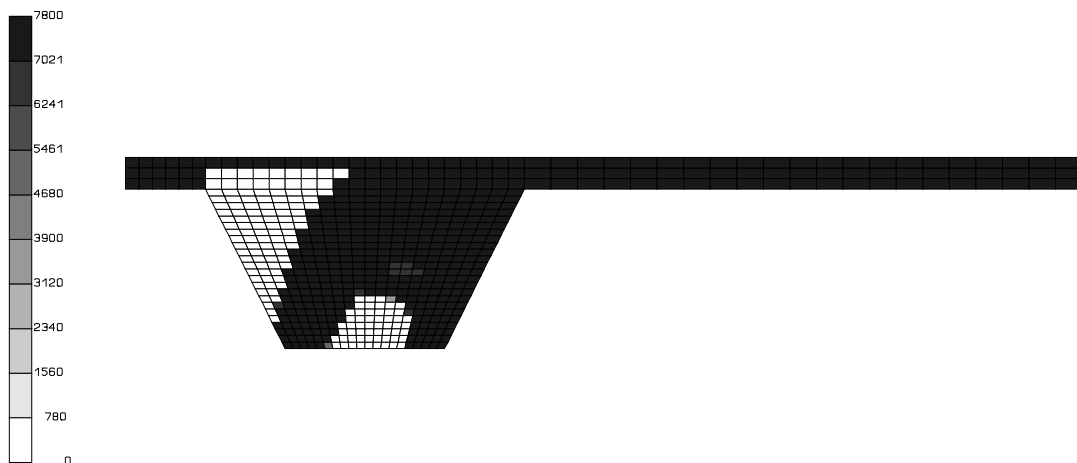
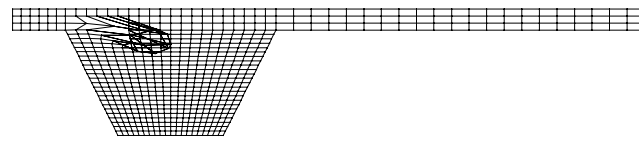


Figure 7.46 : Distribution optimale de la matière dans le support de la barrière

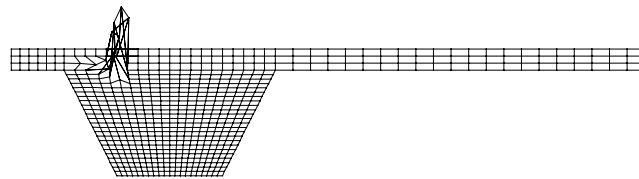
#### 7.4.5.2 Apparition de modes parasites de vibration

Il faut signaler que le choix de la loi de raideur-densité est important. En effet, nous avons constaté qu'une loi de raideur-densité avec une très forte pénalisation des densités intermédiaires introduisait des modes parasites de vibration au niveau local. Les modes de vibration locaux prennent naissance dans des zones remplies de vide. L'origine de ces modes est purement numérique, car elle est liée à une modélisation imparfaite des propriétés matérielles de la matière de très faible densité. En réalité, le vide ne vibre pas. Et puisque les régions de densité minimale ne sont admises que pour lever la singularité de la matrice de raideur, ces modes locaux doivent être éliminés du problème de conception, car ils ne représentent pas la réalité.

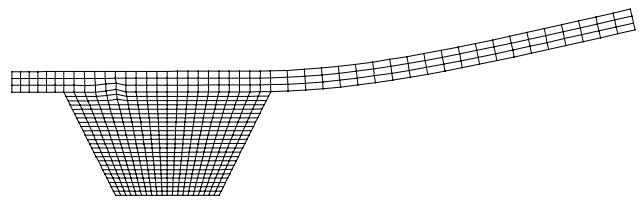
L'apparition entre deux optimisations de ces modes à très basse fréquence est très nuisible dans le processus d'optimisation, car elle détruit la convergence. Ces modes locaux peuvent conduire à de larges oscillations dans le processus d'optimisation.



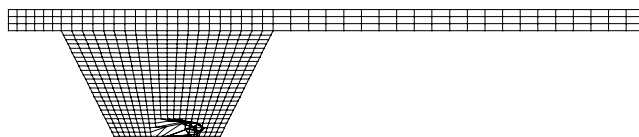
$$f1 = 0.9802 \text{ Hz}$$



$$f2 = 1.2247 \text{ Hz}$$



$$f3 = 1.2618$$



$$f4 = 1.2984$$

Figure 7.47 : Modes de vibration avant la rupture du processus d'optimisation

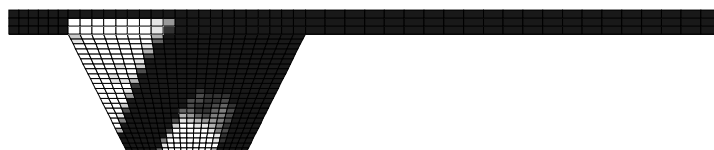


Figure 7.48 : Distribution de matière après 4 cycles d'optimisation ( $p=4$ )

Les modes locaux peuvent même provoquer une rupture de la convergence car il arrive qu'on ne puisse plus trouver de solution admissible. A la figure 7.47, on présente les quatre premiers modes de vibration de la structure résultant de la distribution de matière obtenue après quatre cycles d'optimisation (figure 7.48). Le matériau est de type SIMP avec un exposant  $p=4$ . La densité minimale retenue est  $\mu_{\min} = 0.01$ . Le premier mode de flexion de la structure, qui était le mode fondamental jusqu'à ce moment, est relégué en troisième position. Les deux premiers modes de vibration sont des modes locaux qui ne font intervenir que quelques éléments de la structure. Il en existe d'autres, car tous les modes de vibration, jusqu'au mode 10, sont des modes locaux.

L'origine du phénomène semble relativement simple. Lorsque la raideur est très fortement pénalisée, le rapport raideur/densité (qui peut être considéré comme une caractéristique de la fréquence d'un mode de vibration local) devient très faible pour les éléments dont la densité relative est très faible. Dans les régions de très faible densité, ce manque de raideur locale introduit des modes de basse fréquence qui ne font intervenir que quelques éléments. Cette explication est également confirmée par le fait qu'aucun mode local n'est visible dans le problème de renforcement optimal, si le domaine de conception est couvert par une structure de base qui assure une rigidité minimale à la distribution.

Un problème similaire à celui que nous décrivons a été observé par Neves, Guedes et Rodrigues (1993) lors de l'optimisation des charges critiques d'instabilité. Le remède adopté par ces auteurs consiste à filtrer les modes locaux dans les régions de basse densité. Pour cela, ils retirent de la matrice de raideur géométrique, la contribution des éléments dont la densité est trop faible. C'est un moyen artificiel de faire décroître vers zéro les effets géométriques plus vite que la raideur géométrique et d'éviter les instabilités numériques du processus d'optimisation.

Nous nous sommes également attachés à examiner le problème. Nous pouvons proposer plusieurs solutions pour éliminer ces modes parasites de vibration.

#### *Modification de la loi de raideur-densité*

D'abord, on peut utiliser une méthode similaire à celle qui a été utilisée par Neves *et al.* (1993). On détecte les éléments dont la densité est trop basse et on laisse ces éléments contribuer à la matrice de raideur, mais on retire leur contribution à la matrice de masse, de sorte que les régions de faible densité participent seulement en raideur.

Si on annule purement et simplement la masse de ces éléments, dès qu'elle descend sous un certain seuil limite, on crée une non-différentiabilité dans la loi raideur-densité et donc dans le processus d'optimisation. Pour éviter cela, nous proposons de modifier la loi de raideur-densité de sorte que le rapport  $E/\rho$  soit limité à une valeur minimale. Cependant, nous désirons limiter la valeur des fréquences parasites par rapport aux fréquences de la structure qui varient elles-mêmes comme la racine carrée du rapport  $E^0/\rho^0$ . Nous devons donc contrôler le rapport relatif  $R = (E\rho^0)/(\rho E^0)$ . La loi de raideur-densité la plus simple que l'on puisse modifier est la pénalisation de type puissance des matériaux SIMP, pour lequel le rapport raideur/masse volumique est donné par :

$$R = \frac{E\rho^0}{\rho E^0} = \mu^{p-1} \quad (7.4)$$

Physiquement, ce rapport est une mesure relative de la vitesse des ondes élastiques dans le solide. Le seuil limite du rapport  $R$  est déterminé par référence au problème de la barrière. Pour  $p=3$  et une densité minimale de 0.01, les modes ne sont pas présents alors que le rapport  $R$  vaut 1.E-4. Par contre, pour  $p=4$ , il y a des modes locaux et le rapport  $R$  vaut 1.E-6. On en conclut qu'il serait bon de limiter le rapport  $R$  à une valeur voisine de  $R_{\min}=1.E-4$ .

Pour éviter une "cassure" dans la courbe de la masse volumique en fonction de la densité relative, on remplace la courbe

$$R = \frac{E \rho^0}{\rho E^0} = \max(R_{\min}, \mu^{p-1}) \quad (7.5)$$

par son approximation avec la fonction de Kreisselmeier-Steinhauser (Haftka et Gürdal, 1992) :

$$R = KS(R_{\min}, \mu^{p-1}) = \frac{1}{M} \ln \{ \exp(MR_{\min}) + \exp(M\mu^{p-1}) \} \quad (7.6)$$

Plus le nombre réel M est grand, plus l'approximation est proche de la courbe réelle. Sur station DEC- $\alpha$ , on prend M entre 1 et 100. Pour des raisons numériques, il est généralement plus précis de "normer" les deux arguments de l'exponentielle. La loi linéaire liant la masse volumique linéaire à la densité est remplacée par la relation :

$$\rho = R^{-1} \rho^0 \frac{E}{E^0} \quad (7.7)$$

Cette modification de la loi de raideur-densité a été implantée dans notre programme de calcul. Nous avons constaté que les modes locaux sont effectivement éliminés. On retrouve une convergence monotone vers le même optimum que celui que l'on obtient avec  $p=3$ .

#### Filtrage des modes locaux

La seconde solution que nous proposons est fondée sur un principe différent, car on ne modifie pas la loi de raideur-densité relative. Au contraire, elle consiste à détecter et à filtrer les modes locaux de vibration et à ne pas les considérer dans le processus d'optimisation, car ils n'ont pas de signification physique.

Puisque les modes parasites se développent dans des régions où la densité est faible, il convient de s'assurer, d'abord, que la raideur locale n'est pas trop faible et qu'il n'y a pas de singularité de la matrice de raideur. On doit donc éliminer a priori les *modes cinématiques*. Ceci est tout à fait logique puisqu'il n'est pas possible d'agir sur les *modes de corps rigide* (déplacements et rotations d'ensemble) par une redistribution de matière. Les modes rigides sont les solutions de l'équation :

$$K u = 0 \quad (7.8)$$

En réalité, ces modes sont éliminés lors de l'opération d'inversion de la matrice de raideur. La détection des modes rigides et des modes cinématiques dépend de la stratégie de pivotage employée. Quant aux modes cinématiques, ils sont normalement absents, car ils sont évités par le choix d'une borne petite, mais non nulle sur la densité minimale. S'il en existe encore, ils feraient l'objet de fixations automatiques. Quant aux modes rigides, ils font l'objet d'une reconnaissance dès le calcul des fréquences propres. Repérés, ils ne sont, a priori, jamais considérés dans la phase d'optimisation.

Les modes parasites, tels que ceux qu'on aperçoit à la figure 7.47, ne sont ni des modes de corps rigide ni des modes cinématiques. Leur énergie de déformation est faible, mais elle est positive. Pour les détecter, et filtrer les modes parasites, l'idée est d'utiliser leurs caractéristiques :

- la localisation de la vibration: seuls quelques éléments participent au mode;
- la vibration se développe dans une région de faible densité et elle met en jeu une faible énergie cinétique.

Si on repère les modes locaux, on pourra les ignorer dans la phase d'optimisation en ne s'attachant qu'aux modes globaux qui ont une signification physique.

Le processus numérique de filtrage peut être basé sur deux critères.

- Si on fixe la norme du mode de vibration en ramenant le plus grand déplacement à l'unité, par exemple, la comparaison des modes peut être effectuée sur la base de leur énergie cinétique totale. Un mode global met en jeu une grande énergie cinétique, alors qu'un mode local, comme ceux que nous voulons éliminer, possède une énergie cinétique beaucoup plus faible. On compare les quantités  $\mu = \mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{q}$ , c'est-à-dire l'énergie cinétique sans le facteur de pulsation propre au carré, afin de ne pas privilégier les vibrations à haute fréquence. On considère qu'un mode est local dès que son énergie cinétique est inférieure à une valeur de coupure. Nous proposons de calculer cette valeur limite séparant les modes globaux et les modes locaux comme une fraction (0.001, par exemple) de la plus grande énergie cinétique présente parmi tous les modes de vibration calculés.

- Si on fixe la norme du mode de vibration avec la matrice de masse ( $\mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{q} = 1$ ), la répartition de l'énergie cinétique par éléments finis est concentrée dans quelques éléments. On peut alors adopter un critère statistique. Si quelques éléments contiennent une énergie cinétique fortement supérieure à la moyenne, alors le mode est considéré comme local. En appliquant le critère d'une autre façon, on peut rejeter un mode dont la moyenne de l'énergie par élément est largement en dessous d'une fraction donnée de l'énergie cinétique globale.

La stratégie de filtrage que nous avons utilisée est basée sur le premier critère : on utilise la norme des modes propres pour laquelle le plus grand déplacement est ramené à l'unité et on compare les termes d'énergie cinétique  $\mu = \mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{q}$ . Le filtre est implanté dans une étape préliminaire à la phase d'optimisation. On optimise les modes propres prescrits en ignorant les modes parasites. Ainsi, dans l'exemple de la figure 7.47, la maximisation du mode de vibration fondamental sera automatiquement transformée en la maximisation du mode 3.

Le principe est illustré avec le problème de la barrière. Pour le matériau SIMP avec  $p=4$ , on reprend les énergies cinétiques des 5 premiers modes au tableau 7.1. Le mode 3, qui est le mode de vibration global, a l'énergie cinétique la plus importante. Le rapport entre cette énergie cinétique maximale est de l'ordre de  $1, \text{E}-3$  pour tous les autres modes qui sont des modes locaux.

Mode	Fréquence propre (Hz)	Energie cinétique $\mu$ ( $\text{m}^2 \text{ kg}$ )	Rapport à l'énergie cinétique maximale
1	0,9821	1,907E-1	1,3810E-3
2	1,2271	1,3823E-1	9,6902E-4
3	1,2618	1,4265E+2	1,0
4	1,2814	9,8634E-1	6,9144E-4
5	1,3264	1,6051E-1	1,0946E-3

Tableau 7.1 : Comparaison des énergies cinétiques pour le matériau avec  $p=4$  à la quatrième itération

Nous avons pu constater que la stratégie de filtrage des modes est très efficace en pratique. Avec cette stratégie, le processus d'optimisation n'est plus perturbé par les modes locaux. La méthode présente néanmoins un inconvénient. Après plusieurs itérations, les zones de vide apparaissent en plusieurs endroits du domaine de conception et le nombre de modes locaux devient très important, reléguant les

premiers modes globaux en position très éloignée des modes de plus basse fréquence. Au fur et à mesure que l'optimisation se poursuit, les modes locaux sont tellement nombreux que : soit on ne retrouve plus le premier mode global parmi les modes que l'on a calculés, soit on doit fournir un effort de calcul très important pour calculer un nombre croissant de modes de vibration pour détecter le premier mode global.

## 7.5 Conclusion

L'optimisation de topologie que nous avons abordée par le biais d'une distribution optimale de matière est un outil puissant pour la conception des structures. Le processus d'optimisation topologique peut être inséré de plusieurs manières dans la chaîne de conception. Dans le futur, nous pensons que l'optimisation topologique fera partie d'une boucle de conception intégrant l'optimisation de forme et l'optimisation de topologie. Mais, à l'heure actuelle, on utilise généralement l'optimisation topologique comme un outil préliminaire de conception pour déterminer la topologie de la structure. Le choix de la topologie structurale, de la nature et de la connectivité des éléments, est alors suggéré par la distribution de matière optimale. On élabore ensuite un modèle plus complet de la structure en s'inspirant éventuellement des contours des lignes d'isodensité de la distribution de matière. Par la suite, on poursuit le processus de conception avec d'autres techniques. On adapte, par exemple, les paramètres du modèle par un calcul d'optimisation de forme ou de dimensionnement pour satisfaire à des critères mécaniques et technologiques variés.

L'interprétation des distributions de matière est particulièrement importante, car elle permet de tirer parti du plus grand nombre possible d'informations présentes dans la répartition de densité. Ce processus mérite que nous nous y soyons intéressés : c'est pourquoi nous avons fourni quelques éléments de réflexion issus de l'expérience que nous avons acquise dans l'analyse des distributions de matière. Nous nous sommes penchés sur la sélection de critères adéquats pour choisir la nature et la connectivité des éléments de la structure à partir de la distribution de densité. Nous avons également examiné l'ajustement des frontières du modèle à la distribution de matière. L'ajustement manuel donne souvent de bons résultats en quelques essais et erreurs. Pour une procédure plus automatique, il faut une méthode des moindres carrés qui est plus difficile à programmer de manière fiable. Nous avons illustré ces concepts en interprétant deux distributions de matière obtenues pour le problème de la poutre cantilever courte.

Le chapitre débouche enfin sur plusieurs applications. Toutes les réalisations numériques ont été faites à l'aide du code de calcul que nous avons implanté dans le module OPTI du progiciel SAMCEF. Les exemples présentés couvrent plusieurs types de problèmes : la conception des structures statiques planes avec un ou plusieurs cas de charge, la conception des structures tridimensionnelles et la conception des structures en vibration.

L'exemple des structures en vibration permet de constater l'apparition des modes parasites de vibration, situés dans les régions de faible densité. Le phénomène, qui est de nature purement numérique, est lié à la pénalisation des densités intermédiaires dans les régions de faible densité. Pour les éliminer, nous avons proposé et expérimenté deux solutions :

- . la modification de la loi masse volumique-densité;
- . le filtrage des modes parasites.

Les deux stratégies apportent des éléments de réponse intéressants à la difficulté qui a été soulevée.

## Chapitre 8 : PERSPECTIVES D'AVENIR ET CONCLUSION

### 8.1 Résumé de cette thèse

Les travaux qui ont été présentés avaient pour but d'étudier et d'enrichir les techniques d'optimisation topologique. Plusieurs sujets ont été abordés.

L'optimisation topologique est un problème à paramètres distribués. Ces problèmes d'optimisation sont mal posés car on ne peut montrer ni l'existence ni l'unicité de leur solution, et les solutions numériques que l'on pourrait trouver sont instables. Il est intéressant de retracer l'histoire des recherches et des tâtonnements qui ont permis de traiter ce type de problème et d'*élaborer une solution généralisée*, car la compréhension de ces éléments met en évidence les idées novatrices véhiculées par le problème de topologie.

*La formulation du problème de distribution de matière* mérite aussi que l'on s'y attarde et qu'on la justifie. Le problème de compliance minimale d'une distribution de matière de volume constitue ce que nous appelons le problème fondamental. Nous avons montré comment le problème fondamental peut être étendu à d'autres problèmes de conception. Par exemple, plusieurs cas de charge peuvent être considérés par une procédure de "min-max". Un autre type de problème de conception consiste à redistribuer la matière en utilisant un critère basé sur les vibrations libres du solide.

*Les principes de la résolution du problème* sont bien établis. Les analyses de sensibilité du premier et du second ordre ont été étudiées. La sensibilité des grandeurs énergétiques et des fréquences propres de vibration sont des cas particuliers où il ne faut pas de cas de charge additionnel pour évaluer les dérivées premières, ce qui diminue l'effort de calcul. Quant à l'examen des conditions d'optimalité, il révèle que le problème d'optimisation peut être séparé en deux problèmes d'optimisation partiels qui sont, au premier ordre, indépendants l'un de l'autre : l'un est consacré à l'optimisation des variables de microstructure, l'autre s'intéresse aux angles d'orthotropie. La résolution du problème d'orientation optimale est effectuée avec un critère d'optimalité basé sur les études théoriques de Pedersen (1989a,1989b), de Gibiansky et Cherkaev (1988) et de Díaz et Bendsoe (1992).

*Le problème d'optimisation* dont les variables sont les paramètres de microstructure, est un problème de très grande taille. Nous avons démontré qu'il pouvait être résolu efficacement en appliquant une *méthode duale* pour résoudre une suite de sous-problèmes formés d'*approximations convexes séparables*. Cette approche de la résolution, qui n'est pas dédiée au problème de compliance minimale, s'adapte facilement au traitement d'une grande variété d'autres formulations du problème de topologie.

Pour réduire le nombre de cycles d'optimisation, le choix des approximations structurales est très important. Les approximations CONLIN et MMA ont souvent donné satisfaction. *Les approximations du second ordre* sont trop onéreuses si on doit calculer les sensibilités du deuxième ordre, mais elles sont très performantes quand on utilise une *méthode de Quasi-Newton pour matrices diagonales*.

La solution du problème de distribution de matière n'existe pas au sens classique. La solution est la limite d'un processus d'*homogénéisation*, et de ce fait, elle contient naturellement des matériaux composites. Pour calculer la solution, il faut être capable de *déterminer les propriétés effectives de ces*



*composites poreux*. Rappelons que si on parvient à décrire la microstructure en fonction de paramètres microgéométriques, on transforme le problème d'optimisation topologique en un problème de dimensionnement. La résolution du problème de topologie est généralement effectuée en choisissant un type de microstructure et en déterminant la distribution des paramètres microgéométriques.

Nous avons présenté deux microstructures qui sont abondamment utilisées dans la littérature :

- les matériaux feuilletés de rang 2 et de rang N qui réalisent les propriétés de raideur optimale au niveau local;
- le modèle des matériaux SIMP où l'on remplace la relation d'homogénéisation par une loi de raideur semblable à celle d'une plaque d'épaisseur variable. Ce modèle est un des plus utilisés pour la résolution d'applications.

Nous avons également mis en évidence trois nouvelles microstructures :

- la microstructure des sphères composites et la loi d'homogénéisation obtenue avec l'approximation de Mori-Tanaka appliquée aux inclusions sphériques;
- la microstructure des cylindres composites et la loi de Halpin-Tsai pour des composites avec des perforations cylindriques;
- la double microstructure de Hashin qui résulte de l'assemblage d'une matrice poreuse et de fibres de matière.

Les différentes lois d'homogénéisation ont été comparées sur la base de plusieurs critères : la non-linéarité de la relation entre la raideur et la densité, l'optimalité des propriétés par rapport au critère de l'énergie de déformation maximale, la calculabilité des propriétés effectives et, enfin, leur utilisation en topologie.

La stabilité des solutions calculées avec des microstructures suboptimales n'est pas garantie dans le problème de la compliance minimale, car ce dernier n'est pas suffisamment relaxé. Pour assurer l'existence de la solution, nous avons sélectionné la *méthode du périmètre* qui est une approche alternative à la méthode d'homogénéisation au sens le plus strict. En outre, la pénalisation du périmètre permet de contrôler l'usinabilité de la solution en limitant le nombre de trous et la taille des membres structuraux.

*Le problème des distributions en damier* a un effet semblable au phénomène d'instabilité des solutions numériques vis-à-vis du choix du maillage; les distributions parasites altèrent la qualité des solutions. On a d'abord évalué plusieurs remèdes classiques tels que l'élévation du degré des éléments finis. Toutefois, il nous est apparu qu'une nouvelle solution consiste à borner suffisamment le périmètre de la solution pour pénaliser ces distributions parasites et les faire disparaître.

La place de l'optimisation dans la chaîne de conception est en soi un concept intéressant à étudier. L'outil d'optimisation topologique apporte un support rationnel pour choisir une topologie structurale et pour déterminer la nature et la connectivité des composants structuraux. L'interprétation de la distribution de matière doit être faite avec soin pour en retirer le maximum d'informations. En examinant les distributions de matière obtenues dans plusieurs applications, on trouve tout aussi bien des solutions de topologie originale que des techniques de construction déjà largement utilisées par le passé.

Enfin, les développements théoriques qui ont été présentés dans cette thèse, ont été mis en oeuvre et validés dans un programme de calcul qui a été écrit dans le contexte du progiciel SAMCEF. Toutes les applications proposées dans ce rapport ont été effectuées avec ce code de calcul.

## 8.2 La contribution originale de cette thèse

A notre connaissance, plusieurs points présentés dans cette thèse font l'objet d'une contribution originale.

■ Nous avons contribué à promouvoir l'approche de la programmation convexe séquentielle et à remplacer les critères d'optimalité pour résoudre le problème d'optimisation des variables de microstructure. Bien que nous n'ayons pas la prétention de revendiquer la paternité exclusive de cette idée, qui a été présentée également par d'autres auteurs, nous croyons y avoir contribué par plusieurs thèmes de recherche couverts par nos travaux.

Nous avons démontré par nos applications que la méthode de résolution duale et particulièrement les méthodes duales et primales-duales du premier et du second ordre de l'*optimiseur* CONLIN sont tout à fait indiquées pour résoudre efficacement les problèmes d'optimisation avec un très grand nombre de variables de conception que l'on rencontre en topologie.

Après avoir fait une comparaison de plusieurs approximations séparables du premier ordre, nous avons conclu que les approximations CONLIN et MMA sont les approximations les plus satisfaisantes que nous avons testées pour les restrictions impliquées dans le problème de topologie. Ces approximations sont des compromis intéressants entre la précision et le coût de calcul car les dérivées secondes sont trop onéreuses à évaluer.

La présentation de méthodes de Quasi-Newton qui conservent la structure diagonale des estimations est une contribution originale. L'adaptation aux matrices diagonales de la théorie générale établie pour les matrices creuses est le fruit d'une collaboration interuniversitaire avec une équipe de mathématiciens. Nous avons adapté cette théorie aux problèmes de structures en mettant au point une stratégie capable d'engendrer une suite rapidement convergente d'estimations du Hessien des réponses mécaniques.

Nous avons également imaginé de combiner des approximations du second ordre (MMA du second ordre et le schéma quadratique séparable) avec la méthode BFGS pour matrices diagonales que nous avons mise au point pour estimer les dérivées secondes. Pour la méthode MMA, cette nouvelle procédure constitue à notre connaissance une des seules méthodes efficaces de sélection automatique des asymptotes mobiles utilisant les dérivées premières. Le résultat présenté répond donc à une question restée en suspens depuis plusieurs années. Nous avons validé cette procédure de construction d'approximation de haute qualité sur des problèmes classiques d'optimisation de treillis. Nous avons montré que les deux approximations que nous proposons donnaient aussi des résultats très prometteurs en optimisation topologique. Comme toutes les méthodes du second ordre, elles sont néanmoins plus sensibles aux optima locaux. Par contre, la progression aux abords de l'optimum est notablement accélérée.

■ Le problème de conception avec plusieurs cas de charge est étudié sous la forme d'un problème de type "min-max". Le problème est rendu différentiable en introduisant une variable auxiliaire selon une méthode proposée par Taylor. L'originalité consiste à effectuer le traitement complet du problème sous cette forme. Ce mode de résolution est rendu possible grâce à deux éléments.

D'abord, notre capacité à résoudre des problèmes d'optimisation qui comportent plusieurs restrictions : les restrictions sur le volume, et éventuellement sur le périmètre, plus une restriction pour chaque fonction objectif. Trouver la solution ne pose pas de difficulté lorsqu'on forme un sous-problème convexe séparable et qu'on le résout avec une méthode duale.

Ensuite, la possibilité d'utiliser la solution générale établie par Díaz et Bendsøe (1992) pour résoudre le sous-problème d'orientation optimale du problème "min-max". Nous avons démontré par les conditions d'optimalité que les coefficients de pondération sont donnés par les multiplicateurs de Lagrange associés à chaque restriction liée à une fonction objectif. L'approche "mini-max" détermine donc de manière objective les coefficients de pondération de la formulation générale, et ce fait est également une contribution personnelle.

■ Les problèmes de vibration impliquant plusieurs fréquences propres peuvent être traités de manière similaire au problème des cas de charge multiples. Le problème de distribution des paramètres de microstructure est abordé avec une procédure de programmation convexe séquentielle. Le problème d'orientation optimale est un problème standard où les coefficients de pondération sont calculés en fonction des multiplicateurs de Lagrange du problème de microstructure.

■ La modélisation et l'homogénéisation des matériaux composites poreux constituent un sujet largement couvert par nos recherches. Après avoir rappelé les principes des différentes approches de l'homogénéisation, nous avons comparé différentes microstructures et lois de raideur/densité utilisées pour la résolution du problème de topologie.

Nous avons longuement présenté les matériaux feuilletés de rang 1, 2 et N. Nous avons montré comment nous avons mis en oeuvre cette microstructure optimale pour les énergies de déformation.

Nous avons fait une large synthèse des résultats qui concernent le modèle de l'épaisseur variable ou matériau SIMP. Nous avons fourni une analyse détaillée des avantages et inconvénients de ce type d'approche parce que, en pratique, elle est très souvent utilisée.

A côté de ces modèles déjà connus, nous avons présenté trois microstructures inédites en topologie.

La modélisation des matériaux composites contenant des micro-inclusions sphériques a été étudiée de manière fort complète. Le modèle des sphères composites permet de tenir compte de la présence d'inclusions sphériques en concentration quelconque. Ce modèle de Hashin prédit un module de compressibilité cubique optimal dans la classe des composites isotropes. Malheureusement, le module de cisaillement optimal ne peut être atteint par cette microstructure. Par contre, l'estimation des propriétés des composites avec des micro-inclusions sphériques par la méthode de Mori et Tanaka restitue simultanément les bornes de raideur sur les deux modules élastiques. L'approximation de Mori et Tanaka nous permet donc de paramétrer la raideur optimale des composites isotropes pour le processus d'optimisation topologique. L'utilisation de ces lois permet ainsi de constater l'effet de l'hypothèse d'isotropie du matériau sur le résultat de topologie.

L'utilisation de microstructures basées sur des micro-inclusions sphériques a été également proposée par Gea (1994) dans un travail indépendant du nôtre. Nous estimons toutefois que nos travaux sont plus complets : nous avons soulevé et discuté les hypothèses liées à l'utilisation de ce type de composite, de même que nous avons mis en évidence le caractère optimal des propriétés homogénéisées.

Nous avons également étudié les composites formés d'inclusions cylindriques. Le modèle des cylindres composites développé par Hashin et Hill, ainsi que le modèle à trois phases, nous ont permis de donner l'expression des cinq modules élastiques indépendants qui caractérisent les composites orthotropes à fibres longues, de raideur maximale. Pour la première fois dans le domaine de l'optimisation topologique, nous avons proposé de considérer des microperforations cylindriques perpendiculaires au plan de la structure. Nous avons présenté une généralisation des lois d'homogénéisation issues de la micromécanique en employant la loi empirique de Halpin et Tsai. La

relation de Halpin-Tsai décrit une famille de courbes de raideur/densité de non-linéarité variable, paramétrée en fonction d'un coefficient de renforcement.

A notre connaissance, la troisième microstructure que nous avons présentée est également inédite. Nous avons eu l'idée d'associer une matrice poreuse formée avec des inclusions sphériques et des fibres de matière disposées selon le modèle des cylindres composites. Nous lui avons donné le nom de double microstructure de Hashin. Nous avons démontré que ce composite orthotrope se prête à une utilisation en topologie.

■ La méthode du périmètre nous a permis de contrôler les distributions de matière et d'obtenir des solutions dont on peut extraire facilement un modèle CAO sans devoir faire trop usage d'un processus d'interprétation hasardeux. Le principe de la méthode du périmètre en topologie a été décrit par Haber *et al.* (1994). Nous avons cependant développé des contributions personnelles que nous avons appliquées lors de la réalisation du contrôle du périmètre dans notre programme.

La méthode du périmètre a été développée avec les matériaux SIMP. La loi de raideur du matériau permet de pénaliser les densités intermédiaires, tandis que la méthode du périmètre assure la stabilité des solutions numériques obtenues avec différents maillages.

L'implantation de la restriction de périmètre et son utilisation avec des méthodes de programmation convexe séquentielle sont également des particularités de notre thèse. Nous avons dû élaborer une procédure efficace d'approximation convexe séparable de cette contrainte fortement couplée. Après examen de plusieurs types d'approximations, nous avons retenu le schéma quadratique séparable et nous avons mis au point une estimation heuristique des courbures afin de réaliser une approximation suffisamment conservative.

■ Le problème de distribution en damier a également retenu notre attention et nous y avons consacré plusieurs recherches. Nous pouvons résumer brièvement celles-ci.

Nous avons rapidement établi l'analogie entre le problème de Stokes et les conditions de Babuška-Brezzi. Cette analogie nous a permis de prédire le succès de différentes combinaisons des discrétisations du champ de déplacement et du champ de densité.

Nous avons également réalisé quelques expériences simplifiées qui nous ont permis de confirmer l'hypothèse que le phénomène de distribution parasite est fortement lié au schéma d'approximation par éléments finis.

Nous avons ensuite fait la constatation originale que la borne sur le périmètre pénalise les damiers et que le contrôle d'une borne adéquate sur le périmètre permet d'éliminer les distributions en damier de la solution. Nous avons alors imaginé que la méthode du périmètre pouvait être une méthode d'élimination des distributions parasites. Nous avons pu démontrer la validité de notre intuition sur des applications numériques. La preuve mathématique reste cependant encore inconnue et elle devra faire l'objet de nouvelles recherches.

■ Finalement, nous avons présenté une série de réflexions personnelles concernant l'interprétation des distributions de matière. Ces considérations sont fondées sur l'expérience acquise au cours des applications que nous avons réalisées. Nous avons pu constater que certaines distributions suggéraient de nouvelles techniques de conception, tandis que d'autres ressemblaient à des techniques structurales qui avaient déjà été employées dans le passé : treillis de barres ou de poutres, cadres rigides avec des âmes et des voiles de cisaillement, structures sandwiches avec des semelles et un coeur en mousse...

### 8.3 Perspectives d'avenir

Paradoxalement, plus on développe une théorie comme celle des distributions de matière, plus on est conscient des limites de cette théorie et plus on s'aperçoit de la nécessité de la généraliser. Le mécanisme de la recherche est donc étrange : en fin de compte, la résolution d'un problème soulève toujours plus de nouvelles questions qu'on n'a pu en résoudre.

Il en est de même de notre cheminement en optimisation topologique. Alors même que nous avons essayé de contribuer au perfectionnement des techniques numériques d'optimisation topologique et que nous pouvons présenter un outil de conception topologique fiable, nous sommes confrontés à de nouvelles questions qui interpellent la curiosité scientifique et qui sont autant de défis à relever.

#### 8.3.1 Extensions possibles de notre outil d'optimisation topologique

Précisons d'abord que nous pensons que l'outil d'optimisation topologique décrit dans notre thèse forme un ensemble déjà très cohérent, de sorte qu'il constitue un instrument de conception fiable. Nous avons démontré que notre programme était capable de traiter des problèmes de compliance minimale en deux ou trois dimensions, des problèmes de topologie avec un ou plusieurs cas de charge ainsi que des problèmes dynamiques de maximisation d'une ou plusieurs fréquences propres ou des problèmes d'exclusion de bandes de fréquence.

Notre stratégie n'est cependant pas figée et nous avons pensé doter notre programme d'optimisation topologique d'une structure aussi ouverte que possible. Dans le futur, elle pourra servir de base à de nouveaux développements théoriques. On pourra également étendre le champ d'application du code de calcul à d'autres problèmes de conception rencontrés dans le milieu industriel.

Le problème des structures de plaque ou de coque est, en pratique, un des plus intéressants. Comme nous l'avons signalé dans l'introduction, le problème de plaque et de coque bénéficie actuellement des nouveaux développements réalisés pour l'optimisation topologique en général. L'adjonction des éléments de plaque et de coque mériterait un soin tout particulier si on considère les applications qui peuvent en résulter.

D'autres problèmes de conception peuvent aussi être couverts. L'optimisation topologique est également capable de traiter les problèmes de conception dans le domaine thermomécanique. L'optimisation des charges critiques d'instabilité est un problème aux valeurs propres, semblable au problème de vibration. Les stratégies que nous avons développées pour le problème de vibration pourront être adaptées au problème de stabilité.

D'un point de vue pratique, il semble intéressant de résoudre le problème de topologie en se basant sur un critère de résistance et non plus sur un critère de raideur. Les difficultés liées à cette approche sont cependant loin d'être résolues. Il faudra d'abord mettre en évidence un critère de résistance des microstructures poreuses et ensuite établir les microstructures qui réalisent le *G-closure* de la résistance des composites. Il faudra également être capable de résoudre des problèmes avec un très grand nombre de variables de conception et un très grand nombre de contraintes, ce qui s'avérera probablement très coûteux .

L'optimisation de la distribution de matière présente l'avantage de pouvoir s'effectuer sur un maillage fixe. Cependant, pour accroître la précision des résultats, il est nécessaire de raffiner uniformément le maillage si on ne possède pas de stratégie intelligente pour augmenter la discrétisation. Pour épargner

un maximum d'efforts de calcul, il serait nécessaire de recourir à une technique de raffinement et d'adaptation de maillage semblable à celle qui existe pour le critère de l'erreur élément fini. Le code de calcul d'optimisation topologique que nous avons développé, possède toutes les caractéristiques nécessaires pour développer une stratégie de raffinement et d'adaptation de maillage. On dispose : d'éléments de quadrangle ou de triangle utilisés dans les maillages raffinés, d'une méthode du périmètre pour assurer la stabilité de la solution, d'une stratégie d'élimination des distributions en damier, et d'algorithmes de résolution performants pour ne pas être freinés par le nombre croissant de variables de conception.

Une autre voie de développement intéressante concerne l'intégration de l'optimisation topologique dans la chaîne de conception. Le processus d'optimisation topologique que nous avons décrit est traité comme une étape préliminaire dans la chaîne de conception et la distribution de matière est découplée de l'optimisation de forme qui vient en aval. Nous pensons qu'une plus grande intégration des deux approches est souhaitable. La réunion de l'optimisation de forme et de topologie permettrait de créer un lien automatique entre les distributions de densité et le modèle paramétrique de la structure.

Lorsque les charges varient avec la définition du domaine de conception, il est impératif de considérer le couplage entre l'optimisation de forme et l'optimisation de la distribution de matière avec un processus d'optimisation à deux niveaux emboîtés. Jusqu'à présent, nous avons émis l'hypothèse que le domaine de conception était figé et que les charges appliquées étaient immuables, c'est-à-dire qu'elles ne dépendaient pas du contour de la distribution de matière. Le problème avec des charges de pression est un problème de surface libre qui ne vérifie pas cette hypothèse et que nous ne pouvons pas traiter avec les techniques que nous avons mises au point. Pour traiter le problème de manière rigoureuse, il faudra tenir compte de la sensibilité de la topologie par rapport aux paramètres de forme du domaine de conception (Bendsøe et Sokolowski, 1995).

### 8.3.2 Vers un processus de conception totale

Nous avons constaté au cours des applications que les distributions optimales que nous avons pu construire recèlent une information plus riche que la seule donnée de topologie. La forme et les dimensions des membres structuraux sont également suggérées par le résultat de l'optimisation topologique. Plus on regarde ces solutions, plus il est naturel de penser que les meilleures structures sont celles pour lesquelles la forme, la topologie et les dimensions transversales sont déterminées de concert.

Nous avons vu également que les structures les plus raides sont obtenues en utilisant des microstructures fortement anisotropes dont les caractéristiques sont adaptées aux conditions de sollicitations locales. On peut renoncer à ces solutions optimales ou quasi optimales au profit d'une distribution de matériau isotrope, dont on pénalise fortement les densités intermédiaires et dont le périmètre est éventuellement contrôlé. On arrive alors à des solutions classiques qu'il est possible d'usiner facilement et de réaliser avec des matériaux communs. Hélas, cette démarche s'accompagne d'une très nette dégradation des performances de la structure. On doit alors conclure que, si l'on veut se rapprocher des performances extrêmes, il faut accepter de prendre en considération des matériaux avec une microstructure élaborée dont les propriétés extrêmes sont déterminées en même temps que la distribution de densité.

Ceci signifie que la conception de structures de haute performance devra embrasser simultanément les aspects du dimensionnement, de la forme, de la topologie et du matériau. La conception intégrée de toutes les données qui définissent la structure nous suggère le nom de *processus de conception totale*.

La notion de conception totale implique aussi que la classification des problèmes d'optimisation établie par Schmit et Malett (1963) est désuète. Il n'est plus possible de séparer l'optimisation des dimensions transversales, l'optimisation des paramètres de forme, l'optimisation des données de topologie et le choix du matériau. Cette subdivision était déjà en porte-à-faux avec la méthode d'homogénéisation puisque nous savons que l'optimisation topologique, qu'il est plus juste d'appeler optimisation de *layout*, donne également une information sur les dimensions et la forme de la structure.

Récemment, la paramétrisation libre du tenseur d'élasticité telle qu'elle est abordée par Bendsøe, Haber, Guedes, Pedersen et Taylor (1993), par Bendsøe, Díaz, Lipton et Taylor (1994) ainsi que par Ringertz (1993), ouvre une nouvelle voie qui va dans le sens de la conception totale. La conclusion de ces premiers travaux est claire : dans le futur, la réalisation de la conception totale ira dans deux nouvelles directions de recherche.

La première voie de recherche sera axée sur la mise au point de techniques numériques de conception totale permettant de déterminer la distribution des propriétés élastiques. La méthode devra élargir la formulation des premiers problèmes résolus par Bendsøe *et al.* (1993, 1994) et par Ringertz (1993).

La seconde voie de recherche devra rendre possible la réalisation concrète des solutions issues du processus de conception numérique. On devra établir une procédure pour concevoir et pour fabriquer des matériaux de très haute performance qui pourront approcher toutes les propriétés mises en jeu dans les distributions numériques. On sait que le principe de cette question a été clarifié par des travaux récents. Les aspects théoriques de la construction de n'importe quelle propriété thermodynamiquement admissible ont été traités par Milton et Cherkaev (1993) avec des matériaux composites feuilletés à différentes échelles. Par ailleurs, Sigmund (1994a, 1994b) a traité le problème sous son aspect numérique en l'abordant sous la forme d'un problème d'homogénéisation inverse. Les résultats de Sigmund ont démontré qu'un très vaste ensemble de propriétés thermoélastiques admissibles par les principes de la thermodynamique peuvent être approchées par des microstructures périodiques que l'on pourrait synthétiser.

### ***8.3.3 Vers la conception de matériaux intelligents et de microstructures aux propriétés quelconques***

Nous savons que la synthèse des matériaux aux propriétés élastiques quelconques est indispensable pour envisager la conception des structures de performance extrême qui sont obtenues en optimisant la distribution des propriétés élastiques locales. La conception de ces microstructures nouvelles aux propriétés extrêmes est un des centres d'intérêt de l'ingénierie des matériaux. Cette nouvelle discipline, qui est apparue récemment dans la communauté scientifique, a pour but de créer des matériaux nouveaux et de les tailler sur mesure pour des applications particulières.

Le processus de conception classique, dans lequel on essaie d'utiliser un matériau donné de la manière la plus performante possible en variant seulement les dimensions et la forme de la structure, a été récemment mis à mal par l'arrivée des matériaux composites à fibres. Pour utiliser de la meilleure façon les propriétés orthotropes des matériaux à fibres et pour bénéficier au maximum de leur grand rapport raideur/densité, on doit adapter la séquence d'empilement des plis et l'orientation des fibres aux efforts locaux. Dans le futur, les conceptions les plus performantes seront celles où la microstructure du matériau aura les propriétés mécaniques locales adaptées à l'état de sollicitation local.

Bien que la synthèse de microstructures soit une nouvelle discipline scientifique, la notion d'adaptation de la microstructure aux conditions de sollicitations est fort répandue dans la nature. Par exemple, le bois possède une microstructure poreuse en cellules prismatiques dont la raideur flexionnelle est

renforcée pour donner un matériau de rapport raideur/densité plus important que celui des fibres seules. On sait aussi que les os sont des structures vivantes qui adaptent continuellement leur forme et leur microstructure aux stimuli extérieurs pour supporter les charges de manière optimale.

### 8.3.3.1 Différentes approches de la conception des matériaux

Le problème de la conception et de la synthèse de nouveaux matériaux aux propriétés remarquables requiert la compétence de chercheurs issus de plusieurs disciplines. La conception de matériaux nouveaux peut être grossièrement divisée en trois catégories selon l'échelle à laquelle on travaille. A l'**échelle nanométrique**, les chimistes et les physiciens de l'état solide manipulent les liaisons atomiques et moléculaires pour concevoir de nouveaux alliages et de nouvelles substances. L'**échelle mésométrique** s'étend depuis le nanomètre jusqu'au micron. Elle correspond à l'échelle de nombreux défauts cristallins par exemple. Enfin, l'**échelle micrométrique**, où l'on étudie les microstructures de taille supérieure à un micromètre est le champ d'application de la micromécanique. Les équations de la mécanique des milieux continus sont valables à l'échelle micrométrique et, avec une certaine précaution, à l'échelle mésométrique si l'on utilise des théories non linéaires.

De par notre formation, l'approche que nous envisageons est principalement celle de l'échelle micrométrique. La synthèse de matériaux aux propriétés nouvelles est abordée par la recherche de nouvelles microgéométries obtenues en utilisant des matériaux existants, qu'ils soient métalliques ou non métalliques. Plusieurs travaux ont été réalisés en abordant le problème de conception sous différentes approches.

Les mathématiciens Milton et Chekaev (1993) ont construit des composites feuilletés à partir de matériaux isotropes souples et rigides dont les propriétés élastiques couvrent l'entière de l'ensemble admissible par la thermodynamique. Les bornes obtenues par ces auteurs sur les propriétés effectives montrent que le rapport entre les raideurs des deux matériaux utilisés doit être aussi large que possible pour atteindre des propriétés extrêmes. Malheureusement, cette approche reste un outil mathématique qu'il sera difficile de réaliser concrètement à cause des différentes échelles présentes dans la microstructure.

Une approche plus classique crée des matériaux aux propriétés de raideur, de résistance, etc. variées en modifiant l'épaisseur et l'orientation des plis de matériaux composites à fibres et matrice (Autio, Laitinen et Pramilla, 1993) ou en variant le tressage des fils et des fibres dans les composites armés (par exemple, Kostar et Chou, 1994). Bien que tous les matériaux qui sont proposés dans cette approche soient plus ou moins directement usinables, les propriétés matérielles que l'on peut obtenir sont limitées par le choix des matériaux des fibres et de la matrice de sorte que cette approche ne permet pas d'atteindre des propriétés extrêmes comme nous le voudrions.

Une autre approche systématique de conception des microstructures a été proposée par Sigmund (1994a, 1994b, 1994c). L'idée est de résoudre un problème inverse d'homogénéisation sous forme numérique (figure 8.1). Etant donné des propriétés mécaniques  $E_{ijkl}^H$  à réaliser, on veut trouver la cellule de base hétérogène dont les propriétés effectives restituent les valeurs souhaitées.

Le problème n'admet certainement pas de solution unique, car il existe probablement plusieurs configurations différentes de la cellule de base qui donnent lieu aux mêmes propriétés macroscopiques. Aussi, le problème d'homogénéisation inverse est posé sous forme d'un problème d'optimisation dont le but est de trouver la microstructure de masse minimale. La masse est une fonction objectif naturelle parce qu'on cherche souvent des matériaux dont le rapport raideur/densité est élevé.



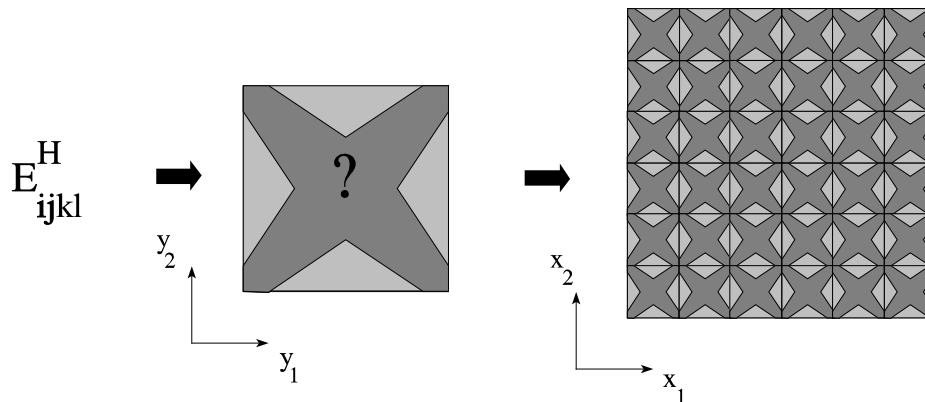


Figure 8.1 : Le problème de l'homogénéisation inverse pour la synthèse de microstructures

La solution de ce problème est directement liée aux travaux que nous avons effectués dans cette thèse, car Sigmund propose de résoudre le problème de la façon la plus générale qui soit en utilisant les techniques d'optimisation topologique. Dans le problème inverse de l'homogénéisation, le domaine de conception est la cellule de base et la variable de conception est la densité du matériau au niveau de la microstructure.

Par sa simplicité et sa généralité, l'attrait de cette approche est énorme. Cette approche permet d'aborder le problème de la synthèse des microstructures de façon automatique et sans a priori sur la nature de la solution.

Les premières conclusions de Sigmund (1994a, 1994b, 1994c, 1994d) sont à la hauteur de l'innovation de la méthode. Sigmund a démontré par ses applications numériques qu'il était possible de concevoir des matériaux dont les propriétés peuvent couvrir une très large plage des comportements élastiques prévus par la thermodynamique.

Pour les matériaux dont les propriétés sont extrêmes, on s'attend à trouver des microstructures en forme de mécanisme. Aussi, Sigmund utilise d'abord des univers de conception formés par des treillis de barres ou de poutres. Avec les univers structuraux de barres, on peut obtenir des propriétés qui sont très proches des bornes théoriques issues de la définition non négative du tenseur d'élasticité. L'utilisation des poutres amortit un peu les propriétés que l'on peut atteindre. Puisque ces solutions autorisent les barres ou les poutres à se croiser sans interactions et sans frottement, il y a souvent des surfaces de glissement dans les solutions, ce qui, en pratique, les rend très difficilement réalisables sans créer des concentrations de contraintes.

Lorsque le volume occupé par la matière au sein de la cellule de base augmente, il est plus naturel de se tourner vers une formulation continue. Les microstructures obtenues sont beaucoup plus réalistes. En effet, d'une part, il n'est pas possible de créer de surface de glissement. D'autre part, cette approche ne fait intervenir qu'une seule échelle au niveau de la microstructure, ce qui est presque une condition *sine qua non* pour l'usinabilité des solutions. Les propriétés élastiques que l'on peut obtenir sont néanmoins très étendues et l'on peut approcher de nombreuses propriétés extrêmes comme des matériaux de coefficient de Poisson proche de -1. Toutefois, les expérimentations numériques de Sigmund montrent qu'on obtient des matériaux de faible raideur si l'on veut avoir des propriétés extrêmes. Les expériences montrent aussi que plus on impose de contraintes technologiques sur la taille minimale des éléments ou sur la microgéométrie, plus on réduit les performances élastiques de la microstructure. Le remplacement du vide par une matrice de faible raideur atténue aussi les propriétés

que l'on pourra créer.

Enfin, Sigmund (1994d) a constaté que les matériaux de propriétés thermomécaniques prescrites ressemblaient parfois à des "microactuateurs" au niveau de la cellule de base. Il semble donc que l'on pourra trouver une voie de développement de microstructures intelligentes ou *smart materials*.

### 8.3.3.2 Un exemple de matériaux nouveaux : les matériaux à coefficient de Poisson négatif

La création de matériaux à coefficient de Poisson négatif est un problème qui passionne les scientifiques et les ingénieurs depuis plusieurs années et qui peut être résolu par l'ingénierie des microstructures, et plus particulièrement par le procédé d'optimisation topologique des microstructures.

Les principes de la thermodynamique appliqués aux propriétés du tenseur d'élasticité prévoient que les coefficients de Poisson appartiennent à l'intervalle  $[-1, 0.5]$ . Les matériaux classiques dont le coefficient de Poisson est positif se contractent latéralement lorsqu'on les étire, tandis que les matériaux dont le coefficient de Poisson est négatif s'étendent latéralement dans les mêmes conditions de sollicitation.

Il existe de nombreuses applications potentielles où les matériaux avec un coefficient de Poisson négatif seraient intéressants. D'abord, les mousses faites d'un tel matériau se plieraient plus facilement de sorte qu'elles se prêteraient beaucoup mieux à la fabrication de coques sandwich en forme de dôme ou de coiffe convexe. L'utilisation de ces matériaux à coefficient de Poisson négatif serait également favorable dans certains cas pour réduire les facteurs de concentration de contraintes aux bords des trous ou des fissures. Les matériaux à coefficient de Poisson négatif possèdent aussi un taux d'absorption d'énergie qui est considérablement plus élevé que celui des matériaux à coefficient de Poisson positif. Enfin, un des effets les plus intéressants du coefficient de Poisson négatif est la modification du module de compressibilité cubique  $\kappa = E/(3(1-\nu))$ . Pour un module de Young identique, le module de compressibilité cubique varie dans un rapport de 3 à 1 lorsque le coefficient de Poisson passe de  $1/3$  à  $-1$ . Les nouveaux matériaux que nous envisageons sont donc plus sensibles à la pression hydrostatique et ils constitueraient des matériaux idéaux pour les microphones ou les capteurs et les senseurs dans les futurs matériaux et structures intelligents.

La synthèse de matériaux à coefficient de Poisson négatif était tout à fait inconnue jusqu'à ce que, d'une part, Almgren (1985) propose une microstructure en forme de mécanisme avec des rotules, des ressorts et des coulisseaux et que, d'autre part, une microstructure en nid d'abeilles inversé soit mise en évidence par Kolpakov (1985) et par Gibson et Ashby (1988). Comme la plupart des tentatives de construction de ces microstructures faisaient appel à des mécanismes et des surfaces de glissement, Milton (1991) s'est posé la question de savoir s'il était possible de construire mathématiquement des coefficients de Poisson négatifs dans le cadre des milieux continus élastiques. Milton démontra que la chose était possible en construisant un matériau feuilleté à 2 phases avec des couches à différentes échelles de grandeur et en montrant mathématiquement que ce composite présentait un coefficient de Poisson égal à  $-1$  et qu'il ne contenait pas de surface de glissement.

Deux approches ont été proposées pour produire des matériaux à coefficient de Poisson négatif. La première est le travail de Lakes (1987) qui a synthétisé une mousse dont les parois des cellules ont été ouvertes par un traitement thermique et mécanique de compression. Les mousses de Lakes présentent des coefficients de Poisson négatif allant jusqu'à  $-0.7$ . La seconde approche est issue du travail de Caddock et Evans (1989) qui ont synthétisé un polytétrafluoroéthylène expansé poreux avec un coefficient de Poisson négatif. Malheureusement, cette substance est fortement anisotrope, ce qui limite son utilisation.

La résolution du problème inverse par Sigmund (1994a, 1994b, 1994c) a permis de dégager plusieurs microstructures dont le coefficient de Poisson effectif est négatif. L'utilisation de treillis de barres permet d'atteindre des solutions aux propriétés extrêmes. Par exemple, Sigmund (1994a) présente une microstructure formée de barres et donnée à la figure 8.2. Son coefficient de Poisson effectif vaut -1. L'équation (8.1) donne les propriétés élastiques effectives pour un matériau de base dont le module de Young est unitaire.

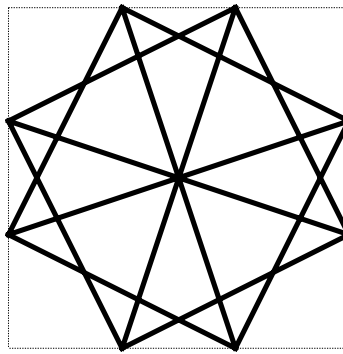


Figure 8.2 : Cellule de base d'un matériau de coefficient de Poisson -1 (Sigmund, 1994a)

$$E^H = 0.05 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rho = 0.44 \quad (8.1)$$

Ainsi qu'on pouvait s'y attendre, la microstructure s'interprète comme un mécanisme formé de deux cadres rigides qui pivotent autour du centre de la cellule de base. Une traction horizontale fait tourner les cadres, et les coins inférieurs et supérieurs passent au-delà des limites de la cellule de base non déformée, ce qui a pour effet de dilater la cellule selon la direction verticale.

Une seconde solution proposée par Sigmund (1994a) est basée sur une distribution de matière continue présentée à la figure 8.3. En reconstruisant la microstructure par périodicité, on voit que la distribution de matière ressemble à une structure en forme de triangles ou d'arêtes de poisson. Le principe de fonctionnement de la microstructure est le suivant : une contraction horizontale rapproche les côtés du triangle et entraîne une contraction des dimensions verticales. La matrice de Hooke homogénéisée est donnée à l'équation (8.2) pour un matériau de base isotrope de module de Young unitaire et de coefficient de Poisson 0.3. On remarquera au passage que la cellule de base n'a pas besoin d'être symétrique ou de présenter une symétrie à 60° pour que le matériau effectif soit isotrope.

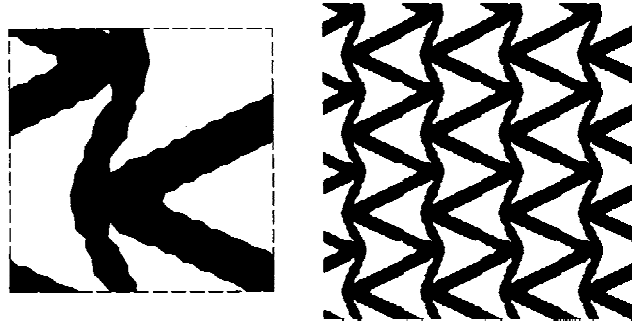


Figure 8.3 : Une microstructure avec un coefficient de Poisson de -0.6 (Sigmund, 1994a)

$$E^H = 0.04 \begin{bmatrix} 1. & -.6 & 0 \\ -.6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & .8 \end{bmatrix} \quad \rho = 0.38 \quad (8.2)$$

## 8.4 Conclusion

Arrivés au terme de cet exposé, nous croyons avoir présenté une discussion fort complète de la méthode d'optimisation topologique. Nous nous sommes intéressés à plusieurs aspects du problème et nous les avons étudiés de manière approfondie. Nos travaux nous ont permis d'élaborer plusieurs contributions originales à la résolution du problème de topologie. Nous avons mis en oeuvre chacune de ces contributions, dans un programme de calcul, et nous les avons validées sur plusieurs applications. Chacun des thèmes abordés forme, donc, une partie d'un outil de résolution efficace du problème de topologie des milieux continus élastiques. Par les exemples et les applications numériques que nous avons présentés, nous pensons avoir démontré la maturité de l'outil de conception que nous proposons et avoir mis en évidence l'intérêt général de cette nouvelle technique de conception de structures de haute performance.

Les conclusions générales que nous pouvons tirer se résument en trois points.

### 1° Il y a avantage à utiliser une approche de programmation convexe séquentielle pour résoudre le problème d'optimisation topologique.

Les critères d'optimalité devraient être remplacés par une approche plus générale qui fait appel aux méthodes duales et à la formulation de sous-problèmes fondés sur des approximations convexes séparables des restrictions. La méthode duale est robuste et rapide même en présence d'un grand nombre de variables de conception. La sélection d'approximations structurales de haute qualité permet de réduire le nombre de cycles d'optimisation nécessaires pour arriver à la solution. En particulier, nous avons démontré que l'utilisation combinée de schémas d'approximation de haute qualité et de la méthode de Quasi-Newton pour matrices diagonales est très prometteuse. Outre les aspects liés à la résolution numérique du problème d'optimisation, l'approche convexe séquentielle permet d'étendre la formulation du problème de compliance minimale à d'autres formulations plus élaborées : problèmes

de conception avec plusieurs cas de charge et problèmes de vibration.

**2° L'utilisation de microstructures suboptimales et de lois de raideur/densité artificielles peut remplacer avantageusement les microstructures optimales dans les applications pratiques.**

Les microstructures optimales sont les seules à fournir une relaxation complète du problème d'optimisation de distribution de matière. Néanmoins, ces solutions sont difficilement exploitables en pratique. Nous avons démontré que l'on obtient des résultats plus intéressants avec des microstructures suboptimales et notamment avec trois nouvelles familles de microstructures que nous avons mises en évidence :

- la microstructure des sphères composites et la loi de Mori et Tanaka,
- la microstructure des cylindres composites et la loi de Halpin-Tsai,
- la double microstructure de Hashin.

Bien que ces lois soient suboptimales, chacune d'entre elles représente un optimum dans une classe restreinte de composites poreux.

Une pénalisation des densités intermédiaires favorise une plus grande séparation entre les zones de vide et de solide, ce qui rend les distributions de matière beaucoup plus exploitables.

**3° La méthode du contrôle du périmètre de la solution est une stratégie très utile pour concevoir des structures d'intérêt pratique.**

En régulant la taille et le nombre des perforations dans la distribution de matière, le concepteur peut contrôler en toute rigueur la qualité de la solution et éliminer une grande partie de la subjectivité liée au processus d'interprétation de la distribution de matière. Mais l'apport théorique le plus important du périmètre est qu'il permet de régulariser le problème de distribution de matière quelles que soient la loi de raideur/densité ou la microstructure adoptées. L'utilisation des microstructures suboptimales proposées précédemment est alors justifiée. Nous avons découvert par ailleurs que la borne sur le périmètre prévenait l'apparition de distributions parasites dans la solution. Le contrôle du périmètre permet donc de conserver la qualité de la distribution de matière quel que soit le maillage adopté et quel que soit le degré des éléments finis utilisés pour la résolution numérique du problème.

La technique d'optimisation topologique est un outil de conception qui offre d'énormes potentialités pour la synthèse de structures de haute performance. Dans le futur, cette technique de conception assistée pourra être améliorée par un accroissement de l'efficacité avec laquelle on utilise les distributions de matière. On envisage deux voies : d'abord, l'apparition d'une conception intégrée du dimensionnement, de la forme, de la topologie et du matériau, et ensuite, la conception et l'élaboration de matériaux nouveaux aux propriétés extrêmes ou aux propriétés intelligentes.

Chapitre 8 :

PERSPECTIVES D'AVENIR ET CONCLUSION . . . . . - 8.1 -

- 8.1 Résumé de cette thèse . . . . . - 8.1 -
- 8.2 La contribution originale de cette thèse . . . . . - 8.3 -
- 8.3 Perspectives d'avenir . . . . . - 8.6 -
  - 8.3.1 Extensions possibles de notre outil d'optimisation topologique . . . . . - 8.6 -
  - 8.3.2 Vers un processus de conception totale . . . . . - 8.7 -
  - 8.3.3 Vers la conception de matériaux intelligents et de microstructures aux propriétés quelconques . . . . . - 8.8 -
    - 8.3.3.1 Différentes approches de la conception des matériaux . . . . . - 8.9 -
    - 8.3.3.2 Un exemple de matériaux nouveaux : les matériaux à coefficient de Poisson négatif . . . . . - 8.11 -
- 8.4 Conclusion . . . . . - 8.13 -

**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

- Aboudi, J. (1991). "Mechanics of Composite Materials - A Unified Micromechanical Approach", Elsevier.
- Achdou, Y. (1993). "Numerical Optimization of a Photocell", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 102, 1993, pp 89-106.
- Adelman, H.M. et R.T. Haftka (1992). "Sensitivity Analysis", dans: *Structural Optimization Status and Promise* (Kamat M.P. éditeur), AIAA Progress in Astronautics and Aeronautics, Volume 150, 1992, Chapitre 12, pp 291-315.
- Allaire, G. et R.V. Kohn (1993a). "Topology Optimization and Optimal Shape Design Using Homogenization", dans: *Topology Design of Structures* (M.P. Bendsøe et C.C. Mota Soares, eds.), pp 207-218, 1993, NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.
- Allaire, G. et R.V. Kohn (1993b). "Optimal Design of Minimum Compliance", *European Journal of Mechanics A*, vol. 12, pp 839-878.
- Allaire, G. et G.A. Francfort (1993). "A Numerical Algorithm for Topology and Shape Optimization", dans: *Topology Design of Structures* (M.P. Bendsøe et C.C. Mota Soares, eds.), pp 239-248, 1993, NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.
- Almgren, R.F. (1985). "An Isotropic Three-Dimensional Structure with Poisson's Ratio -1", *Journal of Elasticity*, vol. 15, pp 427-430.
- Ambrosio, L. et G. Buttazzo (1993). "An Optimal Design Problem with Perimeter Penalization", *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, Vol. 1, pp 55-69.
- Armand, J.L. et B. Lodier (1978). "Optimal Design of bending Elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 13, 1978, pp 373-384.
- Armand, J.L., K.A. Lurie et A.V. Cherkav (1984). "Optimal Control Theory and Structural Design", dans : *New Directions in Optimum Structural Design*, John Wiley & Sons, 1984, pp 211-229.
- Arora, J.S. et E.J. Haug (1979). "Methods of Design Sensitivity Analysis in Structural Optimization", *AIAA Journal*, vol. 19, n°9, pp 1761-1783.
- Ashby, M.F. (1991). "Materials and Shape", *Acta Metall. Mater.*, vol. 39 n°6, pp 1025-1039.
- Ashley, S. (1994a). "Small-Scale Structure Yields Big Property Payoffs", *Mech. Engineering*, February, pp. 52-57.
- Ashley, S. (1994b). "Prototyping with Advanced Tools", *Mech. Engineering*, June, pp. 48-55.
- Autio, M., M. Laitinen et A. Pramila (1993). "Systematic Creation of Composite Structures with Prescribed Thermomechanical Properties", *Comp. Eng.*, vol. 3, n°3, pp 249-259.
- Avellaneda, M. (1987). "Optimal Bounds and Microgeometries for Elastic Two-Phase Composites", *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 47, 1987, pp 1216-1228.
- Banichuk, N.V. (1975). "Optimal Elastic Plate Shapes in Bending Problems", *Mekh. Tverd. Tela*, vol. 10 (5), pp 151-158.
- Barthelemy, B. et R.T. Haftka (1990). "Accuracy Analysis of the Semi-Analytical Method for Shape Sensitivity Analysis", *Mechanics of Structures and Machines*, vol. 18, n°3, pp. 407-432.
- Beckers, M. et C. Fleury (1994). "A Primal-Dual Approach in Truss Optimization", dans: *Advances in Structural Optimization* (Topping, B.H.V. et M. Papadrakakis, eds). CIVIL-COMP PRESS, Edinburgh, Scotland, Proceedings of the Second International Conference on Computational Structures Technology, Athènes, 30 Août - 1 Septembre 1994, pp 91-101.
- Beckers, P. (1991). "Recent Developments in Shape Sensitivity Analysis: the Physical Approach", *Engineering Optimization*, vol. 18, pp 67-78.
- Belegundu, A. et J. Arora (1984). "A Recursive Quadratic Programming Method with Active Set Strategy for Optimal Design", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, 1984, pp 803-816.

- Belegundu, A. et S. Rajan (1988). "A Shape Optimization Approach Based on Natural Design Variables and Shape Function", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.66, 1988, pp 87-106.
- Bendsøe, M.P. et N. Kikuchi (1988). "Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 71, 1988, pp 197-224.
- Bendsøe, M.P. (1989). "Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem", *Structural Optimization*, vol. 1, 1989, pp 193-202.
- Bendsøe, M.P. et H.C. Rodrigues (1991). "Integrated Topology and Boundary Shape Optimization of 2-D Solids", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 87, 1991, pp 15-34.
- Bendsøe, M.P., A. Ben-Tal et R.T. Haftka (1991). "New Displacement-Based Methods for Optimal Truss Topology Design" dans: Proceedings AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 32nd Structures, Structural Dynamics and Material Conference, Baltimore, MD, USA, 8-10 Avril, 1991.
- Bendsøe, M.P. et A. Ben-Tal (1991). "Truss Topology Optimization by Displacements Based Optimality Criterion Approach" dans: *Optimization of Large Structural Systems* (G.I.N. Rozvany, éd.), Vol. I, pp 139-155, 1993, NATO ASI Series, Vol. 231, 1993, Kluwer Academic Publishers.
- Bendsøe, M.P. (1992). "L'Optimisation Topologique et les Méthodes d'Homogénéisation", Notes de cours, Cours Avancé COMETT de la CEE sur "La Conception Optimale de Structures Assistées par Ordinateur", Liège, Belgique, 1-5 Juin 1992.
- Bendsøe, M.P. et N. Kikuchi (1992). "Topology and Layout Optimization of Discrete and Continuum Structures", dans: *Structural Optimization Status and Promise* (Kamat M.P., éditeur), AIAA Progress in Astronautics and Aeronautics, Volume 150, 1992, Chapitre 19, pp 517-545.
- Bendsøe, M.P. et C.C. Mota Soares, C.C., (Editeurs) (1993). "Topology Design of Structures", NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.
- Bendsøe, M.P. et A. Díaz (1993). "Optimization of Material Properties for Mindlin Plate Design", *Structural Optimization*, vol. 6, 1993, pp 268-270.
- Bendsøe, M.P., A. Díaz et N. Kikuchi (1993). "Topology and Generalized Layout of Elastic Structures", dans: *Topology Design of Structures* (M.P. Bendsøe et C.C. Mota Soares, eds.), pp 159-205, 1993, NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.
- Bendsøe, M.P. et R.B. Haber (1993). "The Mitchell Layout Problem as a Low Volume Fraction Limit of the Perforated Plate Topology Optimization Problem : an Asymptotic Study", *Structural Optimization*, vol. 6, 1993, pp 263-267.
- Bendsøe, M.P., J. Guedes, R.B. Haber, P. Pedersen et J.E. Taylor (1992). "An Analytical Model to Predict Optimal Material Properties in the Context of Optimal Structural Design", Internal Report n° 453, Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics, December 1992, à paraître dans *Journal of Applied Mechanics*.
- Bendsøe, M.P., A. Ben-Tal et J. Zowe (1994). "Optimization Method for Truss Geometry and Topology Design", *Structural Optimization*, vol. 7, 1994, pp 141-159.
- Bendsøe, M.P. et A. Díaz (1994). "Optimization of Material Properties for Improved Frequency Responce", *Structural Optimization*, vol. 7, 1994, pp 138-140.
- Bendsøe, M.P., A. Díaz, R. Lipton et J.E. Taylor (1994). "On the Prediction of Extremal Material Properties and Optimal Material Distribution for Multiple Loading Conditions", dans: *Advances in Design Automation* (Gilmore, B.J., Hoeltzel, D.A., Dutta, D. et Eschenauer, H.A. Eds), Proceedings du 1994 ASME Design Technical Conferences - 20 Design Automation Conference, Minneapolis, MN, 11 - 14 Septembre, 1994.
- Bendsøe, M.P., A. Díaz, R. Lipton et J.E. Taylor (1994). "Optimal Desing of Material Properties and Material Distribution for Multiple Loading Conditions", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, 1994.



- Bendsøe, M.P. (1995). "Optimization of Structural Topology, Shape and Material", Springer Verlag, Heidelberg, 1995.
- Bendsøe, M.P. et J. Sokolowski (1995). "Shape Sensitivity Analysis of Optimal Compliance Functionals", *Mechanics of Structures and Machines*, vol. 23 n°1, pp 35-58.
- Bennet, J.A. et M.E. Botkin (1983). "Shape Optimization of Two-Dimensional Structures with Geometric Problem Description and Adaptive Mesh Refinement", *AIAA Journal*, vol. 23, n°3, pp 458-464.
- Bennet, J.A. et M.E. Botkin (éds) (1986). "The Optimum Shape: Automated Structural Design", Plenum, New York, 1986.
- Bensoussan, A., J.L. Lions et G. Papanicolaou (1978). "Asymptotic Analysis for Periodic Structures", North Holland.
- Ben-Tal, A. et M.P. Bendsøe (1993). "A New Method for Optimal Truss Topology Design". *SIAM Journal of Optimization*, vol. 3, pp 322-358.
- Ben-Tal, A., M. Kočvara et J. Zowe (1993). "Two Non-Smooth Methods for Simultaneous Geometry and Topology Design of Trusses", dans: *Topology Design of Structures* (M.P. Bendsøe et C.C. Mota Soares, eds.), pp 31-42, 1993, NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.
- Ben-Tal, A. et A. Nimirowskii (1993). "An Interior Point Algorithm for Truss Topology Design", dans: *Topology Design of Structures* (M.P. Bendsøe et C.C. Mota Soares, eds.), pp 55-70, 1993, NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.
- Ben-Tal, A. et M. Zibulevsky (1994). "Penalty/Barrier Method for Convex Programming Problems". Preprint.
- Benveniste, Y. (1987). "A New Approach to the Application of Mori-Tanaka's Theory in Composite Materials", *Mechanics of Materials*, vol. 6, n°2, pp. 147-157.
- Bergman, D., J.L. Lions, G. Papanicolaou, F. Murat, L. Tartar et E. Sanchez-Palencia (1983). "Les Méthodes de l'Homogénéisation : Théorie et Applications en Physique", Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, vol. 57, Eyrolles.
- Berlyand, L.V. et S.M. Kozlov (1992). "Asymptotics of Homogenized Moduli for the Elastic Chessboard Composite", *Arch. Rational Mech. Anal.*, vol. 118, pp 95-112.
- Berthelot, J.-M. (1992). "Matériaux Composites - Comportement Mécanique et Analyse des Structures", Masson.
- Botkin, M.E. et J.A. Bennet (1985). "Shape Optimization of Three Dimensional Folded Plate Structures", *AIAA Journal*, vol. 23-11, pp 1804-1810.
- Bremicker, M., M. Chirehdast, N. Kikuchi et P. Papalambros (1992). "Integrated Topology and Shape Optimization in Structural Design", *Mechanics of Structures and Machines*, vol. 19, 1991, pp 551-587.
- Braibant, V. et C. Fleury (1984). "Shape Optimal Design Using B-Splines", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 44, 1984, pp 247-267.
- Brezzi, F. et M. Fortin (1991). "Mixed and Hybrid Finite Element Methods", Springer Series in Computational Mathematics vol. 15, 1991, Springer Verlag.
- Buttazzo, G. et G. Dal Maso (1990). "Shape Optimization for Dirichlet Problems : Relaxed Solutions and Optimality Conditions", Workshop on Composite Media and Homogenization Theory, 1990, Trieste, Italy.
- Caddock, B.D. et K.E. Evans (1989). "Microporous Materials with Negative Poisson's Ratio: I Microstructure and Mechanical Properties", *Journal of Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 22, pp 1877-1882.
- Cardani, C. et P. Mantegazza (1982). "Calculation of Eigenvalue and Eigenvector Derivatives for Algebraic Flutter and Divergence Eigenproblem", *AIAA Journal*, vol. 20, pp 1765-1766.
- Cea, J., A. Gioan et J. Michel (1973). "Quelques Résultats sur l'Identification des Domaines", *Calcolo* III / IV.

- Chenais, D. (1993). "Why Does It Seem Difficult to Avoid Homogenization Type Methods in Order to Change Topology in Shape Optimization", dans: *Topology Design of Structures* (M.P. Bendsøe et Mota Soares, eds.), pp 331-336, 1993, NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.
- Cheng, K.-T. et N. Olhoff (1981). "An Investigation Concerning Optimal Design of Solid Elastic Plates", *International Journal of Solids Structures*, Vol. 17, 1981, pp 305-323.
- Cheng, K.-T. et N. Olhoff (1982). "Regularized Formulation for Optimal Design of Axisymmetric Plates", *International Journal of Solids Structures*, Vol. 18, No 2, 1982, pp 153-169.
- Chirehdast, M., S. Sankaranarayanan, S.D. Ambo et R.P. Johanson (1994). "Validation of Topology Optimization for Component Design", Proceedings du AIAA/NASA/USAF/ISSMO Symposium on Multidiplinary Analysis and Optimization, Panama City, Florida, 7-9 Septembre 1994, pp 132-137.
- Christensen, R.M. (1979). "Mechanics of Composite Materials", J. Wiley Ed., New York.
- Christensen, R.M. et K.H. Lo (1979). "Solutions for Effective Shear Properties in Three Phase Sphere and Cylinder Models", *Journal of Mech. Phys. Solids*, vol. 27, n°4, 1979.
- Conn, A.R., N.I.M. Gould et P.L. Toint (1991). "Convergence of Quasi-Newton Matrices Generated by the Symetric Rank One Update", *Mathematical Programming*, vol. 50, pp 177-195.
- Díaz, A. et M.P. Bendsøe (1992). "Shape Optimization of Structures for Multiple Loading Conditions Using a Homogenization Method", *Structural Optimization*, vol. 4, 1992, pp 17-22.
- Díaz, A. et N. Kikuchi (1992). "Solutions to Shape and Topology Eigenvalue Optimization Problems Using a Homogenization Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, 1992, pp 1487-1502.
- Díaz, A., R. Lipton et C.A. Soto (1994). "A New Formulation of the Problem of Optimum Reinforcement of Reissner-Mindlin Plates", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, à paraître.
- Díaz, A. et O. Sigmund (1995). "Checkerboard Patterns in Layout Optimization", *Structural Optimization*, vol. 10, 1995, pp 40-45.
- Ding, Y. (1986). "Shape Optimization of Structures: A Literature Survey", *Computers and Structures*, vol. 24, pp 985-1004.
- Duvaut, G. (1976). "Analyse Fonctionnelle et Mécanique des Milieux Continus. Application à l'Etude des Matériaux Composites à Structure Périodique - Homogénéisation", dans: *Theoretical and Applied Mechanics* (W.T. Koiter, éd.), p 119, North-Holland, Amsterdam.
- Duysinx, P. et C. Fleury (1992). "Optimization software : View from Europe", dans: *Structural Optimization Status and Promise*, (Kamat M.P. éditeur), AIAA Progress in Astronautics and Aeronautics, Volume 150, 1992, Chapitre 28, pp 807-849.
- Duysinx, P., W.H. Zhang et C. Fleury (1993). "Sensitivity Analysis With Unstructured Free Mesh Generators in 2-D Shape Optimization", *Structural Optimization 93*, The World Congress on Optimal Design of Structural Systems, Rio de Janeiro (Brazil), 2-6 Août, 1993.
- Duysinx, P. (1994a). "Récents Développements en Optimisation Topologique de Structures Elastiques Planes", 3<sup>ème</sup> Congrès National de Mécanique Théorique et Appliquée, Liège (Belgique), 30 et 31 Mai, 1994.
- Duysinx, P., W.H. Zhang, H.G. Zhong, P. Beckers, C. Fleury (1994b). "Structural Shape Optimization with Error Control", dans: *Advances in Design Automation* (Gilmore, B.J., Hoeltzel, D.A., Dutta, D. et Eschenauer, H.A. Eds), Proceedings du 1994 ASME Design Technical Conferences - 20 Design Automation Conference, Mineapolis, MN, 11 - 14 Septembre, 1994, pp 51-59. .
- Duysinx, P., W.H. Zhang, C. Fleury, V.H. Nguyen, S. Haubruge (1995). "A New Separable Approximation Scheme for Topological Problems and Optimization Problems Characterized by a Large Number of Design Variables", Proceedings du *First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Goslar, Allemagne, 28 Mai au 2 Juin, 1995, pp 108-109.

- Eschenauer, H.A., A. Schumacher et T. Vietor (1993). "Decision Makings for Initial Designs Made of Advanced Materials", dans: *Topology Design of Structures* (M.P. Bendsøe et C.C. Mota Soares, éd.), pp 469-478, 1993, NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.
- Eschenauer, H.A., V.V. Kobelev et A. Schumacher (1994). "Bubble Method for Topology and Shape Optimization of Structures", *Structural Optimization*, vol. 8, 1994, pp 42-51.
- Eshelby, J. (1957). "The Determination of Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems", *Proceedings of Royal Society, London*, A421, pp. 379-396.
- Evans, K.E. (1989). "tensile Network Microstructures Exhibiting Negative Poisson's Ratio", *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 22, pp 1870-1876.
- Evans, K.E. (1990). "Tailoring the Negative Poisson's Ratio", *Chemistry and Industri*, vol. 15, October.
- Evans, L.C. et R.F. Gariepy (1992). "Measure Theory and Fine Properties of Functions", CRC, Inc., Boca Ratan.
- Fedorov, A.V. et A.V. Cherkav (1983). "Choice of Optimale Orientation of Axes of Elastic Symmetry for Orthotropic Plate", *MTT*, vol. 18, pp. 135-142.
- Fleury, C. (1973). "Méthodes Numériques d'Optimisation des Structures", rapport interne LTAS (Université de Liège) SF-19,
- Fleury, C. (1978). "Le Dimensionnement Automatique des Structures Elastiques", Thèse de Doctorat, Université de Liège, 1978, Rapport Interne SF-72.
- Fleury, C. (1979). "Structural Weight Optimization by Dual Methods of Convex Programming", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14, 1979, pp 1761-1783.
- Fleury, C. et L.A. Schmit (1980). "Dual methods and approximation concepts in structural synthesis", NASA Contractor Report, NASA-CR 3226.
- Fleury, C. et G. Sander (1983). "Dual Method for Optimizing Finite Element Flexural Systems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 37, 1983, pp 249-275.
- Fleury, C. et V. Braibant (1986). "Structural Optimization: A New Dual Method Using Mixed Variables", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, 1986, pp 409-428.
- Fleury, C. (1987). "Computer Aided Optimal Design of Elastic Structures", dans: *Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems* (C.A. MOTA SOARES, éd.), Springer-Verlag, NATO ASI Series F, Vol. 27, pp. 832-900.
- Fleury, C. (1989a). "CONLIN : an Efficient Dual Optimizer Based on Convex Approximation Concepts", *Structural Optimization*, Vol. 1, 1989, pp 81-89.
- Fleury, C. (1989b). "Efficient Approximation Concepts Using Second Order Information", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, 1989, pp 2041-2058.
- Fleury, C. (1989c). "CONLIN V2.0 - User's and Installation Manuel".
- Fleury, C. (1991a). "Dual Methods for Convex Seperable Problems", dans: *Optimization of Large Structural Systems* (G.I.N. Rozvany, éd.), Vol. I, pp 509-530, 1993, NATO ASI Series, Vol. 231, 1993, Kluwer Academic Publishers.
- Fleury, C. (1991b). "Sequential Convex Programming for Structural Structural Optimization Problems", dans: *Optimization of Large Structural Systems* (G.I.N. Rozvany, éd.), Vol. I, pp 531-553, 1993, NATO ASI Series, Vol. 231, 1993, Kluwer Academic Publishers.
- Fleury, C. (1993). "Discrete Valued Optimal Design Problems", dans: *Topology Design of Structures* (M.P. Bendsøe et C.C. Mota Soares, éd.), pp 81-88, 1993, NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.
- Fox, R.L. (1965). "Constraint Surface Normals for Structural Synthesis Techniques, *AIAA Journal*, vol. 3, n°8, pp 1517-1518.
- Francfort, G.A. et F. Murat (1986). "Homogenization and Optimal Bounds in Linear Elasticity", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, vol 94, p 307.

- Fukushima, J., K. Suzuki et N. Kikuchi (1991). "Applications to Car Bodies: Generalized Layout Design of Three-Dimensional Shells", dans: *Optimization of Large Structural Systems* (G.I.N. Rozvany, éd.), vol. I, pp 177-191, 1993, NATO ASI Series, Vol. 231, Kluwer Academic Publishers.
- Gea, H.C. (1994). "Topology Optimization : A New Micro-Structure Based Design Domain Method", dans: *Advances in Design Automation* (Gilmore, B.J., Hoeltzel, D.A., Dutta, D. et Eschenauer, H.A. Eds), Proceedings du 1994 ASME Design Technical Conferences - 20<sup>th</sup> Design Automation Conference, Mineapolis, MN, 11 - 14 Septembre, 1994, pp 283-290.
- Gérardin, M. et D. Rixen (1993). "Théorie des Vibrations - Applications à la Dynamique des Structures", Masson, Paris.
- Gibianski, L.V. et A.V. Chekaev (1988). "Microstructures of Composites of Extremal Rigidity and Exact Estimates of Provided Energy Density", Ioffe Science and Technology Institute, Leningrade.
- Gibson, C.S. et M.F. Ashby (1988). "Cellular Solids", Pergamemnon, Oxford.
- Goodman, J., R.V. Kohn et L. Reyna (1986). "Numerical Study of a Relaxed Variational Problem from Optimal Design", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 57, 1986, pp 107-127.
- Guedes, J.M. et N. Kikuchi (1990). "Preprocessing and Postprocessing for Materials Based on the Homogenization Method with Adaptive Finite Element Methods.", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 83, 1990, pp 143-198.
- Haber, R.B., C.S. Jog et M.P. Bendsøe (1994). "Variable-Topology Shape Optimization with a Control on Perimeter", dans: *Advances in Design Automation* (Gilmore, B.J., Hoeltzel, D.A., Dutta, D. et Eschenauer, H.A. Eds), Proceedings du 1994 ASME Design Technical Conferences - 20<sup>th</sup> Design Automation Conference, vol. 2, Mineapolis, MN, 11 - 14 Septembre, 1994, pp 261-272.
- Haber, R.B., C.S. Jog et M.P. Bendsøe (1995). "The Perimeter Method - A New Approach to Variable Topology Optimization", Proceedings du *First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Goslar, Allemagne, 28 Mai au 2 Juin, 1995, pp 63.
- Hadamard, J. (1907). "Mémoire sur le Problème d'Analyse Relatif à l'Equilibre des Plaques Elastiques Encastées", *Bulletin de La Société Mathématique de France*, Oeuvres Choiesies, vol. II, Ed. du CNRS, Paris.
- Haftka, R. (1982). "Second-Order Sensitivity Derivatives in Structural Analysis", *AIAA Journal*, vol. 20, 1982, pp 1765-1766.
- Haftka, R. et R.V. Gandhi (1986). "Structural Shape Optimization - A Survey", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 57, pp 91-106.
- Haftka, R.T. (1990). "Stiffness-Matrix Condition Number and Shape Sensitivity Error", *AIAA Journal*, vol. 28, n°7, pp 1322-1324.
- Haftka, R.T. et Z. Gürdal (1992). "Elements of Structural Optimization", 3<sup>ème</sup> édition revue et augmentée, Kluwer Academic Publishers.
- Haftka, R.T. et H.M. Adelman (1993). "Sensitivity of Discrete Systems", dans: *Optimization of Large Structural Systems*, (G.I.N. Rozvany, éd.), Vol. I, pp 289-311, 1993, NATO ASI Series, Vol. 231, 1993, Kluwer Academic Publishers.
- Halpin, J.C. et S.W. Tsai (1969). "Effects of Environmental Factors on Composite Materials", AFML-TR 67-423, June, 1969.
- Hammer, V. (1995). "Energy and Strength Optimization of Laminates", Proceedings du *First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Goslar, Allemagne, 28 Mai au 2 Juin, 1995, pp 74-75.
- Han, S.P. (1976). "Superlinearly Convergent Variable Metric Methods for General Nonlinear Programming", *Mathematical Programming*, vol. 11, pp 263-282.
- Han, S.P. (1977). "A Globally Convergent Method for Nonlinear Programmaming", *J.O.T.A.*, vol. 22, pp 297-309.

- Hashin, Z. (1962). "The Elastic Moduli of Heterogeneous Materials", *Journal of Applied Mechanics*, March, 1962, pp 143-150.
- Hashin, Z. et S. Shtrikman (1963). "A Variational Approach to the Theory of the Elastic Behaviour of Multiphase Materials", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, March-April, 1963, pp 127-140.
- Hashin, Z. et W. Rosen (1964). "The Elastic Moduli of Fiber Reinforced Materials", *Journal of Applied Mechanics*, June, 1964, pp 223-232, Errata, March, 1965, p219.
- Hashin, Z., (1965). "On Elastic Behaviour of Fiber Reinforced Material of Arbitrary Transverse Plane Geometry", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 13, p 119.
- Hashin, Z. (1966). "Viscoelastic Fibre Reinforced Materials", *AIAA Journal*, vol. 4, p 1411.
- Hashin, Z. (1983). "Analysis of Composite Material: a Survey", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 50, p 481.
- Haubruge, S. et V.H. Nguyen (1994). "Remises à Jour de Type Quasi-Newton Préservant la Structure Diagonale", communication privée.
- Haug, E.J., V. Komkov et K.K. Choi (1983). "Design Sensitivity of Structural Systems", *Academic Press*.
- Hemp, W.S. (1973). *Optimum Structures*, Clarendon Press, Oxford, UK, 1973.
- Herskovits, J. (éd.) (1995). *Advances in Structural Optimization*, série Solid Mechanics and its Application, vol. 25, Kluwer Academic Publishers, 1995.
- Hervé, E., C. Soltz et A. Zaoui (1991). "A Propos de l'Assemblage des Sphères Composites de Hashin", *Compte-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, II, vol. 313, pp 857-862, 1991.
- Hill, R. (1964). "Theory of Mechanical Properties of Fibre-Strengthened Materials: I. Elastic Behaviour", *J. Mech. Phys. Solids*, vol 12, p 199.
- Hörlein, H.R.E.M. (1994). "Topologieoptimierung von Stabstrukturen", VDI-Seminar, Aachen, Germany, 24 Novembre, 1994.
- Hughes, T.J.R. (1987). "The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis", Prentice Hall International Ed.
- Jikov, V.V., S.M. Kozlov et O.A. Oleinik (1994). "Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals", Springer-Verlag, 1994.
- Jog, C.S., R.B. Haber et M.P. Bendsøe (1993). "A Displacement-Based Topology Design Method With Self-Adaptive Layered Materials", dans: *Topology Design of Structures* (M.P. Bendsøe et C.C. Mota Soares, édés.), pp 219-238, 1993, NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.
- Jog, C.S. et R.B. Haber (1995). "Checkerboard and Other Spurious Modes in Solutions to Distributed Parameter and Topology Design Problems: A Study", *Proceedings du First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Goslar, Allemagne, 28 Mai au 2 Juin, 1995, pp 46-47.
- Jones, R. (1975). "Mechanics of Composite Materials", Mc Graw Hill, New York.
- Kamat, M.P. (éd.) (1993). *Structural Optimization Status and Promise*, AIAA Progress in Astronautics and Aeronautics, Volume 150, 1992, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington D.C., USA.
- Kardestuncer, H. (Editor in Chief) et D. Norrie (Project Editor) (1987). "Finite Element Handbook", Mc Graw Hill.
- Kawabe, Y. et S. Yoshida (1994). "An Approach to the Problem of Vibration: Structural Modification by Optimizing the Density Distribution", dans: *Advances in Design Automation* (Gilmore, B.J., Hoeltzel, D.A., Dutta, D. et Eschenauer, H.A. Eds), *Proceedings du 1994 ASME Design Technical Conferences - 20<sup>th</sup> Design Automation Conference*, vol. 2, Minneapolis, MN, 11 - 14 Septembre, 1994, pp -.
- Kikuchi, N. et K. Suzuki (1990). "Mathematical Theory of a Relaxed Design Problem in Structural Optimization", 3rd Symposium Air Force/NASA on Recent Advances in Multidisciplinary Analysis and Optimization, San Francisco, CA., USA, Septembre 1990, pp 276-284

- Kikuchi, N., H.C. Cheng et Z.D. Ma (1995). "Optimal Shape Design of Vibrating Structures", dans: *Advances in Structural Optimization* (Herskovits, J. éd.), pp 189-222, série Solid Mechanics and its Application, vol 25, Kluwer Academic Publishers, 1995.
- Kill, N. et M. Géradin (1984). "Analyse de Sensibilité en Dynamique des Structures : Concepts", rapport LTAS, VF 52.
- Kirsch, U. (1989). "Optimal Topologies of Structures", *Applied Mechanics Reviews*, vol. 42, n° 8, Août 1989, pp 223-239.
- Kirsch, U. (1990a). "On the Relationship Between Optimum Structural Geometries and Topologies", *Structural optimization*, vol. 2, pp 39-45.
- Kirsch, U. (1990b). "On Singular Topologies in Optimum Structural Design", *Structural optimization*, vol. 2, pp 133-142.
- Kohn, R.V. et G. Strang (1986a). "Optimal Design and Relaxation of Variational Problems", *Communication in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 39, 1986, pp 1-25 (Part I), pp 139-182 (Part II), pp 353-377 (Part III).
- Kohn, R.V. et M. Vogelius (1987). "Relaxation of a Variational Method for Impedance Computed Tomography", *Communication in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 40, 1987, pp 745-777.
- Kohn, R.V. (1988). "Recent Progress in the Mathematical Modelling of Composite Materials", dans: *Composite Material Response: Constitutive Relations and Damage Mechanisms* (Sih, G.C., Smith, G.F. et Marshall, I.H. éditeurs), Elsevier Applied Science, London and New York. Chap. 11, pp 155-177.
- Kohn, R.V. et R. Lipton (1988). "Optimal Bounds for the Effective Energy of a Mixture of Isotropic Incompressible, Elastic Materials", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, vol. 102, pp. 331-350.
- Kohn, R.V. (1990). "Composite Materials and Structural Optimization", Proc. Workshop on Smart/Intelligent Materials and Systems, Honolulu, 1990, Mach. Technomic Press.
- Kolpakov, A.G. (1985). "Detremination of the Average Characteristics of Elastics Frameworks", *PMM Journal of Appl. Math. Mech. U.S.S.R.*, vol. 49, pp 739-745.
- Kostar, T.D. et T.-W. Chou (1994). "Microstructural Design of Advanced Multi-Step Three-Dimensional Barided Preforms", *Journal of Composite Materials*, vol. 28, n° 13, pp 1180-1201.
- Lakes, R. (1987). "Foam Structures with Negative Poisson's Ratio", *Science*, vol. 235 (Feb.), p. 1038.
- Lakes, R. (1993a). "Design Considerations for Materials with negative Poisson's Ratio", *Journal of Mechanical Design*, vol. 115, pp 696-700.
- Lakes, R. (1993b). "Material with Structural Hierarchy, review Paper", *Science*, vol. 361 (Feb.), pp. 511-515.
- Lakes, R. et K. Elms (1993). "Indentability of Conventional and Negative Poisson's Ratio Foams", *Journal of Composite Materials*, vol. 27, n° 12, pp. 1193-1202.
- Laschet, G. et P. Duysinx (1992). "Outils Numériques pour la Conception d'assemblages Composites Collés", 8<sup>èmes</sup> Journées Nationales sur les Matériaux Composites (JNC8), Palaiseau (France), 14-16 Novembre, 1992.
- Lene, F. et D. Leguillon (1982). "Homogenized Constitutive Laws for a Partially Cohesive Composite Material", *International Journal of Solids Structures*, vol. 18, n° 5, pp 443-458.
- Lions, J.L. (1981). "Some Methods in the Mathematical Analyses of Systems and their Control", Science Press, Beijing, China, 1981 ou Gordon and Breach, New York.
- Longo, A., M. N6, M. Aizpitarte et J. Unzueta (1991). "Conservative Approximations in Non-Linear Optimization. Theory and Examples", *Computers and Structures*, vol. 39, no 5, pp 441-449, 1991.
- Luenberger, D.G. (1984). "Linear and Non-Linear Programming", Second Edition, Addison Wesley Edition.
- Lurie, K.A., A.V. Fedorov et A.V. Cherkaev (1982). "Regularization of Optimal Design Problems of Bars and Plates", *Journal of Optimization Theory and Application*, Vol. 37, 1982, pp 499-521 (Part I), pp 523-543 (Part II).

- Ma, Z.D., K. Kikuchi et J. Fukushima (1993). "Structural Topology and Shape Optimization for a Frequency Response Problem", *Computational Mechanics*, vol. 13 n°3, pp. 157-174.
- Masur, E.F. (1970). "Optimum Stiffness and Strength of Elastic Structures", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, EM5, pp 621-649.
- Maute, K. et E. Ramm (1994). "Adaptive Techniques in Topology Optimization", Proceedings du AIAA/NASA/USAF/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, Panama City, Florida, 7-9 Septembre 1994, pp121-131.
- Michell, A.G.M. (1904). "The Limits of Economy of Material in Frame Structures", *Philosophical Magazine*, Vol. 8, Series 6, 1904, pp 589-597.
- Milton, G.W. (1992). "Composite Materials with Poisson's Ratio Close to -1", *Journal Mech. Phys. Solids*, vol. 40, n°5, pp 1105-1137.
- Milton, G.W. et A.V. Cherkov (1993). "Materials with Elastic Tensors that Range Over the Entire Set Compatible with Thermodynamics", dans: Abstracts of the Joint ASCE-ASME-SES Meeting (Herakovich, C.T. et J.M. Duva, eds.), 6-9 Juin, Université de Virginie, Charlottesville, Virginie, USA, p. 342.
- Minoux M. (1983). "Programmation Mathématique - Théorie et Algorithmes", tomes I et II, Dunod, Paris.
- Morelle, P., P. Duysinx et C. Fleury (1992). "CAD/FEM Coupling in Shape Optimization", FEM'92 IKOSS Congress, Baden-Baden (Germany), November 1992.
- Mori, T. et K. Tanaka (1973). "Average Stress in Matrix and Average Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusions", *ACTA Metallurgica*, vol. 21, pp 571-574.
- Mlejnek, H.P. (1991). "A Simple Procedure for the Genesis of Structures", Proceedings du FEM'91 CONGRESS, Baden-Baden, RFA, 18-19 Novembre, 1991, pp 200-215.
- Mlejnek, H.P., U. Jehle et R. Schirmacher (1992). "Second Order Approximations in Structural Genesis and Shape Finding", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 34, 1992, pp 853-872.
- Mlejnek, H.P. (1993a). "Some Exploration in the Genesis of Structures", dans: *Topology Design of Structures* (M.P. Bendsøe et C.C. Mota Soares, eds.), pp 287-300, 1993, NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.
- Mlejnek, H.P. et R. Schirmacher (1993b). "An Engineer's Approach to Optimal Material Distribution and Shape Finding", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 106, 1993, pp 1-26.
- Mura, T. (1982). "Micromechanics of Defects in Solids, Martinus Nijhoff, The Hague.
- Murat, F. et L. Tartar (1985a). "Calcul des Variations et Homogénéisation", *Les Méthodes de l'Homogénéisation : Théorie et Applications en Physique*, pp. 319-369, 1985, Eyrolles.
- Murat, F. et L. Tartar (1985b). "Optimality Conditions and Homogenization", dans: *Nonlinear Variational Problems* (Marino A. et al., eds.), Pitman Advanced Publishing Program, Boston, 1985, pp 1-8.
- Nelson, R.B. (1976). "Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives", *AIAA Journal*, vol. 14, pp 1201-1205.
- Nemat-Nasser, S. et M. Hori (1993). "Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials", North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, Elsevier Publishers, Amsterdam.
- Neves, M.M., J.M. Guedes et H.C. Rodrigues (1993). "Topology Optimization of Elastic 2D Structures with Critical Load Constraints", Proceedings of Structural Optimization 93, The World Congress on Optimal Design of Structural Systems, Rio de Janeiro, 2-6 Août 1993, pp 119-128.
- Nguyen, V.H., C. Fleury et J.J. Strodnot (1987). "A Mathematical Convergence Analysis of the Convex Linearization Method for Engineering Design Optimization", *Engineering Optimization*, vol. 11, 1987, pp 195-216.

- Olhoff, N., M.P. Bendsøe et J. Rasmussen (1992). "On CAD-Integrated Structural Topology and Design Optimization", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 89, pp 259-279.
- Olhoff, N., L. Krog et J. Thomsen (1993). "Bi-Material Topology Optimization", Proceedings of Structural Optimization 93, The World Congress on Optimal Design of Structural Systems, Rio de Janeiro, 2-6 Août 1993, pp 327-334.
- Ong, T.G., G.I.N. Rozvany et W.T. Szeto (1988). "Least-Weight Design of Perforated Plates for Given Compliance : Nonzero Poisson's Ratio", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 66, pp 301-322.
- Papalambros, P.Y. et M. Chiredast (1990). "An Integrated Environment for Structural Configuration Design", *Journal of Engineering Design*, vol. 1, pp 73-96.
- Papalambros, P.Y. et M. Chiredast (1993). "Integrated Structural Optimization Systems", dans: *Topology Design of Structures* (M.P. Bendsøe et C.C. Mota Soares, éd.), pp 501-514, 1993, NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.
- Pedersen, P. (1989). "On optimal orientation of orthotropic materials", *Structural Optimization*, Vol. 1, 1989, pp 101-106.
- Pedersen, P. (1990). "Bounds on elastic energy in solids of orthotropic materials", *Structural Optimization*, Vol. 2, 1990, pp 55-63.
- Pedersen, P. (1991). "Optimal Orientation of Anisotropic Materials - Optimal Distribution of Anisotropic Materials - Optimal Shape Design with Anisotropic Materials - Optimal Design for a Class of Non-Linear Elasticity", dans: *Optimization of Large Structural Systems* (Rozvany, G.I.N., éd.), , Vol. II, pp 649-681, 1993, NATO ASI Series, Vol. 231, Kluwer Academic Publishers.
- Pironneau, O. (1986). "Optimal Shape Design for Elliptic Systems", Springer Verlag, New York, 1986.
- Powell, M.J.D. (1978). "Algorithms for Nonlinear Functions That Use Lagrangian Functions", *Mathematical Programming*, vol. 14, pp 224-248.
- Prager, W. et J.E. Taylor (1968). "Problems of Optimal Structural Design", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 35, pp102-106.
- Prager, W. (1974). "A Note on Discretized Michell Structures", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 3 n°3, pp 349-355.
- Pshenichny, B.N. et Y.M. Danalin (1978). "Numerical Methods in Extremal Problems", Mir Publishers, Moscow.
- Rajan, S.D. et A.D. Belegundu (1989). "Shape Optimal Design Using Fictitious Loads", *AIAA Journal*, vol 27, n°1, pp 102-107.
- Ramm, E., K.-U. Bletzinger, R. Reitinger et K. Maute (1994). "The Challenge of Structural Optimization", dans: *Advances in Structural Optimization* (Topping, B.H.V. et M. Papadrakakis, éd.), CIVIL-COMP Press, Edinburgh, Scotland, pp 103-112.
- Rasmussen J., J. Thomsen et N. Olhoff (1993). "Integrating Topology and Boundary Variations Design Method in a CAD System", dans: *Topology Design of Structures* (M.P. Bendsøe et C.C. Mota Soares éd.), pp 483-499, 1993, NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.
- Reuss, A. (1929). *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 9, p. 49.
- Ringertz, U. (1993). "On Finding the Optimal Distribution of Material properties", *Structural Optimization*, vol. 5, 1993, pp 265-267.
- Rogister, F. (1995). "Optimisation de Forme et de Topologie: Etude d'un Outil Intégré", Travail de Fin d'Etude, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, 1995.
- Rodrigues, H.C. et P. Fernandes (1993a). "A Material Based Model for Topology Optimization of Thermoelastic Structures", Proceedings of Structural Optimization 93, The World Congress on Optimal Design of Structural Systems, Rio de Janeiro, 2-6 Août 1993, pp 129-138.
- Rodrigues, H.C. et P. Fernandes (1993b). "Topology Optimization of Linear Elastic Structures subjected to Thermal Loads", dans: *Topology Design of Structures* (M.P. Bendsøe et C.C. Mota Soares, éd.), pp 437-450, 1993, NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.



- Rodrigues, H.C. et P. Fernandes (1995). "A Material Based Model for Topology Optimization of Thermoelastic Structures", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, pp 1951-1965.
- Rossow, M.P. et J.E. Taylor (1973). "A Finite Element Method for the Optimal Design of Variable Thickness Sheets", *AIAA Journal*, Vol. 11, 1973, pp 1566-1569.
- Rozvany, G.I.N. (1976). *Optimal Design of Flexural Systems*, Pergamon Press, Oxford, UK.
- Rozvany, G.I.N., T.G. Ong, W.T. Szeto, N. Olhoff et M.P. Bendsøe (1987). "Least-Weight Design of Perforated Plates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, 1987, pp 521-536 (Partie I) et pp 537-550 (Partie II).
- Rozvany, G.I.N. et M. Zhou (1991). "The COC algorithm, Part I : Cross-section optimization or sizing", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 89, pp 281-308.
- Rozvany, G.I.N., M. Zhou et O. Sigmund (1992). "Topology Optimization in Structural Design", chap. 8, pp 47-60, Two Research Projects (Ro 744/4 and Ro 744/6) of The Deutsche Forschungsgemeinschaft, 1992, Vol. 59, Forschungsbericht Aus dem Fachbereich Bauwesen, Universität - Gesamthochschule - Essen.
- Rozvany, G.I.N., (éd.) (1993a). *Optimization of Large Structural Systems, Vol. I et II*, NATO ASI Series, Vol. 231, 1993, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- Rozvany, G.I.N. (1993b). "Layout Topology for Grid-Type Structures", dans: *Topology Design of Structures* (M.P. Bendsøe et C.C. Mota Soares, édés.), pp 251-272, 1993, NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.
- Rozvany, G.I.N., M. Zhou, T. Birker et O. Sigmund (1993c). "Topology Optimization Using Iterative Continuum-Type Optimality Criteria (COC) Methods for Discretized Systems", dans: *Topology Design of Structures* (M.P. Bendsøe et C.C. Mota Soares, édés.), pp 273-286, 1993, NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.
- Sanchez-Palencia, E. (1980). "Non Homogeneous Media and Vibration Theory", *Lecture Notes in Physics* 127, Berlin, Springer-Verlag.
- Schittkowski, K. (1981). "The Non-Linear Programming Method of Wilson, Han and Powell with an Augmented Lagrangian Type Line Search Function, Part 1: Convergence Analysis; Part 2: An Efficient Implementation with Least Square Problems", *Numerical Mathematics*, vol. 38, pp 38-114, pp115-127.
- Schittkowski, K. (1985). "NLPQL: A Fortran Subroutine solving Constrained Nonlinear Programming Problems", *Annals of Operation Research*, pp 485-500.
- Schmit, L.A. (1960). "Structural design by systematic synthesis", *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> ASCE Conference on Electronic Computation*, pp 105-132, New York.
- Schmit, L.A. et R.A. Malett (1963). "Structural Synthesis and Design Parameter Hierarchy", *Journal of the Structural Division, ASCE*, vol 89, ST4, pp 269-299, 1963.
- Schmit, L.A. et B. Farshi (1974). "Some Approximation Concepts for Structural Synthesis", *AIAA Journal*, vol. 12, 1974, pp 692-699.
- Schmit, L.A. et H. Miura (1976). "Approximation Concepts for Efficient Structural Synthesis", *NASA Contractor Report, NASA-CR 2552*.
- Sheu, C.Y. et L.A. Schmit (1972). "minimum Weight Design of Elastic Redundant Trusses under Multiple Static Loading Conditions", *AIAA Journal*, vol. 10., n°2, pp. 155-162.
- Sigmund, O. (1994a). "Design of Material Structures Using Topology Optimization", Ph. D. Thesis, Technical University of Denmark, DCAMM Report No S69, december 1994.
- Sigmund, O. (1994b). "Materials with Prescribed Constitutive Parameters: An Inverse Homogenization Problem", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31, pp 2313-2329.
- Sigmund, O. (1994c). "Tailoring Materials with Prescribed Elastic Properties", Technical University of Denmark, DCAMM Report No 480, Mars 1994, à paraître dans *Mech. Materials*.

- Sigmund, O. (1994d). "Tailoring Material for Specific Needs", *Proceedings of the Second International Conference on Intelligent Materials*, (Rogers, C.A. et G.G. Wallace, édés), Williamsburg, Virginia, 5-8 Juin 1994, pp. 1152-1163, à paraître dans *Journal of Intelligent Structures and Materials*.
- Sigmund, O. (1995a). "Design of Material Structures using Topology Optimization", *Proceedings du First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Goslar, Allemagne, 28 Mai au 2 Juin, 1995, pp 267.
- Sigmund, O. et A. Díaz (1995b). "Elimination of the Mesh Dependency Problem in Layout Optimization", *Proceedings du First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Goslar, Allemagne, 28 Mai au 2 Juin, 1995, pp 53.
- Smaoui, H., C. Fleury et L.A. Schmit (1988). "Advances in Dual Algorithms and Convex Approximation Methods", *Proceedings of AIAA/ASME/ASCE 29th Structures, Structural Dynamics and Material Conference*, pp 1339-1347, 1988.
- Soto, C.A. et A. Díaz (1993a). "On the Modeling of Ribbed Plates for Shape Optimization", *Structural Optimization*, vol. 6, 1993, pp 175-188.
- Soto, C.A. et A. Díaz (1993b). "Optimum Layout and Shape of Plate Structures Using Homogenization", dans: *Topology Design of Structures* (M.P. Bendsøe et C.C. Mota Soares, édés.), pp 407-420, 1993, NATO ASI Series, Vol. 227, Kluwer Academic Publishers.
- Starnes, J.H., et R.T. Haftka (1979). "Preliminary Design of Composite Wings for Buckling, Stress and Displacement Constraints", *Journal of Aircraft*, vol. 16, 1979, pp 564-570.
- Strang, G. et R.V. Kohn (1986). "Optimal Design in Elasticity and Plasticity", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 22, 1986, pp 183-188.
- Strang, G. et R.V. Kohn (1988). "Optimal Design of a Two-way Conductor", dans: *Topics in Non-Smooth Mechanics* (Moreau, J.J., Panagiotopoulos, P.D. et Strang, G., édés.), chap III, pp143-155, Birkhäuser Verlag.
- Suquet, P. (1982). "Une Méthode Duale en Homogénéisation : Application aux Milieux Elastiques", *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, numéro spécial, 79.
- Suzuki, K. et N. Kikuchi (1991a). "A Homogenization Method for Shape and Topology Optimization", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 93, 1991, pp 291-318.
- Suzuki, K. et N. Kikuchi (1991b). "Layout Optimization Using Homogenization Method", dans: *Optimization of Large Structural Systems* (G.I.N. Rozvany, éd.), Vol. I, pp 157-175, 1993, NATO ASI Series, Vol. 231, 1993, Kluwer Academic Publishers.
- Suzuki, K. et N. Kikuchi (1991c). "Layout Optimization Using Homogenization Method: Generalized Layout Design of Three-Dimensional Shells for Car Bodies", dans: *Optimization of Large Structural Systems* (G.I.N. Rozvany, éd.), Vol. III, pp 110-126, 1993, NATO ASI Series, Vol. 231, 1993, Kluwer Academic Publishers.
- Suzuki, K. et N. Kikuchi (1992). "Generalized Layout Optimization of Shape and Toplogy in Three-Dimensional Shell Structures", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 93, 1992, pp 291-318.
- Svanberg, K. (1981). "Optimization of Geometry in Truss Design", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 28, pp 63-80.
- Svanberg, K. (1987). "The Method of Moving Asymptotes - A New Method for Structural Optimization", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, 1987, pp 359-373.
- Svanberg, K. (1991a). "The Method of Moving Asymptotes (MMA) with some Extensions", dans: *Optimization of Large Structural Systems* (Rozvany, G.I.N. éd.), Vol. I, pp 555-566, 1993, NATO ASI Series, Vol. 231, 1993, Kluwer Academic Publishers.
- Svanberg, K. (1991b). "Some Second Order Methods for Structural Optimization", dans: *Optimization of Large Structural Systems* (Rozvany, G.I.N., éd.), Vol. I, pp 567-578, 1993, NATO ASI Series, Vol. 231, 1993, Kluwer Academic Publishers.
- Svanberg, K. (1991c). "Local and Global Optima", dans: *Optimization of Large Structural Systems*

- (Rozvany, G.I.N., éd.), Vol. I, pp 579-588, 1993, NATO ASI Series, Vol. 231, 1993, Kluwer Academic Publishers.
- Svanberg, K. (1994). "On the Convexity and Concavity of Compliances", *Structural Optimization*, vol. 7, 1994, pp 42-46.
- Tartar, L. (1977). "Estimation de Coefficients Homogénéisés". Lecture Notes in Mathematics, 704, Springer Verlag, Berlin, pp 364-373.
- Tartar, L. (1985). "Estimation Fine des Coefficients Homogénéisés", dans : *Ennio di Giorgi's Colloquium* (P Krée, éd.), London, Pitman, p 168.
- Thapa, K.N. (1981). "Optimization of Unconstrained Functions with Sparse Hessian Matrices", Ph. D. dissertation, Stanford University, Department of Operations Research.
- Thomsen, J. (1991). "Optimization of Composite Discs", *Structural Optimization*, vol. 3, 1991, pp 89-98.
- Thomsen, J. (1992). "Topology Optimization of Structures Composed of One or Two Materials", *Structural Optimization*, vol. 5, 1992, pp 108-115.
- Toint, P.L. (1977). "On Sparse and Symetric Matrix Updating Subject to a Linear Equation", *Math. Computing*, Vol. 31, pp 954-961.
- Topping, B.H.V. (1983). "Shape Optimization of Skeletal Structures: A Review", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, vol. 109, pp. 1933-1951.
- Tsai, S.W. (1964). "Structural Behaviour of Composite Materials", NASA CR-71, Juillet, 1964.
- Venkayya, V.B. (1971). "Design of Optimum Structures", *Computer and Structures*, vol. 1, pp 265-309, 1971.
- Venkayya, V.B., N.S. Khot et L. Berke (1973). "Application of Optimality Criteria Approaches to Automated Design of Large Practical Systems", Second Symposium on Structural Optimization, AGARD-CP-123, Mila, Italy, 1973.
- Voigt, W. (1889). *Wied. Ann.*, vol. 28, p 573.
- Weng, G. (1984). "Some Elastic properties of Reinforced Solids, with Special Reference to Isotropic Ones Containing Spherical Inclusions". *International Journal of Engineering Science*, vol. 22, n°7, pp. 845-856.
- Wheedom, R. et L. Zygmund (1977). "Measure and Integral : An Introduction to Real Analysis", Monographs in *Pure and Applied Mathematics*, Vol. 43, Marcel Dekker, Inc., New York.
- Wittrick, W.H. (1962). "Rates of Change of Eigenvalues, with Reference to Buckling and Vibration Problems", *Journal of Royal Aeronautical Society*, vol. 66, pp 590-591.
- Yao, T.S. et K.K. Choi (1989). "3D Shape Optimal Design with Automatic Finite Element Regridding", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 28, pp369-384.
- Zhang, W.H. (1991). "Calcul des Sensibilités et Optimisation de Forme par la Méthode des Eléments Finis", Thèse de Doctorat, Université de Liège, 1978.
- Zhang, W.H., P. Beckers, P. Duysinx et C. Fleury (1993a). "A Parametric Design Based Approach to Structural Shape Optimization", 3<sup>rd</sup> International Conference OPTI93, Zaragoza (Espagne), Juillet, 1993.
- Zhang, W.H., C. Fleury et P. Duysinx (1993b). "An Integrated Design Approach to Structural Shape Optimization", *Structural Optimization* 93, The World Congress on Optimal Design of Strucutral Systems, Rio de Janeiro (Brazil), 2-6 Août, 1993.
- Zhang, W.H. et C. Fleury (1994). "Recent Advances in Convex Approximation Methods for Structural Optimization", dans: *Advances in Structural Optimization* (Topping, B.H.V. et M. Papadrakakis, édés). CIVIL-COMP PRESS, Edinburgh, Scotland, Proceedings of the Second International Conference on Computational Structures Technology, Athènes, 30 Août - 1 Septembre 1994, pp 83-90.
- Zhou, M. et G.I.N. Rozvany (1991). " The COC algorithm, Part II : Topological, Geometry and Generalized Shape Optimization", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 89, pp 309-336.

Zienkiewicz, O.C. et J.S. Campbell (1973). "Shape Optimization and Sequential Linear Programming", dans: *Optimum Structural Design* (Gallagher, R.H. et O.C. Zienkiewicz, O.C. édés), pp 109-126, John Wiley & Sons, New York.

## Annexe A

# RESUME DE LA THEORIE DE L'HOMOGENEISATION DES COMPOSITES A MICROSTRUCTURE PERIODIQUE

De nombreux matériaux composites sont caractérisés par une nature fondamentalement hétérogène. Leur constitution microscopique relève de l'assemblage de constituants très différents selon une géométrie compliquée. Lorsqu'on se place au point de vue macroscopique, il est normal d'essayer de prédire les propriétés moyennes de tels matériaux afin de les remplacer par un matériau homogène équivalent et d'en étudier la réponse structurale au niveau macroscopique sans se soucier de détails microscopiques. Dans cette optique, il est intéressant de pouvoir adopter la démarche inverse et de retourner au niveau microscopique en vue de fournir une analyse locale très précise. La théorie de l'homogénéisation répond à cette attente. Dans le cadre d'hypothèses de modélisation plausibles, elle permet d'établir de manière rigoureuse les propriétés moyennes équivalentes de corps hétérogènes à l'échelle microscopique et de déterminer les microcontraintes locales pour une sollicitation donnée.

### A.1 Position du problème et notations

Soit un matériau composite dont la microstructure est formée par la répétition spatiale d'un motif élémentaire constitué de différents matériaux comme le montre la figure I.1. Pour la simplicité de l'exposé, on se limite à des représentations bidimensionnelles. Ce motif élémentaire, qui se répète de proche en proche, est généralement désigné sous le vocable de *cellule de base* du matériau.

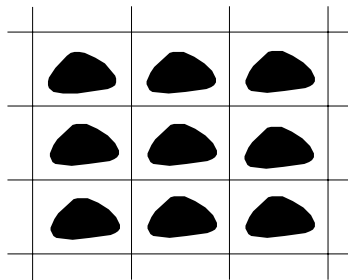


Figure I.1 : Microstructure périodique d'un matériau composite

La période élémentaire constituant la cellule de base de la structure peut s'obtenir par une homothétie de rapport  $\varepsilon$  très petit ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ) de l'ouvert :

$$Y = ]0, Y_1[ \times ]0, Y_2[ \times ]0, Y_3[ \quad (\text{A.1})$$

Les coefficients élastiques  $E_{ijkl}^\varepsilon(\mathbf{x})$  de la structure sont de nature périodique. Mathématiquement, les coefficients élastiques découlent de l'application  $\mathbf{y} \rightarrow E_{ijkl}(\mathbf{y})$  définie sur la cellule de base  $Y$ . Cette relation est ensuite étendue par périodicité sur toute la structure.

Le problème physique étant bien posé, les constantes élastiques possèdent néanmoins les propriétés:

- d'être bornées

$$E_{ijkl}^e \in L^\infty(\Omega) \quad (\text{A.2})$$

- de symétrie

$$E_{ijkl}^e = E_{jikl}^e = E_{ijlk}^e = E_{klij}^e \quad (\text{A.3})$$

- et de coercitivité

$$\exists \alpha > 0 : E_{ijkl}^e e_{ij} e_{kl} \geq \alpha e_{ij} e_{kl} \quad \forall e_{ij} = e_{ji} \quad (\text{A.4})$$

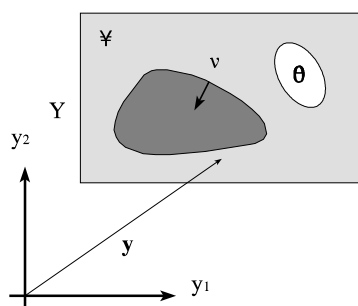


Figure I.2 : Définition de la cellule de base

On suppose que dans le voisinage de tout point  $\mathbf{x}$ , le matériau est constitué par une telle microstructure périodique. Il n'est toutefois pas contradictoire, avec cette hypothèse, d'admettre que la microstructure varie d'un point macroscopique à un autre. En conséquence, le comportement mécanique peut être caractérisé par une description faisant appel à un double système de variables  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Les coefficients élastiques sont alors donnés par :

$$E_{ijkl}^e(\mathbf{x}) = E_{ijkl}^e(\mathbf{x}, \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\epsilon}) \quad (\text{A.5})$$

La variable macroscopique  $\mathbf{x}$  reflète la variation des grandeurs à l'échelle de la structure, tandis que la variable locale  $\mathbf{y}$  décrit la variation rapide consécutive à la microstructure. Les deux variables ne sont cependant pas totalement indépendantes. Si on désigne par  $\epsilon$ , l'ordre de grandeur caractéristique de la cellule, évidemment très petit vis-à-vis des dimensions caractéristiques de la structure globale, il est possible de relier la variable microscopique  $\mathbf{y}$  à la variable macroscopique  $\mathbf{x}$  par la transformation d'homothétie  $\mathbf{y} = \mathbf{x} / \epsilon$ .

Compte tenu de ce haut degré d'hétérogénéité autour de chaque point  $\mathbf{x}$ , la variation rapide des propriétés matérielles à l'intérieur du corps crée une fluctuation semblable des grandeurs mécaniques sur la distance caractéristique  $\epsilon$ . Dès lors, toute fonction  $g$  quelconque affiche la double dépendance en  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

$$\mathbf{g}^\epsilon = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \mathbf{y} = \mathbf{x}/\epsilon \quad (\text{A.6})$$

où  $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est une fonction  $Y$  périodique et  $Y = (y_{1L}, y_{1R}) \times (y_{2L}, y_{2R})$

Dans la suite de l'exposé, l'exposant  $\epsilon$  rappellera la double variation de la grandeur envisagée.

La résolution locale de tels problèmes s'avère hors de question tant la discrétisation nécessaire serait énorme pour avoir une connaissance détaillée du comportement de la structure. C'est le comportement macroscopique de la structure en examen qui nous intéresse en premier lieu. Dans cette optique, le but de la théorie de l'homogénéisation est de déterminer le comportement effectif des corps à microstructure périodique pour les remplacer au niveau macroscopique par des corps homogènes de propriétés équivalentes. Ainsi, la théorie de l'homogénéisation permet d'évaluer des grandeurs matérielles équivalentes (moyennes), afin de pouvoir étudier le comportement macroscopique de la structure sans se soucier des hétérogénéités microscopiques, quitte à retourner dans un temps ultérieur au niveau de la cellule de base pour y déterminer la répartition microscopique des contraintes.

Soit un corps occupant un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  avec une frontière  $\Gamma$  lipschitzienne suffisamment douce. La frontière est divisible en deux frontières complémentaires :  $\Gamma_u$  est la portion de la frontière où sont appliquées les conditions aux limites sur les composantes de déplacement et où  $\Gamma_\sigma$  est la partie de la frontière où on spécifie des conditions de tractions de surface. Les deux parties de frontières précédemment définies sont complémentaires :

$$\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u = \Gamma \quad \Gamma_\sigma \cap \Gamma_u = \emptyset \quad (\text{A.7})$$

Supposons que la cellule de base possède une perforation occupant un sous-domaine ouvert dénommé  $\theta$ . La frontière de la perforation est  $S = \partial\theta$ . Le domaine occupé réellement par la matière au sein de la cellule de base est  $\mathbb{Y} = Y \setminus \bar{\theta}$ . Le domaine  $\mathbb{Y}$  est étendu par périodicité sur tout l'espace. On désigne par  $\Omega^\epsilon$  la partie solide du domaine et par  $S^\epsilon$  l'union de toutes les surfaces des microperforations.

On formule l'hypothèse supplémentaire que le domaine  $\Omega^\epsilon$  est connexe, que ses frontières  $S$  sont suffisamment douces et qu'aucune d'entre elles ne coupe la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$ .

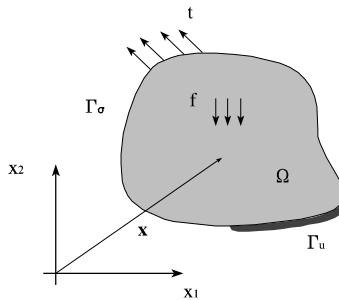


Figure I.3 : Définition du problème élastique

## A.2 Les équations du problème

### *Formulation forte*

La structure est en équilibre avec des forces de volume  $\mathbf{f}$  et des tractions de surface  $\mathbf{t}$  sur  $\Gamma_\sigma$ , des déplacements homogènes sur  $\Gamma_u$ . Les déplacements  $\mathbf{u}^e$  et les tensions  $\boldsymbol{\sigma}^e$  satisfont aux équations de la mécanique des solides :

- les équations d'équilibre en volume:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^e}{\partial x_j} + f_i^e = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad (\text{A.8})$$

et sur la frontière :

$$t_i = n_j \sigma_{ij}^e = \bar{t}_i \quad \text{sur } \Gamma_\sigma \quad (\text{A.9})$$

- les relations de compatibilité linéarisées:

$$\epsilon_{kl}^e = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k^e}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^e}{\partial x_k} \right) \quad (\text{A.10})$$

et sur la frontière :

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (\text{A.11})$$

ainsi que les relations entre les tensions et les déformations en régime élastique linéaire :

$$\sigma_{ij}^e = E_{ijkl}^e \epsilon_{kl}^e \quad (\text{A.12})$$

### *Formulation variationnelle*

L'ensemble naturel pour les déplacements élastiques est l'ensemble de Sobolev  $H^1(\Omega)$  qui regroupe les fonctions mesurables dont la valeur et toutes les dérivées partielles sont de carré intégrable :

$$H^1(\Omega^e) = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in L^2(\Omega^e) ; \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega^e), i=1,2,3 \right\} \quad (\text{A.13})$$

Pour plus de clarté, nous nous limitons à des conditions aux limites homogènes sur les déplacements. Dans ce cas, on peut définir l'ensemble des approximations cinématiquement admissibles :

$$V^e = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega^e)^3 \mid \mathbf{v}|_{\Gamma_u} = \mathbf{0} \right\} \quad (\text{A.14})$$

En multipliant l'équation d'équilibre par un champ de déplacement virtuel, en intégrant par parties sur  $\Omega$  et en appliquant ensuite la formule de Green, on trouve la formulation faible ou intégrée du problème mécanique, également connue sous le nom de *Principe des Travaux Virtuels*. Le champ



$\mathbf{u}^\varepsilon \in V^\varepsilon$ , solution du problème d'élasticité, vérifie le principe des travaux virtuels :

$$\int_{\Omega^\varepsilon} E_{ijkl}^\varepsilon \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V^\varepsilon \quad (\text{A.15})$$

En admettant les hypothèses faites sur les coefficients élastiques, la solution du problème mécanique  $\mathbf{u}^\varepsilon$  existe et est unique, à condition que les fonctions  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{t}$  soient suffisamment continues et que les frontières  $\Gamma_u$  et  $\Gamma_\sigma$  soient régulières.

Les forces de volume  $\mathbf{f}^\varepsilon$  ont une structure semblable au tenseur élastique  $E_{ijkl}^\varepsilon$ . Les forces de volume varient non seulement sur le corps mais aussi au sein de la cellule de base. Elles peuvent s'exprimer comme des fonctions de la variable spatiale  $\mathbf{x}$  et de la variable spatiale locale (ou rapide)  $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$ . En conséquence, la solution  $\mathbf{u}^\varepsilon$  possède également une double dépendance en  $\mathbf{x}$  et en  $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$ :

$$\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \quad (\text{A.16})$$

Rappelons que cette double dépendance en  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$  signifie que les grandeurs varient non seulement au niveau macroscopique mais également de manière rapide (au niveau microscopique) au voisinage de chaque point  $\mathbf{x}$ . Il existe en effet autour de chaque point  $\mathbf{x}$  fixé, une microstructure locale formée par la répétition  $Y$  périodique d'une cellule de base. Toutefois la cellule de base locale peut être différente d'un point  $\mathbf{x}$  macroscopique à un autre, pourvu que cette variation soit suffisamment douce au niveau macroscopique.

### A.3 Le problème d'homogénéisation

#### *Développement en série de la solution*

La résolution locale du problème devient alors de plus en plus difficile au fur et à mesure que la taille  $\varepsilon$  de la cellule de base diminue vers zéro. Le raffinement du maillage nécessaire à la résolution devient alors énorme pour approcher, de manière réaliste, la géométrie du problème. Il est alors raisonnable d'essayer de développer la solution  $\mathbf{u}^\varepsilon$  en série de puissance du paramètre  $\varepsilon$ .

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots, \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \quad (\text{A.17})$$

où  $\mathbf{u}^j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est défini dans  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega \times Y$   
 $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{u}^j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est  $Y$ -périodique.

Avant d'établir les équations régissant les différents champs  $\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1 \dots$ , il est intéressant de noter que :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\epsilon}) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \quad (\text{A.18})$$

Si, de plus, on désigne par  $\mathbf{e}_{kl}$  la déformation par rapport à la variable rapide  $\mathbf{y}$

$$\mathbf{e}_{kl}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial y_l} + \frac{\partial v_l}{\partial y_k} \right) \quad (\text{A.19})$$

alors le champ de contrainte  $\sigma_{ij}^\epsilon$  admet également un développement en série du type :

$$\sigma_{ij}^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1 + \epsilon \sigma_{ij}^2 + \dots \quad (\text{A.20})$$

dont les termes du développement s'écrivent :

$$\sigma_{ij}^0 = E_{ijkl}^\epsilon \mathbf{e}_{kl}(\mathbf{u}^0) \quad (\text{A.21})$$

$$\sigma_{ij}^1 = \Sigma_{ij}^1 + E_{ijkl}^\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{e}_{kl}(\mathbf{u}^0) \quad \Sigma_{ij}^1 = E_{ijkl}^\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{e}_{kl}(\mathbf{u}^1) \quad (\text{A.22})$$

$$\sigma_{ij}^2 = \Sigma_{ij}^2 + E_{ijkl}^\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{e}_{kl}(\mathbf{u}^1) \quad \Sigma_{ij}^2 = E_{ijkl}^\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{e}_{kl}(\mathbf{u}^2) \quad (\text{A.23})$$

Pour une fonction Y-périodique  $\Psi(\mathbf{y})$ , on note aussi les relations utiles :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega^\epsilon} \Psi\left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\right) d\Omega \rightarrow \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y \Psi(\mathbf{y}) dY d\Omega \quad (\text{A.24})$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon \int_{S^\epsilon} \Psi\left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\right) d\Omega \rightarrow \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \oint_S \Psi(\mathbf{y}) dS d\Omega \quad (\text{A.25})$$

où  $|Y|$  représente le volume (l'aire en 2-D) de la cellule de base.

On définit les différents ensembles de déplacements virtuels suivants :

$$V_{\Omega \times Y} \equiv \{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega \times Y \mid \mathbf{v}(\cdot, \mathbf{y}) \text{ Y-périodique; } \mathbf{v}|_{\Gamma_u} = \mathbf{0}; \mathbf{v} \text{ suffisamment continu} \}$$

$$V_{\Omega} \equiv \{ \mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega \mid \mathbf{v}|_{\Gamma_u} = \mathbf{0}; \mathbf{v} \text{ suffisamment continu} \}$$

$$V_Y \equiv \{ \mathbf{v}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in Y \mid \mathbf{v}(\mathbf{y}) \text{ Y-périodique; } \mathbf{v} \text{ suffisamment continu} \}$$

### Lemme de Lions

Le lemme de Lions (1981) permettra d'établir l'existence des solutions.

Le problème

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left( E_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{y})}{\partial y_l} \right) = F(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in Y \quad (\text{A.26})$$

admet une solution dans l'ensemble

$$V_Y = \{ \mathbf{v}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in Y \mid \mathbf{v}(\mathbf{y}) \text{ Y-périodique; } \mathbf{v} \text{ suffisamment continu} \}$$

définie à une constante additionnelle près, pour une fonction régulière  $F$ , si et seulement si :

$$\int_Y F(\mathbf{y}) \, dY = - \int_S E_{ijkl} \frac{\partial \Phi(\mathbf{y})}{\partial y_l} n_j \, dS \quad (\text{A.27})$$

### Equilibre microscopique et macroscopique du corps

L'introduction du développement asymptotique du déplacement  $\mathbf{u}$  dans le principe des travaux virtuels nous donne :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega^\epsilon} E_{ijkl}^\epsilon \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \, d\Omega + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega^\epsilon} E_{ijkl}^\epsilon \left[ \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega^\epsilon} E_{ijkl}^\epsilon \left[ \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \left( \frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right] \, d\Omega + \epsilon (\dots) \\ & = \int_{\Omega^\epsilon} f_i^\epsilon v_i \, d\Omega + \oint_{\Gamma_i} t_i v_i \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V_{\Omega \times Y} \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Pour des fonctions suffisamment continues, la limite pour  $\epsilon \rightarrow 0^+$  de toutes ces intégrales existe. L'égalité du principe des travaux virtuels tient si tous les termes de même puissance en  $\epsilon$  sont égaux à zéro. Dès lors, on peut écrire :

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega^\epsilon} E_{ijkl}^\epsilon \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_{\Omega \times Y} \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega^\epsilon} E_{ijkl}^\epsilon \left[ \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_{\Omega \times Y} \quad (\text{A.30})$$

$$\int_{\Omega^\epsilon} E_{ijkl}^\epsilon \left[ \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \left( \frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right] d\Omega = \int_{\Omega^\epsilon} f_i^\epsilon v_i d\Omega + \int_{\Gamma_i} t_i v_i d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V_{\Omega \times Y} \quad (\text{A.31})$$

En multipliant la première de ces équations par  $\epsilon^2$ , en prenant la limite pour  $\epsilon \rightarrow 0^+$  et en utilisant ensuite la propriété (A.24), on obtient :

$$\frac{1}{|Y|} \int_{\Omega^\epsilon \setminus \mathcal{Y}} E_{ijkl}^\epsilon \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_{\Omega \times Y} \quad (\text{A.32})$$

Puisque  $\mathbf{v}$  est arbitraire, choisissons  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{y})$  c'est-à-dire  $\mathbf{v} \in V_Y$ . Si on intègre par parties en appliquant le théorème de la divergence à l'intégrale sur  $Y$ , et si on fait usage des conditions limites périodiques sur  $Y$ , on trouve :

$$\frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Y}} -\frac{\partial}{\partial y_j} \left( E_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \right) v_i dY d\Omega + \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_S E_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} n_j v_i dS \} d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_Y \quad (\text{A.33})$$

Etant donné que  $\mathbf{v}(\mathbf{y})$  est arbitraire, il est facile d'extraire l'équation différentielle et les conditions aux limites régissant le premier terme  $\mathbf{u}^0$  du développement en série de  $\mathbf{u}^\epsilon$  à l'intérieur de la cellule de base  $Y$ :

$$-\frac{\partial}{\partial y_j} \left( E_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \right) = 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \quad (\text{A.34})$$

et sur la surface libre de la cellule de base :

$$E_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} n_j = 0, \quad \text{sur } S. \quad (\text{A.35})$$

La solution de ces équations différentielles est régie par le lemme I. Il en résulte que le premier terme du développement du champ  $\mathbf{u}^\varepsilon$  est indépendant de la variable microscopique locale  $\mathbf{y}$  et ne dépend que de la variable macroscopique  $\mathbf{x}$ .

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) \quad (\text{A.36})$$

Le déplacement  $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$  peut dès lors être considéré comme le déplacement moyen de la structure qui n'est altéré que par des termes d'ordre supérieur. Toutefois, il convient immédiatement de remarquer qu'il en est tout autrement du champ de contraintes, étant donné que la variable microscopique  $\mathbf{y}$  est active dès le premier terme du développement.

On introduit le résultat concernant le déplacement d'ordre 0 dans l'équation (A.30). On multiplie cette équation par  $\varepsilon$  et on prend ensuite la limite pour  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . En utilisant les propriétés (A.24) et (A.25), on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_{\mathbb{Y}} E_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_{\Omega \times Y} \quad (\text{A.37})$$

Puisque cette équation doit être satisfaite pour  $\mathbf{v}$  quelconque, on peut choisir  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{y})$  et obtenir :

$$\int_{\mathbb{Y}} E_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} dY = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_Y \quad (\text{A.38})$$

En intégrant par parties et en appliquant les conditions de périodicité sur la cellule de base, on a :

$$-\int_{\mathbb{Y}} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[ E_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \right] v_i(\mathbf{y}) dY + \int_S E_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) v_i(\mathbf{y}) n_j dS = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_Y \quad (\text{A.39})$$

On peut encore en extraire les équations locales qui régissent la composante  $\mathbf{u}^1$  :

$$-\frac{\partial}{\partial y_j} \left( E_{ijkl} \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left( E_{ijkl} \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} \right) \quad \text{sur } \mathbb{Y} \quad (\text{A.40})$$

$$E_{ijkl} \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} n_j = - E_{ijkl} \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} n_j \quad \text{sur } S \quad (\text{A.41})$$

On peut également introduire le résultat concernant le déplacement d'ordre 0 dans la troisième égalité et prendre la limite de cette équation lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

On trouve :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_{\mathbb{Y}} E_{ijkl} \left[ \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \left( \frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right] dY \right\} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|Y|} \int_{\mathbb{Y}} f_i v_i dY \right) d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V_{\Omega \times Y} \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

En choisissant  $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{x})$ , on obtient l'équation d'équilibre global au sens macroscopique :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_{\mathbb{Y}} E_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) dY \right\} \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|Y|} \int_{\mathbb{Y}} f_i dY \right) v_i(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i(\mathbf{x}) d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V_{\Omega} \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Si on choisit  $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{y})$ , alors on trouve :

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_{\mathbb{Y}} E_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} dY \right\} d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|Y|} \int_{\mathbb{Y}} f_i v_i(\mathbf{y}) dY \right) d\Omega \quad \forall \mathbf{v} \in V_Y \quad (\text{A.44})$$

Cette équation représente l'équilibre microscopique de la cellule de base :

$$\int_{\mathbb{Y}} E_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} dY = \int_{\mathbb{Y}} f_i v_i(\mathbf{y}) dY \quad \forall \mathbf{v} \in V_Y \quad (\text{A.45})$$

La même procédure pourrait être employée pour les termes d'ordre supérieur dans le développement en série. On aboutirait à un ensemble d'équations d'équilibre reliant plusieurs termes. Toutefois, la résolution des équations (A.33), (A.34), (A.35) et (A.39), (A.40), (A.41) nous donne une solution complète du champ  $\mathbf{u}^\varepsilon$ . La composante  $\mathbf{u}^0$  représente le comportement mécanique macroscopique tandis que le terme  $\mathbf{u}^1$  nous renseigne sur le comportement microscopique au niveau des cellules de base.

#### Introduction des coefficients élastiques homogénéisés

Nous voulons maintenant définir des coefficients élastiques homogénéisés. On pourra ainsi décrire l'équilibre macroscopique au moyen d'un principe des travaux virtuels dans lequel nous n'aurons plus que des grandeurs macroscopiques. La mise en évidence de coefficients élastiques équivalents permettra de tenir compte du comportement microscopique sans utiliser explicitement le paramètre  $\varepsilon$  de la microstructure.

Pour cela, il convient d'abord de remarquer que l'équation (A.39) qui régit le premier terme  $\mathbf{u}^1$  du développement en série est linéaire en  $\mathbf{u}^0$ . Cette constatation suggère de rechercher les solutions  $\chi^{kl}$  correspondant à des déformations macroscopiques élémentaires (extensions pures et cisaillements purs), ce qui permettra de reconstituer n'importe quel champ de déformation par superposition.

On doit donc résoudre les problèmes associés sur la cellule de base :

$$\int_{\mathbb{Y}} E_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_m} \frac{\partial v_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} d\mathbf{Y} = \int_{\mathbb{Y}} E_{ijkl} \frac{\partial v_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} d\mathbf{Y} \quad \forall \mathbf{v} \in V_{\mathbb{Y}} \quad (\text{A.46})$$

La coordonnée  $\mathbf{x}$  joue le rôle d'un paramètre fixant la microstructure locale. Par ailleurs, l'existence des solutions à ces problèmes est assurée par le lemme 1.

Puisque des solutions ne sont connues qu'à une constante additive près, la solution  $\mathbf{u}^1$  s'écrit :

$$u_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\chi_i^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \tilde{u}_i^1(\mathbf{x}) \quad (\text{A.47})$$

où  $\tilde{u}_i^1(\mathbf{x})$  est une constante additive en  $\mathbf{y}$ .

En introduisant ce résultat dans l'équilibre macroscopique de la structure, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{|\mathbb{Y}|} \int_{\mathbb{Y}} (E_{ijkl} - E_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_m}) d\mathbf{Y} \right] \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} \frac{\partial v_i^0(\mathbf{x})}{\partial x_j} d\Omega \\ = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{|\mathbb{Y}|} \int_{\mathbb{Y}} f_i d\mathbf{Y} \right] v_i(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i(\mathbf{x}) d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V_{\Omega} \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

On définit *les propriétés élastiques effectives* au niveau macroscopique

$$E_{ijkl}^H(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbb{Y}|} \int_{\mathbb{Y}} E_{ijkl} - E_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_m} d\mathbf{Y} \quad (\text{A.49})$$

et *les forces de volumes effectives* :

$$b_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbb{Y}|} \int_{\mathbb{Y}} f_i d\mathbf{Y} \quad (\text{A.50})$$

De sorte que l'on peut écrire un principe des travaux virtuels au niveau macroscopique :

$$\int_{\Omega} E_{ijkl}^H(\mathbf{x}) \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} b_i(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V_{\Omega} \quad (\text{A.51})$$

L'appellation de coefficients élastiques homogénéisés pour le tenseur  $E_{ijkl}^H$  et de forces de volume homogénéisées pour les  $b_i(\mathbf{x})$  est justifiée par la remarque suivante :  $\mathbf{u}^\varepsilon$  converge faiblement vers  $\mathbf{u}^0$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 (Lene et Leguillon, 1981) et on peut considérer  $\mathbf{u}^0$  comme la limite des solutions

du problème lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

Comme nous l'avons démontré dans les développements précédents, les problèmes macroscopiques et microscopiques peuvent être découplés. On calcule des coefficients élastiques homogénéisés, en résolvant le problème associé sur la cellule de base, indépendamment du champ de déplacement macroscopique  $\mathbf{u}^0$ . Le problème macroscopique peut alors être étudié indépendamment en utilisant les grandeurs homogénéisées.

### A.3 Les coefficients homogénéisés

Pour obtenir les coefficients homogénéisés, il faut d'abord calculer les fonctions  $\chi^{kl}(\mathbf{y})$ . Le calcul est ensuite complété par l'intégration sur la cellule de base.

*Détermination des coefficients  $\chi^{kl}(\mathbf{y})$*

Ici, le but est d'exposer une formulation permettant de calculer les fonctions  $\chi^{kl}(\mathbf{y})$  par éléments finis. Pour cela, il faut d'abord établir un principe variationnel relatif aux équations (A.42). On pose donc la forme bilinéaire sur la cellule de base :

$$a_Y(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\mathbb{Y}} E_{ijkl}(\mathbf{y}) e_{ij}(\mathbf{u}) e_{kl}(\mathbf{v}) dY \quad (\text{A.52})$$

L'équation (A.46) donnant les  $\chi^{kl}(\mathbf{y})$  s'écrit alors :

$$a_Y(\chi^{pq}, \Phi) = \int_{\mathbb{Y}} E_{ijkl}(\mathbf{y}) e_{ij}(\chi^{pq}) e_{kl}(\Phi) dY \quad \forall \Phi \in V_Y \quad (\text{A.53})$$

La discrétisation de ce principe doit mener à une résolution pratique. Pour obtenir cette formulation, il faut écrire le terme de droite de l'équation (A.46) d'une autre façon en introduisant les déplacements  $\mathbf{P}^{ij}$ .

$$\mathbf{P}^{ij} = (P_1^{ij}, P_2^{ij}, P_3^{ij}) \quad \text{avec} \quad P_k^{ij} = y_j \delta_{ik} \quad k=1,2,3 \quad (\text{A.54})$$

Après avoir transformé le second membre en utilisant la forme bilinéaire, on peut écrire l'équation des problèmes de champs élémentaires sur la cellule de base :

$$a_Y(\chi^{pq}, \Phi) = a_Y(\mathbf{P}^{pq}, \Phi) \quad \forall \Phi \in V_Y \quad (\text{A.55})$$

Supposons que la cellule de base soit constituée de différentes phases homogènes et isotropes caractérisées par des coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ . Appelons  $\Gamma_j$  l'union de toutes les surfaces de discontinuité entre les différentes phases et  $\mathbf{v}$  la normale extérieure à la matrice sur cette interface. Notons encore par [ ] le saut des propriétés matérielles sur cette frontière.



La dernière expression peut encore être transformée en une intégrale de surface sur  $\Gamma_j$  et le saut des propriétés matérielles est équivalent à des charges de surface.

$$a_Y(\mathbf{P}^{pq}, \phi) = - \int_{\Gamma_j} [\lambda \phi_l] v_l \delta_{ij} + [\mu \phi_l] (v_j \delta_{li} + v_i \delta_{lj}) d\Gamma \quad (\text{A.56})$$

*Propriétés des coefficients homogénéisés*

Avec la connaissance des  $\chi^{kl}(\mathbf{y})$ , on obtient les coefficients homogénéisés  $E_{ijkl}^H$  par intégration. Cette approche montre que les  $E_{ijkl}^H$  sont les valeurs moyennes sur  $Y$  des  $E_{ijkl}$  altérées par un terme de correction dépendant de  $\chi^{kl}(\mathbf{y})$ .

D'une part, si on écrit les coefficients homogénéisés en fonction de la forme bilinéaire, on a :

$$E_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} a_Y(\mathbf{P}^{kl} - \chi^{kl}, \mathbf{P}^{ij}) \quad (\text{A.57})$$

D'autre part, comme  $\chi^{kl}(\mathbf{y})$  est un champ cinématiquement admissible  $Y$  périodique, l'équation des travaux virtuels sur la cellule de base  $Y$  donne :

$$a_Y(\chi^{ij}, \chi^{kl}) = a_Y(\mathbf{P}^{kl}, \chi^{ij}) \quad (\text{A.58})$$

et l'on obtient la forme :

$$E_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} a_Y(\mathbf{P}^{kl} - \chi^{kl}, \mathbf{P}^{ij} - \chi^{ij}) \quad (\text{A.59})$$

Cette nouvelle écriture des coefficients élastiques homogénéisés montre que les conditions de symétrie des modules élastiques locaux sont également vérifiées pour les coefficients élastiques homogénéisés.

## A.4 Quelques remarques

- Toutes les dérivations utilisées dans les développements précédents sont formelles. Elles présupposent que toutes les fonctions sont suffisamment douces en  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ .
- On voit aisément que les champs microscopiques  $\chi^{kl}$  sont symétriques par rapport aux indices  $k$  et  $l$ . Ceci signifie que l'on ne doit résoudre que six problèmes distincts en trois dimensions et trois problèmes pour le cas bidimensionnel.
- Quant au tenseur des coefficients élastiques homogénéisés, on peut remarquer qu'il vérifie le caractère symétrique :

$$E_{ijkl}^H = E_{jkl i}^H = E_{ijlk}^H = E_{klij}^H \quad (\text{A.60})$$

et coercitif du tenseur de Hooke homogénéisé :

$$\exists \alpha > 0 : E_{ijkl}^H e_{ij} e_{kl} \geq \alpha e_{ij} e_{ij} \quad \forall e_{ij} = e_{ji} \quad (\text{A.61})$$

• On peut montrer que sous les conditions de continuité de  $\mathbf{b}$  et de  $\mathbf{t}$ , le problème homogénéisé possède une solution unique.

• En définitive, le champ de contrainte  $\sigma_{ij}^e$  s'écrit :

$$\sigma_{ij}^e = E_{ijkl}^e \epsilon_{kl}(u^e) \quad (\text{A.62})$$

Si on substitue dans le développement en série, on obtient :

$$\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij}^1 + \epsilon \sigma_{ij}^2 + \dots \quad (\text{A.63})$$

avec

$$\sigma_{ij}^1 = E_{ijkl}^e(x, y) (\epsilon_{kl}(u^0) + e_{kl}(u^1)) \quad (\text{A.64})$$

$$\sigma_{ij}^2 = E_{ijkl}^e(x, y) (\epsilon_{kl}(u^1) + e_{kl}(u^2)) \quad (\text{A.65})$$

## A.5 Cas de la masse volumique locale et des forces de volume

### *Masse volumique locale*

Il est évident que la masse volumique locale macroscopique s'obtient par un simple calcul de moyenne sur la cellule de base. On admet, sans autre forme de démonstration, la formule suivante :

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \rho^e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dY \quad (\text{A.66})$$

### *Forces de volume proportionnelles à la masse volumique locale*

Examinons le cas des forces de volume dont l'intensité est proportionnelle à la masse volumique locale. Supposons, de plus, que la force puisse s'écrire sous la forme :

$$f_i^e = \rho^e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) F_i(\mathbf{x}) \quad (\text{A.67})$$

dans laquelle l'intensité  $F_i$  est indépendante de la microstructure. On songe, bien évidemment, aux forces de poids  $F_z = -\mathbf{g}$  ou aux forces d'inertie  $F_i = \ddot{u}_i(\mathbf{x})$ .

Dans ce cas, la relation (A.50) s'écrit :

$$\begin{aligned} b_i(x) &= \frac{1}{|Y|} \int_{\forall} f_i^e(x,y) dY \\ &= \frac{1}{|Y|} \int_{\forall} \rho^e(x,y) F_i(x) dY \\ &= \rho(x) F_i(x) \end{aligned} \tag{A.68}$$

## Annexe B : METHODES DE QUASI-NEWTON POUR MATRICES DIAGONALES

L'idée fondamentale des méthodes de type Quasi-Newton est de générer une séquence de matrices symétriques définies positives et de disposer, à chaque itération, d'une approximation de la matrice Hessienne réelle ou de son inverse. L'objet de cet exposé est de particulariser cette classe de méthodes au cas de figure dans lequel on désire également préserver une matrice diagonale à chaque itération.

### B.1 Méthodes de Newton et Quasi-Newton : rappel

Rappelons brièvement la procédure des méthodes de type Quasi-Newton. On envisage un problème de minimisation sans contrainte d'une fonction deux fois continûment dérivable :

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n} f(\mathbf{x}) \quad (\text{B.1})$$

#### B.1.1 Méthode de Newton

La méthode de Newton consiste à remplacer, au voisinage du point courant  $\mathbf{x}^k$ , la fonction par son approximation quadratique.

$$q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^k) + \nabla f^T(\mathbf{x}^k) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k)^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^k) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \quad (\text{B.2})$$

On prend alors comme nouveau candidat optimum le point  $\mathbf{x}^{k+1}$  minimum de  $q(\mathbf{x})$  lorsqu'il existe. Ceci ne peut être le cas que si la matrice Hessienne  $\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)$  est définie positive. Dans ce cas, la fonction  $q(\mathbf{x})$  est strictement convexe et a un minimum unique  $\mathbf{x}^{k+1}$  défini par la condition  $\nabla q(\mathbf{x}^{k+1}) = \mathbf{0}$ . Soit en explicitant cette condition :

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - [\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)]^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (\text{B.3})$$

Cette dernière formule suggère une résolution itérative du problème original. Si le problème original est quadratique, la convergence survient en une seule itération. Pour une fonction quelconque, la méthode de Newton est une méthode itérative avec un ordre de convergence quadratique dans le voisinage de l'optimum. La méthode de Newton possède néanmoins plusieurs inconvénients, dus essentiellement au fait qu'elle ne possède pas la propriété de convergence globale.

Pour remédier à ces difficultés, une première modification consiste à introduire une recherche linéaire le long de la direction de recherche :

$$\mathbf{d}^k = - [\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)]^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (\text{B.4})$$

On détermine le pas  $\alpha^k$  afin de minimiser  $\mathbf{g}(\alpha) = f(\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{d}^k)$  ou, tout au moins, de trouver un nouveau point tel que  $f(\mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{d}^k) < f(\mathbf{x}^k)$ .

Une deuxième difficulté peut apparaître lorsque le Hessien regroupant les dérivées secondes  $\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)$  n'est pas défini positif. Dans ce cas, la direction de déplacement  $\mathbf{d}^k$  n'est pas une direction de descente, et la convergence globale n'est pas assurée.

La méthode de Newton possède, en outre le handicap d'exiger le calcul de la matrice des dérivées secondes. Ce calcul peut être onéreux ou délicat, voire difficile à effectuer.

### B.1.2 Méthodes de Quasi-Newton

Avec les méthodes Quasi-Newton, on veut généraliser la formule itérative de Newton.

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \alpha^k [\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)]^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (\text{B.5})$$

Le principe des méthodes de résolution de type Quasi-Newton est de générer une séquence de matrices symétriques définies positives qui soient des approximations, toujours améliorées, de la matrice Hessienne réelle ou de son inverse. Désignons par  $\mathbf{H}^k$  la suite d'approximations de l'inverse de la matrice Hessienne  $[\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)]^{-1}$  et par  $\mathbf{B}^k$  la suite des estimations de la matrice Hessienne  $\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)$ . On recherche une méthode telle que, dans le cas d'un problème quadratique, la matrice  $\mathbf{B}^k$  converge vers la valeur exacte des dérivées secondes (constantes dans ce cas), de sorte qu'en fin de convergence, on retrouve une convergence de type Newton. Si l'on applique la méthode à une fonction quelconque,  $\mathbf{B}^k$  peut être considéré, à chaque instant, comme une approximation (définie positive) du Hessien.

Dans la suite de l'exposé, on prend l'option de travailler sur la séquence des estimations  $\mathbf{B}^k$  de la matrice Hessienne elle-même. Au point  $\mathbf{x}^k \in \mathbf{R}^n$ , si  $\mathbf{B}^k$  est l'approximation définie positive (éventuellement creuse ou diagonale) de la matrice Hessienne et si  $\mathbf{g}^k = \nabla f(\mathbf{x}^k)$  désigne le gradient au point courant à l'itération  $k$ , l'algorithme génère une direction de descente  $\mathbf{d}^k$  en résolvant le système linéaire :

$$\mathbf{B}^k \mathbf{d}^k = -\mathbf{g}^k \quad (\text{B.6})$$

Une fois la direction de descente  $\mathbf{d}^k$  obtenue, le nouveau point d'itération  $k+1$  est trouvé en pratiquant une recherche linéaire le long de cette direction.

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{d}^k \quad (\text{B.7})$$

Le pas de progression  $\alpha^k$  est choisi afin de diminuer (minimiser) la valeur  $f(\mathbf{x}^{k+1}) < f(\mathbf{x}^k)$ .

Si le nouveau point  $\mathbf{x}^{k+1}$  ne satisfait pas au critère de convergence, une nouvelle approximation  $\mathbf{B}^k$  est définie par une formule de remise à jour du type :

$$\mathbf{B}^{k+1} = \eta^k \mathbf{B}^k + \mathbf{U}^k \quad (\text{B.8})$$

Dans cette expression  $\eta^k$  est un scalaire réel et  $\mathbf{U}^k$  une matrice choisie de telle sorte que  $\mathbf{B}^{k+1}$  soit symétrique et définie positive. Remarquons immédiatement que si la correction  $\mathbf{U}^k$  est symétrique, une estimation initiale  $\mathbf{B}^0$  symétrique engendre une séquence  $\mathbf{B}^k$  symétrique.

Il existe beaucoup de variantes possibles pour le choix de la formule de mise à jour de la matrice  $\mathbf{B}^k$ . On impose généralement la satisfaction de la condition de Quasi-Newton. Elle s'obtient en développant le gradient en série autour du point  $\mathbf{x}^{k+1}$ .

$$\nabla f(\mathbf{x}^k) - \nabla f(\mathbf{x}^{k+1}) = \mathbf{B}^{k+1}(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}) \quad (\text{B.9})$$

Si l'on pose

$$\mathbf{s}^k = \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k \quad \text{et} \quad \mathbf{y}^k = \mathbf{g}^{k+1} - \mathbf{g}^k \quad (\text{B.10})$$

la relation (B.9) s'écrit :

$$\mathbf{B}^{k+1} \mathbf{s}^k = \mathbf{y}^k \quad (\text{B.11})$$

La formule de correction qui permet d'obtenir  $\mathbf{B}^{k+1}$  à partir de  $\mathbf{B}^k$  utilise les informations nouvelles obtenues lors de l'itération  $k+1$ , c'est-à-dire les valeurs du gradient en ce point. Différentes méthodes permettent d'effectuer une remise à jour de type Quasi-Newton. Parmi toutes celles-ci, les formules les plus connues sont :

- la remise à jour de Davidon-Fletcher-Powell (DFP) :

$$\eta^k = 1$$

$$\mathbf{U}^k = \frac{(\mathbf{y}^k - \mathbf{B}^k \mathbf{s}^k) \mathbf{y}^{kT}}{\mathbf{s}^k \cdot \mathbf{y}^k} - \frac{(\mathbf{y}^k - \mathbf{B}^k \mathbf{s}^k) \cdot \mathbf{s}^k}{(\mathbf{s}^k \cdot \mathbf{y}^k)^2} \mathbf{y}^k \mathbf{y}^{kT} \quad (\text{B.12})$$

- la remise à jour de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) :

$$\eta^k = 1$$

$$\mathbf{U}^k = \frac{\mathbf{y}^k \mathbf{y}^{kT}}{\mathbf{s}^k \cdot \mathbf{y}^k} - \frac{\mathbf{B}^k \mathbf{s}^k \mathbf{s}^{kT} \mathbf{B}^k}{\mathbf{s}^k \cdot \mathbf{B}^k \mathbf{s}^k} \quad (\text{B.13})$$

- la remise à jour BFGS modifiée par Powell :

la modification suggérée par Powell a pour but de favoriser la génération de remises à jour définies positives et d'éviter les problèmes de singularité du Hessienne. Les modifications de Powell sont basées sur l'intuition, mais leur validation provient de l'expérience qui a montré que cette formule fonctionne bien dans de nombreuses applications. Ses bonnes propriétés lui ont notamment permis

d'être fortement appréciée en optimisation des structures. L'énoncé des termes de la remise à jour requiert la définition préalable de scalaires et de vecteurs intermédiaires.

On définit le vecteur :

$$z^k = \mathbf{B}^k s^k \quad (\text{B.14})$$

les scalaires :

$$\xi_1 = (s^k \cdot y^k) \quad \text{et} \quad \xi_2 = (s^k \cdot z^k) \quad (\text{B.15})$$

le paramètre :

$$\theta = 1 \quad \text{si} \quad \xi_1 \geq 1 \quad \text{sinon} \quad \theta = \frac{0.8 \xi_2}{\xi_2 - \xi_1} \quad (\text{B.16})$$

On calcule alors le vecteur :

$$w^k = \theta y^k + (1-\theta)z^k \quad (\text{B.17})$$

et le scalaire :

$$\xi_3 = (s^k \cdot w^k) = \theta \xi_1 + (1-\theta) \xi_2 \quad (\text{B.18})$$

au moyen desquels on peut écrire la formule de remise à jour de BFGS modifiée par Powell :

$$\eta^k = 1$$

$$\mathbf{U}^k = \frac{w^k w^{kT}}{\xi_3} - \frac{z^k z^{kT}}{\xi_2} \quad (\text{B.19})$$

### ***B.1.3 Position du problème : génération d'une séquence d'approximations creuses ou diagonales***

Si les méthodes de Quasi-Newton sont applicables avec succès aux problèmes de taille modérée, il n'en va pas de même pour les problèmes de grande taille, puisque ceux-ci exigent, entre autres, la manipulation et la mémorisation de matrices de dimension  $n \times n$  symétriques à chaque itération. De plus, les formules d'actualisation n'exploitent absolument pas les caractéristiques liées à la nature du problème. Ainsi, même si de nombreux problèmes de grande taille se caractérisent par une matrice Hessienne creuse, quasi diagonale ou à diagonale dominante, les formules de remise à jour classiques perdent ces propriétés intéressantes. Comme les remises à jour énoncées ci-dessus engendrent des approximations pleines sans tenir compte de la structure réelle du Hessien, il est intéressant de rechercher des formules capables de préserver cette structure creuse. Cette tâche doit reposer sur des fondements mathématiques rigoureux. Grâce aux travaux de Toint (1977) et Thapa (1981), on dispose maintenant d'une théorie permettant de démontrer l'existence et la convergence des approximations de type Quasi-Newton préservant la structure creuse de la matrice Hessienne réelle. Nous avons adapté aux matrices diagonales la théorie générale établie pour des matrices creuses. La suite de l'exposé présente la démarche suivie par Haubruge et Nguyen (1994).

## B.2 Méthodes de Quasi-Newton préservant la structure diagonale des matrices

Dans la suite de l'exposé, on prend la convention de simplifier les notations. On omet l'indice d'itération  $k$  et on remplace l'indice d'itération  $k+1$  par  $+$ . On cherche à enrichir la matrice  $\mathbf{B}$ , approximation du Hessien en vue de trouver une matrice  $\mathbf{B}^+$  qui soit à la fois définie positive, symétrique et qui satisfasse à l'équation de Quasi-Newton :

$$\mathbf{B}^+ s = y \quad (\text{B.20})$$

avec  $s = x^+ - x$  et  $y = \mathbf{g}^+ - \mathbf{g}$ .

Malheureusement, on sait que ces schémas classiques de remise à jour ne conservent pas la structure diagonale ou creuse de la matrice hessienne originale. On sait aussi qu'il n'est pas automatique de construire une approximation qui satisfasse en même temps aux contraintes de positivité, de symétrie et à la condition de Quasi-Newton. Une manière de procéder pour obtenir une remise à jour de type Quasi-Newton qui répond à toutes ces contraintes est de recourir à une minimisation de norme.

### B.2.1 Version modifiée des formules de remise à jour de Davidon-Fletcher-Powell

Toint (1977) a montré qu'il est possible d'obtenir une version modifiée des formules de remise à jour de Davidon-Fletcher-Powell pour matrices creuses qui satisfassent à l'équation de Quasi-Newton ainsi qu'aux conditions de symétrie et de positivité. Celle-ci se définit en trouvant une matrice de correction  $\mathbf{E}$  de telle sorte que la matrice remise à jour  $\mathbf{B}^+ = \mathbf{B} + \mathbf{E}$  soit la plus proche possible de la matrice originale  $\mathbf{B}$  au sens de la norme de Frobenius, tout en possédant la même structure (creuse ou diagonale).

Pour une matrice diagonale, le problème s'énonce mathématiquement comme suit :

$$\begin{aligned} & \min \|\mathbf{E}\|_F \\ & \text{avec } \mathbf{E} s = y - \mathbf{B} s \\ & \quad E_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Toint a montré que la solution unique  $\mathbf{E}$  du problème (B.21) est donnée par :

$$E_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 2 \lambda_i s_i & (i = j) \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

où le vecteur  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  est la solution du système linéaire diagonal :

$$\mathbf{Q} \boldsymbol{\lambda} = y - \mathbf{B} s \quad (\text{B.23})$$

dans lequel la matrice  $\mathbf{Q}$  est définie par :

$$Q_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 2 s_i^2 & (i = j) \end{cases} \quad (\text{B.24})$$



### B.2.2 Généralisation de la remise à jour diagonale à d'autres procédures de type Quasi-Newton

Les résultats de Toint peuvent être étendus à d'autres schémas de remise à jour symétriques. L'extraction de tels procédés de remise à jour, préservant la structure creuse de la matrice repose sur une série de théorèmes énoncés par Thapa (1981). La théorie des matrices diagonales n'est qu'une adaptation de la théorie générale pour matrices creuses de Thapa.

On utilise les notations suivantes afin de distinguer la partie diagonale et la partie non diagonale de la remise à jour :

$$\hat{\mathbf{B}}_D^+ = \begin{cases} \hat{\mathbf{B}}_{ii}^+ & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{B}}_{ND}^+ = \begin{cases} 0 & (i=j) \\ \hat{\mathbf{B}}_{ij}^+ & (i \neq j) \end{cases} \quad (\text{B.25})$$

Soit  $\hat{\mathbf{B}}^+ = \eta \mathbf{B} + \mathbf{U}$  où  $\mathbf{U}$ , est une matrice de remise à jour symétrique mais généralement non diagonale et où  $\eta$  est un nombre réel. On suppose de plus que cette approximation  $\hat{\mathbf{B}}^+$  satisfait à l'équation de Quasi-Newton :

$$\hat{\mathbf{B}}^+ s = y \quad (\text{B.26})$$

Dès lors, la matrice  $\mathbf{B}^+$  la plus proche de  $\hat{\mathbf{B}}_D^+$  dans la norme de Frobenius et satisfaisant à la condition de Quasi-Newton, est de la forme :

$$\mathbf{B}^+ = \hat{\mathbf{B}}_D^+ + \mathbf{E} \quad (\text{B.27})$$

La matrice de correction  $\mathbf{E}$  est la solution du problème de minimisation de norme :

$$\begin{aligned} \min \|\mathbf{E}\|_F \\ \text{avec } \mathbf{E} s = \hat{\mathbf{B}}_{ND}^+ s \\ E_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

La solution de ce problème est donnée par :

$$E_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 2 \lambda_i s_i & (i = j) \end{cases} \quad (\text{B.29})$$

où le vecteur  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  est lui-même la solution du système linéaire :

$$\mathbf{Q} \boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{B}}_{ND}^+ s \quad (\text{B.30})$$

dans lequel la matrice  $\mathbf{Q}$  est une matrice diagonale définie par :

$$Q_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 2 s_i^2 & (i = j) \end{cases} \quad (\text{B.31})$$

Il résulte du théorème précédent que la version de la méthode de Quasi-Newton pour matrices diagonales requiert la solution du système linéaire  $\mathbf{Q}\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{B}}_{ND}^+ \mathbf{s}$ . Toutefois, il est possible de montrer qu'il n'est pas nécessaire de calculer les éléments non diagonaux de la matrice de mise à jour  $\mathbf{U}_{ND}$ . En effet, par simple manipulation algébrique, on montre facilement à partir de l'équation de Quasi-Newton (B.26) et des contraintes du problème (B.28), la propriété suivante :

$$\hat{\mathbf{B}}_{ND}^+ \mathbf{s} = \mathbf{y} - \eta \mathbf{B} \mathbf{s} - \mathbf{U}_D \mathbf{s} \quad (\text{B.32})$$

On en conclut que seuls les termes diagonaux de  $\mathbf{U}_D$  doivent être calculés pour obtenir l'analogue de la mise à jour de type BFGS pour des matrices diagonales. On n'évalue donc que les termes :

$$U_{ii} = \frac{y_i^2}{\mathbf{s}^T \mathbf{y}} - \frac{(\mathbf{B}_{ii} s_i)^2}{\mathbf{s}^T \mathbf{B} \mathbf{s}} \quad (\text{B.33})$$

### B.2.3 Caractère défini positif des approximations de la matrice Hessienne $\mathbf{B}$

La méthode de Quasi-Newton pour matrices diagonales requiert la résolution de deux systèmes linéaires. La mise à jour de l'approximation de la Hessienne nécessite d'abord la résolution du système  $\mathbf{Q}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{b}$ . Ensuite, la recherche de la direction de descente demande encore la solution du système  $\mathbf{B}\mathbf{d} = -\mathbf{g}$ . Malheureusement, le problème vient du fait que les matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{Q}$  ne sont pas nécessairement définies positives.

Considérons d'abord le système  $\mathbf{Q}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{b}$ . En examinant l'expression (B.31) de la matrice  $\mathbf{Q}$ , il est facile de voir que la matrice  $\mathbf{Q}$  est symétrique et définie positive si, et seulement si, chaque composante du vecteur  $\mathbf{s}$  est différente de zéro :  $s_i \neq 0 \forall i$ . S'il existe au moins un  $s_i = 0$ , la matrice  $\mathbf{Q}$  est singulière et le système peut ne pas admettre de solution. Dans ce cas de figure, Toint a proposé d'annuler les  $\lambda_i$  et  $\mathbf{b}_i$  correspondant aux  $s_i$  nuls et de résoudre le système réduit obtenu en ignorant la ligne et la colonne correspondante. Toutefois, pour des matrices diagonales, on perd la garantie que la nouvelle approximation diagonale satisfasse à la condition de Quasi-Newton.

La résolution du second système linéaire  $\mathbf{B}\mathbf{d} = -\mathbf{g}$  détermine la direction de progression. Si la matrice  $\mathbf{B}$  n'est pas définie positive, il n'est plus garanti que  $\mathbf{d}$  soit une direction de descente.

Plusieurs techniques sont discutées par Thapa (1981) lorsque l'estimation du Hessien n'est pas définie positive. Thapa (1981) a notamment proposé, soit d'utiliser une version creuse de l'algorithme de factorisation de Cholesky soit de recourir à une procédure de Levenberg-Marquardt. On remplace  $\mathbf{B}$  par  $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B} + \mathbf{P}$ , où  $\mathbf{P}$  est une matrice diagonale dont les éléments sont tous positifs ou par  $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B} + \lambda \mathbf{I}$ , où  $\lambda$  est le module de la valeur propre la plus négative. On résout ensuite le système modifié  $\bar{\mathbf{B}}\mathbf{d} = -\mathbf{g}$ .

Un moyen d'obtenir des estimations définies positives de la Hessienne consiste à remplacer  $\mathbf{B}$  par  $\bar{\mathbf{B}}$  qui est également diagonale symétrique et définie positive mais qui ne satisfait peut être pas à la condition de Quasi-Newton. On espère ainsi que la nouvelle approximation  $\bar{\mathbf{B}}^+$  obtenue à partir de  $\bar{\mathbf{B}}$  soit meilleure que  $\mathbf{B}^+$  obtenue à partir de  $\mathbf{B}$ . Hélas, Thapa (1981) a constaté que dans ces cas

difficiles, la remise à jour converge plus lentement.

#### B.2.4 Algorithme de la méthode de Quasi-Newton pour matrice diagonale correspondant à la remise à jour de type BFGS

- 1° Soit  $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{R}^n$  et  $\mathbf{B}^0$  une matrice diagonale de dimension  $n$  définie positive.  
Calculer  $\mathbf{g}^0$ .
- 2° Si  $\mathbf{B}^k$  n'est pas définie positive, employer une procédure de Levenberg-Marquardt pour obtenir une matrice définie positive  $\bar{\mathbf{B}}^k = \mathbf{B}^k + \lambda \mathbf{I}$ .
- 3° Remplacer  $\mathbf{B}^k$  par son substitut défini positif  $\mathbf{B}^k := \bar{\mathbf{B}}^k$ .
- 4° Calculer la direction de descente  $\mathbf{d}^k$  en résolvant le système  $\mathbf{B}^k \mathbf{d}^k = -\mathbf{g}^k$ .
- 5° Effectuer une recherche linéaire selon la direction  $\mathbf{d}^k$ , c'est-à-dire calculer un pas de progression positif  $\alpha^k$  le long de  $\mathbf{d}^k$  de sorte que  $f(\mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{d}^k) > f(\mathbf{x}^k)$ .
- 6°  $\mathbf{x}^{k+1} := \mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{d}^k$ .
- 7° Calculer  $\mathbf{g}^{k+1}$ .
- 8° Calculer  $\mathbf{s}^k = \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k$  et  $\mathbf{y}^k = \mathbf{g}^{k+1} - \mathbf{g}^k$ .
- 9° Si  $\mathbf{x}^{k+1}$  ne satisfait pas au critère de convergence, calculer une nouvelle approximation de matrice hessienne comme suit :
  - calculer les éléments diagonaux de la remise à jour de type BFGS soit  $\mathbf{U}_D^k$  :
 
$$U_{\bar{ii}}^k = \frac{y_i^k}{\mathbf{s}^k \cdot \mathbf{y}^k} - \frac{(\mathbf{B}_{\bar{ii}}^k s_i^k)^2}{\mathbf{s}^k \cdot \mathbf{B}^k \mathbf{s}^k}$$
  - calculer les éléments de la matrice diagonale  $\mathbf{Q}$  :  $Q_{\bar{ii}} = 2s_i^2$
  - pour obtenir le vecteur  $\lambda$  résoudre le système:  $\mathbf{Q}\lambda = \mathbf{y}^k - \mathbf{B}^k \mathbf{s}^k - \mathbf{U}_D^k \mathbf{s}^k$
  - si  $\mathbf{Q}$  n'est pas défini positif, parce qu'au moins un des  $s_i = 0$ , alors on impose  $\lambda_i = 0$  et  $(\mathbf{y}^k - \mathbf{B}^k \mathbf{s}^k - \mathbf{U}_D^k \mathbf{s}^k)_i = 0$ , ensuite résoudre le système réduit correspondant.
  - calculer les éléments de la matrice de correction diagonale  $\mathbf{E}^k$  :  $E_{\bar{ii}}^k = 2\lambda_i s_i^k$ .
  - calculer la nouvelle approximation diagonale du Hessien  $\mathbf{B}^{k+1} = \eta^k \mathbf{B}^k + \mathbf{U}_D^k + \mathbf{E}^k$
- 10° Retour en 2°