Notes sur l'exercice 62.

Soit M′ un point de coordonnées α', β'; menons les tangentes MA, MB. Les normales en A, B se coupent en M (α, β). De M, on peut mener à l'ellipse deux autres normales MC, MD. Les tangentes en C, D se coupent en M″(α'', β'').

Les droites MA, MB coupent Ox en deux points P, Q dont les abscisses sont les racines de l'équation

$$(1) \qquad x^2(a^2\beta'^2 + b^2\alpha'^2) - 2b^2c^2\alpha' x + c^4(b^2 - \beta'^2) = 0.$$

Les normales MC, MD coupent, de leur côté, l'axe Ox aux points R. S et les abscisses de ces points sont données par l'égalité

$$x^2(\alpha^2\beta''^2 + b^2\alpha''^2) - 2b^2c^2\alpha'' x + c^4(b^2 - \beta''^2) = 0.$$

D'ailleurs, on sait que

$$\alpha'\alpha'' = -a^2, \qquad \beta'\beta'' = -b^2.$$

L'équation précédente devient alors

$$(2) \qquad x^2(a^2\beta'^2 + b^2\alpha'^2) + 2c^2\alpha'\beta'^2 x + c^4\frac{\alpha'^2}{a^2}(\beta'^2 - b^2) = 0.$$

En écrivant que les racines des équations (1), (2) sont en relation harmonique, on a l'équation du lieu

$$(y^2 - b^2)(x^2 - a^2)(a^2y^2 + b^2x^2) + 2a^2b^2x^2y^2 = 0.$$

La courbe correspondante se construit facilement.

Nota. — Nous avons reçu une solution analogue de M. Delorme, soldat au 12e régiment d'artillerie.

M. Barisien nous a également envoyé une solution de cet exercice. M. Barisien fait suivre sa solution d'une remarque intéressante. Il déduit, du lieu trouvé, le lieu des points d'où partent quatre normales en relation harmonique. Ce lieu se trouve, comme on sait, directement et très simplement, en prenant l'équation

$$y = mx \pm \frac{c^2m}{\sqrt{a^2 + b^2m^2}},$$

et en écrivant que les racines de cette équation en m sont en relation harmonique. En prenant les formules qui lient les coordonnées du pôle normal à celles du pôle tangentiel, on peut toujours déduire, du lieu décrit par l'un de ces points, le lieu décrit par l'autre. Dans le cas présent, on doit effectuer une élimination assez délicate, M. Barisien montre comment elle peut être élégamment dirigée, et il aboutit, pour représenter le lieu de M, à l'équation

$$(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)^3 + 54\, a^2b^2c^4x^2y^2 = 0$$

SUR LA QUESTION 360 (*)

Par M. **E. Catalan.**

Pour plus de régularité, remplaçons n par y. Il s'agit, alors, de trouver les solutions *entières* des équations

$$2y^2 - 1 = x^2, \qquad 2y^2 + 1 = x^2;$$

(*) Cette question proposée par M. E. Lemoine dans le numéro de novembre dernier était ainsi énoncée :

ou

(1) $$x^2 - 2y^2 = +1,$$

(2) $$x^2 - 2y^2 = -1.$$

Celle-ci est vérifiée par $x = 1$, $y = 1$. Donc (**), les solutions de l'équation (1) sont données par les formules

$$x = \frac{(1+\sqrt{2})^{2k} + (1-\sqrt{2})^{2k}}{2},$$

$$y = \frac{(1+\sqrt{2})^{2k} - (1-\sqrt{2})^{2k}}{2\sqrt{2}};$$

et celles de l'équation (2), par les formules :

$$x = \frac{(1+\sqrt{2})^{2k+1} + (1-\sqrt{2})^{2k+1}}{2},$$

$$y = \frac{(1+\sqrt{2})^{2k+1} - (1-\sqrt{2})^{2k+1}}{2\sqrt{2}}.$$

Faisant $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ on trouve :

$y = n = 1, 2, 12, 70, \ldots$ *équation* (1),

$y = n = 1, 5, 29, 169, \ldots$ *équation* (2).

Remarques. I. — Si l'on fait

$$y_\lambda = \frac{(1+\sqrt{2})^\lambda - (1-\sqrt{2})^\lambda}{2\sqrt{2}},$$

on a cette loi de *récurrence* :

$$y_\lambda = 2y_{\lambda-1} + y_{\lambda-2}.$$

laquelle simplifie le calcul précédent.

II. — Les valeurs de x :

$$1, 3, 7, 17, 41, \ldots$$

satisfont à la même loi.

Donner explicitement toutes les valeurs entières de n *pour lesquelles*

1° $2n^2 - 1$ *est un carré parfait;*

2° $2n^2 + 1$ *est un carré parfait.*

Les équations indéterminées considérées dans cette question sont bien connues. La première représente un cas particulier de la fameuse équation de Pell

$$x^2 - ay^2 = 1.$$

Quant à l'équation $x^2 - ay^2 = -1$, comme l'a observé Lagrange, sa résolution peut être ramenée à celle d'une équation de Pell.

On pourra consulter, à ce sujet, le *J. E.* 1884, p. 15. *G. L.*

(**) LEGENDRE, *Théorie des nombres*, tome I^er^, p. 56 et 57.