Preuves pour démontrer l'inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique

Jacques Bair

Mots clés : Moyennes arithmétique et géométrique, analyse et synthèse, preuves sans mots, preuves par récurrence.

Résumé. *L'inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique pour des nombres positifs est importante en mathématiques. Elle peut être démontrée de multiples façons.*

Nous donnons un aperçu de quelques preuves qui nous semblent à la fois esthétiques et accessibles pour des élèves de fin du secondaire ou du début du supérieur.

Nous en profitons pour émettre quelques réflexions générales relatives aux démonstrations.

1. Introduction

Nous nous proposons de prouver, de diverses manières, un résultat fondamental dans la théorie des nombres : il s'agit de l'*inégalité arithmético-géométrique* (IAG en abrégé, encore appelée dans la littérature le *théorème des moyennes arithmétique et géométrique*) ; elle sera notée simplement $\mathcal{I}_n$ pour un entier positif n quelconque. Nous considérons des nombres positifs a_1, a_2, …, a_n et allons donc démontrer $\mathcal{I}_n$, à savoir :

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Nous ne nous attarderons pas sur le fait qu'il s'agit d'une égalité si et seulement si tous les nombres a_i considérés sont les mêmes, et donc que l'inégalité en question est stricte en général. De même, nous ne chercherons pas à fournir des applications (pourtant fort nombreuses) de cette relation, ni à l'étendre à d'autres moyennes (éventuellement pondérées). Enfin, nous ne viserons pas une étude exhaustive donnant toutes les démonstrations de l'IAG disponibles dans la littérature (car, par exemple, l'ouvrage [4] en reprend plusieurs dizaines). Nous en retiendrons certaines qui nous paraissent intéressantes ou surprenantes (ce qui est un critère fort subjectif) et aussi qui pourraient être présentées (avec d'éventuels ajustements) à des étudiants de fin du secondaire ou du début du supérieur. Pour ne pas allonger trop notre texte, nous n'allons parfois qu'esquisser les preuves, en insistant surtout sur les idées fondamentales des raisonnements, laissant alors le soin aux lecteurs de fournir plus de justifications (des références figurant dans la bibliographie pouvant les aider dans cette tâche).

En corollaire, nous viserons un objectif plus général : réfléchir sur la variété et la diversité des démonstrations mathématiques, ainsi que sur l'ingéniosité des idées utilisées et l'efficacité de certains concepts théoriques.

Nous traiterons d'abord le cas, évidemment le plus facile mais très riche, de deux nombres, avant d'aborder le cas général.

2. Démonstrations pour deux nombres

Il s'agit de prouver que, pour des nombres positifs arbitraires a et b, on a

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

Nous allons fournir diverses preuves en les rattachant à des domaines mathématiques qui se retrouvent habituellement dans les programmes scolaires, à savoir l'algèbre, la géométrie et l'analyse.

2.1. Preuves algébriques

L'inégalité $\mathcal{I}_2$ peut être vue comme étant une conséquence immédiate de l'égalité suivante, donnée par Liouville ([9], p. 493) :

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} + \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$$

Nous nous proposons de détailler davantage une autre démonstration, peut-être plus laborieuse mais relativement classique : elle nous paraît surtout intéressante dans la mesure où elle laisse entrevoir la possibilité de dégager une manière assez naturelle pour construire une preuve mathématique en toute généralité.

Il s'agit essentiellement de démontrer l'implication « $H \Rightarrow T$ », où l'hypothèse considérée H peut se mettre sous la forme « $a > 0$ et $b > 0$ » (en admettant implicitement les règles usuelles de l'algèbre), tandis que la thèse T est l'inégalité $\mathcal{I}_2$. Nous allons faire appel à cinq propositions intermédiaires, à savoir :

- P_1 : « $(a-b)^2 \geqslant 0$ »
- P_2 : « $a^2+b^2-2ab \geqslant 0$ »
- P_3 : « $a^2+b^2+2ab \geqslant 4ab$ »
- P_4 : « $(a+b)^2 \geqslant 4ab$ »
- P_5 : « $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqslant \left(\sqrt{ab}\right)^2$ »

Les règles classiques de l'algèbre permettent aisément d'écrire (les justifications étant laissées aux lecteurs) :

$$H \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \Rightarrow P_4 \Rightarrow P_5 \Rightarrow T \qquad (1)$$

ce qu'il fallait démontrer.

Bien entendu, toutes ces implications sont « triviales », mais la question qui se pose réellement est double : comment les « deviner » et pourquoi les mettre dans cet ordre qui paraît *a posteriori* idéal ?

Pour répondre à ces interrogations, reprenons ce problème *à rebours*, c'est-à-dire en partant de la thèse T. Nous allons constater que les propositions P_i considérées apparaissent alors assez naturellement ; les justifications algébriques sont simples et ne seront à nouveau pas développées au sein de ce texte.

Dans l'inégalité à démontrer apparaît une racine carrée. En pareille circonstance, on cherche souvent à s'en débarrasser par élévation au carré des deux membres de la formule, ce qui est ici permis ; on obtient de la sorte P_5. On élimine le dénominateur intervenant dans P_5 en y quadruplant les deux membres, d'où P_4. En développant le carré du premier membre de cette dernière, on trouve aisément P_3. On en déduit P_2 en y soustrayant le produit $4ab$ des deux membres. Une écriture équivalente de P_2 livre P_1. Cette dernière est évidente et découle donc de H. Il suffit alors de remettre les propositions dans l'ordre inverse de celui dans lequel elles ont été trouvées : on obtient de la sorte la chaîne d'implications (1).

Comme l'illustre la petite démonstration qui vient d'être analysée, un raisonnement mathématique peut comprendre deux étapes distinctes dans son élaboration complète.

1. Une première approche exploratoire est obligatoire pour construire les propositions qui interviendront dans la preuve : c'est une phase d'*analyse* du problème. Le travail demandé est alors semblable à celui d'un détective qui doit examiner en profondeur le problème posé et essayer de trouver des pistes, ou d'un médecin qui effectue un diagnostic, ou d'un garagiste qui recherche la cause d'une panne, … Souvent, il est efficace à ce stade initial de supposer le problème résolu et de raisonner à rebours, en partant de la thèse. À première vue, il ne semble pas très naturel de supposer connue la thèse que l'on souhaite démontrer. Mais, en fait, il s'agit de découvrir des propriétés intermédiaires vraies qui vont permettre de remonter de la thèse aux hypothèses. La conclusion n'est à ce stade que plausible et doit donc être démontrée dans les règles.
2. Ainsi est nécessaire une étape de *synthèse* pour présenter correctement la preuve (selon en tout cas les normes de rigueur généralement exigées en mathématiques). La voie devinée dans l'analyse est alors exploitée et il convient ensuite de « descendre » logiquement (c'est-à-dire par des implications) des hypothèses jusqu'à la thèse, à l'aide des propositions trouvées ci-avant. Cette phase est terminale, et parfois la seule visible … et même souvent la seule demandée *in fine*.

La présence conjointe de ces deux étapes d'analyse et de synthèse est assurément une particularité des mathématiques : aucune autre discipline n'y recourt de façon aussi nette. L'obligation de leur maîtrise simultanée n'est généralement pas facile et il n'existe aucune recette aisée et universelle pour bien les pratiquer. Toutefois, un enseignant peut utilement livrer à ses élèves quelques conseils généraux tels que ceux-ci, inspirés par une étude de P. Lombard sur le sujet [10] :

– préciser au maximum les « règles du jeu » mathématique ;
– inscrire l'apprentissage dans une « progression spiralaire » ;
– développer des apprentissages assez répétitifs pour que les étudiants acquièrent de bonnes habitudes et une intuition efficace. En corollaire, il convient d'inviter les étudiants à s'exercer autant que possible à réaliser des démonstrations adaptées à leur niveau.

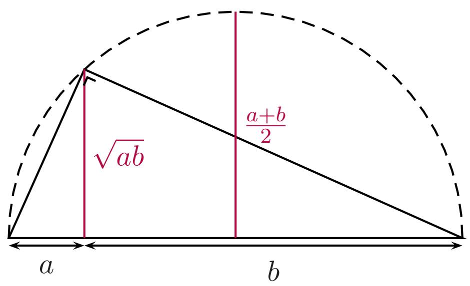
2.2. Preuves géométriques

On rencontre en géométrie des moyennes de grandeurs, par exemple la hauteur correspondant à l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse : sa mesure est donc une moyenne géométrique de deux nombres. Par ailleurs, on y trouve aussi des inégalités, telle que l'inégalité triangulaire au sein d'un triangle quelconque.

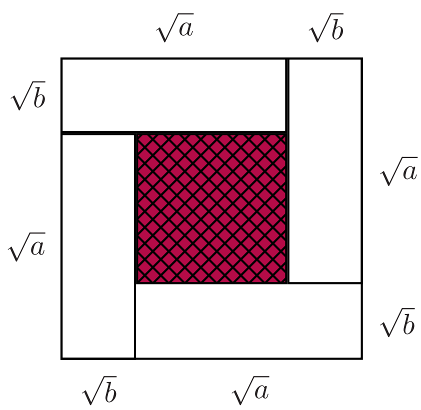
Il n'est dès lors guère étonnant de constater que des raisonnements géométriques peuvent démontrer l'IAG. Nous allons ici fixer notre attention sur un type très particulier de démonstrations géométriques. Il s'agit de *preuves sans mots*. Elles ne comprennent qu'une (ou parfois plusieurs) figure(s) habilement construite(s) ; celle(s)-ci fourni(ssen)t des indications visuelles susceptibles de stimuler la réflexion mathématique, de comprendre la situation envisagée et d'apporter une réponse quasi instantanée à la question soulevée. Nous ne nous attarderons pas sur la traduction textuelle de ces preuves, mais souhaitons néanmoins insister sur son importance : selon nous, il s'agit pour les élèves d'un exercice nécessaire, souvent difficile et très formateur.

Deux de ces preuves ont retenu notre attention.

La première se résume en une seule figure. Elle fait référence à une propriété ancienne, se trouvant déjà dans *Les Éléments* d'Euclide ; elle affirme que la perpendiculaire abaissée d'un point appartenant à un cercle sur un diamètre de ce cercle est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur ce diamètre. En d'autres termes, la mesure de la hauteur du triangle rectangle ainsi inscrit est la moyenne géométrique des deux longueurs enregistrées sur le diamètre ; ce diamètre mesure bien sûr le double du rayon, égal lui à la moyenne arithmétique des deux longueurs obtenues. L'IAG découle du fait que, visiblement, la hauteur du triangle rectangle inscrit est plus petite que le rayon (ou égale si le point du cercle est sur la perpendiculaire menée au diamètre à partir du centre). Voici une présentation suggestive de cette démonstration ;



La deuxième preuve sans mots retenue traduit géométriquement un raisonnement algébrique suggéré ci-dessus. Elle fait appel à des carrés et rectangles, et est accompagnée par une formule qui conduit à l'IAG. Elle peut se présenter comme suit :



$$\begin{aligned}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 &= a+b+2\sqrt{ab}\\ &\geqslant \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\\ &= 4\sqrt{ab}\end{aligned}$$

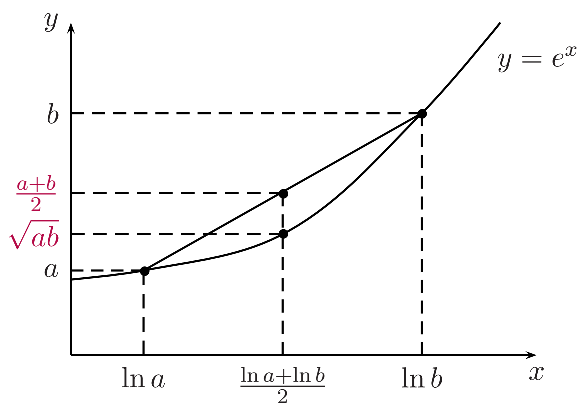
D'autres preuves sans mots de l'IAG sont possibles. Plutôt que de les passer en revue, nous conseillons aux lecteurs intéressés de consulter le livre de Nelsen [12] entièrement consacré à ce type de raisonnements et nous préférons nous demander, d'une manière générale, quel est le véritable statut de ces démonstrations sans mots. Les avis des spécialistes sont parfois contradictoires, mais nous partageons tout à fait celui-ci donné par le philosophe des mathématiques J. R. Brown (cité dans [6], p. 14).

« Les mathématiciens - comme nous tous - chérissent les idées astucieuses ; en particulier, ils se délectent devant une figure ingénieuse. Mais cette appréciation ne va pas sans un scepticisme affirmé. Après tout, une figure est – au mieux – un cas particulier et ne peut donc fonder un théorème général. Pire, elle peut être carrément trompeuse. L'attitude dominante est donc que de telles figures ne sont guère plus que des dispositifs heuristiques : elles sont psychologiquement suggestives et pédagogiquement importantes, mais elles ne prouvent rien. Je m'oppose à ce point de vue et affirme que les figures ont un rôle légitime à jouer en tant qu'évidence et justification, bien au-delà de l'heuristique. En bref, les figures peuvent démontrer des théorèmes ! »

2.3. Preuves par l'analyse

De nombreuses preuves de l'IAG font appel à des outils de l'analyse ; nous allons examiner quelques-unes de ces méthodes qui nous semblent intéressantes et accessibles pour des élèves du secondaire. Remarquons d'emblée que cette situation peut étonner à première vue puisque le résultat étudié concerne essentiellement des nombres et pas explicitement des fonctions qui sont étudiées en analyse. Mais le texte qui va suivre confirmera une constation générale, à savoir qu'une étude approfondie de fonctions permet souvent d'obtenir des résultats substantiels sur les nombres.

L'inégalité étudiée découle directement de la concavité du graphe de la fonction exponentielle comme le suggère cette nouvelle démonstration sans mots.



Nous verrons plus tard, dans le cas général, que l'on peut aussi (bien entendu) invoquer la concavité de la fonction logarithme.

Il est également possible de démontrer le résultat qui nous intéresse grâce à la théorie des extrema ; c'est ce que nous allons indiquer succinctement. En effet, le maximum de la fonction f (de deux variables x, y) définie par $f(x,y) = xy$ sous la contrainte $x + y = 1$ (avec $x > 0$ et $y > 0$), c'est-à-dire le maximum de la fonction g (en la seule variable x) définie par $g(x) = x(1-x)$, est atteint pour $x = \frac{1}{2}$ et donc $y = \frac{1}{2}$, ce qui donne donc, pour tous x et y positifs de somme unitaire, $xy \leqslant \frac{1}{4}$; il suffit alors de poser $x = \frac{a}{a+b}$ et $y = \frac{b}{a+b}$ pour obtenir

$$\frac{a}{a+b}\,\frac{b}{a+b} \leqslant \frac{1}{4} \Longleftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqslant ab$$

d'où la conclusion. On arrive au même résultat en procédant de la même façon avec la recherche du minimum de la fonction $(x,y) \mapsto x + y$ sous la contrainte $xy = 1$. D'ailleurs, ces deux problèmes sont dits *duaux* (ou encore *conjugués*) et fournissent dès lors la même solution. Ils peuvent être exprimés autrement. De fait, le problème de maximisation signifie que le produit de deux nombres positifs, de somme donnée, est maximum quand ces nombres sont égaux ; géométriquement, cela signifie que parmi tous les rectangles de périmètre connu, c'est le carré (construit sur le quart du périmètre) qui a l'aire la plus grande. De même, le problème de minimisation équivaut à dire que la somme de deux nombres positifs, de produit donné, est minimum lorsque ces nombres coïncident, ou encore que parmi tous les rectangles d'aire donnée, celui de périmètre le plus petit est le carré correspondant. Par ailleurs, mentionnons que ces raisonnements renvoient au schème de la courbe de niveau tangente [3] ; ils se généralisent dans le cas des moyennes de n nombres positifs, mais font alors appel à des fonctions de plusieurs variables et, dans ce cas, à la théorie des extrema sous contraintes (qui se traite notamment à l'aide des multiplicateurs de Lagrange).

D'autres raisonnements faisant intervenir l'analyse seront donnés ci-après.

3. Preuves dans le cas général de n nombres

Nous allons prouver l'IAG pour n (entier quelconque) nombres positifs, sans toutefois revenir sur des preuves qui ont déjà été développées pour deux nombres et qui pourraient être généralisées sans peine.

Inégalité arithmético-géométrique

Afin d'écourter certaines formules au sein du texte, nous utilisons assez souvent ces notations :

$$\sigma_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$
$$\pi_n = a_1 a_2 \cdots a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

ce qui nous conduit à écrire les moyennes arithmétique et géométrique respectivement comme suit :

$$\bar{\alpha}_n = \frac{\sigma_n}{n}\ ,\ \bar{\gamma}_n = \sqrt[n]{\pi_n}$$

3.1. Preuves algébriques

Sachant que l'inégalité IAG est vraie pour deux nombres positifs, on peut atteindre le cas général de plusieurs façons. Une première méthode consiste à observer que le cas de quatre nombres se déduit directement de ce qui est connu. En effet, on peut écrire en appliquant plusieurs fois l'inégalité $\mathcal{I}_2$

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_4 = \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_3+a_4}{2}}{2} &\geqslant \sqrt{\frac{a_1+a_2}{2} \cdot \frac{a_3+a_4}{2}} \\ &\geqslant \sqrt{\sqrt{a_1 a_2} \cdot \sqrt{a_3 a_4}} \\ &= \bar{\gamma}_4\end{aligned}$$

Le cas où $n = 3$ s'en déduit alors. De fait, il suffit de poser $a_4 = \bar{\alpha}_3$, d'où $\frac{a_1+a_2+a_3+\bar{\alpha}_3}{4} = \bar{\alpha}_3$, ce qui permet d'obtenir grâce à $\mathcal{I}_4$

$$\bar{\alpha}_3 \geqslant \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 \bar{\alpha}_3}$$

Par une élévation à la quatrième puissance des deux membres, on trouve

$$(\bar{\alpha}_3)^4 \geqslant a_1 a_2 a_3 \bar{\alpha}_3$$

d'où la thèse s'obtient sans peine.

En s'inspirant de la démarche suivie dans ces deux cas particuliers, on peut atteindre le cas général comme suit, l'idée originale de cette preuve ayant été trouvée par Cauchy (et reprise notamment dans [8], p. 17). En adoptant la méthode suivie pour $n = 4$, on s'assure d'abord que l'inégalité $\mathcal{I}_n$ est vérifiée lorsque $n = 2^m$, en répétant le même argument m fois. Dans les autres situations, on choisit m suffisamment grand pour que $2^m > n$ et on pose

$$b_i = \begin{cases} a_i \text{ pour } i = 1, \ldots, n \\ \bar{\alpha}_n \text{ pour } i = n+1, \ldots, 2^m \end{cases}$$

En appliquant ce qui précède aux b_i, on peut affirmer que

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2^m}\sum_{i=1}^{2^m} b_i\right)^{2^m} &= \left(\frac{\sigma_n + (2^m - n)\,\bar{\alpha}_n}{2^m}\right)^{2^m} \\ &\geqslant \prod_{i=1}^{2^m} b_i = \pi_n\,(\bar{\alpha}_n)^{2^m-n}\end{aligned}$$

En d'autres termes, on a

$$\left(\frac{n\bar{\alpha}_n + (2^m - n)\,\bar{\alpha}_n}{2^m}\right)^{2^m} = (\bar{\alpha}_n)^{2^m} \geqslant \pi_n\,(\bar{\alpha}_n)^{2^m-n}$$

c'est-à-dire

$$(\bar{\alpha}_n)^n \geqslant \pi_n$$

d'où la thèse.

Ce raisonnement est assez inhabituel : il ressemble un peu à de la récurrence, mais ici on ne progresse pas uniformément par “pas unitaire” ; en fait, on avance par pas particuliers et commodes (à savoir des puissances de 2), puis on revient vers l'arrière si nécessaire. Un peu de la même manière, on peut montrer que
a) $\mathcal{I}_2$ et $\mathcal{I}_n$ impliquent $\mathcal{I}_{2n}$
b) $\mathcal{I}_n$ implique $\mathcal{I}_{n-1}$
La conjonction de ces deux points règle la question ; cette démonstration est laissée aux lecteurs en guise d'exercice (voir éventuellement [1], p. 128).

Nous signalons qu'il est toutefois possible de raisonner en avançant sans retour en arrière. Donnons ici un aperçu de cette progression dont l'idée a été fournie par K. M. Chong en 1976 [5]. Cet auteur suppose connue l'inégalité $\mathcal{I}_2$, et travaille en général avec des nombres a_i rangés par valeurs croissantes ($a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$), ce qui lui permet alors d'écrire $0 < a_1 \leqslant \bar{\alpha}_n \leqslant a_n$, d'où il tire

$$\begin{aligned}(a_n - \bar{\alpha}_n)\,(\bar{\alpha}_n - a_1) &= \\ \bar{\alpha}_n\,(a_1 + a_n - \bar{\alpha}_n) - a_1 a_n &\geqslant 0 \\ &\Updownarrow \\ a_1 + a_n - \bar{\alpha}_n &\geqslant \frac{a_1 a_n}{\bar{\alpha}_n}\end{aligned}$$

Pour démontrer $\mathcal{I}_3$, il constate que la moyenne géométrique des deux nombres a_2 et $a_1 + a_3 - \bar{\alpha}_3$ est $\bar{\alpha}_3$, car $\frac{a_2+(a_1+a_3-\bar{\alpha}_3)}{2} = \bar{\alpha}_3$. Une application de $\mathcal{I}_2$ et de l'inégalité trouvée ci-dessus livre alors

$$(\bar{\alpha}_3)^2 \geqslant a_2\,(a_1 + a_3 - \bar{\alpha}_3) \geqslant a_2 \frac{a_1 a_3}{\bar{\alpha}_3}$$

et dès lors
$$(\bar{\alpha}_3)^3 \geqslant \pi_3$$
ce qui permet d'obtenir ce qu'il fallait démontrer.

Un peu semblablement, la preuve de $\mathcal{I}_4$ se fait en observant que la moyenne arithmétique des trois nombres a_2, a_3 et $a_1 + a_4 - \bar{\alpha}_4$ est égale à $\bar{\alpha}_4$. En conséquence, ce qui précède permet d'écrire
$$(\bar{\alpha}_4)^3 \geqslant a_2 a_3 \left(a_1 + a_4 - \bar{\alpha}_4\right) \geqslant a_2 a_3 \frac{a_1 a_4}{\bar{\alpha}_4}$$
ce qui mène à la conclusion.

On peut continuer à raisonner de la sorte en considérant successivement chaque entier n, et dès lors construire une démonstration classique par récurrence.

3.2. Preuves par l'analyse

L'IAG est en fait une conséquence directe de la formule de Jensen relative aux fonctions concaves. En effet, cette formule appliquée au logarithme népérien livre
$$\ln\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(a_i\right)$$
La conclusion découle des propriétés classiques du logarithme. Observons que le recours au logarithme est somme toute naturel dans la mesure où un passage au logarithme transforme un produit en somme et permet ainsi de passer aisément d'une moyenne géométrique à une moyenne arithmétique. Mais, il peut être plus surprenant de constater que l'on peut également démontrer l'IAG en employant, de façon assez astucieuse, les calculs différentiel et intégral pour une fonction d'une seule variable réelle.

Une façon efficace de travailler consiste à recourir à la fonction f définie par
$$f(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$
Son prolongement continu est partout croissant (car sa dérivée est toujours positive) et sa limite en 0 est égale à la moyenne géométrique des nombres a_i (en vertu, par exemple, de la règle de l'Hospital), tandis que sa valeur en 1 coïncide avec leur moyenne arithmétique. La conclusion découle du fait que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \leqslant f(1)$. Laissons au lecteur le soin d'éventuellement approfondir ce raisonnement et contentons-nous de signaler que cette fonction f permet de retrouver toutes les autres moyennes usuelles (harmonique, quadratique, ...), et donc de justifier l'ordre entre celles-ci ; elle peut même être adaptée au cas de moyennes pondérées (voir, par exemple, [7], p. 306 - 307).

Attardons-nous quelque peu sur deux raisonnements qui font appel à des outils élémentaires de l'analyse.

Le premier est ancien : il est dû à Liouville [9] qui a mis au point une démonstration par récurrence d'un type assez classique. Vu ce qui précède, il suffit de montrer que $\mathcal{I}_n$ implique $\mathcal{I}_{n+1}$. À cet effet, considérons la fonction f, en la variable a_{n+1}, définie par
$$f\left(a_{n+1}\right) = \left(\frac{\sigma_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} - \pi_n a_{n+1}$$
La dérivée de f vaut
$$f'\left(a_{n+1}\right) = \left(\frac{\sigma_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n} - \pi_n$$
Cette dérivée est une fonction croissante en sa variable a_{n+1} ; elle s'annule en
$$a_{n+1} = (n+1)\,\bar{\gamma}_n - \sigma_n$$
La fonction f présente en ce dernier point un minimum qui vaut
$$f\left(a_{n+1}\right) = n\pi_n\left(\bar{\alpha}_n - \bar{\gamma}_n\right)$$
Cette dernière valeur est positive ou nulle en vertu de l'hypothèse de récurrence ; la thèse est donc vraie.

Le second, plus récent, est l'œuvre de Alzer [2]. Il suppose les nombres a_i ordonnés par valeurs croissantes ($a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$), ce qui n'est évidemment pas une restriction. Il existe donc un entier k, compris entre 1 et $n-1$, tel que $a_k \leqslant \bar{\gamma}_n \leqslant a_{k+1}$. On peut écrire
$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n} \int_{a_i}^{\bar{\gamma}_n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\bar{\gamma}_n}\right) dt \;+\; \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{n} \int_{\bar{\gamma}_n}^{a_i} \left(\frac{1}{\bar{\gamma}_n} - \frac{1}{t}\right) dt \geqslant 0$$
puisque chaque expression sous le signe d'intégration est positive ou nulle. En réarrangeant les

termes intervenant dans cette dernière relation, ce qui précède peut encore s'écrire

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \int_{\bar{\gamma}_n}^{a_i} \frac{1}{\bar{\gamma}_n}\, dt \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \int_{\bar{\gamma}_n}^{a_i} \frac{1}{t}\, dt$$

En d'autres termes, on a prouvé que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{a_i - \bar{\gamma}_n}{\bar{\gamma}_n} \right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\ln a_i - \ln \bar{\gamma}_n \right)$$

ce qui est visiblement équivalent à

$$\frac{\bar{\alpha}_n}{\bar{\gamma}_n} - 1 \geqslant 0$$

Remarquons que le recours au calcul intégral dans une telle situation peut étonner en première approche, mais la méthode utilisée est somme toute relativement naturelle ; en effet, elle fait intervenir une somme d'intégrales de constantes ainsi qu'une somme de logarithmes, ce qui conduit « assez vite » aux moyennes arithmétique et géométrique respectivement.

4. Conclusion

Le sujet que nous avons choisi, à savoir prouver l'IAG, concerne des nombres et est une question habituellement rencontrée en statistique descriptive. Nous l'avons traité en travaillant dans un contexte arithmético-algébrique, puis avec de la géométrie et enfin en se référant à l'analyse. Nous invoquons donc ici tous les chapitres figurant classiquement dans une formation mathématique se situant, chez nous, essentiellement dans tout l'enseignement secondaire et au début du supérieur.

La finalité première de notre texte est bien de nature pédagogique. Nous avons voulu rappeler, sur un exemple classique et bien connu, que les différentes disciplines mathématiques traditionnellement enseignées ne sont pas cloisonnées, mais au contraire sont étroitement reliées entre elles et peuvent même devenir, d'une certaine manière, complémentaires.

Il nous a semblé important de donner l'occasion aux élèves d'aborder un même sujet par différents biais, notamment parce que certains points de vue peuvent sembler plus abordables que d'autres. Par ailleurs, il est connu qu'un changement de contexte permet souvent de progresser de façon significative dans la résolution d'un problème. En effet, il est clair que plus on possède d'outils diversifiés, plus on a de possibilités pour débloquer une situation problématique.

Un deuxième objectif de cet article est plus général et de nature épistémologique ([1]). Nous avons souhaité mettre l'accent sur le fait que le processus de création mathématique est perpétuel. En effet, d'une part, on peut toujours construire de nouveaux concepts mathématiques généralisant ceux qui sont déjà connus et, d'autre part, même lorsqu'un résultat a déjà été démontré, il est souvent possible de construire une preuve originale en abordant la même question d'une façon inédite. Notre étude sur l'IAG donne un aperçu sur ce point, en montrant que les raisonnements mathématiques sont quelquefois ingénieux et surprenants. On s'aperçoit ainsi qu'en mathématiques, il faut aussi faire preuve de créativité et d'imagination. Nous pensons que ceci s'acquiert et se développe par la pratique régulière, notamment par l'examen de théories existantes auxquelles on n'aurait peut-être pas pensé de façon immédiate.

Pour en savoir plus

[1] Aigner M. - Ziegler G.J., *Raisonnements divins - Quelques démonstrations mathématiques particulièrement élégantes*, 3e éd., Springer, 2013.

[2] Alzer H., A proof of the arithmetic mean-geometric mean inequality, *The American Mathematical Monthly*, 103, 1996, p. 585.

[3] Bair J., Le schème de la courbe de niveau tangente, *Losanges*, 24, 2014, pp. 43 - 51.

[4] Bullen P. S., *Handbook of Means and Their Inequalities*, 2nd ed., Kluwer Acad., Dordrecht - Boston, 2003.

[5] Chong K. M., An inductive proof of the AM - GM inequality, *The American Mathematical Monthly*, 83, 1976, p. 369.

[6] Delahaye J.-P., *La logique, un aiguillon pour la pensée*, Belin - Pour la Science, 2012.

([1]) Le substantif français « épistémologie » provient des mots grecs *epistémé*, qui signifie « connaissance, science » , et de *logos* dont la traduction peut être « discours » . Ce mot peut donc être défini comme suit (d'après *Le Larousse de Poche* 2009) : « la partie de la philosophie qui étudie les méthodes, les principes des sciences ».

[7] Garnir H. G., *Fonctions de variables réelles*, Tome 1, seconde édition, Vander - éditeur, Louvain - Bruxelles, 1970.

[8] Hardy G. H. - Littlewwood J.E. - Polya G., *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, 2nd ed., 1952.

[9] Liouville J., Sur la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de plusieurs quantités positives, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1ère série, tome 4, 1839, pp. 493 - 494 ; numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France (http://gallica.bnf.fr/).

[10] Lombard P., De l'intuition à l'argumentation, est-il possible d'apprendre à raisonner ? *Bulletin de l'APMEP*, n° 451, 2004, pp. 242 - 271.

[11] Mercer P. C., *More calculus of a single variable*, Springer, 2014.

[12] Nelsen R. B., *Preuves sans mots - Exercices de mathématiques visuelles*, Editions Hermann, Paris, 2013.

Jacques Bair est professeur émérite de l'Université de Liège. ✉ j.bair@ulg.ac.be

---

Une conjecture d'Euler

Il est bien connu que Fermat (1601 - 1665) avait indiqué dans la marge d'un livre que, pour tout entier n supérieur à 2, la somme de deux puissances $n^{\text{èmes}}$ (sous-entendu d'entiers) n'est pas une puissance $n^{\text{ème}}$. En 1772, Euler pensait généraliser ce résultat, qui était alors une conjecture, lorsqu'il écrivait en substance : « de même qu'il n'existe pas deux cubes dont la somme soit un cube, il est certain qu'il est impossible de trouver trois puissances quatrièmes dont la somme soit une puissance quatrième. De la même façon, il semblerait impossible de trouver quatre puissances cinquièmes dont la somme soit une puissance cinquième, et de même pour les puissances supérieures. »

Ces conjectures ont connu des sorts différents. Alors que celle de Fermat est devenue un théorème grâce à sa démonstration par l'anglais A. Wiles, celle d'Euler a été partiellement infirmée. De fait, en 1966, L. J. Lander et T. R. Parkin ont fourni le contre-exemple suivant relatif à des puissances cinquièmes :

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5.$$

Vingt ans plus tard (donc, en 1986) N. Elkies a trouvé un contre-exemple pour des puissances quatrièmes, à savoir :

$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4.$$

Remarquons que le second membre de cette égalité vaut approximativement 1.8×10^{29} ! Mais, depuis cette découverte, R. Frye a construit (en 1988) un contre-exemple plus simple, qui est d'ailleurs le plus petit possible pour des puissances quatrièmes :

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4.$$

Le problème semble encore ouvert aujourd'hui dès que $n > 5$.

Cette conjecture d'Euler, quoique partiellement fausse, n'est pas dénuée d'intérêt puisqu'elle n'est pas complètement prouvée ou anéantie. Elle illustre bien l'existence de problèmes mathématiques faciles à énoncer, mais difficiles à résoudre et dont le résultat final peut même sembler imprévisible.