COURS D'ÉTUDES SCIENTIFIQUES

Rédigé d'après les Nouveaux Programmes
prescrits pour les Lycées et le Baccalauréat

Par MM. LANGLEBERT et CATALAN.

MANUEL
DE MÉCANIQUE

Par E. CATALAN

AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCE, DOCTEUR ÈS SCIENCES
PROFESSEUR D'ANALYSE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

SEPTIÈME ÉDITION

Ornée de gravures dans le texte.

PARIS.

ET LIBRAIRIE CLASSIQUES

ES DELALAIN et FILS

ES, VIS-A-VIS DE LA SORBONNE.

inquième Partie.

MANUEL

DU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES.

MÉCANIQUE.

Manuel du Baccalauréat ès Sciences, rédigé d'après les programmes officiels des lycées et des examens du Baccalauréat, par *MM. J. Langlebert,* professeur de sciences physiques et naturelles à Paris, et *E. Catalan,* agrégé de l'Université de France; 2 gros vol. in-12, divisés en 8 parties, *avec gravures dans le texte et planches gravées.*

Chaque Partie se vend séparément pour chacun des degrés du Baccalauréat et pour chacune des classes des lycées.

Première Partie, Manuel d'Arithmétique et d'Algèbre, rédigé d'après les programmes officiels, par *M. E. Catalan :* 6e édition; 1 vol. in-12.

Deuxième Partie, Manuel de Géométrie, suivi de Notions sur quelques courbes, rédigé d'après les programmes officiels, par *M. E. Catalan :* 6e édition; 1 vol. in-12, *avec gravures dans le texte.*

Troisième Partie, Manuel de Trigonométrie rectiligne et de Géométrie descriptive, rédigé d'après les programmes officiels, par *M. E. Catalan :* 6e édition; 1 vol. in-12, *avec gravures dans le texte et planches gravées.*

Quatrième Partie, Manuel de Cosmographie, rédigé d'après les programmes officiels, par *M. E. Catalan :* 7e édition; 1 vol. in-12, *avec gravures dans le texte et planches gravées.*

Cinquième Partie, Manuel de Mécanique, rédigé d'après les programmes officiels, par *M. E. Catalan :* 7e édition; 1 vol. in-12, *avec gravures dans le texte.*

Sixième Partie, Manuel de Physique, rédigé d'après les programmes officiels, par *M. J. Langlebert :* 16e édition; 1 fort vol. in-12, *avec gravures dans le texte.*

Septième Partie, Manuel de Chimie, rédigé d'après les programmes officiels, par *M. J. Langlebert :* 16e édition; 1 fort vol. in-12, *avec gravures dans le texte.*

Huitième Partie, Manuel d'Histoire Naturelle, rédigé d'après les programmes officiels, par *M. J. Langlebert :* 16e édition; 1 fort vol. in-12, *avec gravures dans le texte.*

Pour la Partie littéraire, consulter le *Manuel du Baccalauréat ès Lettres, par MM. E. Lefranc et G. Jeannin.*

MANUEL

DE MÉCANIQUE

**Rédigé d'après les nouveaux Programmes officiels
de l'Enseignement des lycées impériaux
prescrits pour les examens du Baccalauréat**

Par E. CATALAN

AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCE, DOCTEUR ÈS SCIENCES
PROFESSEUR D'ANALYSE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

SEPTIÈME ÉDITION

Ornée de gravures dans le texte.

PARIS.

IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE CLASSIQUES

De JULES DELALAIN et FILS

RUE DES ÉCOLES, VIS-A-VIS DE LA SORBONNE.

M DCCC LXVIII.

Aux termes d'un décret impérial, en date du 27 novembre 1864, l'examen du baccalauréat ès sciences complet porte sur les matières enseignées dans la classe de mathématiques élémentaires des lycées (deuxième année) ; celui du baccalauréat ès lettres, sur les matières enseignées dans les classes de rhétorique et de philosophie des lycées. L'examen du baccalauréat ès sciences, restreint pour la partie mathématique, continue, jusqu'à nouvel ordre, d'être exigé et subi dans les conditions existantes et avec les programmes actuellement en vigueur.

MÉCANIQUE.

PROGRAMME D'ENSEIGNEMENT DES LYCÉES.

Les numéros renvoient aux paragraphes où la question est traitée.

CLASSE DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Éléments de statique.

Notions sur les forces, 5-9. — Conditions d'égalité de deux forces, 10. — Leur évaluation numérique, 10. — Comparaison des forces aux poids à l'aide du dynamomètre, 11, 12.

On admet que deux forces égales et contraires, appliquées à deux points liés par une droite invariable de longueur, et agissant dans la direction de cette droite, se font équilibre, 21. — Translation du point d'application d'une force en un point quelconque de sa direction, qu'on suppose lié invariablement au premier, 29.

Composition de deux forces appliquées à un même point, 30-42. — Théorème des moments par rapport à un point pris dans le plan des forces, 49-51.

Composition d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point, 43-49. — Conditions d'équilibre, 52, 53.

Composition de deux forces parallèles, 58, 59. — Couple, 60.

Composition d'un nombre quelconque de forces parallèles, 61, 62. — Centre des forces parallèles, 63.

Centre de gravité ; sa recherche dans quelques cas simples : triangle et pyramide, 71-80.

Composition d'un système quelconque de forces appliquées à un corps solide, 54. — Leur réduction à deux forces, dont l'une est appliquée à un point pris à volonté, 56. — Condition générale de l'équilibre, 57.

Des machines simples.

Levier, 81-85. — Condition générale d'équilibre du levier, 86, 87. — Relation entre la puissance et la résistance, 88, 89.

Des balances, 90. — Balance ordinaire, balance romaine, bascule du commerce, 91-95.

Poulie, 101. — Équilibre de la poulie fixe, 105, 106. — Équilibre de la poulie mobile, 107, 108. — Moufles, 109-112.

Treuil, 113-115. — Condition générale d'équilibre du treuil, 116.—Relation entre la puissance et la résistance, 116.

Plan incliné, 117-119.—Équilibre d'un corps placé sur un plan incliné, 120, 121.

Éléments de cinématique et de dynamique.

Mouvement rectiligne uniforme, 124-129. — Vitesse, 125, 126.

Mouvement rectiligne varié, 130.—Vitesse moyenne, 131.— Vitesse à un instant quelconque, 132, 133.

Mouvement rectiligne uniformément varié, 135. — Accélération, 144.

De l'accélération à un instant quelconque dans le mouvement rectiligne varié, 145.

Composition de deux mouvements simultanés rectilignes, uniformes ou uniformément variés, 154-156.

Mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe, 146-153.—Vitesse angulaire, 172-175.

Loi de l'inertie, 150.

Loi du mouvement relatif[1], 186, 187. — On en déduit qu'une force constante, agissant sur un point matériel qui part du repos ou qui est animé d'une vitesse initiale de même direction que la force, lui imprime un mouvement uniformément varié, 177-180.—Réciproque, 181.

Deux forces constantes sont proportionnelles aux accélérations qu'elles produisent, en agissant séparément sur un même point matériel qui part du repos, ou qui est animé d'une vitesse initiale de même direction que la force 188, 189.

De la masse, 190. — Sa mesure au moyen du poids, 191, 192.

Notions sur le travail des forces.

Ce qu'on appelle travail d'une force constante appliquée à un point dont le déplacement est rectiligne, 196-207. — Unité de travail, 208-210.

Faire voir que dans les machines simples, à l'état de mouvement uniforme, et sollicitées uniquement par une puissance et une résistance, le travail moteur est égal au travail résistant[2], 217.

Influence des résistances dites passives, 213.—Dans la pratique, le travail moteur est toujours plus grand que le travail résistant utile, 221.

(*Dix-huit leçons environ.*)

1. On admet ces deux lois comme résultats de l'expérience.
2. Dans le cas de la poulie mobile, on supposera les cordons parallèles.

TABLE DES MATIÈRES.

Les numéros renvoient aux pages.

MÉCANIQUE.

INTRODUCTION.

CHAPITRE I.

Notions préliminaires (1-4). — Notions sur les forces (5-9). — Conditions d'égalité de deux forces (10). — Leur évaluation numérique (10). — Comparaison des forces aux poids à l'aide du dynamomètre (11, 12).

Notions préliminaires.

1. On a vu, dans la *Physique*, que les *corps* peuvent être considérés comme des assemblages de parties très-petites, de forme invariable, physiquement indivisibles, appelés *atomes* ou *molécules* * : on donne aussi, à ces rudiments des corps, le nom de *points matériels.*

2. Il paraît impossible de définir, d'une manière satisfaisante, soit le *temps,* soit l'*espace.* Malgré cette impossibilité, on conçoit clairement que : *tout corps occupe dans l'espace, à chaque instant, un lieu déterminé.*

3. Si ce lieu est invariable, au moins *pendant un certain temps,* et si chacune des parties du corps participe à cette invariabilité, le corps est dit *en repos ;* dans le cas contraire, on dit qu'il est *en mouvement.* En d'autres termes :

Un corps est en repos si chacune de ses parties occupe un lieu invariable; il est en mouvement si quelqu'une de ses parties occupe, successivement, divers lieux dans l'espace.

4. *Remarques.* — I. Le repos et le mouvement, tels que nous venons de les considérer, sont appelés *repos absolu* et *mouvement absolu.* Mais, comme *l'espace est infini,* nous ne pouvons juger de la position occupée par un corps qu'en le

* La distinction entre les atomes et les molécules, bonne quand on étudie les corps au point de vue de la Physique et de la Chimie, est inutile en Mécanique.

rapportant à d'autres corps ou à nous-mêmes ; tous les mouvements que nous observons sont donc des *mouvements relatifs*. A plus forte raison, nous ne pouvons connaître que le *repos relatif*. Quand nous affirmons qu'un meuble, placé dans une chambre, est en repos, nous voulons exprimer seulement que ce meuble ne change pas de situation à l'égard des parois de la chambre : en réalité, le meuble, aussi bien que la chambre, participe au mouvement de rotation de la Terre, à son mouvement de translation autour du Soleil et au mouvement de translation du système solaire *. Le *repos absolu* est donc peut-être une simple abstraction.

II. Pour qu'un corps soit en repos, même en repos relatif, il ne suffit pas que sa surface extérieure conserve une position invariable ; il faut encore que chacune de ses parties soit immobile. On conçoit, en effet, qu'une sphère dont le centre serait fixe, et qui, par conséquent, semblerait en repos, pourrait cependant avoir des mouvements plus ou moins compliqués.

III. L'idée de mouvement entraîne celle de *continuité* : on ne comprendrait pas qu'un point matériel eût occupé deux positions différentes A et B, sans avoir décrit, dans l'espace, une certaine ligne terminée par A et par B. Cette ligne est ce qu'on appelle la *trajectoire* du point.

Notions sur les forces.

5. On appelle *force, la cause étrangère,* quelle qu'elle soit, *qui modifie ou qui tend à modifier l'état de repos ou de mouvement d'un corps* **.

Ainsi, la *pesanteur* est une force, parce qu'elle tend sans cesse à faire mouvoir les corps vers le centre de la terre ; le petit *effort musculaire* que j'exerce pour faire courir ma plume sur le papier, est une force ; l'*affinité,* en vertu de laquelle deux gaz mis en présence se combinent, est une force ; la *ten-*

* Voyez la *Cosmographie*.

** « Puisqu'un corps, en vertu de sa nature, conserve le même état, tant de mouvement que de repos, et qu'il n'en saurait être détourné que par des causes externes, il s'ensuit que, pour qu'un corps change d'état, il faut qu'il y soit *forcé* par quelque cause étrangère.... De là vient qu'on donne à cette cause le nom de *force.* » (Euler, *Lettres à une princesse d'Allemagne.*)

sion de la vapeur, qui fait mouvoir les pistons d'une locomotive, est une force, etc.

6. Quand un corps se meut, ou qu'il tend à se mouvoir, il en est de même pour tous les points matériels qui le composent; on doit donc admettre que chacun d'eux est sollicité par une force. Cela posé, on considère, dans une force quelconque :

1° Le *point d'application :* c'est celui sur lequel agit la force ;

2° La *direction :* c'est la droite suivant laquelle le point d'application, *supposé en repos et entièrement libre,* commencerait à se mouvoir ;

3° L'*intensité :* c'est le rapport de la force donnée à la force prise pour unité. Nous reviendrons, tout à l'heure, sur cette définition.

7. Une force, quelle qu'en soit l'intensité, emploie toujours un certain temps pour imprimer une vitesse à un corps en repos. Quand on donne un coup de marteau sur la tête d'un clou, les surfaces des deux corps restent en contact pendant un temps très-court, mais cependant *fini*. C'est pendant ce temps que le marteau chasse le clou*.

Effets des forces.

8. Les forces produisent des effets très-variés : tantôt elles accélèrent le mouvement du corps auquel elles sont appliquées; tantôt elles le ralentissent; tantôt enfin elles se neutralisent réciproquement, *de manière à ne pas modifier l'état de repos ou de mouvement* du corps considéré. Dans ce dernier cas, on dit que les forces se font *équilibre,* ou que l'une quelconque d'entre elles fait équilibre à toutes les autres, par l'intermédiaire du corps.

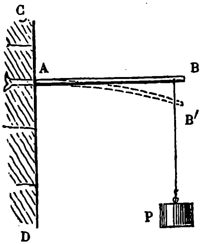
9. *Remarque.* — L'idée d'*équilibre* n'entraîne pas nécessairement celle de *repos :* quand on dit que des forces appliquées à un point matériel se font équilibre, cela signifie que ces forces ne modifient pas l'état du point.

* Autrefois on partageait les forces en *forces continues* et en *forces instantanées*. Cette classification a été abandonnée. Aujourd'hui, les physiciens et les géomètres sont d'accord sur ce principe : *il n'y a pas de force absolument instantanée.*

Forces égales. Leur évaluation numérique. Comparaison des forces aux poids.

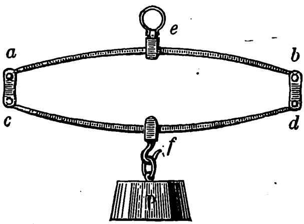
10. On dit que *deux forces sont* égales *lorsque, étant placées dans les mêmes circonstances, elles produisent les mêmes effets.*

Pour éclaircir cette définition, considérons un appareil formé d'une verge d'acier AB, encastrée, par l'une de ses extrémités, dans un mur CD. Si, à l'autre extrémité B, nous suspendons un poids P, de 12 kilogrammes, par exemple, la verge s'infléchira, et prendra une nouvelle position d'équilibre AB′. Cela posé, enlevons le poids P, et, en supposant que la tige AB soit redevenue rectiligne, exerçons en B, avec la main, une *pression* de plus en plus grande, jusqu'à ce que la verge prenne de nouveau la figure AB′. A ce moment, la pression produisant le même effet que le poids P, nous dirons qu'elle est égale à P.



Cet exemple suffit pour faire comprendre ce que l'on doit entendre par une *pression,* une *traction,* un *effort,* de 12 kilogrammes, de 100 kilogrammes, de 1000 kilogrammes, etc.

11. L'expérience que nous venons d'indiquer se fait plus convenablement au moyen du *dynamomètre.* On donne généralement ce nom à tous les instruments destinés à *comparer les forces aux poids.* L'un des plus simples et des plus parfaits se compose de deux verges d'acier *ab, cd,* réunies à leurs extrémités par deux pièces de fer *ac, bd.* Deux lames *e, f,* fixées au milieu des deux verges et munies de crochets, permettent de suspendre le dynamomètre et d'y appliquer la force que l'on veut évaluer.



Pour graduer l'instrument, on suspend en *f,* successivement, des poids égaux à 1, 2, 3,... kilogrammes, et l'on marque, sur une tige placée dans l'axe vertical *ef*, l'écartement correspondant des deux verges.

Au moyen de cet instrument, ou de ceux qui sont construits sur le même principe, on peut évaluer en *kilogrammes* les forces de traction, de pression, etc., non-seulement pendant le repos ou *à l'état statique*, mais encore pendant le mouvement, comme dans le tirage des voitures.

12. Des explications précédentes, il résulte que l'*unité de force est le kilogramme*. Malheureusement, elle n'est pas tout à fait constante. En effet, comme on le verra bientôt, la force appelée *pesanteur* va en diminuant du pôle à l'équateur : le cylindre de fonte ou de laiton, auquel on a donné le nom de *kilogramme*, est moins fortement attiré vers le centre de la Terre à l'équateur qu'aux pôles; ce poids d'un kilogramme, suspendu à un dynamomètre ou à une simple verge horizontale (10), produirait donc une inflexion de l'appareil plus grande en Laponie qu'à Paris. Autrement dit, le poids accusé par l'instrument, supposé d'un kilogramme à Paris, serait de plus d'un kilogramme en Laponie et de moins d'un kilogramme à Panama. Mais comme la différence est très-faible, elle est tout à fait négligeable dans les applications.

Définition de la Mécanique.

13. *La Mécanique est la science de l'équilibre et du mouvement*. On la divise en *Statique* et en *Dynamique*.

La Statique a pour objet l'équilibre des forces; et la Dynamique, la détermination des mouvements qu'elles peuvent produire *.

De la mesure du temps.

14. Bien qu'on ne puisse pas *définir* le temps (2), il est facile de concevoir des *temps égaux*, et, par suite, d'arriver à la notion de la *mesure du temps*.

Supposons, en effet, que des corps A, B, C, D,... *identiques* de forme, de composition, de volume, etc., soient successivement mis en mouvement, dans des circonstances *identiques*, à cela près que le mouvement de B commence quand cesse celui de A, que le mouvement de C commence quand cesse

* Nous avons déjà fait observer que l'équilibre ne suppose pas le repos (9); par conséquent, ces diverses définitions, généralement adoptées, ne sont pas tout à fait satisfaisantes.

celui de B, etc. : les temps pendant lesquels s'exécutent ces mouvements successifs sont dits *égaux entre eux*.

Pour fixer les idées, admettons que les corps A, B, C,... soient des sphères pesantes, égales entre elles, suspendues par des fils égaux, également inclinés sur la verticale. Si nous abandonnons à l'action de la pesanteur la sphère A, le fil qui la soutenait se rapprochera de la verticale pour s'en écarter ensuite; quand il aura effectué une *oscillation* complète, c'est-à-dire quand il cessera de s'écarter de la verticale, abandonnons à l'action de la pesanteur la sphère B : la *durée de l'oscillation* de celle-ci sera égale à la durée de la première oscillation. En continuant de la même manière, on voit que les sphères A, B, C, D,... exécutent leurs oscillations consécutives dans des temps égaux, et que les temps pendant lesquels s'effectuent deux, trois, quatre,... oscillations, sont doubles, triples, quadruples,... de la durée d'une seule oscillation.

15. Chacun des appareils dont nous venons de donner l'idée est ce qu'on appelle un *pendule*. Si le corps pesant est réduit à un point matériel, et que le fil de suspension soit inextensible et sans pesanteur, l'appareil, qui devient alors purement idéal, prend le nom de *pendule simple : un pendule simple est* donc *un point matériel pesant, suspendu à l'extrémité inférieure d'un fil inextensible et sans pesanteur, dont l'autre extrémité est fixe*. On appelle, en général, *pendule composé,* tout corps solide pesant qui oscille autour d'un axe horizontal fixe.

16. Que le pendule soit simple ou composé, ses oscillations s'exécutent dans des temps égaux, c'est-à-dire qu'elles sont *isochrones* *. Il n'est donc pas nécessaire, pour mesurer un temps quelconque, d'employer, comme nous l'avions supposé tout à l'heure, plusieurs pendules A, B, C, D,... oscillant successivement; il suffit de compter le nombre des oscillations exécutées, pendant ce temps, par un pendule unique.

17. On sait** que, depuis les plus anciennes observations, la durée du *jour sidéral* n'a pas varié d'une manière appréciable ; cette durée pourrait donc être prise comme unité de temps; et, pour évaluer les fractions, on compterait le nombre des

* Cette proposition n'est pas vraie d'une manière absolue : par suite de la résistance de l'air, des frottements, etc., l'*amplitude* des oscillations diminue de plus en plus, et le pendule finit par s'arrêter.

** Voyez la *Cosmographie*.

oscillations effectuées par un pendule quelconque, pendant le temps qu'il s'agirait d'évaluer et pendant un jour sidéral. Néanmoins, on a trouvé plus commode de prendre pour unité le *jour solaire moyen*, et de le partager en 86 400 secondes sexagésimales. En même temps, on a adopté pour *pendule-étalon* celui qui exécute son oscillation en une seconde, ou qui bat 86 400 oscillations en un jour solaire moyen.

18. *Si l'amplitude des oscillations est très-petite*, la *longueur* l du pendule simple, la durée t d'une oscillation complète (exprimée en secondes sexagésimales), la *gravité* g *, et le rapport π de la circonférence au diamètre, sont liés par l'équation

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}\,^{**}.$$

19. D'après cette formule, l'une des plus importantes de la Physique et de la Mécanique, la longueur du pendule à secondes a pour expression :

$$l = \frac{g}{\pi^2} = \frac{9{,}80896}{(3{,}1415926\ldots)^2} = 0^{\text{m}}{,}993\,855.$$

Réciproquement, si l'observation a donné la longueur du pendule à secondes, on pourra obtenir la valeur de la gravité, puisque, d'après l'équation précédente, $g = l\pi^2$.

20. La formule n° 18 conduit à plusieurs lois remarquables :

1° *En un même lieu, les durées des oscillations de deux pendules sont proportionnelles aux racines carrées des longueurs des pendules ;*

2° *En un même lieu, les longueurs de deux pendules sont inversement proportionnelles aux carrés des nombres d'oscillations exécutées, dans le même temps, par les deux pendules ;*

* Voyez plus loin.

** Si le lecteur avait quelque peine à comprendre pourquoi t représente *un nombre de secondes*, il lui suffirait de remarquer que $g = 9^{\text{m}}{,}80896$[1], représente la vitesse acquise, *au bout d'une seconde*, par un corps tombant dans le vide, sous l'action de la pesanteur, et à la latitude de Paris. Si on voulait que la formule donnât un temps exprimé en *heures* ou en *jours*, on devrait remplacer g par la vitesse correspondant à *une heure* ou à *un jour*.

1. La plupart des auteurs donnent, au lieu de cette valeur, $g = 9{,}8088$. Le nombre que nous avons adopté est extrait de la *Mécanique de Poisson*.

3° *Les intensités de la pesanteur*, en deux lieux différents, sont proportionnelles aux longueurs des pendules qui battent les secondes en ces deux lieux.*

En effet :

1° Si t' est la durée de l'oscillation d'un pendule de longueur l', on aura

$$t' = \pi \sqrt{\frac{l'}{g}};$$

donc

$$\frac{t}{t'} = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{l'}}.$$

2° Soient n, n' les nombres d'oscillations exécutées, dans un même temps T, par deux pendules de longueurs l, l'; de manière que

$$T = nt = n't'.$$

On aura

$$n^2 t^2 = n'^2 t'^2,$$

ou

$$\frac{t^2}{t'^2} = \frac{n'^2}{n^2}.$$

Mais

$$\frac{t^2}{t'^2} = \frac{l}{l'};$$

donc

$$\frac{l}{l'} = \frac{n'^2}{n^2}.\text{**}$$

* On verra plus tard que la constante g, en un lieu quelconque, est proportionnelle à la pesanteur ; elle peut donc lui servir de mesure.

** Pour faire comprendre l'utilité de cette formule, supposons qu'un astronome, après avoir fait osciller un pendule dont la longueur $l = 1^m,950$, ait trouvé, pour la moyenne du nombre des oscillations exécutées par ce pendule en un jour moyen, $n = 61\,682$, et qu'il se propose de calculer la longueur l' du pendule à secondes. A cause de $n = 86\,400$, la formule donnera

$$l' = 1{,}950 \left(\frac{61\,682}{86\,400}\right)^2 = 0^m{,}993\,855.$$

C'est ainsi que Borda, lors de l'établissement du système métrique, obtint cette dernière valeur, d'où il conclut $g = 9^m{,}808\,96$.

3° Les deux pendules exécutant leurs oscillations en une seconde, on a

$$\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{l'}{g'}};$$

d'où

$$\frac{g}{g'} = \frac{l}{l'}.*$$

Résumé.

Les corps sont composés de parties très-petites, appelées atomes ou molécules.

Tout corps occupe dans l'espace, à chaque instant, un lieu déterminé.

Un corps est en repos ou en mouvement, suivant qu'une de ses parties, au moins, est en repos ou en mouvement.

L'expérience ne fait connaître que des mouvements relatifs ou des repos relatifs.

Le repos absolu est peut-être une abstraction.

L'idée de mouvement entraîne celle de continuité.

On appelle force la cause étrangère qui modifie ou qui tend à modifier l'état de repos ou de mouvement d'un corps.

On considère, dans une force quelconque : 1° le point d'application ; 2° la direction ; 3° l'intensité.

Il n'y a pas de force absolument instantanée.

Lorsque des forces, appliquées à un corps, n'en modifient pas l'état, on dit qu'elles se font équilibre.

L'idée d'équilibre n'entraîne pas nécessairement celle de repos.

Deux forces sont dites égales, lorsque, placées dans les mêmes circonstances, elles produisent les mêmes effets.

Les dynamomètres sont des instruments destinés à comparer les forces aux poids.

L'unité de force est le kilogramme. Cette unité n'est pas absolument constante.

La Mécanique est la science de l'équilibre et du mouvement. On la divise en Statique et en Dynamique.

* On a vu, dans la *Cosmographie*, que les longueurs l', l'' du pendule, à l'équateur et en Laponie, sont à la longueur l du pendule, à Paris, dans les rapports 0,99669 et 1,00127. Les valeurs correspondantes de la gravité sont donc (en négligeant la *force centrifuge*) :

$$g' = g \times 0{,}99669, \quad g'' = g \times 1{,}00137.$$

Ainsi la pesanteur est plus petite à l'équateur qu'à Paris, et plus petite à Paris qu'en Laponie ; d'où l'on conclut que la Terre est aplatie aux pôles et renflée à l'équateur.

Lorsque des mouvements identiques se reproduisent sans interruption, les temps correspondants sont dits égaux entre eux, et le temps total est dit double, triple, etc., de celui pendant lequel a lieu le premier mouvement.

On appelle pendule simple un point matériel pesant, suspendu à l'extrémité inférieure d'un fil inextensible et sans pesanteur, dont l'autre extrémité est fixe.

Les oscillations d'un pendule sont, en général, sensiblement isochrones.

L'unité de temps est le jour solaire moyen. Le pendule-étalon est celui qui bat 86 400 oscillations en un jour solaire moyen.

Quand l'amplitude des oscillations est fort petite, la formule qui en donne la durée est

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

En un même lieu, les durées des oscillations de deux pendules sont proportionnelles aux racines carrées des longueurs des pendules.

En un même lieu, les longueurs de deux pendules sont inversement proportionnelles aux carrés des nombres d'oscillations.

Les intensités de la pesanteur, en deux lieux différents, sont proportionnelles aux longueurs des pendules à seconde.

ÉLÉMENTS DE STATIQUE.

CHAPITRE II.

Composition et équilibre des forces.

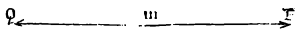
On admet que deux forces égales et contraires, appliquées à deux points liés par une droite invariable de longueur, et agissant dans la direction de cette droite, se font équilibre (21). — Translation du point d'application d'une force en un point quelconque de sa direction, qu'on suppose lié invariablement au premier (29). — Composition de deux forces appliquées à un même point (30-42). — Théorème des moments par rapport à un point pris dans le plan des forces (49-51). — Composition d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point (43-49). — Conditions d'équilibre (52-53).— Composition d'un système quelconque de forces appliquées à un corps solide (54). — Leur réduction à deux forces, dont l'une est appliquée à un point pris à volonté (56). — Condition générale de l'équilibre (57).

Effets produits par deux forces.

21. 1re DEMANDE *. — 1° *Deux forces* P, Q, *égales et directement opposées, appliquées à un point matériel* m, *se font équilibre;*

2° RÉCIPROQUEMENT : *Si deux forces* P, Q, *appliquées à un corps solide, se font équilibre, elles sont égales et directement opposées* **.

1° Si par exemple un corps solide *m*, de dimensions très-petites, repose sur un plan horizontal***, et qu'il soit sollicité, suivant ce plan, par deux forces P, Q, directement opposées, égales chacune à 10 kilogrammes (10), il ne prendra aucun mouvement.

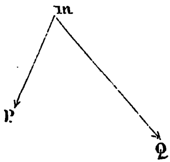


* On appelle *demande* ou *postulatum* une proposition *presque évidente,* que l'on admet sans démonstration.
** Cette réciproque est un cas particulier du principe de l'*égalité entre l'action et la réaction,* découvert par Newton.
*** Afin que l'on puisse faire abstraction de la pesanteur.

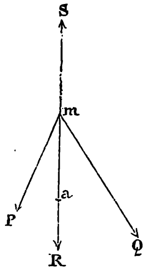
2° Quand j'appuie ma main sur une table, il se développe, dans celle-ci, une *résistance* égale et contraire à la pression exercée : cette résistance se traduit par une sensation d'autant plus pénible, que l'effort est plus grand. Ainsi encore, quand un cheval traîne une voiture, il éprouve une résistance au mouvement, égale et contraire à l'effort qu'il développe. Pour se convaincre de ce dernier point, il suffit d'établir, entre le cheval et la voiture, une corde portant un dynamomètre à chacune de ses extrémités : on trouve que les indications des deux instruments sont égales, au moins quand le mouvement est *uniforme;* par conséquent, la corde est sollicitée par deux forces égales et contraires.

22. 2e DEMANDE. — *Un point matériel en repos, sollicité par deux forces* P, Q, *non directement opposées, commence à se mouvoir dans l'angle* PmQ *formé par les directions des forces.*

23. *Remarque.* — Cette proposition suppose que le point matériel est *entièrement libre;* ce qui veut dire qu'il est *isolé dans l'espace*, et que, abstraction faite des forces P, Q, *rien n'en détermine ou n'en gêne le mouvement.*



24. *Résultante.* Soit *ma* la direction suivant laquelle le point *m* commencerait à se mouvoir, sous l'action simultanée des forces P, Q. Pour le maintenir en repos, il faudrait y appliquer une certaine force S, directement opposée à *ma*. Cette force S ferait donc *équilibre* aux forces P, Q; ou, ce qui est équivalent, *les forces* P, Q *font équilibre à la force unique* S.

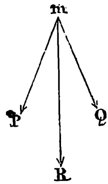


Soit maintenant R une force égale et directement opposée à S; *la force* R, qui fait aussi équilibre à la force S (21), *peut* donc *tenir lieu des forces* P, Q : pour indiquer ce résultat, on dit que la force R est la *résultante* des forces P, Q. Inversement, celles-ci sont les *composantes* de R.

En général, on appelle *résultante* de plusieurs forces F, F′, F″, ... *une force unique produisant le même effet que les composantes* F, F′, F″, ...

25. *Remarque. — Des forces données n'ont pas toujours une résultante.*

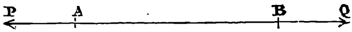
Par exemple, *deux forces* P, Q, *non dirigées dans un même plan, n'ont pas de résultante* *.



26. 3e Demande. — *La résultante de deux forces égales* P, Q, *non directement opposées, appliquées à un point matériel* m, *est dirigée suivant la bissectrice de l'angle* PmQ *formé par les directions de* P, Q.

27. 4e Demande. — *Deux forces* P, Q, *égales et directement opposées, appliquées aux extrémités* A, B *d'une droite rigide, se font équilibre.*

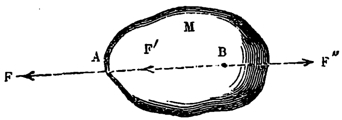
Ce principe, généralisation de la première demande (21), doit être regardé comme un résultat de l'expérience : il ne paraît pas susceptible d'une véritable démonstration.



Translation du point d'application.

28. Théorème. *On peut transporter le point d'application d'une force en un point quelconque de la direction de la force, pourvu que le second point soit invariablement lié au premier.*

Soit, pour fixer les idées, la force F appliquée en un point A appartenant à la surface du corps solide M; je dis que cette force peut être supposée appliquée au point B, situé à l'intérieur du corps, sur le prolongement de FA.



Pour le faire voir, imaginons, en B, deux forces égales à F, l'une F′ dirigée suivant BA, l'autre F″ opposée à F′ : ces deux forces auxiliaires, étant égales et directement opposées, se font équilibre (21). D'un autre côté, les forces F, F″ se font également équilibre (27) : si nous les supprimons, ce qui ne change en rien l'état du corps, il restera la force F′ appliquée en B. Cette dernière force peut donc tenir lieu de la force F, appliquée en A. C'est ce qu'il fallait démontrer.

* La démonstration de cette proposition, quoique assez simple, n'est pas de nature à être donnée ici.

Composition de forces dirigées suivant une même droite.

29. Théorème I. — *Deux forces* P, Q, *dirigées suivant une même droite et agissant dans le même sens, ont une résultante égale à leur somme, dirigée suivant la même droite, et qui agit dans le sens des deux composantes.*

Au moyen du théorème précédent, on peut toujours admettre que les forces données ont même point d'application. Cela étant, supposons qu'une même force f puisse être contenue p fois dans P et q fois dans Q*. Le point m est sollicité par $p+q$ forces égales à f, agissant toutes de la même manière : les choses se passent donc comme si le point était sollicité par une force unique, égale à $(p+q)f$, ou égale à $P+Q$.

30. Théorème II. — *Deux forces* P, Q, *dirigées suivant une même droite et agissant en sens contraires, ont une résultante égale à leur différence, dirigée suivant la même droite, et qui agit dans le sens de la plus grande composante.*

Soit $P>Q$. On peut regarder la force P comme la résultante de deux forces, $Q'=Q$ et $P-Q'$, agissant dans le même sens que P (29). La première composante Q′ détruit la force Q (27) : il reste donc, comme *résultante* des forces données, la composante $P-Q'=P-Q$, qui agit dans le même sens que P.

31. Théorème III. — *Tant de forces que l'on voudra, dirigées suivant une même droite, ont une résultante égale à leur somme algébrique, dirigée suivant la même droite, et agissant dans le sens des composantes dont la somme arithmétique est la plus grande.*

Pour fixer les idées, supposons qu'il y ait trois forces, P, P', P'' agissant de *gauche à droite*, et deux forces, Q, Q', agissant de *droite à gauche*.

* Quand on dit qu'une force f *est contenue* n fois dans une autre force F, on veut exprimer que celle-ci *équivaut* à n forces égales à la première. Or, on conçoit qu'en descendant à une force f *suffisamment petite*, il soit toujours possible d'arriver à un *sous-multiple* commun de deux forces quelconques P, Q, sinon exactement, du moins avec une approximation plus que suffisante. Par exemple, si l'on veut comparer la force de traction d'un homme à celle d'un cheval, on pourra essayer d'abord, comme terme de comparaison, la force d'un enfant. Admettons que l'expérience apprenne qu'un homme est plus fort que 3 enfants réunis et plus faible que 4 : l'unité essayée étant trop grande, on aura recours, par exemple, à la force d'un jeune chien ; et ainsi de suite.

Aux forces P, P′, on peut substituer une force unique r, égale à P + P′, et agissant de gauche à droite (29). De même, aux forces r, P″, on peut substituer une force unique R′, égale à r + P″, ou égale à P + P′ + P″. Cette force R′, *résultante* de P, P′, P″ (24), agit aussi de gauche à droite. Semblablement, les forces Q, Q′ ont une résultante R″, égale à Q + Q′, et qui agit de droite à gauche.

Le système donné est donc déjà remplacé par les forces R′, R″. Mais celles-ci ont une résultante R, égale à R′ — R″, ou égale à R″ — R′, suivant que R′ est supérieure ou inférieure à R″ (31). Pour abréger, on écrit, dans les deux cas,

$$R = P + P' + P'' - Q - Q'.$$

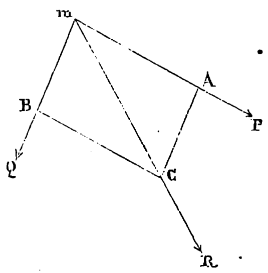
D'ailleurs, cette résultante unique R, *prise positivement,* agit dans le même sens que les composantes dont la *somme arithmétique* est la plus grande.

32. *Remarque.*— Si cette somme *algébrique* est nulle, c'est-à-dire si la somme *arithmétique* des forces qui agissent dans un sens, est égale à la somme arithmétique des forces qui agissent en sens contraire, *il y a équilibre.*

Parallélogramme des forces.

33. THÉORÈME I. — *La résultante* R (24) *de deux forces* P, Q, *appliquées à un point matériel* m, *est représentée*, EN DIRECTION, *par la diagonale* mC *du parallélogramme construit sur les droites* mA, mB *qui représentent, en grandeur et en direction, les composantes.*

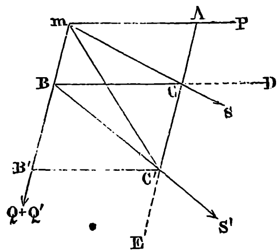
D'après la troisième demande (26), ce théorème fondamental est vrai dans le cas où les composantes P, Q sont égales. En effet, à cause de $mA = mB$, le parallélogramme $mACB$ se réduit alors à un losange, dans lequel la diagonale mC est la bissectrice de l'angle AmB.



Pour passer au cas général, nous nous appuierons sur la proposition suivante :

34. Lemme. — *Si le théorème I est vrai dans le cas d'une force* P *et d'une force* Q, *et s'il est vrai aussi dans le cas de la force* P *et d'une force* Q′, *il subsiste pour le cas de la force* P *et de la force* Q + Q′.

Supposons que, dans le parallélogramme $mAC'B'$, les longueurs mA, mB, BB' soient proportionnelles aux forces P, Q, Q′ : il s'agit de *composer* (24) la force P, représentée par mA, avec la force $Q+Q'$ représentée par mB'.



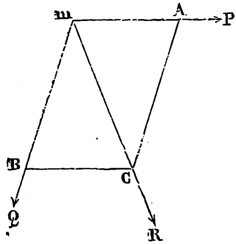
Remarquons d'abord que cette seconde force, appliquée en m, peut être décomposée en une force Q, aussi appliquée en m et représentée par mB, et en une force Q′, appliquée en B et représentée par BB′ : en effet, on suppose les points m, B, B′ liés invariablement.

D'après la première hypothèse, la résultante S des forces P, Q est dirigée suivant la diagonale mC du parallélogramme $mACB$. Transportons en C (28) le point d'application de cette *résultante partielle* S; et, cela étant fait, décomposons cette même force S, appliquée en C, comme elle était décomposée tout à l'heure : les nouvelles composantes $P_1 = P$, $Q_1 = Q$ seront dirigées, l'une suivant le prolongement CD de BC, l'autre suivant CC′. En effet, les angles SCD, SCC′ sont égaux, respectivement, à CmA, CmB.

A cause de cette première décomposition, le système des forces P et $Q+Q'$, appliquées en m, est remplacé par le système des deux forces P_1, Q_1, appliquées en C, et de la force Q′, non encore employée, et représentée par BB′.

Avant d'aller plus loin, remarquons que la force P_1 peut être remplacée par une force $P_2 = P_1 = P$, appliquée en B et représentée par BC; et que la force Q_1 peut être remplacée par une force $Q_2 = Q_1 = Q$, appliquée en C′ et dirigée suivant le prolongement C′E de AC′.

D'après la seconde hypothèse, la résultante S′ des forces P_2, Q′, est dirigée suivant la diagonale BC′ du parallélogramme BCC′B′. Ainsi, le système des forces P et $Q+Q'$ est remplacé, maintenant, par le système des forces $Q_2 = Q$ et S′, appliquées en C′. La résultante R des deux premières forces passe donc en C′. Et comme elle passe aussi par le point d'application m, *elle est dirigée suivant la diagonale* mC′ *du parallélogramme* mAC′B′. Le lemme est donc démontré.

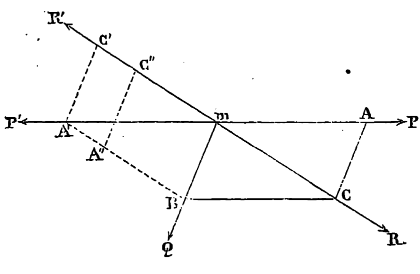


35. Revenons maintenant au cas de deux forces quelconques P, Q, appliquées à un point matériel m, et respectivement représentées par les droites mA, mB : il s'agit de démontrer que la résultante R est représentée, *en direction*, par la diagonale mC du parallélogramme mACB.

Supposons, comme ci-dessus (29), qu'une même force f puisse être contenue p fois dans P et q fois dans Q. Le théorème étant vrai pour le cas où les composantes se réduiraient, l'une et l'autre, à f, subsiste pour le cas de la force f et d'une force $2f$. Étant vrai dans ces deux premiers cas, il subsiste pour le cas de la force f et d'une force $3f$; et ainsi de suite. Ainsi déjà, le théorème I est démontré pour le cas de la force f et d'une force $qf = Q$. Par suite, il subsiste lorsque les composantes sont Q et $2f$; puis quand elles deviennent Q et $3f$; etc. Enfin, il est démontré pour le cas où les forces données sont Q et $pf = P$.

36. Théorème II. — *La résultante* R *de deux forces* P, Q, *appliquées à un point matériel* m, *est représentée*, **EN GRANDEUR**, *par la diagonale* mC *du parallélogramme construit sur les droites* mA, mB *qui représentent, en grandeur et en direction, les composantes.*

Soit R′ une force égale et directement opposée à R : il y a équilibre entre les forces P, Q, R′ (24). Par conséquent, la force P est égale et directement opposée à la résultante P′ de Q et de R′.



Par le point B, menons BA′ parallèle à Cm; puis, par le point A′ où BA′ coupe le prolongement de mA, menons A′C′ parallèle à Bm : je dis que mC′ représente, *en grandeur*, la force R′.

En effet, si cette force était représentée par une droite mC″ différente de mC′, la diagonale mA″ du parallélogramme mBA″C″ ne coïnciderait pas, en direction, avec P′, contrairement au théorème I.

A cause des parallélogrammes mC′A′B, mA′BC, on a

$$R' = mC' = BA' = Cm = R.$$

Ainsi, la diagonale mC′, qui représente la résultante R en direction, la représente aussi en grandeur. C'est ce qu'il fallait démontrer.

37. En résumant les théorèmes I, II, on a donc la proposition suivante, connue sous le nom de *théorème* ou de *règle du parallélogramme des forces* :

La résultante R *de deux forces* P, Q, *appliquées à un point matériel* m, *est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent, en grandeur et en direction, les composantes.*

38. *Remarques.* — I. On a

$$mC < mA + AC, \qquad mC > mA - AC,$$

ou

$$R < P + Q, \qquad R > P - Q.$$

Ainsi, *la résultante est plus petite que la somme des deux composantes, et plus grande que leur différence.*

II. Si l'angle des composantes diminue jusqu'à zéro, le point A est situé entre les points m, C; et alors

$$R = P + Q.$$

Ainsi, *deux forces dirigées suivant la même droite, et agissant dans le même sens, ont une résultante égale à leur somme* (29).

III. Semblablement, *deux forces inégales, dirigées suivant la même droite, et agissant en sens contraires, ont une résultante égale à leur différence* (30).

39. *Autres relations entre la résultante et les deux composantes.* — *Soient* P, Q *deux forces appliquées à un point matériel* m; *soit* R *leur résultante :*

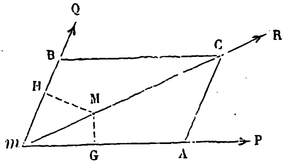
1° *Chacune des trois forces est proportionnelle au sinus de l'angle formé par les directions des deux autres;*

2° *Les distances* MG, MH *d'un point* M *de la résultante aux directions des composantes, sont en raison inverse des intensités de ces composantes.*

En effet :

1° Le triangle mBC donne

$$\frac{BC}{\sin BmC}=\frac{mB}{\sin mCB}=\frac{mC}{\sin mBC};$$



ou, en remplaçant les côtés par les forces auxquelles ils sont proportionnels,

$$\frac{P}{\sin(Q,R)}=\frac{Q}{\sin(P,R)}=\frac{R}{\sin(P,Q)}\text{*}.$$

2° Les triangles rectangles MGm, MHm donnent

$$\frac{MG}{MH}=\frac{\sin(P,R)}{\sin(Q,R)},$$

ou, en vertu de la proportion précédente,

$$\frac{MG}{MH}=\frac{Q}{P}.$$

40. *Remarque.* — La recherche de la résultante R des forces P, Q équivaut à la résolution du parallélogramme mACB, ou, simplement, à la résolution du triangle mBC, dans lequel on connaît deux côtés et l'angle compris. Ce triangle donne **

$$\overline{mC}^2=\overline{mB}^2+\overline{BC}^2-2\,mB\,.\,BC\cos mBC;$$

* Il est à peine besoin de faire observer que la notation *sin* (Q,R) représente *le sinus de l'angle formé par la direction de* Q *avec la direction de* R; *etc.*

** Voyez la *Trigonométrie*.

ou, en remplaçant les lignes par les forces qu'elles représentent, et en faisant attention que mBC est le supplément de BmA :

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2\,PQ\cos(P,Q). \qquad (1)$$

La résultante étant ainsi déterminée en *grandeur**, on la détermine en *direction* par les proportions

$$\frac{P}{\sin(Q,R)} = \frac{Q}{\sin(P,R)} = \frac{R}{\sin(P,Q)}. \qquad (2)$$

Si les composantes P, Q sont rectangulaires, les relations (1) et (2) se simplifient ; elles donnent

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}\,; \qquad (3)$$

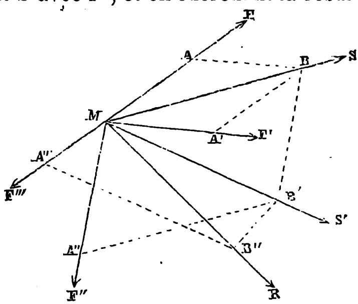
$$P = R\cos(P,R), \quad Q = R\cos(Q,R). \qquad (4)$$

Résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point.

11. Soient, pour fixer les idées, quatre forces F, F′, F″, F‴, appliquées à un point m, et représentées par les droites mA, mA′, mA″; mA‴....

Si, par la règle du parallélogramme, on *réduit* les forces F, F′ à une force unique S, le système des *quatre* forces données sera remplacé par le système des *trois* forces S, F″, F‴.

De même, en *composant* S avec F″, et en cherchant la résultante S′ de ces deux forces, on réduit le système primitif au système des forces S′, F‴. Enfin une nouvelle application du théorème fait connaître la résultante R des forces F, F′, F″, F‴.



* La formule (1) donne pour R deux valeurs, égales et de signes contraires ; mais on doit adopter seulement la valeur positive de cette inconnue, attendu que l'*intensité* d'une force ne peut être négative. Quand on affecte une force du double signe ±, on a égard, tout à la fois, à la grandeur de cette force et aux deux sens opposés dans lesquels elle peut agir. Ici, il n'y a pas d'ambiguïté : la résultante R agit de m vers C.

42. *Remarque.* — Au lieu de construire, successivement, les parallélogrammes dont mB, mB',... sont les diagonales, on peut se contenter de mener AB égale et parallèle à mA'; puis BB' égale et parallèle à mA'', etc. : la droite mB''', qui ferme le *contour polygonal* $mABB'$..., représente la résultante. On a donc le théorème suivant :

La résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point est représentée, en grandeur et en direction, par le dernier côté d'un polygone fermé ayant ses autres côtés égaux et parallèles à ceux qui représentent les composantes, en grandeur et en direction.

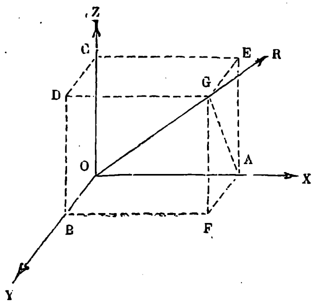
43. *Remarque.* — *Étant donnée une force* R, *on peut toujours, d'une infinité de manières, la décomposer en d'autres forces dont les directions passent par le point d'application de* R *.

Parallélipipède des forces.

44. Considérons le cas où les forces se réduisent à trois, non situées dans un même plan; la construction générale indiquée ci-dessus (41) donne lieu à la proposition suivante, connue sous le nom de *Théorème du Parallélipipède des forces :*

La résultante de trois forces appliquées à un même point, et non situées dans un même plan, est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélipipède construit sur les droites qui représentent les composantes, en grandeur et en direction.

45. Si les directions des composantes X, Y, Z, sont *perpendiculaires deux à deux,* et que les intensités de ces forces soient représentées par OA, OB, OC, il est facile de calculer, non-seulement l'intensité de la résultante R, représentée par la diagonale OG du parallélipipède *rectangle* OABCG, mais encore les angles formés par R avec les composantes.



* Cet énoncé est soumis à deux restrictions : 1° *si les directions données sont dans un même plan, dans lequel ne soit pas située la*

1° Si l'on mène GA, cette droite sera perpendiculaire à OA, attendu que le plan EAF est perpendiculaire à cette dernière droite; par conséquent, dans le triangle rectangle OAG :

$$\overline{OG}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AG}^2.$$

Mais, dans le triangle AFG, *rectangle* en F :

$$\overline{AG}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FG}^2;$$

donc, à cause de AF = OB, et de FG = OC :

$$\overline{OG}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2.$$

Remplaçons les longueurs par les forces qu'elles représentent; nous aurons, au lieu de la dernière égalité,

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2. \qquad (1)$$

Ainsi, *quand trois forces appliquées à un même point sont rectangulaires deux à deux, le carré de la résultante est égal à la somme des carrés des composantes.*

2° Le triangle rectangle OAG, déjà considéré, donne

$$OA = OG \cos AOG,$$

ou

$$X = R \cos (X,R). \qquad (2)$$

On trouverait, semblablement,

$$Y = R \cos (Y,R). \qquad (3)$$
$$Z = R \cos (Z,R). \qquad (4)$$

On conclut, des trois dernières relations, *les cosinus des angles formés par les composantes avec la résultante :*

$$\cos (X,R) = \frac{X}{R}, \quad \cos (Y,R) = \frac{Y}{R}, \quad \cos (Z,R) = \frac{Z}{R}.$$

force R, *la décomposition est impossible; 2° si les directions données se réduisent à deux, situées dans un même plan avec la force* R, *la décomposition est possible, mais d'une seule manière.*

46. *Remarque.* — Si l'on remplace, dans l'égalité (1), X, Y, Z par leurs valeurs, on obtient, en supprimant le facteur commun R^2 :

$$\cos^2(X,R) + \cos^2(Y,R) + \cos^2(Z,R) = 1.$$

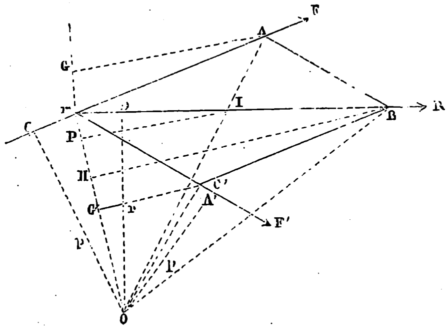
Ainsi, *la somme des carrés des cosinus des angles que fait une droite avec trois axes rectangulaires quelconques, est égale à l'unité.* Cette relation très-simple est d'un usage continuel dans certaines parties des Mathématiques.

Moment d'une force. — Théorème de Varignon.

47. *Moment d'une force. — Le moment d'une force, par rapport à un point* O, *est le produit de l'intensité de la force par la distance comprise entre la direction de la force et le point.*

Le point O est appelé *centre des moments.*

48. Théorème. — *Le moment de la résultante* R *de deux forces concourantes* F, F′, *par rapport à un point* O *situé dans leur plan, est égal à la somme des moments des composantes* (Théorème de Varignon).



Les distances OC, OC′, OD étant désignées par p, p', r, il faut démontrer que

$$Rr = Fp + F'p'. \qquad (1)$$

Cette égalité revient à

$$mB \,.\, OD = mA \,.\, OC + mA \,.\, OC' :$$

celle-ci exprime que le triangle OmB est équivalent à la somme des triangles OmA, OmA'. Ces trois triangles ayant même base Om, sont entre eux comme leurs hauteurs BH, AG, A'G'; donc l'égalité (1) se réduit à

$$BH = AG + A'G'.$$

Mais, I étant le centre du parallélogramme, $BH = 2II'$; et, d'après un théorème connu,

$$II' = \tfrac{1}{2}(AG + A'G');$$

donc enfin

$$BH = AG + A'G'.$$

49. *Remarque.* — Si le centre O tombait dans l'angle formé par les directions mA, mA', ou dans l'angle formé par leurs prolongements, le triangle OmB serait égal à la *différence* des triangles OmA, OmA', en sorte que le moment de la résultante serait égal à la *différence* des moments des composantes. Pour n'avoir pas à modifier l'énoncé du théorème, on regarde le moment d'une force comme *positif* ou comme *négatif*, suivant que cette force *tend à faire tourner la droite* Om *dans un sens ou dans l'autre, autour du centre des moments.*

50. Corollaire. — *Si le centre des moments appartient à la direction de la résultante, les moments des composantes sont égaux et de signes contraires; et réciproquement.*

1° En effet, lorsque le point O est situé sur mB, on a $r = 0$; donc l'égalité (1) devient $Fp + F'p' = 0$, ou

$$Fp = -F'p'.$$

2° Si $Fp = -F'p'$, l'égalité (1) se réduit à $Rr = 0$; et, comme *le premier facteur* R *est supposé différent de zéro*, le second facteur r est nécessairement nul; donc le point O est situé sur mB.

51. *Remarque.* — La première propriété ne diffère pas de celle qui a été démontrée dans le n° 39 (2°). En effet, de la proportion

$$\frac{MG}{MH}=\frac{Q}{P},$$

on conclut

$$-P.MG+Q.MH=0.$$

Mais, si l'on convient de regarder comme *positif* le moment de la force Q, et comme *négatif* le moment de la force P *, on a

$$-P.MG=\textit{moment de } P, \quad +Q.MH=\textit{moment de } Q;$$

donc

$$\textit{mom.}\,P+\textit{mom.}\,Q=0.$$

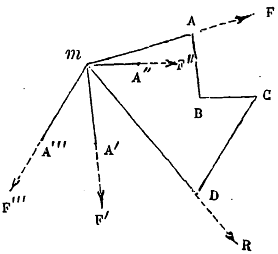
Conditions de l'équilibre d'un point matériel.

52. Avant de chercher les *conditions de l'équilibre de plusieurs forces appliquées à un point matériel,* nous rappellerons quelques propositions :

1° *On dit que des forces se font équilibre, quand elles se neutralisent réciproquement, de manière à ne pas modifier l'état de repos ou de mouvement du corps qu'elles sollicitent* (8);

2° *Pour que deux forces, appliquées à un corps solide entièrement libre**, se fassent équilibre, il faut et il suffit qu'elles soient égales et directement opposées* (21, 27);

3° *Plusieurs forces* F, F′, F″,.... *appliquées à un point matériel* m, *se réduisent, en général, à une force unique* R *représentée, en grandeur et en direction, par le dernier côté* mD *d'un polygone fermé ayant ses autres côtés égaux et parallèles aux droites qui représentent les composantes, en grandeur et en direction* (42).



* Ces conventions sont les plus habituelles.

** Un corps est dit *entièrement libre* dans l'espace, quand rien ne s'oppose au mouvement que tendent à lui imprimer les forces qui y sont appliquées.

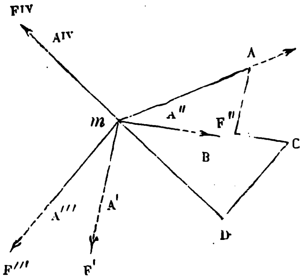
53. De ces principes, on conclut le théorème suivant :

Pour que plusieurs forces F, F′, F″,..., *appliquées à un point matériel* m, *se fassent équilibre, il faut et il suffit que le polygone dont les côtés sont égaux et parallèles aux droites qui les représentent, soit fermé.*

En effet :

1° Si, comme dans la figure du numéro précédent, le polygone mABCD est *ouvert*, les forces F, F′, F″, F‴ ont une résultante R, représentée par la droite mD qui *ferme* le polygone ;

2° Si, au contraire, le polygone mABCDm est *fermé*, son dernier côté Dm, prolongé d'une longueur égale, représente la force F^{IV}, laquelle est égale et directement opposée à la résultante R des autres forces F, F′, F″, F‴ : car cette résultante serait représentée par mD. Les deux forces F^{IV}, R se font donc équilibre, ou, ce qui est équivalent, il y a équilibre entre toutes les forces F, F′, F″, F‴, F^{IV}.



54. Il résulte, de cette dernière démonstration, que l'on peut énoncer en ces termes la proposition précédente :

Pour que plusieurs forces, appliquées à un point matériel, se fassent équilibre, il faut et il suffit que l'une quelconque d'entre elles soit égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres.*

55. Enfin, on peut dire encore que :

*Des forces, appliquées à un point matériel, se font équilibre si leur résultante est nulle**.*

En effet, quand le dernier sommet du *polygone des forces* s'approche indéfiniment du point d'application, la résultante diminue jusqu'à zéro.

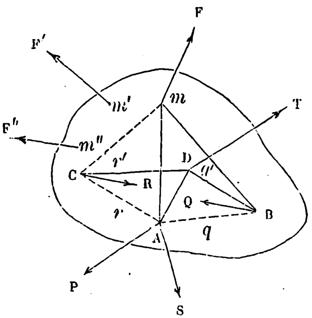
* Cette proposition, qui est également vraie pour des forces dirigées d'une manière quelconque, est souvent regardée comme un axiome.

** C'est-à-dire si la droite qui devrait la représenter se réduit au point d'application.

Composition et équilibre de forces quelconques.

56. Théorème. *Tant de forces que l'on voudra*, F, F′, F″,..., *appliquées à un corps solide* M, *peuvent toujours être remplacées par deux forces* S, T, *dont l'une passe en un point* A, *pris arbitrairement dans le corps.*

Indépendamment du point A, prenons deux points B, C dans l'intérieur du corps, et joignons A, B, C aux points d'application de toutes les forces données. Soit, pour fixer les idées, m le point d'application de la force F. Nous pouvons décomposer F en trois forces dirigées suivant mA, mB, mC (43). Si nous opérons de même pour F′, F″,... nous obtiendrons trois groupes de forces concourantes ; et, sans rien changer à l'état du corps, nous pourrons remplacer ces trois groupes par trois *résultantes partielles* P, Q, R, respectivement appliquées en A, B, C*. Ainsi déjà, *toutes les forces données peuvent être réduites à trois forces passant par trois points pris arbitrairement dans le corps.*



Pour opérer une nouvelle réduction, considérons l'intersection AD des plans ABQ, ACR ; ou, si ces plans se confondent, menons la droite AD de manière qu'elle rencontre les directions des forces Q, R. Dans les deux cas, tirons les droites DB, DC. La force Q, située dans le plan ABD, peut être décomposée en deux forces q, q', dirigées, l'une suivant BA, l'autre suivant BD. De même, la force R peut être remplacée par une force r dirigée suivant CA et par une force r' dirigée suivant CD.

Les forces *concourantes* P, q, r ont, en général, une résultante unique S passant en A ; de même, les forces concourantes q', r' ont une résultante unique T passant en D. Ces deux forces S, T, dont la première est appliquée au point A pris

* S'il arrivait que les forces du premier groupe se fissent équilibre, on aurait à considérer seulement les forces qui concourent soit en B, soit en C ; et ainsi de suite.

arbitrairement dans le corps solide, peuvent donc tenir lieu des forces F, F', F'',... C'est ce qu'il fallait démontrer.

57. Corollaire. — *Pour que les forces* F, F', F'',... *se fassent équilibre, il faut et il suffit que les forces* S, T *soient égales et directement opposées* *.

Résumé.

Deux forces égales et directement opposées, appliquées à un point matériel, se font équilibre; et réciproquement.

Un point matériel en repos, sollicité par deux forces P, Q non directement opposées, commence à se mouvoir dans l'angle formé par les directions des forces.

La force R, qui produirait le même effet que les forces P, Q, est la résultante de celles-ci.

En général, on appelle résultante de plusieurs forces F, F', F'',.... une force unique produisant le même effet que F, F', F'',....

Des forces données n'ont pas toujours une résultante.

La résultante de deux forces égales, P, Q, non directement opposées, appliquées à un point matériel, est dirigée suivant la bissectrice de l'angle formé par les directions de P, Q.

Deux forces égales et directement opposées, appliquées aux extrémités d'une droite rigide, se font équilibre.

On peut transporter le point d'application d'une force en un point quelconque de la direction de la force, pourvu que le second point soit invariablement lié au premier.

Deux forces, dirigées suivant une même droite et agissant dans le même sens, ont une résultante égale à leur somme, dirigée suivant la même droite, et qui agit dans le sens des deux composantes.

Deux forces, dirigées suivant une même droite et agissant en sens contraires, ont une résultante égale à leur différence, dirigée suivant la même droite, et qui agit dans le sens de la plus grande composante.

Tant de forces que l'on voudra, dirigées suivant une même droite, ont une résultante égale à leur somme algébrique, dirigée suivant la même droite, et agissant dans le sens des composantes dont la somme arithmétique est la plus grande.

Si cette somme algébrique est nulle, il y a équilibre.

La résultante de deux forces appliquées à un point matériel est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent, en grandeur et en direction, les deux composantes.

* Il n'y a pas d'autre manière de répondre à cette question du Programme : *Condition générale de l'équilibre.* — Pour les *équations de l'équilibre*, le lecteur peut consulter l'ouvrage intitulé : *Manuel des candidats à l'École polytechnique* (tome II, page 248).

Soient P, Q, R les composantes et la résultante :

1° Chacune des trois forces est proportionnelle au sinus de l'angle formé par les directions des deux autres;

2° Les distances d'un point de la résultante aux directions des composantes sont en raison inverse des intensités de celles-ci.

La recherche de la résultante de deux forces équivaut à la résolution d'un triangle.

La résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point est représentée, en grandeur et en direction, par le dernier côté d'un polygone fermé ayant ses autres côtés égaux et parallèles aux droites qui représentent les composantes, en grandeur et en direction.

Étant donnée une force R, on peut, d'une infinité de manières, la décomposer en d'autres forces dont les directions passent par le point d'application de R.

La résultante de trois forces appliquées à un même point, et non situées dans un même plan, est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélipipède construit sur les droites qui représentent les composantes, en grandeur et en direction.

Si les composantes sont rectangulaires deux à deux, la somme de leurs carrés est égale au carré de la résultante.

Le moment d'une force, par rapport à un point, est le produit de l'intensité de la force par la distance comprise entre la direction de la force et le point.

Le moment de la résultante de deux forces concourantes, par rapport à un point situé dans leur plan, est égal à la somme algébrique des moments des composantes.

Pour que plusieurs forces, appliquées à un point matériel, se fassent équilibre, il faut et il suffit que l'une quelconque d'entre elles soit égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres.

Tant de forces que l'on voudra, F, F′, F″,.... appliquées à un corps solide, peuvent toujours être remplacées par deux forces S, T, dont l'une passe en un point A, pris arbitraîrement dans le corps.

Pour que les forces F, F′, F″,.... se fassent équilibre, il faut et il suffit que les forces S, T soient égales et directement opposées.

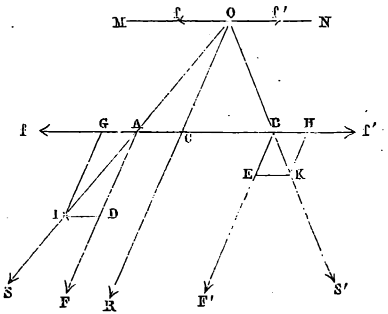
CHAPITRE III.

Composition de deux forces parallèles (58, 59). — Couple (60). — Composition d'un nombre quelconque de forces parallèles (61, 62). — Centre des forces parallèles (63). — Centre de gravité; sa recherche dans quelques cas simples : triangle et pyramide (71-80).

Composition des forces parallèles.

58. THÉORÈME I. *Deux forces parallèles et de même sens, appliquées en deux points d'un corps solide, ont une résultante parallèle à leur direction commune, agissant dans le même sens, et égale à leur somme. De plus, la direction de cette résultante partage la droite qui joint les points d'application des composantes, en deux segments additifs, inversement proportionnels à ces composantes.*

Sans changer l'état du corps, nous pouvons appliquer, aux points A, B, deux forces f, f', égales et directement opposées (27). Soient AG, BH les droites égales qui représentent ces forces auxiliaires, et AD, BE celles qui représentent les forces données.



Les forces F, f, appliquées en A, ont une résultante S représentée par AI. De même, les forces F', f' se composent en une force S', représentée par BK. Soit O le point de concours des directions IA, KB* : les forces S, S' peuvent être supposées appliquées en ce point** (28). Cela étant, menons MON pa-

* Ce point existe, parce que la somme des angles IAB, ABK est comprise entre 2^d et 4^d.

** En rendant suffisamment petites les forces f, f', on peut rapprocher le point O, autant qu'on le voudra, de la droite AB. Par conséquent, il est permis de supposer que ce point appartient au corps solide; ce qui est nécessaire pour justifier l'emploi du lemme.

rallèle à AB, OC parallèle à AD ; puis décomposons, suivant ces deux directions, chacune des *résultantes partielles* S, S′. Nous trouverons, comme tout à l'heure, les forces f, f', égales et directement opposées, et les forces F, F′, dirigées cette fois suivant OC. Par conséquent, la première partie du théorème est démontrée.

Pour vérifier la seconde, il suffit d'observer que les triangles IAD, AOC, KBE, BOC sont semblables deux à deux. Donc

$$\frac{AD}{OC}=\frac{ID}{AC}, \quad \frac{BE}{OC}=\frac{KE}{BC};$$

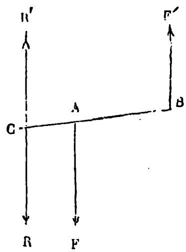
puis, à cause de ID = KE :

$$\frac{AD}{BE}=\frac{BC}{AC};$$

c'est-à-dire

$$\frac{F}{F'}=\frac{BC}{AC}.$$

59. **Théorème II.** *Deux forces* F, F′ *parallèles, inégales et de sens contraires, appliquées en deux points* A, B *d'un corps solide, ont une résultante* R *parallèle à chacune d'elles, agissant dans le sens de la plus grande, et égale à leur différence. De plus, la direction de cette résultante partage la droite* AB, *qui joint les points d'application des composantes, en deux segments soustractifs* AC, BC, *inversement proportionnels à ces composantes.*



Prenons, sur le prolongement de AB, et du côté de la plus grande des deux forces, le point C déterminé par la proportion

$$\frac{AC}{BC}=\frac{F'}{F}, \qquad (1)$$

ou, ce qui est équivalent, par la proportion

$$\frac{AC}{AB}=\frac{F'}{F-F'}. \qquad (2)$$

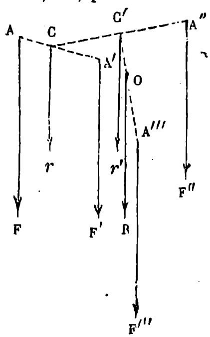
Appliquons ensuite, en C, deux forces R, R′, directement opposées, parallèles aux deux forces F, F′, et égales à F — F′ :

l'état du corps ne sera pas changé (21). Mais, d'après le théorème précédent, les deux forces F′, R′ ont une résultante égale et directement opposée à F : les trois forces F′, R′, F se font donc équilibre. Si nous les supprimons, il ne restera plus, au lieu des forces données, que la force unique R : celle-ci est donc la résultante de F et de F′.

60. *Remarque.* — Si les forces F, F′ devenaient égales, elles n'auraient pas de résultante, puisque la relation (2) donnerait pour AC une valeur infinie. De plus, ces deux forces ne pourraient se faire équilibre (52, 2°). On a donné à un pareil système de *deux forces égales, parallèles, de sens contraires, non directement opposées,* la dénomination de *couple.*

61. Théorème III. *Tant de forces parallèles que l'on voudra, appliquées en différents points d'un corps solide, et agissant dans le même sens, ont une résultante parallèle à chacune d'elles, agissant dans le sens des composantes, et égale à leur somme.*

Soient, pour fixer les idées, quatre forces F, F′, F″, F‴, appliquées en A, A′, A″, A‴. Les forces F, F′, parallèles et de même sens, ont une résultante r dont on obtiendra un point C en partageant la droite AA′ de manière que



$$\frac{AC}{A'C}=\frac{F'}{F}.$$

De même, la résultante r' des forces r, F″, ou des forces F, F′, F″ partage la droite CA″ en un point C′ déterminé par la proportion

$$\frac{CC'}{A''C'}=\frac{F''}{r'}.$$

Enfin, la résultante R des forces r', F‴, c'est-à-dire la résultante des quatre forces proposées, passe en un point O qui divise C′A‴ en parties inversement proportionnelles à r' et F‴.

D'ailleurs,

$$r=F+F', \quad r'=r+F'', \quad R=r'+F''';$$

donc

$$R=F+F'+F''+F'''.$$

62. *Remarques.* — I. Les points C, C', C'',... sont déterminés par les points d'application des forces F, F', F'',... et par les rapports de ces forces. Conséquemment, *si l'on fait tourner les forces* F, F', F'',... *autour de leurs points d'application, supposés fixes, de manière que ces forces conservent leur parallélisme et leurs rapports; les résultantes de tous ces systèmes de forces passeront constamment par un point fixe* O.

II. Ce point fixe est appelé *centre des forces parallèles.*

III. Si toutes les forces F, F', F'',... sont égales entre elles, leur centre ne diffère pas du *centre des moyennes distances* des points A, A', A'',...*.

IV. En même temps, les proportions ci-dessus deviennent

$$\frac{AC}{A'C}=1, \quad \frac{CC'}{A''C'}=\frac{1}{2}, \quad \frac{C'O}{A'''O}=\frac{1}{3}.$$

Ainsi le point C est le *milieu* de AA'; le point C' est situé au *tiers* de CA'', à partir de C; le point O est situé au *quart* de C'A''', à partir de C', etc.

63. Au moyen des théorèmes précédents, on pourra toujours effectuer la composition d'un nombre quelconque de forces parallèles, agissant, les unes dans un sens, les autres dans le sens opposé. En effet, on peut d'abord chercher la résultante R_1 des forces appartenant au premier groupe (61), et la résultante R_2 de celles qui appartiennent à l'autre groupe. Cela posé, trois cas principaux peuvent se présenter :

1° Si les résultantes partielles R_1, R_2 sont *inégales,* elles se composent en une seule force R : *les forces proposées peuvent avoir une résultante unique.*

2° Si les résultantes R_1, R_2 sont *égales et directement opposées,* elles se détruisent : *les forces proposées peuvent se faire équilibre.*

3° Enfin, si les résultantes R_1, R_2 sont *égales et non directement opposées,* elles constituent un couple : *les forces proposées, peuvent se réduire à un couple.*

* Voyez l'ouvrage intitulé *Théorèmes et Problèmes de Géométrie,* quatrième édition.

64. *Remarque.* — Dans le cas où des forces parallèles ont une résultante unique R, celle-ci est égale à l'excès de la somme des forces qui agissent dans un sens, sur la somme des forces qui agissent dans le sens opposé. En effet, F, F', F'', ... étant les premières forces, et F_1, F'_1, F''_1, ... étant les dernières, on a

$$R_1 = F + F' + F'' + \ldots,$$
$$R_2 = F_1 + F'_1 + F_1'' + \ldots,$$
$$R = R_1 - R_2;$$

donc

$$R = F + F' + F'' + \ldots - (F_1 + F_1' + \ldots).$$

On peut dire encore que *la résultante est égale à la somme algébrique des composantes* (31).

De la pesanteur.

65. La *pesanteur* est la cause en vertu de laquelle les corps tendent à tomber à la surface de la Terre *. On lui donne aussi le nom de *gravité*. Elle est un cas particulier de la *gravitation universelle* **, découverte par Newton.

66. Le *poids* d'un corps sollicité par la *pesanteur* est la *pression* exercée par ce corps sur l'obstacle qui l'empêche de tomber. Cette pression est égale et directement opposée à la *résistance* de l'obstacle. Pour soutenir, *à bras tendu*, un poids de 5 kilogrammes, on est obligé de développer un effort musculaire : cet effort équivaut à 5 kilogrammes.

67. *Remarque.* — Les expressions *pesanteur* et *poids* ne doivent pas être confondues : la pesanteur est la cause générale, la force qui fait tomber tous les corps ; le poids est la portion de cette force appliquée à un corps déterminé ***.

* « Tous les corps, tant solides que fluides, tombent en bas dès qu'ils ne sont plus soutenus. Quand je tiens une pierre dans la main et que je la lâche, elle tombe à terre et tomberait encore plus loin s'il y avait un trou dans la terre. Dans le temps même que j'écris ceci, mon papier tomberait à terre s'il n'était soutenu par ma table. La même chose arrive à tous les corps que nous connaissons ; il n'en est aucun qui ne tombe à terre dès qu'il n'est plus soutenu ou arrêté. La cause de ce phénomène ou de ce penchant qui se trouve dans tous les corps est nommée leur *gravité* ou leur *pesanteur.* » (Euler, *Lettres à une princesse d'Allemagne.*)

** Voyez la *Cosmographie.*

*** Pour éviter toute ambiguïté, on devrait peut-être employer exclusivement le mot de *pesanteur* pour désigner, non la *cause* en vertu de laquelle les corps tombent, mais bien la *propriété* qu'ils ont de tendre

68. *Verticale.* — Quand un corps pesant est suspendu, à l'état de repos, à l'extrémité d'un fil très-délié, il y a équilibre entre le poids du corps et la résistance que le fil oppose à la rupture (21) : la direction du poids, ou la *verticale* du lieu, est donc celle du fil. C'est ce qu'on exprime en disant : *la verticale d'un lieu est indiquée par le fil à plomb.*

69. On démontre, dans la Mécanique rationnelle, que *la verticale d'un lieu est normale à la surface des eaux tranquilles.* D'ailleurs, la figure de la Terre est celle d'un ellipsoïde aplati, très-peu différent d'une sphère. Conséquemment, la *verticale d'un lieu quelconque passe, à fort peu près, par le centre de la Terre.*

70. *Chute des corps pesants.* — Dans le vide, les corps *légers* tombent aussi rapidement que les corps *lourds.* Dans l'air, il n'en est plus de même : une pièce de monnaie tombe beaucoup plus vite qu'une rondelle de papier ayant le diamètre de la pièce. La raison de cette différence de vitesse est facile à saisir : la résistance de l'air, s'exerçant de la même manière sur les deux corps, est relativement plus grande sur celui qui pèse le moins : elle doit donc ralentir le mouvement de celui-ci bien plus que le mouvement de l'autre.

Centres de gravité.

71. Nous avons vu (62, II) que, pour tout système de forces parallèles, il existe un *centre* par lequel passe constamment la direction de la résultante, lorsque les composantes tournent autour de leurs points d'application. Par conséquent, si l'on considère un corps quelconque comme un assemblage de molécules, et si l'on fait attention que les poids de ces molécules sont des forces sensiblement parallèles, on conclura qu'il existe un point unique par lequel passe constamment la direction du poids, quand on tourne le corps dans diverses positions à l'égard de la verticale. Ce point est le *centre de*

à tomber. Euler, dont l'opinion doit avoir tant d'autorité, dit expressément, dans l'ouvrage cité : « *Quand on dit que tous les corps sont graves, on entend qu'ils ont un penchant à tomber, et qu'ils tomberont tous en effet dès qu'on ôtera ce qui les a soutenus jusqu'ici.* » Il est bien vrai qu'immédiatement avant cette phrase, le grand géomètre appelle *gravité ou pesanteur la cause de ce penchant qui se trouve dans tous les corps;* mais c'est peut-être là, ou une très-légère inadvertance, ou un sacrifice à l'opinion commune.

gravité du corps. *Ce centre n'est pas nécessairement dans l'intérieur du corps**.

72. *Remarque.* — Quand le centre de gravité est situé à l'intérieur du corps, on peut supposer le poids de celui-ci appliqué en ce centre; de sorte que, dans ce cas, *le centre de gravité est le point d'application du poids du corps.*

Détermination des centres de gravité.

73. *Méthode pratique.* — Pour obtenir, expérimentalement, la position du centre de gravité G d'un corps solide M, il suffit de suspendre le corps, au moyen d'un fil, successivement dans deux situations différentes A, B. Si l'on prolonge, par la pensée, les directions *ab*, *a'b'* du fil, elles se rencontreront au centre de gravité cherché.

En effet, dans chacune des positions d'équilibre du corps, la direction du fil passe par le centre de gravité (68).

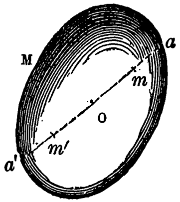
74. Dans le cas d'un corps *homogène,* c'est-à-dire *composé de molécules toutes égales entre elles, et régulièrement distribuées,* la détermination du centre de gravité n'est plus qu'un problème de géométrie, dont la solution générale ne peut être indiquée dans un ouvrage élémentaire. On la simplifie cependant quelquefois, en s'appuyant sur les principes suivants.

75. Théorème I. *Si un corps homogène* M *a un centre de figure* O, *ce point est le centre de gravité du corps.*

On appelle *centre de figure* un point O qui divise en deux parties égales toutes les cordes, telles que *aa'*, terminées à la surface du corps.

* Par exemple, le centre de gravité d'une mince capsule ou hémisphère de platine est situé, à très-peu près, au milieu du rayon perpendiculaire à la base.

Cela posé, à chaque molécule ou point matériel m correspond, sur la corde aOa' passant en ce point, une autre molécule m' symétrique de la première relativement au centre O. Si donc, comme nous l'avons supposé, les deux molécules ont des poids égaux, le centre de gravité du système est le point O. Les poids de toutes les molécules du corps, prises deux à deux, sont donc appliquées en ce même point, lequel, conséquemment, est le centre de gravité du corps.



76. **Théorème II.** *Si les centres de gravité de plusieurs corps sont dans un plan, le centre de gravité du système est dans ce plan.*

En effet, d'après le théorème sur la composition d'un système de forces parallèles (61), si les points d'application de ces forces sont dans un même plan, le point d'application de la résultante est aussi dans ce plan.

77. Corollaire.— *Si les centres de gravité de plusieurs corps sont sur une droite, le centre de gravité du système est sur cette droite.*

78. **Théorème III.** *Si un corps homogène renferme un plan diamétral, le centre de gravité du corps est dans ce plan.*

Soit en effet XY un *plan diamétral* du corps, c'est-à-dire *un plan qui divise en deux parties égales toutes les cordes* ab, a'b', a''b'', *terminées à la surface et parallèles à une même direction.* A chaque molécule ou point matériel m correspond, sur la corde ab passant en ce point, une autre molécule m', symétrique de la première par rapport au milieu c de ab. Le centre de gravité du système (m, m') est en c (75). Par suite, le centre de gravité de la *file ab* de molécules sera également en c, c'est-à-dire dans le plan XY ; ce plan contient donc le centre de gravité du corps (76).

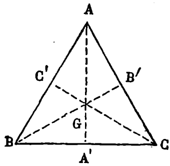
79. Corollaire. — *Si un corps homogène renferme un plan de symétrie, le centre de gravité est dans ce plan.*

80. Les conséquences des théorèmes précédents sont fort nombreuses; nous en citerons quelques-unes, laissant au lecteur le soin de développer les démonstrations.

1° *Sphère. Parallélipipède. Cylindre droit* ou *oblique.* Dans chacun de ces corps, le centre de gravité coïncide avec le centre de figure (75).

2° *Cercle. Parallélogramme. Polygone régulier. Ligne droite**. Le centre de chacune de ces figures est également le centre de gravité de la figure.

3° *Triangle.* Le centre de gravité d'un triangle ABC est situé à l'intersection de deux quelconques des droites AA′, BB′, CC′, menées d'un sommet au milieu du côté opposé (78).



4° *Prisme triangulaire.* Le centre de gravité d'un prisme triangulaire est situé au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux bases (78, 79).

5° *Tétraèdre.* Le centre de gravité d'un tétraèdre est situé à la rencontre des droites qui joignent les milieux de deux arêtes opposées (79).

Résumé.

Deux forces parallèles et de même sens, appliquées en deux points d'un corps solide, ont une résultante parallèle à leur direction commune, agissant dans le même sens, et égale à leur somme. De plus, la direction de cette résultante partage la droite qui joint les points d'application des composantes, en deux segments additifs, inversement proportionnels à ces composantes.

Deux forces parallèles, inégales et de sens contraires, appliquées en deux points d'un corps solide, ont une résultante parallèle à chacune d'elles, agissant dans le sens de la plus grande, et égale à leur différence. De plus, la direction de cette résultante partage la droite qui joint les points d'application des composantes, en deux segments soustractifs, inversement proportionnels à ces composantes.

On appelle couple le système de deux forces égales, parallèles, de sens contraires, non directement opposées.

Tant de forces parallèles que l'on voudra, appliquées en différents points d'un corps solide, et agissant dans le même sens, ont une résultante parallèle à chacune d'elles, agissant dans le sens des composantes, et égale à leur somme.

* Ce qu'on appelle un *cercle pesant* est un cylindre excessivement mince : de même, un *parallélogramme pesant* est un parallélipipède ont la hauteur est sensiblement nulle, etc.

Si l'on fait tourner les forces autour de leurs points d'application, supposés fixes, de manière que ces forces conservent leur parallélisme et leurs rapports, les résultantes de tous ces systèmes de forces passent constamment par un point fixe, appelé centre des forces parallèles.

La composition de forces parallèles agissant, les unes dans un sens, les autres dans le sens opposé, présente trois cas :

1° Les forces données peuvent avoir une résultante unique; 2° elles peuvent se faire équilibre; 3° elles peuvent se réduire à un couple.

La pesanteur est la cause en vertu de laquelle les corps tendent à tomber; elle est un cas particulier de la gravitation universelle.

Le poids d'un corps est la pression qu'il exerce sur l'obstacle qui l'empêche de tomber.

La verticale d'un lieu est indiquée par le fil à plomb : elle passe, à fort peu près, par le centre de la Terre.

Dans le vide, les corps légers tombent aussi rapidement que les corps lourds.

Le centre de gravité d'un corps est le point par lequel passe constamment la direction du poids du corps. Ordinairement, le centre de gravité est le point d'application de cette force.

Pour déterminer, expérimentalement, la position du centre de gravité d'un corps, on suspend celui-ci dans deux situations différentes.

Si un corps homogène a un centre de figure, ce point est le centre de gravité du corps.

Si les centres de gravité de plusieurs corps sont dans un plan, le centre de gravité du système est dans ce plan.

Si les centres de gravité de plusieurs corps sont sur une droite, le centre de gravité du système est sur cette droite.

Si un corps homogène renferme un plan diamétral, le centre de gravité du corps est dans ce plan.

Si un corps homogène renferme un plan de symétrie, le centre de gravité est dans ce plan.

Le centre de gravité d'un triangle est situé à l'intersection de deux quelconques des droites menées d'un sommet au milieu du côté opposé.

Le centre de gravité d'un prisme triangulaire est situé au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux bases.

Le centre de gravité d'un tétraèdre est situé à la rencontre des droites qui joignent les milieux de deux arêtes opposées.

CHAPITRE IV.

Des machines simples.

Des machines.

81. On donne généralement le nom de *machine à tout système dans lequel les mouvements des diverses parties sont gênés par des obstacles :* une *locomotive* est une *machine,* parce que les *pistons,* les *balanciers,* les *bielles* qu'elle renferme, au lieu d'être *entièrement libres,* ne peuvent se mouvoir que d'une certaine manière.

82. Quand le système se réduit à *un seul corps solide,* gêné par *un seul obstacle,* il prend le nom de *machine simple.* Les *organes* ou les *éléments* d'une *machine composée* quelconque sont toujours des machines simples.

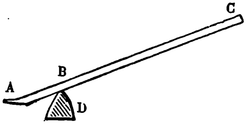
83. On ne compte que trois machines simples : le *levier,* le *tour* et le *plan incliné.* Dans la première, l'obstacle est un *point fixe,* autour duquel le corps solide peut tourner dans tous les sens. Dans la deuxième, l'obstacle est un *axe fixe,* autour duquel le corps peut également prendre un *mouvement de rotation.* Enfin, dans la troisième machine simple, l'obstacle est un *plan fixe,* sur lequel le corps peut *glisser* *.

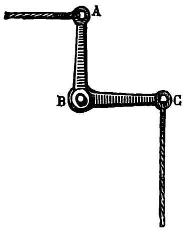
* Il y a cette différence entre les trois machines simples, que, dans les deux premières, le point fixe et l'axe fixe font habituellement partie du corps, tandis que, dans la troisième, le plan fixe est extérieur au corps. On conçoit, en effet, que si un corps solide renfermait un *plan fixe,* ou seulement *trois points fixes,* non en ligne droite, il ne pourrait prendre aucun mouvement.

Du levier.

84. Considéré dans toute sa généralité, *le levier est un corps solide, mobile autour d'un point fixe.* Dans la pratique, on donne spécialement le nom de levier à *une barre rigide, droite ou courbe, reposant sur un point fixe, ou tournant autour d'un axe fixe.* Ordinairement, les forces *données*, appliquées au levier, se réduisent à deux : l'une est la *puissance;* l'autre, à laquelle il s'agit de faire équilibre, prend le nom de *résistance.* En outre, le levier est sollicité par son poids : si cette force n'est pas négligeable, on fait en sorte que son point d'application, c'est-à-dire le centre de gravité du levier, coïncide avec le point fixe.

85. Quand le point fixe est situé entre les points d'application des deux forces, le levier est dit du *premier genre.* Il est du *deuxième genre* si le point d'application de la résistance tombe entre le point fixe et le point d'application de la puissance. Enfin, dans le levier du *troisième genre,* le point d'ap-

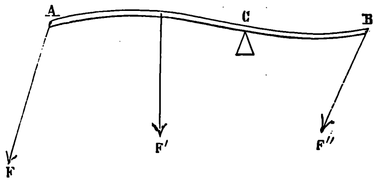




plication de la puissance est situé entre l'autre point d'application et le point fixe. La balance ordinaire et la balance romaine sont des leviers du premier genre ; les leviers des tailleurs de pierre appartiennent au deuxième genre ; les pédales peuvent être considérées comme des leviers du troisième genre.

86. *Condition générale d'équilibre.* — Soit un levier ABC, sollicité par un nombre quelconque de forces F, F′, F″,..... Toutes ces forces peuvent être remplacées par deux forces S, T, dont l'une (S par exemple) passe par le point fixe C (56). Cette *résultante partielle* S est détruite par la *résistance* du

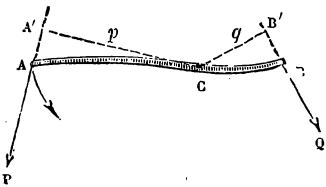
point fixe C, résistance que l'on suppose *indéfinie*. Quant à la seconde résultante partielle T, si elle ne passe pas en C, elle fera tourner le levier autour de ce point. *Il faut* donc, *pour l'équilibre, que les forces* S, T *concourent au point fixe*. Mais alors *elles se réduisent à une force unique* R, *résultante de* F, F′, F″,..... On a donc ce théorème :



Il faut et il suffit, pour l'équilibre du levier, que les forces F, F′, F″,..... *appliquées à ce corps* *, *aient une résultante unique* R, *dont la direction passe par le point fixe.*

87. *Remarque.* — Cette résultante R représente la *pression* exercée sur le point fixe.

88. *Relation entre la puissance et la résistance.*—Supposons, comme ci-dessus (84), que les forces F, F′, F″,..... se réduisent à la *puissance* P, appliquée en A, et à la *résistance* Q, appliquée en B. Pour que ces deux forces aient une résultante R, appliquée en C, il faut qu'elles soient dans un même plan, passant en ce point. Ainsi :



1° *La puissance et la résistance doivent être situées dans un même plan passant par le point fixe.*

Ce n'est pas tout : d'après le théorème de Varignon (50), les moments des forces P, Q, par rapport au point C, doivent être égaux et de signes contraires. Si l'on appelle *bras de levier* de P et de Q les distances $CA' = p$, $CB' = q$, on peut donc énoncer ainsi les deux dernières conditions de l'équilibre :

2° *La puissance et la résistance doivent tendre à faire tourner le levier en sens contraires ;*

3° *La puissance et la résistance doivent être en raison inverse de leurs bras de levier.*

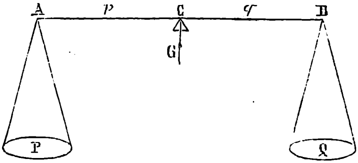
* Parmi ces forces, on doit compter le poids du levier (84).

89. *Remarque.* — Dans le levier du deuxième genre, supposé rectiligne pour plus de simplicité, le bras de levier de la puissance est plus grand que l'autre bras de levier. Donc, à cause de $\frac{P}{Q}=\frac{q}{p}$, *la puissance est moindre que la résistance.* Le contraire a lieu dans le levier du troisième genre.

Des balances.

90. Les *balances* sont des leviers destinés à mesurer les poids des corps. On en compte trois espèces principales : la *balance ordinaire*, la *romaine* et la *balance-bascule*.

91. *Balance ordinaire.* — C'est un levier du premier genre, aux extrémités duquel sont appliqués deux poids P, Q. D'après les usages auxquels la balance est destinée, ces poids doivent être égaux quand l'équilibre est établi, c'est-à-dire *quand le fléau* AB *reste horizontal*. En représentant par R le poids de la balance, par r la distance de son centre de gravité G à la verticale passant par le point d'appui C, et par p, q les bras de levier des poids P, Q, nous aurons (86, 48) :



$$P\,(p-q)+Rr=0\ ^{*}.$$

Cette équation, qui doit subsister pour toutes les valeurs de P **, se décompose en

$$p=q \quad , \quad r=0\ ^{***}.$$

* Afin de nous conformer au Programme, nous avons démontré le théorème de Varignon, seulement pour le cas de deux forces concourantes; mais il est beaucoup plus général. (Voyez le *Manuel des candidats à l'école polytechnique*, tome II, p. 228.) Dans la question actuelle, *nous admettons* que ce théorème subsiste dans le cas de trois forces parallèles P, Q, R, situées dans un même plan.

** Du moins entre certaines limites.

*** En effet, si le poids P est remplacé par un nouveau poids P′, on a encore

$$P'\,(p-q)+Rr=0;$$

et, par conséquent,

$$(P-P')\,(p-q)=0.$$

Le facteur $P-P'$ est différent de zéro; donc $p-q=0$; etc.

Donc, *pour la justesse de la balance, il faut que : 1° les deux bras du fléau soient égaux; 2° le centre de gravité de la balance soit dans la verticale passant par le point d'appui.*

92. *Remarque.* — Quand la balance est *fausse,* on peut déterminer le poids P d'un corps, soit par la *méthode des doubles pesées,* due à *Borda* *, soit en prenant la *moyenne proportionnelle* entre les poids *a, b* nécessaires pour faire équilibre au corps, successivement placé dans les deux plateaux. En effet, de

$$Pp = aq \quad , \quad Pq = bp,$$

on conclut

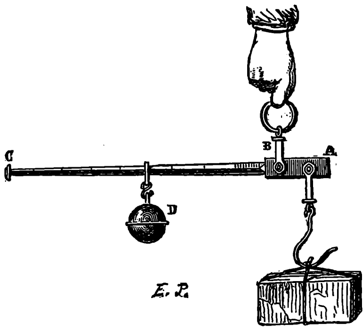
$$P^2 = ab,$$

ou

$$P = \sqrt{ab}.$$

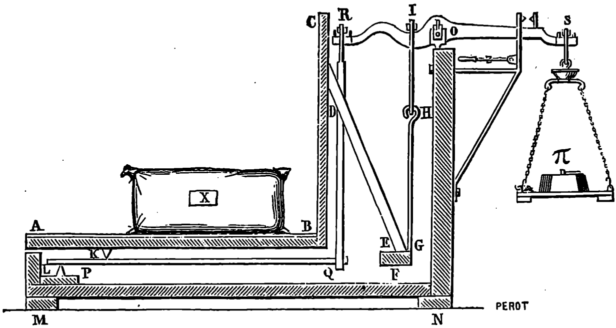
93. *Romaine.* — Cette balance est un levier du premier genre, à bras inégaux. On suspend à l'extrémité du petit bras BA le corps dont on veut déterminer le poids P, après quoi l'on fait équilibre à P au moyen d'un poids *constant* D, mobile le long du grand bras de levier BC. Si l'appareil a été gradué à l'avance, la division où s'arrête D indique la valeur de P.

Pour graduer la romaine, on suspend au crochet A des poids de 1 kilog., 2 kilog., 3 kilog., etc., et l'on marque les positions correspondantes du *curseur* D, nécessaires pour l'équilibre.



94. *Balance-bascule.* — Cet appareil, appelé aussi *balance de Quintenz,* du nom de l'inventeur, est principalement employé dans les usines et dans les chemins de fer, où l'on a souvent besoin d'évaluer des poids considérables.

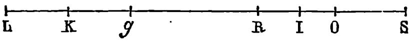
* Voir la *Physique.*



Un *tablier* AB, supportant le *colis* X, repose, par un *couteau* K, sur un levier du *troisième genre* PQR, tournant autour du point fixe L. Le tablier AB fait corps, au moyen d'une pièce BC, avec une *fourche* DE *, invariablement liée à une traverse horizontale F. Un levier du *premier genre,* ROS, mobile autour d'un point d'appui O, est muni, à l'une de ses extrémités, d'un plateau propre à recevoir des poids marqués, tandis que le second bras soutient l'autre levier PQR. Enfin, la traverse F est suspendue, par deux tringles GH, HI et un crochet H, au levier ROS.

Il résulte, de ces dispositions, que le tablier AB repose sur le couteau K et la traverse F, et que ces deux supports sont mobiles avec ROS **.

95. Soient, en projection horizontale, L, K, R, I, O, S les points d'appui ou de suspension, et soit g le pied de la verticale passant par le centre de gravité du poids inconnu X ***. Le poids X peut être décomposé en deux forces X′, X″ appliquées aux points K, I ****. Les valeurs de ces composantes sont, respectivement,



* La fourche, vue ici en projection verticale, est composée de deux tiges formant un angle constant, dont le sommet est en E.

** Dans cette description, nécessairement très-sommaire, nous omettons divers détails, inutiles dans la théorie de la machine.

*** En réalité, les choses ne se passent pas aussi simplement que nous le supposons ici : par exemple, le point g peut être situé en dehors de la droite RS; le *point* fixe L devrait être remplacé par un *axe* fixe; etc. L'explication complète de la balance-bascule exigerait diverses théories préliminaires, auxquelles n'ont probablement pas songé les rédacteurs du Programme.

**** On suppose les points G, I situés sur la même verticale.

$$X' = X \cdot \frac{gI}{KI}, \quad X'' = X \cdot \frac{gK}{KI}. \tag{1}$$

La composante X′ tend à faire *baisser* le levier PQR : pour en détruire l'effet, appliquons au point Q une force F, dirigée de Q vers R, et déterminée par la condition (88)

$$X' \cdot LK = F \cdot LR. \tag{2}$$

En même temps, pour ne rien changer à l'état de la machine, appliquons au point R une seconde force F, égale et directement opposée à la première. Le levier ROS est alors sollicité par les *puissances* X″, F. Soit π la *résistance* qui détruit ces deux forces, c'est-à-dire *le poids marqué qui fait équilibre au poids inconnu* X ; nous aurons encore

$$X'' \cdot OI + F \cdot OR = \pi \cdot OS. \tag{3}$$

Au moyen des égalités (1) et (2), celle-ci devient

$$\frac{X}{KI}\left[OI \cdot gK + gI \cdot \frac{LK}{LR} \cdot OR\right] = \pi \cdot OS. \tag{4}$$

Supposons la balance construite de manière que

$$\frac{LK}{LR} = \frac{OI}{OR}; \tag{5}$$

alors l'égalité (4) se réduit à

$$\frac{X}{KI}\left(gK + gI\right) OI = \pi \cdot OS.$$

Mais

$$gK + gI = KI;$$

on a donc, simplement,

$$X \cdot OI = \pi \cdot OS,$$

ou

$$\frac{X}{\pi} = \frac{OS}{OI}. \tag{6}$$

Ainsi, quand la condition (5) est vérifiée, le *poids inconnu est au poids marqué, dans un rapport constant.*

Ordinairement, la distance OI est $\frac{1}{10}$ du bras de levier OS ; donc

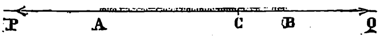
$$X = 10\pi\text{*}.$$

* En combinant le principe de la balance-bascule avec celui de la

Équilibre d'un cordon *.

96. Les *cordons* ou *cordes* qui entrent dans la composition de certaines machines sont regardés comme des *tiges flexibles, inextensibles et sans poids.* Un cordon AB, quelle qu'en soit la forme, doit donc être considéré comme une chaîne formée d'éléments *rectilignes* et *rigides*, Am, mm', $m'm''$, ..., mobiles autour de leurs extrémités communes.

97. *Équilibre d'un cordon rectiligne.* — De la définition précédente, jointe au théorème de la page 13, résulte immédiatement cette proposition :



Quand un cordon rectiligne AB *est sollicité, à ses extrémités, par deux forces* P, Q, *directement opposées, il faut et il suffit, pour l'équilibre, que ces forces soient égales.*

98. *Tension d'un cordon.* — L'action d'une force P, appliquée à l'extrémité A d'un cordon rectiligne AB, et agissant dans la direction du cordon, se transmet donc en chacun de ses points C comme si la droite était rigide ; et, si l'on vient à enlever la partie CA du cordon, on devra, pour maintenir en équilibre l'autre partie CB, appliquer en C, dans la direction CA, une force T égale à P. Cette force T est ce qu'on appelle la *tension* du cordon.

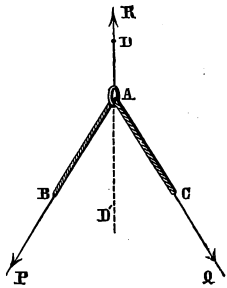
99. *Équilibre d'un cordon passant dans un anneau.* — Si le cordon BAC, auquel sont appliquées des forces P, Q, traverse un anneau mobile A sollicité par une force R, *il faut, pour l'équilibre :* 1° que le prolongement de la direction DA divise, en deux parties égales, l'angle BAC ; 2° *que les deux forces* P, Q *soient égales.*

Pour essayer de démontrer ce théorème, remarquons d'abord que l'équilibre ne sera pas troublé si l'on fixe deux

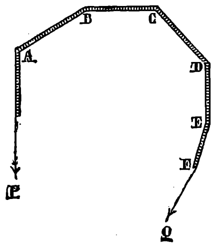
romaine (93), *M. Béranger* a construit une *bascule-romaine* dont l'usage commence à se répandre. Cet appareil n'exige pas, comme la balance-bascule, l'emploi de poids *marqués.*

* Les notions contenues dans ce paragraphe nous semblent nécessaires pour établir, d'une manière satisfaisante, les conditions d'équilibre de la poulie.

points B, C du cordon. L'anneau A, auquel est appliquée la force R, se mouvra donc sur une *surface de révolution** ayant pour section méridienne l'ellipse dont les foyers seraient les points B, C, et dans laquelle BA + AC serait la longueur du grand axe**. La normale à l'ellipse, et par suite à l'*ellipsoïde de révolution****, est la bissectrice AD' de l'angle BAC : la direction de R, prolongée, doit donc coïncider avec AD' ****; ce qui exige que les composantes P, Q soient égales.

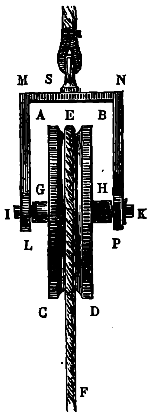


100. *Équilibre d'un cordon passant sur un polygone* ABC... — En considérant successivement chacun des sommets, on trouve encore que *les forces* P, Q, *appliquées aux extrémités du cordon, doivent être égales.*



Des poulies.

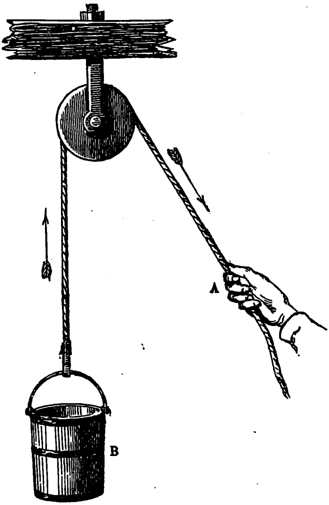
101. On appelle *poulie*, un cylindre circulaire ABCD, de hauteur AB très-petite, mobile autour d'un axe, et dont la surface latérale est creusée de manière à recevoir une *corde* EF qui sert à faire tourner la poulie. Le plus souvent, l'axe solide GH, qui traverse la poulie, pénètre, au moyen de deux *tourillons* GI, HK, dans une *chape* ou monture LMNP; quelquefois aussi, les tourillons reposent sur des *coussinets*. Enfin, l'axe GA peut *faire corps* avec la poulie, ou en être indépendant.



* Voyez la *Géométrie*.
** Voyez les *Mathématiques appliquées*.
*** Voyez le *Traité élémentaire de Géométrie descriptive*.
**** Nous admettons ce principe, presque évident : *Si une force, ap-*

Poulie fixe.

102. *Poulie fixe.*— La poulie est dite *fixe* lorsque la chape est établie à demeure ou seulement accrochée à un anneau scellé dans un mur. Dans ce cas, les espaces décrits par deux points quelconques de la corde, supposée toujours tendue, sont évidemment égaux entre eux. Par exemple, si la machine est destinée à tirer de l'eau d'un puits, le seau B s'élève, à chaque instant, d'une quantité égale au chemin parcouru par la main appliquée en A.



Poulie mobile.

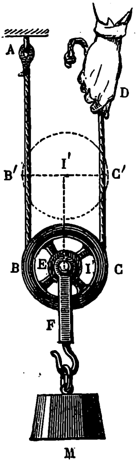
103. Dans la *poulie mobile*, l'un des deux *brins* AB de la corde est attaché en un point A : avec la main, on soulève l'autre brin CD. La chape EF, au lieu de supporter l'axe, est accrochée au fardeau M que l'on se propose d'amener à une certaine hauteur.

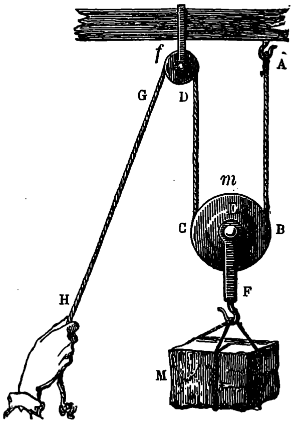
Si les deux brins sont parallèles, le chemin parcouru par l'extrémité libre de la corde est double du chemin parcouru par le fardeau. En effet, quand l'axe de la poulie s'élève d'une quantité $II' = h$, chacune des deux tangentes AB, CD diminue de la même quantité; donc, par compensation, la main appliquée en D doit s'élever de $2h$.

104. Comme il est incommode d'exercer un effort de *bas en haut*, on joint souvent, à la poulie mobile m, une poulie fixe f, ainsi que le montre la figure. Dans ce système, *le che-*

pliquée en un point d'une surface, est détruite par la résistance de la surface, elle est normale à la surface.

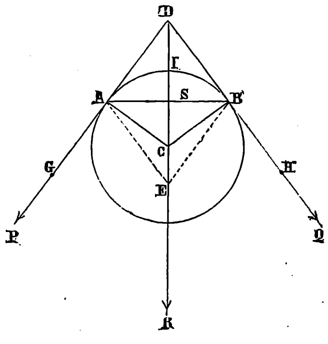
min parcouru par le fardeau est encore la moitié de celui que parcourt la main de l'homme.





105. *Équilibre de la poulie fixe.* — Soit la poulie CAB, sur laquelle s'enroule un cordon GAIBH, sollicité par les forces P, Q, dont les directions sont tangentielles à la circonférence.

1° L'équilibre ayant lieu, *il ne sera pas troublé si l'on rend la poulie immobile*;* mais alors P = Q (100). Ainsi, *quand l'équilibre a lieu, la puissance* P *est égale à la résistance* Q.



2° Si P diffère de Q, la poulie tournera dans un sens ou dans l'autre. En effet, s'il n'en est pas ainsi, *solidifions* la partie AIB de la corde, de manière qu'elle fasse corps avec la poulie. La machine ne diffère plus d'un levier dans lequel *les bras* CA, CB *sont égaux.* Mais, d'après l'hypothèse, on aurait

$$P \cdot CA \gtrless Q \cdot CB.$$

* Ce moyen de démonstration est souvent employé en statique.

Ainsi, la condition d'équilibre du levier (88) ne serait pas vérifiée. L'égalité P = Q est donc nécessaire et suffisante.

106. *Pression exercée sur l'axe.* — Les forces égales P, Q, que l'on peut supposer représentées par les tangentes *égales* AD, BD, ont une résultante R, dirigée suivant DC, et représentée par la diagonale du losange DAEB (37). Cette résultante est, abstraction faite du poids de la poulie, *la pression exercée sur l'axe.*

Pour évaluer R, menons les rayons AC, BC et la droite AB, *sous-tendante de l'arc embrassé par la corde :* les triangles isoscèles DAE, ACB sont semblables, comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires ; donc

$$\frac{DE}{DA}=\frac{AB}{AC},$$

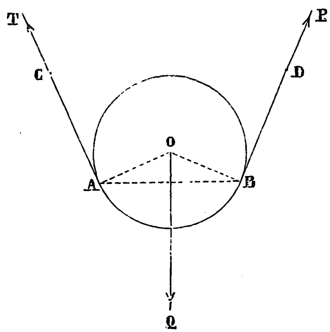
ou

$$\frac{R}{P}=\frac{s}{r}.$$

Ainsi, *la pression exercée sur l'axe est à l'une des forces égales appliquées à la poulie, comme la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde est au rayon de la poulie.*

107. *Équilibre de la poulie mobile.* — On peut faire abstraction du point fixe C, si l'on suppose le cordon CA sollicité par une force T, directement opposée à CA. Cela posé, dans l'état d'équilibre de la poulie :

1° *La tension* T *doit être égale à la puissance* P ; 2° la résistance Q est égale à la résultante des forces égales T, P.



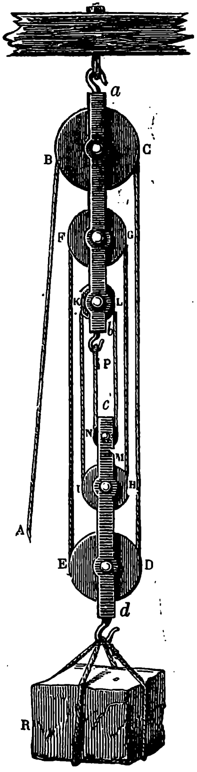
De cette seconde condition, on déduit (106) la relation suivante :

La puissance est à la résistance, comme le rayon de la poulie est à la soustendante de l'arc embrassé par la corde.

108. *Remarque.* — *Quand les deux cordons* AC, BD *sont parallèles, la puissance est la moitié de la résistance.*

Des moufles.

109. Une *moufle* est un système de poulies assemblées dans une même chape, et montées, soit sur des axes séparés, comme le montre la figure ci-jointe, soit sur un même axe. Ordinairement, on emploie à la fois une moufle *fixe ab* et une moufle *mobile cd*. Une corde, dont l'extrémité A est libre, embrasse successivement, par la moitié, les poulies BC, DE, FG,... MN, et vient s'attacher en P à la partie inférieure de la chape fixe *ab*. Le fardeau R, qu'il s'agit d'élever, est accroché à la chape mobile.



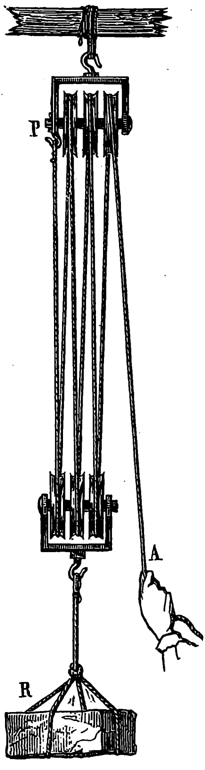
110. Si l'on appelle *cordon* chacune des parties de la corde servant à soutenir la moufle mobile, et si l'on suppose tous les cordons parallèles, on pourra dire que :

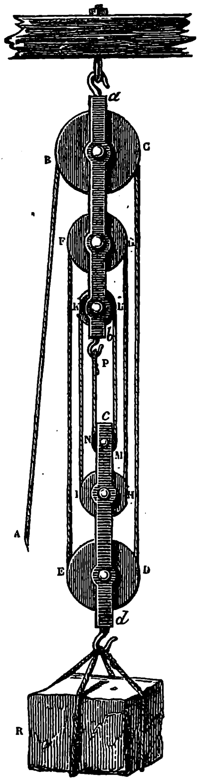
Le chemin parcouru par l'extrémité libre de la corde est égal au chemin parcouru par le fardeau, multiplié par le nombre des cordons.

En effet, quand le fardeau R s'élève d'une longueur h, chacun des cordons, ou plutôt chacune des *tangentes* CD, EF,... NP, diminue de h; donc, à cause de l'invariabilité de la grandeur totale de la corde, la main placée en A doit descendre de nh, n étant le nombre des cordons. Dans l'exemple représenté sur la figure, l'extrémité libre A devrait descendre de 6 décimètres, pour que le fardeau s'élevât de 1 décimètre.

111. Au lieu de placer, les unes au-dessous des autres, les poulies composant chaque moufle, on peut, ainsi que nous l'avons déjà dit, les monter sur un même axe. Dans ce cas, la corde, attachée en P à la chape fixe, passe au-dessous d'une première poulie mobile, puis au-dessus d'une première poulie fixe, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'elle se détache, en A, de la dernière poulie fixe. Le rapport entre le chemin par-

couru par le fardeau R et la main A est encore le même que dans la disposition précédente.





112. *Condition d'équilibre.* — Remarquons d'abord que la corde ABC...NP ne renfermant aucun *nœud* ni aucun *point fixe**, *l'effet de la puissance* F *doit se transmettre*, *sans altération* **, *dans toute l'étendue de la corde;* en sorte qu'un point quelconque de celle-ci est sollicité par deux forces égales à F, et directement opposées : chacune de ces forces

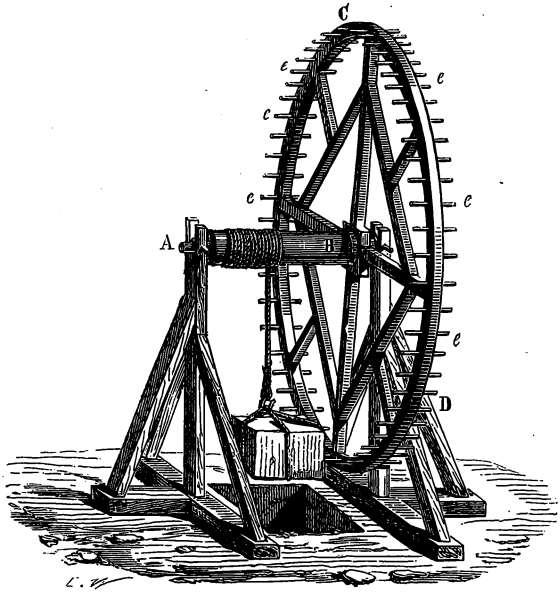
* A l'exception, bien entendu, du point P.
** On fait abstraction du frottement, de la roideur des cordes, etc.

est ce qu'on appelle la *tension de la corde* (98). D'un autre côté, si les cordons EF, DC, IK,... sont parallèles à l'axe *cd* de la chape mobile, on peut regarder chacune des poulies ED, IH, MN comme sollicitée par deux forces égales à F, et parallèles entre elles : la résultante de toutes ces forces est donc égale à nF, n étant le nombre des cordons*. Par conséquent, la condition de l'équilibre est

$$F = \frac{R}{n}.$$

Du treuil.

113. Le *treuil* se compose, essentiellement, d'un cylindre, en bois ou en fer, tournant autour de son axe de figure, lequel est ordinairement horizontal. Pour que le mouvement e rotation soit possible, on termine le cylindre par deux



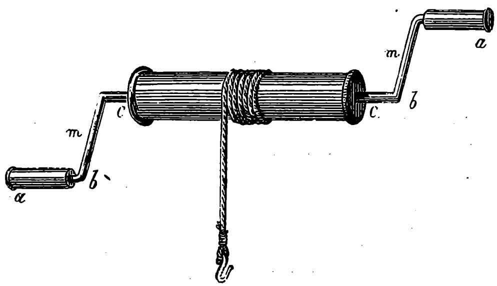
* Dans le cas représenté par la figure, $n = 6$.

tourillons reposant entre des *coussinets*. Une corde, dont l'une des extrémités est fixée au cylindre, s'enroule autour de la surface cylindrique, et supporte, par son autre extrémité, le fardeau à élever. Ces dispositions sont communes à tous les treuils; mais, suivant qu'il s'agit de l'exploitation d'une carrière ou du curage d'un puits, les moyens d'imprimer le mouvement à la machine diffèrent beaucoup.

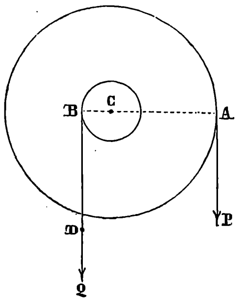
114. *Treuil des carriers.* — Perpendiculairement à l'axe AB est fixée une roue CD, d'environ 5 mètres de diamètre, dont la circonférence porte des échelons *e, e, e,*... sur lesquels montent les ouvriers, qui agissent seulement par leur poids.

Cette machine est fort en usage dans les environs de Paris.

115. *Treuil des puits.* — Dans cet appareil, de dimensions beaucoup plus petites que le treuil des carriers, le mouvement est imprimé au moyen de deux *manivelles m.* Presque toujours, le *manche* de la manivelle est un petit cylindre creux, dans lequel passe le côté horizontal de la tige coudée *abc.* Cette disposition, très-commode pour l'ouvrier qui tourne la manivelle, a aussi pour effet de diminuer les frottements.



116. *Condition d'équilibre.* — Prenons pour exemple le treuil des carriers (113), et supposons la puissance P appliquée tangentiellement à la roue. En assimilant le treuil à un levier*, on a



$$P . CA = Q . CB,$$

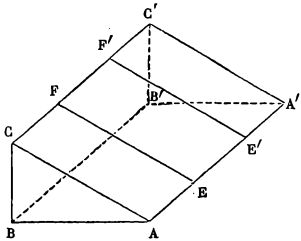
ou

$$\frac{P}{Q} = \frac{CB}{CA}.$$

Ainsi, *la puissance est au poids du fardeau, comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue.*

Du plan incliné.

117. Soit un prisme droit ABCA'B'C', ayant pour base un triangle rectangle ABC. Si ce prisme repose, par sa face ABB'A', sur un plan horizontal, la face BCB'C', perpendiculaire à la première, est verticale, et la troisième face ACA'C' forme ce qu'on appelle un *plan incliné***.



Les droites AB, BC, AC sont, respectivement, la *base,* la *hauteur* et la *longueur* du plan incliné : d'ailleurs, cette dernière droite, étant perpendiculaire à la *trace horizontale* AA', est la *ligne de plus grande pente* du plan***. Il en est de même pour toutes les droites EF, E'F', parallèles à CA.

118. Si un corps *pesant* repose sur un plan incliné, et si la matière qui compose celui-ci est assez résistante****, le corps

* On justifie ce mode de démonstration (peu rigoureux, du reste), en supposant que le cordon BD fasse corps avec le cylindre.

** C'est-à-dire, incliné à l'horizon.

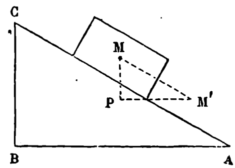
*** Voyez les *Mathématiques appliquées.*

**** Par *matière composant le plan incliné,* on doit entendre, évidemment, celle qui constitue le prisme dont le plan forme une face.

ne pourra que glisser sur le plan, en sorte que la présence de celui-ci empêche le corps de tomber suivant la verticale : l'appareil dont nous nous occupons satisfait donc à la définition générale des machines (81). De plus, il consiste en un seul obstacle : la machine est donc simple (83).

119. Il est facile de comparer les espaces parcourus par le corps solide, dans le sens de la longueur, dans le sens de la base, et dans le sens de la hauteur du plan.

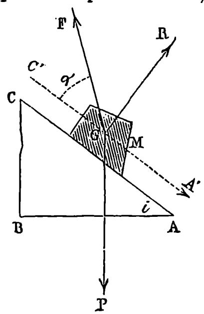
En effet, supposons qu'un point quelconque M du corps solide ait décrit la droite MM′, parallèle à la ligne de plus grande pente du plan. Menons MP parallèle à BC et M′P parallèle à AB. Les deux triangles MPM′, CBA, évidemment équiangles entre eux, sont semblables; c'est-à-dire que



$$\frac{MM'}{AC}=\frac{M'P}{AB}=\frac{MP}{BC}.$$

Ainsi, *quand un corps solide se meut parallèlement à la ligne de plus grande pente d'un plan incliné, les espaces décrits par un point quelconque du corps, dans le sens de la longueur, de la base et de la hauteur du plan, sont proportionnels à ces trois droites.*

120. *Équilibre d'un corps retenu sur un plan incliné.*—Soit un corps solide M, de poids P, retenu, par une *puissance* F, sur un plan incliné CA. Afin de ramener la recherche des conditions d'équilibre à ce qu'elles seraient si le corps solide était *entièrement libre*, introduisons une force inconnue R, *normale* ou perpendiculaire au plan (99); cette force auxiliaire est ce que l'on appelle la *résistance du plan* : elle est égale et directement opposée à la *pression* exercée par le corps M*. Pour qu'il y ait équilibre entre P, F, R, il faut d'a-



* Ainsi que cela est déjà arrivé, nous sommes obligé d'admettre divers principes qui auraient besoin d'être longuement développés.

bord que ces trois forces soient dans un même plan, et que leurs directions passent par un même point. Or, le poids P est une force verticale, appliquée au centre de gravité G du corps; donc, à cause de la direction de R, *la puissance* F *doit être contenue dans le plan vertical passant par le centre de gravité* G *et par la ligne de plus grande pente* CA.

Ce n'est pas tout : si l'on mène, par le point G, une parallèle C'A' à CA, et que l'on décompose F, R, P suivant la direction C'A' et suivant la direction perpendiculaire, on aura :

$$F \cos (F, GC') = P \cos (P, GA'), \qquad (1)$$
$$F \sin (F, GC') + R = P \sin (P, GA'). \qquad (2)$$

Soit α l'angle formé par F avec AC, et soit i l'*inclinaison* du plan, c'est-à-dire l'angle CAB : l'égalité (1) devient

$$F \cos \alpha = P \sin i,$$

ou

$$F = P \frac{\sin i}{\cos \alpha}. \qquad (3)$$

Ainsi :

La force F, *nécessaire pour retenir le poids* P *sur un plan incliné, est proportionnelle au sinus de l'inclinaison du plan, et inversement proportionnelle au cosinus de l'angle formé par la direction de cette force avec la ligne de plus grande pente du plan.*

121. *Remarques.* — I. L'égalité (2) détermine la pression R exercée sur le plan incliné.

II. D'après l'égalité (3), *la puissance* F *est la plus petite possible* si $\cos \alpha = 1$, c'est-à-dire *si la direction de* F *est parallèle à la ligne de plus grande pente.*

III. Le triangle rectangle ABC donne

$$\sin i = \frac{BC}{AC}.$$

Donc, en supposant toujours $\alpha = 0$,

$$F = P \cdot \frac{BC}{AC},$$

ou

$$\frac{F}{P} = \frac{BC}{AC}. \qquad (4)$$

Ce résultat peut s'énoncer ainsi :

Dans le cas le plus favorable, la puissance F *est au poids* P, *comme la hauteur du plan est à sa longueur.*

Résumé.

Une machine est un système dans lequel les mouvements des diverses parties sont gênés par des obstacles.

Un corps solide, gêné par un seul obstacle, est une machine simple.

On compte trois machines simples : le levier, le tour et le plan incliné.

Le levier est un corps solide, mobile autour d'un point fixe. Ordinairement cette machine se réduit à une barre rigide, reposant sur un point fixe, ou tournant autour d'un axe fixe.

S'il n'y a que deux forces appliquées au levier, l'une prend le nom de puissance, l'autre celui de résistance.

Suivant la position du point d'appui à l'égard de la puissance et de la résistance, le levier est dit du premier, du deuxième ou du troisième genre.

Il faut et il suffit, pour l'équilibre du levier, que les forces qui y sont appliquées aient une résultante unique, dont la direction passe par le point fixe.

Dans le cas où ces forces se réduisent à deux, on peut énoncer ainsi les conditions de l'équilibre :

1° La puissance et la résistance doivent être situées dans un même plan passant par le point fixe ;

2° La puissance et la résistance doivent tendre à faire tourner le levier en sens contraires ;

3° La puissance et la résistance doivent être en raison inverse de leurs bras de levier.

Les balances sont des leviers destinés à peser les corps. On les partage en trois classes : la balance ordinaire, la romaine et la balance-bascule.

Pour la justesse de la balance ordinaire, il faut que : 1° les deux bras du fléau soient égaux ; 2° le centre de gravité de la balance soit dans la verticale passant par le point d'appui.

La romaine est un levier du premier genre, à bras inégaux.

Pour graduer la romaine, on suspend, au crochet qui la termine, des poids de 1, 2, 3, ... kilogrammes, et l'on marque les positions correspondantes du curseur, nécessaires pour l'équilibre.

Dans la balance-bascule, si les dimensions satisfont à une certaine relation, le poids du colis est décuple du poids marqué.

Un cordon est considéré comme une chaîne formée d'éléments rectilignes et rigides, mobiles de leurs extrémités communes.

Quand un cordon est sollicité, à ses extrémités, par deux forces directement opposées, il faut et il suffit, pour l'équilibre, que ces forces soient égales. La tension d'un cordon AB, en un point quelconque m, est la force qui serait nécessaire pour maintenir en équilibre la partie mB, si la partie mA était supprimée.

Si le cordon BAC, auquel sont appliquées des forces P, Q, traverse un anneau mobile A sollicité par une force R, il faut, pour l'équilibre, que la direction de R, prolongée, divise en deux parties égales l'angle BAC, et que les forces P, Q soient égales.

Si un cordon, sollicité par des forces P, Q, passe sur un polygone, il faut encore, pour l'équilibre, que les forces P, Q soient égales.

On appelle poulie un cylindre circulaire, de hauteur très-petite, mobile autour d'un axe, et dont la surface latérale est creusée de manière à recevoir une corde qui sert à faire tourner la machine.

Une poulie peut être fixe ou mobile.

Dans la poulie fixe, supposée circulaire, il faut et il suffit, pour l'équilibre, que la puissance soit égale à la résistance.

La pression exercée sur l'axe est à l'une des forces égales appliquées à la poulie, comme la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde est au rayon de la poulie.

Dans la poulie mobile, la puissance est à la résistance, comme le rayon est à la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde.

Quand les deux cordons sont parallèles, la puissance est la moitié de la résistance.

Une moufle est un système de poulies assemblées dans une même chape, et sollicitées par une puissance et une résistance.

Quand la moufle est en équilibre, la puissance est le $\frac{1}{n}$ de la résistance, n étant le nombre des cordons, supposés parallèles.

Le treuil se compose essentiellement d'un cylindre en bois ou en fer, tournant autour de son axe de figure.

En assimilant le treuil à un levier, on trouve que, pour l'équilibre, la puissance est à la résistance, comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue ou de la manivelle.

Quand un corps solide se meut parallèlement à la ligne de plus grande pente d'un plan incliné, les espaces décrits par un point quelconque du corps, dans le sens de la longueur, de la base et de la hauteur du plan, sont proportionnels à ces trois droites.

Si un poids P est maintenu en équilibre sur un plan incliné par une force F : 1° cette force F est contenue dans le plan vertical mené par le centre de gravité de P, parallèlement à la ligne de plus grande pente ; 2° la force F est proportionnelle au sinus de l'inclinaison du plan, et inversement proportionnelle au cosinus de l'angle formé par la direction de cette force avec la ligne de plus grande pente.

Pour une même valeur de P, la force F est la plus petite possible quand elle est parallèle à la ligne de plus grande pente.

Dans ce cas, la puissance F est au poids P, comme la hauteur du plan est à sa longueur.

ÉLÉMENTS DE CINÉMATIQUE ET DE DYNAMIQUE.

CHAPITRE V.

De la cinématique (122). — Mouvement rectiligne uniforme (124-129). —Vitesse (125, 126). — Mouvement rectiligne varié (130). — Vitesse moyenne (131). — Vitesse à un instant quelconque (132, 133). — Mouvement rectiligne uniformément varié (135). — Accélération (144). — De l'accélération à un instant quelconque dans le mouvement rectiligne varié (145). — Composition de deux mouvements simultanés rectilignes, uniformes ou uniformément variés (154-156). — Mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe (146-153). — Vitesse angulaire (150).

De la cinématique.

122. Définition. — *La cinématique est la science du mouvement considéré indépendamment des causes qui le produisent**.

123. On a vu (4) que l'on appelle *trajectoire* d'un point matériel, la ligne décrite par ce point dans l'espace. Suivant que la trajectoire est droite ou courbe, le mouvement est dit *rectiligne* ou *curviligne*.

Mouvement uniforme.

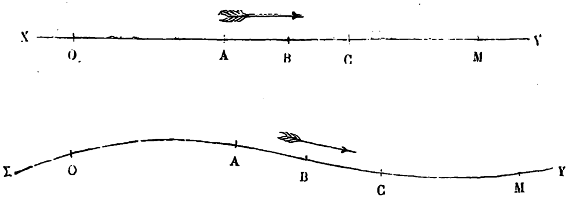
124. Au lieu de considérer, dans le mouvement d'un point matériel, la nature de la trajectoire, on peut étudier la *relation* qui existe *entre l'espace parcouru* par le mobile *et le temps* employé à le parcourir. Cette relation est la plus simple possible quand *le mobile décrit des espaces égaux dans des temps égaux,* auquel cas le mouvement est dit *uniforme.*

* Cette définition diffère peu de celle qu'a proposée l'illustre Ampère, à qui est dû le mot *cinématique.* Logiquement, la cinématique devrait précéder la statique. Il y a quelques années, lorsqu'il s'agissait de *réformer l'enseignement des sciences,* les auteurs du Programme, rompant avec les idées qui avaient cours, imposèrent aux professeurs et aux élèves l'obligation de suivre cet ordre : *cinématique, dynamique, statique.* Pourquoi donc, aujourd'hui, renverser ce qu'on a déclaré excellent, et que l'on avait si péniblement édifié ?

125. *Vitesse.*—Il résulte, de cette définition du mouvement uniforme, que si le mobile a parcouru un certain espace dans un temps donné, il parcourra un espace double, triple, quadruple,... dans un temps double, triple, quadruple... : autrement dit, *les espaces parcourus sont proportionnels aux temps*. Par suite, *si l'on divise l'espace parcouru,* quel qu'il soit, *par le temps employé à le parcourir, on devra trouver un quotient constant : ce quotient*, évidemment *égal à l'espace parcouru dans l'unité de temps, est ce qu'on appelle la vitesse du mobile.*

126. Si, comme on le suppose habituellement (9), l'unité de temps est la seconde sexagésimale, on aura, pour *valeur de la vitesse,* dans un mouvement uniforme quelconque, *l'espace parcouru par le mobile en une seconde.*

127. *Formule du mouvement.*— Il nous est bien facile, actuellement, d'obtenir la *formule du mouvement uniforme,* c'est-à-dire la relation entre l'espace et le temps. En effet,



soient XY la trajectoire du point matériel M; O l'*origine des espaces,* c'est-à-dire le point fixe à partir duquel sont comptées les distances; A la position du mobile à l'*origine des temps* *; si nous appelons a la distance OA, et si nous désignons par b chacun des espaces égaux AB, BC,... parcourus dans l'unité de temps, nous aurons, pour expression de la distance x à laquelle sera le mobile M, au bout d'un nombre quelconque t d'unités de temps,

$$x = a + bt. \qquad (1)$$

128. *Remarques.*— I. Dans cette formule, b, espace parcouru dans l'unité de temps, est la vitesse.

* Ordinairement A est *le lieu de départ du mobile;* mais cela n'est pas nécessaire.

II. Si l'on supposait que le mobile fût parti du point A, x ne *représenterait plus un espace parcouru :* pour rendre la formule plus générale, il vaut mieux admettre que *le point matériel* M *se meut, depuis un temps indéfini, sur la trajectoire* XY, *et qu'il a passé en* A *à l'origine des temps.*

III. L'équation (1) a été obtenue en supposant que le mouvement avait lieu dans le sens indiqué par la flèche ; s'il avait lieu en sens contraire, la formule propre à le représenter ne différerait de la première que par le changement de b en $-b$. On peut donc employer cette formule (1) dans tous les cas, pourvu que l'on convienne de regarder une vitesse comme positive ou comme négative, suivant que le mouvement a lieu dans un sens ou dans le sens opposé.

129. Si l'origine des espaces correspond à l'origine des temps, $a = o$, et l'équation (1) se réduit à

$$x = bt. \qquad (2)$$

Dans cette nouvelle formule, x *représente* véritablement *l'espace parcouru pendant le temps* t* ; aussi la vitesse b a-t-elle pour expression $\frac{x}{t}$.

Mouvement varié.

130. Un *mouvement varié* est celui qui n'est *ni uniforme, ni composé de mouvements uniformes.* Il est évident que, pour une même trajectoire, on peut imaginer une infinité de mouvements variés : chacun d'eux sera déterminé quand on donnera *la relation qui existe entre l'espace et le temps* (124). Par exemple :

$$x = t^2 - 3t + 2, \qquad (1)$$

$$x = \frac{1+t}{1+t^2}, \qquad (2)$$

$$x = \sin t, \qquad (3)$$

sont les formules d'autant de mouvements, très-différents les uns des autres. En effet, on reconnaît sans peine que :

* C'est-à-dire, *pendant un temps dont le rapport à l'unité est représenté par* t.

1° Dans le mouvement déterminé par la formule (1), le temps t variant de $-\infty$ à $+\infty$, l'espace x varie de $+\infty$ à $-\frac{1}{4}$, et de $-\frac{1}{4}$ à $+\infty$;

2° Dans la seconde formule,

t *variant de* $-\infty$ *à* $-(1+\sqrt{2})$, x *varie de* 0 *à* $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$;

t *variant de* $-(1+\sqrt{2})$ *à* -1, x *varie de* $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ *à* 0;

t *variant de* -1 *à* $\sqrt{2}-1$, x *varie de* 0 *à* $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$;

t *variant de* $\sqrt{2}-1$ *à* $+\infty$, x *varie de* $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ *à* 0*.

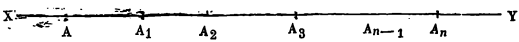
3° Le mouvement représenté par la formule (3) est périodique, c'est-à-dire que si l'on fait croître t de $-\infty$ *à* $+\infty$, l'espace x, toujours compris entre $+1$ et -1, repassera indéfiniment par les mêmes valeurs : cette formule indique donc un mouvement de *va-et-vient,* analogue à celui d'un *factionnaire.*

131. *Vitesse moyenne.* — On a vu, plus haut, ce qu'on appelle vitesse dans un mouvement uniforme. Pour arriver à la définition de la vitesse dans un mouvement varié quelconque, nous considérerons d'abord la *vitesse moyenne* dans un mouvement composé de mouvements uniformes; et, à cet effet, nous nous proposerons la question suivante :

Un mobile a parcouru, successivement,

La partie AA_1 *de la trajectoire, avec une vitesse constante* v,
— A_1A_2 — — — v_1,
— A_2A_3 — — — v_2,
. . . .
— $A_{n-1}A_n$ — — — v_n;

quelle serait la vitesse V *d'un second mobile qui parcourrait, d'un mouvement uniforme, la trajectoire* AA_n, *de manière à*



* La discussion des formules (1) et (2) est toute semblable à celle que l'on rencontre dans les questions de maximum et de minimum. (Voyez l'*Algèbre.*)

rencontrer le premier mobile aux extrémités A, A_n, *de cette ligne ?*

Soient $t, t_1, t_2, \ldots. t_n$ les temps employés par le premier mobile à parcourir les espaces AA_1, $A_2A_3, \ldots. A_{n-1}A_n$. La formule du n° 129 donne, *puisque les mouvements sont uniformes :*

$$AA_1 = vt, \quad A_1A_2 = v_1t_1, \ldots. \quad A_{n-1}A_n = v_nt_n.$$

D'un autre côté, le second mobile doit parcourir uniformément l'espace AA_n, dans un temps égal à $t + t_1 + \ldots. + t_n$; la vitesse V de son mouvement a donc pour valeur

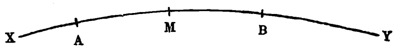
$$V = \frac{AA_n}{t + t_1 + \ldots. + t_n};$$

ou, ce qui est équivalent,

$$V = \frac{vt + v_1t_1 + v_2t_2 + \ldots. + v_nt_n}{t + t_1 + \ldots. + t_n}.$$

On reconnaît, dans le second membre, une expression analogue à celle que donnerait la *règle de société* ou plutôt la *règle des moyennes* *. *La vitesse moyenne* V, dans un mouvement composé de mouvements uniformes, *est donc égale à la moyenne des vitesses.*

132. *Vitesse.*— Considérons à présent un mouvement varié quelconque, et soient A, B, les positions occupées par le mobile



au bout des temps t, $t + \theta$. *Si l'on divise* la distance AB $= k$, c'est-à-dire l'*accroissement de l'espace,* par θ, ou *par l'accroissement du temps, on aura la vitesse moyenne* relative à la partie AB de la trajectoire. Cette vitesse est celle d'*un mobile auxiliaire m* qui, partant du point A en même temps que le mobile M, arriverait avec celui-ci en B, après avoir parcouru uniformément la ligne AB. On comprend, sans qu'il soit nécessaire d'insister sur ce point, que le mouvement du mobile auxiliaire différera d'autant moins du mouvement de l'autre mobile, que l'intervalle θ sera plus petit. Pour cette raison, on

* Voyez l'*Arithmétique.*

appelle *vitesse du mobile* M, *au bout du temps* t, *la limite vers laquelle tend sa vitesse moyenne* $\frac{k}{\theta}$, *lorsque les accroissements de l'espace et du temps tendent vers zéro.*

133. La nature de cet ouvrage ne nous permet pas de démontrer que cette limite existe toujours : nous nous contenterons de le vérifier sur les trois exemples considérés plus haut.

1° Soit donc

$$x = t^2 - 3t + 2.$$

Nous aurons successivement :

$$x + k = (t + \theta)^2 - 3(t + \theta) + 2;$$

$$k = 2t\theta + \theta^2 - 3\theta;$$

$$\frac{k}{\theta} = \textit{vitesse moyenne} = 2t + \theta - 3;$$

$$\textit{limite } \text{de} \frac{k}{\theta} = v = 2t - 3.$$

2° $$x = \frac{1+t}{1+t^2}; \quad x + k = \frac{1 + t + \theta}{1 + (t+\theta)^2};$$

$$k = \frac{1 + t + \theta}{1 + (t+\theta)^2} - \frac{1+t}{1+t^2} = \frac{\theta(1+t^2) - (2t\theta + \theta^2)(1+t)}{[1 + (t+\theta)^2](1+t^2)};$$

$$\frac{k}{\theta} = \frac{1 + t^2 - (2t+\theta)(1+t)}{[1 + (t+\theta)^2](1+t^2)};$$

$$\textit{lim.} \frac{k}{\theta} = v = \frac{1 - 2t - t^2}{(1+t^2)^2}.$$

3° $$x = \sin t;\ x + k = \sin(t + \theta);$$

$$k = \sin(t+\theta) - \sin t = 2 \sin \tfrac{1}{2}\theta \cos(t + \tfrac{1}{2}\theta) *;$$

$$\frac{k}{\theta} = \frac{\sin \frac{1}{2}\theta}{\frac{1}{2}\theta} \cos(t + \tfrac{1}{2}\theta);$$

* Voyez la *Trigonométrie.*

$$lim. \frac{k}{\theta} = v = \cos t.$$

Ainsi, dans les trois mouvements considérés, déterminés par les relations

$$x = t^2 - 3t + 2, \quad x = \frac{1 + t}{1 + t^2}, \qquad x = \sin t,$$

les vitesses sont, respectivement,

$$v = 2t - 3, \qquad v = \frac{1 - 2t - t^2}{(1 + t^2)^2}, \quad v = \cos t^*.$$

134. *Diverses espèces de mouvements.* — Un mouvement est dit *accéléré* ou *retardé*, suivant que sa vitesse augmente ou diminue avec le temps. Dans le premier des trois exemples précédents, le mouvement est sans cesse accéléré, parce que la quantité $2t-3$ augmente avec t. La discussion du deuxième exemple montre que, le temps croissant de $-\infty$ à $+\infty$, le mouvement est d'abord *retardé*, puis *accéléré*, puis de nouveau *retardé*, puis enfin *accéléré*. Quant à la formule $v = \cos t$, elle montre clairement que le mouvement est *périodique*, ce que nous savions déjà (130, 3°).

Mouvement uniformément varié.

135. Après le mouvement uniforme, représenté (127) par les formules

$$x = a + bt, \qquad (1) \qquad v = b, \qquad (2)$$

le cas le plus aisé à étudier est celui du *mouvement uniformément varié*, dans lequel la *relation entre la vitesse et le temps* est

$$v = b + ct, \qquad (3)$$

* Les lecteurs à qui les théories algébriques sont familières ont pu remarquer que les trois dernières fonctions sont les *dérivées* des trois premières : en effet, *la vitesse, dans un mouvement quelconque, est égale à la dérivée de l'espace par rapport au temps.* (Voyez le *Manuel des candidats à l'Ecole polytechnique.*)

b et c étant des *constantes* données *. De ces deux quantités, la première, égale à la valeur de v correspondant à $t=0$, est appelée, pour cette raison, *vitesse initiale;* l'autre est l'*accélération*, c'est-à-dire *la quantité dont la vitesse augmente ou diminue dans l'unité de temps.*

136. Remarques. — I. *Quand la vitesse augmente avec le temps*, c'est-à-dire *quand l'accélération* c *est positive*, le mouvement est dit *uniformément accéléré;* dans le cas contraire, il est *uniformément retardé.*

II. Soient t_0, t_1 deux valeurs de t, et v_0, v_1 les valeurs correspondantes de v. On a, par la formule (3),

$$v_1 - v_0 = c\,(t_1 - t_0),$$

ou

$$c = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}.$$

Ainsi, *dans tout mouvement uniformément varié, l'accélération est égale à l'accroissement de la vitesse, divisé par l'accroissement du temps.*

137. Pour découvrir, en partant de la formule (3), *la relation entre l'espace et le temps*, rappelons-nous qu'en supposant $x = t^2 - 3t + 2$, nous avons trouvé, pour l'expression de la vitesse, $v = 2t - 3$ (133). Cette formule étant un cas particulier de l'équation (3), il y a lieu de croire que la relation cherchée sera

$$x = \alpha + \beta t + \gamma t^2\,;$$

α, β, γ, étant des constantes. En effet, cette dernière équation donne, par le calcul ordinaire (133),

$$v = \beta + 2\gamma t;$$

et, pour identifier cette valeur avec $b + ct$, il suffit de prendre $\beta = b$, $\gamma = \frac{1}{2}c$. *La relation entre l'espace et le temps, dans le mouvement uniformément varié, est* donc

$$x = a + bt + \tfrac{1}{2}ct^2. \qquad (4)\,^{**}$$

* Ces constantes n'ont aucune relation avec celles qui entrent dans les équations (1) et (2).

** Dans cette formule, nous avons écrit, pour plus de régularité, a au lieu de α.

138. Nous avons déjà défini les constantes b et c. Quant à *la constante* a, *elle est* évidemment *égale à l'arc de trajectoire compris entre la position initiale du mobile et l'origine des espaces.*

139. Si, comme nous l'avons déjà supposé à propos du mouvement uniforme, on compte les espaces à partir de cette position initiale, $a=0$, et la formule (4) devient

$$x = bt + \tfrac{1}{2}ct^2. \qquad (5)$$

140. Admettons, en outre, que *la vitesse initiale* b *soit nulle :* les équations (4) et (3) se réduiront à.

$$x = \tfrac{1}{2}ct^2, \quad (A) \qquad v = ct. \quad (B)$$

Ces dernières formules mettent en évidence les propriétés suivantes, qui appartiennent à tout mouvement uniformément accéléré *, quand l'origine des espaces se confond avec la position initiale du mobile, et que celui-ci n'a pas de vitesse initiale :

1° *La vitesse acquise est proportionnelle au temps ;*

2° *L'espace parcouru est proportionnel au carré du temps;*

3° *La vitesse acquise à la fin de la première unité de temps est double de l'espace parcouru pendant cette unité de temps.*

Pour vérifier cette troisième loi, il suffit d'observer que, si l'on fait $t=1$ dans les formules (B), (A), elles donnent

$$v = c, \quad 2x = c.$$

141. Les lois que nous venons d'énoncer sont celles qui président au mouvement des corps pesants ou *corps graves*, tombant dans le vide, sans vitesse initiale. La constante c, relative à ce cas naturel, est le nombre $g = 9{,}80896$ (18). En adoptant ce résultat de l'expérience, nous pouvons dire que : *un corps tombant librement dans le vide, sans vitesse initiale, parcourt, dans la première seconde de sa chute, un espace égal à* $4^{m},90448$; *sa vitesse, à la fin de ce temps, est égale à* $9^{m},80896$ **.

* Il est toujours permis de supposer que le mouvement auquel se rapportent ces deux formules est *accéléré :* en effet, on peut compter les espaces dans le sens de ce mouvement, et alors la constante c est positive.

** Ces nombres se rapportent à des observations faites au niveau de la mer, à la latitude de Paris.

De plus, si h représente la hauteur d'où le corps est tombé, on aura, au lieu des formules (A), (B) :

$$h = \tfrac{1}{2} gt^2, \qquad \text{(C)} \qquad\qquad v = gt. \qquad \text{(D)}$$

142. En éliminant t entre ces deux équations, on trouve

$$h = \frac{v^2}{2g}, \qquad \text{(E)}$$

ou

$$v = \sqrt{2gh}. \qquad \text{(F)}$$

Cette dernière formule donne *la vitesse* v DUE *à la hauteur* h : on voit que la vitesse DUE *croît proportionnellement à la racine carrée du nombre qui représente la hauteur*. Ainsi, *quand les espaces parcourus par le corps tombant croissent comme les nombres* 1, 4, 9, 16, 25,.... *les vitesses acquises croissent comme les nombres* 1, 2, 3, 4, 5;.... c'est-à-dire qu'*elles sont proportionnelles aux temps employés à parcourir ces espaces* (140).

143. Les relations (A) ou (C) donnent lieu à cette autre remarque : *les espaces que parcourt le corps pesant, en des temps consécutifs tous égaux entre eux, croissent comme les nombres* 1, 3, 5, 7, 9.

En effet, d'après ces deux formules, les espaces parcourus *à la fin de*

1, 2, 3, 4, 5, 6,....unités de temps,

sont proportionnels à

1, 4, 9, 16, 25, 36....;

donc les espaces parcourus *pendant*

la 1re, la 2e, la 3e, la 4e, ... unité de temps,

sont entre eux comme

1, 4 — 1, 9 — 4, 16 — 9,...,

ou comme

1, 3 5, 7,......

Accélération dans le mouvement varié.

144. *Accélération moyenne.* — Soient, dans un *mouvement rectiligne* quelconque, v_0, v_1 les vitesses du point matériel, au bout des temps t_0, t_1 : le rapport $\frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}$, qui mesurerait l'accélération si le mouvement était *uniformément varié* (136, II), est ce qu'on appelle l'*accélération moyenne* pendant le temps $t_1 - t_0$.

145. *Accélération.* — De même que la considération de la *vitesse moyenne* (131) conduit à l'expression générale de la vitesse (132), la définition précédente va nous servir à expliquer en quoi consiste l'*accélération d'un mouvement rectiligne quelconque.*

A cet effet, soient v la vitesse au bout du temps t, et $v + h$ la vitesse au bout du temps $t + \theta$; de manière que $\frac{h}{\theta}$ représente l'*accélération moyenne pendant l'accroissement* θ *du temps* t. Si θ diminue indéfiniment, le rapport $\frac{h}{\theta}$ tend vers une limite w (132) : *cette limite est l'accélération au bout du temps* t*.

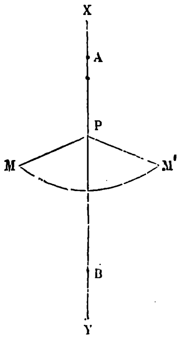
Mouvement de rotation.

146. On dit qu'*un corps solide est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe, quand tous ses points décrivent des circonférences situées dans des plans perpendiculaires à l'axe, et ayant leurs centres sur cet axe.*

La nature et les arts nous présentent de nombreux exemples de ce genre de mouvement : ainsi, la Terre tourne autour de son axe ; les planètes, les satellites, le Soleil même ont des axes de rotation ; d'un autre côté, les *roues des carriers*, les *manivelles,* les *meules* servant à écraser le grain, etc., sont des corps solides qui ne peuvent que tourner autour d'un axe.

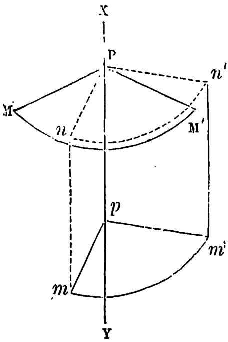
* L'explication complète de l'*accélération dans le mouvement varié, rectiligne,* suppose le calcul différentiel, ou au moins la *théorie des dérivées.* (Voir le *Manuel des candidats à l'École polytechnique.*)

147. *Toutes les fois qu'un corps solide renferme deux points fixes* A, B, *le seul mouvement qu'il puisse prendre est un mouvement de rotation autour de la droite qui les joint.* Soit M un point quelconque du corps. Si nous abaissons MP perpendiculaire à AB, le point P, appartenant à la droite AB dont les extrémités sont fixes, est pareillement fixe. Il résulte de là que la droite MP, continuellement perpendiculaire à AB en un même point P, engendre un plan perpendiculaire à l'*axe* XY, et que le point M décrit, dans ce plan, une circonférence MM′ ayant P pour centre.



148. *Quand un corps solide tourne autour d'un axe, tous ses points décrivent, en même temps, des arcs semblables.*

Soient MM′, mm' les arcs décrits, dans un temps quelconque t, par deux points M, m appartenant au corps solide; soient P, p les centres de ces arcs. Par les points m, m', menons les parallèles mn, $m'n'$ à l'axe XY, et soient n, n' les points où elles percent le plan MPM′. Les angles mpm', $n\mathrm{P}n'$ sont égaux, comme ayant leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens; d'ailleurs, l'angle MPM′, en prenant la position $n\mathrm{P}n'$, n'a pas changé de grandeur. Donc



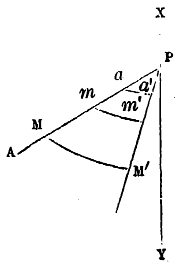
$$\textit{angle } mpm' = \textit{angle } \mathrm{MPM}'.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer*.

149. *Les vitesses des différents points du corps tournant sont proportionnelles aux rayons des circonférences qu'ils décrivent.*

D'après la démonstration précédente, il suffit de considérer

* Voyez la *Géométrie*, n° 227.



deux points situés dans un même plan perpendiculaire à l'axe, et même deux points appartenant à une perpendiculaire AP à l'axe.

Soient donc M, m, les positions qu'occupent ces points au bout du temps t; soient M', m', celles qu'ils occupent au bout du temps $t+\theta$, après que le corps a tourné du petit angle MPM' $+\alpha$ *; appelons V, v les vitesses des deux points, à la première époque, et R, r les rayons PM, Pm. Par la définition de la vitesse (132),

$$V = lim. \frac{MM'}{\theta} = lim. \frac{R\alpha}{\theta} = R\, lim. \frac{\alpha}{\theta}.$$

De même

$$v = r\, lim. \frac{\alpha}{\theta};$$

donc

$$\frac{V}{v} = \frac{R}{r}.$$

150. *Vitesse angulaire.* — Considérons, sur le rayon MP, le point a dont la distance au centre P est égale à l'unité de longueur; la vitesse ω de ce point sera précisément égale à $lim. \frac{\alpha}{\theta}$: cette quantité ω est ce que l'on appelle la *vitesse angulaire* ** du corps solide, au bout du temps t. Ainsi, *la vitesse angulaire, dans un mouvement de rotation quelconque, est la vitesse des points situés à une distance de l'axe égale à l'unité de longueur.*

151. *La vitesse d'un point quelconque est égale à la vitesse angulaire, multipliée par la distance de l'axe au point.*

En effet, nous avons trouvé

$$V = R\, lim. \frac{\alpha}{\theta} = R\omega.$$

* Le nombre α n'est, à proprement parler, que la mesure de l'angle PMP' : *c'est l'arc correspondant à cet angle, dans le cercle de rayon* 1. (*Trigonométrie, n°* 4.)

** Ou plutôt, *vitesse de rotation.*

152. La vitesse angulaire étant un élément commun à tous les points du corps tournant, il s'ensuit que si elle est connue à chaque instant, le mouvement du corps sera parfaitement déterminé. Quand cette vitesse angulaire est *constante*, c'est-à-dire *indépendante du temps*, les vitesses des différents points du corps ne dépendent plus que de leurs distances à l'axe : on dit alors que *le mouvement de rotation est uniforme*.

153. Dans ce dernier cas, qui est réalisé par notre globe, la vitesse angulaire est souvent estimée par le *nombre de tours* que fait le corps autour de l'axe, dans l'unité de temps. Ainsi, la vitesse de rotation de la Terre est de 1 tour en un jour sidéral ; dans les *moulins à farine*, la meule *courante* fait environ 115 tours par minute ; certaines *scies circulaires*, employées dans la fabrication des *rails* de chemins de fer, font jusqu'à 850 tours par minute. Enfin, dans une expérience imaginée par l'illustre Arago, M. Breguet est parvenu à faire décrire à un petit miroir métallique, 2 000 tours par seconde ! Dans ces divers exemples, les valeurs de la vitesse angulaire ω, telle qu'elle a été définie plus haut, seraient respectivement,

$$\frac{2\pi}{86163}\text{*}, \qquad \frac{2\pi \, . \, 115}{60}, \qquad \frac{2\pi \, . \, 850}{60}, \qquad 2\pi \, . \, 2\,000 ;$$

ou, à peu près,

$$\omega = 0{,}000\,072, \quad \omega = 12{,}04, \quad \omega = 44{,}5, \quad \omega = 6\,283.$$

Composition des mouvements.

154. Ainsi que nous l'avons dit (4), on juge qu'un corps M est en mouvement dans l'espace, quand il change de situation à l'égard de différents corps A, B, C,... supposés fixes. Si cette fixité était réelle, le *mouvement relatif* de M ne différerait pas de son *mouvement absolu*. Mais, en général, les choses ne se passent pas ainsi, et le mouvement absolu du corps M est une combinaison de son mouvement relatif et du mouvement des corps A, B, C,...

Remarquons tout de suite que si, au lieu du mouvement absolu du système A, B, C,..., on considérait son mouvement à l'égard d'un second système A′, B′, C′,..., la *composition des deux mouvements* donnerait, non le mouvement absolu de M,

* Le jour sidéral équivaut à 86 163 secondes sexagésimales.

mais le mouvement de ce corps relativement au système A', B', C',.... pris comme point de repère. Si on voulait aller plus loin, on aurait à composer ce mouvement relatif avec le mouvement, absolu ou relatif, des corps A', B', C'; et ainsi de suite.

Par exemple, si une bille roule sur le pont d'un bateau, tandis que celui-ci est emporté par le courant d'une rivière, la composition de ces deux mouvements élémentaires donnera le mouvement de la bille par rapport au rivage. Il resterait, pour déterminer la trajectoire de la bille relativement au système solaire, *supposé fixe,* à composer les deux premiers mouvements avec la rotation et la translation de la Terre.

155. L'exemple précédent prouve que les compositions de mouvements peuvent toujours être ramenées à la question suivante :

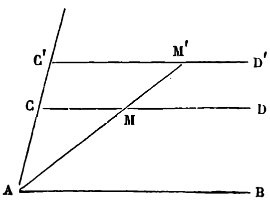
Connaissant le mouvement d'un corps M, *par rapport à différents corps* A, B, C,..., *connaissant, en outre, le mouvement du système de ces derniers corps, trouver le mouvement absolu de* M.

La solution générale de ce problème reposant sur des considérations géométriques assez épineuses, nous nous contenterons de traiter quelques cas particuliers très-simples.

Composition de deux mouvements rectilignes uniformes.

156. *Un point matériel parcourt, avec une vitesse constante, une droite donnée, tandis que celle-ci a un mouvement de translation rectiligne et uniforme. Quel est le mouvement absolu du point* * ?

Soient AB et A les positions initiales de la droite et du point; soient CD et M leurs positions au bout du temps quelconque t; soient enfin C'D' et M' leurs positions au bout du temps quelconque t'. Le mouvement de la droite donnée étant un mouvement de translation rectiligne, AB, CD, C'D' sont parallèles, et leurs extrémités A, C, C' sont en ligne droite. De plus, ce mouvement de translation est uniforme : donc (124)



* Pour réaliser cette hypothèse, on pourrait faire glisser un *anneau* le long d'une *tringle,* tandis que l'on ferait mouvoir celle-ci.

$$\frac{AC}{AC'} = \frac{t}{t'}.$$

D'un autre côté, le mouvement *relatif* du point est uniforme : donc

$$\frac{CM}{C'M'} = \frac{t}{t'}.$$

Ces deux proportions donnent

$$\frac{AC}{AC'} = \frac{CM}{C'M'}.$$

Imaginons les droites AM, AM' : elles déterminent deux triangles ACM, AC'M', semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels ; donc les angles CAM, C'A'M' sont égaux ; et AMM' *est une ligne droite*. De plus,

$$\frac{AM}{AM'} = \frac{AC}{AC'},$$

ou, par ce qui précède,

$$\frac{AM}{AM'} = \frac{t}{t'}.$$

Ainsi, *le mouvement absolu du point matériel est rectiligne et uniforme*. En résumé :

Le mouvement RÉSULTANT *de deux mouvements rectilignes et uniformes est également rectiligne et uniforme.*

Composition de deux mouvements uniformes, l'un rectiligne, l'autre circulaire.

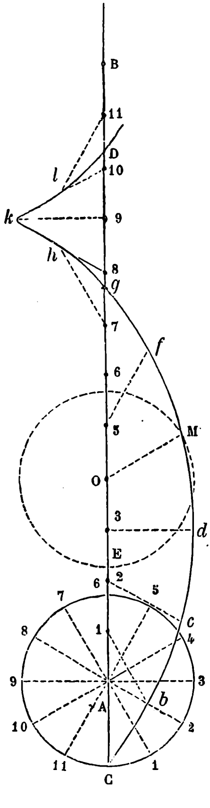
157. *Un point matériel parcourt, avec une vitesse constante, une circonférence donnée, tandis que le centre de celle-ci a un mouvement rectiligne uniforme. Quel est le mouvement absolu du point?*

Soient AC et C les positions initiales de la circonférence et du point; soient OM et M leurs positions au bout du temps quelconque t; soit enfin B la position du centre de la circonférence au moment où le point mobile accomplit sa révolution. Puisque les deux mouvements composants sont uniformes, on a, en appelant R le rayon OM :

$$\frac{AO}{AB} = \frac{\text{arc EM}}{2\pi R}.$$

Ainsi, *à chaque instant, le rayon* OM *fait, avec la direction* OA, *un angle proportionnel à cette droite*. Cette propriété définit la trajectoire CMkD.

Pour construire cette ligne par points, on divise, en un même nombre de parties égales, la droite AB et le cercle CA; puis, par les points de division de AB, on mène les droites 1b, 2c, 3d,... respectivement égales et parallèles aux rayons A1, A2, A3,...; après quoi l'on fait passer un trait continu par les points C, b, c, d....

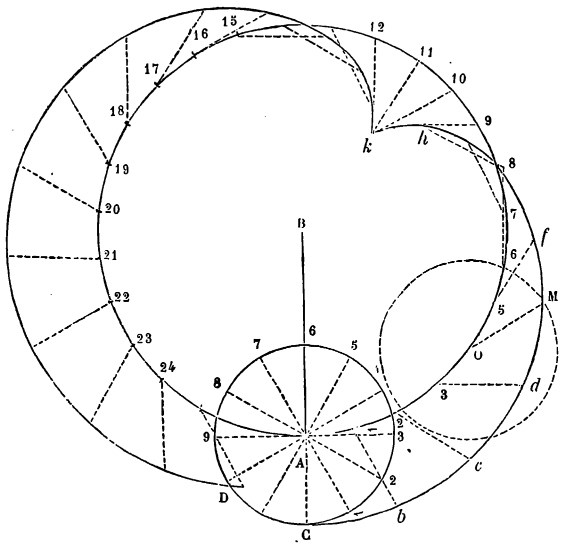


158. *Remarque.*— Si le cercle et la droite n'étaient pas situés dans un même plan, la trajectoire CMkD deviendrait une *courbe à double courbure*. Dans le cas particulier où le cercle se mouvrait perpendiculairement à la droite, le point M décrirait une *hélice*. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer cette propriété, qui est presque évidente (*Math. appliquées*).

Composition de deux mouvements circulaires uniformes.

159. *Un point matériel parcourt, avec une vitesse constante, une circonférence donnée, tandis que le centre de celle-ci décrit uniformément une seconde circonférence. Quel est le mouvement absolu du point?*

Ce cas est à peu près réalisé dans le mouvement de la Lune autour de la Terre : il donne lieu à une construction qui ne diffère de la précédente que par le changement de la droite AOB en une circonférence AOB. On trouve ainsi, pour trajectoire du point, la courbe C*c*M*k*D.

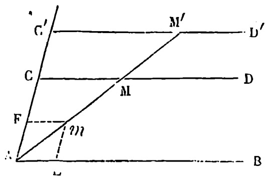


160. On peut démontrer que *la trajectoire du point* M *est une épicycloïde*, c'est-à-dire *la ligne engendrée par un point qui serait lié à un cercle roulant sur un cercle fixe.*

Composition des vitesses.

161. Reprenons l'exemple qui nous a servi à démontrer la composition de deux mouvements rectilignes uniformes, et cherchons comment la vitesse du *mouvement résultant* est liée aux vitesses des *mouvements composants*.

Soit, au bout de la première unité de temps, m la position du point matériel sur sa trajectoire rectiligne AMM′, de telle sorte que Am représente la vitesse du mouvement résultant. Menons mF parallèle à la droite mobile AB, et mE parallèle à la *trajectoire* ACC′ *du point* A : les deux côtés AE, AF du parallélogramme AEmF représenteront, respectivement, la vitesse du point matériel, relativement à AB, et la vitesse de cette droite *.



Ainsi, *la vitesse du mouvement rectiligne uniforme résultant de deux autres mouvements rectilignes uniformes est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent, en grandeur et en direction, les vitesses des mouvements composants.*

Cette proposition fondamentale est connue sous le nom de *théorème du parallélogramme des vitesses* : on voit qu'elle est complètement analogue au *théorème du parallélogramme des forces*. La même analogie (ou plutôt la même *identité*) s'observe dans les propositions suivantes, comparées à celles que nous avons démontrées précédemment.

162. *Remarques.*— I. Si l'on convient d'appeler *vitesses composantes* les vitesses des mouvements auxquels participe le point m, et *vitesse résultante*, la vitesse de son mouvement effectif, on pourra simplifier ainsi l'énoncé précédent :

La vitesse résultante de deux vitesses données est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent, en grandeur et en direction, les vitesses composantes.

* Cette dernière vitesse a été désignée, par Coriolis, sous le nom de *vitesse d'entraînement* : c'est la vitesse avec laquelle est *entraîné* le système auquel appartient le point matériel m. Les vitesses représentées par Am et AE sont, l'une, la *vitesse absolue* du point, l'autre, sa *vitesse relative*.

II. On doit bien se garder de croire qu'*un point matériel peut être animé de plusieurs vitesses simultanées* : décrivant une seule trajectoire, il possède une seule vitesse.

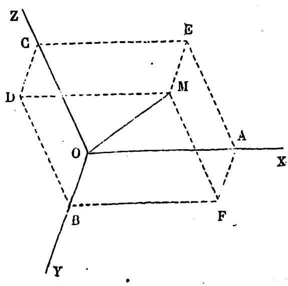
163. *Polygone des vitesses.* — Nous avons vu (154) qu'après avoir cherché le mouvement composé résultant de deux mouvements simples, on peut combiner ce mouvement résultant avec un troisième mouvement simple ; et ainsi de suite. De même, après avoir réduit deux vitesses à une seule, au moyen de la règle précédente, on peut composer, avec cette vitesse résultante, une troisième vitesse donnée ; et ainsi de suite. L'application de cette règle permet donc de trouver la résultante d'un nombre quelconque de vitesses. Il est facile de voir (41) que cette recherche se réduit, dans tous les cas, à la construction géométrique résultant du théorème suivant :

La résultante d'un nombre quelconque de vitesses est représentée, en grandeur et en direction, par le dernier côté d'un polygone fermé dont les autres côtés sont égaux et parallèles aux droites qui représentent les vitesses composantes, en grandeur et en direction.

164. *Parallélipipède des vitesses.* — En particulier :

La vitesse résultante de trois vitesses non situées dans un même plan est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélipipède construit sur les droites qui représentent, en grandeur et en direction, les vitesses composantes.

165. Au lieu de chercher la résultante de plusieurs vitesses, on peut se proposer de *décomposer une vitesse donnée,* c'est-à-dire de *trouver des vitesses dont elle soit la résultante.* En général, ce problème est *indéterminé.*



Pour le faire voir, proposons-nous de décomposer une vitesse représentée par OM, en trois vitesses dirigées suivant les arêtes OX, OY, OZ d'un angle trièdre ayant le point O pour sommet. Si nous menons par le point M, supposé intérieur à l'angle trièdre, les trois plans MA, MB, MC, respectivement parallèles à YOZ, ZOX, XOY, les arêtes OA, OB, OC du parallélipipède MABC représenteront, en direction et en grandeur, les vitesses cherchées.

D'ailleurs les directions OX, OY, OZ n'étant assujetties qu'à la condition de former un angle trièdre dont aucune face ne passe par le point M, il s'ensuit que *la décomposition proposée est possible d'une infinité de manières*. C'est ce qu'il s'agissait de vérifier.

166. *Remarque*. — Les théorèmes sur la *composition* et la *décomposition des vitesses* offrent une complète analogie avec ceux qui se rapportent à la *composition* et à la *décomposition des forces* (nos 37 et suivants) : on passe des premiers énoncés aux seconds, en remplaçant le mot *vitesse* par le mot *force* *.

Des mouvements apparents.

167. Nous avons montré (156) comment on peut *trouver le mouvement absolu d'un corps* M, *connaissant son mouvement relatif, et le mouvement absolu du corps* A *auquel* M *est rapporté* **. Au lieu de ce problème, on peut se proposer celui-ci, dont la solution renferme toute la théorie des *mouvements apparents* :

Connaissant les mouvements absolus de deux corps M *et* A, *trouver le mouvement relatif de* M.

Ce problème étant inverse du précédent, on le résoudra par les mêmes principes, appliqués dans un autre ordre. C'est ce que les exemples suivants vont mettre hors de doute.

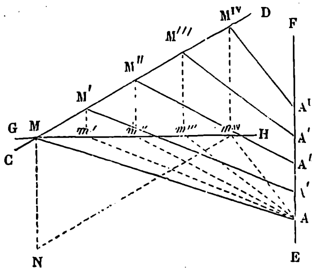
168. PROBLÈME. *Un point matériel se meut sur une droite* CD, *avec une vitesse constante. Quel est son mouvement à l'égard d'un observateur qui se meut sur une droite* EF, *avec une vitesse constante?*

Soient M et A, M' et A', M'' et A'',... les positions correspondantes des deux mobiles, au bout des temps 0, t, $2t$, $3t$,... Si l'observateur n'a pas *conscience* de son mouvement propre, il lui semblera qu'il est immobile en A, et que le point matériel occupe, successivement, les positions M, m', m'',...

* Il y a plus : on peut déduire la première théorie de la seconde, ou réciproquement, suivant le point de vue où l'on se place.

** Pour plus de simplicité, nous supposons les corps A, B, C,... réduits à un seul.

déterminées par les parallélogrammes $AA'M'm'$, $AA''M''m''$,...*. La ligne GH est donc la *trajectoire apparente* du point. D'ailleurs, les mouvements donnés étant uniformes, nous aurons, à cause des parallélogrammes,



$$\frac{MM'}{M'm'} = \frac{MM''}{M''m''} = \frac{MM'''}{M'''m'''} = \ldots$$

et

$$Mm' = m'm'' = m''m''' = \ldots.$$

Ainsi, *le mouvement apparent du point matériel est rectiligne et uniforme.*

169. *Remarques.* — I. Le mouvement absolu du point matériel peut, évidemment, être regardé comme un *mouvement composé* (154) résultant de son mouvement apparent, et d'un autre mouvement rectiligne et uniforme, commun à tous les points de la trajectoire apparente GH et égal au mouvement de l'observateur : *le mouvement apparent d'un corps n'est donc que son mouvement relatif, l'observateur étant pris pour point de repère.*

II. Menons la droite MN égale et parallèle à $A^{IV}A$, et achevons le parallélogramme $MNm^{IV}M^{IV}$: la droite GH en sera la diagonale. Par conséquent,

Pour trouver le mouvement apparent d'un point matériel, il suffit de composer son mouvement absolu avec un mouvement égal et contraire à celui de l'observateur, ou, en termes plus simples :

Pour trouver le mouvement apparent d'un point matériel, on imprime, à ce point et à l'observateur, un mouvement commun, égal et contraire à celui de l'observateur.

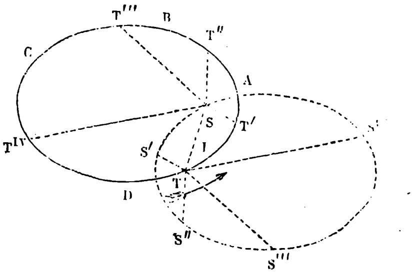
* Quand l'observateur est arrivé en A', il voit le point dans la direction A'M'. On doit donc, pour avoir la position apparente du point, l'observateur étant supposé fixe, mener Am' égale et parallèle à $A'M'$; c'est ce que réalise le parallélogramme $AA'M'm'$.

III. La composition des vitesses ne différant pas de la composition des mouvements, au moins quand ceux-ci sont rectilignes et uniformes, il s'ensuit que :

Le vitesse apparente d'un point matériel est la résultante de sa vitesse absolue et d'une vitesse égale et parallèle à celle de l'observateur, mais dirigée en sens contraire.

170. **Problème.** *Trouver le mouvement apparent d'un point fixe* S *à l'égard d'un observateur* T *qui décrirait une ellipse ayant ce point pour foyer* *.

Si l'observateur se croit immobile en T, le point fixe S lui semblera décrire une courbe Ss′s″... que l'on obtient en menant Ts′ égale et parallèle à T′S, Ts″ égale et parallèle à T″S, et ainsi de suite. Il est facile de voir que les deux courbes sont symétriques par rapport au milieu I de ST. Par suite, la trajectoire apparente est une ellipse égale à la première. En outre, *la vitesse apparente du point fixe est, à chaque instant, égale et parallèle à la vitesse réelle de l'observateur, mais elle est dirigée en sens contraire de celle-ci***.



171. La considération des mouvements apparents peut servir à rendre compte d'une foule de phénomènes. Nous en indiquerons quelques-uns.

1° Quand on est sur un bateau à vapeur ou sur un chemin de fer, on croit voir *courir* les maisons et les arbres : cela tient, évidemment, à ce que la vitesse apparente de ces objets est égale et contraire à celle du bateau ou du train.

* Ce problème est celui du mouvement apparent du Soleil. (Voyez la *Cosmographie*.)

** Cet énoncé ne serait pas clair, si nous n'admettions la proposition suivante :

La direction de la vitesse est, à chaque instant, tangente à la trajectoire.

2° Si deux trains A, B, dont les vitesses sont a, b, marchent dans le même sens, sur deux voies parallèles, la vitesse apparente de B, pour les voyageurs appartenant à l'autre train, est $b - a$: suivant que cette différence est positive, nulle ou négative, B paraît avancer, stationner ou reculer. Si cette différence est assez faible, les voyageurs des deux trains pourront se voir et se parler, lors même que les vitesses a, b seraient très-grandes.

3° Quand les deux trains marchent en sens contraire, la vitesse apparente du convoi B devient $b + a$: les phénomènes apparents sont les mêmes que si un train C, animé de la vitesse $b + a$, passait devant un observateur immobile. On comprend dès lors la difficulté qu'éprouvent les voyageurs placés dans l'un des trains à voir nettement les autres voyageurs. On comprend aussi pourquoi la rencontre de deux convois, lancés à grande vitesse, a toujours des suites si terribles.

4° On a vu, dans la *Cosmographie*, que la preuve la plus décisive du mouvement de translation de la Terre, c'est-à-dire l'*aberration des étoiles*, est un mouvement apparent. On a vu aussi que les phénomènes du mouvement diurne sont de simples apparences, dues au mouvement de rotation de la Terre, etc.

Résumé.

La cinématique est la science du mouvement considéré indépendamment des causes qui le produisent.

Le mouvement est dit uniforme quand le point mobile décrit des espaces égaux dans des temps égaux.

Lorsque le mouvement est uniforme, on appelle vitesse l'espace parcouru dans l'unité de temps.

Un mouvement varié est celui qui n'est ni uniforme ni composé de mouvements uniformes.

La trajectoire étant connue, le mouvement est déterminé si l'on donne la relation qui existe entre l'espace et le temps.

La vitesse moyenne, dans un mouvement composé de mouvements uniformes, est égale à la moyenne des vitesses.

En général, on appelle vitesse du mobile, au bout du temps t, la limite vers laquelle tend la vitesse moyenne, lorsque les accroissements de l'espace et du temps tendent vers zéro.

Un mouvement est dit accéléré ou retardé, selon que sa vitesse augmente ou diminue avec le temps.

Si la vitesse augmente ou diminue de quantités égales dans des temps égaux, on dit que le mouvement est uniformément varié.

Dans tout mouvement rectiligne, uniformément varié, l'accélération est égale à l'accroissement de la vitesse, divisé par l'accroissement du temps.

Si l'on compte les temps à partir de la position initiale du mobile, et si la vitesse initiale est nulle, les formules du mouvement uniformément accéléré sont :

$$x = \frac{1}{2}ct^2, \quad v = ct.$$

Ces formules prouvent les trois lois suivantes :

1° La vitesse acquise est proportionnelle au temps ;

2° L'espace parcouru est proportionnel au carré du temps ;

3° La vitesse acquise à la fin de la première unité de temps est double de l'espace parcouru pendant cette unité de temps.

Ces lois sont celles qui président au mouvement des corps pesants tombant librement dans le vide.

Dans le cas de la pesanteur, la valeur de la constante c est $g = 9^{m},80896$.

En même temps, l'expression de la vitesse due à la hauteur h est $v = \sqrt{2gh}$.

Dans tout mouvement varié (mais rectiligne), l'accélération au bout du temps t est la limite vers laquelle tend l'accélération moyenne $\frac{v_1 - v}{t_1 - t}$, lorsque les accroissements $v_1 - v$ et $t_1 - t$ tendent vers zéro.

On dit qu'un corps solide est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe, quand tous ses points décrivent des circonférences situées dans des plans perpendiculaires à l'axe, et ayant leurs centres sur cet axe.

Toutes les fois qu'un corps solide renferme deux points fixes, le seul mouvement qu'il puisse prendre est un mouvement de rotation autour de la droite qui les joint.

Quand un corps solide tourne autour d'un axe, tous ses points décrivent, en même temps, des arcs semblables.

Les vitesses des différents points sont proportionnelles aux rayons des circonférences qu'ils décrivent.

La vitesse angulaire, dans un mouvement de rotation quelconque, est la vitesse des points situés à une distance de l'axe égale à l'unité de distance.

La vitesse d'un point quelconque est égale à la vitesse angulaire, multipliée par la distance de l'axe au point.

Quand la vitesse angulaire est constante, le mouvement de rotation est uniforme.

Si un corps M change de situation par rapport à divers corps A, B, C, ..., son mouvement absolu est une combinaison de son mouvement relatif et du mouvement des corps A, B, C, ...

La composition des mouvements peut toujours être réduite à la composition de deux mouvements.

Le mouvement résultant de deux mouvements rectilignes et uniformes est également rectiligne et uniforme.

La vitesse du mouvement rectiligne uniforme résultant de deux mouvements rectilignes uniformes est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent, en grandeur et en direction, les vitesses des mouvements composants.

Plus généralement, la résultante d'un nombre quelconque de vitesses est représentée, en grandeur et en direction, par le dernier côté d'un polygone fermé dont les autres côtés sont égaux et parallèles aux droites qui représentent les vitesses composantes, en grandeur et en direction.

En particulier, la vitesse résultante de trois vitesses non situées dans un même plan est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélipipède construit sur les droites qui représentent, en grandeur et en direction, les vitesses composantes.

On peut se proposer de décomposer une vitesse donnée. En général, ce problème est indéterminé.

Connaissant les mouvements absolus de deux corps, on peut se proposer de trouver le mouvement apparent de l'un d'eux (par rapport à l'autre).

Lorsque les deux premiers mouvements sont rectilignes et uniformes, le troisième est rectiligne et uniforme.

Le mouvement apparent d'un corps n'est que son mouvement relatif, l'observateur étant pris pour point de repère.

Pour trouver le mouvement apparent d'un point matériel, on imprime, à ce point et à l'observateur, un mouvement commun, égal et contraire à celui de l'observateur.

La vitesse apparente d'un point matériel est la résultante de sa vitesse absolue et d'une vitesse égale et parallèle à celle de l'observateur, mais dirigée en sens contraire.

La considération des mouvements apparents peut servir à rendre compte d'une foule de phénomènes.

CHAPITRE VI.

Loi de l'inertie (172-175). — Loi des mouvements relatifs* (186, 187). — On en déduit qu'une force constante, agissant sur un point matériel qui part du repos ou qui est animé d'une vitesse initiale de même direction que la force, lui imprime un mouvement uniformément varié (177-180). — Réciproque (181). — Deux forces constantes sont proportionnelles aux accélérations qu'elles produisent, en agissant séparément sur un même point matériel qui part du repos, ou qui est animé d'une vitesse initiale de même direction que la force (188, 189). — De la masse (190). — Sa mesure au moyen du poids (191, 192).

De l'inertie.

172. Principe fondamental. *Un corps ne peut modifier, de soi-même, son état de repos ou de mouvement.*

Une expérience de tous les instants met hors de doute la première partie de cette proposition. Par exemple, si j'ai posé un livre sur ma table, il y restera jusqu'à ce qu'*une cause étrangère* quelconque lui fasse occuper un autre lieu.

La seconde partie du principe n'est pas aussi évidente. On pourrait même être tenté de croire que les corps ont une propension naturelle à modifier leur état de mouvement. Ainsi, quand on fait rouler les billes sur un billard, leurs vitesses respectives diminuent de plus en plus, et bientôt elles s'arrêtent. Ainsi encore, quand on lance une pierre, on reconnaît qu'au lieu de se mouvoir indéfiniment dans la direction qu'on lui avait imprimée, elle décrit dans l'air une trajectoire à peu près parabolique, et finit par rencontrer la surface de la Terre.

Avec un peu d'attention, on se convainc que ces *altérations* de mouvement sont constamment dues à des causes étrangères au mobile. Dans le cas de la bille, ces causes étrangères sont le *frottement* sur le drap qui recouvre le billard, et aussi la *résistance de l'air ;* dans le cas de la pierre lancée, la direction et la grandeur de la vitesse sont, à chaque instant, modifiées par la *résistance de l'air* et l'*attraction de la Terre.*

En effet, si le drap du billard est de plus en plus fin, si même on le remplace, d'abord par une plaque de marbre, ensuite par une glace, on reconnaît que le temps au bout duquel la bille

* On admet ces deux lois comme résultats de l'expérience.

s'arrête croît de plus en plus, la vitesse d'impulsion restant la même. S'il était possible de jouer dans le vide*, ce temps serait beaucoup plus long.

D'un autre côté, une balle de plomb, lancée horizontalement par la main d'un homme, va tomber plus loin que si elle était lancée par la main d'un enfant; et, si elle est mise en mouvement au moyen d'un pistolet ou d'un fusil, elle va tomber bien plus loin encore. Ainsi, *plus la vitesse initiale est grande, plus le mouvement tend à être rectiligne et uniforme.* Ce résultat se comprend sans peine, si l'on admet que les causes d'altération sont celles que nous avons dites; il serait tout à fait inexplicable, si l'on prétendait qu'elles sont inhérentes à la balle.

173. D'après ces considérations, nous admettrons les deux propositions suivantes, qui ne sont que le développement du principe fondamental, et qui servent de base à la Mécanique :

1° *Un corps en repos demeure éternellement en repos, à moins qu'il ne soit mis en mouvement par quelque cause étrangère ;*

2° *Un corps en mouvement conserve éternellement ce mouvement avec la même direction et la même vitesse, à moins qu'il ne soit troublé par quelque cause étrangère.*

174. Cette propriété en vertu de laquelle tout corps persiste dans son état, que ce soit l'état de repos ou de mouvement, est ce qu'on appelle l'*inertie de la matière,* ou simplement l'*inertie***.

175. L'inertie peut servir à expliquer divers phénomènes.

1° Lorsqu'on frappe le manche d'un outil contre un corps fixe, l'outil s'enfonce dans le manche : cela tient à ce que son mouvement continue après que celui du manche a cessé ;

2° Réciproquement, si l'on frappe sur le manche, l'outil, *en vertu de l'inertie,* reste en repos ou se meut lentement, et s'enfonce dans le manche ;

* Voyez la *Physique.*

** « Ce terme d'inertie a d'abord été introduit dans la philosophie par ceux qui soutenaient que tout corps avait un penchant pour le repos. Ils envisageaient les corps comme des hommes paresseux, qui préfèrent le repos au travail, et attribuaient aux corps une horreur pour le mouvement, semblable à celle que les hommes paresseux ont pour le travail, le terme d'inertie signifiant à peu près la même chose que celui de paresse. » (Euler, *Lettres à une princesse d'Allemagne.*)

3° Si une balle de plomb est lancée, avec une arme à feu, contre un carreau de vitre suspendu par une ficelle, elle y fait une ouverture circulaire ; on attribue ce phénomène à l'inertie de la partie du carreau qui n'est pas rencontrée par la balle ;

4° Au moment où on lâche les deux fils d'une fronde, la pierre, en vertu de son inertie, s'échappe suivant la tangente au cercle qu'elle décrivait ;

5° Lorsqu'un cheval lancé au galop vient à s'arrêter brusquement, il peut arriver que le cavalier, encore animé de la vitesse qu'il partageait avec sa monture, soit lancé par-dessus la tête de l'animal ;

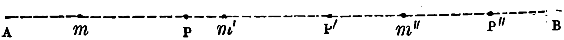
6° Quand on saute d'un wagon tandis que le train est en marche, on s'expose à être jeté sur le sol dans le sens du mouvement du train, parce qu'à l'instant où les pieds sont arrêtés par leur contact avec le sol, le corps possède encore une partie de sa vitesse primitive. Il y a plus : si cette vitesse est considérable, le choc des pieds contre le sol peut, en se transmettant au cerveau, déterminer la mort.

Production du mouvement par les forces.

176. Principe expérimental. *Une force agit sur un point matériel en mouvement comme elle agirait s'il était en repos.*

Il est difficile d'expliquer, *à priori*, le sens exact et la portée de cette proposition, qui constitue un véritable *postulatum* de mécanique, ou une *demande*. L'application suivante servira à la faire comprendre, au moins dans un cas particulier.

177. Théorème. — *Une force constante* F, *appliquée à un point matériel* m *en repos, lui imprime un mouvement rectiligne uniformément accéléré.*



Pour fixer les idées, admettons que le point matériel m soit une parcelle de fer, et que la force F soit un aimant, supposé *concentré* en son pôle P. Si l'aimant restait en repos, l'intensité de la force *attractive* F croîtrait rapidement à mesure que la distance mP diminuerait. Pour qu'il n'en soit pas ainsi, c'est-à-dire pour que la force soit *constante*, aussi bien en *intensité* qu'en *direction*, faisons *reculer* le pôle P le long de la droite AmPB, à mesure que la parcelle de fer avance, de manière à rendre invariable la distance entre le point attirant et le point attiré. Soient, au bout d'un temps quelconque θ, m' et P′ les positions de ces deux points, et β leur vitesse commune, c'est-à-dire la *vitesse acquise* par le point matériel, sous l'influence de la force F. Si, à partir de ce temps θ, on supprimait brusquement celle-ci, en enlevant l'aimant, ou en le neutralisant par un aimant égal et de polarité contraire, le mouvement du point matériel deviendrait, à l'instant même, rectiligne et uniforme (173, 2°). Mais, puisque nous n'avons rien changé aux positions respectives de l'aimant et de la molécule de fer, celle-ci sera animée, à la fin du temps 2θ, de la vitesse β qu'elle a conservée en vertu de son inertie, et de la vitesse β que l'aimant lui a fait acquérir, conformément au principe précédent, pendant le deuxième intervalle de temps θ : sa vitesse totale sera donc 2β. De même, à la fin du temps 3θ, la vitesse du point matériel se composera de 2β, augmentée de la vitesse β due à l'action de la force F, pendant le troisième intervalle de temps θ. En continuant de la même manière, on voit qu'à la fin du temps $n\theta$, la vitesse sera devenue $n\beta$. Le mouvement que nous considérons est donc tel, que la vitesse acquise par le mobile croît proportionnellement au temps : c'est-à-dire qu'il est uniformément accéléré (140).

178. *Remarque.* — Si l'on remplace $n\theta$ par t, on aura, pour expression de la vitesse,

$$v = n\beta = \frac{t}{\theta}\beta;$$

ou, en appelant b le rapport de β à θ :

$$v = bt.$$

Cette formule est précisément celle du mouvement uniformément varié (140), en supposant que le mobile n'ait pas eu de vitesse initiale.

179. Reprenons l'exemple ci-dessus, et supposons que la parcelle de fer, au moment où elle est exposée à l'action de l'aimant, soit déjà animée d'une vitesse initiale a. *Supposons, de plus, que la force* F *agisse dans la direction de cette vitesse initiale.* Alors, si nous répétons les raisonnements précédents, nous trouverons que la vitesse du mobile, au bout du temps t, est donnée par la formule

$$v = a + bt.$$

Conséquemment, *une force constante* F, *appliquée à un point matériel animé d'un mouvement rectiligne uniforme, et agissant suivant la droite que décrit ce point, lui imprime un mouvement uniformément varié.*

180. *Remarque.* — Le mouvement est *uniformément accéléré* ou *uniformément retardé*, suivant que la force, supposée *attractive*, agit dans le sens de la vitesse primitive ou dans le sens directement opposé.

181. Théorème. *Si un point matériel est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié, il est soumis à l'action d'une force constante.*

Pour démontrer cette proposition, réciproque de la précédente, il suffit de faire les remarques suivantes :

1° Le mouvement considéré, n'étant pas rectiligne uniforme, est dû à une force qui agit *actuellement* sur le mobile (173, 2°);

2° Quand une force n'agit pas dans le sens de la vitesse initiale, ou dans le sens de la vitesse à un instant *déterminé*, le mouvement n'est pas *rectiligne;*

3° Lors même qu'une force serait, à chaque instant, dirigée dans le sens de la vitesse initiale du mobile, si elle n'est pas constante en intensité, les accroissements de vitesse, correspondant à des temps égaux, seraient inégaux; donc le mouvement produit par cette force ne serait pas uniformément varié.

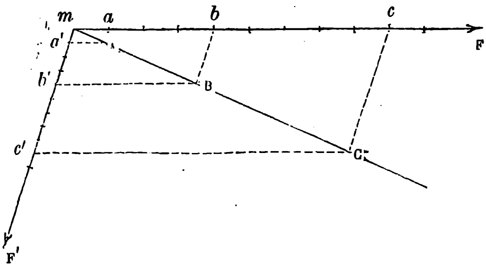
182. Principe expérimental. *Si plusieurs forces sont appliquées à un point matériel, chacune agit comme si les autres n'existaient pas.*

Pour faire comprendre, au moins dans un cas très-simple, l'énoncé de ce principe général, nous l'appliquerons à la démonstration du théorème suivant, analogue au *parallélogramme des vitesses* (161).

183. *Deux forces* F, F', *constantes en grandeur et en direction, appliquées à un point matériel* m *en repos, lui impriment un mouvement rectiligne uniformément accéléré, résultant des mouvements rectilignes uniformément accélérés dus aux deux forces prises isolément.*

Supposons que les forces F, F' soient des *attractions* émanant de deux centres placés *à l'infini*, l'un dans la direction

mF, l'autre dans la direction mF′ *; soient a, b, c,... les positions que prendrait le point matériel au bout de une, deux, trois,... unités de temps, si la force F′ n'existait pas; soient, semblablement, a', b', c',... les positions occupées par le mobile aux mêmes époques, si la force F était supprimée. D'après ce que nous avons supposé sur les deux forces, leurs *directions* sont parallèles à mF et mF′, quelle que soit la position du point matériel. Or, le principe énoncé ci-dessus signifie simplement que, sous l'action simultanée des deux forces, le mouvement du point, *estimé* parallèlement à la direction de l'une d'elles, est indépendant de l'autre. Il faut donc, pour obtenir les positions effectives du mobile au bout des temps considérés, achever les parallélogrammes maAa', mbBb', mcCc',.... On conclut de cette construction, absolument comme dans le n° 156: 1° que la trajectoire mABC... est rectiligne; 2° que les espaces mA, mB, mC,... croissent comme les carrés des temps; 3° que *l'accélération* RÉSULTANTE *est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent, en grandeur et en direction, les accélérations* COMPOSANTES.

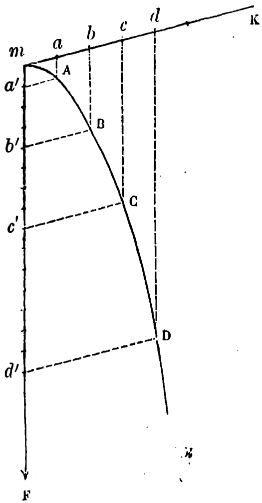


184. Remarque. — *Lorsque plusieurs forces constantes sont appliquées à un point matériel, dans la direction de la vitesse initiale, l'accélération du mouvement uniformément varié résultant est égale à la somme algébrique des accélérations des mouvements composants.*

185. Après le cas, difficilement observable, de deux forces constantes agissant sur un point matériel en repos, considé-

* Cette hypothèse serait à peu près réalisée dans le cas d'un aérolithe sollicité par la Terre et par la Lune. Seulement l'*infini* est mis ici à la place de *très-loin*.

rons le mouvement déterminé par une force constante F, agissant sur un point m animé d'une vitesse initiale non dirigée suivant la force; et supposons encore le centre d'attraction placé à l'infini.



mK étant la direction de la vitesse initiale, soient a, b, c, d,... les positions qu'occuperait le mobile après une, deux, trois,... unités de temps, si la force F était supprimée, et a', b', c', d',... celles qu'il aurait occupées s'il n'avait pas eu de vitesse initiale. Le principe énoncé ci-dessus (176) signifie que le mouvement du mobile, *estimé* parallèlement à la vitesse initiale, est indépendant de la force F, *et vice versa*. La trajectoire mABC... se construit donc aisément par points, au moyen des parallélogrammes maAa', mbBb' *.....

186. *Loi des mouvements relatifs.* — Le principe *expérimental* de l'*indépendance des effets des forces,* et sa corrélation avec le principe *géométrique* de la *composition des mouvements,* ont été découverts par Galilée. La *loi* à laquelle le conduisit l'étude attentive des divers phénomènes de mouvement peut être ainsi formulée : *Les mouvements relatifs de plusieurs corps ne sont pas altérés, quand on imprime à tout le système un mouvement commun de translation.*

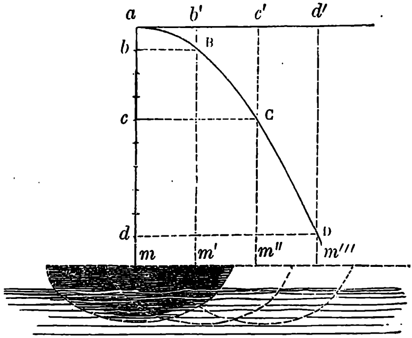
187. Les faits suivants peuvent servir à prouver la loi de Galilée :

1° Supposons qu'un matelot laisse tomber une balle du haut d'un mât, tandis que le vaisseau est en mouvement.

Avant que le matelot eût lâché la balle, celle-ci participait au mouvement du vaisseau, mouvement que nous supposons rectiligne et uniforme. Par conséquent, si elle n'était sollicitée

* Cette trajectoire est une *parabole*, parce que *les carrés des* ORDONNÉES ma, mb, mc,. . *sont proportionnels aux* ABSCISSES *correspondantes* ma', mb', mc',...

par la pesanteur, la balle, placée d'abord en a, parcourrait uniformément la droite horizontale $ab'c'd'$, *en vertu de l'inertie.*



D'un autre côté, si le bâtiment était en repos, le mobile tomberait le long du mât am, en parcourant des espaces proportionnels aux carrés des temps (140). La composition de ces deux mouvements donne, comme dans la question précédente, la trajectoire véritable aBCD..., laquelle est une parabole. Mais comme le vaisseau continue à se mouvoir avec sa vitesse primitive, il s'ensuit que les positions successives $b'm'$, $c'm''$, $d'm'''$,... du mât, concordent avec les positions B, C, D,... de la balle : *celle-ci tombe donc au pied du mât.* C'est ce que les Coperniciens niaient, et que Galilée démontra.

2° A cause des grandes dimensions de la Terre, les points de sa surface, situés en un même lieu, peuvent être regardés comme ayant des vitesses égales et parallèles. Conséquemment, les efforts musculaires que nous exerçons pour agir d'une manière quelconque, soit isolément, soit collectivement, ne diffèrent pas de ce qu'ils auraient été si notre planète fût restée en repos dans l'univers.

3° Dans un bateau qui suit, sans secousse, le cours d'une rivière, on peut écrire, jouer au billard, etc., absolument comme sur la *terre ferme.*

4° L'air contenu dans un wagon fermé a souvent, par rapport à l'air extérieur, une vitesse relative de 60 kilomètres par heure. Néanmoins, le mouvement de cette colonne d'air n'influe ni sur la direction du fil à plomb, ni sur les oscillations d'un pendule qui serait placé dans l'intérieur du wagon.

5° Si un voyageur qui parcourt, sur un chemin de fer, environ 10 mètres par seconde, lance verticalement, à une hauteur de 6 mètres, un corps quelconque, sa main pourra recevoir le projectile, quoique, pendant les 2 secondes qu'auront duré l'ascension et la descente, elle ait été transportée à 20 mètres du point de départ.

Comparaison des forces constantes.

188. *Deux forces constantes* F, F′, *appliquées successivement à un même point matériel* m, *dans la direction de sa vitesse initiale, sont entre elles comme les accélérations* w, w′ *qu'elles produisent.*

Supposons qu'une même force f puisse être contenue n fois dans F et n' fois dans F′ *. Cette force f, appliquée au point matériel m, lui imprimerait un mouvement uniformément varié (177): soit υ l'accélération du mouvement, c'est-à-dire l'augmentation de vitesse dans l'unité de temps. Des forces égales à $2f$, $3f$,... appliquées au même point, donneraient lieu à des mouvements de même nature, dont les accélérations seraient 2υ, 3υ,... (182). Dès lors, puisque

$$F = nf, \qquad F' = n'f,$$

on doit avoir

$$w = n\upsilon, \qquad w' = n'\upsilon\,;$$

d'où

$$\frac{F}{F'} = \frac{w}{w'}. \qquad (1)$$

189. Remarque. — *Si le point matériel* m *n'a pas de vitesse initiale, les forces* F, F′ *sont entre elles comme les vitesses* v, v′ *qu'elles produisent dans des temps égaux.*

* Quand on dit qu'une force *f est contenue n* fois dans une autre force F, on veut exprimer que celle-ci *équivaut* à *n* forces égales à la première. Or, on conçoit qu'en descendant à une force *f suffisamment petite,* il soit toujours possible d'arriver à un *sous-multiple* commun de deux forces quelconques F, F′, sinon exactement, du moins avec une approximation plus que suffisante. Par exemple, si l'on veut comparer la force de traction d'un homme à celle d'un cheval, on pourra essayer d'abord, comme terme de comparaison, la force d'un enfant. Admettons que l'expérience apprenne qu'un homme est plus fort que 3 enfants réunis et plus faible que 4 : l'unité essayée étant trop grande, on aura recours, par exemple, à la force d'un jeune chien; et ainsi de suite.

En effet, les formules

$$v = wt, \qquad v' = w't,$$

donnent

$$\frac{v}{v'} = \frac{w}{w'};$$

d'où, à cause de la proportion ci-dessus,

$$\frac{F}{F'} = \frac{v}{v'}.$$

De la masse.

190. La relation fondamentale (1) donne

$$\frac{F}{w} = \frac{F'}{w'};$$

puis, si l'on considère successivement des forces F, F′, F″,... en nombre quelconque :

$$\frac{F}{w} = \frac{F'}{w'} = \frac{F''}{w''} = \dots \qquad (2)$$

Ainsi, *quand un même corps est sollicité successivement par diverses forces constantes, si l'on divise le nombre qui représente la force par le nombre qui représente l'accélération correspondante, on obtient un quotient constant.*

Ce quotient est ce qu'on appelle la *masse* du corps.

191. Considérons le cas particulier où un corps, du poids de p kilogrammes, serait abandonné librement à l'action de la pesanteur, dans le vide : il prendra un mouvement uniformément varié, dont l'accélération, évaluée en mètres, sera le nombre $g = 9{,}80896$. Nous aurons donc, en appelant m la masse du corps, et en observant que la force qui le sollicite est précisément son poids :

$$\frac{p}{g} = m, \qquad (3)$$

ou

$$p = mg. \qquad (4)$$

Donc *la masse d'un corps est le quotient de son poids* p *par la gravité* g.

192. *Remarque.* — Dans les relations (3) ou (4), supposons $m = 1$; nous aurons

$$p = g = 9{,}80896.$$

Ainsi, *la masse prise pour unité est celle d'un corps qui pèse* 9 808,96 *grammes.*

Résumé.

Un corps ne peut modifier, de soi-même, son état de repos ou de mouvement.

Plus la vitesse initiale est grande, plus le mouvement tend à être rectiligne et uniforme.

La propriété en vertu de laquelle tout corps persiste dans son état, est l'inertie de la matière, ou simplement l'inertie.

L'inertie explique divers phénomènes.

Une force agit sur un point matériel en mouvement, comme elle agirait s'il était en repos.

Une force constante, appliquée à un point matériel en repos, lui imprime un mouvement rectiligne uniformément accéléré. — La réciproque est vraie.

Si plusieurs forces sont appliquées à un point matériel, chacune agit comme si les autres n'existaient pas.

Deux forces, constantes en grandeur et en direction, appliquées à un point matériel en repos, lui impriment un mouvement rectiligne uniformément accéléré, résultant des mouvements rectilignes uniformément accélérés dus aux deux forces prises isolément.

Une force constante, appliquée à un point matériel animé d'une vitesse non dirigée suivant la force, détermine une trajectoire parabolique.

Les mouvements relatifs de plusieurs corps ne sont pas altérés, quand on imprime à tout le système un mouvement commun de translation.

Deux forces constantes F, F′, appliquées successivement à un même point matériel *m*, dans la direction de la vitesse initiale, sont entre elles comme les accélérations *w*, *w′* correspondantes.

Si le point *m* n'a pas de vitesse initiale, les forces F, F′ sont entre elles comme les vitesses *v*, *v′* qu'elles produisent dans des temps égaux.

La masse d'un corps est le quotient du nombre qui représente la force constante appliquée au corps, par le nombre qui représente l'accélération correspondante.

La masse prise pour unité est celle d'un corps qui pèse 9 808,96 grammes.

CHAPITRE VII.

Notions sur le travail des forces.

Ce qu'on appelle travail d'une force constante appliquée à un point dont le déplacement est rectiligne (196-207). — Unité de travail (208-210). — Faire voir que, dans les machines simples, à l'état de mouvement uniforme, et sollicitées uniquement par une puissance et une résistance, le travail moteur est égal au travail résistant* (217). — Influence des résistances dites passives (213). — Dans la pratique, le travail moteur est toujours plus grand que le travail résistant utile (221).

Préliminaires.

193. *Objet principal des forces.*—Les forces dont l'industrie fait usage ont toujours pour objet, non-seulement de vaincre certaines résistances, mais encore et surtout, de faire mouvoir les corps au moyen desquels ces résistances se manifestent. Ainsi, dans les constructions, la force musculaire de l'homme et des animaux est employée à soulever et transporter des fardeaux, à pousser des brouettes, à scier de la pierre ou du bois; dans les moulins à eau, la pesanteur, par l'intermédiaire d'une roue à palettes, fait tourner la meule et écrase le blé; dans les locomotives, la force élastique de la vapeur d'eau détruit le frottement qui s'exerce entre les roues et les rails, et, par suite, fait marcher le convoi, etc. Dans ces exemples, et dans tous ceux que l'on peut imaginer, l'*effet utile* produit se compose constamment d'une *résistance vaincue* et d'un *point d'application déplacé.*

194. *Forces perdues.* — D'après cela, une force à laquelle aucune résistance ne s'oppose, ou une force qui ne produit pas de mouvement, ne peut être d'aucune utilité dans la pratique: on lui donne le nom de *force perdue*. Il est facile de justifier cette expression : un ouvrier qui pousserait un mur solidement établi, ou qui ferait tourner, *à vide,* une manivelle, n'aurait droit à aucun salaire, parce que sa force musculaire serait, dans le langage habituel ou dans le langage scientifique, absolument perdue.

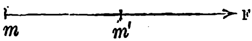
* Dans le cas de la poulie mobile, on supposera les cordons parallèles.

195. Puisqu'une force n'est utile que si elle fait mouvoir le point d'application d'une résistance, le *loyer* d'un moteur, animé ou inanimé, doit dépendre de ces deux éléments : *intensité de la résistance, espace décrit par son point d'application.* On va voir que, dans la plupart des cas, il est proportionnel à leur produit.

Considérons l'exemple très-simple d'un manœuvre hissant un bloc de pierre à l'aide d'une poulie. Pour que le bloc se meuve uniformément, il suffit (102) que l'effort musculaire développé par l'ouvrier soit égal au poids P du fardeau. D'un autre côté, le temps pendant lequel cet effort doit être soutenu croît comme la hauteur h à laquelle la pierre doit être amenée. On voit donc que le *travail exécuté* doit être supposé proportionnel au produit Ph, puisqu'il en serait ainsi du salaire.

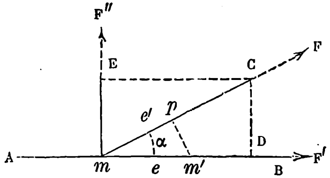
Définition du travail.

196. *Force constante ; mouvement rectiligne.* — Soit un point matériel m décrivant une droite AB, sous l'action d'une force constante F, dirigée suivant AB. Dans ce cas, on appelle *travail dynamique* (ou simplement *travail*) de la force F, *le produit* T *du nombre* F *qui représente l'intensité de celle-ci, par le nombre* e *qui représente l'espace* mm′ *parcouru par le point d'application* m. Par exemple, le travail T d'un poids P, tombant verticalement d'une hauteur h, est



$$T = \mathcal{T}P = Ph.$$

197. Si la force F, constante en longueur et en direction, est oblique à la droite AB suivant laquelle se meut son point d'application m, *le travail* de cette force *est le produit du nombre* e *qui représente l'espace* mm′ *parcouru par le point d'application, par le nombre* F′ *qui représente la force* F ESTIMÉE *suivant cette droite* mm′. Il est aisé de voir que cette définition s'accorde avec la première.



Supposons, en effet, que m soit un *anneau* dans lequel passe une *tige* fixe AB. Décomposons F en une force F′ dirigée suivant AB, et en une force F'' perpendiculaire à AB. On peut admettre que cette dernière composante est *détruite par la résistance de la tige,* ou qu'elle rentre dans la catégorie des *forces perdues* (194).

L'effet de la force F se réduisant à celui de la composante F', il y a donc lieu d'appeler travail de F le produit eF', que nous savons être le travail de F'.

198. *Remarques.* — I. La composante F' a pour valeur $F\cos\alpha$ (40). D'un autre côté, si l'on abaisse $m'p$ perpendiculaire à mC, on a, pour l'*espace estimé suivant la direction de la force,* $e' = e\cos\alpha$. Conséquemment, le travail de F est susceptible des trois formes suivantes:

$$\mathfrak{T}F = F'e, \qquad \mathfrak{T}F = Fe\cos\alpha, \qquad \mathfrak{T}F = Fe'.$$

II. La deuxième formule conduit à cette définition, qui comprend les deux premières : *Le travail d'une force constante, agissant sur un point qui se meut en ligne droite, est le produit de la force par le chemin parcouru et par le cosinus de l'angle que fait la direction de la force avec celle du chemin.*

III. Les facteurs F, e étant supposés positifs, le produit $Fe\cos\alpha$ est positif ou négatif suivant que l'angle α est aigu ou obtus. Dans le premier cas, la force F accélère le mouvement; dans le second, elle le ralentit.

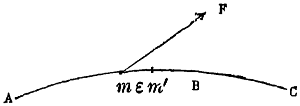
IV. Si l'angle α est droit, $\cos\alpha = 0$, et $\mathfrak{T}F = 0$; ce qui doit être (194).

199. Le travail est dit *moteur* ou *résistant*, suivant que la force agit dans le sens du mouvement ou dans le sens opposé. Ainsi quand un corps a été lancé verticalement de bas en haut, le travail de la pesanteur est *résistant* pendant que le corps s'élève ; il devient *moteur* dès que le corps descend. Les raisons de ces dénominations sont évidentes.

200. Remarque. — *Le travail est moteur ou résistant suivant qu'il est positif ou négatif.*

Travail d'une force quelconque.

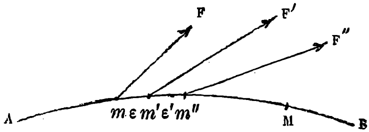
201. *Travail élémentaire d'une force quelconque.* — Soit à présent une force quelconque F, agissant sur un point dont la trajectoire est ABC. Soient m, m', deux positions de ce point, assez rapprochées pour que le petit arc mm' puisse être regardé comme confondu avec sa corde, et



que la force F ait pu être supposée constante, en grandeur et en direction, pendant le temps employé à décrire mm'. On appelle *travail élémentaire* de la force F, conformément à la définition ci-dessus, *le produit du nombre* ε *qui représente l'élément de chemin, par le nombre* F cos α *qui représente la force* F *estimée suivant cet élément* *, ou, en termes plus simples :

Le travail élémentaire d'une force est le produit de l'élément de chemin par la projection de la force sur cet élément **.

202. *Travail total.* — La somme des travaux élémentaires d'une force variable F, ou plutôt *la limite vers laquelle tend cette somme* quand l'élément ε diminue jusqu'à zéro, est ce qu'on appelle *travail total* de cette force. Ainsi, en supposant que le point matériel se soit transporté de m en M dans le temps θ, de manière à occuper successivement les positions m, m', m'',..., on aura, en appelant F, F', F'',... les intensités correspondantes de la force, et α, α', α'',... les angles Fmm', F'$m'm''$,...



$$\mathfrak{T}F = lim. (F\varepsilon \cos\alpha + F'\varepsilon' \cos\alpha' + F''\varepsilon'' \cos\alpha'' + \ldots).$$

* Cette considération du travail élémentaire d'une force, due à un savant géomètre, nous semble manquer de netteté. Il serait très-facile de définir *le travail total* par sa *dérivée* relative au temps. En effet, on peut démontrer que cette dérivée est égale à Fv cos α, v étant la vitesse au bout du temps t.

** Dans cet énoncé, il est sous-entendu que l'on aura égard au sens dans lequel la force agit et au sens du mouvement. Suivant que l'*angle formé par ces deux directions* est aigu ou obtus, le travail est positif ou négatif.

203. Corollaires. — I. *Une force constamment perpendiculaire à l'élément de chemin parcouru par son point d'application ne produit aucun travail.*

En effet, $\cos\alpha = 0$, $\cos\alpha' = 0$, etc.*.

II. *Si la force est constante, et qu'elle soit dirigée, à chaque instant, suivant la tangente à la trajectoire, le travail développé est égal au produit de la force par l'arc qu'a décrit le point d'application.* En effet,

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}F &= lim.\,(F\varepsilon + F\varepsilon' + F\varepsilon'' + \ldots)\\ &= F\,lim.\,(\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' + \ldots.)\\ &= Fe.\end{aligned}$$

III. En particulier, *le travail d'une force constante, appliquée tangentiellement à la circonférence d'une roue, est égal au produit de la force par l'arc parcouru.*

* Il semblerait, d'après cela, qu'un *manœuvre chargé d'un fardeau et marchant sur un terrain horizontal n'aurait droit à aucun salaire;* ce qui serait évidemment absurde. D'un autre côté, la plupart des praticiens évaluent à 97 kilogrammètres par seconde le *travail produit par un homme marchant sur un terrain horizontal sans fardeau.* Voici comment un illustre géomètre explique ce paradoxe et cette contradiction :

« Quand un homme transporte son propre poids, que j'appellerai Π, à une hauteur verticale h au-dessus de son point de départ, la quantité de travail produite est Πh...; mais *cette quantité donnerait une idée très-imparfaite des efforts musculaires qui ont été faits et de la force que cet homme a développée.* Il serait difficile d'en obtenir une mesure exacte; on peut seulement faire voir qu'*elle doit surpasser*, souvent de beaucoup, *la quantité précédente, qui serait nulle si la hauteur* h *était zéro,* quoique, certainement, *il y ait une quantité de travail* mécanique *correspondante à la marche d'un homme sur un plan horizontal.*

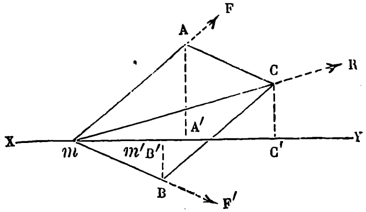
« Dans cette marche, je suppose que l'homme ait d'abord le pied gauche en avant du pied droit; son centre de gravité est alors abaissé, au-dessous de sa position naturelle, d'une quantité que je désignerai par ε. En s'appuyant sur son pied gauche et s'aidant du frottement de ce pied contre le sol, l'homme ramène son pied droit au niveau du pied gauche, puis le pied droit devance le pied gauche et va se poser sur le sol; ce qui fait un pas entier, composé de deux parties. Or, dans la première partie, l'homme soulève son centre de gravité de la hauteur ε, et produit par là une quantité de travail égale à $\Pi\varepsilon$; il imprime, au même instant, à ce point une vitesse horizontale, que je désignerai par a, à la fin du premier demi-pas; ce qui répond à une autre quantité de travail $\Pi\alpha$, en appelant α la hauteur due à la vitesse a.

« .... Je supposerai aussi que le second demi-pas a lieu en vertu de la vitesse acquise à la fin du premier et du poids du corps qui retombe sur le sol, de manière que, pendant le second demi-pas, l'homme

Travail d'un système de forces.

204. Théorème. *Le travail élémentaire de la résultante de plusieurs forces appliquées à un point matériel, est égal à la somme des travaux des composantes.*

Pour composer des forces F, F′, F″,... en nombre quelconque, appliquées à un point matériel, on peut chercher la résultante r de F et de F′, puis la résultante r' de r et de F″; et ainsi de suite. D'après cela, il suffit de démontrer la proposition dans le cas de deux forces F, F′, représentées par les côtés mA, mB du parallélogramme mACB.



Soit XY la droite que décrit, au moins pendant un temps très-court, le point d'application m : cette droite n'est pas nécessairement dans le plan du parallélogramme. Si nous abaissons sur XY les perpendiculaires AA′, BB′, CC′, nous aurons, pour les travaux élémentaires de F, de F′, et de la résultante R :

$$mm' \,.\, mC', \quad mm' \,.\, mA', \quad mm' \,.\, mB'.$$

Il s'agit donc de vérifier l'égalité

$$mm' \,.\, mC' = mm' \,.\, mA' + mm' \,.\, mB',$$

ou seulement celle-ci :

$$mC' = mA' + mB'.$$

n'exerce plus aucun effort, et que les vitesses verticale et horizontale, dont son centre de gravité se trouve encore animé à la fin du pas entier, soient détruites par le choc et le frottement de son pied droit contre le sol. Dans cette hypothèse, la quantité de travail de l'homme pendant le pas entier sera.... $\Pi(\varepsilon + \alpha)$.

« Il suit de là que, dans un nombre n de pas égaux, la quantité de travail d'un homme ou d'un animal, portant un fardeau et marchant sur une route horizontale, aura pour valeur $nK(\varepsilon + \alpha)$, en désignant par K son poids Π, augmenté de celui du fardeau. Si le poids total a été élevé verticalement à une hauteur h au-dessus du point de départ, il faudra ajouter Kh à la quantité $nK(\varepsilon + \alpha)$. » (Poisson, *Traité de Mécanique.*)

Sans altérer le sens, nous avons modifié le texte en quelques points, afin d'abréger.

Or, *les projections* mB', $A'C'$ *des deux droites* mB, AC, *égales et parallèles, sont égales* *. La relation précédente se réduisant à l'*identité* $mC' = mA' + A'C'$, le théorème est démontré.

205. *Remarque.* — Le théorème subsiste dans le cas où les forces deviennent parallèles.

206. Théorème. *Quand des forces* F, F', F'',... *appliquées à un corps solide, se font équilibre, la somme de leurs travaux élémentaires est constamment nulle.*

Reportons-nous au théorème et à la figure de la page 27, c'est-à-dire, substituons d'abord, au système proposé, trois résultantes partielles P, Q, R, appliquées en trois points A, B, C, et remplaçons ensuite ces forces P, Q, R par deux nouvelles forces S, T. Cela posé :

1° Le travail élémentaire de la force F est égal à la somme des travaux de ses composantes suivant mA, mB, mC.

2° Par suite, la somme des travaux élémentaires de toutes les forces F, F', F'',... est égale, soit à la somme des travaux élémentaires des trois forces P, Q, R, soit à la somme des travaux élémentaires des deux forces S, T.

3° Quand deux forces f, f' sont égales et directement opposées, la somme de leurs travaux élémentaires est nulle, car le binôme $f\varepsilon \cos \alpha + f'\varepsilon \cos \alpha'$ se réduit à

$$f\varepsilon\,[\cos \alpha + \cos (\pi - \alpha)] = 0.$$

207. *Remarques.* — I. Si, à chaque instant, la somme des travaux élémentaires de toutes les forces proposées est égale à zéro, il en sera de même pour la somme des *travaux totaux.* Ainsi,

$$\mathfrak{T}_F + \mathfrak{T}_{F'} + \mathfrak{T}_{F''} + \ldots = \mathfrak{T}_S + \mathfrak{T}_T = 0.$$

II. Le théorème précédent renferme le *principe de la transmission du travail*, que nous démontrerons tout à l'heure.

Unité de travail.

208. *Kilogrammètre.* — La relation entre la force F, l'espace e et le travail T est, comme on vient de le voir,

$$T = Fe.$$

* Pour abréger, nous admettons ce petit théorème de géométrie, dont la démonstration ne présente aucune difficulté.

Si l'on prend $F = 1$, $e = 1$, on aura $T = 1$. Or, l'unité de force est le kilogramme, l'unité d'espace est le mètre; par conséquent, *le travail pris pour unité est celui qui est nécessaire pour élever un kilogramme à un mètre de hauteur.* Cette unité est appelée *kilogrammètre.* On la représente par 1^{km}. Quand une force de 60 kilogrammes fait parcourir $3^{m},5$ au point d'application, le travail de cette force est

$$(60 \times 3,5) \text{ kilogrammètres} = 210^{km}.$$

209. *Cheval-vapeur.*—Le travail d'une force, tel qu'il vient d'être défini, est indépendant du temps pendant lequel agit la force. Dans les applications, il n'est plus permis de faire abstraction de cet élément; on conçoit, au contraire, que plus le temps pendant lequel le travail aura été produit sera court, plus le moteur employé devra être *payé.* On prend ordinairement, pour unité de *puissance dynamique,* un travail de 75^{km} effectué en une seconde. Cette unité, pour une raison qu'il n'est pas nécessaire d'indiquer ici, est ce qu'on appelle *cheval-vapeur.*

Si une machine a élevé 2 400 kilogrammes à une hauteur de 30 mètres en 48 secondes, elle a produit, pendant ce temps, un travail de $(2\,400 \times 30)$ kilogrammètres. Son travail serait donc, en une seconde, $\dfrac{2\,400 \times 30}{48}$ kilogrammètres $= 1\,500^{km}$.

Conséquemment, cette machine équivaut à $\dfrac{1500}{75} = 20$ *chevaux-vapeur.* C'est ce qu'on exprime ordinairement en disant que la machine a une force de 20 chevaux*.

En général, si un moteur est capable d'élever, en n secondes, un poids de P kilogrammes à une hauteur de h mètres, la *force,* ou plutôt la *puissance dynamique* de ce moteur, évaluée en chevaux-vapeur, sera

$$D = \frac{Ph}{75n} = \frac{T}{75n}.$$

210. *Remarque.* — Un *cheval-vapeur* équivaut à peu près à 5,5 chevaux effectifs; c'est-à-dire qu'*il faudrait environ* 55 *chevaux pour élever, en une seconde, un poids de* 750 *kilogrammes à un mètre de hauteur.*

* Le mot *force* n'a plus ici sa signification habituelle; pour éviter toute ambiguïté, on devrait dire : *une machine de la puissance dynamique de* 20 *chevaux-vapeur.*

Du mouvement uniforme des machines.

211. Quand une machine part de l'état de repos, les parties qui la composent se meuvent d'abord avec lenteur, puis de plus en plus rapidement, et la vitesse de chacune atteint bientôt un certain maximum qu'elle ne peut dépasser, parce que les forces motrices dont on dispose sont nécessairement *finies* *. Arrivé à cet état régulier, l'appareil peut être considéré, à un instant quelconque, comme un système de corps qui se mouvraient en vertu seulement de leur inertie. *Les forces appliquées à la machine se font* donc *équilibre,* et, par conséquent, *la somme de leurs travaux est constamment nulle* (206).

212. Ces forces peuvent être réparties en trois groupes : 1° les *puissances* ou *forces motrices* ; 2° les *résistances extérieures* ou *résistances principales ;* 3° les *résistances intérieures* ou *résistances passives.*

Nous venons de parler des forces motrices et des résistances principales. Quant aux résistances passives, elles sont ordinairement de quatre espèces : 1° la *roideur des cordes ;* 2° les *frottements ;* 3° les *chocs qui déforment les pièces ou ébranlent le sol;* 4° la *résistance des milieux* dans lesquels fonctionne la machine.

213. *Remarque.* — Ces résistances passives, qui peuvent, dans certains cas, se réduire au frottement des pièces les unes sur les autres, naissent aussitôt que la machine commence à se mouvoir, et persistent pendant toute la durée du mouvement. Si donc on peut se représenter une machine à laquelle ne seraient appliquées, après la *mise en train,* ni forces motrices, ni résistances principales, on ne doit jamais faire abstraction des résistances passives, sous peine d'arriver à des conclusions très-éloignées de la vérité. C'est pour avoir ignoré cet axiome de la théorie des machines : *il n'y a pas de mouvement sans frottement,* que bien des personnes ont perdu leur temps à chercher le *mouvement perpétuel.*

* Cette proposition est une conséquence du *principe des forces vives,* principe dont nous ne pouvons parler ici.

Principe de la transmission du travail.

214. Une force motrice tend à accélérer la vitesse de son point d'application : le travail de cette force est donc positif (200). Au contraire, les résistances, soit extérieures, soit passives, produisent des travaux négatifs. D'après cela, si l'on représente par T_m la somme des travaux des forces motrices appliquées à une machine, par $-T_r$ et $-T_p$ les sommes des travaux dus aux résistances principales et aux résistances passives, on aura, pour toute la durée du mouvement uniforme de la machine, ou pour une partie quelconque de ce temps :

$$T_m - T_r - T_p = 0. \qquad (1)$$

En effet, cette équation exprime qu'il y a équilibre entre toutes les forces appliquées à la machine (206).

215. Le mouvement de la machine étant uniforme, la pression exercée, de dedans en dehors, en un point quelconque de l'*outil*, est égale et contraire à la résistance qu'éprouve ce point de la part du corps sur lequel agit la machine. Il résulte de là que le *travail résistant principal* $-T_r$ est égal et de signe contraire au travail produit par l'outil ; ce dernier, que l'on appelle *travail utile*, est donc exprimé par T_r. Or, l'équation (1) équivaut à

$$T_r = T_m - T_p. \qquad (2)$$

Ainsi, *dans toute machine à l'état uniforme, le travail utile est égal au travail moteur, diminué du travail dû aux résistances passives.*

216. S'il était possible de supprimer complétement ces dernières résistances, le travail utile serait égal au travail moteur, en sorte que la machine transmettrait intégralement, à l'outil, le travail des forces appliquées au récepteur ; mais, comme ces résistances existent par cela seul que la machine agit (213), on a nécessairement :

$$T_r < T_m. \qquad (3)$$

Ainsi, *le travail utile est toujours moindre que le travail moteur.*

217. Dans le cas des machines simples, il est facile de vérifier que, *abstraction faite des résistances passives, le travail moteur est égal au travail résistant :*

1° Soit, comme dans le n° 88, un levier ACB sollicité par une puissance P et une résistance Q, situées dans un même plan passant par le point fixe C. Nous avons trouvé la condition d'équilibre :

$$Pp = Qq. \qquad (1)$$

Si le levier tourne d'un petit angle ω autour d'un axe passant en C, et perpendiculaire au plan dont il vient d'être question, les extrémités A′, B′ des bras du levier décriront des arcs α, β déterminés par les relations (151),

$$\alpha = p\omega, \quad \beta = q\omega.$$

En vertu de ces valeurs, l'équation (1) devient

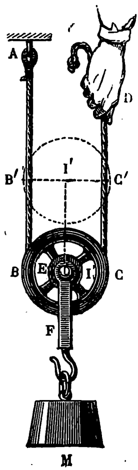
$$P\alpha = Q\beta.$$

Or, $P\alpha$ est le travail élémentaire de la puissance. De même $P\beta$ est, en valeur absolue, le travail élémentaire de la résistance; donc enfin

$$T_m = T_r.$$

2° Dans la poulie mobile, si les cordons AB, CD sont parallèles, on a (108)

$$P = \frac{1}{2} R. \qquad (2)$$



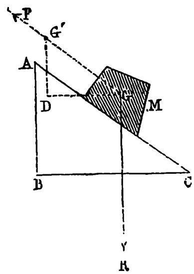
Mais, si le point d'application de P descend d'une longueur h, le point d'application de R s'élève de $\frac{h}{2}$ (103); donc

$$\mathfrak{T}P = Ph, \quad \mathfrak{T}R = R \cdot \frac{h}{2};$$

ou, à cause de l'égalité (1),

$$\mathfrak{T}P = \mathfrak{T}R.$$

3° Soit une *puissance* P, appliquée à un corps M dont le poids est R, posé sur un plan incliné ABC. Pour plus de simplicité, supposons que la force P soit parallèle à la ligne de plus grande pente CA, et que le corps se meuve, parallèlement à CA, avec une vitesse constante.



Si, en une seconde, par exemple, le centre de gravité G est venu en G', il se sera élevé d'une hauteur G'D déterminée par la proportion (119)

$$\frac{G'D}{GG'}=\frac{AB}{AC},$$

D'ailleurs, $$\mathfrak{T}.P = P.GG',$$

et, abstraction faite du signe,

$$\mathfrak{T}R = R.G'D.$$

Mais, pour qu'il y ait équilibre, on doit avoir (121)

$$\frac{P}{R}=\frac{AB}{AC},$$

ou

$$\frac{P}{R}=\frac{G'D}{GG'},$$

ou encore

$$P.GG' = R.G'D. \qquad (3)$$

Il résulte, de cette égalité,

$$\mathfrak{T}P = \mathfrak{T}R.$$

Impossibilité du mouvement perpétuel.

218. Dans le cas où l'outil ne rencontrerait aucune résistance, et où, conséquemment, *la machine ne produirait aucun effet utile*, l'équation (1) donnerait

$$T_m = T_p. \qquad (4)$$

Ainsi, *pour entretenir le mouvement d'une pareille machine, on devrait y appliquer un moteur capable de faire équilibre, à chaque instant, aux résistances passives*. Il n'est donc pas possible d'imaginer un appareil dont le mouvement soit continu, et qui n'exige pas, de temps à autre, l'action d'une force motrice extérieure. En d'autres termes, ainsi que le faisait pressentir la remarque du nº 213, *il ne peut y avoir de mouvement perpétuel*.

219. *Remarque*. — Les corps célestes semblent échapper à cette loi : c'est peut-être parce qu'ils se meuvent dans des espaces dépourvus de matière pondérable. En effet, la présence d'un milieu résistant suffirait pour accélérer peu à peu la vitesse d'une planète et pour diminuer les dimensions de son orbite ; en sorte que, dans la suite des siècles, la planète finirait par se précipiter sur le Soleil.

220. Si le mouvement perpétuel n'est pas réalisable, à plus forte raison est-il *impossible*, au moyen d'une machine, *de multiplier le travail moteur*. Dire qu'*une machine produit de la force*, c'est proférer un non-sens.

Rendement des machines.

221. L'inégalité (3) revient à $\frac{T_r}{T_m} < 1$: *le rapport du travail utile au travail moteur est toujours inférieur à l'unité*. A cause de $\frac{T_r}{T_m} = 1 - \frac{T_p}{T_m}$, il est clair que moins il y a de résistances passives, plus ce rapport $\frac{T_r}{T_m}$, appelé *rendement* de la machine, s'approche de l'unité. Dans les meilleures machines, le rendement est à peu près égal à $\frac{3}{4}$.

Remarques générales sur l'emploi des machines.

222. Les machines étudiées dans ce numéro peuvent servir à mettre en évidence un principe d'une grande importance dans l'industrie. Ce principe, qui rentre dans celui de la transmission du travail, s'énonce ainsi : *ce que l'on gagne en force, on le perd en vitesse*.

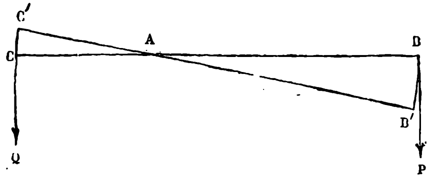
Supposons, par exemple, qu'au moyen d'un effort P équivalent à 100 kilogrammes, exercé à l'extrémité B d'un levier du premier genre, on veuille soulever un poids Q suspendu à l'autre extrémité. Suivant que ce poids sera de 1 000, de 10 000, de 100 000 kilogrammes, le rapport des bras de levier AB, AC devra être un peu supérieur à

$$\frac{1000}{100}, \quad \frac{10\,000}{100}, \quad \frac{100\,000}{100}\,*,$$

c'est-à-dire à 10, 100, 1 000.

L'emploi de cette machine permet donc de vaincre une résistance très-grande, au moyen d'une puissance comparativement très-petite. Mais *ce que l'on aura gagné en force, on l'aura perdu en vitesse*. En effet, soit B'C' la position du levier au bout d'un certain temps : les arcs semblables BB', CC' donnent

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{AB}{AC}.$$



Ainsi le rapport $\frac{AB}{AC}$ étant 10, 100, 1000, *le rapport des espaces* CC', BB' *parcourus, dans le même temps, par les points d'application de la résistance et de la puissance,* c'est-à-dire *le rapport des vitesses* de ces deux points, serait

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{1000}:$$

* Si le rapport $\frac{AB}{AC}$ était précisément égal à $\frac{F}{P}$, il y aurait équilibre le poids Q, au lieu d'être *soulevé,* pourrait rester en repos.

pendant que le point B descendrait de *un mètre*, le point C monterait de $0^m,1$, ou de $0^m,01$, ou de $0^m,001$.

La vérification du principe dont il s'agit se ferait aussi facilement sur le treuil, sur le plan incliné, sur la vis, etc. *.

Résumé.

L'objet principal d'une force est de faire mouvoir le corps auquel cette force est appliquée. L'effet utile produit se compose d'une résistance vaincue et d'un point d'application déplacé.

Une force à laquelle aucune résistance ne s'oppose, ou qui ne produit pas de mouvement, s'appelle force perdue.

Le loyer d'un moteur dépend de l'intensité de la résistance, et de l'espace décrit par le point d'application.

Si un point matériel m décrit une droite, sous l'action d'une force constante F, on appelle travail de F le produit du nombre qui représente l'intensité de celle-ci, par le nombre qui représente l'espace mm' parcouru par m.

* On raconte qu'après avoir inventé le levier, Archimède s'écria : *Donnez-moi un point d'appui, et je soulèverai le monde!* En admettant que *le monde* d'Archimède fût la Terre, et que le géomètre de Syracuse eût eu à sa disposition une force de *un million de kilogrammes*, agissant à l'extrémité d'un bras de levier de *cent mètres*, les valeurs de P, Q, p seront

$$Q = 1\,082\,841\,000 \times 5,44 \times (10\,000)^3 \times 1\,000^*,$$
$$P = 1\,000\,000,$$
$$p = 100.$$

Donc, pour l'équilibre,

$$q = 100 \frac{1\,000\,000}{1\,082\,841\,000 \times 5,44 \times 1\,000^3 \times 1\,000}$$
$$= \frac{1}{1\,082\,841\,000 \times 5,44 \times 10\,000}.$$

Cette longueur est environ $\frac{1}{500\,000\,000}$ de l'épaisseur des fils employés dans les réticules de lunettes, épaisseur qui est elle-même $\frac{1}{1200}$ de millimètre. Ainsi, pendant que le point d'application de la puissance employée par Archimède aurait parcouru 100 mètres, l'autre extrémité du levier se serait déplacée d'une quantité probablement bien inférieure aux dimensions des molécules des corps!

* Le volume de la terre est d'environ 1 082 841 000 myriamètres cubes; son poids spécifique moyen est 5,44; le poids d'un mètre cube d'eau égale 1000 kilogrammes, etc.

Le travail d'une force constante, agissant sur un point qui se meut en ligne droite, est le produit de la force par le chemin parcouru et par le cosinus de l'angle que fait la direction de la force avec celle du chemin.

Le travail est dit moteur ou résistant, suivant que la force agit dans le sens du mouvement ou dans le sens opposé.

Le travail élémentaire d'une force quelconque est le produit de l'élément de chemin par la projection de la force sur cet élément.

Le travail total d'une force est la limite vers laquelle tend la somme de ses travaux élémentaires.

Si la force est constante, et qu'elle soit dirigée, à chaque instant, suivant la tangente à la trajectoire, le travail total est le produit de la force par le chemin.

Le travail élémentaire de la résultante de plusieurs forces appliquées à un point matériel est égal à la somme des travaux des composantes.

Quand des forces, appliquées à un corps solide, se font équilibre, la somme de leurs travaux élémentaires est constamment nulle.

Le travail pris pour unité est celui qui est nécessaire pour élever un kilogramme à un mètre de hauteur. On lui donne le nom de kilogrammètre.

On appelle cheval-vapeur un travail de 75^{km} effectué en une seconde.

Quand les diverses parties d'une machine se meuvent uniformément, la somme de leurs travaux élémentaires est nulle.

Dans toute machine à l'état uniforme, le travail utile est égal au travail moteur, diminué du travail dû aux résistances passives.

Le travail utile est toujours moindre que le travail moteur. Dans les meilleures machines, le rendement est à peu près $\frac{3}{4}$.

Dans le cas des machines simples, il est facile de vérifier que, abstraction faite des résistances passives, le travail moteur est égal au travail résistant.

Le mouvement perpétuel est impossible.

Ce que l'on gagne en force, on le perd en vitesse.

APPENDICE.

Problèmes sur le mouvement des corps pesants.

Problème I. *Un corps, abandonné à l'action de la pesanteur, tombe d'une hauteur de 66* mètres. On demande : 1° quelle sera la durée de sa chute; 2° quelle sera sa vitesse quand il atteindra le sol.*

Les formules

$$h = \frac{1}{2}gt^2, \qquad v = \sqrt{2gh},$$

trouvées dans le n° 141 donnent immédiatement

$$t = \sqrt{\frac{132}{9{,}80896}} = 3{,}6684, \quad v = \sqrt{132.9{,}80896} = 35{,}983.$$

Ainsi, dans l'exemple proposé, le corps tomberait pendant environ 3,7 secondes, et il atteindrait le sol avec une vitesse d'à peu près 36 mètres par seconde.

Problème II. *Un projectile est lancé verticalement, de bas en haut, avec une vitesse initiale* a. *On demande : 1° à quelle hauteur il parviendra; 2° après combien de temps il reviendra au point de départ.*

La force qui sollicite le projectile est son poids; elle agit en sens contraire de la vitesse initiale : le mouvement ascendant du projectile est donc un mouvement uniformément retardé (179), dont les équations sont

$$v = a - gt, \tag{1}$$

$$x = at - \frac{1}{2}gt^2. \tag{2}$$

* Cette hauteur est celle des tours de Notre-Dame, à Paris.

Quand le mobile s'arrête, $v = 0$; par conséquent, la hauteur h à laquelle il parvient est déterminée par les deux équations

$$0 = a - gt, \qquad h = at - \frac{1}{2}gt^2.$$

Elles donnent, par l'élimination de t,

$$h = \frac{1}{2}\frac{a^2}{g}. \tag{3}$$

On conclut, de cette valeur de h, $a = \sqrt{2gh}$, en sorte que *la vitesse initiale* a *est égale à la vitesse due à la hauteur* h. Autrement dit, *la hauteur à laquelle s'élève le projectile, en vertu de sa vitesse initiale* a, *est égale à la hauteur d'où il devrait tomber pour acquérir cette vitesse* a.

Le temps T que le mobile emploie à revenir au point de départ est le double du temps pendant lequel il s'élève ; par conséquent,

$$\mathrm{T} = \frac{2a}{g}. \tag{4}$$

Remarque. — La propriété que nous venons de démontrer peut être énoncée en termes plus généraux : *Un mobile sollicité seulement par la pesanteur reprend la même vitesse quand il repasse au même point* *.

Problème III. *A* n *secondes d'intervalle, et dans la même direction verticale, on a lancé deux projectiles dont la vitesse initiale commune est* a. *On demande quel temps emploiera le second projectile pour atteindre le premier.*

Première solution. — Représentons par t le nombre de secondes cherché. A l'instant de la rencontre, le premier projectile se mouvait depuis $n + t$ secondes. Or, il avait employé $\frac{a}{g}$ secondes pour atteindre le point culminant (*Prob.* II) ; par conséquent, son mouvement descendant durait depuis un temps

* Cette proposition est elle-même un cas particulier du théorème connu sous le nom de *principe des forces vives*. (Voyez le *Manuel des candidats à l'école polytechnique*.)

marqué par $n + t - \frac{a}{g}$; l'espace qu'il avait parcouru en tombant est donc égal à

$$\frac{1}{2} g \left(n + t - \frac{a}{g}\right)^2.$$

D'un autre côté, l'espace parcouru par le second mobile, pendant le temps t, est $at - \frac{1}{2} gt^2$. Et comme la somme de ces deux espaces est égale à $\frac{1}{2} \frac{a^2}{g}$, l'inconnue t satisfait à l'équation du *premier degré :*

$$\frac{1}{2} g \left(n + t - \frac{a}{g}\right)^2 + at - \frac{1}{2} gt^2 = \frac{1}{2} \frac{a^2}{g}.$$

On trouve

$$t = \frac{a}{g} - \frac{1}{2} n.$$

Seconde solution.—D'après la remarque précédente, les deux projectiles, quand ils se rencontrent, ont des vitesses égales et contraires. Or, la vitesse du premier est $g\left(n + t - \frac{a}{g}\right)$; celle du second est $a - gt$: donc

$$g\left(n + t - \frac{a}{g}\right) = a - gt;$$

d'où

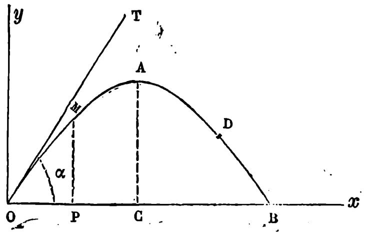
$$t = \frac{a}{g} - \frac{1}{2} n,$$

comme ci-dessus.

Remarque. — Si n est plus grand que $\frac{2a}{g}$, on trouve pour t une valeur négative ; d'où l'on peut inférer que le problème est impossible. En effet, $\frac{2a}{g}$ représente le temps T que le premier projectile emploie pour revenir au point de départ (Prob. II) ; donc, pour que les mobiles puissent se rencontrer, on doit supposer $n < \frac{2a}{g}$.

Problème IV. *Quelles sont les circonstances principales du mouvement d'un projectile dont la vitesse initiale* a *fait un angle* α *avec l'horizon?*

1° O étant la position initiale du projectile, soient Oy la verticale passant par ce point, et Ox l'horizontale menée, de ce même point, dans le plan vertical TOy passant par la direction OT de la vitesse initiale. Comme la seule force qui agit sur le projectile est la pesanteur, on doit admettre qu'il ne sortira pas du plan vertical xOy.



Cela posé, le mouvement effectif du mobile peut être décomposé en deux autres mouvements plus simples (185) : l'un, parallèle à Ox, est dû seulement à la composante horizontale de la vitesse a; l'autre, parallèle à Oy, ne diffère pas du mouvement d'un projectile lancé de bas en haut avec une vitesse $a \sin \alpha$ (Prob. II).

Par conséquent, si nous désignons par x et y les espaces parcourus au bout du temps t*, dans ces deux mouvements, nous aurons

$$x = at \cos \alpha, \tag{1}$$

$$y = at \sin \alpha - \frac{1}{2} gt^2. \tag{2}$$

2° La hauteur AC à laquelle s'élève le projectile est déterminée (Prob. II) par la formule

$$h = \frac{1}{2} \frac{(a \sin \alpha)^2}{g} = \frac{a^2}{2g} \sin^2\alpha. \tag{3}$$

Pour interpréter plus aisément ce résultat, supposons que a soit la vitesse due à une certaine hauteur H, de manière que $H = \frac{a^2}{2g}$; alors

$$h = H \sin^2\alpha. \tag{4}$$

* $x = OP$ et $y = PM$ sont ce qu'on appelle les *coordonnées* de la position M du projectile.

Comme $\sin^2\alpha$ est moindre que l'unité, on voit que *la hauteur à laquelle s'élève le projectile est toujours inférieure à celle qui correspond à la vitesse initiale.* Il n'y a d'exception que pour $\alpha = 90°$, auquel cas $h = H = \frac{a^2}{2g}$.

3° La *portée du jet,* c'est-à-dire la distance OB à laquelle le projectile va rencontrer de nouveau l'axe Ox, est la valeur de x qui correspond à $y = 0$. Or, l'équation (2) donne pour cette valeur de y, et en rejetant $t = 0$,

$$t = \frac{2a \sin\alpha}{g};$$

par conséquent,

$$OB = \frac{2a^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha,$$

ou

$$OB = 2H \sin 2\alpha. \qquad (5)$$

On conclut, de cette valeur, que *la portée est la plus grande possible, quand le projectile est lancé sous l'inclinaison de* 45° ; elle est alors égale à deux fois la hauteur correspondant à la vitesse initiale, ou à quatre fois la hauteur à laquelle s'élève le projectile *.

4° On peut se demander sous quelle inclinaison il faut lancer le projectile, afin qu'il atteigne un *but* D, dont les *coordonnées* x et y sont connues. Pour résoudre cette question, on doit éliminer t entre les équations (1), (2), et résoudre par rapport à α l'équation résultante. On obtient d'abord

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2a^2\cos^2\alpha};$$

puis, en remplaçant a^2 par $2gH$, et $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ par $1 + \operatorname{tg}^2\alpha$:

$$x^2\operatorname{tg}^2\alpha - 4Hx \operatorname{tg}\alpha + 4Hy + x^2 = 0. \qquad (6)$$

Cette équation donne

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{x}\left[2H \pm \sqrt{4H^2 - 4Hy - x^2}\right]. \qquad (7)$$

* A cause de

$$h = H \sin^2 45° = \frac{1}{2} H.$$

Quand les coordonnées x et y du point D satisfont à l'inégalité

$$4H^2 > 4Hy + x^2, \tag{8}$$

les deux valeurs de tg α sont réelles et inégales ; par conséquent : *pour une même vitesse initiale du projectile, il existe en général deux directions de cette vitesse qui permettent d'atteindre un but donné.*

Ces directions se réduisent à une seule, déterminée par

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2H}{x},$$

quand

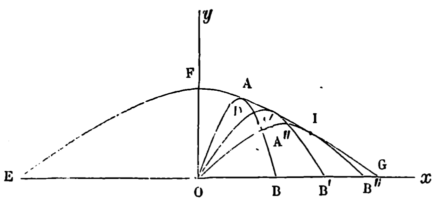
$$4H^2 = 4Hy + x^2. \tag{9}$$

Enfin, si les coordonnées x, y et la hauteur H satisfont à la relation

$$4H^2 < 4Hy + x^2, \tag{10}$$

il est impossible que le projectile passe par le point donné D.

5° L'équation (6), qui est celle de la *trajectoire* du projectile, représente une parabole OAB ayant AC pour axe et A pour sommet. Si, dans cette équation, on fait varier l'angle α, on obtiendra une infinité de paraboles OAB, OA'B', OA''B'', *tangentes* à une autre parabole EFG, représentée par l'équation (9). Si le but D est *intérieur* à cette dernière courbe, le projectile pourra évidemment l'atteindre, soit en décrivant la parabole OAB, soit en décrivant la parabole ODA'. Quand le but est sur l'*enveloppe,* en I, par exemple, il n'existe qu'une seule direction suivant laquelle on puisse lancer le projectile. Enfin, quand le but est extérieur à EFG, le projectile ne peut plus l'atteindre. Ces dernières circonstances sont exprimées algébriquement par les relations (8), (9), (10).



PROBLÈME V. *Sachant que l'attraction exercée par une sphère, sur un point extérieur, est la même que si la masse de la sphère était concentrée en son centre*, on demande de calculer :*

1° *Le rapport des poids d'une même masse, à la surface de Jupiter et à la surface de la Terre ;*

2° *La valeur de la gravité, à la surface de Jupiter ;*

3° *La longueur du pendule qui battrait les secondes sur cette planète.*

1° D'après la loi de la *gravitation universelle***, les attractions exercées sur une molécule m, par deux points matériels A, B, sont proportionnelles aux masses M, M' de ces deux points, et inversement proportionnelles aux carrés des distances mA, mB. Il résulte de là, et de la propriété indiquée dans l'énoncé, que si une même masse m était transportée successivement sur la Terre et sur Jupiter, les poids p, p', accusés par un dynamomètre auquel cette masse serait suspendue (94), satisferaient à la relation :

$$\frac{p'}{p}=\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{M}}\cdot\left(\frac{r}{r'}\right)^2,$$

r, r' étant les rayons de la Terre et de Jupiter.

Or,

$$\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{M}}=\frac{354\,936}{1050},\quad \frac{r}{r'}=\frac{1^{***}}{11,225};$$

donc

$$\frac{p'}{p}=\frac{354\,936}{1050}\cdot\frac{1}{(11,225)^2}.$$

Effectuant par logarithmes, on trouve

$$\frac{p'}{p}=2,6828.$$

Ainsi, le poids d'un kilogramme, transporté de la Terre sur Jupiter, tendrait le dynamomètre jusqu'au point correspondant à 2682g,8.

2° Les poids p, p' sont entre eux comme les accélérations

* Voyez les Traités de Mécanique rationnelle.
** Voyez la *Cosmographie*.
*** *Cosmographie*.

correspondantes g, g'*. Par conséquent, la *gravité* à la surface de Jupiter a pour expression :

$$g' = g \,.\, 2{,}6828\,;$$

ou, à cause de $g = 9^{\text{m}},80896$:

$$g' = 26^{\text{m}},3155.$$

3° Les longueurs l, l' de deux pendules qui battraient les secondes à Paris et sur Jupiter sont proportionnelles à g et g' (12).

Donc

$$l' = l \,.\, 2{,}6828\,;$$

et comme $l = 0^{\text{m}},993\,855$,

$$l' = 2^{\text{m}},66631\ **.$$

* Parce que $m = \frac{p}{g} = \frac{p'}{g'}$.

** Le lecteur sera peut-être étonné de ce que le rapport $\frac{p'}{p}$ ne soit pas plus grand ; mais il lui suffira de faire attention que, si la masse de Jupiter était égale à celle de la Terre, l'attraction, à la surface de la première planète, serait 128 fois *moindre* qu'à la surface de la seconde. Au lieu de supposer la masse m transportée successivement sur la Terre et sur Jupiter, on pourrait considérer un corps également distant des deux centres d'attraction ; et alors on trouverait

$$\frac{p'}{p} = \frac{354\,936}{1\,050} = 338.$$