ESTRATTO DI UNA LETTERA

DEL

Sig. E. CATALAN

al Direttore del Giornale.

J'ai reçu avant hier, par M. Mansion, le numéro de *mai-juin* de votre intéressant Journal. J'y trouve, en particulier, la démonstration d'une *formule sur les nombres polygonaux*, par M. Musso. A mon avis, cette démonstration est beaucoup trop longue. En voici une autre.

Représentons par $P_{n,q}$ (*) le $n^{\text{ième}}$ nombre polygonal, de la *classe* $q-1$ (**). Il faut demontrer que

$$P_{n,q}=P_{n,3}+(q-3)\,P_{n-1,3} \tag{A}$$

D'après Legendre

$$P_{n,q}=\frac{n(n-1)}{2}(q-2)+n \quad (***).$$

Cette formule générale, facile a établir, donne

$$P_{n,2}=n$$

$$P_{n,3}=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$P_{n,4}=n^2$$

etc.

(*) Au lieu de $P_n{}^q$, ce qui est peu clair.

(**) Les nombres naturels 1, 2, 3, ..., n constituent la *première* classe; les nombres *triangulaires* la *deuxième* classe, etc.

(***) Théorie des nombres, tome 2, p. 217.

Donc l'égalité (A) est

$$\frac{n(n-1)}{2}(q-2)+n=\frac{n(n+1)}{2}+(q-3)\frac{(n-1)n}{2}$$

ou, pour abréger:

$$Aq+B=A'q+B'.$$

Or :

$$A=\frac{n(n-1)}{2}\quad,\quad B=n-n(n-1)=-n^2+2n,$$

$$'=\frac{n-1)n}{2}=A$$

$$B'=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{3(n-1)n}{2}=-n^2+2n=B$$

etc.

Je voulais aussi, Monsieur, vous soumettre quelques remarques touchant la Note de M. Lerch ; mais le temps me manque. Permettez moi, seulement, de vous faire observer que la formule (supposée exacte) resulte de ceci :

(1°) $$L\Gamma(x)+L\Gamma(y)=L[\Gamma(x)\Gamma(y)];$$

(2°) $$L\Gamma(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)Lx-x+\frac{1}{2}L(2\pi)+\varpi(x)$$

$$\varpi(x)=2\int_0^\infty\frac{dv}{e^{2\pi v}-1}\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{x}$$

$\varpi(x)$ étant la fonction de Binet (*).

Liège 4 décembre 1893.

(*) Recherches sur la constante G et sur les intégrales eulériennes (Académie de Saint Pétersbourg 1883).