

# LES GRANDES MÉTHODES DE CALCUL DES MODES ET FRÉQUENCES PROPRES DANS LES STRUCTURES COMPLEXES

par B. FRAEIJIS DE VEUBEKE,  
Professeur aux Universités de Liège et de Louvain

---

**Résumé.** — *Les principales méthodes de calcul des fréquences propres et des modes associés sont passées en revue. L'exposé est basé sur un exemple relativement simple qui permet cependant de mettre en relief la différence de complexité entre un problème de petites oscillations autour d'une position d'équilibre et un problème de petites oscillations autour d'un mouvement permanent. Dans cette dernière catégorie la présence d'effets centrifuges et gyroscopiques réduit assez sensiblement l'arsenal des méthodes disponibles et la notion même de modes de vibrations devient à la fois plus complexe et mathématiquement moins féconde.*

## Introduction

La connaissance du spectre des fréquences propres de vibration d'une structure ou d'un organe de machine permet déjà d'apprécier les possibilités de résonance. Tout aussi importante, pour une estimation quantitative du niveau de l'excitation vibratoire par les forces extérieures, est la connaissance du « mode » ou « forme propre » de la vibration correspondant à chaque fréquence propre.

Une structure élastique continue, mais de volume limité, possède une infinité dénombrable de modes vibratoires. Quelques cas élémentaires

mis à part, il ne peut être question de les déterminer tous. Le choix des modes importants est parfois délicat. En général il est basé sur la considération des deux facteurs suivants : l'écart entre la fréquence propre et la ou les fréquences d'excitation, la puissance virtuelle exercée par la distribution des forces excitatrices sur les vitesses de déplacement propres au mode considéré. Ces deux facteurs déterminent effectivement le niveau d'excitation du mode pour autant que les forces extérieures ne dépendent pas elles-mêmes du mouvement. Dans ce dernier cas, typiquement représenté par les forces aérodynamiques non stationnaires, des phénomènes nouveaux et gênants comme l'instabilité connue sous le nom de « flottement » peuvent apparaître ; le choix des modes importants est alors gouverné par des critères plus spéciaux.

En limitant les possibilités de déformation élastique de la structure aux modes importants, c'est-à-dire fortement excités, on la remplace effectivement par un modèle à nombre fini de degrés de liberté, dont la manipulation est considérablement simplifiée sans avoir sacrifié indûment la précision de la réponse dynamique. Dans cette optique on peut distinguer deux catégories de problèmes où la notion de mode de vibration est utile.

1. Les petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable ou indifférente,
2. Les petites oscillations autour d'un mouvement uniforme.

La seconde catégorie est plus générale et plus riche en effets dynamiques, car elle comporte des effets centrifuges et des couplages gyroscopiques, absents dans la première. Il n'est donc pas étonnant que certaines méthodes de calcul, dont le principe reste correct, soulèvent des difficultés d'ordre pratique quand on veut les étendre à la seconde catégorie.

**1. — La formulation mathématique d'un problème de petites oscillations**

Elle se fait le plus facilement à l'aide du principe de Hamilton [1, 2]. Ce dernier est non seulement un fondement de la mécanique analytique mais aussi un outil pratique et puissant pour écrire les équations du mouvement et y introduire de façon logique et cohérente les approximations justifiées par la petitesse des déplacements. Nous l'illustrons sur un exemple.

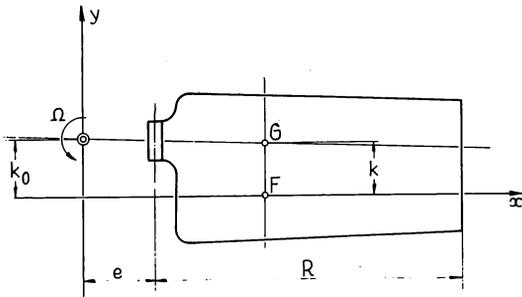
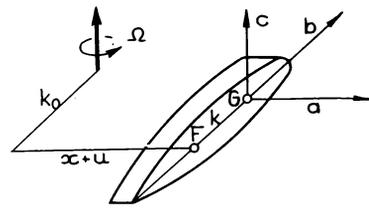


Fig. 1.

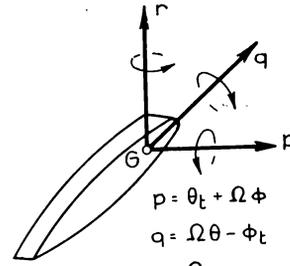
Soit (fig. 1) une pale flexible en rotation de vitesse angulaire  $\Omega$  autour d'un axe vertical. Les centres de flexion-torsion dans les diverses sections droites sont supposés alignés sur une droite prise comme axe  $ox$ . Les centres de masse sont alignés sur une autre droite, recoupant l'axe de rotation.

Les déplacements d'une section sont décrits par une translation  $u(x, t)$  suivant  $ox$ ,  $w(x, t)$  parallèlement à l'axe de rotation et une rotation  $\theta(x, t)$  autour de  $ox$ . Les distorsions de la section dans son plan sont négligées.

Les déplacements sont mesurés à partir de la configuration d'équilibre de la pale en rotation, c'est-à-dire telle que déjà tendue élastiquement par la force centrifuge. Dans ces conditions on peut admettre que les oscillations transversales  $w(x, t)$  et  $\theta(x, t)$  se font sans allongements additionnels de la pale. Ceci est introduit a priori pour simplifier l'exposé, quoique dans une dérivation complète on puisse justifier le découplage entre les petites oscillations transversales et longitudinales.



$$\begin{aligned} a &= u_t + \Omega(k_0 - k) \\ b &= \Omega(x + u) \\ c &= \omega_t + k\theta_t \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} p &= \theta_t + \Omega\phi \\ q &= \Omega\theta - \phi_t \\ r &= \Omega \end{aligned}$$

Fig. 2.

L'hypothèse de l'inextensibilité longitudinale se traduit mathématiquement par :

$$ds - dx = dx [\sqrt{(1 + u_x)^2 + w_x^2} - 1] = 0$$

ou, puisque  $u_x$  et  $w_x$  sont petits devant l'unité :

$$u_x + \frac{1}{2} w_x^2 = 0$$

en négligeant les puissances troisièmes et supérieures des grandeurs petites. L'expression :

$$u(x, t) = -\frac{1}{2} \int_0^x \varphi^2 dx \tag{1}$$

où :

$$\varphi(x, t) = w_x(x, t) \tag{2}$$

dénote la pente de flexion, exprime le déplacement longitudinal des sections dû à la flexion de la pale, c'est une grandeur petite du second ordre.

L'énergie cinétique d'une tranche  $dx$ , considérée comme un solide de masse  $mdx$  et de moments d'inertie  $A dx$ ,  $B dx$  et  $C dx$  autour d'axes respectivement parallèles à  $ox$ ,  $oy$  et  $oz$  et passant par le centre de masse vaut, selon le théorème de Koenig (fig. 2) :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} m dx [u_t + \Omega(k_0 - k)]^2 + \frac{1}{2} m \Omega^2 dx (x + u)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} m dx (w_t + k\theta_t)^2 + \frac{1}{2} A dx (\Omega\phi + \theta_t)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} B dx (\Omega\theta - \phi_t)^2 + \frac{1}{2} C dx \Omega^2 \end{aligned}$$

Dans cette expression les termes :

$$\frac{1}{2} \int m dx \Omega^2 (k_0 - k)^2 + \frac{1}{2} \int m dx \Omega^2 x^2 + \frac{1}{2} \int C dx \Omega^2$$

peuvent être écartés comme des constantes sans influence sur les équations du mouvement. D'autre part, le problème étant limité aux petites oscillations, les déplacements transversaux  $w$  et  $\theta$  ainsi que leurs dérivées sont des grandeurs petites du premier ordre et les termes qui les contiennent avec un degré supérieur à deux peuvent être négligés. En vertu de (1) ceci permet d'éliminer les termes en  $u^2$  et  $u_t^2$ . Enfin le terme :

$$m dx \Omega (k_0 - k) u_t = \frac{\partial}{\partial t} [m dx \Omega (k_0 - k) u]$$

est une dérivée partielle exacte par rapport au temps et ne fournit aucune contribution dans l'application du principe de Hamilton.

On peut en définitive garder pour l'élément de pale l'expression :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \Omega^2 dS \int_0^x \varphi^2 dx + \frac{1}{2} \int m dx (w_t + k\theta_t)^2 \\ & + \frac{1}{2} \int A dx (\Omega\varphi + \theta_t)^2 + \frac{1}{2} \int B dx (\Omega\theta - \varphi_t)^2 \end{aligned}$$

où l'on a introduit le moment statique longitudinal :

$$S(x) = \int_x^{R+e} x' m(x') dx' \quad dS = -x m dx$$

qui joue un rôle prépondérant dans les effets centrifuges. Moyennant une intégration par parties sur le premier terme tenant compte des propriétés  $u(e, t) = 0$  et  $S(e + R) = 0$ , il vient pour l'énergie cinétique totale :

$$\begin{aligned} T = & -\frac{\Omega^2}{2} \int_0^{e+R} S(x) \varphi^2 dx + \frac{\Omega^2}{2} \int_{e_1}^{e+R} (A\varphi^2 + B\theta^2) dx \\ & + \Omega \int_0^{e+R} (A\varphi\theta_t - B\theta\varphi_t) dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{e+R} [m(w_t + k\theta_t)^2 + A\theta_t^2 + B\varphi_t^2] dx \quad (4). \end{aligned}$$

L'intervention du facteur  $\Omega$  permet de distinguer les termes centrifuges (première ligne) et les termes gyroscopiques (seconde ligne). Pour  $\Omega = 0$  ne subsistent que les termes de la dernière ligne et le problème rentre alors dans la première catégorie.

Le choix des centres de flexion-torsion comme référence locale permet de décomposer l'énergie de déformation élastique dans une partie flexion et une partie torsion :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{e+R} EI w_{xx}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{e+R} GJ \theta_x^2 dx \quad (5)$$

L'énergie de déformation due aux efforts tranchants peut être négligée sauf pour les modes de fréquence très élevée [21].

Les équations du mouvement se déduisent du principe de Hamilton :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (6)$$

en prenant des variations arbitraires :

$$\delta w(x, t) \quad \delta \varphi = \frac{\partial}{\partial x} \delta w \quad \delta \theta(x, t)$$

sur les déplacements sauf aux limites du temps

$$\begin{aligned} \delta w(x, t_1) = 0 \quad \delta w(x, t_2) = 0 \\ \delta \theta(x, t_1) = 0 \quad \delta \theta(x, t_2) = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

Après avoir appliqué l'opérateur sous les signes intégrales comme une différentielle ordinaire, on effectue les intégrations par parties en  $t$  ou en  $x$  requises pour ne laisser subsister sous les intégrales que les variations  $\delta w$  et  $\delta \theta$ . L'annulation des coefficients de ces variations fournit les deux équations du mouvement :

$$\begin{aligned} -[EIw_{xx}]_{xx} - mw_{tt} + \Omega^2 [(S \cdot A)w_x]_x + [Bw_{xt}]_x - \\ - mk\theta_{tt} - \Omega [(A + B)\theta_t]_x = 0 \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [GJ\theta_x]_x - (A + mk^2)\theta_{tt} + \Omega^2 B\theta - \\ - mkw_{tt} - \Omega (A + B)w_{xt} = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

Les conditions aux limites accompagnant ces équations s'obtiennent elles-mêmes par la considération des variations aux limites  $x = e$  et  $x = e + R$  sur les déplacements, apparues suite aux intégrations par parties. Pour fixer les idées nous supposons la pale articulée à la flexion en  $x = e$  et libre en  $x = e + R$ . Alors a priori

$$w(e, t) = 0 \quad (10)$$

$$\theta(e, t) = 0 \quad (11)$$

mais les variations aux limites  $\delta w(e + R, t)$ ,  $\delta w_x(e, t)$ ,  $\delta w_x(e + R, t)$  et  $\delta \theta(e + R, t)$  sont arbitraires. L'annulation de leurs coefficients fournit les autres conditions :

$$\begin{aligned} \Omega^2 (A - S)\varphi + \Omega (A + B)\theta_t - \\ - B\varphi_{tt} + [EIw_{xx}]_x = 0 \end{aligned}$$

$$\text{pour } x = e + R \quad (12)$$

$$EIw_{xx} = 0 \quad \text{pour } x = e \quad (13)$$

$$EIw_{xx} = 0 \quad x = e + R \quad (14)$$

$$GJ\theta_x = 0 \quad x = e + R \quad (15)$$

Le système (8) à (15) s'obtient difficilement par les méthodes, dites élémentaires, consistant à écrire l'équilibre entre les forces d'inertie et les forces de rappel élastique sur une tranche de pale. Cela tient au fait que la distribution des accélé-

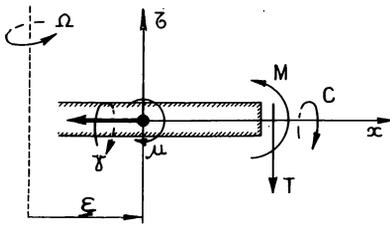


Fig. 3.

rations est compliquée à établir, tandis que le principe de Hamilton ne requiert, préalablement à des opérations purement formelles, que la connaissance du champ des vitesses. Le contrôle du résultat final par la méthode élémentaire est cependant instructif pour la bonne compréhension physique des phénomènes. Il est facilité par l'introduction d'inconnues auxiliaires, comme introduites à la section suivante.

## 2. — Réduction à des équations aux dérivées partielles du premier ordre en $x$

En introduisant comme inconnues auxiliaires le moment fléchissant  $M$ , l'effort tranchant  $T$  et le couple de torsion  $C$  (fig. 3), le système précédent se met sous la forme :

$$M_x - T + \Omega^2(A - S)\varphi = B\varphi_{tt} - \Omega(A + B)\theta_t \quad (16)$$

$$T_x = -m\omega_{tt} - mk\theta_{tt} \quad (17)$$

$$C_x + \Omega^2 B\theta = (A + mk^2)\theta_{tt} + mk\omega_{tt} + \Omega(A + B)\varphi_t \quad (18)$$

$$M - EI\varphi_x = 0 \quad (19)$$

$$\omega_x - \varphi = 0 \quad (20)$$

$$C - GJ\theta_x = 0 \quad (21)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} w(e, t) = 0 & \quad M(e + R, t) = 0 \\ M(e, t) = 0 & \quad T(e + R, t) = 0 \\ \theta(e, t) = 0 & \quad C(e + R, t) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Les trois premières équations sont celles d'équilibre dynamique, les trois suivantes des relations tension-déformation ou conditions de compatibilité géométrique. Les premiers membres ne contiennent que les inconnues et leurs dérivées partielles premières par rapport à  $x$ ; les seconds membres les dérivées partielles par rapport au temps. L'élimination de  $M$ ,  $T$  et  $C$  restitue évidemment le système précédent (8) à (15).

## 3. — Les modes naturels de vibration

La notion de mode naturel de vibration doit en principe coïncider avec l'existence d'une solution mathématique par séparation de la

variable temps. Ici par exemple on chercherait une solution de la forme :

$$w(x, t) = W(x)f(t) \quad \theta(x, t) = \Theta(x)f(t) \quad (23)$$

Dans ce cas le rapport entre deux composantes de déplacement en deux points quelconques du système est indépendant du temps. L'ensemble de ces rapports définit une figure de vibrations que l'on appelle le « mode » ou la « forme propre ».

Dans les problèmes de première catégorie (pour le cas  $\Omega = 0$  dans notre exemple) la séparation se fait toujours naturellement car les dérivées partielles par rapport au temps ne figurent jamais qu'à l'ordre zéro ou à l'ordre deux. La solution (23) introduite, chaque terme contient en facteur soit  $f(t)$  soit  $f''(t)$ . La fonction  $f(t)$  s'élimine si :

$$f''(t) = -\omega^2 f(t)$$

On démontre en effet que les valeurs de  $\omega^2$  qui permettent de remplir les conditions aux limites sont toutes positives. Leurs racines réelles  $\omega$  sont les pulsations propres du système. Dès lors un mode naturel de vibration est du type :

$$\begin{aligned} w(x, t) &= W(x) \cos(\omega t - \psi) \\ \theta(x, t) &= \Theta(x) \cos(\omega t - \psi) \end{aligned} \quad (24)$$

où les fonctions d'amplitude  $W(x)$  et  $\Theta(x)$  sont à valeurs réelles.

Dans les problèmes de seconde catégorie, les termes gyroscopiques (ici ceux proportionnels à  $\Omega$ ) introduisent un couplage qui dépend de dérivées partielles d'ordre un dans le temps. Les termes correspondants sont proportionnels à  $f'(t)$  et l'élimination de  $f(t)$  ne s'opère que si cette fonction se reproduit après une dérivation. En fait dans notre exemple :

$$f(t) = e^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i \sin\omega t$$

car les valeurs de  $\omega$  permettant de remplir les conditions aux limites sont ici toutes réelles (1).

Avec le signe + on obtient les équations différentielles ordinaires :

$$\left. \begin{aligned} [EIW'''] - \omega^2 mW - \Omega^2 [(S - A)W'] + \\ + \omega^2 [Bw'] - \omega^2 mk\Theta + \\ + i\Omega\omega [(A + B)\Theta]' = 0 \\ [GJ\Theta'] + \omega^2 (A + mk^2)\Theta + \Omega^2 B\Theta + \\ + \omega^2 mkW - i\Omega\omega (A + B)W' = 0 \end{aligned} \right\} (25)$$

(1) Dans d'autres cas certaines valeurs de  $\omega$  sont elles-mêmes complexes ou purement imaginaires et le système peut être instable. Ceci a lieu, par exemple, pour certaines plages de la vitesse de rotation des arbres de turbomachines [26].

et les conditions aux limites :

$$W = 0 \quad W'' = 0 \quad \Theta = 0 \quad \text{en } x = e \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} [EIW'']' - \Omega^2 (S - A) W' + \omega^2 B W' + \\ + i\Omega\omega (A + B) \Theta = 0 \\ W'' = \theta \quad \Theta' = 0 \quad \text{en } x = e + R \end{aligned} \right\} (27)$$

Les coefficients des termes gyroscopiques étant imaginaires, les fonctions d'amplitude sont complexes :

$$W = W_c + iW_s \quad \Theta = \Theta_c + i\Theta_s$$

Pour retrouver une solution réelle il faut combiner cette solution avec la solution complexe conjuguée. Au lieu de (23) on trouve pour solution type :

$$\left. \begin{aligned} w(x, t) = W_c(x) \cos \omega t - W_s(x) \sin \omega t \\ \theta(x, t) = \Theta_c(x) \cos \omega t - \Theta_s(x) \sin \omega t \end{aligned} \right\} (28)$$

Dans cette solution un mode de vibration, d'indice *c*, où tous les points oscillent en phase, est toujours accompagné d'un mode associé, d'indice *s*, où les points oscillent en quadrature. La complexité de cette solution s'accompagne de la perte d'une propriété fondamentale des modes de la première catégorie et diminue son intérêt. Il s'agit de la propriété dite d'orthogonalité selon laquelle la puissance virtuelle que l'on peut associer entre la répartition des forces d'inertie d'un mode et les vitesses de déplacement d'un mode de fréquence différente est nulle à chaque instant.

Cependant, quelle que soit la catégorie du problème, une fois les modes et leur fréquence naturelle déterminés, on possède les éléments d'une solution complète du problème vibratoire. Une vibration libre quelconque est toujours constituée par une simple superposition de modes naturels, l'amplitude et la phase absolue de chaque mode naturel (grandeurs indéterminées des solutions précédentes) étant fixées par la répartition initiale des déplacements et des vitesses du système.

Dans le cas d'oscillations sinusoïdales entretenues par une excitation extérieure, la réponse du système peut encore se concevoir comme une superposition de modes naturels, chacun vibrant maintenant non plus à sa fréquence propre mais à la fréquence imposée par l'excitation. Ici l'amplitude absolue de chaque mode se détermine immédiatement dans la première catégorie grâce aux relations d'orthogonalité. Ce calcul est beaucoup plus difficile dans les problèmes de seconde catégorie, où il semble plus indiqué de rechercher directement les amplitudes locales forcées. Néanmoins le phénomène de résonance est commun aux deux catégories et la connaissance des fréquences naturelles est toujours

intéressante pour évaluer qualitativement ce danger.

Si on veut tenir compte de l'amortissement interne du système, l'analyse de la réponse forcée se fait préférentiellement à l'aide de la notion de déphasage caractéristique [32].

#### 4. — Calcul direct des modes et fréquences propres par voie analytique

Le système différentiel homogène (25) est du sixième ordre et sa solution générale est en principe de la forme

$$W(x) = \sum_1^6 A_i W_i(x) \quad \Theta(x) = \sum_1^6 A_i \Theta_i(x) \quad (29)$$

où les six solutions  $[W_i(x), \Theta_i(x)]$  forment un système fondamental [5]. Ces solutions sont complexes, ainsi que les constantes arbitraires  $A_i$ , pour les problèmes de seconde catégorie; elles sont réelles en première catégorie. Introduisant la solution générale dans les six conditions aux limites, on doit satisfaire un système linéaire et homogène :

$$\sum_{i=1}^6 A_i c_{ij}(\omega, \Omega) = 0 \quad (j = 1, 2 \dots 6) \quad (30)$$

dont les coefficients  $c_{ij}$  sont des fonctions transcendantes de  $\omega$  et  $\Omega$ . La condition de compatibilité :

$$det(c_{ij}) = 0 \quad (31)$$

doit être résolue par tâtonnements et interpolations en vue de déterminer les fréquences propres  $\omega$  pour toute valeur donnée de  $\Omega$ . Pour chaque racine le système (30) est compatible et possède une solution définie à un facteur général d'amplitude (complexe) près. La partie réelle de (29) fournit alors le mode d'indice *c* et la partie imaginaire le mode associé d'indice *s*.

Dans des cas très particuliers [9] il est possible d'exprimer un système fondamental de solutions de (25) sous forme finie (autrement dit sous forme de fonctions connues et tabulées) et d'obtenir une expression analytique des modes. En général il faut introduire immédiatement les méthodes de calcul numérique.

#### 5. — Calcul des modes par la méthode des différences finies

Considérons un petit tronçon de pale entre les abscisses :

$$x = x_n \quad \text{et} \quad x = x_{n+1} = x_n + h_n$$

Posons :

$$M = M(x)e^{i\omega t} \quad T = T(x)e^{i\omega t} \quad C = C(x)e^{i\omega t}$$

$$w = W(x)e^{i\omega t} \quad \varphi = \Phi(x)e^{i\omega t} \quad \theta = \Theta(x)e^{i\omega t}$$

dans le système différentiel (16) à (21) et remplaçons les dérivées premières en  $x$  par des différences finies :

$$M'(x_n) = \frac{1}{h_n} (M_{n+1} - M_n)$$

où  $M_{n+1} = M(x_{n+1})$  etc...

on trouve alors la relation matricielle.

$$\begin{bmatrix} M_{n+1} \\ T_{n+1} \\ C_{n+1} \\ \Phi_{n+1} \\ W_{n+1} \\ \Theta_{n+1} \end{bmatrix} = K_n \begin{bmatrix} M_n \\ T_n \\ C_n \\ \Phi_n \\ W_n \\ \Theta_n \end{bmatrix} \quad (32)$$

où la matrice de transfert  $K_n$  a pour expression

$$K_n = \begin{bmatrix} 1 & h_n & 0 & -h_n[\Omega^2(A_n - S_n) + \omega^2 B_n] & 0 & -ih_n\omega\Omega(A_n + B_n) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & h_n\omega^2 m_n & h_n\omega^2 m_n k_n \\ 0 & 0 & 1 & ih_n\omega\Omega(A_n + B_n) & -h_n\omega^2 m_n k_n & -h_n[\Omega^2 B_n + \omega^2(A_n + m_n k_n^2)] \\ \frac{h_n}{EI_n} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h_n}{GJ_n} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si  $x_1 = e$  et  $x_{N+1} = e + R$  sont les extrémités de la pale on trouve par simple substitution successive des équations (32) l'une dans l'autre :

$$\begin{pmatrix} M \\ \vdots \\ \Theta \end{pmatrix}_{N+1} = K \begin{pmatrix} M \\ \vdots \\ \Theta \end{pmatrix}_1 \quad (33)$$

avec  $K = K_N K_{N-1} \dots K_2 K_1$

la matrice de transfert d'une extrémité à l'autre de la pale est le produit des matrices de transfert pour chaque sous-intervalle.

Les conditions aux limites (22) deviennent :

$$W_1 = M_1 = \Theta_1 = 0 \quad M_{N+1} = T_{N+1} = C_{N+1} = 0 \quad (34)$$

et on déduit alors de (33) les relations homogènes

$$\begin{aligned} 0 &= K_{MT} T_1 + K_{MC} C_1 + K_{M\Phi} \Phi_1 \\ 0 &= K_{TT} T_1 + K_{TC} C_1 + K_{T\Phi} \Phi_1 \\ 0 &= K_{CT} T_1 + K_{CC} C_1 + K_{C\Phi} \Phi_1 \end{aligned} \quad (35)$$

où les coefficients sont des éléments de la matrice  $K$ . Des grandeurs  $T_1$ ,  $C_1$  et  $\Phi_1$  une au moins doit être différente de zéro sinon on en déduirait

de proche en proche à cause des premières conditions aux limites un état passif de tout le système. Par conséquent il faut que :

$$\Delta(\omega, \Omega) = \det \begin{pmatrix} K_{MT} & K_{MC} & K_{M\Phi} \\ K_{TT} & K_{TC} & K_{T\Phi} \\ K_{CT} & K_{CC} & K_{C\Phi} \end{pmatrix} = 0$$

c'est la condition qui fixe les fréquences propres pour une valeur donnée de  $\Omega$ . En pratique le calcul est ordonné comme suit. Pour un  $\Omega$  donné on se donne une valeur  $\omega$  d'essai, on calcule les éléments des matrices  $K_n$  et on les multiplie de façon à obtenir les éléments de  $K$ . Enfin on calcule la valeur de  $\Delta$  que l'on porte en ordonnée dans un diagramme avec  $\omega$  en abscisse. La séquence des opérations est reprise pour de nouvelles valeurs de  $\omega$ , chacune fournissant un nouveau point d'une courbe  $\Delta(\omega)$ . Les abscisses où  $\Delta$  s'annule sont des pulsations propres du système. Quand une pulsation est

déterminée avec une précision jugée satisfaisante, on se donne une valeur arbitraire de  $T_1$  (ou de  $C_1$  ou  $M_1$ ) et on calcule les deux autres à l'aide de deux des relations (35). La séquence des opérations (32) fournit alors les caractéristiques du mode en chacun des points de subdivision de l'intervalle. Cette méthode généralise celle imaginée par Tolle [10] pour les vibrations de torsion des arbres. Son extension aux problèmes de flexion-torsion est due à Myklestad [4] et sa mise sous la forme matricielle plus élégante est due à Targoff [17]. Elle est longue mais routinière et bien adaptée aux calculatrices digitales.

Les systèmes qui se prêtent à cette technique peuvent être appelés systèmes en chaîne et ont une analogie avec les chaînes de quadripôles ou  $2n$ -pôles et les filtres électriques. En fait quand tous les éléments connectés en série sont identiques, on a un véritable filtre mécanique (comme certains vilebrequins de moteur à explosion) et l'on peut alors utiliser avec avantage une méthode de Biot [18] et sa généralisation [27]. Dans l'exemple traité la chaîne est d'ordre 3 et il peut arriver que deux ou même

trois modes différents aient la même fréquence propre [31]. Dans ce cas la courbe  $\Delta(\omega)$  a avec l'axe des  $\omega$  un contact du premier ou du second ordre. A ce moment le système (35) possède lui aussi deux solutions indépendantes (tous les déterminants d'ordre deux nuls) ou trois (tous les coefficients nuls).

**6. — Formulation par des équations intégrales**

Supprimons les forces d'inertie formant les seconds membres des équations (16) à (18) et remplaçons-les par (fig. 3) :

- un couple fléchissant concentré  $\mu$ , appliqué en  $x = \xi$  pour (16).
- une force transversale concentrée  $\tau$ , appliquée en  $x = \xi$  pour (17).
- un couple de rotation concentré  $\gamma$ , appliqué en  $x = \xi$  pour (18).

Ceci revient à prendre comme seconds membres respectifs :

$$\mu\delta(x - \xi) \quad \tau\delta(x - \xi) \quad \text{et} \quad \gamma\delta(x - \xi)$$

où  $\delta(x - \xi)$  est la « mesure de Dirac » (6).

Si nous résolvons alors le système avec ses conditions aux limites, ce qui constitue un problème d'élasticité, nous trouvons :

$$w(x) = -\mu \frac{\partial V(x, \xi)}{\partial \xi} + \tau V(x, \xi)$$

$$\varphi(x) = -\mu \frac{\partial^2 V(x, \xi)}{\partial x \partial \xi} + \tau \frac{\partial V(x, \xi)}{\partial x}$$

$$\theta(x) = \gamma U(x, \xi)$$

où  $V(x, \xi)$  est la flèche en  $x$  due à la force transversale unitaire appliquée en  $\xi$  et  $U(x, \xi)$  la rotation en  $x$  due au couple de rotation unitaire appliqué en  $\xi$ .

Comme  $ox$  est un axe de flexion-torsion, il n'y a pas de couplage impliquant l'existence d'autres fonctions d'influence. Une fois les fonctions d'influence déterminées on peut calculer la sommation de l'effet des forces d'inertie élémentaires. Pour le calcul des modes ceci conduit aux équations intégrales (36).

Par le principe même de leur calcul les conditions aux limites et l'effet des forces centrifuges sont incorporés dans la construction des fonctions d'influence.

**7. — Quadrature numérique et collocation**

Pour exposer simplement, mais sans restreindre sa généralité, un procédé pratique de résolution de la formulation par les équations intégrales, considérons le cas particulier  $\Omega = 0, k \equiv 0$  et  $B \equiv 0$ .

On doit alors résoudre l'équation intégrale :

$$W(x) = \omega^2 \int_{x_1}^{x_{N+1}} m(\xi) V(x, \xi) W(\xi) d\xi$$

des vibrations de seule flexion sans inertie rotatoire. L'intégrale est d'abord remplacée par une somme, utilisant les valeurs de la fonction intégrée en un certain nombre de points de subdivision  $x_r$  de l'intervalle :

$$W(x) = \omega^2 \sum_{r=1}^{N+1} \mu_r m_r V_r(x) W_r \quad (37)$$

où :

$$m_r = m(x_r) \quad W_r = W(x_r) \quad \text{et} \quad V_r(x) = V(x, x_r)$$

Les  $\mu_r$  sont des poids dépendant de la méthode de quadrature numérique utilisée, Poncelet, Simpson, Gauss... [7]. Si on exige que l'équation (37) soit vérifiée aux points de subdivision (collocation) on transforme le problème dans celui d'un système linéaire et homogène aux inconnues  $W_r$  :

$$W_s = \omega^2 \sum_{r=1}^{N+1} \mu_r m_r V_{rs} W_r \quad (s = 1, 2, \dots, N + 1) \quad (38)$$

Il suffit donc de calculer les  $V_{rs} = V(x_s, x_r)$  qui sont des coefficients d'influence locaux. Le système (38) décrit en fait le problème vibratoire d'un modèle approché de la structure où des masses  $\mu_r m_r$  sont concentrées aux points  $x_r$  et reliées par des éléments élastiques dépourvus d'inertie. De tels modèles sont parfois construits empiriquement. Leur construction rationnelle à l'aide d'une bonne formule de quadrature numérique donne toujours de meilleurs résultats. La méthode, appliquée au système (36), conduit à un modèle dont les éléments concentrés sont doués d'inertie rotatoire en flexion et en torsion aussi bien que de masse et à un système d'équations linéaires comportant simplement un plus grand nombre d'inconnues ( $W_r, \Phi_r$  et  $\Theta_r, r = 1, 2, \dots, N + 1$ ). En principe les fréquences propres se trouvent en annulant le déterminant et résolvant numériquement l'équation algébrique en  $\omega$  qui en résulte. Pour chaque racine le système devient compatible et sa résolution fournit un ou plusieurs modes. Les calculs deviennent fort longs quand le nombre d'inconnues est élevé. Ce nombre dépend du nombre de points de collocation, lui-même lié à la précision requise. Sur un modèle en chaîne comme celui envisagé ici, la limite de précision admissible est atteinte quand il y a moins de trois points de collocation entre deux nœuds successifs de la forme propre.

La formulation par coefficients d'influence et collocation est plus générale que celle par différences finies car elle s'applique, au-delà des systèmes en chaîne, aux systèmes pourvus d'appuis intermédiaires, ou qui s'étendent comme les plaques dans plusieurs directions spatiales.

$$\begin{aligned}
 W(x) &= \omega^2 \int_e^{e+R} \left\{ V(x, \xi) [mW + mk\Theta] + \frac{\partial}{\partial \xi} V(x, \xi) B \Phi \right\} d\xi \\
 &\quad + i\omega \Omega \int_e^{e+R} \frac{\partial}{\partial \xi} V(x, \xi) (A + B) \Theta d\xi \\
 \Phi(x) &= \omega^2 \int_e^{e+R} \left\{ \frac{\partial V(x, \xi)}{\partial x} [mW + mk\Theta] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} V(x, \xi) B \Phi \right\} d\xi \\
 &\quad + i\omega \Omega \int_e^{e+R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} V(x, \xi) (A + B) \Theta d\xi \\
 \Theta(x) &= -\omega^2 \int_e^{e+R} U(x, \xi) [(A + mk^2) \Theta + mkW] d\xi \\
 &\quad + i\omega \Omega \int_e^{e+R} U(x, \xi) (A + B) \Phi d\xi
 \end{aligned} \tag{36}$$

Une objection se présente cependant immédiatement pour les problèmes de première catégorie où la structure n'est pas au moins liée isostatiquement à une fondation. C'est le cas de notre exemple (pour  $\Omega = 0$ ) car la pale est libre à son extrémité et susceptible de pivoter autour de son articulation à l'origine sans force de rappel élastique. Pour  $\Omega \neq 0$  elle est effectivement rappelée par les forces centrifuges. Ces structures hypostatiques possèdent un ou plusieurs modes de déplacement sans déformation élastique, que l'on appelle des « modes rigides » et qui doivent être considérés comme des modes naturels de vibration à fréquence propre nulle. Ces structures se dérobent sous l'action de certaines sollicitations statiques unitaires extérieures et ne possèdent donc pas un ensemble complet de fonctions d'influence ordinaires. Il ne faut cependant pas conclure à l'impossibilité d'une formulation par équations intégrales, tout au moins en ce qui concerne la détermination des modes naturels de fréquence non nulle.

Il ne peut être question dans le cadre restreint de cet exposé de présenter dans ses détails la méthode mathématique qui permet de généraliser la notion de fonction d'influence en vue de tourner la difficulté signalée. Nous devons nous borner à en indiquer le sens physique et de renvoyer pour le reste à l'article original [28]. Considérons d'abord la structure hypostatique comme un corps rigide et appliquons-lui une sollicitation unitaire extérieure sous laquelle il se dérobe. A l'instant initial les divers points subissent une accélération et, en vertu du principe de d'Alembert, l'ensemble des forces d'inertie développées est en équilibre statique avec la sollicitation. Rendons maintenant à la structure son élasticité et calculons ses déformations sous l'effet de ce système de forces en équilibre. Rendons enfin les déplacements élastiques univalents en complétant arbitrairement les liaisons de façon à rendre la structure isostatique (les

réactions dans les liaisons additionnelles sont évidemment nulles, le système étant en équilibre avant leur intervention). L'ensemble des déplacements élastiques ainsi déterminés constitue une fonction d'influence généralisée par rapport à la sollicitation unitaire introduite. On démontre que les équations intégrales construites à l'aide d'un système de fonctions d'influence généralisées ont pour solution les modes élastiques de vibration de la structure hypostatique.

### 8. — L'emploi de coordonnées généralisées

Les déplacements et déformations du système sont limités à une combinaison linéaire de fonctions imposées a priori.

Dans notre exemple on poserait :

$$\begin{aligned}
 w(x, t) &= \sum_1^m q_i(t) W_i(x) \\
 \theta(x, t) &= \sum_{m+1}^n q_i(t) \Theta_i(x)
 \end{aligned} \tag{39}$$

Le choix des fonctions  $W_i(x)$  et  $\Theta_i(x)$  n'est pas tout à fait arbitraire. Il peut être basé sur l'intuition physique de la forme des modes vibratoires réels du système. Plus mathématiquement ces fonctions peuvent constituer les premiers éléments d'une suite complète (suite de puissances, polynômes de Legendre, de Chebishev...) dont on sait que par combinaison linéaire toute forme propre réelle peut être approchée avec une erreur quadratique moyenne tendant vers zéro avec l'accroissement de leur nombre.

Ces fonctions doivent individuellement satisfaire aux conditions géométriques (ici (10) et (11)) soit :

$$W_i(e) = 0 \quad \Theta_i(e) = 0 \tag{40}$$

Il en est alors de même pour les combinaisons (39) quelles que soient les valeurs des « coordonnées généralisées »  $q_i(t)$ .

Une fois le choix fixé, il devient possible d'effectuer toutes les intégrations demandées pour le calcul de l'énergie cinétique T, formule (4), et de l'énergie de déformation U, formule (5). Ceci se fera analytiquement si la connaissance des caractéristiques physiques du système s'y prête, soit par quadratures numériques. Le lagrangien L résultant est de la forme :

$$L = T - U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [a_{ij}q'_i q'_j + 2\Omega b_{ij}q'_i q_j - (c_{ij} + \Omega^2 f_{ij}) q_i q_j] \quad (41)$$

où  $q'_i = \frac{dq_i}{dt}$  et les coefficients à double indice sont les résultats des opérations d'intégration. L'application du principe (6) de Hamilton avec :

$$\delta q_i = 0 \text{ pour } t = t_1 \text{ et } t = t_2$$

comme requis par (7), conduit aux équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q'_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n) \quad (42)$$

Soit ici :

$$\sum_{j=1}^n [a_{ij}q''_j + \Omega(b_{ij} - b_{ji})q'_j + (c_{ij} + \Omega^2 f_{ij})q_j] = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n) \quad (43)$$

Il est avantageux de mettre l'ensemble de ces équations sous forme matricielle en rangeant les coordonnées généralisées dans une matrice unicolonne q :

$$Aq'' + \Omega Gq' + (C + \Omega^2 F)q = 0 \quad (44)$$

Les matrices (n x n) des coefficients  $a_{ij}$ ,  $c_{ij}$  et  $f_{ij}$  sont symétriques ; elles restent identiques à elle-mêmes quand on y échange les lignes et les colonnes :

$$A^T = A \quad C^T = C \quad F^T = F \quad (45)$$

Par contre la matrice des coefficients ( $b_{ij} - b_{ji}$ ) est évidemment symétrique gauche, ce qui est une caractéristique des termes de couplage gyroscopique :

$$G^T = -G \quad (46)$$

Un mode de vibration sera représenté par une solution du type :

$$q = \text{Re} (he^{i\omega t}) \quad (47)$$

et les constantes (complexes) de la matrice unicolonne h doivent vérifier le système d'équations linéaires :

$$(C + \Omega^2 F - \omega^2 A + i\omega \Omega G)h = 0 \quad (48)$$

Le déterminant du système, égalé à zéro, est une équation algébrique en  $\omega^2$  à coefficients

réels qui, dans le cas présent, n'admet que des racines positives. Pour chacune des fréquences propres  $\omega_K$  ainsi trouvées le système (48) est compatible et possède au moins une solution non triviale  $h_{(K)}$ . Elle n'est définie qu'à un facteur complexe  $\rho e^{i\psi}$  près. Il peut être intéressant de la normer en amplitude comme en phase. Signalons à ce propos qu'un mode de seconde catégorie peut être rapporté à une « phase principale » telle que la partie du mode en phase soit orthogonale à la partie en quadrature par rapport à la répartition des inerties. Ainsi si :

$$h_{(K)} = a_{(K)} + i b_{(K)}$$

de sorte que le mode soit représenté par :

$$q = a_{(K)} \cos \omega_K t - b_{(K)} \sin \omega_K t$$

l'angle arbitraire  $\psi$  peut être choisi tel que :

$$a^T_{(K)} A b_{(K)} = 0 \quad (49)$$

La masse généralisée du mode est alors l'expression :

$$a^T_{(K)} A a_{(K)} + b^T_{(K)} A b_{(K)}$$

et peut être réduite à une valeur conventionnelle de référence par le choix approprié du facteur  $\rho$ .

Dans un problème de première catégorie le système algébrique à résoudre est plus simplement :

$$(C - \omega^2 A)h = 0 \quad (50)$$

les modes  $h_{(K)}$  sont réels ( $b_{(K)} = 0$ ) et jouissent des propriétés d'orthogonalité :

$$h^T_{(K)} A h_{(J)} = 0 \quad h^T_{(K)} C h_{(J)} = 0 \quad K \neq J \quad (51)$$

Quand on revient aux définitions initiales un mode est finalement donné en clair par l'expression :

$$w(x,t) = \left[ \sum_{i=1}^m a_{(K)i} W_i(x) \right] \cos \omega_K t - \left[ \sum_{i=1}^m b_{(K)i} W_i(x) \right] \sin \omega_K t$$

$$\theta(x,t) = \left[ \sum_{i=m+1}^n a_{(K)i} \Theta_i(x) \right] \cos \omega_K t - \left[ \sum_{i=m+1}^n b_{(K)i} \Theta_i(x) \right] \sin \omega_K t$$

## 9. — La méthode de l'énergie complémentaire

La méthode précédente, dite de Rayleigh-Ritz, ramène la détermination des modes et fréquences propres à un problème algébrique. La solution en est aisée quand on n'utilise que peu de coordonnées généralisées mais alors,

sauf pour un choix exceptionnellement heureux des fonctions imposées, on n'obtient de façon précise que le mode fondamental (de plus basse fréquence) et on perd toute précision et même toute connaissance des modes de fréquence plus élevée.

Une amélioration sensible du rendement de la méthode des coordonnées généralisées s'obtient par la méthode dite « de l'énergie complémentaire », applicable aux problèmes de première catégorie.

Pour plus de concision introduisons la variable réduite :

$$r = \frac{x - e}{R}$$

qui a l'avantage de varier entre zéro et l'unité et supposons que l'on ait choisi :

$$\begin{aligned} w(x, t) &= q_1(t)r + q_2(t)r^2 \\ \theta(x, t) &= q_3(t)r \end{aligned} \quad (52)$$

La coordonnée  $q_1$  représente le mode rigide d'oscillation de la pale autour de son pivot. Il est bien clair que tous les modes rigides du système doivent figurer parmi les coordonnées généralisées. Les conditions géométriques  $w(e, t) = 0$  et  $\theta(e, t) = 0$  sont bien respectées. Nous nous servons de (52) uniquement pour calculer les forces d'inertie aux seconds membres des relations (16) à (18) et nous les intégrons en cherchant à respecter les conditions aux limites sur T, M et C telles que indiquées en (22). Pour la simplicité de l'exposé nous supposons  $m, k, A$  et  $B$  constants de façon à pouvoir intégrer analytiquement. Il vient :

$$\left. \begin{aligned} C &= R(A + mk^2) \frac{r^2 - 1}{2} q_3'' + \\ &+ Rmk \frac{r^2 - 1}{2} q_1'' + Rmk \frac{r^3 - 1}{3} q_2'' \\ T &= -Rmq_1'' \frac{r^2 - 1}{2} - Rmq_2'' \frac{r^3 - 1}{3} - \\ &- Rmk q_3'' \frac{r^2 - 1}{2} \\ M &= -R^2mq_1'' \frac{r^3 - 3r}{6} - R^2mq_2'' \frac{r^4 - 4r}{12} - \\ &- R^2mkq_3'' \frac{r^3 - 3r}{6} + Bq_1''r + Bq_2''r^2 \end{aligned} \right\} (53)$$

Toutes les constantes d'intégration ont été utilisées pour assurer le respect des conditions  $C(e + R, t) = 0, T(e + R, t) = 0$  et  $M(e, t) = 0$ . Il subsiste la condition  $M(e + R, t) = 0$  qui exige :

$$\left(B + \frac{R^2m}{3}\right)q_1'' + \left(B + \frac{R^2m}{4}\right)q_2'' + \frac{1}{3}R^2mkq_3'' = 0$$

Cette relation est finalement utilisée pour éliminer  $q_1$ , c'est-à-dire le mode rigide. L'élimination des modes rigides est une caractéristique générale du procédé. Elle tient au fait que l'on doit vérifier les conditions aux limites sur les tensions et que le nombre de celles-ci surpasse toujours exactement celui des conditions géométriques par le nombre de modes rigides. On évalue l'énergie cinétique T à l'aide des formules (52) où  $q_1$  a été éliminé ce qui donne une expression de la forme :

$$T = \frac{1}{2} (a_{22}^* q_2'^2 + 2 a_{23}^* q_2'q_3' + a_{33}^* q_3'^2)$$

Quant à l'énergie potentielle on la calcule à partir de sa « forme complémentaire » :

$$U = \frac{1}{2} \int_e^{e+R} \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_e^{e+R} \frac{C^2}{GJ} dx$$

en se servant des résultats (53) après élimination préalable de  $q_1''$ . Le résultat est de la forme :

$$U = \frac{1}{2} (c_{22}^* q_2''^2 + 2c_{23}^* q_2''q_3'' + c_{33}^* q_3''^2)$$

on peut alors appliquer un principe dual à celui de Hamilton, le principe de variation des accélérations [30].

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0$$

où l'on annule les coefficients des variations  $\delta q_i''$  sur les accélérations et, aux limites du temps on impose :

$$\delta q_i' = 0 \quad \text{pour } t = t_1 \text{ et } t = t_2$$

Ceci fournit les équations linéaires :

$$\frac{\partial U}{\partial q_i''} + \int \frac{\partial T}{\partial q_i'} dt = 0$$

ou explicitement :

$$\begin{aligned} c_{22}^* q_2'' + c_{23}^* q_3'' + a_{22}^* q_2 + a_{23}^* q_3 &= 0 \\ c_{23}^* q_2'' + c_{33}^* q_3'' + a_{23}^* q_2 + a_{33}^* q_3 &= 0 \end{aligned}$$

La forme matricielle générale de ces équations est, pour les modes élastiques :

$$(A^* - \omega^2 C^*)h = 0 \quad (54)$$

Le problème est ramené à une forme algébrique semblable à celle de Rayleigh-Ritz. On peut prouver qu'elle donne de meilleures approximations aux modes et aux valeurs propres que cette dernière.

Malgré son intérêt il n'a pas été possible jusqu'à présent de rendre la méthode applicable aux problèmes de seconde catégorie.

**10. — Application de la méthode de Rayleigh-Ritz au calcul des matrices de transfert**

Le calcul des matrices de transfert par la méthode des différences finies est simple mais la précision demande des intervalles petits et nombreux. On peut élargir les intervalles et diminuer leur nombre en calculant ces matrices par un procédé de Rayleigh-Ritz. A cet effet on choisit pour la variation de  $w$ ,  $\varphi$  et  $\theta$  dans un intervalle, les plus petits polynômes dont les coefficients sont exprimables par les valeurs de ces grandeurs aux extrémités. Tous calculs faits :

$$\theta = \theta_n (1 - r) + \theta_{n+1} r$$

$$\varphi = \varphi_n (1 - r) (1 - 3r) - \varphi_{n+1} r (2 - 3r) + \frac{w_{n+1} - w_n}{h} 6r (1 - r)$$

$$w = \varphi_n r (1 - r)^2 - \varphi_{n+1} r^2 (1 - r) + \frac{w_n}{h} (1 - r)^2 (1 + 2r) + \frac{w_{n+1}}{h} r^2 (3 - 2r)$$

où  $r = \frac{x - x_n}{h}$  varie de 0 à 1 dans l'intervalle.

L'énergie cinétique  $\Delta T$  et l'énergie potentielle  $\Delta U$  du tronçon sont évaluées à l'aide des formules (4) et (5) limitées à l'intervalle en question. Ce sont des fonctions de  $(\theta_n, \varphi_n, w_n, \theta_{n+1}, \varphi_{n+1}, w_{n+1})$  et de leurs dérivées premières (qui sont des fonctions du temps). La liaison du tronçon avec la structure est représentée dans le principe de Hamilton par la présence du travail virtuel des efforts tranchants et des moments aux extrémités :

$$\int_{t_2}^{t_1} [\delta(\Delta T - \Delta U) + M_{n+1} \delta\varphi_{n+1} - M_n \delta\varphi_n + C_{n+1} \delta\theta_{n+1} - C_n \delta\theta_n - T_{n+1} \delta w_{n+2} + T_n \delta w_n] dt = 0$$

Les variations (nulles aux limites du temps) sur  $(\varphi_n \dots)$  fournissent en définitive ces efforts tranchants et moments en fonction des  $(\varphi_n \dots)$  et de leurs dérivées. Une fois l'opérateur  $\frac{d}{dt}$  remplacé par  $i\omega$  on a les relations entre amplitudes en fonction de la fréquence. Pour être mises sous la forme (32), les relations donnant  $M_n$ ,  $T_n$  et  $C_n$  doivent au préalable être résolues par rapport à  $\Phi_{n+1}$ ,  $\Theta_{n+1}$  et  $W_{n+1}$ . Cette opération est préférablement menée au stade numérique. Chaque calcul de matrice de transfert requiert donc l'inversion d'une matrice de rang égal à l'ordre de la chaîne (3 ici) ; ce n'est pas une pénalité exagérée pour l'accroissement de la précision du calcul ou la réduction du nombre de matrices de transfert.

**11. — Itération**

Les méthodes d'itération n'ont été envisagées que pour les problèmes de première catégorie. Dans sa version originale (Vianello, [15] ; Stodola, [8] ; Fettis, [16]) l'itération est appliquée directement aux équations différentielles du problème. Ici par exemple au système :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM}{dx} - T &= -\omega^2 B \Phi \\ \frac{dT}{dx} &= \omega^2 m (W + k\Theta) \\ \frac{dC}{dx} &= -\omega^2 [(A + mk^2) \Theta + mkW] \end{aligned} \right\} (55)$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{M}{EI} \quad \frac{dW}{dx} = \Phi \quad \frac{d\Theta}{dx} = \frac{C}{GJ} \quad (56)$$

avec les conditions aux limites :

$$W(e) = 0 \quad \Theta(e) = 0 \quad (57)$$

$$M(e) = 0 \quad C(e + h) = 0$$

$$M(e + R) = 0 \quad T(e + h) = 0 \quad (58)$$

dérivés des équations (16) à (22).

1) On part d'une distribution arbitraire de  $M$ ,  $T$  et  $C$  obéissant aux conditions (58). Introduite aux seconds membres de (56), elle permet d'intégrer ce système pour obtenir des distributions en  $\Phi$ ,  $W$  et  $\Theta$  qui obéissent à (57). Dans cette opération  $\Phi$  contient encore une constante arbitraire  $\Phi_0$  et  $W$  un terme correspondant  $\Phi_0(x - e)$  ; c'est le mode rigide.

2) Cette distribution est introduite aux seconds membres de (55) pour calculer par intégration une nouvelle distribution  $M$ ,  $T$ ,  $C$ . Au cours de cette opération les trois constantes d'intégration et  $\Phi_0$  sont utilisées pour remplir les quatre conditions (58).

La nouvelle distribution est proportionnelle à la valeur, encore inconnue, de  $\omega^2$ . Comme seule la « forme propre » de la distribution importe on peut temporairement adopter une valeur  $\omega^*$  arbitraire.

Le processus est répété et converge en ce sens qu'après un nombre suffisant d'itérations la forme des distributions se stabilise et le quotient local de deux itérés successifs tend vers une valeur commune :

$$M_{(n)}/M_{(n+1)} \rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega^*}\right)^2$$

La valeur de  $\omega$  trouvée est celle du mode élastique fondamental.

Suivant une propriété découverte par Lord Rayleigh [9], la valeur de  $\omega^2$  obtenue en égalant les énergies cinétique et potentielle maxima, telles qu'on peut les calculer en se servant des amplitudes de déplacement et de tensions, est stationnaire dans chaque configuration modale. Si le mode calculé diffère du mode exact de même masse généralisée (coefficient de  $\omega^2$  dans l'énergie cinétique maxima) par des erreurs petites du premier ordre, la valeur de  $\omega^2$  ainsi calculée fournira la pulsation propre du mode avec une erreur du second ordre seulement.

La formulation (36) par équations intégrales est celle qui résulte d'une élimination formelle par intégrations des variables (M, T, C). Elle convient donc également pour l'itération consistant à recycler systématiquement dans les intégrales les valeurs de (W,  $\Phi$ ,  $\Theta$ ) calculées aux premiers membres.

L'itération s'applique aussi, de façon plus pratique, à la forme algébrique (38) obtenue par quadrature numérique et collocation. En écriture matricielle ce système algébrique est du type :

$$Dx = \lambda x \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{1}{\omega^2} \quad (59)$$

où  $x$  est la matrice unicolonne des amplitudes locales. La séquence d'itérés s'obtient ici par simple prémultiplication par la « matrice dynamique » D.

$$x_{(n+1)} = Dx_{(n)} \quad (60)$$

La matrice dynamique, dont la considération est due à Duncan et Collar [11], est constituée du produit de la matrice H des coefficients d'influence et de la matrice A des coefficients d'inertie :

$$D = HA$$

A un stade quelconque des opérations on forme sans difficultés le quotient de Rayleigh :

$$\omega^2 = \frac{x_{(n+1)}^T H^{-1} x_{(n+1)}}{x_{(n+1)}^T A x_{(n+1)}} = \frac{x_{(n+1)}^T A x_{(n)}}{x_{(n+1)}^T A x_{(n+1)}}$$

La seconde forme, obtenue en substituant au-dessus à droite :

$$x_{(n+1)} = H A x_{(n)}$$

permet d'éviter le calcul de la matrice réciproque  $H^{-1}$ . Les formulations algébriques :

$$(C - \omega^2 A)h = 0$$

déduite de (48) par  $\Omega = 0$  et provenant de la méthode de Rayleigh-Ritz et :

$$(A^* - \omega^2 C^*)h = 0$$

ou (54) provenant de la méthode de l'énergie complémentaire, ne sont malheureusement pas

sous une forme prête à l'itération. Elles nécessitent soit l'inversion de la matrice C, soit celle de  $A^*$  pour la construction des matrices dynamiques  $C^{-1}A$  et  $A^{*-1}C^*$ . Ces inversions sont lourdes à opérer pour un nombre élevé de coordonnées. De plus la matrice des coefficients d'influence  $C^{-1}$  n'existe pas pour les systèmes hypostatiques et doit être généralisé suivant les mêmes idées que celles appliquées aux fonctions d'influence ordinaires [28].

La méthode d'itération s'étend bien au-delà de la détermination du mode fondamental. L'élimination du mode fondamental après calcul itératif se fait à l'intervention de son orthogonalité avec les modes suivants [22, 16].

Le second mode peut alors être déterminé par itération, puis éliminé à son tour. L'utilité pratique de la méthode ne cesse que par suite de l'accumulation des erreurs. Il faut pousser très loin la précision des premiers modes pour extraire une approximation encore satisfaisante du sixième.

Les algorithmes matriciels d'élimination par orthogonalité, déflation [23], balayage [24], méthode de Wielandt [25] etc... font tous inconsciemment appel à la notion de matrice de projection [29] qui permet d'en montrer l'essentielle unité et fournit un algorithme simple de balayage en prémultiplication réduisant le travail d'itération.

## 12. — Méthodes particulières

Certaines méthodes particulières visent à alléger le volume des calculs numériques impliqué dans les formulations matricielles. Signalons la méthode de Hessenberg [13] pour faciliter le développement de l'équation caractéristique :

$$\det (D - \lambda E) = 0 \quad (E \text{ matrice identité})$$

du problème (59). La belle méthode de codiagonalisation de Lanczos [7].

Enfin mentionnons une méthode qui permet de résoudre « en échelle » un problème traité à la Rayleigh-Ritz. On débute avec deux modes forcés seulement pour n'avoir à résoudre qu'une équation aux fréquences biquadratique. Les deux modes ainsi trouvés sont choisis comme modes forcés avec adjonction d'un nouveau troisième mode. Le développement de la nouvelle équation aux fréquences est simplifié par l'orthogonalité des deux premiers modes. Sa solution bénéficie de la bonne approximation trouvée antérieurement pour la première fréquence. Aux trois modes orthogonaux ainsi trouvés et pris comme modes forcés on adjoint un quatrième et ainsi de suite. En surveillant la stabilisation en forme et fréquence du nombre de modes désirés on peut juger du moment où l'injection d'un mode forcé additionnel devient inutile.

Les problèmes de vibration font partie de la vaste catégorie des problèmes aux valeurs propres qui se présentent en physique [12] et les techniques développées à son propos trouvent de nombreuses applications dans les domaines connexes, en particulier pour la stabilité

de l'équilibre élastique où les rapports sont étroits [14]. L'établissement de bornes supérieures et inférieures à une valeur propre est souvent l'objet principal recherché. Dans cet ordre d'idées nous devons nous borner à renvoyer le lecteur aux travaux originaux [3, 19, 20, 12].

## REFERENCES

1. E. T. Whittaker. — *Analytical Dynamics*, Dover Publications, New York, 1944.
2. L. Landau et E. Lifchitz. — *Mécanique*, Edit. en Langues étrangères, Moscou, 1960.
3. F. H. van den Dungen. — *Les problèmes généraux de la technique des vibrations*, Mémorial des Sciences Physiques, IV, Gauthier-Villars, 1928.
4. N. O. Myklestad. — *Vibration Analysis*, Mc Graw-Hill, New York, 1944.
5. E. L. Ince. — *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, New York, 1944.
6. M. J. Lighthill. — *Fourier Analysis and Generalised Functions*, Cambridge University Press, 1958.
7. C. Lanczos. — *Applied Analysis*, Prentice Hall Inc., 1956.
8. Stodola. — *Turbines à vapeur et à gaz*, Dunod, Paris, 1925.
9. Lord Rayleigh. — *Theory of Sound*, Dover Publications, New York, 1945.
10. L. Zipperer. — *Technische Schwingungslehre II*, Sammlung Goeschen, 1927.
11. R. A. Frazer, W. J. Duncan, A. R. Collar. — *Elementary Matrices*, Cambridge University Press, 1938.
12. L. Collatz. — *Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung*, Chelsea Publishing Cy, New York, 1948.
13. K. Zurmühl, *Matrizen*, Springer-Verlag, Berlin, 1950.
14. C. Massonnet. — *Les relations entre les modes normaux de vibration et la stabilité des systèmes élastiques*, Bruxelles, Ed. Gœmære, 1940.
15. Vianello. — *Z. V. D. I.*, 1898.
16. H. E. Fettis. — *The Calculation of coupled Modes of Vibration by the Stodola Method*. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 16-5, mai 1949.
17. W. P. Targoff. — *The associated Matrices of Bending and Coupled bending-torsion Vibrations*. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 14-10 oct. 1947.
18. M. A. Biot. — *Vibration of Crankshaft-Propeller System*. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 7-3, Jan. 1940.
19. G. Temple. — *The Computation of Characteristic Numbers and Characteristic Functions*. *Proc. London Math. Soc.*, II, S-29, 1929.
20. F. Buckens. — *Ueber Eigenwertscharen*, *Österreichische Ingenieur-Archiv*, XII-1, 2, 1958.
21. R. W. Traill-Nash and A. R. Collar. — *The Effects of Shear Flexibility and Rotary Inertia on the Bending Vibrations of Beams*. *Qu. Journ. Mech. and App. Math.*, VI-2, 1953.
22. J. J. Koch. — *Verhandl. 2 Intern. Kongr. f. Techn. Mech. Zürich*, 1926.
23. H. Hotelling. — *Simplified Calculation of Principal Components*, *Psychometrika*, I, 1936.
24. M. I. Flomenhoft. — *A Method for the Determination of Mode Shapes and Frequencies above the Fundamental by Matrix Iteration*. *Journ. Appl. Mech.*, 7, 1950.
25. M. L. Gossard. — *An iterative Transformation Procedure for Numerical Solution of Flutter and Similar Characteristic-Value Problems*. *N. A. C. A. Report* 1073, 1952.
26. B. Fraeijs de Veubeke. — *Effet gyroscopique des rotors sur les vitesses critiques de flexion*. *Bulletin Techn. U. I. Lv.*, 1942.
27. B. Fraeijs de Veubeke. — *Crankshaft-Propeller Vibration Modes*. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 17-5, mai 1950.
28. B. Fraeijs de Veubeke. — *Iteration in semi-definite Eigenvalue Problems*. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 22-10, oct. 1955.
29. B. Fraeijs de Veubeke. — *Matrices de projection et techniques d'itération*. *Annales Soc. Sc. Bruxelles*, 70-1, 1956.
30. B. Fraeijs de Veubeke. — *L'énergie potentielle complémentaire dans les problèmes dynamiques. Un principe de variation des accélérations*. *Annales Soc. Sc. Bruxelles*, 73-111, 1959.
31. B. Fraeijs de Veubeke. — *Quelques propriétés des systèmes ayant deux ou plusieurs fréquences propres confondues*. *Comptes Rendus 3<sup>e</sup> Congrès Aéronautique Européen*, Bruxelles, 1958.
32. B. Fraeijs de Veubeke. — *Déphasages caractéristiques et vibrations forcées d'un système amorti*. *Acad. R. Belgique, Bull. Cl. Sc.*, XXXIV-5, 1958.