MANUEL

DU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES.

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

On trouve à la même librairie :

Manuel du Baccalauréat ès Sciences, rédigé d'après les programmes officiels des lycées et des examens du Baccalauréat, par *MM. J. Langlebert*, professeur de sciences physiques et naturelles à Paris, et *E. Catalan*, agrégé de l'Université de France, professeur à l'Université de Liége ; 8 vol. in-12, *avec gravures dans le texte et planches gravées.*

Chaque volume se vend séparément pour chaque degré de Baccalauréat et pour chaque classe des lycées.

Première Partie, Manuel d'Arithmétique et d'Algèbre, rédigé d'après les programmes officiels, par *M. E. Catalan :* 6e édition ; 1 vol. in-12.

Deuxième Partie, Manuel de Géométrie, suivi de Notions sur quelques courbes, rédigé d'après les programmes officiels, par *M. E. Catalan :* 6e édition ; 1 vol. in-12, *avec gravures dans le texte.*

Troisième Partie, Manuel de Trigonométrie rectiligne et de Géométrie descriptive, rédigé d'après les programmes officiels, par *M. E. Catalan :* 6e édition ; 1 vol. in-12, *avec gravures dans le texte et planches gravées.*

Quatrième Partie, Manuel de Cosmographie, rédigé d'après les programmes officiels, par *M. E. Catalan :* 6e édition ; 1 vol. in-12, *avec gravures dans le texte et planches gravées.*

Cinquième Partie, Manuel de Mécanique, rédigé d'après les programmes officiels, par *M. E. Catalan :* 7e édition ; 1 vol. in-12, *avec gravures dans le texte et planches gravées.*

Sixième Partie, Manuel de Physique, rédigé d'après les programmes officiels, par *M. J. Langlebert :* 13e édition ; 1 fort vol. in-12, *avec gravures dans le texte.*

Septième Partie, Manuel de Chimie, rédigé d'après les programmes officiels, par *M. J. Langlebert :* 14e édition ; 1 fort vol. in-12, *avec gravures dans le texte.*

Huitième Partie, Manuel d'Histoire Naturelle, rédigé d'après les programmes officiels, par *M. J. Langlebert :* 14e édition ; 1 fort vol. in-12, *avec gravures dans le texte.*

Pour la Partie littéraire, consulter le *Manuel du Baccalauréat ès Lettres, par MM. E. Lefranc et G. Jeannin.*

MANUEL
DE TRIGONOMÉTRIE
ET DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

**Rédigé d'après les nouveaux Programmes officiels
de l'Enseignement des lycées impériaux
prescrits pour les examens du Baccalauréat ès sciences**

Par E. CATALAN

AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCE, DOCTEUR ÈS SCIENCES
PROFESSEUR D'ANALYSE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

SIXIÈME ÉDITION
Ornée de gravures dans le texte
et de planches gravées.

PARIS.
IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE CLASSIQUES
De JULES DELALAIN et FILS
RUE DES ÉCOLES, VIS-A-VIS DE LA SORBONNE.

M DCCC LXVI.

Aux termes d'un décret impérial en date du 27 novembre 1864, l'examen du baccalauréat ès sciences complet porte sur les matières enseignées dans la classe de mathématiques élémentaires des lycées (deuxième année); celui du baccalauréat ès lettres, sur les matières enseignées dans les classes de rhétorique et de philosophie des lycées. L'examen du baccalauréat ès sciences restreint pour la partie mathématique continue, jusqu'à nouvel ordre, d'être exigé et subi dans les conditions existantes et avec les programmes actuellement en vigueur.

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

PROGRAMMES D'ENSEIGNEMENT DES LYCÉES.

(Les chiffres renvoient aux paragraphes où la question est traitée.)

CLASSE DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

(Deuxième Année.)

N° 16.

Lignes trigonométriques, 7. — Relations entre les lignes trigonométriques d'un même angle, 14-16. — Expression du sinus et du cosinus en fonction de la tangente, 17.

Formules relatives aux sinus, cosinus et tangentes de la somme et de la différence de deux arcs, 18-20.

Expressions de $\sin 2a$, $\cos 2a$ et $\tang 2a$, 21. — Connaissant $\cos a$ ou $\sin a$, calculer $\sin \frac{1}{2} a$ et $\cos \frac{1}{2} a$, 22, 23.

Rendre calculable par logarithmes la somme de deux lignes trigonométriques, sinus, cosinus et tangente, 24, 25.

Notions sur la construction des tables trigonométriques, 26-34. — Usage des tables, 35-39.

Relation entre les angles et les côtés d'un triangle rectangle ou d'un triangle quelconque, 41-45.

Résolution des triangles rectangles, 46, 47.

Résolution des triangles quelconques dans les quatre cas qui peuvent se présenter, 48-54. — Déterminer l'aire du triangle en fonction des données, 55-58.

Application de la trigonométrie à diverses questions que présente le levé des plans : Distance à un point inaccessible, 60. — Mesure des hauteurs, 68. — Trois points, A, B, C, étant donnés sur un plan, déterminer un quatrième point d'où les distances AB et BC ont été vues sous des angles qu'on a mesurés, 71.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

PROGRAMMES D'ENSEIGNEMENT DES LYCÉES.

(Les chiffres renvoient aux paragraphes où la question est traitée.

CLASSE DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

(Deuxième Année.)

N° 17.

Insuffisance du dessin ordinaire pour la représentation des corps, 1. — Utilité d'une méthode géométrique qui, par des opérations graphiques exécutées sur un seul et même plan, fasse connaître exactement la forme et la position d'une figure à trois dimensions, 1.

Projection d'un point, d'une droite, d'une ligne quelconque sur un plan, 2-6. — Plan de projection, 2.

Traces d'une droite, 15. — Vraie longueur de la droite qui joint deux points donnés par leurs projections, 40.

Angles d'une droite avec les plans de projection, 22-26.

Représentation d'un plan par ses traces, 13. — Angles d'un plan avec les plans de projection, 14.

Méthode des rabattements, 18. — Exercices, 27-47.

Intersection de deux plans, 33. — Intersection d'une droite et d'un plan, 34.

Distance d'un point à un plan, 41. — Distance d'un point à une droite, 42.

Angle de deux droites, 43. — Angle d'une droite et d'un plan, 46. — Angle de deux plans, 47.

Projections d'un prisme, d'une pyramide, d'un cylindre, d'un cône à base circulaire, exécutées sur des objets réels, 48-54.

Sections planes des polyèdres, 55, 56.

Notions sur la méthode des plans cotés, 57-72.

TABLE DES MATIÈRES.

Les chiffres renvoient aux pages.

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

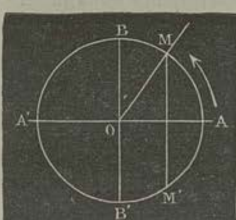
TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

CHAPITRE I.

Lignes trigonométriques (7). — Relations entre les lignes trigonométriques d'un même arc (10-13). — Expressions du sinus et du cosinus en fonction de la tangente (13).

Préliminaires.

1. Avant de définir les *lignes trigonométriques,* ou plutôt les *fonctions circulaires,* nous indiquerons comment on a été conduit à considérer des *arcs* et des *angles de toute grandeur, positifs et négatifs.* Nous compléterons en même temps les notions sur la *mesure des angles par les arcs correspondants,* données dans la *Géométrie.*



Considérons, sur une circonférence dont le rayon est pris pour unité *, un point fixe ou *origine* A ; et supposons qu'un mobile M, parti de ce point, se dirige dans le sens indiqué par la flèche. A chaque instant, l'arc parcouru est représenté par le rapport x entre cet arc et le rayon. Ainsi, suivant que le mobile sera parvenu en B, en A′, en B′, etc., nous aurons

$$x=\frac{\pi}{2},\quad x=\pi,\quad x=\frac{3}{2}\pi,\ldots$$

Et comme rien ne nous empêche de supposer que le mobile, après être revenu au point de départ, décrive de nouveau la circonférence, nous pourrons attribuer à x des valeurs quelconques, aussi grandes que nous le voudrons.

2. Si le *point décrivant* M, au lieu de se mouvoir comme nous l'avons supposé, se meut de A vers B′, cette *opposition*

* Cette hypothèse est faite une fois pour toutes.

de sens sera annoncée par une *opposition de signes* (*Algèbre*, 90). Ainsi, en appelant a la longueur de l'arc AM, nous indiquerons commodément que le mobile a décrit cet arc ou l'arc symétrique AM′, par les deux formules

$$x = +a, \quad x = -a.$$

3. On voit, comme nous l'avons dit, qu'au lieu d'attribuer aux arcs des valeurs moindres que la circonférence, il est utile de les faire varier d'une manière quelconque, entre $-\infty$ et $+\infty$.

4. Pendant que le point mobile M décrit l'arc AM, le rayon OM, indéfiniment prolongé, tourne autour du centre, et engendre l'angle MOA. D'après ce mode de génération, l'angle n'est plus assujetti, comme on le suppose ordinairement, à être moindre que 2 *droits*, et l'on *peut concevoir qu'il recouvre plusieurs fois le plan*. En même temps, *si l'on prend pour unité l'angle correspondant à l'arc dont la longueur est égale à celle du rayon*, la mesure d'un angle quelconque sera la même que la mesure de l'arc compris entre ses côtés. Autrement dit : *tout angle a pour mesure l'arc qui lui correspond dans la circonférence dont le rayon est* 1.

C'est de cette manière que les angles entrent dans les calculs. Il est à peine nécessaire d'ajouter que, les angles étant toujours représentés par les longueurs des arcs correspondants, il y aura des angles négatifs.

5. Nous venons de dire que l'on a pris pour unité l'angle correspondant à l'arc dont la longueur est égale à celle du rayon. Il est facile d'exprimer cet angle en *degrés, minutes et secondes*. En effet, la circonférence de rayon 1 a pour longueur

$$2\pi = 2 \,.\, 3{,}141\,59\ldots,$$

et elle se divise en 360°. Si donc n représente *le nombre de degrés* de l'arc égal au rayon, nous aurons

$$\frac{n}{360} = \frac{1}{2\pi},$$

ou

$$n = 180 \,.\, \frac{1}{\pi} = 180 \,.\, 0{,}318\,309\,8\ldots$$

En effectuant, on trouve

$$n = 57,29578\ldots;$$

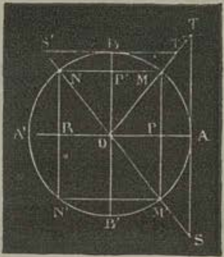
donc

$$\textit{arc égal au rayon} = 57^\circ\, 17'\, 24'',8\ldots.$$

6. *Arcs complémentaires. Arcs supplémentaires.* — Deux arcs sont dits complémentaires quand leur *somme algébrique* est égale au *quadrans*, c'est-à-dire quand elle est représentée par $\frac{\pi}{2}$. Ils sont *supplémentaires* si leur somme algébrique est représentée par π.

Des lignes trigonométriques.

7. On appelle *lignes trigonométriques*, ou *fonctions circulaires*, les quantités que nous allons énumérer :



1° *Le* sinus *d'un arc* AM *est la quantité, positive ou négative**, *qui représente la perpendiculaire* MP *abaissée de l'extrémité* M *de l'arc sur le rayon passant par l'origine* A ;

2° *La* tangente *trigonométrique d'un arc* AM *est la quantité, positive ou négative, qui représente le segment* AT *de la tangente menée par l'origine et terminée au rayon passant par l'extrémité de l'arc ;*

3° *La* sécante *d'un arc est la quantité, positive ou négative, qui représente la distance* OT *comprise entre le centre et l'extrémité de la tangente ;*

4° *Le* cosinus *d'un arc* AM *est le sinus du complément* BM *de cet arc ;*

5° *La* cotangente *d'un arc est la tangente du complément de cet arc ;*

6° *La* cosécante *d'un arc est la sécante du complément de cet arc.*

Pour abréger, on représente ces fonctions par *sin, tg, séc, cos, cot, coséc.*

* On va voir que les fonctions circulaires sont positives ou négatives, suivant la valeur de l'arc.

8. *Signes des fonctions circulaires.* — Nous verrons bientôt que l'on peut toujours exprimer les lignes trigonométriques d'un arc quelconque, au moyen de celles d'un arc *positif, moindre qu'un quadrans :* c'est ce què l'on appelle *ramener un arc au premier quadrans.* D'après cela, il est naturel de convenir que *ces fonctions sont positives quand l'arc est compris entre* 0 *et* $\frac{\pi}{2}$. Si l'arc sort de ces limites, *les mêmes fonctions sont positives quand les droites qu'elles représentent ont repris leurs directions primitives; elles sont négatives dans le cas contraire.*

9. Pour éclaircir ces généralités, considérons le rectangle inscrit MNN'M', dont les côtés sont parallèles aux deux diamètres perpendiculaires AA', BB', et supposons, successivement, que le point décrivant soit venu en N, en N' et en M'.

1° NR et MP sont deux droites égales et de même sens; donc

$$\sin \text{AMN} = \text{NR} = \text{MP} = \sin \text{AM}.$$

AS et AT sont égales et de *sens contraire ;* car AS est *au-dessous* du diamètre fixe, tandis que AT était *au-dessus.* Donc

$$\text{tg AMN} = -\text{AS} = -\text{AT} = -\text{tg AM}.$$

OS et OT sont deux droites égales; mais elles doivent être affectées de *signes contraires,* car la première est directement *opposée au rayon décrivant* ON, tandis que l'autre était dirigée suivant ce rayon. Conséquemment,

$$\text{séc AMN} = -\text{OS} = -\text{OT} = -\text{séc AM}.$$

Le cosinus de l'arc AM est représenté par MP' ou par son égale OP. Le cosinus de AMN est représenté, en valeur absolue, par OR. De plus, les deux droites OP, OR ont des directions opposées; donc

$$\cos \text{AMN} = -\text{OR} = -\text{OP} = -\cos \text{AM}.$$

On verra, de la même manière, que

$$\cot \text{AMN} = -\text{BS}' = -\text{BT}' = -\cot \text{AM},$$
$$\text{coséc AMN} = +\text{OS}' = +\text{OT}' = +\text{coséc AM}.$$

2° Le sinus de l'arc ABN' est représenté, en valeur absolue, par N'R. Mais cette droite est au-dessous du diamètre fixe, tandis que MP est au-dessus.

D'après cela,

$$\sin ABN' = -N'R = -MP = -\sin AM.$$

Semblablement,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} ABN' &= +AT = +\operatorname{tg} AM, \\ \operatorname{séc} ABN' &= -OT = -\operatorname{séc} AM, \\ \cos ABN' &= -OR = -\cos AM, \\ \cot ABN' &= +BT' = +\cot AM, \\ \operatorname{cosé c} ABN' &= -OT' = -\operatorname{coséc} AM. \end{aligned}$$

3° Enfin, si l'on considère l'arc ABB'M', on trouve

$$\begin{aligned} \sin ABB'M' &= -M'P = -MP = -\sin AM, \\ \operatorname{tg} ABB'M' &= -AS = -AT = -\operatorname{tg} AM, \\ \operatorname{séc} ABB'M' &= +OS = +OT = +\operatorname{séc} AM, \\ \cos ABB'M' &= +OP = +\cos AM, \\ \cot ABB'M' &= -BS' = -BT' = -\cot AM, \\ \operatorname{coséc} ABB'M' &= -OS' = -OT' = -\operatorname{coséc} AM. \end{aligned}$$

10. Afin de résumer cette discussion, représentons par x l'arc AM : les arcs AN, ABN' ABB'M' seront, respectivement, représentés par $\pi - x$, $\pi + x$, $2\pi - x$; et nous aurons :

1°
$$\begin{aligned} \sin(\pi - x) &= +\sin x, \\ \operatorname{tg}(\pi - x) &= -\operatorname{tg} x, \\ \operatorname{séc}(\pi - x) &= -\operatorname{séc} x, \\ \cos(\pi - x) &= -\cos x, \\ \cot(\pi - x) &= -\cot x, \\ \operatorname{coséc}(\pi - x) &= +\operatorname{coséc} x; \end{aligned}$$

2°
$$\begin{aligned} \sin(\pi + x) &= -\sin x, \\ \operatorname{tg}(\pi + x) &= +\operatorname{tg} x, \\ \operatorname{séc}(\pi + x) &= -\operatorname{séc} x, \\ \cos(\pi + x) &= -\cos x, \\ \cot(\pi + x) &= +\cot x, \\ \operatorname{coséc}(\pi + x) &= -\operatorname{coséc} x; \end{aligned}$$

3°
$$\begin{aligned}
\sin(2\pi - x) &= -\sin x,\\
\operatorname{tg}(2\pi - x) &= -\operatorname{tg} x,\\
\operatorname{séc}(2\pi - x) &= +\operatorname{séc} x,\\
\cos(2\pi - x) &= +\cos x,\\
\cot(2\pi - x) &= -\cot x,\\
\operatorname{coséc}(2\pi - x) &= -\operatorname{coséc} x.
\end{aligned}$$

11. Considérons à présent les arcs représentés par des quantités négatives, c'est-à-dire les arcs AM′, AM′N′, etc. L'inspection de la figure donne

$$\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin x,\\
\operatorname{tg}(-x) &= -\operatorname{tg} x,\\
\operatorname{séc}(-x) &= +\operatorname{séc} x,\\
\cos(-x) &= +\cos x.\\
\cot(-x) &= -\cot x,\\
\operatorname{coséc}(-x) &= -\operatorname{coséc} x.
\end{aligned}$$

12. Pour appliquer ces diverses formules, supposons que l'on veuille exprimer, au moyen des lignes trigonométriques d'un arc *moindre que* 45°, celles de l'arc de —978°. En retranchant d'abord les multiples de 360 contenus dans 978, on aura, par les dernières formules,

$$\begin{aligned}
\sin(-978^\circ) &= \sin(-258^\circ) = -\sin 258^\circ,\\
\operatorname{tg}(-978^\circ) &= \operatorname{tg}(-258^\circ) = -\operatorname{tg} 258^\circ,\\
\operatorname{séc}(-978^\circ) &= \operatorname{séc}(-258^\circ) = +\operatorname{séc} 258^\circ,\\
\cos(-978^\circ) &= \cos(-258^\circ) = +\cos 258^\circ,\\
\cot(-978^\circ) &= \cot(-258^\circ) = -\cot 258^\circ,\\
\operatorname{coséc}(-978^\circ) &= \operatorname{coséc}(-258^\circ) = -\operatorname{coséc} 258^\circ.
\end{aligned}$$

Maintenant, si l'on retranche 180° de 258°, on trouvera, par les formules du n° 10 :

$$\begin{aligned}
\sin(-978^\circ) &= -\sin 258^\circ = +\sin 78^\circ = +\cos 12^\circ,\\
\operatorname{tg}(-978^\circ) &= -\operatorname{tg} 258^\circ = -\operatorname{tg} 78^\circ = -\cot 12^\circ,\\
\operatorname{séc}(-978^\circ) &= +\operatorname{séc} 258^\circ = -\operatorname{séc} 78^\circ = -\operatorname{coséc} 12^\circ,\\
\cos(-978^\circ) &= +\cos 258^\circ = -\cos 78^\circ = -\sin 12^\circ,\\
\cot(-978^\circ) &= -\cot 258^\circ = -\cot 78^\circ = -\operatorname{tg} 12^\circ,\\
\operatorname{coséc}(-978^\circ) &= -\operatorname{coséc} 258^\circ = +\operatorname{coséc} 78^\circ = +\operatorname{séc} 12^\circ.
\end{aligned}$$

Variations des fonctions circulaires.

13. Revenons aux considérations précédentes (7), et supposons que le mobile M, parti de l'origine A, s'en éloigne indéfiniment, dans le sens positif. L'inspection de la figure donne d'abord

$$\begin{aligned} \sin 0 &= \lim \mathrm{MP} = 0, \\ \mathrm{tg}\ 0 &= \lim \mathrm{AT} = 0, \\ \text{séc}\ 0 &= \lim \mathrm{OT} = 1, \\ \cos 0 &= \lim \mathrm{OP} = 1. \end{aligned}$$

Relativement à la cotangente et à la cosécante, il suffit d'observer que, si le point M s'approche indéfiniment de l'origine, les distances BT′ et OT′ augmentent au delà de toute limite; conséquemment,

$$\begin{aligned} \cot 0 &= \infty, \\ \text{coséc}\ 0 &= \infty. \end{aligned}$$

A mesure que le mobile s'approche du point B, le sinus, la cotangente et la cosécante augmentent, tandis que les autres lignes diminuent. Les *valeurs extrêmes* sont :

$$\begin{aligned} \sin\frac{\pi}{2} &= \cos 0 = 1, \\ \mathrm{tg}\frac{\pi}{2} &= \cot 0 = \infty, \\ \text{séc}\frac{\pi}{2} &= \text{coséc}\ 0 = \infty, \\ \cos\frac{\pi}{2} &= \sin 0 = 0, \\ \cot\frac{\pi}{2} &= \mathrm{tg}\ 0 = 0, \\ \text{coséc}\frac{\pi}{2} &= \text{séc}\ 0 = 1. \end{aligned}$$

Sachant ramener tous les arcs au premier quadrans, nous pouvons, sans continuer cette discussion, conclure que

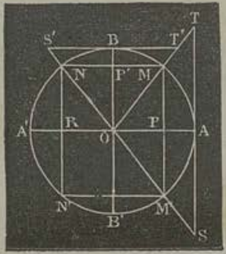
le *sinus* varie entre -1 et $+1$;
la *tangente* ... $-\infty$ et $+\infty$;
la *sécante* ... $+1$ et $+\infty$, ou entre -1 et $-\infty$;
le *cosinus* ... -1 et $+1$;
la *cotangente* ... $-\infty$ et $+\infty$;
la *cosécante* ... $+1$ et $+\infty$, ou entre -1 et $-\infty$.

Relations entre les lignes trigonométriques d'un même arc.

14. En représentant par x un arc positif, moindre que le quadrans, on a

$$\mathrm{MP}=\sin x,\quad \mathrm{AT}=\operatorname{tg} x,\quad \mathrm{OT}=\text{séc}\, x,$$
$$\mathrm{OP}=\cos x,\quad \mathrm{BT'}=\cot x,\quad \mathrm{OT'}=\text{coséc}\, x.$$

Pour obtenir des relations entre ces six fonctions de l'arc x, considérons les triangles rectangles OPM, OAT, OBT'. Ils donnent d'abord



$$\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{PM}}^2=\overline{\mathrm{OM}}^2,$$
$$\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{AT}}^2=\overline{\mathrm{OT}}^2,$$
$$\overline{\mathrm{OB}}^2+\overline{\mathrm{BT'}}^2=\overline{\mathrm{OT'}}^2;$$

ou

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1, \quad (1)$$
$$1+\operatorname{tg}^2 x=\text{séc}^2 x, \quad (2)$$
$$1+\cot^2 x=\text{coséc}^2 x. \quad (3)$$

Ces mêmes triangles sont évidemment semblables. En les comparant deux à deux, nous obtiendrons

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{AT}}=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OT}},\quad \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{BT'}}=\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{OB}}=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OT'}},\quad \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{BT'}}=\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{OB}},$$

ou

$$\frac{\cos x}{1}=\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}=\frac{1}{\text{séc}\, x},\quad \frac{\cos x}{\cot x}=\frac{\sin x}{1}=\frac{1}{\text{coséc}\, x},$$

$$\frac{1}{\cot x}=\frac{\operatorname{tg} x}{1}.$$

Ces proportions équivalent aux équations suivantes :

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \tag{4}$$

$$\text{séc } x = \frac{1}{\cos x}, \tag{5}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \tag{6}$$

$$\text{coséc} x = \frac{1}{\sin x}, \tag{7}$$

$$\operatorname{tg} x \cot x = 1. \tag{8}$$

15. Chacune des six fonctions circulaires dépend des cinq autres. Conséquemment, les huit relations que l'on vient d'obtenir n'équivalent qu'aux cinq équations (1), (4), (5), (6), (7). C'est ce qu'il est facile de vérifier.

16. Ces mêmes relations, bien que déduites d'une figure particulière, sont *générales;* c'est-à-dire qu'elles subsistent quand on attribue à l'arc x une valeur quelconque, pourvu que l'on ait le soin de prendre les lignes trigonométriques de cet arc avec les signes déterminés par les règles ci-dessus.

Pour démontrer cette généralité, remarquons d'abord que les équations (1), (2),..., (8) ont lieu entre les *valeurs absolues* des fonctions circulaires d'un arc quelconque; car, quelle que soit la grandeur de l'arc AM, on pourra construire une figure analogue à celle qui nous a donné ces équations. Conséquemment, les équations (1), (2), (3), dans lesquelles entrent seulement les carrés de nos fonctions, sont générales. Il suffit donc d'examiner si les équations (4), (5), (6), (7) subsistent quand on a égard aux *signes* de $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, etc. Or, d'après les nos 9 et suivants, $\sin x$ et $\cos x$ sont de même signe ou de signes contraires, suivant que $\operatorname{tg} x$ est positive ou négative, $\cos x$ et séc x sont toujours de même signe; etc.

17. On peut, sans aucune difficulté, conclure, des équations précédentes, les valeurs de cinq quelconques des six fonctions circulaires, au moyen de la sixième. Si l'on veut, par exemple,

exprimer $\sin x$ et $\cos x$ en fonction de $\operatorname{tg} x$, on prendra, dans les équations (5) et (7), les valeurs de ces deux inconnues, après quoi l'on remplacera $\operatorname{séc} x$ et $\operatorname{coséc} x$ par leurs valeurs (2) et (3). On obtient ainsi

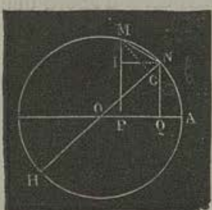
$$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}, \quad \sin x = \pm \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}\,^{*}.$$

CHAPITRE II.

Formules relatives aux sinus, cosinus et tangentes de la somme et de la différence de deux arcs (18-20). — Expressions de $\sin 2a$, $\cos 2a$ et $\operatorname{tang} 2a$ (21). — Connaissant $\cos a$ ou $\sin a$, calculer $\sin \frac{1}{2}a$ et $\cos \frac{1}{2}a$ (22, 23). — Rendre calculable par logarithmes la somme de deux lignes trigonométriques, sinus ou cosinus (24).

Sinus ou cosinus de la somme ou de la différence de deux arcs.

18. Nous supposerons d'abord que l'on donne les sinus et cosinus de deux arcs quelconques a et b, et que l'on se propose de calculer $\cos(a - b.)$



Pour cela, prenons, à partir de l'origine A, $AM = a$, $AN = b$, ces longueurs étant comptées dans le sens convenable, eu égard aux signes de a et de b. Abaissons, sur OA, les perpendiculaires MP, NQ; tirons la corde MN et le diamètre NOH; enfin, menons MG perpendiculaire à NH, et NI parallèle à OA. Le triangle rectangle MIN donne, *dans tous les cas*,

$\overline{MN}^2 = \overline{MI}^2 + \overline{IN}^2 = (MI - NQ)^2 + (OQ - OP)^2$

$$\overline{MN}^2 = (\sin a - \sin b)^2 + (\cos a - \cos b)^2.$$

$(\cos b - \cos a)^2$

* La discussion de ces formules et de toutes celles qui donnent plusieurs valeurs pour une même fonction circulaire, sort des limites imposées par le Programme.

Si, par exemple, le point P tombait *à gauche* du centre, et le point N *au-dessous* du diamètre OA, on aurait

$$\mathrm{MI} = \mathrm{MP} + \mathrm{NQ} = \sin a + (-\sin b) = \sin a - \sin b,$$
$$\mathrm{IN} = \mathrm{OP} + \mathrm{OQ} = -\cos a + \cos b;$$

donc

$$\overline{\mathrm{MN}}^2 = \overline{\mathrm{MI}}^2 + \overline{\mathrm{IN}}^2$$
$$= (\sin a - \sin b)^2 + (\cos a - \cos b)^2.$$

Pour éliminer MN, observons que cette corde est moyenne proportionnelle entre HN et GN. Quelle que soit la position du point G, cette dernière droite est égale à $1 - \cos(a-b)$; donc

$$\overline{\mathrm{MN}}^2 = 2\,[1 - \cos(a-b)].$$

En égalant ces deux valeurs de $\overline{\mathrm{MN}}^2$, et ayant égard aux relations

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1,\ \sin^2 b + \cos^2 b = 1,$$

on trouve la *formule générale*

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b\text{*}. \qquad (1)$$

19. L'équation (1) a lieu pour des valeurs quelconques de a et de b, positives ou négatives. Si donc l'on veut trouver $\cos(a+b)$, on changera, dans cette formule, b en $-b$; ce qui donne

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \qquad (2)$$

De même, en remplaçant a par $a + \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$\cos\left(a + \frac{\pi}{2} - b\right) = \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right)\cos b + \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right)\sin b,$$

ou

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b. \qquad (3)$$

Enfin, cette nouvelle formule donne, par le changement de b en $-b$,

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b. \qquad (4)$$

Les équations (1), (2), (3), (4) sont d'un usage continuel.

* Cette démonstration, remarquable par la *simplicité* et la *généralité*, est due à l'illustre Cauchy.

Tangente de la somme ou de la différence de deux arcs.

20. Pour calculer $\operatorname{tg}(a \pm b)$ en fonction de $\operatorname{tg} a$ et de $\operatorname{tg} b$, il suffit de diviser membre à membre les équations (4) et (2), ou les équations (3) et (1), en se rappelant que la tangente est le *rapport* du sinus au cosinus (14). On obtient, en effet,

$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\sin a \cos b \pm \cos a \sin b}{\cos a \cos b \mp \sin a \sin b} = \frac{\dfrac{\sin a}{\cos a} \pm \dfrac{\sin b}{\cos b}}{1 \mp \dfrac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}},$$

ou

$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}. \tag{5}$$

Dans cette double formule, on doit prendre les signes supérieurs ensemble, et les signes inférieurs ensemble.

Expressions de $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\operatorname{tg} 2a$.

21. Si, dans les équations (2), (4), (5), on suppose $b = a$, on trouve, immédiatement,

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a, \tag{6}$$
$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a, \tag{7}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}. \tag{8}$$

Expressions de $\sin \frac{1}{2}a$, $\cos \frac{1}{2}a$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2}a$.

22. Dans l'équation (6), remplaçons a par $\frac{1}{2}a$; nous aurons

$$\cos a = \cos^2 \tfrac{1}{2}a - \sin^2 \tfrac{1}{2}a.$$

D'ailleurs, les *inconnues* $\cos \frac{1}{2}a$ et $\sin \frac{1}{2}a$ satisfont à la relation générale

$$1 = \cos^2 \tfrac{1}{2}a + \sin^2 \tfrac{1}{2}a;$$

donc

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2}a, \quad 1 - \cos a = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}a,$$

ou, en divisant par 2 et extrayant les racines,

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \pm \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} \quad (9), \qquad \sin \tfrac{1}{2} a = \pm \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}. \quad (10)^*$$

23. En divisant $\sin \frac{1}{2} a$ par $\cos \frac{1}{2} a$, on trouve

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a = \pm \sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}. \qquad (11)$$

Application des formules relatives à l'addition et à la soustraction des arcs.

24. Les équations (1), (2), (3), (4) donnent, par addition ou soustraction,

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) + \sin(a-b) &= 2 \sin a \cos b,\\
\sin(a+b) - \sin(a-b) &= 2 \sin b \cos a,\\
\cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2 \cos a \cos b,\\
\cos(a+b) - \cos(a-b) &= -2 \sin a \sin b.
\end{aligned}$$

Pour rendre ces nouvelles formules plus commodes, posons

$$a+b=p, \quad a-b=q,$$

d'où

$$a=\tfrac{1}{2}(p+q), \quad b=\tfrac{1}{2}(p-q);$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
\sin p + \sin q &= 2 \sin \tfrac{1}{2}(p+q) \cos \tfrac{1}{2}(p-q), & (12)\\
\sin p - \sin q &= 2 \sin \tfrac{1}{2}(p-q) \cos \tfrac{1}{2}(p+q), & (13)\\
\cos p + \cos q &= 2 \cos \tfrac{1}{2}(p+q) \cos \tfrac{1}{2}(p-q), & (14)\\
\cos p - \cos q &= -2 \sin \tfrac{1}{2}(p+q) \sin \tfrac{1}{2}(p-q). & (15)
\end{aligned}$$

Les équations (12), (13), 14), (15) sont celles qui servent à *rendre calculable, par logarithmes, la somme ou la différence de deux sinus ou de deux cosinus*. Elles peuvent être énoncees ainsi :

* Nous avons déjà dit que, pour ne pas sortir des limites du Programme, nous ne ferions pas la discussion des formules donnant plusieurs valeurs pour une même fonction circulaire.

La somme de deux sinus est égale à 2 fois le sinus de la demi-somme (des arcs) *par le cosinus de la demi-différence ;*

La différence de deux sinus est égale à deux fois le sinus de la demi-différence par le cosinus de la demi-somme ;

Etc.

25. Pour transformer en produit la somme ou la différence de deux tangentes, il suffit d'observer que

$$\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\sin a}{\cos a} \pm \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a \cos b \pm \sin b \cos a}{\cos a \cos b}$$
$$= \frac{\sin (a \pm b)}{\cos a \cos b};$$

donc

$$\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\sin (a \pm b)}{\cos a \cos b}. \qquad (16)$$

CHAPITRE III.

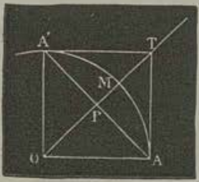
Notions sur la construction des tables trigonométriques (26-34). — Usage des tables (35-39).

Construction des tables.

26. Les *tables* trigonométriques, habituellement placées à la suite des tables de logarithmes, donnent les sinus, cosinus et tangentes de tous les arcs multiples de 10″, compris entre 0 et 90°, ou, pour parler plus exactement, elles donnent les logarithmes de ces fonctions*. La construction de ces tables reposant sur des théories mathématiques assez élevées, nous nous bornerons à indiquer *comment on pourrait s'y prendre* pour calculer le sinus de l'arc de 10″ et pour calculer ensuite, de proche en proche, les sinus et cosinus des multiples de cet arc.

* Cependant, les *Tables de Callet* renferment aussi des *sinus naturels*.

27. Lemme.—*Tout arc, moindre qu'un quadrans, est compris entre son sinus et sa tangente.*



AT étant la tangente de l'arc $AM=x$, moindre qu'un quadrans, prenons $MA'=MA$, menons TA' et APA'. Nous aurons, à cause de la symétrie par rapport à OT,

$$TA = TA' = \operatorname{tg} x,$$
$$AA' = 2\,AP = 2\sin x.$$

Or, *la ligne convexe* AMA' *est plus courte que la ligne* ATA', *qui l'enveloppe, et qui est terminée aux mêmes extrémités* *; et cette même ligne est plus longue que la droite APA'; donc

$$2\sin x < 2\,x < 2\operatorname{tg} x,$$

ou

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

28. *Remarque.* — La corde AA', qui sous-tend l'arc AMA, est double de AP, sinus de AM; donc *le sinus d'un arc moindre qu'un quadrans est la moitié de la corde qui sous-tend l'arc double* **.

29. Théorème. — *Le rapport entre un arc moindre qu'un quadrans et son sinus, croît avec l'arc.*

Soient x et $x+h$ deux arcs positifs, inférieurs à $\frac{\pi}{2}$; je dis que l'on a

$$\frac{x+h}{\sin(x+h)} > \frac{x}{\sin x}.$$

En effet, cette inégalité devient, successivement,

$$(x+h)\sin x > x\sin(x+h),$$
$$(x+h)\sin x - x(\sin x\cos h + \cos x \sin h) > 0,$$
$$(x+h)\operatorname{tg} x - x(\operatorname{tg} x\cos h + \sin h) > 0,$$
$$x\operatorname{tg} x(1-\cos h) + h\operatorname{tg} x - x\sin h > 0,$$
$$\operatorname{tg} x\,\frac{1-\cos h}{h} + \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} - \frac{\sin h}{h}\right) > 0.$$

* Ce théorème, indispensable ici, n'est pas indiqué dans le Programme : nous l'avons démontré dans le cas où la ligne enveloppée est formée par des lignes droites (*Géom.*, 26).

** On croit que le sinus doit son nom à cette propriété : *semi-inscripta*, *s. ins.*

Or, dans cette dernière inégalité, le premier terme est positif; le second l'est pareillement, à cause de $\operatorname{tg} x > x$ et de $\sin h < h$; donc, etc.

30. Théorème. — *Le rapport de l'arc au sinus, qui décroît avec l'arc, a pour limite l'unité.*

Nous avons trouvé, ci-dessus,

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Cette double inégalité donne, à cause de $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$,

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Quand x diminue, $\cos x$ s'approche indéfiniment de 1, qui en est la limite. Par conséquent, le rapport de l'arc au sinus est compris entre l'unité et une quantité variable dont la limite est l'unité : cette limite est donc aussi celle du rapport considéré.

31. Théorème. — *L'excès d'un arc sur son sinus est moindre que le quart du cube de l'arc.*

De la relation

$$\operatorname{tg} x > x$$

on déduit, par le changement de x en $\frac{1}{2}x$,

$$\frac{\sin \frac{1}{2}x}{\cos \frac{1}{2}x} > \frac{1}{2}x,$$

ou

$$\sin \tfrac{1}{2}x > \tfrac{1}{2}x \cos \tfrac{1}{2}x.$$

Multiplions les deux membres par $2 \cos \frac{1}{2}x$; nous aurons

$$\sin x > x \cos^2 \tfrac{1}{2}x,$$

ou

$$\sin x > x\left(1 - \sin^2 \tfrac{1}{2}x\right),$$

ou, à plus forte raison, en remplaçant $\sin \frac{1}{2}x$ par $\frac{1}{2}x$,

$$\sin x > x\left(1 - \frac{x^2}{4}\right);$$

c'est-à-dire

$$x - \sin x < \tfrac{1}{4}x^3 \,*.$$

* On peut, par d'autres méthodes, démontrer la relation

$$x - \sin x < \tfrac{1}{6}x^3.$$

32. Problème. — *Calculer, avec douze décimales exactes, le sinus de l'arc de* $10''$.

Commençons par calculer la longueur de cet arc. Nous aurons, en la représentant par x, et en observant que la demi-circonférence contient $180 \, . \, 60 \, . \, 6$ dizaines de secondes,

$$x = \frac{\pi}{180 \, . \, 60 \, . \, 6} = \frac{\pi}{64\,800}.$$

Or,

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793 \ldots;$$

donc

$$x = \text{arc de } 10'' = 0{,}000\,048\,481\,368\,110 \ldots$$

Le sinus est plus petit que l'arc ; donc, en premier lieu,

$$\sin 10'' < 0{,}000\,048\,481\,368\,110 \ldots$$

D'un autre côté, par le théorème précédent,

$$\sin 10'' > 0{,}000\,048\,481\,368\,110 \ldots - \tfrac{1}{4}(0{,}000\,048 \ldots)^3,$$

et, à plus forte raison,

$$\sin 10'' > 0{,}000\,048 \ldots - \tfrac{1}{4}(0{,}000\,05)^3,$$

ou

$$\sin 10'' > 0{,}000\,048 \ldots - 0{,}000\,000\,000\,000\,031 \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\sin 10'' > 0{,}000\,048\,481\,368\,079 \ldots$$

La valeur cherchée étant comprise entre deux nombres ayant douze décimales communes, il s'ensuit que si l'on prend

$$\sin 10'' = 0{,}000\,048\,481\,368,$$

on commettra une erreur inférieure à une unité du douzième ordre *.

33. *Sinus et cosinus des multiples de* $10''$. — Le sinus de $10''$ étant connu, on obtient le cosinus du même arc par la formule

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \; {}^{**},$$

* Cette erreur est même plus petite qu'une *demi-unité du treizième ordre.*

** On peut se dispenser d'extraire une racine carrée, en observant que $\cos 10'' = \cos^2 5'' - \sin^2 5'' = 1 - 2 \sin^2 5''$.

après quoi il reste à déterminer, de proche en proche, les sinus et cosinus de 20″, 30″,..., jusqu'à 45° *. Les calculs fort pénibles auxquels on est obligé de se livrer peuvent être abrégés par la méthode suivante, due à *Thomas Simpson*.

Reprenons les formules

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b,$$
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b,$$

démontrées précédemment. Si nous y faisons $b = x =$ *arc de* 10″, $a = mx$, elles deviendront

$$\sin(m+1)x + \sin(m-1)x = 2\sin mx \cos x,$$
$$\cos(m+1)x + \cos(m-1)x = 2\cos mx \cos x,$$

ou

$$\sin(m+1)x = \sin mx \,.\, 2\cos x - \sin(m-1)x,$$
$$\cos(m+1)x = \cos mx \,.\, 2\cos x - \cos(m-1)x.$$

Ces deux formules sont celles de Simpson. Elles donnent la loi suivant laquelle procèdent les sinus et les cosinus des multiples de l'arc x : *Un terme quelconque, pris dans la suite des sinus, est égal à la somme des deux termes précédents, respectivement multipliés par* 2 cos x *et par* —1. De même pour les cosinus.

34. *Logarithmes des fonctions circulaires.* — Il est facile de comprendre qu'après avoir calculé les sinus et cosinus, de 10″ en 10″, on ait pu chercher, dans une table, les logarithmes de ces fonctions, et qu'on les ait inscrits en regard des arcs de 10″, 20″, 30″, etc. Quant aux logarithmes des tangentes, sécantes, etc., ils se déduisent immédiatement des autres ; car, évidemment,

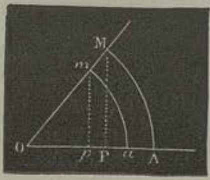
$$\log \operatorname{tg} x = \log \sin x - \log \cos x,$$
$$\log \operatorname{séc} x = -\log \cos x,$$

etc.

* Il n'est pas besoin d'aller plus loin, parce que le sinus d'un arc supérieur à 45° est égal au cosinus d'un arc inférieur à cette limite. De même pour le cosinus.

Usage de tables de Callet.

35. Dans la construction de ces tables, au lieu de prendre le rayon pour unité, on l'a supposé égal à 10^{10}. Il est résulté de là que les sinus, cosinus, etc., *au lieu d'être des rapports*, sont devenus *des droites*, égales aux produits du rayon par les sinus, cosinus, etc., tels que nous les avons définis. C'est ce dont il est facile de s'assurer.



Considérons, en effet, deux arcs concentriques AM, *am*, correspondant à un même angle au centre. Supposons que le premier ait pour rayon $R = 10^{10}$, l'autre ayant pour rayon l'unité. Abaissons MP, *mp*, perpendiculaires à OA ; MP sera le *sinus de l'angle* MOA, *considéré dans le cercle de rayon* R.

Or, les triangles semblables MPO, *mpo* donnent

$$\frac{MP}{mp} = \frac{OM}{Om},$$

ou

$$\frac{\text{SIN}\, a}{\sin a} = \frac{R}{1},$$

en désignant par de grandes lettres le sinus MP. Cette proportion donne

$$\text{SIN}\, a = R \sin a = 10^{10} \sin a.$$

La même démonstration s'applique, évidemment, aux autres lignes trigonométriques : *chacune d'elles est égale au rayon des tables, multiplié par la fonction circulaire correspondante.*

36. L'égalité qui précède donne

$$\log \sin a = \log \text{SIN}\, a - 10.$$

Ainsi, *le logarithme du sinus, du cosinus, de la tangente, etc., d'un angle quelconque, est égal au logarithme inscrit dans la table, diminué de 10 unités.* En faisant porter la soustraction sur la caractéristique, on évite les logarithmes négatifs, et l'on n'emploie que des logarithmes à partie décimale positive.

37. La règle précédente est en défaut quand il s'agit de la tangente d'un angle supérieur à 45°, ou de la cotangente d'un angle inférieur à 45°. Ces lignes trigonométriques étant, ainsi qu'on le reconnaît aisément, plus grandes que le rayon, leurs logarithmes sont plus grands que 10. Pour économiser l'espace, on a inscrit seulement le chiffre des unités de chaque caractéristique : la soustraction indiquée ci-dessus est donc faite à l'avance.

38. De plus longs détails sur la disposition des tables trigonométriques nous paraissent inutiles. Nous ferons seulement les deux remarques suivantes :

1° *Les accroissements de log sin* x, *de log cos* x, *etc., sont sensiblement proportionnels aux accroissements de l'arc* x, *quand ceux-ci sont fort petits ;*

2° *Quand* x *augmente, log sin* x *et log tg* x *augmentent, mais log cos* x *et log cot* x *diminuent.*

39. Pour montrer l'usage de ces deux remarques, cherchons les quatre logarithmes suivants :

1° log sin 63° 18′ 27″.
2° log cos 27° 38′ 48″.
3° log tg 72° 23′ 16″.
4° log cot 34° 17′ 33″.

1° On lit dans la table :

$$\log \sin 63^\circ\, 18'\, 20'' = 9{,}9510532.$$

De plus, la *différence tabulaire* = 106. Pour trouver l'accroissement du logarithme, correspondant à un accroissement de 7″ dans l'arc, nous poserons la proportion

$$\frac{10}{7} = \frac{106}{\delta};$$

d'où

$$\delta = 106 \cdot \frac{7}{10} = +74.$$

Le logarithme cherché est donc

$$\log \sin 63^\circ\, 18'\, 27'' = \bar{1}{,}9510606.$$

En procédant de la même manière, on trouve

$$
\begin{array}{lr}
2^{\circ} \qquad \log \cos 27^{\circ}\, 38'\, 40'' = \bar{1},9473572 & \\
\text{diff. tab.} = 110\,;\, 110 \cdot \frac{8}{10} = \ldots\ldots & 88- \\
\hline
\log \cos 27^{\circ}\, 38'\, 48'' = \bar{1},9473484\,; &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr}
3^{\circ} \qquad \log \operatorname{tg}\, 72^{\circ}\, 23'\, 10'' = 0,4982761 & \\
\text{diff. tab.} = 730\,;\, 730 \cdot \frac{6}{10} = \ldots\ldots & 438+ \\
\hline
\log \operatorname{tg}\, 72^{\circ}\, 23'\, 16'' = 0,4983199\,; &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr}
4^{\circ} \qquad \log \cot 34^{\circ}\, 17'\, 30'' = 0,1662534 & \\
\text{diff. tab.} = 452\,;\, 452 \cdot \frac{3}{10} = \ldots\ldots & 136- \\
\hline
\log \cot 34^{\circ}\, 17'\, 33'' = 0,1662398. &
\end{array}
$$

CHAPITRE IV.

Relations entre les angles et les côtés d'un triangle rectangle ou d'un triangle quelconque (41-46). — Résolution des triangles rectangles (46, 47). — Résolution des triangles quelconques dans les quatre cas qui peuvent se présenter (48-54). — Déterminer l'aire du triangle en fonctions des données (55-58).

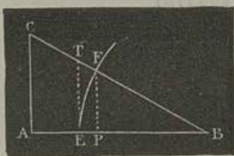
Résolution des triangles.

40. Le *but* de la Trigonométrie, dont nous n'avions pas encore parlé, est de *résoudre* les triangles, c'est-à-dire de *calculer* trois des six éléments d'un triangle quelconque dont les trois autres éléments sont donnés. Parmi ces données doit se trouver au moins un côté.

La résolution des triangles repose sur un certain nombre de relations entre les côtés et les angles d'un triangle quelconque, ou plutôt entre les côtés d'un triangle quelconque et les fonctions circulaires de ses angles.

Relations entre les côtés et les angles d'un triangle rectangle.

41. Théorème. — *Dans tout triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est égal à l'hypoténuse, multipliée par le cosinus de l'angle compris.*



Représentons, suivant l'usage, par A, B, C les trois angles du triangle, A étant l'angle droit; et par a, b, c les longueurs des côtés opposés.

Si, du sommet B comme centre, avec un rayon pris pour unité, on trace l'arc EF, puis qu'on mène FP perpendiculaire à BA, les deux triangles BPF, BAC donneront

$$\frac{BA}{BP}=\frac{BC}{BF},$$

ou

$$\frac{c}{\cos B}=\frac{a}{1};$$

donc

$$c=a\cos B. \qquad (1)$$

42. Théorème. — *Dans tout triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est égal à l'autre côté, multiplié par la tangente de l'angle opposé au premier côté.*

En effet, si nous menons la tangente ET, nous aurons

$$\frac{AC}{ET}=\frac{AB}{BE},$$

ou

$$\frac{b}{\operatorname{tg} B}=\frac{c}{1},$$

ou encore

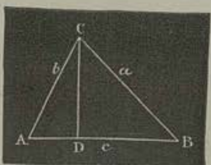
$$b=c\operatorname{tg} B. \qquad (2)$$

Relations entre les côtés et les angles d'un triangle quelconque.

43. Théorème. — *Dans tout triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins deux fois le rectangle de ces côtés, multiplié par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.*

1° Considérons d'abord le côté a opposé à un angle aigu A. Nous aurons (*Géom.*, 165)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \,.\, \mathrm{AD}.$$



Mais, par le théorème précédent,

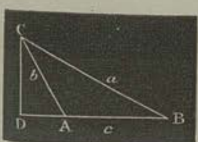
$$\mathrm{AD} = b \cos \mathrm{A},$$

donc

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \mathrm{A}. \quad (3)$$

2° Soit à présent le côté opposé à un angle obtus; nous aurons

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \,.\, \mathrm{AD}.$$



Mais,

$$\mathrm{AD} = b \cos \mathrm{CAD} = b \cos (180^\circ - \mathrm{A})$$
$$= - b \cos \mathrm{A};$$

donc

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \mathrm{A}.$$

44. *Remarque.*— La *relation fondamentale*, que nous venons de démontrer, donne les trois équations distinctes :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos \mathrm{A},$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,ca \cos \mathrm{B},$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos \mathrm{C},$$

qui renferment toute la résolution des triangles *obliquangles*, c'est-à-dire non rectangles.

45. Théorème. — *Dans tout triangle, les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés.*

Décomposant le triangle ABC en deux triangles rectangles, au moyen de la perpendiculaire CD, on obtient

$$CD = a \cos BCD = a \sin B,$$
$$CD = b \cos ACD = b \sin A;$$

donc

$$a \sin B = b \sin A,$$

ou

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}\,^{*}. \qquad (4)$$

Résolution des triangles rectangles.

46. Elle est contenue tout entière dans les formules

$$c = a \cos B, \quad b = c \operatorname{tg} B,$$

démontrées plus haut. En effet, ces deux équations renferment les trois côtés et un angle aigu; de plus, elles sont *calculables par logarithmes*.

47. Pour prendre un exemple, supposons que l'on donne

$$a = 570^{m},37, \; c = 21^{m},63;$$

on aura

$$\begin{aligned}
\log c &= 1,3350565 + \\
\log a &= 2,7561567 - \\
\hline
\log \cos B &= \bar{2},5788998 \\
B &= 87^\circ\, 49'\, 36'',0. \\
\log c &= 1,3350565 + \\
\log \operatorname{tg} 87^\circ\, 49'\, 36'',0 &= 1,4207888 + \\
\hline
\log b &= 2,7558453 \\
b &= 569^{m},96.
\end{aligned}$$

* Cette proportion continue peut être déduite des équations du numéro précédent. Réciproquement, la relation fondamentale peut être regardée comme une conséquence de la proportionnalité entre les côtés et les sinus des angles, jointe à la relation $A + B + C = 180^\circ$. Nous engageons le lecteur à se proposer ces deux exercices d'algèbre.

Résolution des triangles obliquangles.

48. Premier cas : *On connaît un côté* a *et deux angles.*

La somme des trois angles étant égale à 180°, on trouvera l'angle inconnu par une addition et une soustraction. Les formules

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}, \quad \frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A},$$

donneront ensuite les côtés b et c.

49. Deuxième cas : *On donne deux côtés,* a, b, *et l'angle* A *opposé à l'un d'eux.*

On tire, de la proportion

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A},$$

$$\sin B=\frac{b \sin A}{a}. \qquad (5)$$

Cette formule donne lieu à une *discussion* assez longue. Pour plus de clarté, nous considérerons d'abord les trois hypothèses principales que l'on peut faire sur le *dividende* $b \sin A$ et le *diviseur* a.

1° $b \sin A > a$. On trouve $\sin B > 1$; donc l'angle B n'existe pas (13). *Le problème est impossible.*

2° $b \sin A = a$. La formule (5) donne $\sin B = 1$, c'est-à-dire $B = 90°$. *Pour que cette valeur soit admissible, l'angle* A *doit être aigu.*

3° $b \sin A < a$; donc $\sin B < 1$. A la valeur de sin B, donnée par la formule (5), correspondent deux angles supplémentaires : il s'agit de savoir quel est celui qui répond à la question, si toutefois la question est possible.

Désignons par β l'angle *aigu* déterminé par la formule

$$\sin \beta = \frac{b \sin A}{a}\ *,$$

et supposons, successivement,

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b.$$

* Cet angle est celui que l'on trouve dans la Table.

La première hypothèse donne $A > B$; donc l'on doit prendre $B = \beta$: *il y a une seule solution.*

La deuxième hypothèse conduit à $B = A$: celle-ci n'est admissible que *si l'angle* A *est aigu;* et alors *il y a une seule solution.*

Enfin, la troisième hypothèse donne $A < B$ et $\sin \beta > \sin A$: si l'angle A est aigu, on peut prendre $B = \beta$ et $B = 180° - \beta$: *le problème admet deux solutions.* Au contraire, si l'angle A est obtus, *le triangle est impossible,* à cause de $B > A$ *.

Voici un petit tableau qui résume la discussion précédente ** :

$b \sin A > a$. *Pas de solution.*

$$b \sin A = a. \begin{cases} A > 90°. \textit{ Pas de solution.} \\ A = 90°. \textit{ Pas de solution.} \\ A < 90°. \textit{ Une solution.} \end{cases}$$

$$b \sin A < a. \begin{cases} a > b. \textit{ Une solution : } B = \beta. \\ a = b. \begin{cases} A \geqq 90°. \textit{ Pas de solution.} \\ A < 90°. \textit{ Une solution : } B = \beta = A. \end{cases} \\ a < b. \begin{cases} A > 90°. \textit{ Pas de solution.} \\ A < 90°. \textit{ Deux solutions : } B = \beta,\ B = 180° - \beta. \end{cases} \end{cases}$$

50. Troisième cas : *On connait deux côtés,* b, c, *et l'angle compris* A.

La somme $B + C$ des angles inconnus est égale à $180° - A$: si l'on pouvait calculer la différence $B - C$, la formule

$$a = b \frac{\sin A}{\sin B}$$

ferait connaître le troisième côté.

Or, la proportion

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

donne

$$\frac{b + c}{b - c} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin B - \sin C}.$$

* On ne peut pas supposer, simultanément,

$$a < b, \quad A = 90°,$$

car la formule (5) donnerait $\sin B > 1$; et ce cas a déjà été examiné.

** Les résultats de cette discussion s'accordent avec ceux auxquels conduit la solution graphique. (Voir les *Éléments de Géométrie.*)

Remplaçons la somme et la différence de sinus par des produits (24) ; nous aurons

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C)}{2\sin\frac{1}{2}(B-C)\cos\frac{1}{2}(B+C)}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+C)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)}.$$

Cette équation montre que : *dans tout triangle, la somme de deux côtés est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles opposés est à la tangente de leur demi-différence.* Elle donne, en outre,

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B+C);$$

ou, à cause de

$$B+C=180^\circ-A,$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}\cot\tfrac{1}{2}A. \qquad (6)$$

Il est donc facile d'obtenir la demi-différence des angles B, C.

51. Quatrième cas : *On donne les trois côtés.*

Pour trouver l'angle A, prenons l'équation fondamentale

$$a^2=b^2+c^2-2\,bc\cos A.$$

Elle donne

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}.$$

Afin de transformer cette formule en une autre qui soit calculable par logarithmes, ajoutons l'unité aux deux membres ; nous aurons, à cause de

$$\cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}:$$

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}A=\frac{b^2+2\,bc+c^2-a^2}{2\,bc},$$

puis

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}A=\frac{(b+c)^2-a^2}{2\,bc}$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2\,bc}.$$

Pour simplifier, représentons par $2p$ le *périmètre* du triangle, c'est-à-dire la somme $a+b+c$; l'équation devient

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}A=\frac{2p.2(p-a)}{2bc};$$

d'où

$$\cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}. \qquad (7)$$

Dans cette formule, le radical doit être pris positivement, parce que $\frac{1}{2}A$ est nécessairement moindre que 90°.

52. Si, au lieu d'ajouter 1 à cos A, on retranche cos A de 1, on trouve, par un calcul semblable au précédent,

$$\sin\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}. \qquad (8)$$

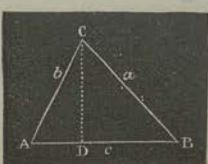
53. Les équations (1) et (2) donnent, par la division,

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}. \qquad (9)$$

54. *Remarque.* — De ces trois formules, la dernière est la plus commode à employer quand on veut résoudre complétement le triangle. En effet, au moyens des logarithmes de p, $p-a$, $p-b$, $p-c$, on peut calculer ceux de $\operatorname{tg}\frac{1}{2}A$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}B$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}C$, tandis que le calcul des trois angles, par les formules (7) ou (8), exige six ou sept logarithmes.

Expressions diverses de l'aire d'un triangle.

55. *L'aire d'un triangle est égale à la moitié du rectangle de deux côtés, multiplié par le sinus de l'angle compris.*



La hauteur CD est égale, comme nous l'avons vu (45), à b sin A; donc, T étant l'aire du triangle,

$$T=\tfrac{1}{2}bc\sin A. \qquad (10)$$

56. *L'aire d'un triangle est égale à la moitié du carré d'un côté, multipliée par les sinus des angles adjacents, et divisée par le sinus de la somme de ces angles.*

Remplaçons, dans la formule (10), b et c par leurs valeurs

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A}, \quad c = a\frac{\sin C}{\sin A};$$

nous aurons

$$T = \tfrac{1}{2}a^2\frac{\sin B \sin C}{\sin A},$$

ou, à cause de $A = 180° - (B + C)$,

$$T = \tfrac{1}{2}a^2\frac{\sin B \sin C}{\sin (B + C)}. \qquad (11)$$

57. *L'aire d'un triangle est égale à la racine carrée du produit que l'on obtient en multipliant le demi-périmètre par ce demi-périmètre diminué de chacun des côtés.*

On a $\sin A = 2\sin\tfrac{1}{2}A . \cos\tfrac{1}{2}A$;

donc, par les formules (7) et (8),

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Cette valeur, substituée dans l'équation (4), donne

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\text{*}. \qquad (12)$$

58. *L'aire d'un triangle est égale au carré du demi-périmètre, multiplié par les tangentes des demi-angles.*

La formule (9) donne

$$\text{tg}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}, \; \text{tg}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}};$$

d'où

$$\text{tg}\tfrac{1}{2}A . \text{tg}\tfrac{1}{2}B . \text{tg}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}}$$
$$= \frac{1}{p^2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

* Cette formule a déjà été démontrée (*Géom.*, 169).

Mais $T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; donc aussi

$$T = p^2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C. \qquad (12)$$

CHAPITRE V.

Application de la trigonométrie aux différentes questions que présente le levé des plans. — Distance à un point inaccessible (60). — Mesure des hauteurs (68). — Trois points, A, B, C, étant donnés sur un plan, déterminer un quatrième point d'où les distances AB et BC ont été vues sous des angles qu'on a mesurés (71).

Problèmes.

59. Problème I. — *On donne, dans un triangle,*

$$a = 567^{m},37,\ b = 419^{m},85,\ c = 354^{m},63\ ;$$

et l'on demande les trois angles et l'aire du triangle.

$$\begin{aligned}
a &= 567,37\\
b &= 419,85\\
c &= 354,63\\
\hline
2p &= 1341,85\\
p &= 670,925\\
p-a &= 103,555\\
p-b &= 251,075\\
p-c &= 316,295
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log(p-b) &= 2,399\ 803\ 5 +\\
\log(p-c) &= 2,500\ 092\ 4 +\\
\log(p-a) &= 2,015\ 171\ 1 -\\
\log p \quad &= 2,826\ 674\ 0 -\\
\hline
&\ 0,058\ 050\ 8\\
\tfrac{1}{2} &= 0,029\ 025\ 4 = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A\\
&\ 8\ 993\ 5
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
31\ 90 & 422 \\ \cline{2-2}
2\ 36 & 7,6
\end{array}$$

$$\tfrac{1}{2} A = 46^\circ\ 54'\ 47'',6.$$

$$
\begin{array}{ll}
\log(p-a) = 2{,}015\ 171\ 1 & + \\
\log(p-b) = 2{,}500\ 092\ 4 & + \\
\log(p-c) = 2{,}399\ 803\ 5 & - \\
\log p \quad\ = 2{,}826\ 674\ 0 & - \\
\hline
\quad \bar{1}{,}288\ 786\ 0 &
\end{array}
$$

$$\tfrac{1}{2} = \bar{1}{,}644\ 393\ 0 = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\,B$$

$$
\begin{array}{r}
76\ 3 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
16\ 70 & 570 \\
\cline{2-2}
5\ 30 & 2,\ 9
\end{array}
$$

$$\tfrac{1}{2}\,B = 23^\circ\ 47'\ 42'',9.$$

$$
\begin{array}{ll}
\log(p-a) = 2{,}015\ 171\ 1 & + \\
\log(p-b) = 2{,}399\ 803\ 5 & + \\
\log(p-c) = 2{,}500\ 092\ 4 & - \\
\log p \quad\ = 2{,}826\ 674\ 0 & - \\
\hline
\quad \bar{1}{,}088\ 208\ 2 &
\end{array}
$$

$$\tfrac{1}{2} = \bar{1}{,}544\ 104\ 1 = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\,C$$

$$
\begin{array}{r}
039\ 9 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
64\ 20 & 675 \\
\cline{2-2}
3\ 45 & 9,\ 5
\end{array}
$$

$$\tfrac{1}{2}\,C = 19^\circ\ 17'\ 29'',5.$$

Les valeurs cherchées sont donc, *à moins d'une demi-seconde :*

$$
\begin{array}{rl}
A = & 93^\circ\ 49'\ 35'', \\
B = & 47^\circ\ 35'\ 26'', \\
C = & 38^\circ\ 34'\ 59''. \\
\hline
\text{Somme} = & 180^\circ\ \ 0'\ \ 0''.
\end{array}
$$

On a ensuite, pour déterminer l'aire du triangle :

$$\begin{array}{rl}
\log p & = 2{,}826\ 674\ 0 \\
\log(p-a) & = 2{,}015\ 171\ 1 \\
\log(p-b) & = 2{,}399\ 803\ 5 \\
\log(p-c) & = 2{,}500\ 092\ 4^{*} \\
\hline
& 9{,}741\ 741\ 0 \\
\tfrac{1}{2} & = 4{,}870\ 870\ 5 = \log T \\
& \phantom{4{,}870\ 8}66\ 0 \\
\hline
& \phantom{4{,}870\ 87}4\ 5
\end{array}$$

$$T = 74\ 279{,}77.$$

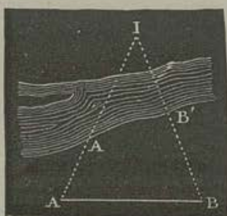
La surface du triangle est donc équivalente à 74 279$^{m.c}$,77.

60. Problème II. — *On donne, dans le triangle* AIB :

$$AB = c = 63^{m},27,$$

$$A = 58^{o}\ 27'\ 20'',$$

$$B = 63^{o}\ 34'\ 30'';$$



et l'on demande le côté AI $= b$**.

La formule à employer est

$$b = c\,\frac{\sin B}{\sin C}.$$

$$\begin{array}{rl}
& 180^{o} \qquad\quad + \\
A = & 58^{o}\ 27'\ 20'' - \\
B = & 63^{o}\ 34'\ 30'' - \\
\hline
AIB = C = & 57^{o}\ 58'\ 10''
\end{array}$$

$$\log c = \log 63{,}27 = 1{,}801\ 197\ 8 +$$

$$\log \sin B = \log \sin 63^{o}\ 34'\ 30'' = \bar{1}{,}952\ 074\ 2 +$$

$$\log \sin C = \log \sin 57^{o}\ 58'\ 10'' = \bar{1}{,}928\ 275\ 7 -$$

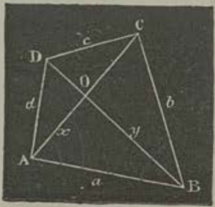
$$\log b = 1{,}824\ 996\ 3$$

$$b = 66^{m},834.$$

* Afin de rendre les calculs plus faciles à suivre, nous avons écrit plusieurs fois les logarithmes de p, $p-a$, $p-b$, $p-c$: dans la pratique, cette précaution est superflue.

** *Déterminer la distance d'un point accessible* A *à un point inaccessible* I. (*Géom.*, *App.* 28.)

61. PROBLÈME III. — *On donne, dans un quadrilatère* ABCD :



$$AB = a = 2\ 722^m,67,$$

$$DAB = A = 54^\circ\ 18'\ 13'',$$

$$CAB = \alpha = 41^\circ\ 23'\ 48'',$$

$$ABC = B = 83^\circ\ 15'\ 24'',$$

$$ABD = \beta = 37^\circ\ 23'\ 55'';$$

et l'on demande le côté CD $= c$*.

Si, au moyen des triangles ABD, ABC, on calcule le côté AD$=d$ et la diagonale AC $= x$, on n'aura plus qu'à résoudre le triangle DAC.

1° Calcul de AD $= d$:

$$\begin{array}{r} DAB = A = 54^\circ\ 18'\ 13'' + \\ ABD = \beta = 37^\circ\ 23'\ 55'' + \\ \hline 91^\circ\ 42'\ \ 8'' \end{array}$$

$$\text{supplément} = 88^\circ\ 17'\ 52'' = ADB.$$

$$d = a\,\frac{\sin\beta}{\sin ADB}.$$

$$\begin{array}{r} \log a = \log 2\ 724,67 = 3,435\ 314\ 0 + \\ \log\sin\beta = \log\sin 37^\circ\ 23'\ 55'' = \overline{1},783\ 443\ 7 + \\ \log\sin 88^\circ\ 17'\ 52'' = \overline{1},999\ 808\ 3 - \\ \hline \log d = 3,218\ 949\ 4 \end{array}$$

$$d = 1\ 655^m,58.$$

2° Calcul de AC $= x$:

$$\begin{array}{r} CAB = \alpha = 41^\circ\ 23'\ 48'' + \\ ABC = B = 83^\circ\ 15'\ 24'' + \\ \hline 124^\circ\ 39'\ 12'' \end{array}$$

$$\text{supplément} = 55^\circ\ 20'\ 48'' = ACB.$$

* *Déterminer la distance de deux points inaccessibles* C, D. (*Géom., App.* 29.)

$$x = a\,\frac{\sin B}{\sin ACB}.$$

$$\begin{array}{rl}
\log a = & 3{,}435\ 314\ 0 + \\
\log \sin B = \log \sin 83^\circ\ 15'\ 24'' = & \overline{1}{,}996\ 985\ 2 + \\
\log \sin 55^\circ\ 20'\ 48'' = & \overline{1}{,}915\ 192\ 6 - \\
\hline
\log x = & 3{,}517\ 406\ 6 \\
x = & 3\ 289^{m}{,}32\ *.
\end{array}$$

3° Calcul de $CD = c$:

$$\begin{array}{rl}
A = & 54^\circ\ 18'\ 13'' + \\
\alpha = & 41^\circ\ 23'\ 48'' - \\
\hline
DAC = & 12^\circ\ 54'\ 25'' \\
\text{supplément} = & 167^\circ\ \ 5'\ 35'' = D + DCA.
\end{array}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(D - DCA) = \frac{x-d}{x+d} \cot \tfrac{1}{2} DAC.$$

$$\begin{array}{rl}
x = & 3\ 289{,}32 \\
d = & 1\ 655{,}58 \\
\hline
x - d = & 1\ 633{,}74, \\
x + d = & 4\ 944{,}90. \\
\log (x-d) = & 3{,}213\ 182\ 9 + \\
\log \cot 6^\circ\ 27'\ 12''{,}5 = & 0{,}946\ 487\ 2 + \\
\log (x+d) = & 3{,}694\ 157\ 5 - \\
\hline
\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(D - DCA) = & 0{,}465\ 512\ 6 \\
\tfrac{1}{2}(D - DCA) = & 71^\circ\ \ 6'\ \ 2''{,}4 \\
\tfrac{1}{2}(D + DCA) = & 83^\circ\ 32'\ 47''{,}5 \\
\hline
DCA = & 12^\circ\ 26'\ 45''.
\end{array}$$

$$c = d\,\frac{\sin DAC}{\sin DCA}.$$

$$\begin{array}{rl}
\log d = & 3{,}218\ 949\ 4 + \\
\log \sin 12^\circ\ 54'\ 25'' = & \overline{1}{,}349\ 021\ 4 + \\
\log \sin 12^\circ\ 26'\ 45'' = & \overline{1}{,}333\ 480\ 6 - \\
\hline
\log c = & 3{,}234\ 490\ 2 \\
c = & 1\ 715^{m}{,}89.
\end{array}$$

* Ces deux premiers calculs sont des applications du Problème II. Il en est de même du calcul de c, après que les angles DAC, DCA sont connus.

Telle serait donc la distance entre *les deux points inaccessibles* C, D.

62. PROBLÈME IV. — *Les données étant les mêmes que dans le problème précédent, on demande l'aire du quadrilatère.*

Si nous la désignons par Q, nous aurons, par le théorème du n° 55,

$$Q = \tfrac{1}{2}x \,.\, \text{BO} \sin \text{AOB} + \tfrac{1}{2}x \,.\, \text{DO} \sin \text{AOB};$$

c'est-à-dire

$$Q = \tfrac{1}{2}xy \sin \text{AOB}.$$

1° Calcul de log y:

$$\begin{array}{rl} \text{DAB} = \text{A} = & 54^\circ\ 18'\ 13''\ + \\ \text{ABD} = \beta = & 37^\circ\ 23'\ 55''\ + \\ \hline & 91^\circ\ 42'\ \ 8'' \end{array}$$

supplément $= 88^\circ\ 17'\ 52''$.

$$y = a\frac{\sin \text{A}}{\sin \text{ADB}}.$$

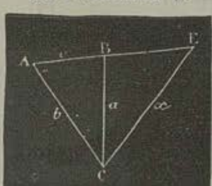
$$\begin{array}{rl} \log a = & 3{,}435\ 314\ 0\ + \\ \log \sin \text{A} = & \bar{1}{,}909\ 620\ 3\ + \\ \log \sin 88^\circ\ 17'\ 52'' = & \bar{1}{,}999\ 808\ 3\ - \\ \hline \log y = & 3{,}345\ 126\ 0\ + \end{array}$$

2° Calcul de Q :

$$\begin{array}{rl} \log x = & 3{,}517\ 106\ 6\ + \\ \log \sin \text{AOB} = & \bar{1}{,}991\ 642\ 0\ + \\ \hline & 6{,}853\ 874\ 6 \end{array}$$

$$Q = \tfrac{1}{2}\,.\,714\ 200 = 357\ 100^{\text{m.c.}}$$

63. PROBLÈME V. — *On donne, dans un triangle* ACE :



$$\text{BC} = a, \quad \text{AC} = b, \quad \text{AB} = c,$$
$$\text{BCE} = \gamma;$$

et l'on propose de déterminer

$$\text{CE} = x, \quad \text{BEC} = \text{E}^*.$$

* *Prolonger une droite* AB *au delà d'un obstacle* O. (*Géom.*, *App.* 30.)

Si l'on calcule d'abord l'angle B du triangle ABC, on en déduira

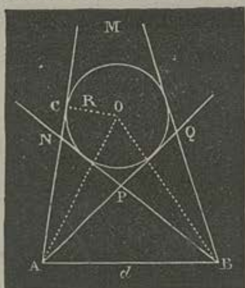
$$E = b - \gamma,\ x = a\,\frac{\sin B}{\sin E}.$$

64. **Problème VI.** — *Dans le quadrilatère* MNPQ, *circonscrit à un cercle* O, *on donne :*

1° *La diagonale extérieure* $AB = d$;

2° *Les angles* $MAB = \alpha$, $PAB = \alpha'$, $MBA = \beta$, $PB = \beta'$;

et l'on propose de calculer le rayon R *du cercle* O *.



Les droites AO, BO, sont les bissectrices des angles MAP, MBP. Par conséquent, dans le triangle AOB,

$$AO = d\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta + \beta')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \alpha' + \beta + \beta')}.$$

En second lieu, le triangle rectangle OCA donne

$$CO = R = AO\,\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \alpha').$$

Donc

$$R = d\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \alpha')\sin\frac{1}{2}(\beta + \beta')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \alpha' + \beta + \beta')}. \qquad (1)$$

65. *Remarque.* — Si, au lieu de calculer AO, on avait cherché l'expression du côté BO, on aurait trouvé

$$R = d\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta - \beta')\sin\frac{1}{2}(\alpha + \alpha')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \alpha' + \beta + \beta')}. \qquad (2)$$

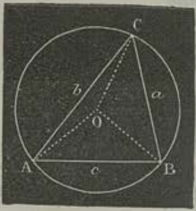
La comparaison des deux valeurs de R donne l'*équation de condition*

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \alpha')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \alpha')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta - \beta')}{\sin\frac{1}{2}(\beta + \beta')}, \qquad (3)$$

à laquelle doivent satisfaire les angles observés α, α', β, β'.

* *Déterminer le rayon d'une tour inaccessible.* (*Géom., App.* 32.)

66. Problème VII. — *Calculer le rayon* R *de la circonférence* O, *circonscrite à un triangle* ABC*.



Le triangle isocèle AOB donne

$$c = 2\,\mathrm{R} \sin \tfrac{1}{2}\,\mathrm{AOB},$$

ou, à cause de AOB = 2 C (*Géom.*, 123) :

$$c = 2\,\mathrm{R} \sin \mathrm{C}.$$

D'un autre côté, en désignant par T l'aire du triangle, on a (55)

$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{2}\,ab \sin \mathrm{C}.$$

Par conséquent,

$$\mathrm{R} = \frac{abc}{4\,\mathrm{T}}.$$

Ainsi, *le rayon du cercle circonscrit est égal au produit des trois côtés, divisé par quatre fois l'aire du triangle.*

Si l'on met pour T sa valeur (57), il en résulte

$$\mathrm{R} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

67. Soient par exemple, comme dans le Problème I :

$$a = 567^{\mathrm{m}},37, \quad b = 419^{\mathrm{m}},85, \quad c = 354^{\mathrm{m}},63;$$

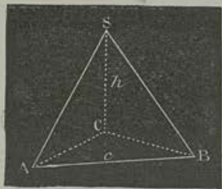
le rayon R sera donné par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \log a &= 2,753\,866\,4\ + \\ \log b &= 2,623\,094\,2\ + \\ \log c &= 2,549\,775\,5\ + \\ \log \mathrm{T} &= 4,870\,870\,5\ - \\ \log 4 &= 0,602\,060\,0\ - \\ \hline \log \mathrm{R} &= 2,453\,805\,6 \end{aligned}$$

$$\mathrm{R} = 284^{\mathrm{m}},319.$$

* *Par trois points* A, B, C, *donnés sur un terrain, faire passer une circonférence.* (*Géom., App.* 31.)

68. Problème VIII. — *L'arête SC du tétraèdre SABC étant supposée perpendiculaire au plan de la base ABC, on donne*



1° *L'arête* $AB = c$;

2° *Les angles* $CAS = \alpha$, $BAS = A$, $CBS = \beta$, $ABS = B$;

et l'on propose de calculer la hauteur SC *du tétraèdre* *.

Ce problème a de l'analogie avec le Problème VI. On a, en effet, par les triangles ABS, ACS,

$$h = AS \sin \alpha,\ AS = c \frac{\sin B}{\sin (A + B)};$$

donc

$$h = c \frac{\sin B \sin \alpha}{(\sin A + B)}. \qquad (4)$$

69. *Remarque.* — Les triangles ABS, BCS donneraient, au lieu de cette valeur,

$$h = c \frac{\sin A \sin \beta}{\sin (A + B)}. \qquad (5)$$

Par conséquent, *les quatre angles observés*, α, β, A, B, *doivent satisfaire à l'équation de condition :*

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \qquad (6)$$

70. Problème IX. — *Résoudre l'équation*

$$\sin x + \tfrac{17}{8} \cos x = - \tfrac{2}{3}. \qquad (1)$$

Comme il y a des tangentes de toutes les grandeurs, nous pouvons poser

$$\operatorname{tg} \varphi = \tfrac{17}{8}, \qquad (2)$$

* *Déterminer la hauteur d'une montagne.* (*Géom.*, *App.* 33.)

φ étant un angle auxiliaire. Au moyen de cette transformation, l'équation (1) devient

$$-\sin(x+\varphi) = \tfrac{2}{3}\cos\varphi. \qquad (3)$$

$$\begin{array}{rl}
\log 17 = & 1{,}230\,448\,9 + \\
\log 8 = & 0{,}903\,090\,0 - \\
\hline
\log \operatorname{tg}\varphi = & 0{,}327\,458\,9 \\
\varphi = & 64^\circ 47' 56''. \\
\log\cos\varphi = & \bar{1}{,}629\,222\,5 + \\
\log 2 = & 0{,}301\,030\,0 + \\
\log 3 = & 0{,}477\,121\,2 - \\
\hline
& \bar{1}{,}453\,131\,3 = \log[-\sin(x+\varphi)].
\end{array}$$

$$\text{arc corresp.} = 16^\circ\,29'\,30''.$$

Il résulte, de la comparaison entre cette valeur et l'équation (3), que *l'on peut prendre*

$$x+\varphi = 196^\circ\,29'\,30'';$$

d'où

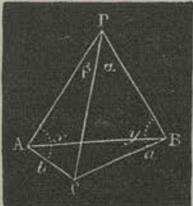
$$x = 131^\circ\,41'\,34''.$$

Cette même équation (3) est encore vérifiée par

$$x = -\varphi - 16^\circ\,29'\,30'' = -81^\circ\,17'\,26'',$$

et par une infinité d'autres valeurs de x.

71. Problème X. — *Trois points* A, B, C *étant donnés sur un plan, déterminer, sur ce plan, le point* P *d'où les distances* AC, BC *ont été vues sous des angles connus* β, α.



Dans l'*Appendice à la Géométrie* (34), nous avons indiqué la solution graphique de ce problème. Pour le résoudre par le calcul, prenons pour inconnues, dans le quadrilatère APBC, les angles PAC $= x$ et PBC $= y$.

Nous aurons d'abord

$$x + y = 360^\circ - (\alpha+\beta+C).$$

D'un autre côté, les triangles PAC, PBC donnent

$$\mathrm{PC} = b\frac{\sin x}{\sin \beta}, \quad \mathrm{PC} = a\frac{\sin y}{\sin \alpha};$$

d'où

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}.$$

La question est donc ramenée à un problème connu (50).

72. En appliquant la méthode employée dans la résolution de ce problème, on tire d'abord, de la proportion précédente,

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{a \sin\beta - b \sin \alpha}{a \sin\beta + b \sin \alpha};$$

ou, à cause de

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x - y)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x + y)}:$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x - y) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x + y)\frac{a \sin \beta - b \sin \alpha}{a \sin \beta + b \sin \alpha}.$$

Mais,

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x + y) = \operatorname{tg}[180^\circ - \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \mathrm{C})] = -\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \mathrm{C});$$

donc enfin

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x - y) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \mathrm{C})\frac{b \sin \alpha - a \sin \beta}{b \sin \alpha + a \sin \beta}.$$

Cette formule donne la demi-différence des angles x, y dont la demi-somme est déjà connue : ces angles seront donc parfaitement déterminés.

73. *Remarque.* — Comme *on ne peut effectuer, par logarithmes, ni additions ni soustractions,* il est bon de transformer, ainsi qu'il suit, la fraction

$$\frac{b \sin \alpha - a \sin \beta}{b \sin \alpha + a \sin \beta} = f.$$

Divisant les deux termes par $b \sin \alpha$, on a

$$f = \frac{1 - \dfrac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}}{1 + \dfrac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}}.$$

Il y a des tangentes de toutes les grandeurs; donc l'on peut *poser :*

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}, \qquad (1)$$

φ étant un arc auxiliaire. Par suite,

$$f = \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi}.$$

Mais, ainsi qu'il est aisé de le reconnaître, $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$; donc

$$f = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ . \operatorname{tg} \varphi},$$

ou

$$f = \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi);$$

et enfin

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x - y) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + C) \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi). \qquad (2)$$

74. *Application.* — Soient

$$a = 650^{m},73, \qquad b = 287^{m},19,$$
$$\alpha = 38^\circ 18' 13'' \qquad \beta = 23^\circ 45' 48'',$$
$$C = 138^\circ 18' 55''.$$

La formule (1) détermine φ par le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\log 650,73 &= 2,813\ 400\ 8 + \\
\log \sin 23^\circ 45' 48'' &= \bar{1},605\ 261\ 6 + \\
\log 287,19 &= 2,458\ 169\ 3 - \\
\log \sin 38^\circ 18' 13'' &= \bar{1},792\ 271\ 5 - \\
\hline
\log \operatorname{tg} \varphi &= 0,168\ 221\ 6 \\
\varphi &= 55^\circ 49' 44'',7.
\end{aligned}$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} \alpha &= 38^\circ\,18'\,13'' \\ \beta &= 23^\circ\,45'\,48'' \\ C &= 128^\circ\,18'\,55'' \\ \hline \alpha+\beta+C &= 200^\circ\,22'\,56'' \\ \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+C) &= 100^\circ\,11'\,28''; \end{aligned}$$

donc, par l'équation (2) :

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(x-y) = \cot 10^\circ 11'\,28''\,.\operatorname{tg} 10^\circ\,49'\,44{,}7^{*}.$$

$$\begin{aligned} \log\cot 10^\circ\,11'\,28'' &= 0{,}745\,287\,1 \\ \log\operatorname{tg} 10^\circ\,49'\,44'',7 &= \bar{1},281\,653\,6 \\ \hline \log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(x-y) &= 0{,}026\,940\,7 \\ \tfrac{1}{2}(x-y) &= 46^\circ\,46'\,33'',5 \\ \tfrac{1}{2}(x+y) &= 79^\circ\,48'\,32'' \\ \hline x &= 126^\circ\,35'\;\;5'',5 \\ y &= 33^\circ\;\;1'\,58'',5. \end{aligned}$$

* En changeant les signes des deux facteurs.

NOTIONS

DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE*.

CHAPITRE I.

Insuffisance du dessin ordinaire pour la représentation des corps. Utilité d'une méthode géométrique qui, par des opérations graphiques exécutées sur un seul et même plan, fasse connaître exactement la forme et la position d'une figure à trois dimensions (1). — Projection d'un point, d'une droite, d'une ligne quelconque sur un plan (2-6). — Plan de projection (2). — Traces d'une droite (15). — Vraie longueur de la droite qui joint deux points donnés par leurs projections (40). — Angles d'une droite avec les plans de projection (22-26). — Représentation d'un plan par ses traces (13). — Angle d'un plan avec les plans de projection (14). — Méthode des rabattements (18).

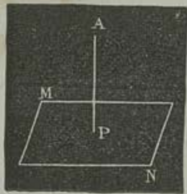
Préliminaires.

1. Le dessin ordinaire représente les objets, non tels qu'ils sont, mais tels que les a vus le dessinateur, c'est-à-dire avec toutes les déformations dues à la perspective. Par exemple un cube est ordinairement figuré par la réunion de *trois quadrilatères irréguliers*. Dans l'architecture, dans la construction des machines, etc., on a recours à un autre mode de représentation, qui conserve à toutes les parties des objets leurs dimensions relatives, ou qui permet du moins de les retrouver au besoin. Cette branche particulière de la Géométrie et de l'Art du dessin porte le nom de *méthode des projections*.

Des projections.

2. On appelle *projection d'un point* sur un plan, le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur le plan.

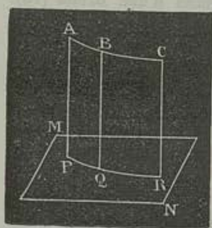
* Ces notions sont extraites, en grande partie, de notre *Traité élémentaire de Géométrie descriptive*, auquel on pourra recourir pour plus de détails.



Ainsi, concevez que du point A on abaisse, sur le plan MN, la perpendiculaire AP ; le pied P de cette ligne est la projection du point A sur le plan MN, qu'on nomme *plan de projection*. Il est clair que le point P est la projection commune de tous les points appartenant à la droite indéfinie AP.

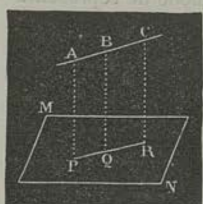
3. La *projection d'une ligne* est le lieu géométrique des projections de tous ses points.

Ainsi, la ligne PQR, qui passe par les projections des différents points de la ligne ABC, sur le plan MN, est la projection de ABC, sur ce même plan. Les perpendiculaires AP, BQ, CR étant parallèles entre elles, leur *lieu* est une surface cylindrique, que l'on désigne ordinairement sous la dénomination de *cylindre projetant.*



On peut considérer la projection PQR comme l'intersection de ce cylindre par le plan MN ; et il est évident que toute courbe A′B′C′, tracée sur la surface de ce cylindre, a pour projection, sur le plan MN, la même ligne PQR.

4. Lorsque la ligne à projeter est une droite ABC, les perpendiculaires AP, BQ, CR, abaissées de ses différents points sur le plan de projection MN, sont dans un même plan perpendiculaire à MN ; les pieds de ces perpendiculaires sont donc en ligne droite ; par conséquent, *la projection d'une ligne droite est une ligne droite.*



5. Deux points déterminent une droite. Donc, pour projeter la droite ABC sur le plan MN, il suffit de mener, par deux poins A et B de cette ligne, des perpendiculaires AP, BQ au plan, et de joindre, par une droite PQ, les pieds de ces perpendiculaires : PQ est la projection demandée.

Remarquons encore que, pour obtenir la projection de la droite ABC, on peut mener, par cette droite, un plan perpendiculaire à MN; l'intersection de ce *plan projetant* avec le plan MN est la projection de ABC.

6. Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, sa projection est le point où elle perce le plan : car les perpendiculaires abaissées des différents points de la droite, sur le plan, se confondent avec la droite.

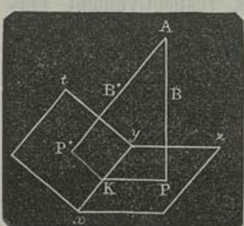
Il suit de là que : 1° *Tous les points d'une droite perpendiculaire à un plan ont la même projection sur ce plan;* 2° *un point n'est pas déterminé par sa projection sur un plan.*

Détermination du point.

7. Nous allons voir maintenant que *la position d'un point est,* au contraire, *parfaitement déterminée, si l'on connaît les projections de ce point sur deux plans qui se coupent.* Mais d'abord, cherchons quelle est la relation qui existe entre ces projections.

8. Théorème. — *Les perpendiculaires abaissées des deux projections d'un point, sur l'intersection des plans de projection, rencontrent cette droite en un même point.*

Pour démontrer cette proposition fondamentale, concevons deux plans xyz, xyt, se coupant suivant la droite xy. Si, d'un point A situé hors de ces plans, on mène les perpendiculaires AP, AP′, le plan PAP′, conduit par ces droites, est perpendiculaire aux deux plans de projection; par suite, il est perpendiculaire à l'intersection xy; donc cette droite xy est perpendiculaire aux intersections PK, P′K du plan PAP′ avec les plans de projection. Les perpendiculaires menées sur l'intersection xy, par les projections P, P′ du point A, passent donc par un même point K de cette droite. C'est ce qu'il fallait démontrer.



9. Réciproque. — *Lorsque deux points, situés dans deux plans qui se coupent, sont tels que les perpendiculaires abaissées de ces points sur l'intersection des plans de projection, rencontrent cette droite en un même point, ces deux points sont les*

projections d'un même point de l'espace, lequel est entièrement déterminé.

En effet, les droites PK, P'K étant perpendiculaires à l'intersection xy en un même point K, le plan PKP' est perpendiculaire à xy; donc il est perpendiculaire à chacun des plans xyz, xyt. Par suite, les droites PB, P'B', respectivement perpendiculaires à ces plans, sont situées dans le plan PKP'; et, comme elles sont perpendiculaires à deux droites qui se coupent, elles se coupent elles-mêmes en un point A, qui a pour projections P et P'.

10. D'après les deux principes précédents, *pour que deux points, situés dans deux plans de projection, soient les projections d'un même point de l'espace, il faut et il suffit que les perpendiculaires abaissées de ces points, sur l'intersection des plans donnés, rencontrent cette droite en un même point.*

Détermination de la ligne.

11. *Une droite est généralement déterminée quand on connaît ses projections sur deux plans qui se coupent.*

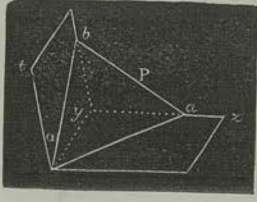
Menons, par chaque projection, un plan perpendiculaire au plan de projection correspondant : la droite doit se trouver dans chacun des plans ainsi conduits; elle en est donc l'intersection.

12. *Les projections d'une ligne quelconque, faites sur deux plans qui se coupent, la déterminent généralement.*

En effet, la ligne cherchée est située, tout entière, sur deux surfaces cylindriques ayant pour *directrices* les projections données, et dont les *génératrices* sont, respectivement, perpendiculaires aux deux plans : elle se confond donc avec l'intersection de ces surfaces.

Détermination du plan. Traces d'une droite.

13. Pour déterminer de position un plan P, on pourrait se servir des projections de trois de ses points, non situés en ligne droite. Mais on trouve plus commode de fixer la position d'un plan par les droites αa, αb, suivant lesquelles il coupe les plans de projection. Ces droites sont les *traces du plan*.



14. Quand les deux traces αa, αb d'un plan sont données, la position du plan est entièrement déterminée; car deux droites qui se coupent déterminent un plan. Ordinairement, le plan P et les plans de projection forment un angle trièdre qui a pour arêtes les deux traces et l'intersection des plans fixes. Ainsi, *les deux traces d'un plan doivent couper en un même point l'intersection des plans de projection.*

15. Par analogie avec ce qui a lieu pour le plan, on appelle *traces d'une droite*, les points où cette ligne perce les plans de projection.

Projections horizontales ou verticales.

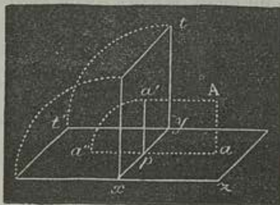
16. Jusqu'à présent, nous n'avons fait aucune hypothèse particulière sur l'angle des plans de projection. Mais, afin de rendre les constructions plus simples, nous supposerons, dorénavant, que cet angle soit droit. Afin d'abréger le discours, nous regarderons l'un des plans comme *horizontal* et l'autre comme *vertical*, bien qu'ils puissent avoir des positions quelconques. L'intersection des deux plans sera nommée *ligne de terre*.

17. Les projections et les traces prennent le nom du plan de projection qui les contient. Par exemple, les projections et les traces situées dans le plan vertical sont les *projections verticales* et les *traces verticales*. Suivant qu'une droite est parallèle au plan horizontal de projection, ou qu'elle est perpendiculaire à ce plan, cette ligne est dite *horizontale* ou *verticale*. On dit, dans le même sens, qu'un plan est *horizontal* ou qu'il est *vertical*, suivant qu'il est parallèle ou perpendiculaire au plan horizontal de projection.

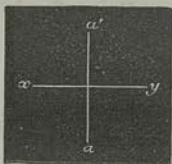
Rabattement du plan vertical.

18. Les explications précédentes suffisent pour faire pressentir la possibilité de résoudre les problèmes qui se rapportent aux trois dimensions de l'espace, par des constructions renfermées dans deux plans rectangulaires. Mais, afin de les simplifier autant que possible, et de réunir les deux projections sur un seul dessin, on fait tourner le plan vertical xyt autour de la ligne de terre xy, jusqu'à ce qu'il vienne en xyt' sur le prolongement du plan horizontal xyz.

De cette manière, toutes les constructions sont réellement effectuées sur le plan horizontal; mais on doit concevoir que les projections verticales sont remises à leur place, au moyen d'un quart de révolution autour de la ligne de terre. Quant aux points situés hors des plans de projection, ils ne paraissent pas dans les figures: mais il est facile, au moyen de leurs projections, de se les représenter dans l'espace.



Par exemple, a et a' étant les projections d'un point inconnu A, on suppose que le plan vertical, déjà supposé rabattu sur le plan horizontal, fasse un quart de révolution autour de xy. Les plans de projection étant alors perpendiculaires l'un à l'autre, si, par les points a, a', on conçoit des perpendiculaires au plan horizontal et au plan vertical, la rencontre de ces droites sera le point A.



Relation entre les projections d'un même point.

19. Après le rabattement du plan vertical sur le plan horizontal, *les deux projections d'un même point sont situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.*

Soient a, a' les projections d'un point A situé dans l'espace: les perpendiculaires abaissées de ces points sur xy rencontrent cette droite en un même point p. Si donc le plan vertical tourne autour de xy pour venir s'appliquer sur le plan horizontal, la droite $a'p$ ne cesse pas d'être perpendiculaire à xy; et, quand le plan vertical xyt coïncide avec le plan horizontal, le point a' est en a'', sur le prolongement de ap, et à une distance du point p égale à $a'p$.

20. D'après cela, *pour que deux lignes se coupent dans l'espace, il faut et il suffit que le point de rencontre de leurs projections verticales et le point de rencontre de leurs projections horizontales, se trouvent sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.*

Remarques.

21. Nous terminerons ces considérations préliminaires en énonçant quelques propriétés importantes, dont la démonstration ne saurait embarrasser le lecteur.

1° *La distance d'un point de l'espace au plan horizontal est égale à la perpendiculaire abaissée de sa projection verticale sur la ligne de terre; la distance d'un point de l'espace, au plan vertical, est égale à la perpendiculaire abaissée de sa projection horizontale sur la ligne de terre.*

2° *Si un point ou si une ligne est dans l'un des deux plans de projection, sa projection sur l'autre plan est sur la ligne de terre.*

3° *Quand une ligne est dans un plan parallèle à l'un des plans de projection, sa projection sur l'autre plan est une droite parallèle à la ligne de terre.*

4° *Quand une droite est perpendiculaire à l'un des plans de projection, sa projection sur ce plan se réduit à un point* (6), *et sa seconde projection est perpendiculaire à la ligne de terre.*

5° *Lorsqu'un plan est perpendiculaire à l'un des plans de projection, sa trace sur l'autre plan est perpendiculaire à la ligne de terre.*

6° *Quand un plan est parallèle à l'un des plans de projection, sa trace sur l'autre plan de projection est parallèle à la ligne de terre.*

7° *Si le plan coupe les deux plans de projection, mais qu'il soit parallèle à la ligne de terre, ses deux traces sont parallèles à cette ligne.*

8° *Les projections de deux droites parallèles sont respectivement parallèles; et réciproquement.*

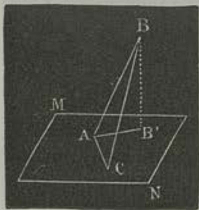
9° *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, les projections de la droite sont respectivement perpendiculaires aux traces du plan; et réciproquement.*

10° *Les traces de deux plans parallèles sont respectivement parallèles; et réciproquement.*

11° *Lorsque deux droites sont perpendiculaires, leurs projections, sur un plan parallèle à l'une d'elles, sont perpendiculaires.* (*Géométrie*, 264.)

Angle d'une droite et d'un plan.

22. Théorème. — *L'angle formé par une droite et par sa projection sur un plan, est le minimum des angles que fait cette droite avec toutes les droites menées par son pied, dans le plan.*

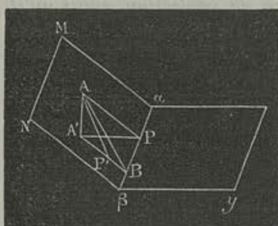


AB′ étant la projection de AB, prenons, dans le plan MN, AC = AB′, et menons BC. Cette oblique est plus grande que la perpendiculaire (*Géométrie*, 265); donc les deux triangles BAC, BAB′ ont deux côtés égaux, chacun à chacun, et un côté inégal; donc l'angle BAC est plus grand que l'angle BAB′.

23. A cause de cette propriété, l'angle BAB′, formé par une droite AB et par sa projection AB′, est appelé *angle de la droite avec le plan de projection.*

24. Théorème. — *De toutes les droites menées par un même point* A *dans un plan donné* MNαβ, *celle qui fait avec sa projection horizontale l'angle maximum, est la perpendiculaire* AP *à la trace horizontale* αβ *du plan.*

Joignons le point P avec la projection horizontale A′ du point A : A′P est la projection de AP. Soit ensuite AB une oblique quelconque menée, du point donné, à la trace horizontale αβ du plan MNαβ, et soit A′B la projection horizontale de cette oblique.



On a

$$angle\ APA' > angle\ ABA'.$$

En effet, prenons A′P′ = A′P : les deux triangles rectangles AA′P, AA′P′ sont égaux. Mais l'angle extérieur AP′A′ est plus grand que l'angle intérieur ABP′; donc celui-ci est plus petit que APA′.

25. La droite AP est ce qu'on appelle la *ligne de plus grande pente* du plan MNαβ.

26. *Remarque.* — L'angle APA′ est l'angle plan correspondant à l'angle dièdre Mαβy, c'est-à-dire qu'il donne la *pente* du plan MNβα.

CHAPITRE II.

Exercices (27-47). — Intersection de deux plans (33). — Intersection d'une droite et d'un plan (34). —Distance d'un point à un plan (41). —Distance d'un point à une droite (42).—Angle de deux droites (43). — Angle d'une droite et d'un plan (46).—Angle de deux plans (47).

Problèmes préliminaires.

27. Problème I. — *Trouver les traces d'une droite dont les projections sont données.*

Supposons que les projections ab, $a'b'$ de la droite donnée coupent la ligne de terre aux points b, a' (*fig.* 1).

Pour trouver la trace horizontale de la droite, c'est-à-dire le point où elle perce le plan horizontal, on observe que ce point, appartenant au plan horizontal, doit avoir sa projection verticale sur la ligne de terre xy (21, 2°); cette projection doit aussi se trouver sur $a'b'$, projection verticale de la droite; donc le point a', où $a'b'$ rencontre xy, est la projection verticale de la trace horizontale de la droite.

Si donc on élève $a'a$ perpendiculaire à xy, l'intersection a des droites $a'a$, ab est la trace horizontale de la droite donnée. De même, si par le point b, où la projection horizontale ab rencontre la ligne de terre, on élève bb' perpendiculaire à xy, son intersection b' avec la projection verticale $a'b'$ est la trace verticale de la droite.

De ce qui précède, on tire cette règle générale : *Pour déterminer la trace horizontale d'une droite, on prolonge la projection verticale jusqu'à la ligne de terre; par le point de rencontre on mène, dans le plan horizontal, une perpendiculaire à la ligne de terre : cette perpendiculaire va couper la projection horizontale de la droite au point cherché.*

Pareillement, *pour trouver la trace verticale de la droite, on* *prolonge la projection horizontale jusqu'à sa rencontre avec la ligne de terre ; par le point ainsi obtenu on élève, dans le plan vertical, une perpendiculaire à la ligne de terre : cette perpendiculaire coupe, au point demandé, la projection verticale de la droite.*

28. Problème II. — *Trouver les projections d'une droite dont les traces sont données.*

Soient a, b' les deux traces de la droite (*fig.* 1).

La trace horizontale a se confond avec sa projection horizontale, et sa projection verticale est le pied a' de la perpendiculaire aa' abaissée du point a sur la ligne de terre.

Semblablement, la trace verticale b' de la droite se confond avec sa projection verticale, et sa projection horizontale est le point b, intersection de xy avec la perpendiculaire $b'b$.

Les deux projections cherchées sont donc ab, $a'b'$.

29. Problème III. — *Par un point donné, mener une parallèle à une droite donnée.*

Soient a, a' les projections du point donné (*fig.* 2), et cb, $c'b'$ les projections de la droite donnée.

La droite cherchée passant par le point A, les projections de cette ligne doivent passer par les projections a, a' de A ; d'ailleurs, les projections de deux droites parallèles sont respectivement parallèles (21, 8°).

On trouve donc les projections de la droite demandée en menant, par les projections a, a' du point donné, des parallèles ad, $a'd'$ aux projections cb, $c'b'$ de la droite donnée.

30. Problème IV. — *Faire passer un plan par trois points donnés.*

Soient a, b, c, les projections horizontales des trois points donnés (*fig.* 3), et a', b', c' leurs projections verticales.

Les trois droites AB, AC, BC qui, dans l'espace, joignent deux à deux les points donnés, ont pour projections horizontales ab, ac, bc, et pour projections verticales $a'b'$, $a'c'$, $b'c'$. Ces droites percent le plan horizontal aux points m, n, p, et le plan vertical aux points q, r, s (27).

Par conséquent, la trace horizontale $\alpha\beta$ du plan passe par les points m, n, p ; la trace verticale $\beta\gamma$ passe par les points q', r', s' ; et, si la construction a été faite avec exactitude, ces deux traces coupent la ligne de terre en un même point β.

31. *Remarque.* — Ordinairement, on se borne à construire les projections de deux des trois droites, et à déterminer la trace horizontale ou la trace verticale de l'une de ces deux droites et les deux traces de l'autre.

32. PROBLÈME V. — *Par un point donné, mener un plan parallèle à un plan donné.*

Prenons, dans le plan donné $\alpha\beta\gamma$ (*fig.* 4), une droite quelconque MN, et menons, par le point donné O, une parallèle AB à MN. Cette parallèle est contenue dans le plan cherché; par suite, ses traces appartiennent aux traces du plan; et celles-ci, étant parallèles aux traces du plan donné, sont complétement déterminées.

La construction précédente peut être simplifiée, quand le plan $\alpha\beta\gamma$ n'est pas parallèle à la ligne de terre. En effet, menons, par le point O, une parallèle à la trace horizontale $\alpha\beta$ du plan donné (*fig.* 5), c'est-à-dire une *horizontale* de ce plan. La projection horizontale de cette parallèle est la droite oa parallèle à $\alpha\beta$, et sa projection verticale est $o'a'$ parallèle à xy. La trace verticale a' de la droite OA appartenant à la trace verticale du plan cherché, on trouve les deux traces de ce plan en menant $\nu a'\mu$ parallèle à $\gamma\beta$, et $\mu\lambda$ parallèle à $\beta\alpha$.

33. PROBLÈME VI. — *Construire les projections de l'intersection de deux plans donnés.*

Soient $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ les traces du premier plan, et $\lambda\mu$, $\mu\nu$ les traces du second (*fig.* 6).

Il est clair que le point a, où se coupent les traces horizontales, est la trace horizontale de l'intersection cherchée. Semblablement, cette intersection a pour trace verticale le point de rencontre b' des traces verticales. Donc cette droite est déterminée. Elle a pour projections ab, $a'b'$.

34. PROBLÈME VII. — *Trouver le point où une droite perce un plan.*

On fait passer un plan quelconque par la droite; on cherche l'intersection de ce plan avec le plan donné; enfin on détermine le point de rencontre de cette intersection et de la droite donnée. Le point ainsi obtenu répond à la question. Le plan auxiliaire peut avoir une position quelconque; mais la construction étant plus simple quand il est perpendiculaire à l'un des plans de projection, nous le prendrons ainsi.

Soient $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ les traces du plan (*fig.* 7), et ab, $a'b'$ les projections de la droite.

Prenons pour plan auxiliaire le plan qui projette horizontalement la droite : sa trace horizontale est ab, et sa trace verticale est qq' perpendiculaire à xy. L'intersection des deux plans est projetée en pq, $p'q'$; donc le point o', où cette dernière droite rencontre $a'b'$, est la projection verticale du point cherché. La projection verticale o' étant connue, on en conclut la projection horizontale o, que l'on pourrait, d'ailleurs, construire directement.

35. Problème VIII. — *Mener, par un point donné, un plan perpendiculaire à une droite donnée.*

Soient o, o' les projections du point donné (*fig.* 8), et ab, $a'b'$ les projections de la droite donnée.

D'un point quelconque β' de la ligne de terre, abaissons des perpendiculaires $\beta'\alpha'$, $\beta'\gamma'$ sur les projections de la droite : ces perpendiculaires sont les traces d'un plan $\alpha'\beta'\gamma'$ perpendiculaire à cette droite (21, 9°). Donc le plan $\alpha\beta\gamma$, passant par (o, o') et parallèle au plan auxiliaire $\alpha'\beta\gamma'$ (21, 10°), est le plan demandé.

36. *Remarque.* — Si l'on mène, par le point donné, une parallèle à la trace horizontale du plan cherché, c'est-à-dire une horizontale $(cd, c'd')$ perpendiculaire à la droite donnée, et que l'on détermine ensuite la trace verticale d' de cette parallèle, on n'aura pas besoin de construire le plan $\alpha'\beta'\gamma'$.

37. Problème IX. — *Connaissant l'une des projections d'un point situé dans un plan donné, trouver la position que prend ce point, lorsqu'on rabat, sur le plan horizontal, le plan donné.*

Soit o la projection horizontale donnée (*fig.* 9).

En considérant la verticale projetée en o, et cherchant le point où cette droite perce le plan donné (34), on détermine la projection verticale o' du point O. Remarquons maintenant que ce point, en tournant autour de la trace horizontale $\alpha\beta$, décrit une circonférence dont le plan, perpendiculaire à $\alpha\beta$, est vertical. La trace horizontale de ce plan est donc la perpendiculaire op à $\alpha\beta$ (21, 9°). De plus, le pied p de cette droite est le centre de la circonférence dont il s'agit. Enfin le rayon Op est évidemment l'hypoténuse du triangle Oop, rectangle en o. Rabattant ce triangle, dont la hauteur égale $\omega o'$ (21, 1°), autour de sa base op, et prenant, sur le prolongement de op, $pO_2 = pO_1$, nous aurons, en O_2, le rabattement cherché.

38. *Remarque.* — La projection horizontale o d'un point O situé dans un plan $\alpha\beta\gamma$, et le rabattement O_2 de O sur le plan horizontal, sont toujours sur une même perpendiculaire oO_2 à la trace horizontale $\alpha\beta$ du plan.

39. Problème X. — *Connaissant le rabattement d'un point situé dans un plan donné, construire les projections du point.*

On suppose que O_2 soit le rabattement, sur le plan horizontal, d'un point O situé dans le plan donné (*fig.* 10), et l'on demande les deux projections de ce point O.

D'après le problème précédent, la projection horizontale o est située sur la perpendiculaire O_2p à la trace horizontale $\alpha\beta$; et sa distance à cette trace est la base du triangle rectangle poO_1, dont l'hypoténuse égale pO_2. Pour déterminer cette hypoténuse en direction, il suffit de chercher le rabattement d'un de ses points; par exemple, le rabattement Q_1 de sa trace verticale (q, q'). La direction pQ_1 étant connue, on obtient, avec la plus grande facilité, le rabattement O_1 et les projections o, o' du point O.

Problèmes sur les distances.

40. Problème XI. — *Déterminer la distance de deux points donnés.*

Pour avoir la véritable grandeur de la droite AB (*fig.* 11) projetée suivant ab, $a'b'$, rabattons, autour de sa trace horizontale ab, le plan vertical qui la contient (37) : le rabattement de la distance AB sera A_1B_1.

Cette construction peut être simplifiée; car si l'on imagine par le point b, projection de B, une parallèle bC à BA, terminée à la verticale aA, on forme un triangle rectangle ayant pour base ab, pour hauteur la différence des deux verticales aA, bB, et dont l'hypoténuse est égale et parallèle à AB. Il suit de là que si, par le point a, on mène aC_1 perpendiculaire à ab et égale à la différence entre $\alpha a'$ et $\beta b'$, et qu'ensuite on tire C_1b, cette droite sera égale à AB.

Cette seconde construction peut, à son tour, recevoir des simplifications. En effet, menons $b'q'$ parallèle à xy; prenons, sur cette droite, $q'b'_1 = ab$, et tirons $a'b'_1$. Cette dernière droite sera encore égale à AB; car le triangle $a'q'b'_1$ est évidemment égal à C_1ab.

41. Problème XII.— *Construire la distance d'un point donné à un plan donné.*

Cette distance est la perpendiculaire abaissée, du point donné A, sur le plan donné $\alpha\beta\gamma$ (*fig.* 12). On en obtient les projections en menant, par les points a, a', des perpendiculaires ap, $a'p'$ aux traces du plan (21, 9°). On cherche ensuite les projections p, p' du pied P de la perpendiculaire OP. Enfin, on trouve facilement (40) la vraie grandeur $a'p'$ de cette droite.

42. Problème XIII. — *Construire la plus courte distance d'un point donné à une droite donnée.*

Par le point A, menons un plan $\alpha\beta\gamma$ perpendiculaire à BC (*fig.* 13). Construisons les projections du point P où la droite perce le plan : la droite AP, évidemment perpendiculaire à BC, sera la plus courte distance cherchée.

Pour plus de clarté dans l'épure, on n'a pas construit le rabattement de AP.

Problèmes sur les angles.

43. Problème XIV. — *Construire l'angle de deux droites données.*

Si les droites ne se coupent pas, et que, par un point O pris à volonté, on y mène des parallèles OA, OB, l'angle AOB formé par ces parallèles est ce qu'on appelle l'angle des droites données.

Pour construire l'angle AOB, cherchons la trace horizontale ab du plan AOB (*fig.* 14); déterminons (37) le rabattement O_2 du point O, et joignons O_2 aux traces horizontales a, b des droites OA, OB : aO_2b est l'angle cherché.

44. *Remarque.*— Le point p, pied de la hauteur du triangle aob, est en même temps le pied de la hauteur du triangle aOb, situé dans l'espace et rabattu en aO_2b (21, 11°). De plus, la droite pO_1 est cette hauteur pO, rabattue autour de po (40).

45. Problème XV. — *Construire les angles que fait une droite avec les plans de projection.*

L'inclinaison d'une droite sur un plan est mesurée par l'angle que fait la droite avec sa projection sur le plan ; par conséquent, le problème proposé est un cas particulier du Problème XIV. Par conséquent aussi, on détermine l'angle de la droite AB avec le plan horizontal, en construisant celui qu'elle fait avec sa projection horizontale ab (*fig.* 15). A cet effet, on rabat la droite en aB_1, autour de sa projection horizontale ab: l'angle cherché est baB_1.

On peut aussi faire tourner la droite AB autour de bb', trace verticale du plan qui la contient, de manière à la rabattre sur le plan vertical. On trouve ainsi que bA_2b' est l'angle cherché.

L'inclinaison de la droite et du plan vertical se construit de même, soit par un rabattement sur le plan vertical, soit par un rabattement sur le plan horizontal. La première construction donne l'angle $a'A_1b'$; l'autre conduit à l'angle aB_2a', qui doit être égal au premier.

46. Problème XVI. — *Construire l'angle d'une droite et d'un plan donnés.*

D'après la définition rappelée ci-dessus (23), il faudrait, pour déterminer cet angle, commencer par projeter la droite sur le plan, après quoi l'on construirait l'angle formé par cette projection et la droite donnée. On simplifie la solution en observant que le dernier angle est le complément de celui que forment la droite et une perpendiculaire au plan. Le problème qui nous occupe est donc, comme les précédents, ramené à la recherche de l'angle formé par deux droites.

Soient ab, $a'b'$ les projections de la droite donnée (*fig.* 16). D'un point quelconque (o, o') de cette droite, abaissons une perpendiculaire oc, $o'c'$ sur le plan (21, 9°). Si nous construisons l'angle aO_2D_2 formé par cette perpendiculaire et par la droite AB, et si nous menons O_2E_2 perpendiculaire à O_2D_2, $D_2O_2E_2$ sera l'angle demandé.

47. Problème XVII. — *Construire l'angle de deux plans donnés.*

Soient $\alpha\beta\gamma$, $\lambda\mu\nu$ les deux plans donnés (*fig.* 17).

Concevons qu'en un point quelconque O de leur intersection on mène un plan P perpendiculaire à cette droite; ce plan coupe les plans donnés suivant deux droites partant du point O, et faisant entre elles l'angle demandé. Si l'on mène une droite quelconque cd perpendiculaire à la projection horizontale ab de l'intersection, on peut regarder cd comme étant la trace horizontale du plan P. Par suite, les intersections de ce plan avec les deux plans donnés, c'est-à-dire les côtés de l'angle cherché, sont les deux droites qui, partant des points c, d, vont se couper au point O. L'angle cherché est donc l'angle au sommet du triangle cOd, dans lequel cd est la base. Il suffit, pour construire ce triangle, d'en déterminer la hauteur, ainsi que le pied de cette droite.

Le point O, appartenant à l'intersection des deux plans donnés, doit se projeter sur la projection horizontale de cette droite. Donc la hauteur du triangle cOd est projetée suivant ab; et le point p en est le pied. D'ailleurs, cette droite est contenue dans le plan P, perpendiculaire à l'intersection des deux plans donnés; d'où il résulte qu'elle est perpendiculaire à cette intersection. Pour l'avoir en vraie grandeur, on rabat le plan abb' sur le plan horizontal : la perpendiculaire pO_1 au rabattement aB_1 de AB est la longueur cherchée, qu'il suffit de porter de p en O_2. L'angle des deux plans est donc cO_2d.

CHAPITRE III.

Projections d'un prisme, d'une pyramide, d'un cylindre, d'un cône à base circulaire, exécutées sur des objets réels (48-54)*. — Sections planes des polyèdres (55, 56).

Projections d'objets réels.

48. Problème XVIII. — *Construire les projections d'un prisme droit* $AB...D_1E_1$ (*fig.* 18).

Si ce prisme est un de ces *modèles* en bois ou en plâtre, servant à l'enseignement de la géométrie, on commencera par en mesurer toutes les dimensions, au moyen d'un *double décimètre,* divisé en millimètres. Supposons, pour fixer les idées, que le prisme soit pentagonal, et que l'on ait trouvé :

$$AB=37^{mm}, BC=43^{mm}, CD=29^{mm}, DE=31^{mm}, EA=40^{mm},$$
$$AA_1=BB_1=...=72^{mm}.$$

* L'article du Programme, auquel se rapportent les questions suivantes, est ainsi conçu : « *Projections d'un prisme, d'une pyramide..., exécutées sur des objets réels.* » Cet énoncé semble indiquer qu'il s'agit de *projeter un prisme, une pyramide, etc..., sur des objets réels*; par exemple, *sur d'autres prismes ou sur d'autres pyramides.* La solution d'un pareil problème exige une connaissance de la Géométrie descriptive, bien plus étendue que celle qui peut résulter de simples *Notions.* Après avoir pris des renseignements, nous croyons nous être assuré que les rédacteurs du Programme ont voulu dire : *projections d'objets réels.*

Un pentagone n'étant pas déterminé par ses côtés, on devra mesurer encore deux de ses diagonales. Soient donc :

$$AC = 58^{mm}, \quad AD = 64^{mm} *.$$

Ces opérations préliminaires étant effectuées, si l'on veut projeter le prisme sur le plan de la base (supposé horizontal) et sur un plan vertical quelconque, on tracera une ligne de terre xy (*fig.* 19); on construira le polygone *abcde*, égal à la base ABCDE : ce polygone sera la *projection horizontale du prisme.* Quant à la *projection verticale*, on l'obtient en menant, par les sommets a, b, c, d, e, des perpendiculaires à xy, et en les arrêtant à une parallèle à cette droite, qui en soit distante de 72^{mm}.

49. Problème XIX. — *Construire les projections d'un tétraèdre* ABCS (*fig.* 20).

Soient :

$$AB = 58^{mm}, \quad BC = 77^{mm}, \quad CA = 64^{mm},$$
$$AS = 83^{mm}, \quad BS = 98^{mm}, \quad CS = 91^{mm}.$$

Si le plan de la face ABC est supposé horizontal, la question se réduit à déterminer la hauteur SP du tétraèdre, et le pied P de cette droite. Imaginons que l'on ait abaissé PD perpendiculaire à BC, et que l'on ait joint le sommet S au point D : d'après un théorème connu, la droite SD est perpendiculaire à BC. D'après cela, si l'on pouvait faire tourner la face BSC autour de BC, de manière à l'amener dans le plan de la base ABC, la droite SD, ne cessant pas d'être perpendiculaire à BC, se *rabattrait* suivant la droite S'D, *hauteur du triangle* BCS', *et prolongement de* PD. Ainsi, *quand on fait tourner une des faces d'un tétraèdre autour du côté commun à cette face et à la base, jusqu'à ce qu'elle vienne coïncider avec le plan de la base, le rabattement du sommet et le pied de la hauteur du tétraèdre, sont situés sur une même perpendiculaire à l'axe de rotation.*

50. Soit donc (*fig.* 21) *abc* la base du tétraèdre, ou la projection horizontale de cette base; soient bcs_1, bas_2 les rabattements des faces BCS, BAS, construits d'après les dimensions données. Supposons d'abord, pour plus de simplicité, le plan vertical de projection perpendiculaire à l'arête BC.

* *Sept* éléments suffisent pour déterminer un polygone de *cinq* côtés; mais il serait bon, pour avoir des vérifications, de mesurer encore une ou deux diagonales; par exemple, BE, CE. La même remarque est applicable aux *levés des terrains.*

La projection horizontale du sommet S est à l'intersection s des droites s_1d, $\varsigma_2 o$, respectivement perpendiculaires à bc, ba. La projection verticale s' du même point est sur la perpendiculaire sp à xy; et, d'un autre côté, *elle est située sur une circonférence* $\sigma s'$, *décrite du point* d' *comme centre, avec* $d'\sigma = d\varsigma_1$ *pour rayon*. En effet, le plan vertical de projection étant supposé perpendiculaire à BC, cette circonférence est la projection de celle que le sommet S a décrite dans l'espace, pour se rabattre en ς_1.

51. Pour passer au cas d'un plan vertical quelconque, ou d'une ligne de terre quelconque, x_1y_1, il suffit d'abaisser $sp''s''$ perpendiculaire à x_1y_1 et de prendre $p''s'' = ps'$: le point s'' est la nouvelle projection du sommet S. Les deux projections demandées sont donc formées par les *dix* droites ab, bc, ca, sa, sb, sc, et $a''b''c''$, $s''a''$, $s''b''$, $s''c''$.

52. Problème XX. — *Construire les projections d'un prisme oblique* $AB...D_1E_1$ (*fig.* 23).

Supposons les arêtes du nouveau prisme égales à celles du prisme droit considéré ci-dessus (Probl. XVIII). Les faces latérales n'étant plus dans des plans verticaux, la face supérieure se projettera horizontalement suivant un pentagone égal à la base inférieure, mais différent de celle-ci. Pour construire un sommet b_1 de ce pentagone (*fig.* 24), on mesure, sur le modèle, les diagonales B_1A, B_1C : elles déterminent, avec B_1B, AB, BC, CA, un tétraèdre dont on peut trouver les deux projections (prob. XIX). Ces opérations auxiliaires étant effectuées, on trace les droites aa_1, cc_1, dd_1, ee_1, égales et parallèles à bb_1; puis le pentagone $a_1b_1c_1d_1e_1$, etc.

53. Problème XXI. — *Construire les projections d'un cylindre de révolution* $AC...D_1A_1$ (*fig.* 22).

La projection du cylindre, sur le plan de la base ACBD (supposé horizontal), se confond avec cette base, attendu que toutes les génératrices AA_1, BB_1, CC_1, ... sont des verticales. Quant à la projection verticale, il est visible qu'elle se réduit à un rectangle $a'b'a'_1b'_1$, de même hauteur que le cylindre, et dont les côtés perpendiculaires à la ligne de terre sont tangents à la projection horizontale $acdb$. Il faut donc mesurer, sur le *modèle*, le diamètre du cercle ACBD. C'est à quoi l'on parvient aisément en fixant l'extrémité d'un fil en un point A de la circonférence, et en donnant au fil une longueur telle, que la circonférence décrite par la seconde extrémité soit tangente à la circonférence AB. En effet, la longueur trouvée ainsi est égale à celle de la plus grande corde du cercle AB, c'est-à-dire égale au diamètre.

Un procédé analogue fait connaître la hauteur du cylindre. Au moyen de ces deux éléments, et sur une échelle convenable, on construit la circonférence ab et le rectangle $a'b'a'_1b'_1$ (*fig.* 22), projections du cylindre.

54. Problème XXII. — *Construire les projections d'un cône de révolution.*

Ce problème est aussi simple que le précédent : la projection horizontale est la circonférence de base ; et la projection verticale est un triangle isocèle, égal à la *section méridienne* du cône.

55. Problème XXIII. — *Déterminer la section d'un prisme par un plan.*

Soit le prisme *droit abc...*, coupé par le plan $\alpha\beta\gamma$ (*fig.* 25).

La projection horizontale de la section est, évidemment, la base *abcde* du prisme. Pour déterminer la projection verticale $m'n'p'q'r'$, il suffit de chercher (Probl. VII) les points où les arêtes du prisme sont coupées par le plan donné.

Remarque. Si on voulait trouver, en *vraie grandeur*, la section MNPQR, on devrait en construire le rabattement autour de $\alpha\beta$ (Probl. IX).

56. Problème XXIV. — *Construire la section d'une pyramide par un plan.*

Si, pour plus de simplicité, on prend le plan vertical de projection perpendiculaire au plan sécant, la projection verticale de la section sera le segment $p's'$ de la trace verticale $\beta\gamma$ (*fig.* 26). Il suffira donc, pour compléter l'*épure,* d'abaisser les droites $m'm$, $n'n$,... perpendiculaires à la ligne de terre, et de les terminer aux projections oa, ob,... des arêtes correspondantes : le polygone *mnpqrs* est la projection horizontale demandée *.

* Les polyèdres donnent lieu à un grand nombre d'exercices graphiques intéressants, dans l'explication desquels nous ne pouvons entrer, attendu l'insuffisance des *Notions* mentionnées au Programme. Pour ce sujet, nous renverrons le lecteur aux Traités de Géométrie descriptive.

CHAPITRE IV.

Notions sur la méthode des plans cotés (57-72).

Plans cotés.

57. Dans les notions sur le *levé des plans*, nous avons supposé que le terrain à représenter était sensiblement horizontal. Quand il n'en est plus ainsi, c'est-à-dire quand le terrain offre des ondulations, des parties montueuses, etc., une simple projection horizontale est insuffisante. D'un autre côté, comme une projection verticale du terrain, outre la difficulté de l'exécution, se réduirait presque toujours à un ensemble de courbes se coupant confusément, on joint, à la projection horizontale d'un point quelconque, une *cote* indiquant la distance de ce point à un plan horizontal supposé connu de position, et qui prend le nom de *plan de comparaison* ou de *plan de niveau*.

En général, on appelle *surface de niveau* la surface libre d'une masse d'eau tranquille, telle qu'un lac, un étang, etc. Quand la masse considérée est peu étendue, sa surface est, très-sensiblement, plane et *horizontale*, c'est-à-dire perpendiculaire à la direction du *fil à plomb*; ce qui justifie la dénomination de *plan de niveau*.

L'ensemble des opérations au moyen desquelle on détermine les *cotes*, ou les *différences de niveau* des points remarquables d'un terrain, porte le nom de *nivellement*.

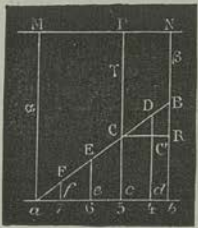
Représentation de la droite.

58. Nous venons de dire que, dans le système connu sous le nom de *plans cotés, un point est représenté par sa projection et sa cote*. De même, *une droite quelconque est définie par sa projection, jointe aux cotes de deux de ses points*.

Problèmes sur la droite.

59. Problème XXV. — *Trouver la projection d'un point situé sur une droite donnée, et dont la cote est donnée.*

Soient α, β les cotes des points projetés en a, b, et soit γ la cote du point inconnu. Si nous prenons les perpendiculaires aM,



bN égales à α, que nous fassions $NB=\beta$, et que nous menions aB, cette ligne pourra être regardée comme un *rabattement* ou un *profil* de la droite projetée suivant ab. De même, si nous prenons $NR=\gamma$, puis que nous menions RC parallèle à ab, C sera le rabattement du point cherché, et c en sera la projection. Or, les triangles semblables abB, CRB donnent

$$\frac{Bb}{BR}=\frac{ba}{RC},$$

ou

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=\frac{ba}{bc}.$$

Ainsi, la distance bc est une quatrième proportionnelle à $\alpha-\beta$, $\gamma-\beta$ et ab. Il est donc facile d'obtenir cette distance, soit par le procédé ordinaire, soit au moyen de l'*échelle des distances horizontales*.

60. Il ne serait pas plus difficile de *trouver la cote d'un point* C *appartenant à une droite donnée* aB, *connaissant la projection* c *du point;* mais il vaut mieux, pour résoudre ce problème, construire d'abord l'*échelle de pente de la droite*.

Soient, pour fixer les idées, $\alpha=7^m,25$, $\beta=3^m,48$. Soient, sur le profil aB, les points D, C, E, F ayant pour cotes, respectivement, 4^m, 5^m, 6^m, 7^m. Par la règle précédente, nous aurons

$$bd=ab\,.\,\frac{4-3,48}{7,25-3,48}=ab\,.\,\frac{352}{377},$$

et

$$bf=ab\,.\,\frac{7-3,48}{7,25-3,48}=ab\,.\,\frac{352}{377}.$$

Les projections d, f des points D, F seront donc déterminées. De plus, les distances égales DC, CE, EF ont des projections de, ce, ef, égales entre elles. Si donc l'on divise en trois parties égales l'intervalle df, puis qu'on subdivise en 10 ou en 100 parties égales chacune de ces divisions, on aura *une échelle qui donnera*, immédiatement, *la cote d'un point quelconque de* *la droite, connaissant la projection de ce point.* Ce sera l'*échelle de pente de la droite.*

61. Problème XXVI. — *Trouver la pente d'une droite donnée.*

Les ingénieurs appellent spécialement *pente* d'une droite aB, la tangente trigonométrique m de l'angle Bab que fait cette droite avec l'horizon. D'après cette définition,

$$pente = m = \frac{Bb}{ab} = \frac{C'D}{CC'} = \frac{1}{l},$$

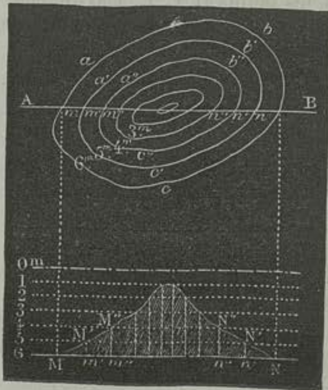
en appelant *l la longueur d'une division de l'échelle de pente, estimée sur l'échelle horizontale.*

Si, par exemple, les cotes de deux points de la droite sont 3^m et 4^m, et que la distance comprise entre les projections horizontales de ces points soit égale à 50^m, la pente de la droite sera $\frac{1}{50}$.

62. Dans le tracé des routes, on n'admet guère de pente supérieure à 0,05.

Profils de nivellement.

63. Un terrain étant représenté par un plan coté, il est bien facile d'en obtenir des *coupes verticales* : ces coupes sont appelées *profils de nivellement.*



Supposons, en effet, que le géomètre, à chacune de ses stations, ait visé différents points du terrain, et qu'il les ait rapportés sur le plan. Le trait continu qui les réunira pourra être regardé comme représentant la section faite, dans la surface du terrain, par un même plan horizontal : ce sera une *courbe de niveau*. Soient abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$,... les différentes courbes ainsi obtenues, accompagnées de leurs cotes. Si l'on veut représenter la section faite par un plan vertical ayant AB pour trace, on prendra une ligne de terre xy, à laquelle on mènera des parallèles, à des distances déterminées par les différences entre les niveaux des courbes abc, $a'b'c'$,... On prendra ensuite $Mm' = mm'$, $Mm'' = mm''$,...; puis on élèvera les perpendiculaires $m'M'$, $m''M''$,..., qui couperont les horizontales aux points M', M'',..., par lesquels on fera passer un trait continu.

64. *Remarques*. — 1° Suivant l'usage, nous avons supposé les courbes de niveau situées dans des plans équidistants ayant pour cotes 1^m, 2^m, 3^m,...

2° Comme les distances verticales sont ordinairement beaucoup plus petites que les distances horizontales, on rapporte les premières à une échelle double, triple, quadruple, etc., de l'échelle des distances horizontales.

3° Au lieu de conclure, des courbes de niveau, les sections verticales, on suit quelquefois une marche inverse ; c'est-à-dire que l'on détermine directement différents profils du terrain, et qu'au moyen de ces profils on trace, sur le plan, les projections des sections horizontales.

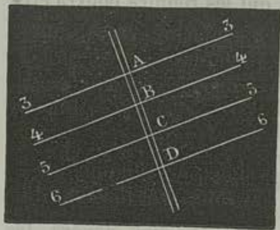
Représentation du plan par ses cotes.

65. Une surface quelconque pouvant être représentée par des courbes de niveau, *un plan sera déterminé par des horizontales équidistantes*, accompagnées de leurs cotes.

Ainsi, les parallèles ci-dessous, également espacées, appartiennent à un même plan ; elles peuvent, aussi bien que ses traces, servir à le représenter.

66. Nous avons vu (25) que l'on appelle *ligne de plus grande pente d'un plan*, une droite perpendiculaire aux horizontales

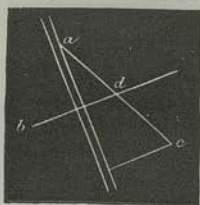
du plan. Cette ligne se projette horizontalement suivant une perpendiculaire ABCD aux projections des horizontales. De plus, comme l'inclinaison d'un plan, sur le plan horizontal, est marquée par l'inclinaison de sa ligne de plus grande pente, cette projection ABCD, échelle de pente de la droite en question, sera ce qu'on appelle l'*échelle de pente du plan*. Ordinairement, on l'indique par un trait double.



Problèmes sur le plan.

67. PROBLÈME XXVII. — *Trouver l'échelle de pente du plan passant par trois points dont on connaît les projections* a, b, c, *et les cotes* (2^m,7), (4^m,5), (7^m,3).

Cherchons, sur la droite ac, le point d qui a pour cote 4^m,5 : bd représentera une horizontale du plan. Par suite, la perpendiculaire à bd menée par a, sera la projection de la ligne de plus grande pente ; et, si l'on divise cette droite comme il a été dit ci-dessus (60), le plan sera complétement déterminé.



68. PROBLÈME XXVIII.—*Par une droite donnée, faire passer un plan ayant une pente donnée.*

Supposons que la droite soit donnée par les projections a, b, et les cotes (α, β) de deux de ses points A, B, et que la pente du plan soit une fraction $\frac{1}{l}$. Supposons, en outre, pour fixer les idées, $\alpha < \beta$. Imaginons, par le point B, une *horizontale* du plan cherché, et, par le point A, une perpendiculaire AC à cette droite : AC sera une ligne de plus grande pente, et sa projection ac sera perpendiculaire à la projection bc de l'horizontale BC. Conséquemment, le triangle abc, dans lequel nous connaissons le côté ab, est rectangle en c. De plus,

$$\frac{\mathrm{A}a}{ac} = \frac{1}{l},$$

ou

$$ac = \mathrm{A}a \cdot l = (\beta - \alpha)\, l.$$

Il faut donc, pour résoudre la question, *décrire sur* ab *comme diamètre, une circonférence ; du point* a *comme centre, avec un rayon égal à* $(\beta - \alpha)$. l, *tracer un arc qui coupe cette circonférence en* c ; etc.

69. *Remarque.* — Le problème admet, en général, deux solutions. Il est impossible, si la pente $\frac{1}{l}$ du plan est inférieure à $\frac{\beta - \alpha}{ab}$, pente de la droite. Enfin, quand les deux pentes sont égales, il n'y a véritablement plus de problème, attendu que la droite donnée est alors la ligne de plus grande pente du plan.

70. Problème XXIX. — *Par un point situé sur un plan donné, mener, dans ce plan, une droite ayant une pente donnée.*

Par la projection a du point donné A, menons ac perpendiculaire à la projection cb d'une horizontale du plan. Soit b le point où la projection inconnue ab rencontre cb. Dans le triangle acb, rectangle en c, nous connaissons le côté ac. Il nous suffit donc, pour construire ce triangle, de déterminer l'hypoténuse ab. Or, si α et γ sont les cotes des points projetés en a, c, et que $\frac{1}{l}$ soit la pente de la droite, nous aurons

$$ab = (\gamma - \alpha)\, l.$$

La question peut donc être considérée comme résolue.

Remarque. — Ce problème, inverse du précédent, admet ordinairement, comme celui-ci, deux solutions.

71. Problème XXX. — *Trouver la distance d'un point donné* M *à un plan donné* P.

La projection de la perpendiculaire MN abaissée du point M sur le plan P est évidemment parallèle à la projection de la ligne de pente du plan ; mais, comme cette perpendiculaire fait avec le plan horizontal, un angle complémentaire de l'angle formé par les deux plans, il s'ensuit que la pente de cette même droite est égale à l'*inverse* de celle du plan P. Il est donc facile de construire l'échelle de pente de MN. Il faudra déterminer ensuite le point N où cette droite perce le plan P, et évaluer enfin la distance MN. Nous laissons au lecteur le soin d'effectuer ces constructions.

72. Problème XXXI. — *Calculer la pente* $\frac{1}{p}$ *du plan passant par trois points* (A, B, C) *dont on connaît les cotes* (α, β, γ) *et les projections* (A', B', C') *.

Si l'on désigne par T l'aire du triangle ABC, par T' l'aire du triangle A'B'C', et par θ l'angle que forment les plans de ces deux triangles, on aura d'abord, ainsi qu'on peut aisément le reconnaître,

$$\cos\theta = \frac{T'}{T};$$

d'où

$$\frac{1}{p} = \operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{T^2-T'^2}{T'^2}}. \qquad (1)$$

Il s'agit donc d'évaluer, en fonction des données, T et T'.

En premier lieu, a, b, c désignant les côtés du triangle A'B'C' (*Trigonom.*, 55) :

$$T'^2 = \tfrac{1}{16}(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a+c-b)\,(b+c-a),$$

ou

$$T'^2 = \tfrac{1}{16}(-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2). \qquad (2)$$

On a semblablement, en appelant x, y, z les côtés du triangle ABC :

$$T^2 = \tfrac{1}{16}(-x^4-y^4-z^4+2x^2y^2+2y^2z^2+2x^2z^2). \qquad (3)$$

* Les calculs suivants, qui présentent d'utiles exercices, complètent la solution du premier problème.

Mais, évidemment, BC, ou x, est l'hypoténuse d'un triangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs a et $\beta-\gamma$, donc

$$x^2=a^2+(\beta-\gamma)^2;$$

et semblablement, $\quad y^2=b^2+(\gamma-\alpha)^2,$

$$z^2=c^2+(\alpha-\beta)^2.$$

Substituant ces valeurs dans la formule précédente, on trouve :

$$\begin{aligned}16\,T^2=&-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2\\&+2a^2\,[(\gamma-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2-(\beta-\gamma)^2]\\&+2b^2\,[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2-(\gamma-\alpha)^2]\\&+2c^2\,[(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2-(\alpha-\beta)^2]\\&-(\beta-\gamma)^4-(\gamma-\alpha)^4-(\alpha-\beta)^4\\&+2\,(\beta-\gamma)^2\,(\gamma-\alpha)^2\\&+2\,(\gamma-\alpha)^2\,(\alpha-\beta)^2\\&+2\,(\alpha-\beta)^2\,(\beta-\gamma)^2.\end{aligned}\qquad(4)$$

Le second membre, qui se présente sous une forme compliquée, donne lieu aux *réductions* suivantes :

1° La quantité $-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2$ est, en vertu de la formule (2), égale à $16\,T'^2$.

2° $$\begin{aligned}(\gamma-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2-(\beta-\gamma)^2&=2\alpha^2-2\gamma\alpha-2\beta\gamma+2\beta\gamma\\&=2\,(\alpha-\beta)\;(\alpha-\gamma),\end{aligned}$$

$$(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2-(\gamma-\alpha)^2=2(\beta-\gamma)\;(\beta-\alpha),$$

$$(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2-(\alpha-\beta)^2=2(\gamma-\alpha)\;(\gamma-\beta).$$

3° La quantité

$$\begin{aligned}-(\beta-\gamma)^4-(\gamma-\alpha)^4-(\alpha-\beta)^4+2(\beta-\gamma)^2\;(\gamma-\alpha)^2\\+2(\gamma-\alpha)^2\;(\alpha-\beta)^2+2(\alpha-\beta)^2\;(\beta-\gamma)^2,\end{aligned}$$

de même forme que

$$-a^4-b^4-c^4+\ldots,\ \text{etc.},$$

est *égale à 16 fois le carré de l'aire d'un triangle dont les côtés auraient pour longueurs les différences*

$$\beta-\gamma,\ \gamma-\alpha,\ \alpha-\beta,$$

prises en valeurs absolues. Mais chacun de ces binômes est égal à la somme ou à la différence des deux autres ; donc la quantité dont il s'agit est *nulle*.

A cause de ces simplifications, l'équation devient

$$\begin{aligned}16\,T^2 = 16\,T'^2 &+ 4a^2(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)\\ &+ 4b^2(\beta-\alpha)\,(\beta-\gamma)\\ &+ 4c^2(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta)\,;\end{aligned}$$

et la formule (1) :

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{2T'}\sqrt{a^2(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)+b^2(\beta-\alpha)\,(\beta-\gamma)+c^2(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta)}. \quad (5)$$

On simplifie un peu le polynôme placé sous le radical en y introduisant les pentes

$$\frac{1}{l},\ \frac{1}{m},\ \frac{1}{n}$$

des côtés BC, CA, AB. En effet,

$$\frac{1}{l}=\frac{\beta-\gamma}{a},\quad \frac{1}{m}=\frac{\gamma-\alpha}{b},\quad \frac{1}{n}=\frac{\alpha-\beta}{c}\,{}^*;$$

* De ces trois fractions, une au moins est négative, car

$$(\beta-\gamma)+(\gamma-\alpha)+(\alpha-\beta)=0,$$

ou

$$\frac{a}{l}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}=0.$$

donc

$$\beta-\gamma=\frac{a}{l}, \quad \gamma-\alpha=\frac{b}{m}, \quad \alpha-\beta=\frac{c}{n};$$

et

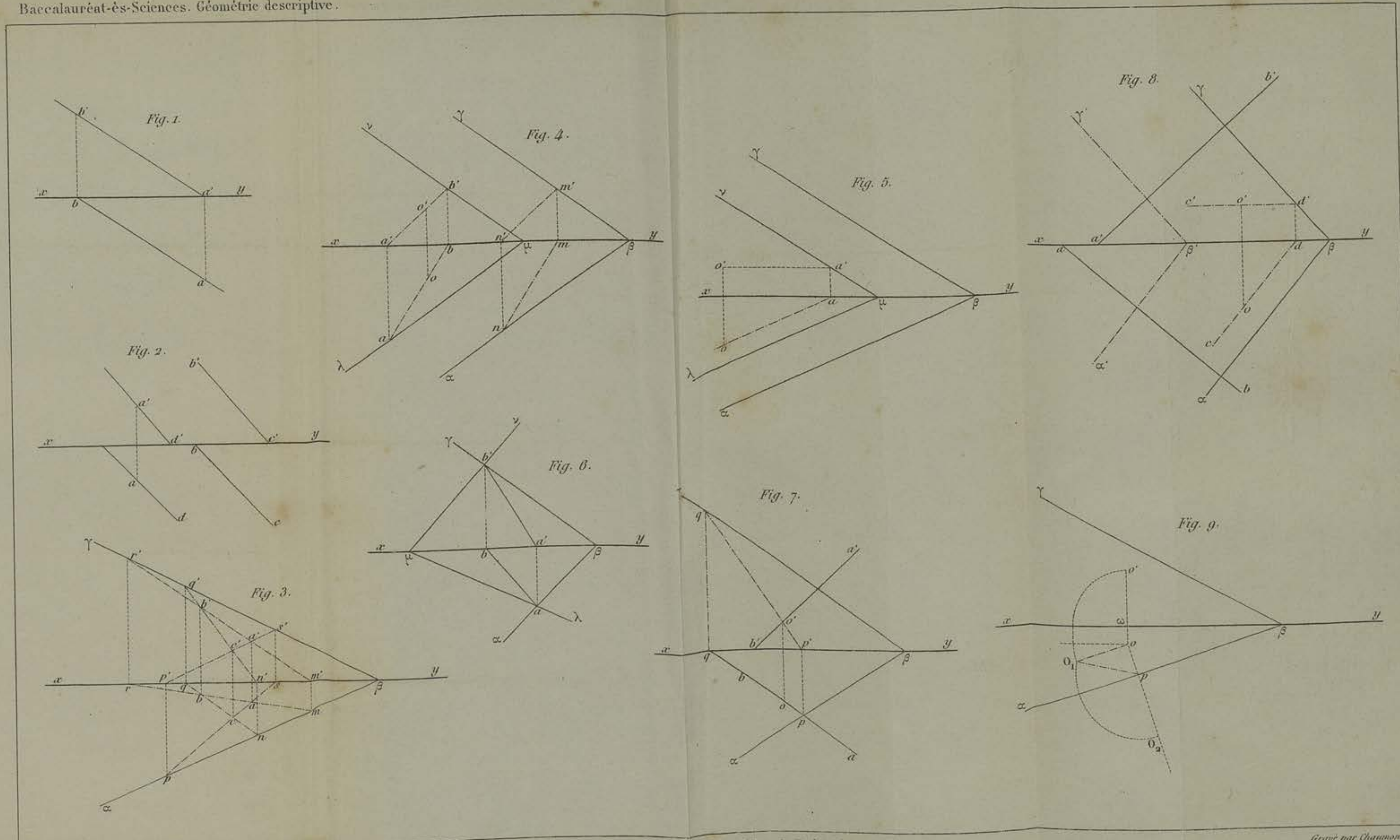
$$a^2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)+b^2(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)+c^2(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$$
$$=-abc\left(\frac{a}{mn}+\frac{b}{ln}+\frac{c}{lm}\right)=-\frac{abc}{lmn}(la+mb+nc).$$

Au moyen de cette transformation, l'équation (5) devient enfin

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{2T'}\sqrt{-\frac{abc}{lmn}(la+mb+nc)}\ *. \qquad (6)$$

* La *théorie des plans cotés* comporte un grand nombre d'autres problèmes, d'une application continuelle dans les *ponts et chaussées*, dans la fortification, etc. On pourra consulter, sur ce sujet, le *Cours du colonel Noizet* et la *Géométrie descriptive de Leroy*.

FIN.



Paris, J. Delalain et fils, imp. ... rue des Écoles, 73.

Gravé par Chaumont.

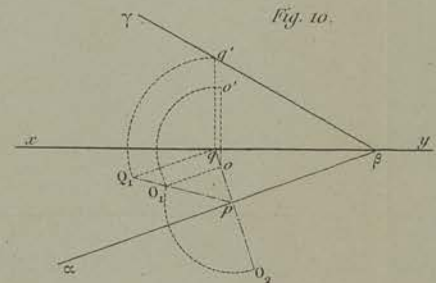


Fig. 10.

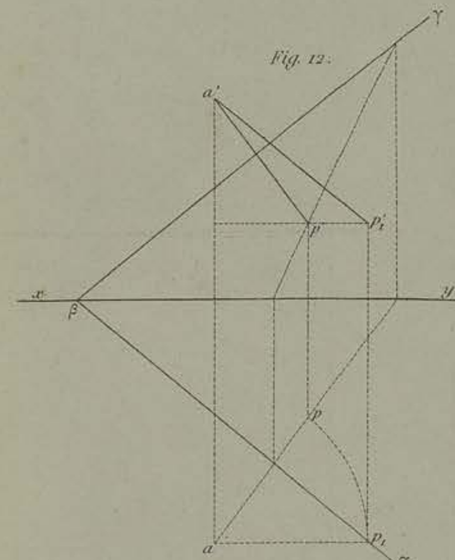


Fig. 12.

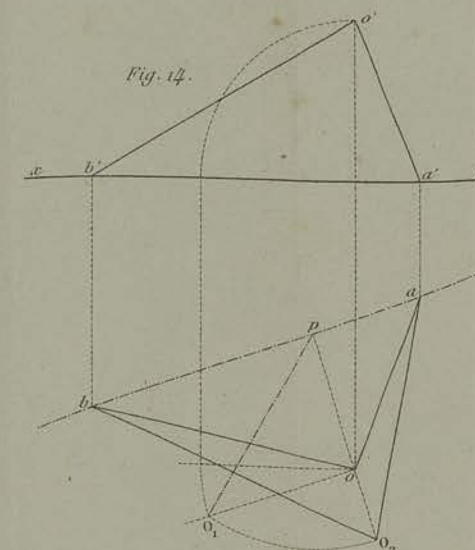


Fig. 14.

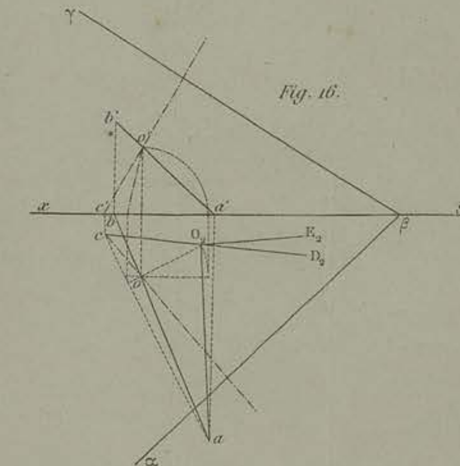


Fig. 16.

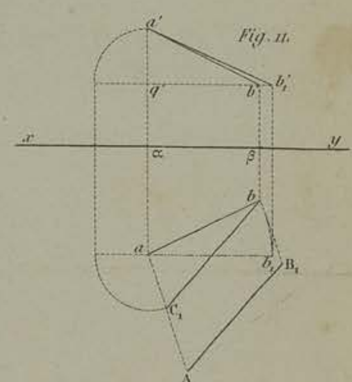


Fig. 11.

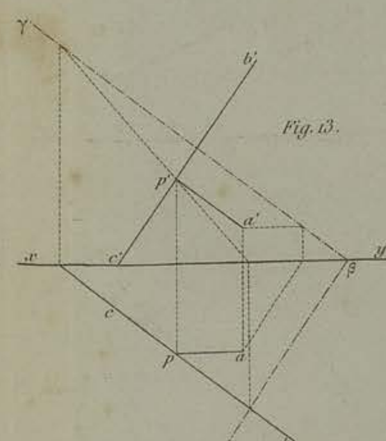


Fig. 13.

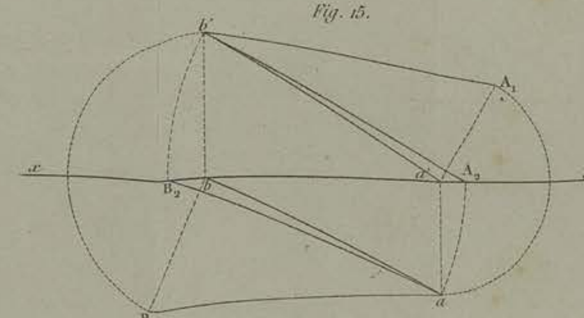


Fig. 15.

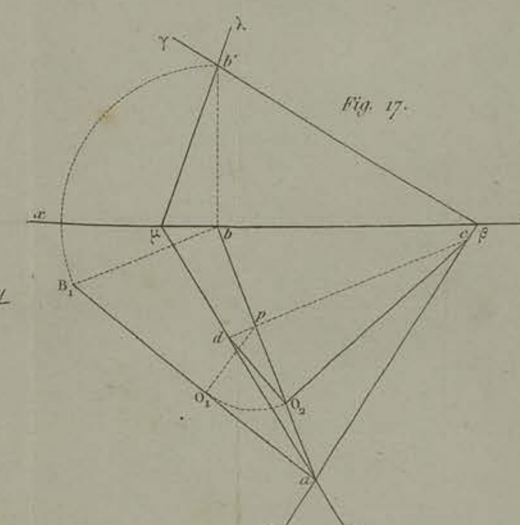


Fig. 17.

Paris, J. Delalain et fils, imp. F. D. rue des Ecoles, 78.

Gravé par Chaumont.

$$2-2\cos(a-b)=(\sin a-\sin b)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2$$

$$2-2\cos(a-b)=\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2 b+\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta$$

$$\cancel{2}-2\cos(a-b)=\cancel{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}+\cancel{\sin^2 b+\cos^2 b}-2\sin\alpha\sin\beta-2\cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos(a-b)=\cos\alpha.\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(a+b)=\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

Fig. 18

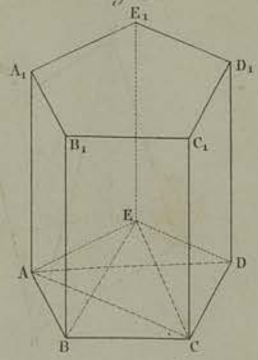


Fig. 20

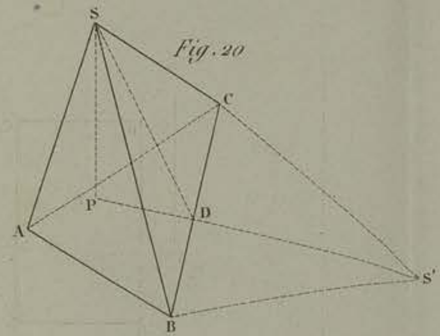


Fig. 21

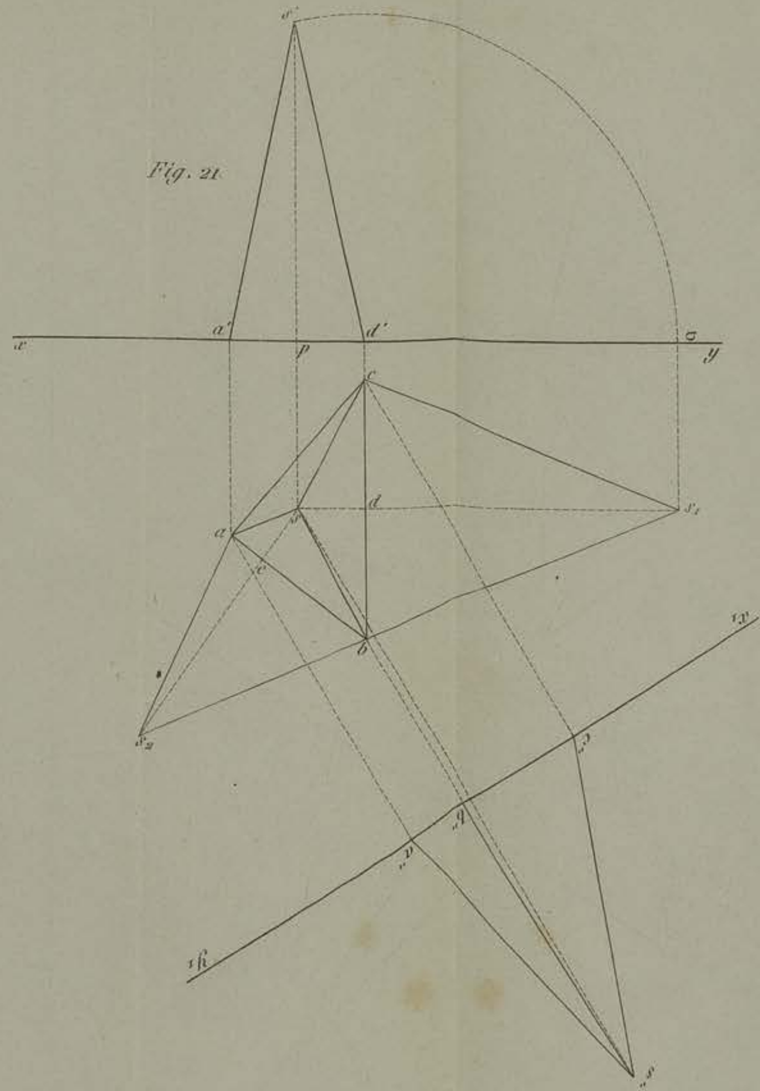


Fig. 19

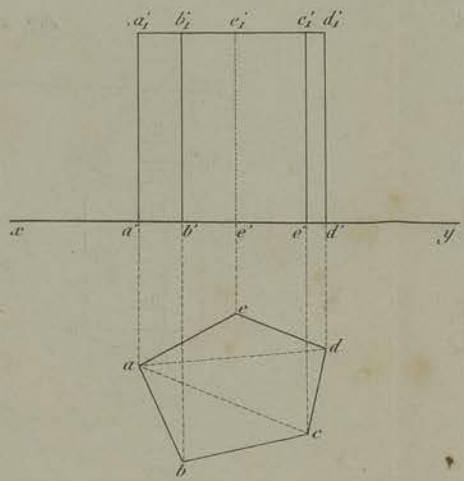
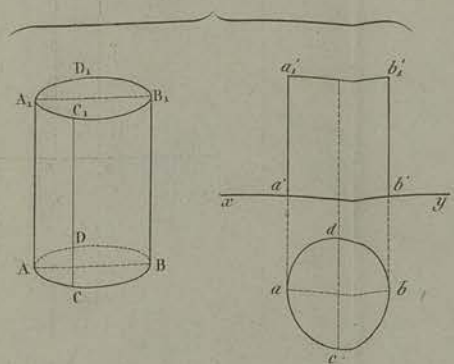


Fig. 22



Paris. J. Delalain et fils, imp. T.D. rue des Écoles 76.

Gravé par Chaumont.

Fig. 23

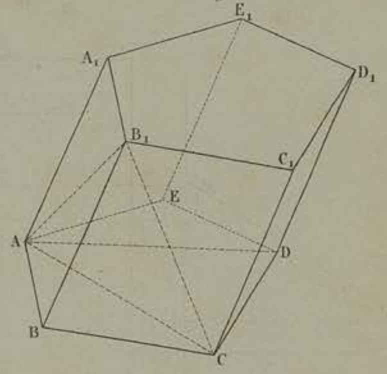


Fig. 24

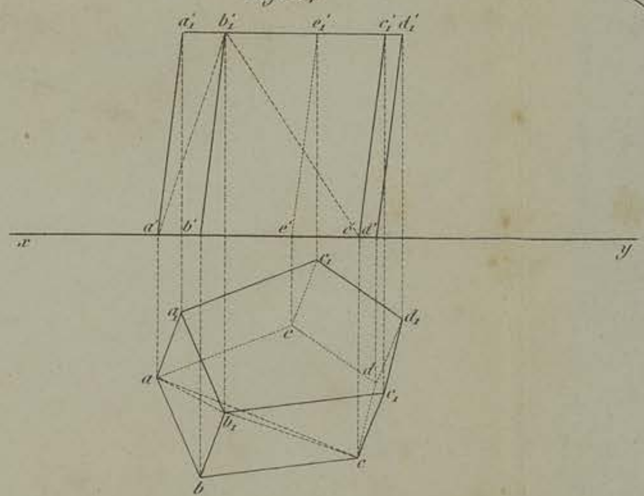


Fig. 25

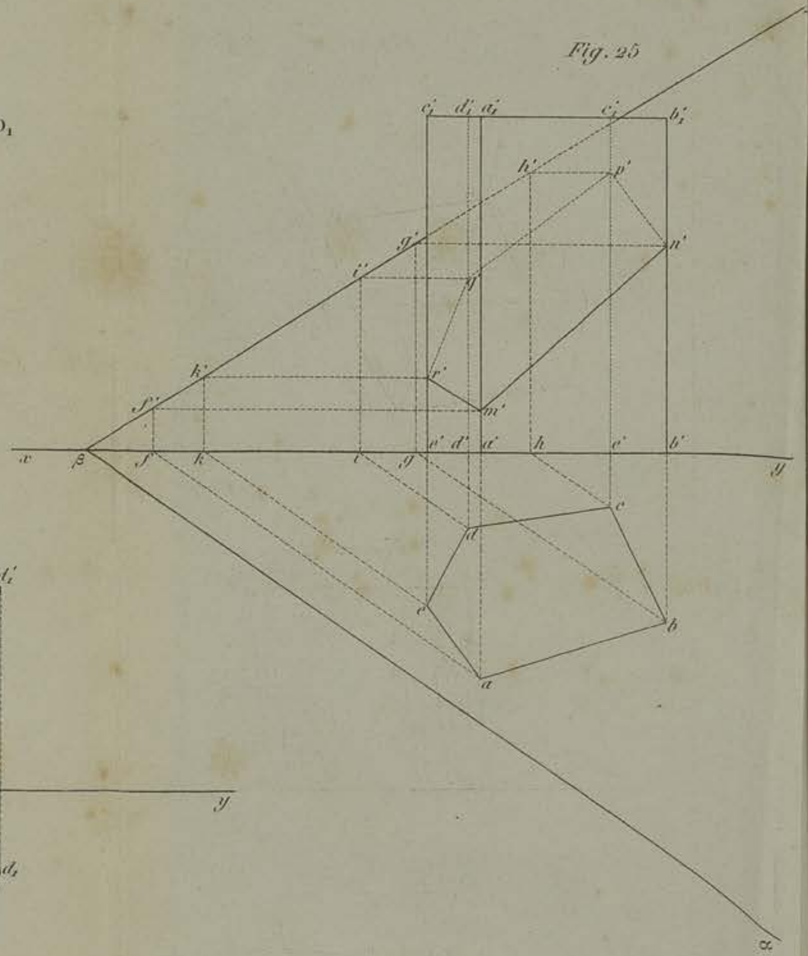
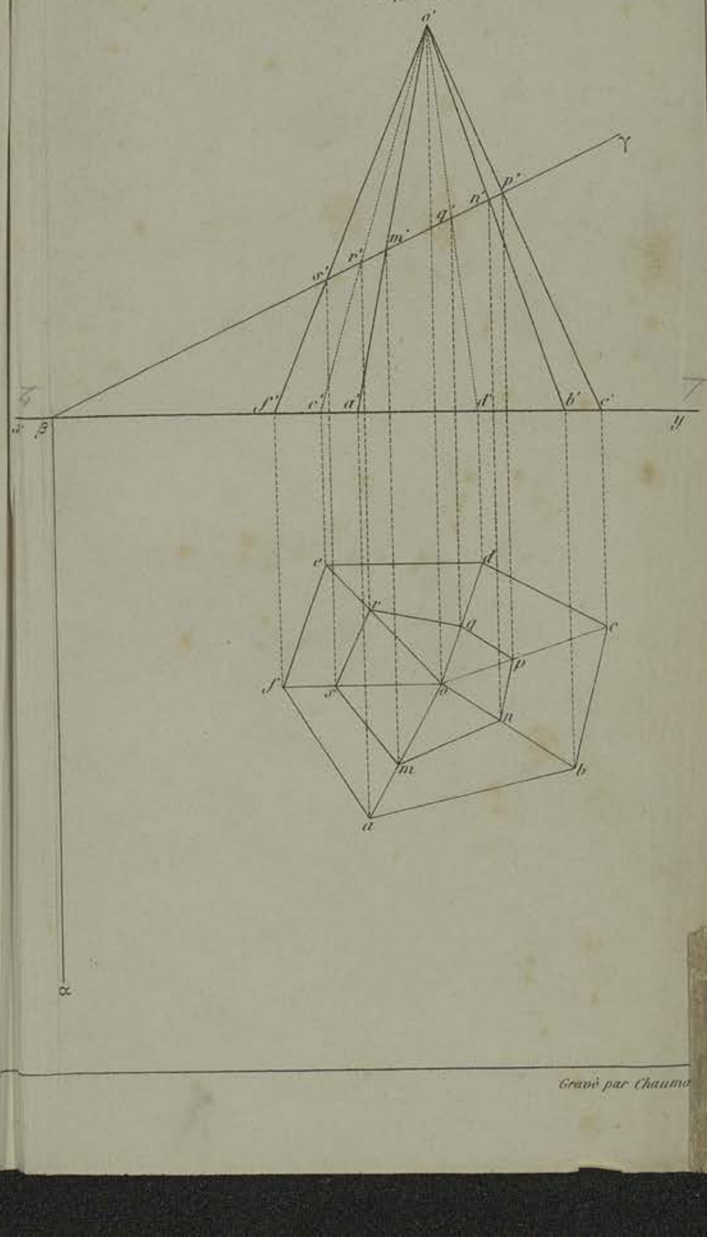


Fig. 26



Paris, J. Delalain et fils, imp. T.D. rue des Ecoles, 76.

Gravé par Chaumo