Sous-arbres induits pleinement feuillus

Élise Vandomme

Séminaire de mathématiques discrètes
Liège – 19 Janvier 2017

UQÀM
Université du Québec à Montréal

Joint work with

UQAM

Alexandre Blondin-Massé

UQTR

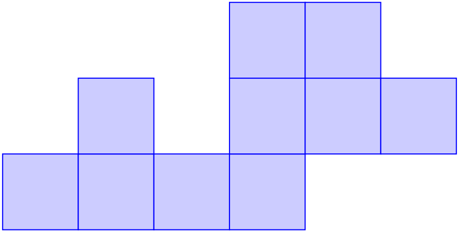
Alain Goupil

UQTR

Julien De Carufel

Introduction

Un polyomino est une réunion connexe de carrés unitaires, appelés cellules.



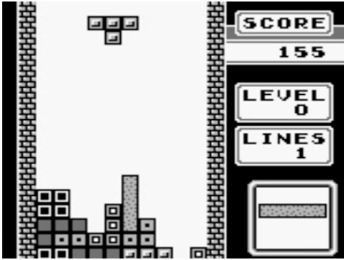
Exemple de polyominos

- Dominos

Exemple de polyominos

- Dominos

- Tetrominos



Problèmes combinatoires

- Combien existe-t-il de polyominos à n cellules ?

Problèmes combinatoires

- Combien existe-t-il de polyominos à n cellules ?
  Inconnu pour $n \geq 57$

Problèmes combinatoires

- Combien existe-t-il de polyominos à n cellules ?
  Inconnu pour $n \geq 57$
- Peut-on paver le plan avec un ensemble donné de polyominos ?

Problèmes combinatoires

- Combien existe-t-il de polyominos à n cellules ?
  Inconnu pour $n \geq 57$
- Peut-on paver le plan avec un ensemble donné de polyominos ?
  Indécidable

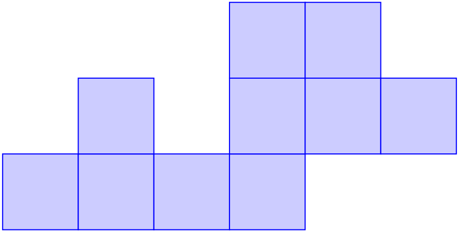
Problèmes combinatoires

- Combien existe-t-il de polyominos à n cellules ?
  Inconnu pour $n \geq 57$
- Peut-on paver le plan avec un ensemble donné de polyominos ?
  Indécidable
- Peut-on paver une région finie du plan avec un ensemble donné de polyominos ?

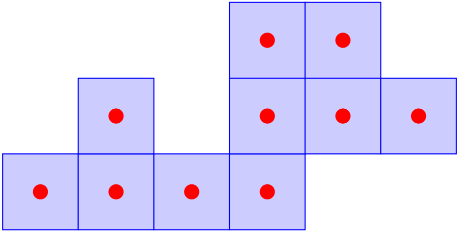
Problèmes combinatoires

- Combien existe-t-il de polyominos à n cellules ?
  Inconnu pour $n \geq 57$
- Peut-on paver le plan avec un ensemble donné de polyominos ?
  Indécidable
- Peut-on paver une région finie du plan avec un ensemble donné de polyominos ?
  NP-complet

Dans chaque polyomino se cache un arbre

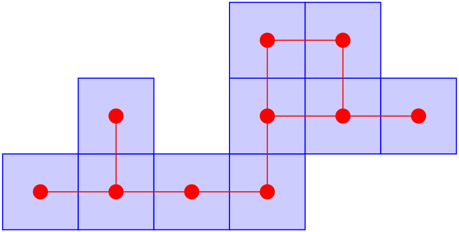


Dans chaque polyomino se cache un arbre



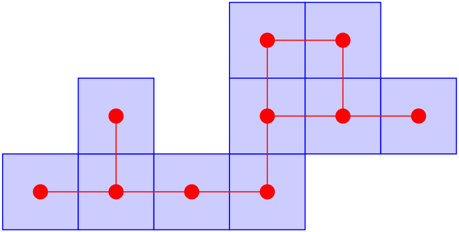
- Les sommets sont les cellules.

Dans chaque polyomino se cache un arbre



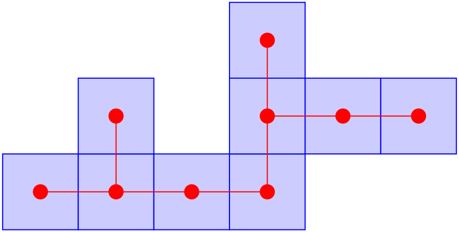
- Les sommets sont les cellules.
- Deux sommets sont adjacents si leurs cellules ont un côté en commun.

Dans chaque polyomino se cache un arbre



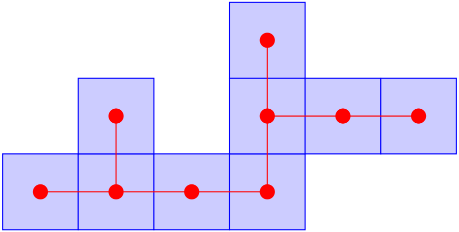
- Les sommets sont les cellules.
- Deux sommets sont adjacents si leurs cellules ont un côté en commun.
- Il peut y avoir des cycles dans ces graphes.

Polyominos-arbres



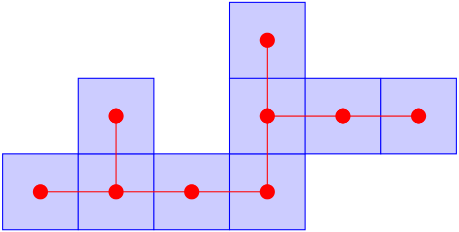
- S'il n'y pas de cycle, on parle de polyomino-arbre.

Polyominos-arbres



- S'il n'y pas de cycle, on parle de polyomino-arbre.
- Ce polyomino-arbre a 4 feuilles et 9 cellules.

Polyominos-arbres



- S'il n'y pas de cycle, on parle de polyomino-arbre.
- Ce polyomino-arbre a 4 feuilles et 9 cellules.
- Pour un nombre fixé n, quel est le nombre maximal de feuilles qu'un polyomino-arbre à n cellules peut posséder ?

Nombre maximal de feuilles ?

Théorème (Blondin-Massé, De Carufel, Goupil, Samson 2016)

Pour tout $n \geq 1$, le nombre maximal de feuilles que peut posséder un polyomino-arbre à n cellules est donné par

$$\ell(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ 2 & \text{si } n = 2 \\ n - 1 & \text{si } n = 3, 4, 5 \\ \ell(n-4) + 2 & \text{si } n \geq 6 \end{cases}$$

Nombre maximal de feuilles ?

Théorème (Blondin-Massé, De Carufel, Goupil, Samson 2016)

Pour tout $n \geq 1$, le nombre maximal de feuilles que peut posséder un polyomino-arbre à n cellules est donné par

$$\ell(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ 2 & \text{si } n = 2 \\ n - 1 & \text{si } n = 3, 4, 5 \\ \ell(n-4) + 2 & \text{si } n \geq 6 \end{cases}$$

- Résultat similaire pour les polycubes-arbres.

Nombre maximal de feuilles ?

Théorème (Blondin-Massé, De Carufel, Goupil, Samson 2016)

Pour tout $n \geq 1$, le nombre maximal de feuilles que peut posséder un polyomino-arbre à n cellules est donné par

$$\ell(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ 2 & \text{si } n = 2 \\ n - 1 & \text{si } n = 3, 4, 5 \\ \ell(n-4) + 2 & \text{si } n \geq 6 \end{cases}$$

- Résultat similaire pour les polycubes-arbres.
- Les graphes des polyominos-arbres sont les sous-arbres induits de la grille infinie $\mathbb{Z}^2$.

Nombre maximal de feuilles ?

Théorème (Blondin-Massé, De Carufel, Goupil, Samson 2016)

Pour tout $n \geq 1$, le nombre maximal de feuilles que peut posséder un polyomino-arbre à n cellules est donné par

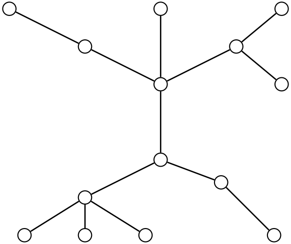
$$\ell(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ 2 & \text{si } n = 2 \\ n - 1 & \text{si } n = 3, 4, 5 \\ \ell(n-4) + 2 & \text{si } n \geq 6 \end{cases}$$

- Résultat similaire pour les polycubes-arbres.
- Les graphes des polyominos-arbres sont les sous-arbres induits de la grille infinie $\mathbb{Z}^2$.
- Étude du problème dans d'autres graphes ?

Définition

Pour $G = (V, E)$ un graphe et $n \geq 2$

- $\mathcal{T}_n$ = ensemble des sous-arbres induits à n sommets
- $L_G(n) = \max\{\#\text{ feuilles dans } T \mid T \in \mathcal{T}_n\}$
- Suite feuillue de G : $L_G(n)_{n \in \{2,\ldots,|V|\}}$



n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$L_G(n)$	2	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	8	8

Complexité

Problème LIS

- Instance : un graphe G et deux entiers $n, k \geq 1$
- Question : Existe-t-il un sous-arbre induit à n sommets et k feuilles dans G ?

Complexité

Problème LIS

- Instance : un graphe G et deux entiers $n, k \geq 1$
- Question : Existe-t-il un sous-arbre induit à n sommets et k feuilles dans G ?

Théorème (Blondin-Massé, De Carufel, Goupil, V. 2017)

Le problème LIS est NP-complet.

Complexité

Problème LIS

- Instance : un graphe G et deux entiers $n, k \geq 1$
- Question : Existe-t-il un sous-arbre induit à n sommets et k feuilles dans G ?

Théorème (Blondin-Massé, De Carufel, Goupil, V. 2017)

Le problème LIS est NP-complet.

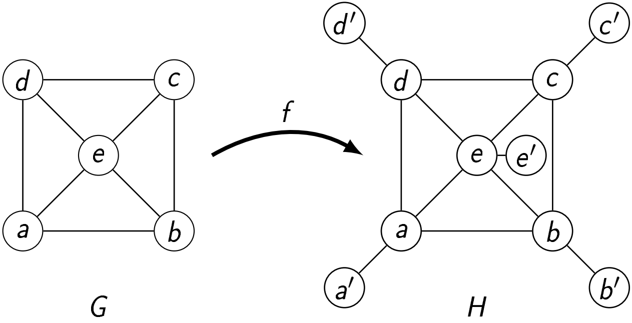
Réduction au problème :

- Instance : un graphe G et un entier $n \geq 1$
- Question : Existe-t-il un sous-arbre induit à strictement plus de n sommets ?

qui est NP-complet. [Erdös, Saks, Sós 1986]

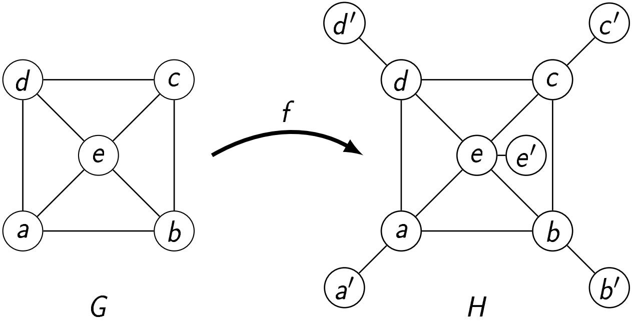
LIS est NP-complet

- Transformation polynomiale $f : (G, n) \mapsto (H, 2(n+1), n+1)$



LIS est NP-complet

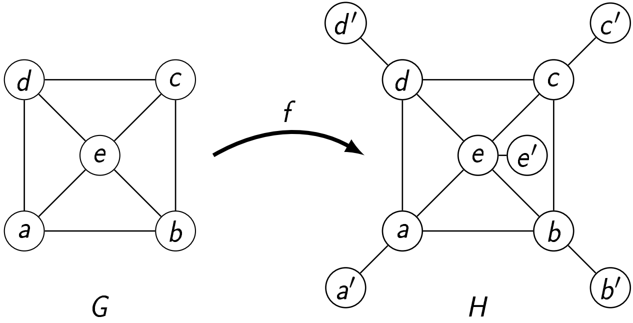
- Transformation polynomiale $f : (G, n) \mapsto (H, 2(n+1), n+1)$



- Si G a un sous-arbre induit à plus de n sommets

LIS est NP-complet

- Transformation polynomiale $f : (G, n) \mapsto (H, 2(n+1), n+1)$

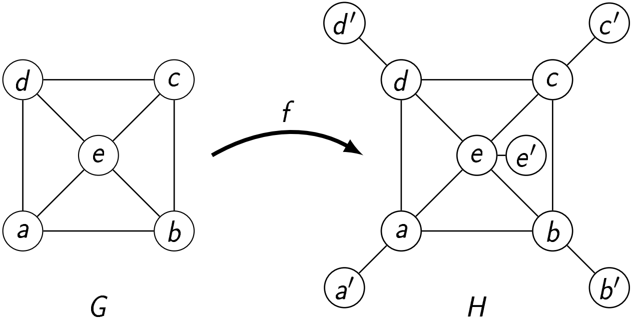


- Si G a un sous-arbre induit à plus de n sommets

$\Rightarrow$ $\exists T$ sous-arbre induit à $n+1$ sommets $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$

LIS est NP-complet

- Transformation polynomiale $f : (G, n) \mapsto (H, 2(n+1), n+1)$



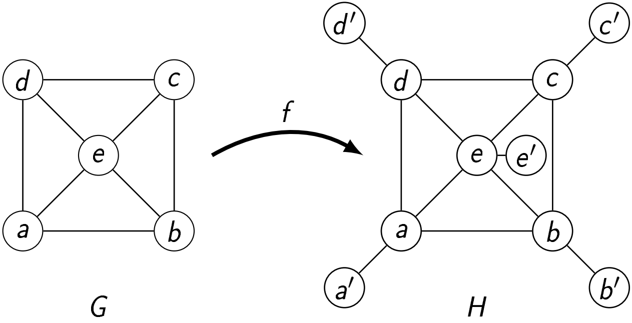
- Si G a un sous-arbre induit à plus de n sommets

$\Rightarrow$ $\exists T$ sous-arbre induit à $n+1$ sommets $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$

$\Rightarrow$ H a un sous-arbre induit par $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\} \cup \{v'_1, \ldots, v'_{n+1}\}$

LIS est NP-complet

- Transformation polynomiale $f : (G, n) \mapsto (H, 2(n+1), n+1)$



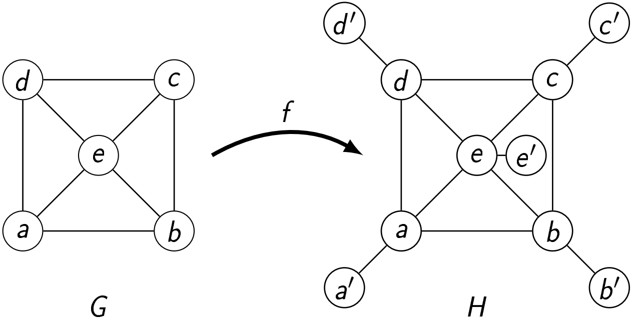
- Si G a un sous-arbre induit à plus de n sommets

$\Rightarrow$ $\exists T$ sous-arbre induit à $n+1$ sommets $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$

$\Rightarrow$ H a un sous-arbre induit par $\{v_1, \dots, v_{n+1}\} \cup \{v'_1, \dots, v'_{n+1}\}$ avec $2(n+1)$ sommets et $n+1$ feuilles

LIS est NP-complet

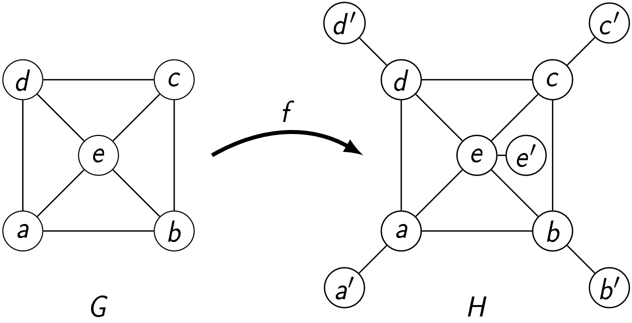
- Transformation polynomiale $f : (G, n) \mapsto (H, 2(n+1), n+1)$



- Si H a un sous-arbre induit T à $2(n+1)$ sommets et $n+1$ feuilles

LIS est NP-complet

- Transformation polynomiale $f : (G, n) \mapsto (H, 2(n+1), n+1)$

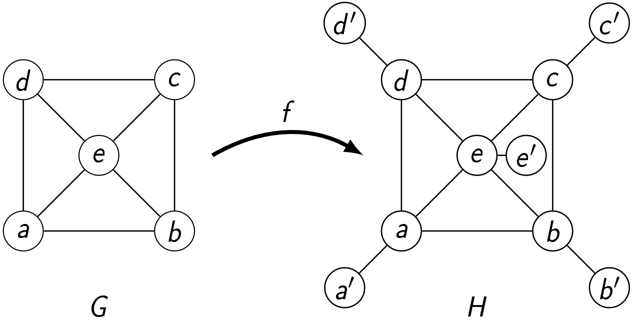


- Si H a un sous-arbre induit T à $2(n+1)$ sommets et $n+1$ feuilles

$\Rightarrow$ T a au moins $n+1$ sommets dans V

LIS est NP-complet

- Transformation polynomiale $f : (G, n) \mapsto (H, 2(n+1), n+1)$

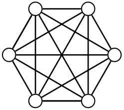


- Si H a un sous-arbre induit T à $2(n+1)$ sommets et $n+1$ feuilles

$\Rightarrow$ T a au moins $n+1$ sommets dans V

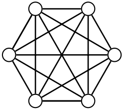
$\Rightarrow$ G a un sous-arbre induit à plus de n sommets

Cas particuliers

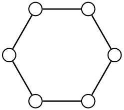
K_6 

$$L_{K_k}(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 2 \text{ et } k \geq 2 \\ -\infty & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

Cas particuliers

K_6 

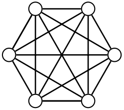
$$L_{K_k}(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 2 \text{ et } k \geq 2 \\ -\infty & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

$\mathcal{C}_6$ 

$$L_{C_k}(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } 2 \leq n < k \\ -\infty & \text{si } k \leq n \end{cases}$$

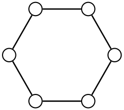
Cas particuliers

K_6



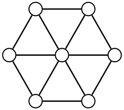
$$L_{K_k}(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 2 \text{ et } k \geq 2 \\ -\infty & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

$\mathcal{C}_6$



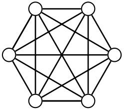
$$L_{C_k}(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } 2 \leq n < k \\ -\infty & \text{si } k \leq n \end{cases}$$

R_6

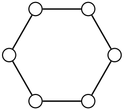


$$L_{R_k}(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } 2 = n \text{ ou } \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1 < n < k \\ n-1 & \text{si } 3 \leq n \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1 \\ -\infty & \text{si } k \leq n \end{cases}$$

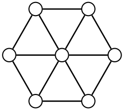
Cas particuliers

K_6 

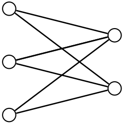
$$L_{K_k}(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 2 \text{ et } k \geq 2 \\ -\infty & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

$\mathcal{C}_6$ 

$$L_{C_k}(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } 2 \leq n < k \\ -\infty & \text{si } k \leq n \end{cases}$$

R_6 

$$L_{R_k}(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } 2 = n \text{ ou } \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1 < n < k \\ n - 1 & \text{si } 3 \leq n \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1 \\ -\infty & \text{si } k \leq n \end{cases}$$

$K_{3,2}$ 

$$L_{K_{p,q}}(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 2 \\ n - 1 & \text{si } 3 \leq n \leq \max(p, q) + 1 \\ -\infty & \text{si } \max(p, q) + 1 < n \end{cases}$$

Cas particuliers : hypercubes

Seulement des résultats partiels :

$$L_{H_3}(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } 2 \leq n \leq 3 \\ 3 & \text{si } n = 4 \\ -\infty & \text{si } 5 \leq n \end{cases} \quad \text{et } L_{H_4}(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \in \{2, 3\} \\ 3 & \text{si } n \in \{4, 6, 8\} \\ 4 & \text{si } n \in \{5, 7, 9\} \\ -\infty & \text{si } 10 \leq n \end{cases}$$

Cas particuliers : hypercubes

Seulement des résultats partiels :

$$L_{H_3}(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } 2 \leq n \leq 3 \\ 3 & \text{si } n = 4 \\ -\infty & \text{si } 5 \leq n \end{cases} \quad \text{et } L_{H_4}(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \in \{2, 3\} \\ 3 & \text{si } n \in \{4, 6, 8\} \\ 4 & \text{si } n \in \{5, 7, 9\} \\ -\infty & \text{si } 10 \leq n \end{cases}$$

Observations :

- La suite feuillue n'est pas toujours croissante.

Cas particuliers : hypercubes

Seulement des résultats partiels :

$$L_{H_3}(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } 2 \leq n \leq 3 \\ 3 & \text{si } n = 4 \\ -\infty & \text{si } 5 \leq n \end{cases} \quad \text{et } L_{H_4}(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \in \{2,3\} \\ 3 & \text{si } n \in \{4,6,8\} \\ 4 & \text{si } n \in \{5,7,9\} \\ -\infty & \text{si } 10 \leq n \end{cases}$$

Observations :

- La suite feuillue n'est pas toujours croissante.
- La suite feuillue $L_G(n)_{n \in \{2,\ldots,|V|\}}$ est croissante ssi G est un arbre.

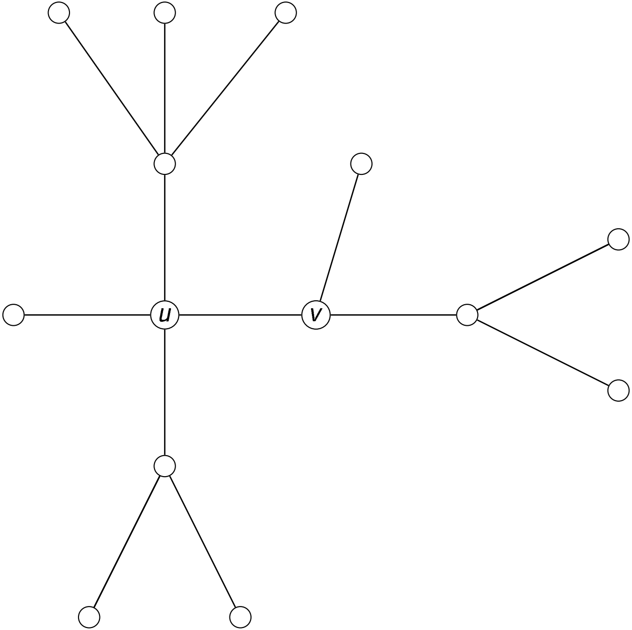
Le cas des arbres

Théorème (Blondin-Massé, De Carufel, Goupil, V. 2017)

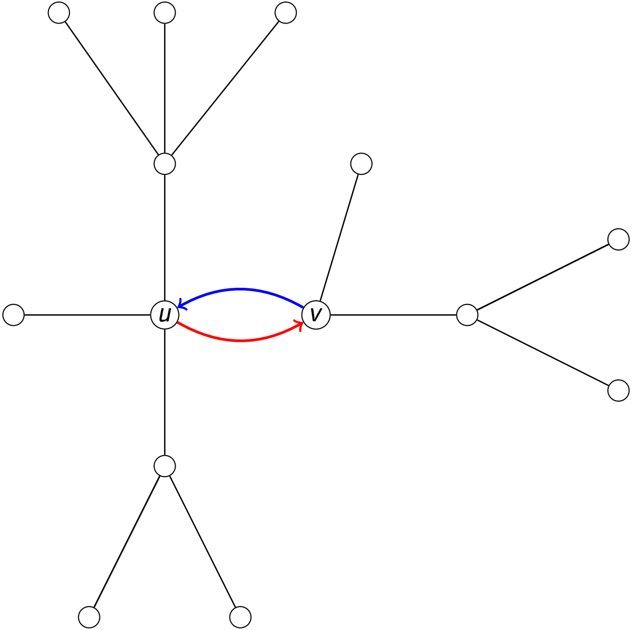
Soit T un arbre à m sommets. Alors $L_T(n)$ peut être calculé en temps et en espace polynomial.

Algorithme basé sur la programmation dynamique.

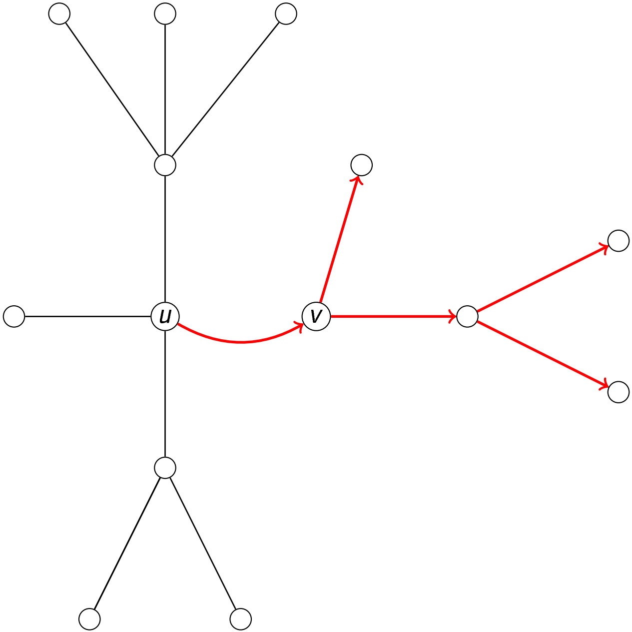
Idée de l'algorithme



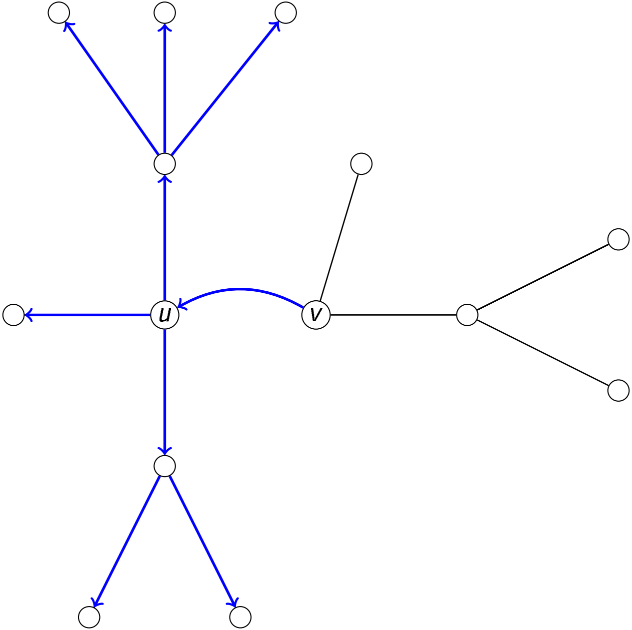
Idée de l'algorithme



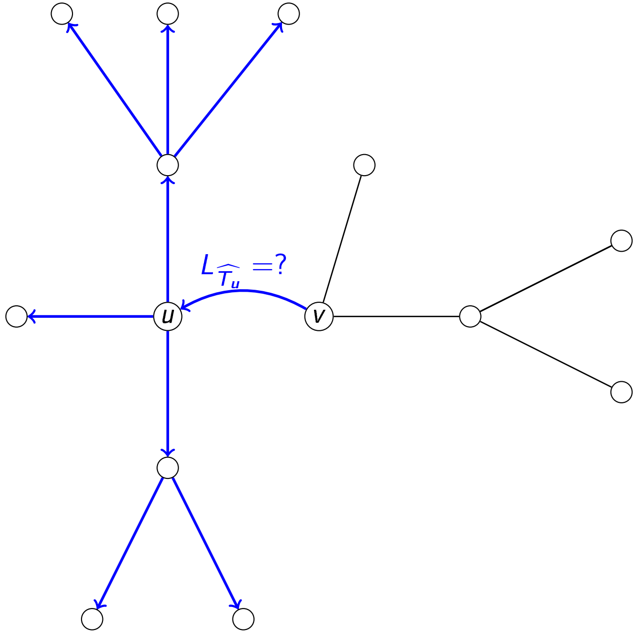
Idée de l'algorithme



Idée de l'algorithme



Idée de l'algorithme



Idée de l'algorithme

Pour un arbre $\widehat{T_u}$ orienté et enraciné en u

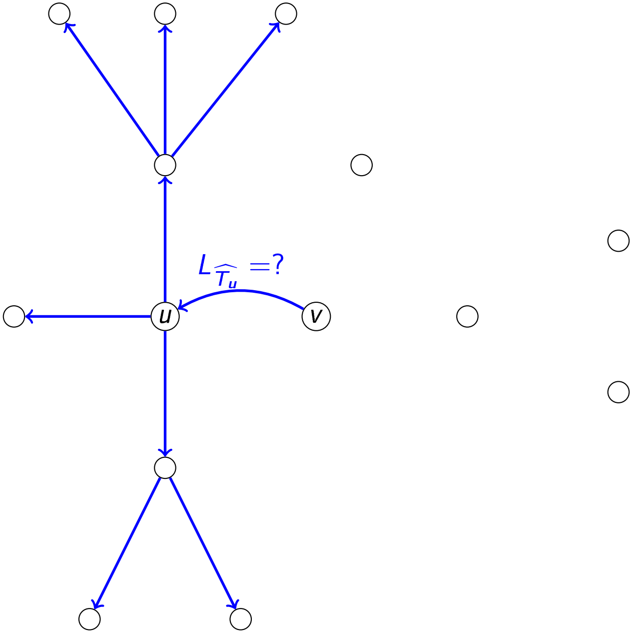
- $f(\widehat{T_u}) = \#\{x \in \widehat{T_u} \mid \deg^+(x) = 0\}$
- $L_{\widehat{T_u}}(n) = \max\{f(\widehat{T'_u}) : \widehat{T'_u} \subseteq \widehat{T_u}, |\widehat{T'_u}| = n\}$
- Extension à une forêt $\widehat{F}$ orientée à k comp. conn. $\widehat{F_i}$:

$$L_{\widehat{F}}(n) = \max\left\{ \sum_{i=1}^{k} L_{\widehat{F_i}}(\lambda(i)) \;\middle|\; \lambda \in C(n,k) \right\}$$

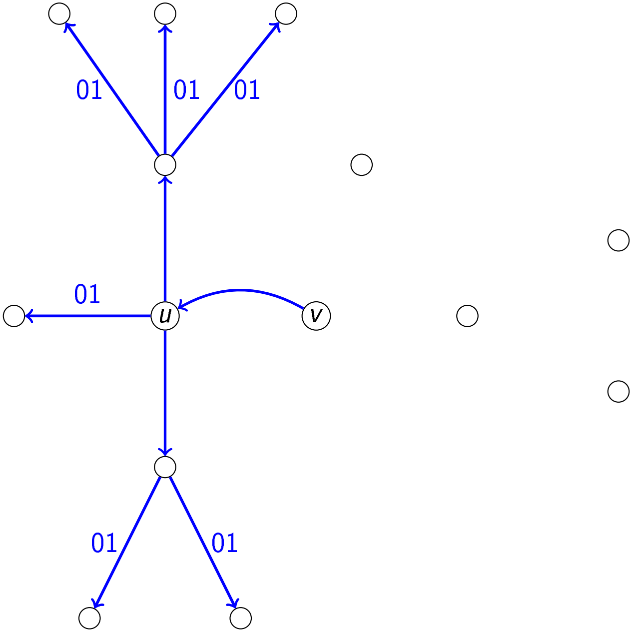
- Si $\widehat{F}$ est la forêt des sous-arbres enracinés en les fils de u,

$$L_{\widehat{T_u}}(n) = \begin{cases} n & \text{si } n = 0, 1 \\ L_{\widehat{F}}(n-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

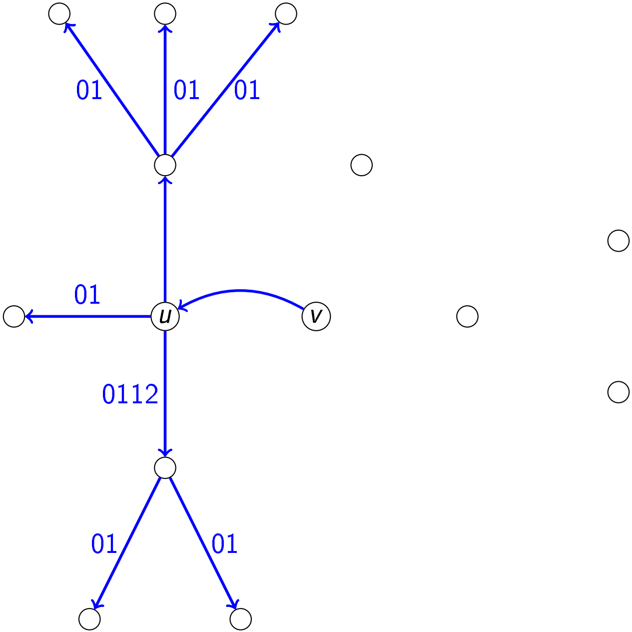
Idée de l'algorithme



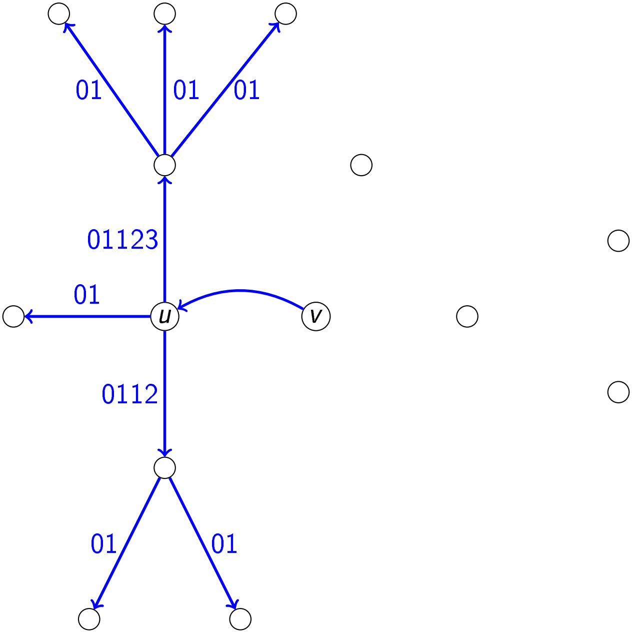
Idée de l'algorithme



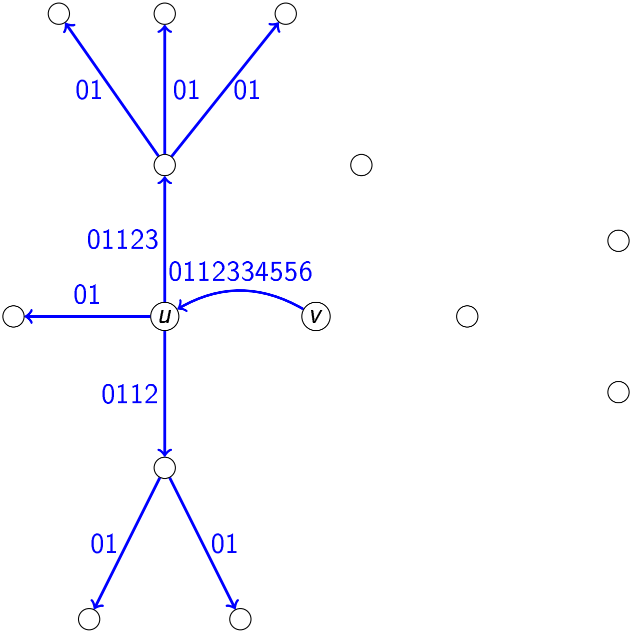
Idée de l'algorithme



Idée de l'algorithme



Idée de l'algorithme



Idée de l'algorithme

En supposant $L_{\widehat{F}_i}$ connus,

- Calcul naïf de $L_{\widehat{F}}$ via

$$L_{\widehat{F}}(n) = \max \left\{ \sum_{i=1}^{k} L_{\widehat{F}_i}(\lambda(i)) \;\middle|\; \lambda \in C(n, k) \right\}$$

en temps $\Theta(\binom{n}{k}) = \Theta(n^k / k^{n-k})$ non-polynomial !

Idée de l'algorithme

En supposant $L_{\widehat{F_i}}$ connus,

- Calcul naïf de $L_{\widehat{F}}$ via

$$L_{\widehat{F}}(n) = \max \left\{ \sum_{i=1}^{k} L_{\widehat{F_i}}(\lambda(i)) \;\middle|\; \lambda \in C(n,k) \right\}$$

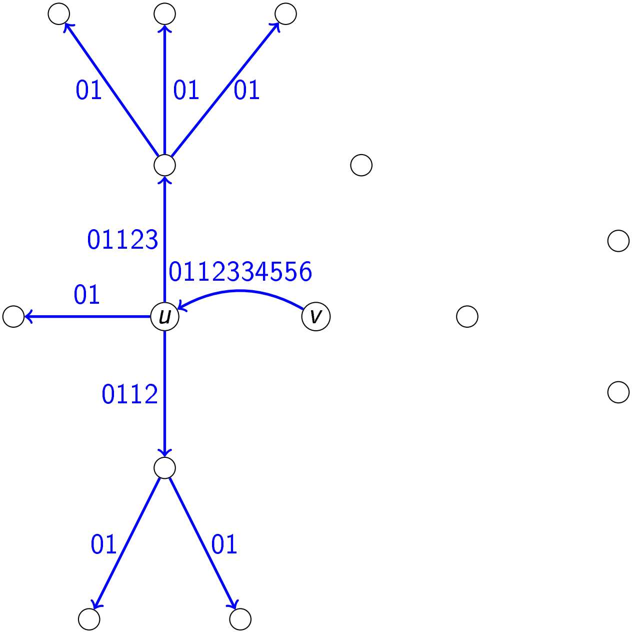
  en temps $\Theta(\binom{n}{k}) = \Theta(n^k / k^{n-k})$ non-polynomial !

- Calcul de $L_{\widehat{F}}$ via

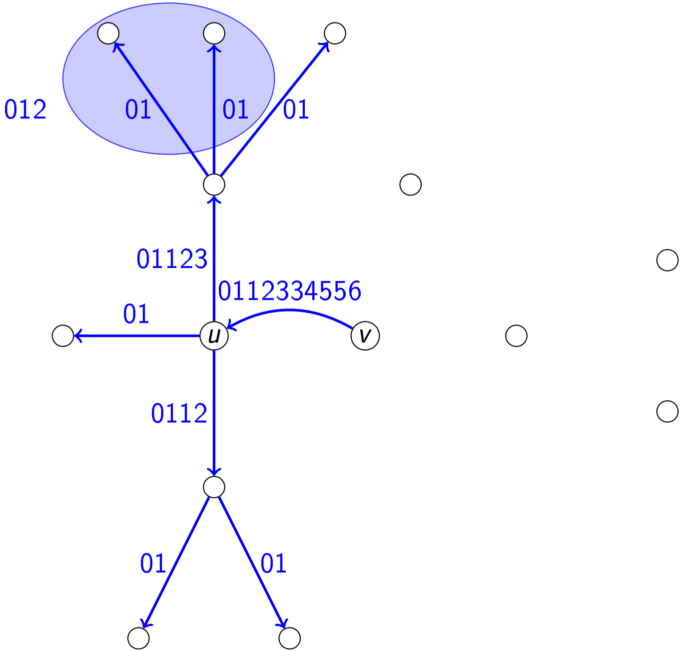
$$L_{\widehat{F}}(n) = \max\{L_{\widehat{F-F_1}}(i) + L_{\widehat{F_1}}(n-i) \mid 0 \leq i \leq n\}$$

  en temps $\Theta(km^2)$

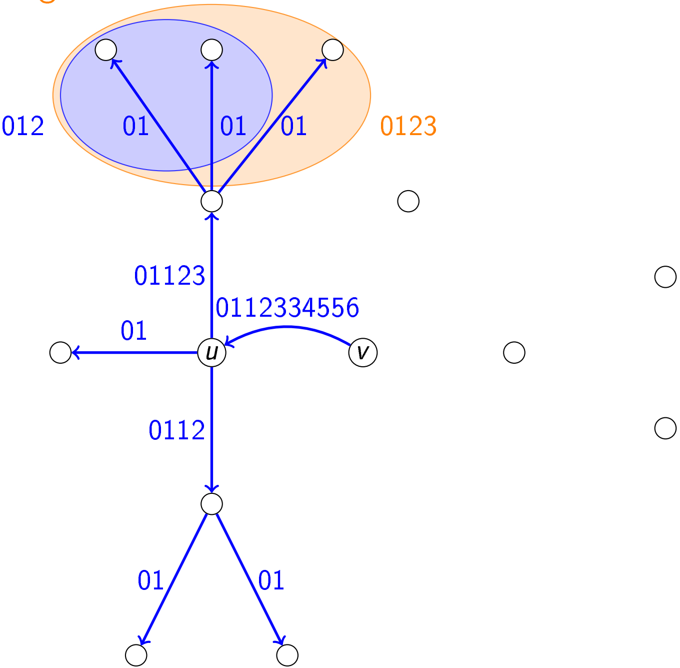
Idée de l'algorithme



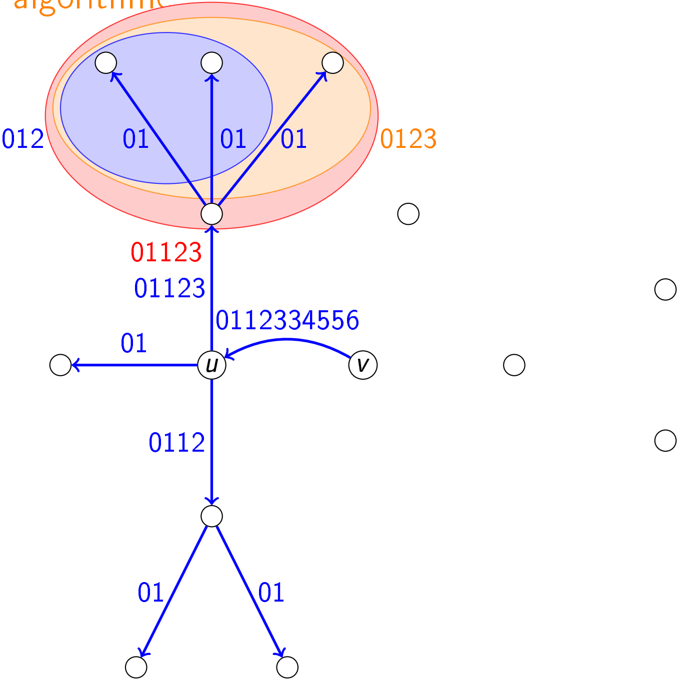
Idée de l'algorithme



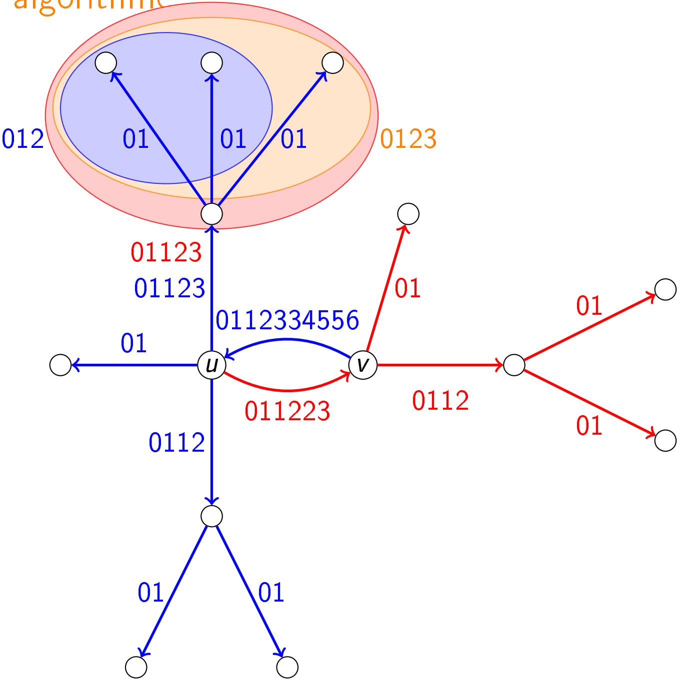
Idée de l'algorithme



Idée de l'algorithme



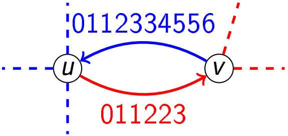
Idée de l'algorithme



Idée de l'algorithme

- Nombre maximum de feuilles dans les sous-arbres à n sommets, contenant l'arête $\{u, v\}$:

$$L_{\{u,v\}}(n) = \max\left\{ L_{\widehat{T_u}}(i) + L_{\widehat{T_v}}(n-i) \;\middle|\; 1 \leq i \leq n-1 \right\}$$

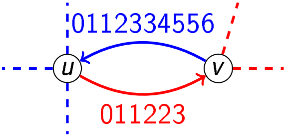


$$L_{\{u,v\}} = 012234456677889$$

Idée de l'algorithme

- Nombre maximum de feuilles dans les sous-arbres à n sommets, contenant l'arête $\{u, v\}$:

$$L_{\{u,v\}}(n) = \max \left\{ L_{\widehat{T_u}}(i) + L_{\widehat{T_v}}(n-i) \;\middle|\; 1 \leq i \leq n-1 \right\}$$

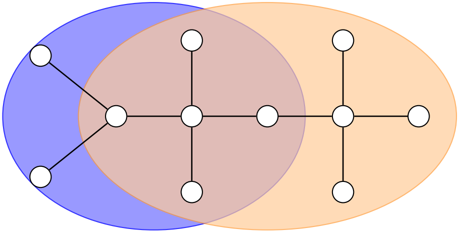


$$L_{\{u,v\}} = 01223445667788 9$$

- $L_T(n) = \max \left\{ L_{\{u,v\}}(n) \;\middle|\; \{u,v\} \in E \right\}$

Peut-on faire mieux ?

- On ne peut pas espérer obtenir une procédure de calcul de $L_T(n)$ qui efface successivement des feuilles.
- Contre-exemple :

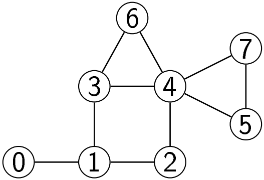


$$L_T(7) = 5 \quad \text{et } L_T(9) = 6$$

Le cas des graphes à largeur arborescente constante

(X, T) est une décomposition en arbre du graphe $G = (V, E)$ si

- $X = \{X_1, \ldots, X_\ell\}$ où $X_i \subseteq V$
- $\cup_{i=1}^{\ell} X_i = V$
- T est un arbre avec X pour ensemble de sommets
- pour tout $uv \in E$, il existe i tel que $u, v \in X_i$
- pour tous i, j, k, si le noeud X_j est sur un chemin entre X_i et X_k, alors $X_i \cap X_k \subseteq X_j$

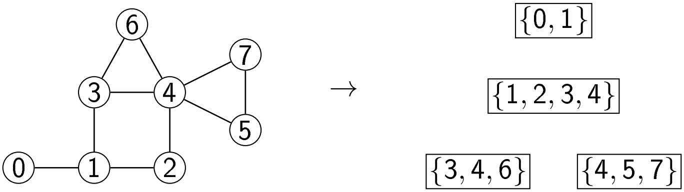


$\rightarrow$

Le cas des graphes à largeur arborescente constante

(X, T) est une décomposition en arbre du graphe $G = (V, E)$ si

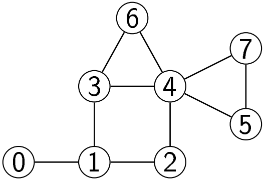
- $X = \{X_1, \ldots, X_\ell\}$ où $X_i \subseteq V$
- $\cup_{i=1}^{\ell} X_i = V$
- T est un arbre avec X pour ensemble de sommets
- pour tout $uv \in E$, il existe i tel que $u, v \in X_i$
- pour tous i, j, k, si le noeud X_j est sur un chemin entre X_i et X_k, alors $X_i \cap X_k \subseteq X_j$



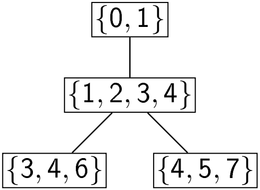
Le cas des graphes à largeur arborescente constante

(X, T) est une décomposition en arbre du graphe $G = (V, E)$ si

- $X = \{X_1, \ldots, X_\ell\}$ où $X_i \subseteq V$
- $\cup_{i=1}^{\ell} X_i = V$
- T est un arbre avec X pour ensemble de sommets
- pour tout $uv \in E$, il existe i tel que $u, v \in X_i$
- pour tous i, j, k, si le noeud X_j est sur un chemin entre X_i et X_k, alors $X_i \cap X_k \subseteq X_j$

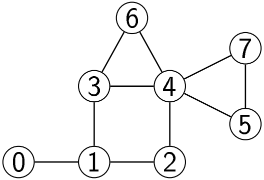


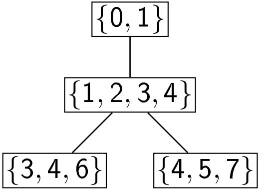
$\rightarrow$



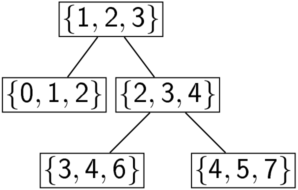
Largeur arborescente

- Largeur d'une décomposition (X, T) : $\max_i |X_i| - 1$





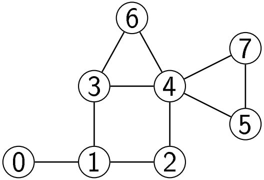
Largeur : 3

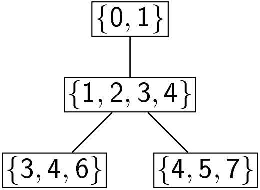


Largeur : 2

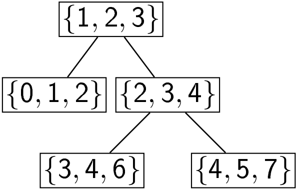
Largeur arborescente

- Largeur d'une décomposition (X, T) : $\max_i |X_i| - 1$





Largeur : 3



Largeur : 2

- Largeur arborescente de G = min des largeurs de toutes ses décompositions

Un peu de logique

Théorème (Courcelle 1990)

Soit F une formule de la logique monadique du second ordre. Sur les graphes de largeur arborescente constante, F peut être décidée en temps polynomial.

Un peu de logique

Théorème (Courcelle 1990)

Soit F une formule de la logique monadique du second ordre. Sur les graphes de largeur arborescente constante, F peut être décidée en temps polynomial.

Pour un graphe $G = (V, E)$, on note

- $\lfloor G \rfloor = \langle V, adj \rangle$ où $adj(u, v)$ est vrai si $uv \in E$
- $\lfloor G \rfloor \models F$

Un peu de logique

Théorème (Courcelle 1990)

Soit F une formule de la logique monadique du second ordre. Sur les graphes de largeur arborescente constante, F peut être décidée en temps polynomial.

Pour un graphe $G = (V, E)$, on note

- $\lfloor G \rfloor = \langle V, adj \rangle$ où $adj(u, v)$ est vrai si $uv \in E$
- $\lfloor G \rfloor \models F$

Proposition (Blondin-Massé, De Carufel, Goupil, V. 2017)

Soit $w \in \mathbb{N}$. Le problème LIS est polynomial pour les graphes de largeur arborescente w.

Traduction : $\exists U \ \phi(U, n, k)$

Il existe un sous-arbre induit
à n sommets et k feuilles.

Traduction : $\exists U \; \phi(U, n, k)$

Il existe un sous-graphe induit connexe et acyclique
à n sommets et k feuilles.

Traduction : $\exists U\ \phi(U, n, k)$

Il existe un sous-graphe induit connexe et acyclique
à n sommets et k feuilles.

- U induit un sous-graphe connexe : $\mathrm{CONN}(U)$

$$\forall u, v\ ((u \in U \wedge v \in U) \rightarrow \psi(u, v))$$

- u et v sont dans la clôture réflexive et transitive de la relation *adj* : $\psi(u, v)$

Traduction : $\exists U \; \phi(U, n, k)$

Il existe un sous-graphe induit connexe et acyclique
à n sommets et k feuilles.

- U induit un sous-graphe connexe : $\mathrm{CONN}(U)$

$$\forall u, v \; ((u \in U \wedge v \in U) \rightarrow \psi(u, v))$$

- u et v sont dans la clôture réflexive et transitive de la relation *adj* : $\psi(u, v)$

$$\forall X \; ((u \in X \wedge [\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{X \text{ fermé pour } adj}]) \rightarrow v \in X)$$

Traduction : $\exists U \; \phi(U, n, k)$

Il existe un sous-graphe induit connexe et acyclique
à n sommets et k feuilles.

- U induit un sous-graphe connexe : $\mathrm{CONN}(U)$

$$\forall u, v \; ((u \in U \wedge v \in U) \rightarrow \psi(u, v))$$

- u et v sont dans la clôture réflexive et transitive de la relation *adj* : $\psi(u, v)$

$$\forall X \; ((u \in X \wedge [\underbrace{\forall x, y \; (x \in X \wedge adj(x, y)) \rightarrow y \in X}_{X \text{ fermé pour } adj}]) \rightarrow v \in X)$$

Traduction : $\exists U \ \phi(U, n, k)$

Il existe un sous-graphe induit connexe et acyclique
à n sommets et k feuilles.

- U induit un sous-graphe connexe : $\mathrm{CONN}(U)$

$$\forall u, v \ ((u \in U \wedge v \in U) \rightarrow \psi(u, v))$$

- u et v sont dans la clôture réflexive et transitive de la relation *adj* : $\psi(u, v)$

$$\forall X \ ((u \in X \wedge [\underbrace{\forall x, y \ (x \in X \wedge adj(x, y)) \rightarrow y \in X}_{X \text{ fermé pour } adj}]) \rightarrow v \in X)$$

- U induit un sous-graphe acyclique : $\mathrm{ACY}(U)$

Traduction : $\exists U \; \phi(U, n, k)$

Il existe un sous-graphe induit connexe et acyclique
à n sommets et k feuilles.

- U induit un sous-graphe connexe : $\mathrm{CONN}(U)$

$$\forall u, v \; ((u \in U \wedge v \in U) \rightarrow \psi(u, v))$$

- u et v sont dans la clôture réflexive et transitive de la relation *adj* : $\psi(u, v)$

$$\forall X \; ((u \in X \wedge [\underbrace{\forall x, y \; (x \in X \wedge adj(x, y)) \rightarrow y \in X}_{X \text{ fermé pour } adj}]) \rightarrow v \in X)$$

- U induit un sous-graphe acyclique : $\mathrm{ACY}(U)$

$$\neg(X\text{contient un cycle à 3 sommets})$$

Traduction : $\exists U\ \phi(U, n, k)$

Il existe un sous-graphe induit connexe et acyclique
à n sommets et k feuilles.

- U induit un sous-graphe connexe : $\mathrm{CONN}(U)$

$$\forall u, v\ ((u \in U \wedge v \in U) \rightarrow \psi(u, v))$$

- u et v sont dans la clôture réflexive et transitive de la relation *adj* : $\psi(u, v)$

$$\forall X\ ((u \in X \wedge [\underbrace{\forall x, y\ (x \in X \wedge adj(x, y)) \rightarrow y \in X}_{X \text{ fermé pour } adj}]) \rightarrow v \in X)$$

- U induit un sous-graphe acyclique : $\mathrm{ACY}(U)$

$$\neg(\exists x, y, z$$
$$(x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x \wedge adj(x, z) \wedge adj(z, y)$$

Traduction : $\exists U\ \phi(U, n, k)$

Il existe un sous-graphe induit connexe et acyclique
à n sommets et k feuilles.

- U induit un sous-graphe connexe : $\mathrm{CONN}(U)$

$$\forall u, v\ ((u \in U \wedge v \in U) \rightarrow \psi(u, v))$$

- u et v sont dans la clôture réflexive et transitive de la relation *adj* : $\psi(u, v)$

$$\forall X\ ((u \in X \wedge \underbrace{[\forall x, y\ (x \in X \wedge adj(x, y)) \rightarrow y \in X]}_{X \text{ fermé pour } adj}) \rightarrow v \in X)$$

- U induit un sous-graphe acyclique : $\mathrm{ACY}(U)$

$$\neg(\exists x, y, z$$
$$(x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x \wedge adj(x, z) \wedge adj(z, y)$$
$$\wedge \exists X\ (z \notin X \wedge x \in X \wedge y \in X \wedge \mathrm{CONN}(X))))$$

Traduction (suite)

- U a n éléments : $\mathrm{CARD}(U, n)$

$$\exists u_1, \ldots, u_n$$
$$(\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} (u_i \in U \wedge (i \neq j \rightarrow u_i \neq u_j))$$
$$\wedge\ (\forall u (\bigwedge_{i=1}^{n} u \neq u_i) \rightarrow u \notin U))$$

Traduction (suite)

- U a n éléments : $\mathrm{CARD}(U, n)$

$$\exists u_1, \ldots, u_n$$
$$\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} (u_i \in U \wedge (i \neq j \to u_i \neq u_j))$$
$$\wedge (\forall u (\bigwedge_{i=1}^{n} u \neq u_i) \to u \notin U)\Big)$$

- U a k "feuilles" :

$$\exists V\ (\mathrm{CARD}(V, k)$$
$$\wedge \forall v (v \in V \to v \in U$$
$$\wedge \exists u\ (u \in U \wedge adj(u, v)$$
$$\wedge (\forall x\ ((x \in U \wedge x \neq u) \to \neg adj(x, v))))))$$

Perspectives

- Décrire un algorithme polynomial pour les graphes de largeur arborescente constante

Perspectives

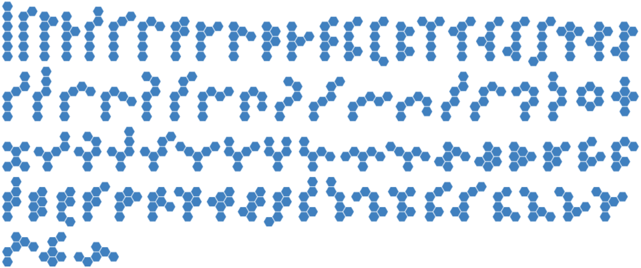
- Décrire un algorithme polynomial pour les graphes de largeur arborescente constante
- Déterminer quand une suite d'entiers correspond à un arbre ou à un graphe

Perspectives

- Décrire un algorithme polynomial pour les graphes de largeur arborescente constante
- Déterminer quand une suite d'entiers correspond à un arbre ou à un graphe
- Vérifier s'il existe une application utile en chimie

Perspectives

- Décrire un algorithme polynomial pour les graphes de largeur arborescente constante
- Déterminer quand une suite d'entiers correspond à un arbre ou à un graphe
- Vérifier s'il existe une application utile en chimie
- Étendre les résultats obtenus dans $\mathbb{Z}^2$ à la grille infinie triangulaire (polyiamonds) et à la grille hexagonale (polyhexes)




WORDS
WORDS
Invited Speakers
David Clampitt (USA)
Volker Diekert (Germany)
Anna Frid (France)
Štěpán Holub (Czechia)
Lila Kari (Canada)
Program Committee
Elena Barcucci
Valérie Berthé
Srečko Brlek (chair)
Arturo Carpi
Émilie Charlier
Sylvie Hamel
Juhani Karhumäki
Xavier Provençal
Michaël Rao
Christophe Reutenauer (chair)
Organizing Committee
Srečko Brlek
Francesco Dolce
Johanne Patoine
Élise Vandomme
words2017@lacim.ca
WORDS 2017
words2017.lacim.uqam.ca
September 11-15, 2017
Montréal (Québec) Canada