NOTE SUR L'ELLIPSE DE LONGCHAMPS (*)

Par M. **E. Catalan.**

Mon collègue et ami vient de publier une nouvelle édition du *Supplément* à son *Cours de mathématiques*. A la page 184 de ce volume, on lit :

Il existe une conique, bien déterminée (nous la désignons par I), *ayant pour centre le point de concours des bissectrices intérieures du triangle de référence* ABC, *et passant, en outre, par les pieds* S, S′, S″ *de ces bissectrices.*

. . . .

La conique I *est doublement tangente au cercle inscrit, aux extrémités de son petit axe.*

... — *Le* grand *axe est une moyenne géométrique entre le rayon du cercle inscrit et le demi-rayon du cercle circonscrit* (**).

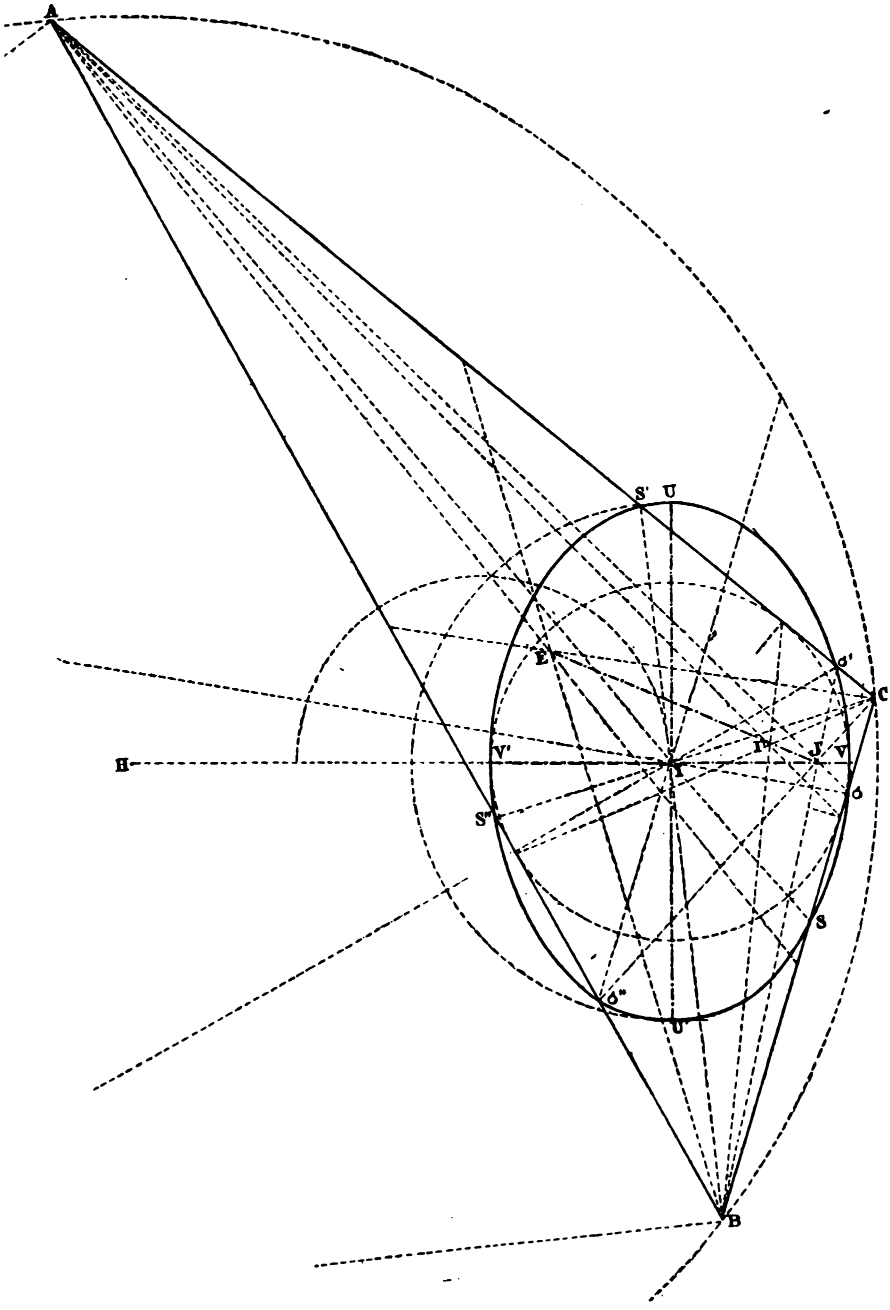
D'après cet énoncé, la conique I est celle que M. de Longchamps a fait connaître au Congrès de Nancy, en 1886 : depuis cette époque, elle est connue sous le nom d' *ellipse de Longchamps*. Dans le compte-rendu de ce Congrès, on lit, p. 72 : *les* demi-*axes de la conique sont : 1° le rayon* r *du cercle inscrit ; 2° une moyenne géométrique entre* r *et le demi-rayon*, $\frac{R}{2}$, *du cercle circonscrit* (***).

Les théorèmes trouvés par M. de Longchamps sont fort remarquables ; mais, comme je le lui ai écrit, il n'y a pas longtemps, on peut les *compléter*. Cette recherche est l'objet des lignes suivantes.

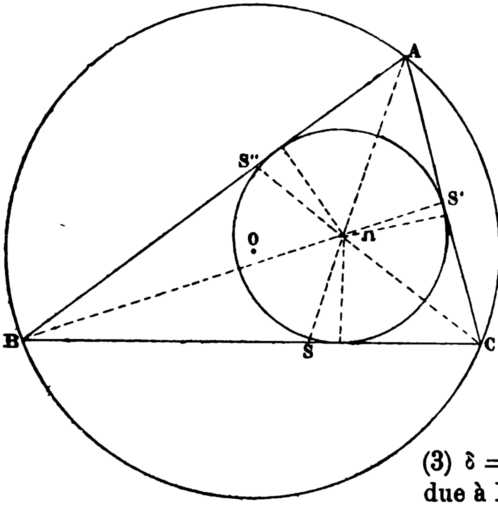
(*) La figure ci-jointe reproduit les constructions qui font connaître les axes de cette ellipse, et elle indique quelques-unes des propriétés que nous avions signalées dans la Note à laquelle fait ici allusion M. Catalan.
G. L.

(**) On va voir que cette valeur est erronée ; il faut lire le *demi-grand* axe et non le *grand* axe.

(***) Voir le renvoi ci-dessus.


A
S'
U
E
σ'
C
V'
I'
J
V
H
I
S''
σ
S
σ''
U'
B

I. D'après l'énoncé contenu dans le *Supplément*, l'ellipse I est concentrique au cercle Ω, inscrit au triangle ABC.



II. Soient A, B les demi-axes :

(1) $A = \sqrt{r\frac{R}{2}}$,

(2) $B = r$.

III. Le triangle ABC étant *inscrit* au cercle O, et *circonscrit* au cercle Ω, la distance $O\Omega = \delta$, est donnée par la formule

(3) $\delta = \sqrt{R(R - 2r)}$, (*),

due à Euler.

IV. D'après le théorème d'Euler, généralisé par Poncelet, *si les cercles* O,Ω *sont donnés, ainsi que le triangle* ABC, il y a une infinité de triangles A'B'C', jouissant des mêmes propriétés que ABC. A chacun d'eux, correspond une ellipse I', égale à l'ellipse I.

V. Des équations (1), (2), (3) on tire :

(4) $$r = B,$$

(5) $$x = \frac{2A^2}{B},$$

(6) $$\delta = \frac{2A}{B}\sqrt{A^2 - B^2}.$$

Donc, *si l'ellipse* I *est donnée, il en est de même du cercle* Ω*; et, quant au cercle* O, *le lieu de son centre est une circonférence décrite de* Ω *comme centre, avec* δ *pour rayon. A chaque position du cercle* O, *correspondent un triangle* ABC, *et trois points* S, S', S'' *de l'ellipse* I. Conséquemment, celle-ci admet *trois infinités* de points remarquables, faciles à construire.

(*) Voyez *Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire*, sixième édition, p. 142.