

**LABORATOIRE D'AERONAUTIQUE
DE L'UNIVERSITE DE LIEGE**

Rue E. Solvay, 21
(anc. Rue du Val Benoît, 75)
B 4000 LIEGE
Belgique

RAPPORT SF-41

COURS DE THEORIE DES STRUCTURES ELASTICITE

B. FRAEIJIS de VEUBEKE

SOMMAIRE DU COURS

	<u>Pages</u>
<u>CHAPITRE 1</u> <u>CINEMATIQUE DU MILIEU CONTINU</u>	1
1.1. Coordonnées matérielles et spatiales	1
1.2. Transformations de voisinage	3
1.3. Composition des changements de configuration	6
1.4. Mesure de l'état de déformation local	9
1.5. Les rotations matérielles	11
1.6. La décomposition cinématique de la matrice Jacobienne	19
1.7. Interprétation géométrique des déformations infinitésimales	23
1.8. Le point de vue Eulérien en cinématique.	
La mesure d'Almansi	25
1.9. Mesures Eulériennes des vitesses de déformation et de rotation	27
1.10. Evolution temporelle de la décomposition cinématique de la matrice Jacobienne	30
<u>CHAPITRE 2</u> <u>STATIQUE ET TRAVAUX VIRTUELS</u>	34
2.1. Le concept de tension. Les tensions vraies	34
2.2. Les tensions de PIOLA	38
2.3. Les équations d'équilibre de translation	40
2.4. Les équations d'équilibre de rotation	41
2.5. La statique par les travaux virtuels	43
2.6. Commutabilité des opérateurs δ et D_t	45
2.7. Le théorème des travaux virtuels	47
2.8. Statique et puissance virtuelle pour les tensions vraies	49
2.9. Statique et travaux virtuels dans les changements de configuration infinitésimaux	52
<u>CHAPITRE 3</u> <u>CONSERVATION DE L'ENERGIE</u>	53
3.1. Les équations constitutives pour les tensions de Piola	53
3.2. Les tensions de Kirchhoff-Trefftz	56
3.3. Les équations constitutives de l'Elasticité géométriquement linéaire	60

CHAPITRE 4 TENSEURS CARTESIENS

4.1. Bases et changements de base	61
4.2. Tenseurs	63
4.3. Quelques tenseurs particuliers	66
4.4. Le produit vectoriel	70
4.5. Structure des tenseurs cartésiens symétriques de rang 2. Axes principaux	71
4.6. Invariants fondamentaux et déviateur	73
4.7. Structure des tenseurs cartésiens de second rang avec symétrie gauche	31
4.3. Représentation matricielle des opérations tensorielles	34

CHAPITRE 5 LES EQUATIONS DE L'ELASTICITE LINEAIRE

5.1. Compatibilité des déformations dans un domaine à connexion linéaire simple	30
5.2. Compatibilité des déformations dans un domaine à connexion linéaire multiple	93
5.3. Allongements principaux et invariants fondamentaux de la déformation	105
5.4. Tensions principales et invariants fondamentaux de l'état de tension	106
5.5. Tensions et déformations octaédrales	107
5.6. Cercles de MOHR	109
5.7. Statique et travaux virtuels	112
5.8. Développement Taylorien de l'énergie de déformation	113
5.9. Stabilité infinitésimale	117
5.10. La condition de stabilité infinitésimale de Hadamard	120
5.11. Isotropie et anisotropie	123
5.12. Critères de limite élastique	134
5.13. Les équations de NAVIER	140
5.14. Les équations de BELTRAMI-MICHELL	145

<u>CHAPITRE 6</u>	<u>EXTENSION, FLEXION ET TORSION DES POUTRES PRISMATIQUES</u>	147
6.1.	Formules de Green et de Stokes	143
6.2.	Le centroïde	149
6.3.	Les moments d'inertie	150
6.4.	La méthode semi-inverse de Barré de Saint-Venant	153
6.5.	Résultantes des tensions sur une section droite.	
	Loi d'équarissage	156
6.6.	Intégration des déplacements transversaux	160
6.7.	Equations gouvernant le champ des tensions tangentielles	164
6.8.	Intégration du déplacement longitudinal	166
6.9.	Séparation des solutions	173
6.10.	La torsion pure	174
6.11.	Le centre de torsion pour un pseudo-encastrement	180
6.12.	La flexion sans torsion	181
6.13.	La relation de raideur pour la torsion	183
6.14.	L'énergie totale en fonction des déformations des fibres	190
6.15.	L'énergie totale en fonction des sollicitations	192
6.16.	Les équations constitutives généralisées de la flexion-torsion des poutres	193
6.17.	Formulation unidimensionnelle de la flexion-torsion des poutres	193
6.18.	Applications	201
	A. Fonctions de torsion de la barre elliptique	202
	B. Fonctions de torsion de la barre et du tube circulaires	204
	C. Fonctions de torsion avec pôles	205
	D. Fonction de torsion de la barre triangulaire	212
	E. Fonction de torsion de la barre rectangulaire	214
	F. Les fonctions de flexion pour une barre circulaire	217
	G. Les fonctions de flexion du tube circulaire	220
	H. Les fonctions de flexion de la barre rectangulaire	221

CHAPITRE 7 TENSIONS ET DEFORMATIONS PLANES

7.1. Lemmes pour l'intégration d'équations aux dérivées partielles sous forme complexe	225
7.2. La structure d'une fonction biharmonique	228
7.3. Structure de la solution des problèmes de déformation plane	229
7.4. Structure de la solution du problème des tensions planes	233
7.5. L'état de tension plan au sens restreint	237
7.6. La fonction d'Airy	239
7.7. Représentation complexe de la fonction d'Airy	244
7.8. Coordonnées polaires	246
7.9. Applications en coordonnées cartésiennes	255
A. L'état de tension hydrostatique	256
B. Gradient uniforme de changement de volume	256
C. Cisaillement pur uniforme	258
D. Accroissement linéaire d'une tension normale	259
E. Extension simple	259
F. Flexion pure	259
G. Shear lag	259
H. Flexion par effort tranchant	261
I. Flexion de Saint-Venant d'une poutre rectangulaire avec semelles	261
J. Mise en charge transversale d'une poutre à semelles	265
7.10. Applications en coordonnées polaires	268
A. Ouverture circulaire libre de charges appliquées dans une plaque en état de tension plan	274
B. Dislocation de Volterra de l'anneau circulaire	280
C. Les poutres de flexion à courbure constante	284
D. L'anneau sollicité en torsion	302
E. Le tube épais sous pression	303
F. Frettage des tubes et anneaux cylindriques	306
G. Force concentrée à l'origine d'une plaque indéfinie	308

1. Hypothèses de base	2
2. Application du principe variationnel canonique	3
3. Le principe canonique bi-dimensionnel	10
4. Compatibilité des déformations	14
5. Autres types d'approximation	15
6. L'hypothèse de KIRCHHOFF	13
7. Les conditions aux limites de la théorie de KIRCHHOFF	21
8. Le principe variationnel de KIRCHHOFF	27
9. Structure de la solution des équations des plaques d'épaisseur modérée	29
10. L'effet de bord	35
11. Torsion d'une lame	37
12. Flexion de de SAINT VENANT d'une lame	44
13. Solutions particulières pour charge transversale	49
14. Flexion des plaques en coordonnées polaires	52
15. Problèmes de flexion axisymétriques	54

1.1. Coordonnées matérielles et spatiales

Dans un même repère cartésien soient

$$x_i \quad i = 1, 2, 3 \quad .$$

Les coordonnées d'un point matériel dans une configuration dite de référence ou configuration initiale d'un corps élastique;

$$\xi_i \quad i = 1, 2, 3$$

les coordonnées du même point dans une configuration déformée ou configuration finale.

Le vecteur déplacement aura pour composantes

$$u_i = \xi_i - x_i \quad i = 1, 2, 3 \quad .$$

On peut imaginer les déplacements et par conséquent les coordonnées finales comme exprimés en fonction des coordonnées initiales

$$u_i = u_i(x) \quad \xi_i = x_i + u_i(x) = \xi_i(x) \quad (1.1)$$

La configuration de référence est alors supposée parfaitement connue et chaque triplet x de coordonnées initiales identifie un point matériel bien déterminé. Pour cette raison, ces coordonnées sont aussi appelées coordonnées matérielles.

La position finale d'un point matériel dépend de la déformation subie par le corps élastique; elle n'est généralement pas connue a priori. De plus, il est nécessaire d'envisager les propriétés de plusieurs configurations finales pour identifier celle ou celles qui seront effectivement réalisées.

Un triplet ξ de coordonnées finales n'identifie donc qu'un point de l'espace qui peut être occupé par des points matériels différents selon les différentes configurations analysées; pour cette raison on appelle aussi les coordonnées finales coordonnées spatiales. L'emploi de coordonnées matérielles comme variables fondamentales est particulièrement indiqué en Elasticité du fait que l'on étudie l'évolution d'un ensemble fixe de points matériels dont on recherche la configuration finale et ses propriétés. Les intégrations nécessaires peuvent être effectuées sur la configuration fixe de référence, dont les propriétés géométriques sont généralement simples.

En Mécanique des Fluides, les coordonnées matérielles sont généralement appelées coordonnées de Lagrange. Dans leur définition générale, elles sont constituées par tout triplet de constantes d'intégration des équations différentielles des trajectoires de particules. Une définition particulière consiste à utiliser le triplet x_0 de coordonnées cartésiennes d'une particule dans une configuration de référence, telle qu'elle se présente par exemple à une époque conventionnelle t_0 de l'évolution. Ce point de vue coïncide alors avec la définition des coordonnées matérielles de l'Elasticité.

Cependant, dans la plupart des problèmes de la Mécanique des Fluides, l'ingénieur est davantage intéressé par l'évolution d'une situation délimitée par des frontières fixes dans l'espace, frontières éventuellement traversées par les particules du fluide. C'est la configuration spatiale qui est alors fixée tandis que l'ensemble des particules varie. Pour cette raison, la Mécanique des Fluides s'est principalement développée à partir du formalisme utilisant les coordonnées spatiales, dites aussi coordonnées d'Euler, comme fondamentales. En Elasticité, le formalisme Eulérien consiste à considérer les déplacements, et donc aussi les coordonnées initiales, comme des fonctions inconnues des coordonnées finales :

$$u_i = u_i(\xi) \quad x_i = \xi_i - u_i(\xi) = x_i(\xi) \quad (1.2)$$

Un obstacle à l'utilisation des coordonnées Eulériennes est la difficulté de formuler des équations constitutives, telles que les relations entre tensions et déformations en Elasticité, qui puissent tenir compte des changements d'orientation dans les directions préférentielles des milieux anisotropes. Cet obstacle disparaît pour les milieux isotropes, où les équations constitutives sont invariantes vis-à-vis des changements d'orientation des repères cartésiens. Si, pour la plupart des fluides, on est en droit de postuler des propriétés isotropes, une réduction des milieux élastiques aux cas d'isotropie serait par trop mutilante. Le développement de la théorie de l'Elasticité sera donc essentiellement basé sur le point de vue Lagrangien, tel que représenté par les équations (1.1).

1.2. Transformations de voisinage

En un point régulier, où, par définition, le champ $\vec{u}(x)$ est différentiable, la transformation de voisinage

$$d\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} dx_j = D_j \xi_i dx_j \quad (1.3)$$

est entièrement caractérisée par les éléments de la matrice Jacobienne

$$J = \{ D_j \xi_i \} \quad (D_j = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}) \quad (1.4)$$

On notera que la formule (1.3) fait un usage, constant par la suite, de la convention de sommation sur les indices répétés. Elle est, en notations indicielles, la traduction de la relation matricielle

$$d\xi = J dx \quad (1.3')$$

où $d\xi$ et dx sont les matrices unicolonnes des composantes cartésiennes des vecteurs $d\vec{\xi}$ et $d\vec{x}$; les règles de la multiplication matricielle montrent alors que dans (1.4) l'indice i est celui des lignes de J , l'indice j celui de ses colonnes.

Le Jacobien, ou déterminant de la matrice Jacobienne, mesure le rapport entre un élément de volume initial dV du voisinage et l'élément de volume final contenant les mêmes points matériels :

$$d\Omega = \det J \cdot dV \quad (1.5)$$

Imaginons alors une transformation continue de la configuration initiale vers la configuration finale, au cours de laquelle le Jacobien, dont la valeur initiale est partout unitaire, varie continûment au niveau de chaque point matériel. Sa valeur ne peut nulle part s'annuler sans annuler le volume d'un ensemble non vide de points matériels, ce qui est physiquement impossible. Le Jacobien ne peut donc nulle part changer de signe et, quelle que soit la configuration finale, on a en tout point régulier

$$\det J > 0 \quad (1.6)$$

Parmi d'autres conséquences importantes pour la mesure des déformations finies, cette propriété assure l'existence et l'unicité en tout point régulier de la transformation de voisinage inverse

$$dx_j = \partial_m x_j d\xi_m \quad \left(\partial_m = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \right) \quad (1.7)$$

Les propriétés évidentes

$$\partial_m x_j D_j \xi_i = \delta_{mi} \quad D_j \xi_i \partial_i x_k = \delta_{jk} \quad (1.8)$$

sont les traductions en notation indicielle des relations d'inversion

$$J J^{-1} = J^{-1} J = I \quad J^{-1} = \{ \partial_m x_j \} \quad (1.8')$$

Si le champ des déplacements dans (1.1) est continûment différentiable sur l'ensemble du domaine occupé par la configuration initiale, la propriété (1.6), satisfaite en tout point, autorise l'application du théorème des fonctions implicites.

Celui-ci nous assure alors de l'existence et de l'unicité du changement de configuration inverse (1.2).

Les éléments de la matrice Jacobienne en un point régulier ont une interprétation géométrique liée aux coordonnées curvilignes naturelles que constituent les plans cartésiens $x_i = \text{constante}$ de la configuration initiale quand ils deviennent par convection des surfaces courbes de la configuration finale. Considérant

$$\vec{\xi} = \xi_i(x) \vec{e}_i \quad ,$$

le vecteur de position finale du point matériel, les vecteurs de la base locale de ce système de coordonnées curvilignes naturelles sont définies par

$$\vec{g}_j = D_j \vec{\xi} = D_j \xi_i \vec{e}_i \quad (1.9)$$

Chaque colonne de la matrice Jacobienne est donc formée des composantes cartésiennes d'un des vecteurs de la base locale : la propriété (1.6) assure l'indépendance linéaire de ces vecteurs.

La considération des propriétés de la matrice Jacobienne est équivalente à celle des propriétés de la matrice des gradients des déplacements

$$A = \{ D_j u_i \} \quad (1.10)$$

De (1.1), on tire en effet la formulation équivalente d'une transformation de voisinage

$$d\xi_i = dx_i + du_i = (\delta_{ji} + D_j u_i) dx_j \quad (1.11)$$

soit encore

$$D_j \xi_i = \delta_{ji} + D_j u_i \quad J = I + A \quad (1.12)$$

De même, pour la transformation de voisinage inverse,

$$dx_m = d\xi_m - du_m = (\delta_{im} - \partial_i u_m) d\xi_i$$

soit

$$\partial_i x_m = \delta_{im} - \partial_i u_m \quad J^{-1} = I - X \quad (1.13)$$

Il en résulte pour les relations d'inversion (1.8') la forme équivalente

$$X A = A X = A - X \quad (1.14)$$

1.3. Composition des changements de configuration

Un changement de configuration est défini en assignant à chaque point, repéré par son vecteur de position initial \vec{r} , un déplacement $\vec{u}(r)$.

Soit $\vec{u}(x)$ un premier changement; il déplace un point matériel originellement repéré par le vecteur de position \vec{x} et lui assigne le nouveau vecteur de position $\vec{x} + \vec{u}(x)$. Celui-ci devient le vecteur de position originel d'un déplacement subséquent $\vec{v}(r) = \vec{v}(x + u(x))$.

Le vecteur déplacement résultant devient

$$\vec{w}_{u,v}(x) = \vec{u}(x) + \vec{v}(x + u(x)) \quad (1.15)$$

Cette loi de composition des déplacements peut être comparée à celle qui résulterait d'une interversion dans l'ordre des changements de configuration composants

$$\vec{w}_{v,u}(x) = \vec{v}(x) + \vec{u}(x + v(x)) \quad (1.16)$$

Les changements composés (1.15) et (1.16) sont généralement différents; il suffit pour s'en convaincre d'analyser des exemples de composition de rotations autour d'axes différents. Du point de vue de la composition des transformations de voisinage, on aurait pour la séquence $\vec{u}(x)$, suivi de $\vec{v}(r)$

$$d\xi_i = (\delta_{ji} + D_j u_i) dx_j$$

suivi de

$$d\eta_m = (\delta_{im} + \partial_i v_m) d\xi_i$$

résultant finalement en

$$d\eta_m = (\delta_{im} + \partial_i v_m)(\delta_{ji} + D_j u_i) dx_j$$

et mettant en évidence que la composition résulte du produit dans l'ordre adéquat des matrices Jacobiennes composantes.

En développant le produit et notant que

$$\partial_i v_m (\delta_{ji} + D_j u_i) = \partial_i v_m D_j \xi_i = D_j v_m(\xi) = D_j v_m(x + u)$$

on obtient pour la matrice Jacobienne composée un résultat

$$D_j \eta_m = \delta_{jm} + D_j \{ u_m(x) + v_m(x + u) \} \quad (1.17)$$

qui cadre avec celui (1.15) de la composition des déplacements.

Supposons maintenant le champ $\vec{v}(x+u)$ continûment différentiable et appliquons-lui le théorème des accroissements finis

$$\vec{v}(x+u) = \vec{v}(x) + u_j D_j \vec{v}(\hat{x})$$

où $\hat{x}_i = x_i + \theta_i u_i$ (i non sommé) $0 \leq \theta_i \leq 1$.

La formule (1.15) prend la forme

$$\vec{w}_{u,v}(x) = \vec{u}(x) + \vec{v}(x) + u_j D_j \vec{v}(\hat{x}) \quad (1.15')$$

Nous dirons que le champ $\vec{v}(r)$ satisfait aux conditions de linéarité géométrique si les neuf gradients

$$| D_j v_m | \ll 1$$

sont partout négligeables devant l'unité. Dans ces conditions, les déplacements représentés par le dernier terme de (1.15') sont négligeables devant $\vec{u}(x)$ et on a une loi de superposition linéarisée

$$\vec{w}_{u,v}(x) = \vec{u}(x) + \vec{v}(x)$$

Cette même loi se retrouve en inversant l'ordre des changements de configuration et supposant que le champ $\vec{u}(\vec{r})$ cette fois satisfait aux conditions de linéarité géométrique.

Il s'ensuit que si les deux champs de déplacement obéissent aux conditions de linéarité géométrique, leur composition se ramène à leur superposition locale et devient ainsi indépendante de l'ordre dans lequel ils sont appliqués.

L'application du théorème des accroissements finis à la formule (1.17)

$$D_j \eta_m = \delta_{jm} + D_j \{ u_m(x) + v_m(x) + u_r D_r v_m(\hat{x}) \}$$

demande afin de ramener le résultat à

$$D_j \eta_m = \delta_{jm} + D_j \{ u_m(x) + v_m(x) \}$$

que les hypothèses de linéarisation géométrique soient complétées par des conditions de régularité de croissance. Si en effet les termes $u_r D_r v_m(\hat{x})$ sont négligeables devant $u_m(x)$, la même conclusion n'est pas nécessairement vraie au niveau de la comparaison de leurs dérivées partielles.

1.4. Mesure de l'état de déformation local

Dans une transformation de voisinage (1.11), le carré de la distance qui sépare deux points voisins dans la configuration finale vaut

$$d\xi_i d\xi_i = (\delta_{mi} + D_m u_i)(\delta_{ni} + D_n u_i) dx_m dx_n$$

Développant et retranchant le carré de la distance initiale, il vient

$$d\xi_i d\xi_i - dx_i dx_i = 2 \epsilon_{mn} dx_m dx_n \quad (1.18)$$

avec

$$\epsilon_{mn} = \frac{1}{2} (D_m u_n + D_n u_m + D_m u_i D_n u_i) = \epsilon_{nm} \quad (1.19)$$

Les coefficients de la forme quadratique (1.18) que l'on peut ranger dans une matrice symétrique

$$E = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

caractérisent la déformation locale du milieu. En effet s'ils sont tous nuls, la transformation de voisinage préserve les distances entre deux points voisins quelconques et dans ce cas, comme on le démontrera rigoureusement dans la section suivante, elle ne peut représenter qu'une rotation du voisinage comme un élément rigide. Inversément, si la transformation se réduit à une rotation et préserve les distances entre deux points voisins quelconques, (1.18) exige que tous les ε_{mn} soient nuls.

La matrice de l'état de déformation, dont on voit qu'elle peut être exprimée rationnellement à partir de la matrice (1.10) des gradients de déplacement par la combinaison

$$E = \frac{1}{2} (A + A^T + A^T A) = E^T \quad (1.21)$$

est une des mesures Lagrangiennes exactes de l'état de déformation, pour la distinguer on l'appellera la mesure de GREEN.

Nous dirons qu'une transformation de voisinage est une déformation pure quand sa matrice Jacobienne est symétrique, ou, ce qui revient au même, quand sa matrice de gradients de déplacement est symétrique. Dans un tel cas

$$A = H = H^T$$

et la formule (1.21) donne pour la mesure de Green de l'état de déformation

$$E = H + \frac{1}{2} H^2 \quad (1.22)$$

Il est clair que à toute matrice H correspond une seule matrice E. Si la réciproque est vraie, la matrice H elle-même constituera une autre mesure Lagrangienne exacte de l'état de déformation.

Nous démontrerons cette correspondance bi-univoque entre H et E, en toute généralité, au chapitre 4 et appellerons les éléments de H ceux de la mesure de JAUMANN de l'état de déformation.

La distinction entre mesures de Green et de Jaumann est importante pour le cas des déformations finies. Pour le cas usuel des déformations infinitésimales, les éléments de H^2 deviennent négligeables devant ceux de H et la mesure de Jaumann coïncide en pratique avec celle de Green.

1.5. Les rotations matérielles

Le voisinage d'un point matériel où les déformations viendraient à disparaître, outre la translation subie du fait du déplacement de ce point, ne peut être transformé que par une rotation. Dans ce cas, la matrice Jacobienne est une matrice orthogonale

$$J = \{ \beta_{ij} \} \quad \text{avec} \quad \beta_{ij} \beta_{ir} = \delta_{jr} \quad (1.23)$$

condition nécessaire et suffisante pour que les distances soient préservées dans le voisinage :

$$\begin{aligned} d\xi_i d\xi_i &= (\beta_{ij} dx_j)(\beta_{ir} dx_r) = \beta_{ij} \beta_{ir} dx_j dx_r \\ &= \delta_{jr} dx_j dx_r = dx_r dx_r \end{aligned}$$

Notant $\{ \beta_{ij} \} = U$, la relation (1.23) est équivalente à

$$U U^T = I$$

et l'on en tire en prenant de chaque côté le déterminant

$$\det U \cdot \det U^T = (\det U)^2 = 1$$

L'ambiguïté de signe du déterminant est levée directement par la propriété (1.6) qui exige

$$\det U = \det \{ \beta_{ij} \} = 1 \quad (1.24)$$

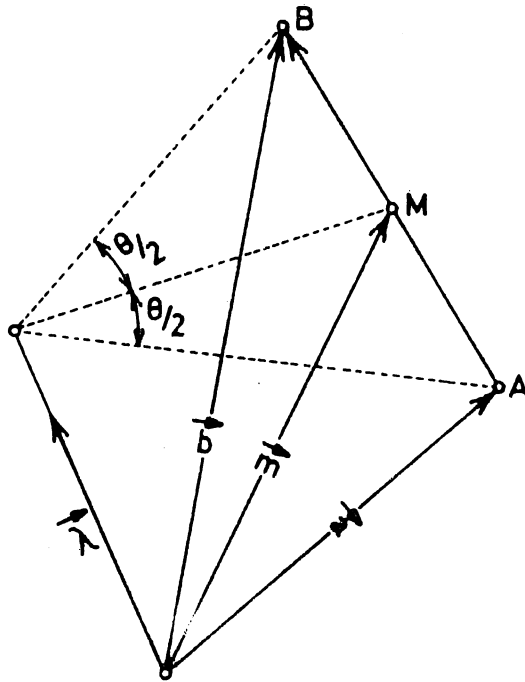
On sait que cette propriété additionnelle est nécessaire et suffisante pour que la matrice orthogonale U soit un véritable opérateur de rotation, non suivi ou précédé d'une symétrie par rapport à un plan (opération qui préserve aussi les distances). Rappelons enfin que, U^T étant une matrice inverse de U à droite, est aussi inverse à gauche

$$U^T U U^T = U^T \rightarrow (U^T U - I) U^T = 0 \rightarrow U^T U = I$$

ce qui en notations indicielles se traduit par

$$\beta_{ij} \beta_{mj} = \delta_{im} \quad (1.25)$$

La structure générale d'une matrice de rotation découle assez simplement d'une propriété géométrique du champ des déplacements.



Si $\vec{\lambda}$ est un vecteur porté par l'axe de la rotation, son moment par rapport à un point M : $\vec{\lambda} \times \vec{m}$ est perpendiculaire au plan contenant l'axe et passant par M. L'origine A et l'extrémité B du vecteur moment sont prises de telle façon que M coïncide avec le milieu du segment AB. De la sorte, si \vec{a} et \vec{b} sont les vecteurs de position respectifs de A et B, on aura

$$\vec{m} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b}) \qquad \vec{\lambda} \times \vec{m} = \vec{b} - \vec{a}$$

Le vecteur \vec{b} peut être considéré comme le vecteur \vec{a} tourné par la rotation autour de l'axe d'un angle θ , qui est, pour l'instant limité à l'intervalle $0 \leq \theta < \pi$. Le module du déplacement $\vec{b} - \vec{a}$ est alors

$$|| \vec{\lambda} \times \vec{m} || = 2 || \vec{m} || \sin \phi \cdot \tan \frac{\theta}{2}$$

où $|| \vec{m} || \sin \phi$ est la projection de \vec{m} sur un plan perpendiculaire à l'axe de la rotation. D'autre part, le module du produit vectoriel est aussi

$$|| \vec{\lambda} \times \vec{m} || = || \vec{\lambda} || \cdot || \vec{m} || \sin \phi$$

Par comparaison, on trouve pour le vecteur $\vec{\lambda}$ porté par l'axe, un module

$$|| \vec{\lambda} || = 2 \tan \frac{\theta}{2}$$

qui ne dépend que de l'angle de rotation. Par conséquent, le champ des moments de ce vecteur est susceptible de représenter celui des déplacements d'une rotation finie, à condition de considérer le moment comme appliqué à la position moyenne de chaque point. Le cas limite apparemment singulier $\theta = \pi$ sera résorbé par la suite.

Dans la représentation matricielle de cette propriété

$$m = \frac{1}{2} (a + b) \qquad \Lambda m = b - a$$

$$b = U a$$

le produit vectoriel est obtenu en construisant à l'aide des composantes du vecteur $\vec{\lambda}$ (ou de sa matrice unicolonne λ), la matrice symétrique gauche

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{pmatrix} = -\Lambda^T$$

Les composantes de λ sont alors appelées composantes strictes de Λ . L'élimination de m et de b fournit

$$\frac{1}{2} \Lambda (I + U) a = (U - I) a$$

et, comme a est arbitraire,

$$\frac{1}{2} \Lambda (I + U) = U - I$$

ou encore, cherchant à exprimer la matrice de rotation en fonction de Λ :

$$(I - \frac{1}{2} \Lambda) U = I + \frac{1}{2} \Lambda \quad (1.26)$$

Pour obtenir U il nous faut encore inverser la matrice

$$M = I - \frac{1}{2} \Lambda \quad (1.27)$$

Son équation caractéristique

$$\det (M - \alpha I) = 0$$

est extrêmement facile à développer; on trouve

$$(1 - \alpha)^3 + \frac{1}{4} (1 - \alpha) \lambda^T \lambda = -\alpha^3 + 3\alpha^2 - \alpha(3 + \frac{1}{4} \lambda^T \lambda) + (1 + \frac{1}{4} \lambda^T \lambda) = 0$$

Le déterminant de M, représenté par le terme indépendant, vaut

$$1 + \frac{1}{4} \lambda^T \lambda = 1 + \tan^2 \frac{\theta}{2} = 1/\cos^2 \frac{\theta}{2}$$

Pour éliminer la singularité en $\theta = \pi$, multiplions l'équation caractéristique par $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ et remplaçons les puissances de α par les puissances correspondantes de M, ce qui revient à utiliser le théorème de Cayley-Hamilton selon lequel une matrice vérifie toujours sa propre équation caractéristique; il vient

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} \{ -M^3 + 3M^2 - (3 + \tan^2 \frac{\theta}{2}) M \} + I = 0$$

Cette relation, multipliée par M^{-1} fournit, après substitution de (1.27) et regroupement des termes

$$M^{-1} = I + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \Lambda + \frac{1}{4} \cos^2 \frac{\theta}{2} \Lambda^2 \quad (1.28)$$

Ceci permet maintenant le calcul de la matrice de rotation

$$\begin{aligned} U &= M^{-1} (I - \frac{1}{2} \Lambda + \Lambda) = I + M^{-1} \Lambda \\ &= I + \Lambda + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \Lambda^2 + \frac{1}{4} \cos^2 \frac{\theta}{2} \Lambda^3 \end{aligned}$$

Simplifions ce résultat en observant que

$$\Lambda^2 = -\lambda^T \lambda I + \lambda \lambda^T = -4 \tan^2 \frac{\theta}{2} I + \lambda \lambda^T$$

et que

$$\Lambda \lambda \equiv 0 \quad .$$

Il vient

$$\Lambda^3 = -4 \tan^2 \frac{\theta}{2} \Lambda$$

et, après substitution de ceci et regroupement,

$$U = I + \cos^2 \frac{\theta}{2} \Lambda + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \Lambda^2$$

Une dernière modification est nécessaire pour obtenir une formule où l'angle de la rotation est complètement arbitraire. Posant

$$\Lambda = 2 \tan \frac{\theta}{2} N$$

la matrice symétrique gauche N a pour composantes strictes les cosinus directeurs n_i d'un vecteur unitaire qui oriente l'axe de la rotation, cette transformation conduit à la formule finale

$$U = I + \sin \theta N + (1 - \cos \theta) N^2 \quad (1.29)$$

avec aussi

$$N^2 = -I + n n^T \quad n^T n = 1 \quad (1.30)$$

Elle est en fait une des formes possibles de la représentation de Cayley-Klein.

Le cas des rotations infinitésimales nous intéresse particulièrement; il s'obtient en ne retenant que les termes du premier ordre dans le très petit angle θ

$$U = I + \theta N$$

Ce résultat s'écrira plutôt

$$U = I + \Omega \quad (1.31)$$

où Ω est la matrice symétrique gauche

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} = -\Omega^T$$

dont les composantes strictes sont les petites rotations superposables

$$\omega_i = \theta n_i \quad (1.32)$$

autour des axes cartésiens recentrés au point considéré.

Le résultat (1.31) est évidemment obtenu de façon plus élémentaire en observant que l'opérateur de rotation infinitésimale ne diffère de l'opérateur identité que par des termes petits; revenant aux notations indicielles, on doit avoir

$$D_j \xi_i = \delta_{ij} + \omega_{ij} \quad | \omega_{ij} | \ll 1 \quad (1.33)$$

Exprimant maintenant la propriété de conservation du carré des distances

$$D_j \xi_i D_m \xi_i = \delta_{jm}$$

soit

$$(\delta_{ij} + \omega_{ij})(\delta_{im} + \omega_{im}) = \delta_{jm} + \omega_{jm} + \omega_{mj} + \omega_{ij} \omega_{im} = \delta_{jm}$$

il vient, en négligeant les termes petits du second ordre, la condition de symétrie gauche

$$\omega_{jm} + \omega_{mj} = 0 \quad (1.34)$$

La comparaison entre (1.31) et (1.33) donne comme relations entre les ω à deux indices et ceux à un indice :

$$\omega_{12} = -\omega_3 \quad \omega_{23} = -\omega_1 \quad \omega_{31} = -\omega_2 \quad (1.35)$$

Elles peuvent être rassemblées dans l'unique formule

$$\omega_i = -\frac{1}{2} e_{imn} \omega_{mn} \quad \text{ou} \quad \omega_{mn} = -e_{mnp} \omega_p \quad (1.36)$$

faisant intervenir le symbole de permutation

$$e_{mnp} = \begin{cases} 1 & \text{si la séquence } mnp \text{ est une permutation paire} \\ & \text{de } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{si la séquence } mnp \text{ est une permutation impaire} \\ & \text{de } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

en d'autres termes e_{mnp} est antisymétrique dans tous ses indices et les seuls cas où il ne prend pas la valeur nulle sont

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1$$

$$e_{321} = e_{213} = e_{132} = -1$$

Les déplacements infinitésimaux résultant d'une rotation infinitésimale autour d'un axe passant par l'origine des coordonnées correspondent au champ de moments

$$\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{m}$$

car le vecteur $\vec{\omega}$ de composantes (1.32) est assimilable au vecteur $\vec{\lambda}$ du fait que le module $2 \tan \frac{\theta}{2}$ est assimilable à θ .

D'autre part, on peut assimiler \vec{m} au vecteur de position \vec{x} du point matériel au lieu du vecteur de position moyenne, car il n'en diffère que par le demi déplacement qui est infinitésimal. Ce champ s'exprime alors analytiquement par les formules

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 \\
 u_2 &= \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 \\
 u_3 &= \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1
 \end{aligned}
 \quad \text{ou} \quad
 u_j = e_{jmn} \omega_m x_n \quad (1.37)$$

Il est analogue au champ des vitesses de rotation d'un solide qui répond aux mêmes équations mais où $\vec{\omega}$ a alors la signification d'une vitesse angulaire.

1.6. La décomposition cinématique de la matrice Jacobienne

Cherchons à décomposer une transformation de voisinage générale en deux étapes. La première est une déformation pure

$$d\eta_i = (\delta_{ij} + h_{ij}) dx_j \quad \text{avec} \quad h_{ji} = h_{ij}$$

la seconde est une rotation

$$\begin{aligned}
 d\xi_m &= \beta_{mi} d\eta_i & \text{avec} & \quad \beta_{mi} \beta_{mr} = \delta_{ir} \\
 & & & \quad \det \{ \beta_{mi} \} = 1
 \end{aligned}$$

La transformation générale serait donc représentée par

$$d\xi_m = \beta_{mi} (\delta_{ij} + h_{ij}) dx_j$$

et pose le problème de l'existence et de l'unicité de la décomposition polaire

$$D_j \xi_m = \beta_{mi} (\delta_{ij} + h_{ij}) \quad (1.38)$$

La forme matricielle correspondante est

$$J = U (I + H) \quad (1.39).$$

Multipliant cette équation à gauche, membre à membre, par la relation transposée

$$J^T = (I + H) U^T$$

il vient du fait que $U^T U = I$

$$J^T J = (I + H)^2$$

Substituant (1.12) et simplifiant

$$A + A^T + A^T A = 2 H + H^2$$

Finalement, en égard à (1.21), nous retrouvons la relation (1.22) dont la validité est maintenant étendue au cas d'une transformation de voisinage générale et plus seulement une déformation pure.

Dans la décomposition polaire 1.39, la matrice H est donc la mesure de Jaumann de l'état de déformation.

D'autre part, en prenant les déterminants des deux membres de (1.39)

$$\det J = \det U \cdot \det (I + H) = \det (I + H)$$

Par conséquent, en vertu de la limitation d'origine physique (1.6), la mesure de Jaumann est contrainte à satisfaire

$$\det (I + H) > 0 \quad (1.40)$$

L'opérateur de rotation est alors défini sans ambiguïté par

$$U = J (I + H)^{-1} \quad (1.41).$$

L'élimination de H fournit une relation implicite

$$U^T J = (U^T J)^T = J^T U \quad (1.42)$$

pour le calcul de la rotation en fonction des seuls gradients de déplacement.

Il faut insister sur le fait que la décomposition polaire n'implique pas, sauf cas tout à fait exceptionnels, l'existence de champs de déplacements partiels qui seraient associés par leurs gradients à chacune des transformations partielles et dont la composition restituerait le champ de déplacement global.

Examinons maintenant le cas où les deux transformations de voisinage qui composent la transformation générale sont infinitésimales.

La formule (1.38) devient alors

$$D_j \xi_m = (\delta_{mi} + \omega_{mi})(\delta_{ij} + h_{ij}) \quad (1.43)$$

avec $|\omega_{mi}| \ll 1$ $|\ h_{ij} | \ll 1$

Développant et laissant tomber les termes petits du second ordre, on obtient la transformation infinitésimale résultante

$$D_j \xi_m = \delta_{mj} + h_{mj} + \omega_{mj} \quad (1.44)$$

soit, pour la matrice des gradients de déplacement

$$D_j u_m = h_{mj} + \omega_{mj} \quad (1.45)$$

Par suite du caractère symétrique des h_{mj} et symétrique gauche des ω_{mj} , il vient finalement les formules explicites

$$h_{mj} = \frac{1}{2} (D_j u_m + D_m u_j) = h_{jm} \quad (1.46)$$

$$\omega_{mj} = \frac{1}{2} (D_j u_m - D_m u_j) = -\omega_{jm} \quad (1.47)$$

On observera à partir de (1.46) que, puisque la mesure de Jaumann devient identique ici à la mesure de Green, le caractère infinitésimal des déformations et des rotations permet de simplifier la formule (1.19) en la débarassant de ses termes non-linéaires.

Quand la formule (1.47) est réécrite en terme des composantes de $\vec{\omega}$

$$2 \omega_i = - \epsilon_{imj} \omega_{mj} = - \frac{1}{2} \epsilon_{imj} D_j u_m + \frac{1}{2} \epsilon_{imj} D_m u_j$$

soit, en échangeant les indices sommatoires m et j dans le premier terme et regroupant,

$$\omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{imj} D_m u_j \quad (1.48)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2} (D_2 u_3 - D_3 u_2)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} (D_3 u_1 - D_1 u_3) \quad \text{ou} \quad \vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u} \quad (1.49)$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} (D_1 u_2 - D_2 u_1)$$

Nous appellerons en général conditions de la linéarisation géométrique (ou cinématique) celles

$$| D_j u_m | \ll 1 \quad (1.50)$$

portant sur les neuf gradients de déplacement, qui font d'une transformation de voisinage une transformation infinitésimale.

On observera que ces conditions sont complètement équivalentes aux neuf conditions distinctes

$$| \epsilon_{jm} | \ll 1 \quad | \omega_i | \ll 1 \quad (1.51).$$

1.7. Interprétation géométrique des déformations infinitésimales

Considérons le cas où le point voisin d'un point matériel donné est situé dans la direction du premier axe cartésien : \vec{dx} a pour composantes $(dx_1 > 0, 0, 0)$. En configuration finale, le vecteur de position relative $d_1 \vec{\xi}$ aura pour composantes

$$d_1 \xi_1 = (1 + D_1 u_1) dx_1 \quad d_1 \xi_2 = D_1 u_2 dx_1$$

$$d_1 \xi_3 = D_1 u_3 dx_1$$

nous obtenons donc pour la signification de ϵ_{11} , égal à h_{11} ,

$$\epsilon_{11} = D_1 u_1 = \frac{d_1 \xi_1 - dx_1}{dx_1} \quad (1.52)$$

Or, à des termes négligeables près, $d_1 \xi_1$ est la distance finale entre les points. Il s'en suit qu'une déformation infinitésimale à deux indices égaux à la signification d'un allongement spécifique (allongement par unité de longueur initiale) dans la direction indiquée par les indices.

Considérons maintenant en plus les relations entre les vecteurs de position relative initiale $(0, dx_2 > 0, 0)$ et le même $d_2 \vec{\xi}$ en configuration finale :

$$d_2 \xi_1 = D_2 u_1 dx_2 \quad d_2 \xi_2 = (1 + D_2 u_2) dx_2$$

$$d_2 \xi_3 = D_2 u_3 dx_2 \quad .$$

Initialement, les deux vecteurs de position relative sont orthogonaux; l'angle θ_{12} qu'ils forment en configuration finale peut être calculé par la formule du produit scalaire

$$d_1 \vec{\xi} \cdot d_2 \vec{\xi} = || d_1 \vec{\xi} || \cdot || d_2 \vec{\xi} || \cdot \cos \theta_{12}$$

Au premier membre, on trouve

$$\left[(1 + D_1 u_1) D_2 u_1 + D_1 u_2 (1 + D_2 u_2) + D_1 u_3 D_2 u_3 \right] dx_1 dx_2$$

expression qui se réduit à

$$(D_2 u_1 + D_1 u_2) dx_1 dx_2 = 2 \varepsilon_{12} dx_1 dx_2$$

en ne retenant que les termes principaux. Au second membre, comme les modules sont identifiables, à des termes négligeables près, à dx_1 et dx_2 respectivement, le terme principal est

$$\cos \theta_{12} dx_1 dx_2$$

On trouve donc l'interprétation

$$2 \varepsilon_{12} = \cos \theta_{12}$$

Le premier membre étant très petit par hypothèse, l'angle θ_{12} est très voisin de l'angle droit initial; on peut poser

$$\theta_{12} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{12}$$

et comme $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{12}\right) = \sin \gamma_{12} \stackrel{\sim}{=} \gamma_{12}$, il vient finalement

$$2 \varepsilon_{12} = \gamma_{12} \tag{1.53}$$

Le double d'un élément non diagonal de la matrice de l'état de déformation infinitésimale est égal à la petite diminution subie par l'angle, initialement droit, entre les deux directions indicées; l'angle de réduction s'appelle le glissement.

Une discussion plus approfondie de l'état de déformation finie ou infinitésimale pourra être abordée plus tard après avoir reconnu aux matrices E de Green ou H de Jaumann, le caractère de représentation dans le repère cartésien utilisé de grandeurs tensorielles, c'est-à-dire indépendantes du repère utilisé.

1.8. Le point de vue Eulérien en cinématique. La mesure d'Almansi.

La mesure Eulérienne d'une déformation finie peut être basée, comme la mesure Lagrangienne, sur l'altération des distances entre points d'un voisinage. On prendra cette fois la transformation de voisinage inverse (1.7) pour effectuer le calcul

$$dx_j dx_j = \partial_m x_j \partial_n x_j d\xi_m d\xi_n$$

dont on tire

$$d\xi_m d\xi_m - dx_j dx_j = (\delta_{mn} - \partial_m x_j \partial_n x_j) d\xi_m d\xi_n = 2 \phi_{mn} d\xi_m d\xi_n$$

(1.54)

La forme quadratique est prise maintenant dans les coordonnées finales du voisinage et ses coefficients

$$\begin{aligned} \phi_{mn} &= \frac{1}{2} (\delta_{mn} - \partial_m x_j \partial_n x_j) \\ &= \partial_m u_n + \partial_n u_m - \partial_m u_j \partial_n u_j = \phi_{nn} \end{aligned} \quad (1.55)$$

constituent la mesure d'ALMANSI de l'état de déformation.

Dénotant par F la matrice symétrique des éléments de cette mesure, le calcul précédent revient à la relation matricielle

$$I - (I - X)^T (I - X) = X + X^T - X^T X = 2 F \quad (1.56)$$

La mesure d'Almansi est en relation bi-univoque avec une autre, de matrice K, correspondant à une décomposition polaire adéquate de la matrice Jacobienne inverse

$$I - X = V (I - K) \quad (1.57)$$

où V est un opérateur de rotation et K est symétrique.

En effet

$$(I - X)^T (I - X) = I - 2F = (I - K) V^T V (I - K) = (I - K)^2$$

et la relation entre les deux mesures Eulériennes est

$$F = K - \frac{1}{2} K^2 \quad (1.58).$$

Il faut remarquer que l'ordre des facteurs de la décomposition polaire (1.57) est physiquement inverse de celui adopté dans (1.39). Si en effet, nous inversons la relation matricielle (1.57) en nous rappelant que ceci exige le renversement de l'ordre des facteurs d'un produit :

$$I + A = (I - K)^{-1} V^T$$

et la rotation précède maintenant la déformation dans l'ordre des opérations. De fait, comme on peut écrire

$$I + A = U (I + H) = \{ U (I + H) U^T \} \cdot U$$

on obtient par comparaison

$$V^T = U \quad \text{et} \quad (I - K)^{-1} = U (I + H) U^T \quad (1.59).$$

S'il n'y a pas en conséquence de relation bi-univoque entre la mesure K et la mesure H de Jaumann, ni dès lors de relation bi-univoque entre la mesure d'Almansi et la mesure de Green, l'apparition de l'opérateur de rotation dans les équations de liaison s'explique facilement par une question d'orientation dans les mesures.

La mesure de Jaumann, et donc aussi celle de Green, est celle d'un observateur local dont les axes subissent la rotation matérielle car dans la décomposition polaire (1.57) la mesure est prise avant de faire tourner la matière.

Au contraire, la mesure K (ou la mesure d'Almansi) est celle vue dans les axes cartésiens fixes.

1.9. Mesures Eulériennes des vitesses de déformation et de rotation

On considère ici une continuité dans les changements de configuration à l'intervention d'un paramètre supplémentaire t , qui peut être le temps. Les équations (1.1) et (1.2) de changement de configuration deviennent

$$u_i = u_i(x;t) \quad \xi_i = x_i + u_i(x;t) = \xi_i(x;t) \quad (1.1')$$

$$u_i = u_i(\xi;t) \quad x_i = \xi_i - u_i(\xi;t) = x_i(\xi;t) \quad (1.2')$$

Les changements finis peuvent alors être envisagés comme une succession de changements infinitésimaux, c'est-à-dire une intégration des vitesses de changement. Suivant en cela le point de vue Eulérien, les vitesses de déplacement des particules seront ici considérées comme étant fonctions des coordonnées spatiales. La vitesse d'une particule s'obtient en dérivant par rapport au temps, les coordonnées matérielles étant fixées; l'opérateur correspondant sera noté D_t :

$$D_t \xi_i(x;t) = D_t u_i(x;t) = v_i(x;t) \quad (1.60)$$

Pour obtenir le champ des vitesses en représentation Eulérienne $v_i(\xi;t)$ il faut imaginer que dans le résultat (1.60) on a effectué le changement de variables (1.2').

Quand une grandeur intensive quelconque $f(\xi;t)$ est représentée en coordonnées spatiales, sa dérivation temporelle locale, les coordonnées spatiales étant maintenues fixées, sera notée par le symbole ∂_t . Entre la dérivation particulière D_t et la dérivée locale existe alors la relation

$$D_t f = \partial_t f + \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \cdot D_t \xi_i = \partial_t f + v_i \partial_i f \quad (1.61)$$

Dans le voisinage d'une particule occupant la position $\vec{\xi}$ de l'espace à l'instant t , le champ des vitesses se compose d'une translation avec la vitesse \vec{v} de la particule et un champ d'accroissement de composantes

$$dv_i = \partial_j v_i d\xi_j \quad (1.62)$$

Nous allons justifier l'intérêt d'une décomposition de ce champ d'accroissement en deux parties

$$dv_i = (\Omega_{ij} + \theta_{ij}) d\xi_j \quad (1.63)$$

où

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j v_i - \partial_i v_j) = -\Omega_{ji} \quad (1.64)$$

est la partie symétrique gauche de $\partial_j v_i$ et

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j v_i + \partial_i v_j) = \theta_{ji} \quad (1.65)$$

en est la partie symétrique. Calculons à cet effet le taux d'accroissement du carré de la distance entre la particule et une autre arbitrairement choisie dans le voisinage

$$D_t \{ d\xi_i d\xi_i \} = 2 d\xi_i D_t d\xi_i = 2 d\xi_i d D_t d\xi_i = 2 d\xi_i \cdot dv_i \quad (1.66)$$

Or, par la suite de la symétrie gauche,

$$\Omega_{ij} d\xi_i d\xi_j = 0$$

et la substitution de (1.63) dans (1.66) fournit

$$D_t \{ d\xi_i d\xi_i \} = 2 \theta_{ij} d\xi_i d\xi_j$$

Par analogie avec (1.54) nous considérons les éléments (1.65) de la matrice symétrique θ comme des mesures Eulériennes de la vitesse de déformation du voisinage. Quant à la partie symétrique gauche, nous pouvons lui associer le vecteur des composantes strictes

$$\Omega_m = -\frac{1}{2} e_{mij} \Omega_{ij} = \frac{1}{2} e_{mij} \partial_i v_j \quad (1.67)$$

La partie

$$\Omega_{ij} d\xi_j = e_{imj} \Omega_m d\xi_j \quad (1.68)$$

est alors manifestement un champ de vitesse de rotation du voisinage comme un solide. La décomposition qui vient d'être effectuée est due à HELMHOLTZ, elle établit que le champ des vitesses instantanées dans le voisinage d'une particule se compose d'une translation avec la vitesse de la particule, d'une rotation autour de la particule comme un corps rigide avec vecteur de rotation $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$ (appelé vecteur tourbillon) et d'un champ de vitesse de déformation représenté par une matrice symétrique dont les éléments sont fournis par les formules (1.65).

A condition de prendre la configuration à l'instant t comme configuration initiale, ce qui permet d'assimiler ∂_j à D_j , et de prendre comme configuration finale celle de l'instant $t + dt$, on retrouve les résultats (1.45), (1.46) et (1.47) établis antérieurement pour un changement de configuration infinitésimal. Il suffit pour cela d'assimiler u_i à $v_i dt$, h_{mj} à $\theta_{mj} dt$ et ω_{mj} à $\Omega_{mj} dt$. Ceci illustre à nouveau l'équivalence complète entre une formulation Lagrangienne et une formulation Eulérienne de la cinématique pour le cas des déformations et rotations infinitésimales.

1.10. Evolution temporelle de la décomposition cinématique de la matrice Jacobienne

Une question naturelle se pose à propos des relations qui pourraient exister entre la décomposition de Helmholtz et la façon dont varie avec le temps la décomposition de la matrice Jacobienne. Si nous prenons la dérivée temporelle particulière de (1.38)

$$D_t D_j \xi_m = D_j D_t \xi_m = D_j v_m = (\delta_{ij} + h_{ij}) D_t \beta_{mi} + \beta_{mi} D_t h_{ij} \quad (1.69)$$

Si nous multiplions (1.38) par β_{mr}

$$\beta_{mr} D_j \xi_m = \beta_{mr} \beta_{mi} (\delta_{ij} + h_{ij}) = \delta_{ri} (\delta_{ij} + h_{ij}) = \delta_{rj} + h_{rj}$$

et si nous multiplions encore par $\partial_p x_j$

$$\beta_{mr} \partial_p x_j D_j \xi_m = \beta_{mr} \delta_{pm} = \beta_{pr} = \partial_p x_j (\delta_{rj} + h_{rj}).$$

Ces deux dernières formules nous permettent de remplacer, moyennant les changements d'indice appropriés, les valeurs de $\delta_{ij} + h_{ij}$ et β_{mi} au second membre de (1.69) qui devient

$$D_j v_m = D_j \xi_n \beta_{ni} D_t \beta_{mi} + \partial_m x_j (\delta_{ip} + h_{ip}) D_t h_{ij}$$

soit, après une nouvelle multiplication par $\partial_q x_j$,

$$\partial_q v_m = \beta_{qi} D_t \beta_{mi} + \partial_q x_j \partial_m x_p (\delta_{ip} + h_{ip}) D_t h_{ij} \quad (1.70)$$

Cette formule est à rapprocher de la décomposition de Helmholtz

$$\partial_q v_m = \Omega_{mq} + \Theta_{mq}$$

Le premier terme du second membre est effectivement symétrique gauche et donc de la nature d'une composante de rotation

$$\begin{aligned}\Lambda_{mq} &= \beta_{qi} D_t \beta_{mi} = D_t (\beta_{qi} \beta_{mi}) - \beta_{mi} D_t \beta_{qi} \\ &= -\beta_{mi} D_t \beta_{qi} = -\Lambda_{qm}\end{aligned}\quad (1.71)$$

Le second terme se décompose en une partie symétrique et une autre qui ne l'est pas nécessairement :

$$\partial_q x_j \partial_m x_p (\delta_{ip} + h_{ip}) D_t h_{ij} = \partial_q x_j \partial_m x_p D_t h_{pj} + \partial_q x_j \partial_m x_p h_{ip} D_t h_{ij}$$

Il vient en fait pour les parties symétrique et symétrique gauche de (1.70)

$$\theta_{mq} = \partial_q x_j \partial_m x_p \left\{ D_t h_{pj} + \frac{1}{2} h_{ip} D_t h_{ij} + \frac{1}{2} h_{ij} D_t h_{ip} \right\} \quad (1.72)$$

$$\Omega_{mq} = \Lambda_{mq} + \frac{1}{2} \partial_q x_j \partial_m x_p \left\{ h_{ip} D_t h_{ij} - h_{ij} D_t h_{ip} \right\} \quad (1.73)$$

Il faut $h_{ij} \equiv 0$ à l'instant considéré pour que la composante de rotation réelle coïncide avec Λ_{mq} et que la vitesse de déformation devienne proportionnelle à la dérivée temporelle particulière de la mesure de Jaumann. Comme il fallait s'y attendre

$$\theta_{mq} = D_t h_{pq} \quad \text{et} \quad \Omega_{mq} = \Lambda_{mq}$$

quand la configuration à l'instant considéré est choisie comme configuration initiale.

La considération de (1.22) donne à (1.72) une forme plus suggestive

$$\theta_{mq} = \partial_q x_j \partial_m x_p D_t \epsilon_{pj} \quad (1.74)$$

La mesure des vitesses de déformation est proportionnelle à la dérivée particulière de la mesure de Green. Ce résultat n'est cependant pas satisfaisant du fait que le calcul de la mesure de Green n'est pas de type Eulérien. Nous allons voir qu'il est possible de relier les vitesses de déformation, de façon parfaitement Eulérienne, à la mesure d'Almansi.

De l'expression

$$2 \epsilon_{ij} = D_j \xi_m D_i \xi_m - \delta_{ij}$$

des déformations de Green, on tire, en égard à (1.55)

$$2 \partial_p x_j \partial_q x_i \epsilon_{ij} = \delta_{pq} - \partial_p x_j \partial_q x_j = 2 \phi_{pq}$$

Nous pouvons alors modifier (1.74) comme suit

$$\begin{aligned} \theta_{mq} &= D_t (\partial_q x_j \partial_m x_p \epsilon_{pj}) - \partial_m x_p \epsilon_{pj} D_t \partial_q x_j - \partial_q x_j \epsilon_{pj} D_t \partial_m x_p \\ &= D_t \phi_{mq} - \partial_m x_p \epsilon_{pj} D_t \partial_q x_j - \partial_q x_j \epsilon_{pj} D_t \partial_m x_p \end{aligned} \quad (1.75)$$

Or,

$$\partial_p v_q = \partial_p x_j D_j v_q = \partial_p x_j D_t D_j \xi_q = D_t (\partial_p x_j D_j \xi_q) - D_j \xi_q D_t \partial_p x_j$$

au dernier membre le premier terme est nul car $\partial_p x_j D_j \xi_q = \delta_{pq}$,
d'où, multipliant encore des deux côtés par $\partial_q x_r$

$$\partial_q x_r \partial_p v_q = - D_j \xi_q \partial_q x_r D_t \partial_p x_j = - D_t \partial_p x_r$$

La substitution de ce type de résultat dans (1.75) donne finalement

$$\theta_{mq} = D_t \phi_{mq} + \phi_{mr} \partial_q v_r + \phi_{rq} \partial_m v_r \quad (1.76)$$

Le second membre fait apparaître la dérivée de LIE du tenseur d'Almansi dont l'objectivité sera envisagée au chapitre 4.

2.1. Le concept de tension. Les tensions vraies.

Isolons à l'intérieur du milieu continu un ensemble de points matériels qui, dans sa configuration finale, est contenu dans un domaine Ω à connexion linéaire simple, limité par une surface simple $\partial\Omega$.

On distingue parmi les forces extérieures agissant sur cet ensemble :

1. celles qui sont proportionnelles aux masses, telles que les forces de gravitation ou d'inertie;
2. celles provenant d'une action des autres points matériels du milieu.

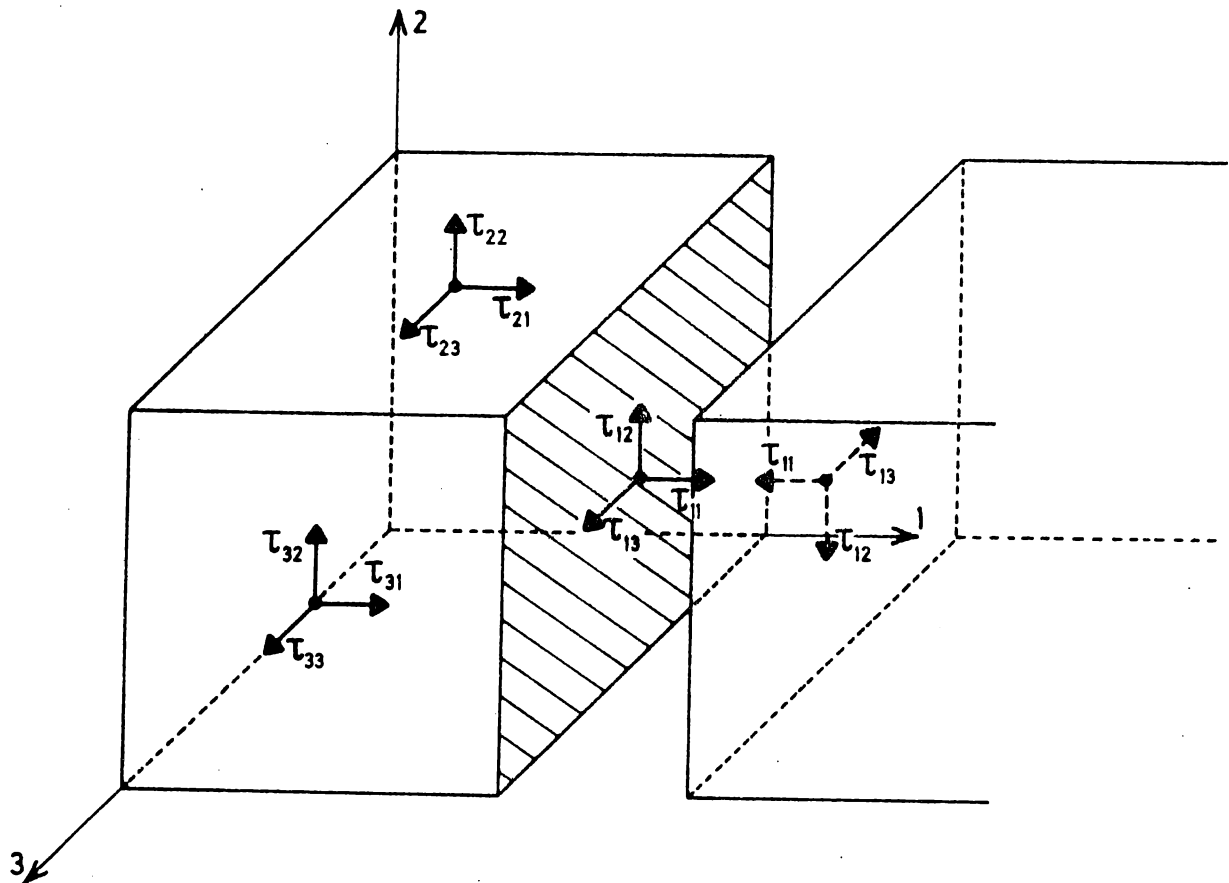
Les premières sont des forces d'action à grande distance, les secondes sont des forces d'origine intermoléculaire dont le rayon d'action très court n'affecte que les particules situées au voisinage immédiat de la surface $\partial\Omega$. L'idéalisation de cette situation, due à EULER et CAUCHY, consiste à présenter la somme vectorielle des forces extérieures comme une intégrale de volume pour les forces à grande distance et une intégrale étendue seulement à la surface pour les autres :

$$\int_{\Omega} \rho \vec{g} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \vec{\tau} \, d\Sigma$$

Dans cette expression, ρ est la masse volumique du milieu, \vec{g} le vecteur accélération résultant des forces massiques et $\vec{\tau}$ le vecteur "traction de surface" qui représente les actions intermoléculaires.

La formulation d'Euler-Cauchy s'est révélée satisfaisante pour le traitement théorique des problèmes classiques de l'Elasticité et de la Mécanique des Fluides. Les complications introduites ultérieurement par l'addition d'une couche superficielle de "moments" (couple-stresses) n'ont pas jusqu'ici trouvé de champ d'application permettant une confrontation sérieuse avec l'expérience.

Le vecteur traction de surface est, comme on va le voir, lié à l'orientation de la normale extérieure $\vec{\nu}$ à l'élément de surface $d\Sigma$.
 Considérons d'abord des éléments de surface dont la normale extérieure est orientée parallèlement à un des axes cartésiens.



Pour une normale extérieure orientée dans le sens du premier axe (figure 2), les composantes cartésiennes de $\vec{\tau}$ sont notées $(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13})$, le premier indice rappelant l'orientation de la normale, le second celui de la composante. Des notations similaires $(\tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{23})$ et $(\tau_{31}, \tau_{32}, \tau_{33})$ étant adoptées pour les éléments de surface dont les normales ont respectivement le sens du second et du troisième axe. Faisant tendre vers zéro les dimensions du parallélépipède issu de 0, l'ensemble

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

des composantes de $\vec{\tau}$ forme, par définition, la matrice de l'état de tension en 0.

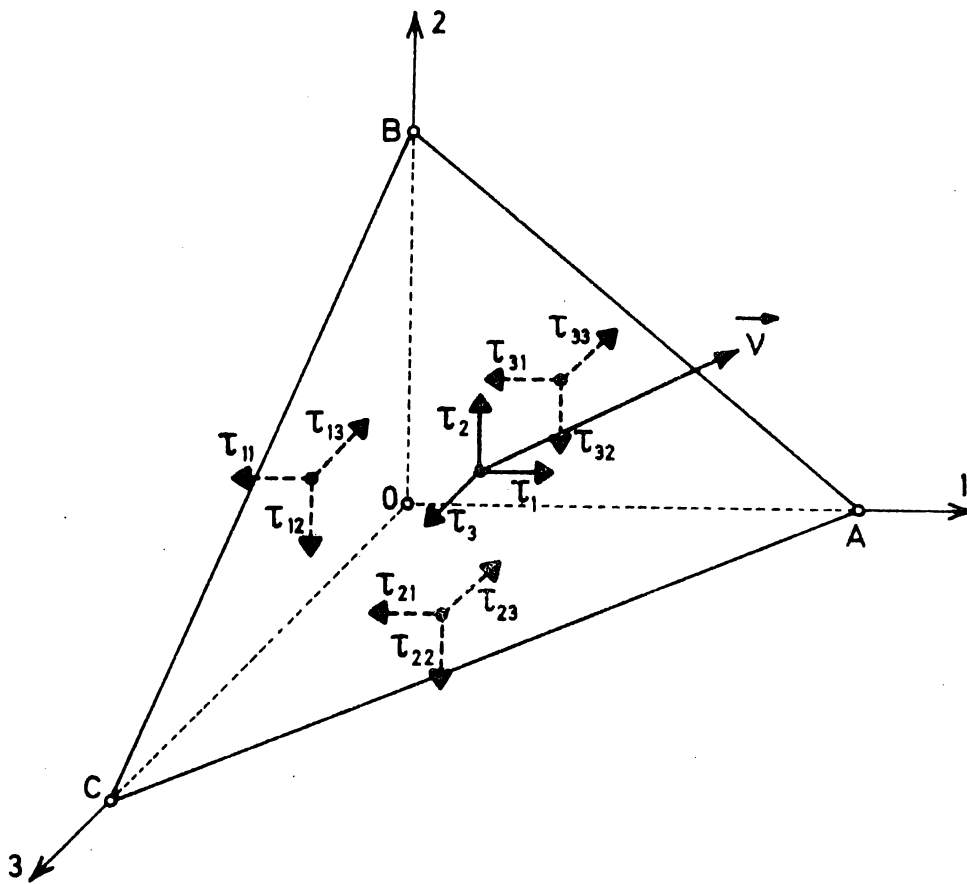
Si maintenant, une normale extérieure est de sens opposé à celui d'un axe, le sens positif des tensions sur cette face est également inversé. Cette convention est adoptée pour exprimer de façon simple la loi de l'action et de la réaction. Ainsi, si l'on imagine un second élément de volume appliqué contre la face hachurée de la figure 2, les tensions $(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13})$ précédemment définies représentent les actions de contact dues au second élément sur le premier. Les réactions exercées par le premier élément sur le second se traduisent par des tensions de sens opposé, tout comme la normale extérieure du second élément est de sens inverse à celle du premier. Ainsi un seul ensemble de valeurs algébriques traduit les forces intermoléculaires réciproques sur l'interface.

Examinons maintenant la relation entre l'état de tension et le vecteur traction de surface pour les facettes d'orientation arbitraire. A cet effet, considérons (figure 3) un tétraèdre élémentaire issu d'un point matériel intérieur arbitraire 0 et dont trois facettes sont parallèles aux plans des coordonnées, l'orientation de la quatrième étant spécifiée par sa normale extérieure

$$\vec{v} = v_i \vec{e}_i$$

En vertu du principe d'Euler-Cauchy, l'équilibre de translation de l'élément sur l'action des forces extérieures sera exprimé par

$$\int_{\Omega} \rho \vec{g} \, d\Omega + \int_{OBC} \vec{\tau} \, d\Sigma + \int_{OCA} \vec{\tau} \, d\Sigma + \int_{OAB} \vec{\tau} \, d\Sigma + \int_{ABC} \vec{\tau} \, d\Sigma = 0$$



Quand on fait tendre vers zéro les dimensions du tétraèdre issu de O , tout en maintenant constante l'orientation de la quatrième facette, l'intégrale de volume devient aussi petite que l'on veut devant les intégrales de surface et disparaît à la limite. D'autre part, en vertu des définitions précédentes, les composantes de $\vec{\tau}$ sur OBC , dont la normale est de sens opposé au premier axe, peuvent être notées $(-\tau_{11}, -\tau_{12}, -\tau_{13})$. De même, on aura $(-\tau_{21}, -\tau_{22}, -\tau_{23})$ sur OCA et $(-\tau_{31}, -\tau_{32}, -\tau_{33})$ sur OAB . Les composantes de $\vec{\tau}$ sur ABC étant notées (τ_1, τ_2, τ_3) on aura pour l'équilibre d'un tétraèdre infinitésimal

$$-\tau_{ij} d\Sigma_i + \tau_j d\Sigma = 0$$

$$j = 1, 2, 3.$$

où $d\Sigma_i$ est la surface élémentaire de normale opposée à l'axe des x_i .
Comme par la géométrie

$$d\Sigma_i = v_i d\Sigma$$

il vient la formule de Cauchy

$$\tau_j = v_i \tau_{ij} \quad (2.2)$$

qui fournit explicitement les composantes de la traction de surface en fonction de l'état de tension et des cosinus directeurs v_i de la normale extérieure à la facette considérée au point O. Conformément à la loi de l'action et de la réaction, les composantes de la traction de surface changent de signe avec un changement de sens de la normale.

2.2. Les tensions de PIOLA

L'état de tension est essentiellement fonction de la distortion du réseau moléculaire et par conséquent fonction de la configuration finale. En d'autres termes, il est fondamentalement un concept Eulérien. Les tensions qui ont été définies en isolant des éléments géométriquement simples dans la configuration finale sont les tensions vraies ou tensions Eulériennes. Ce sont celles utilisées en Mécanique des Fluides. Pour les besoins de la théorie de l'Elasticité, on a vu l'intérêt que présente l'utilisation des variables Lagrangiennes ou matérielles. On va donc modifier la définition de l'état de tension en cherchant à la rapporter à la configuration initiale. A cet effet, le tétraèdre élémentaire est maintenant découpé dans la configuration initiale et les forces $d\vec{F}_i$ et $d\vec{F}$ qui apparaissent sur ses facettes après déformation sont rapportées aux surfaces initiales, dS_i et dS définissant ainsi de nouvelles tractions de surface

$$\vec{t}_i = \lim \frac{d\vec{F}_i}{dS_i} \quad \text{et} \quad \vec{t} = \lim \frac{d\vec{F}}{dS}$$

$$\text{avec } dS_i = n_i dS$$

où n_i sont les cosinus directeurs de la normale extérieure à la facette dans la configuration initiale. L'équation d'équilibre

$$d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 + d\vec{F}_3 + d\vec{F} = 0$$

prend alors la forme

$$n_1 \vec{t}_1 + n_2 \vec{t}_2 + n_3 \vec{t}_3 + \vec{t} = 0$$

soit encore celle de Cauchy

$$\vec{t}_j = n_i t_{ij} \tag{2.3}$$

où les t_{ij} sont les composantes cartésiennes (indice j) des nouvelles tractions de surface pour les facettes de normale extérieure initialement orientée dans le sens d'un axe (indice i).

La représentation de l'état de tension par les t_{ij} est de nature hybride, puisque des forces liées à la configuration finale sont manipulées dans la géométrie de la configuration initiale. Pour cette raison, certains auteurs les qualifient de tensions Euléro-Lagrangiennes. Elles sont plus connues sous le nom de tensions de PIOLA.

Leur matrice sera notée

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

La géométrie des déformations de surface permet d'établir la relation mathématique entre les tensions de PIOLA et les tensions vraies. D'autres définitions de l'état de tension jouent encore un rôle plus important dans les problèmes géométriquement non-linéaires de la théorie de l'Elasticité.

Il deviendra en particulier nécessaire de clarifier mathématiquement ces distinctions en abordant l'étude de la stabilité de l'équilibre élastique.

Cependant, l'utilisation des tensions de PIOLA permet de poursuivre une théorie générale. La difficulté qu'elle présente face aux non-linéarités géométriques, se situe typiquement au niveau de l'équilibre de rotation des corps déformés.

La théorie géométriquement linéarisée de l'Elasticité constitue par elle-même un corps de doctrine aux applications nombreuses et importantes, justifiant pleinement la place qui lui sera consacrée.

Dans son cadre, le caractère infinitésimal des distortions de volume et de surface rend toutes les définitions de l'état de tension pratiquement superposables. On pourra en particulier y confondre les tensions de PIOLA avec les tensions vraies et les tensions purement Lagrangiennes de Kirchhoff-Trefftz, dont l'utilité apparaîtra lors de l'établissement des équations constitutives.

2.3. Les équations d'équilibre de translation

La force de contact élémentaire $d\vec{F}$ sur un élément de surface, telle qu'elle se présente réellement dans la configuration finale, n'a pas été modifiée mais simplement exprimée à l'aide des tensions de Piola dans la géométrie de la configuration initiale; ses composantes cartésiennes sont données par

$$dF_j = n_i t_{ij} dS \quad (2.5)$$

Pour les forces massiques, on fait usage de la conservation de la masse d'un élément

$$\rho d\Omega = \rho_0 dV$$

et ρ_0 est la masse volumique locale du milieu dans sa configuration de référence. En égard à (1.5), cette équation de conservation est d'ailleurs équivalente à

$$\rho \det J = \rho_0 \quad (2.6)$$

L'équilibre mécanique d'une partie de volume V , contenue dans la surface ∂V en configuration initiale est exprimé par l'annulation de la somme vectorielle des forces extérieures :

$$\int_V \rho_0 g_j dV + \int_{\partial V} n_i t_{ij} dS = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.7)$$

Appliquant au second terme le théorème de la divergence

$$\int_{\partial V} n_i t_{ij} dS = \int_V D_i t_{ij} dV$$

il vient pour un volume infinitésimal, le système d'équations

$$D_i t_{ij} + \rho_0 g_j = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.8)$$

Les tensions de Piola présentent donc l'avantage de satisfaire dans les coordonnées matérielles des équations d'équilibre de translation linéaires.

2.4. Les équations d'équilibre de rotation

En exprimant l'équilibre de rotation d'une portion de volume du milieu continu par l'annulation du moment par rapport à l'origine des forces extérieures agissant sur elle, il est important de prendre en considération le fait que les forces sont appliquées aux points matériels dans leur configuration réelle, c'est-à-dire finale.

Pour une force de contact élémentaire, le moment réel par rapport à l'origine sera par exemple

$$(\vec{x} + \vec{u}) \times d\vec{F}$$

soit, en notations indicielles faisant appel au symbole de permutation,

$$e_{mnj} (x_n + u_n) dF_j \quad (m = 1, 2, 3).$$

Nous aurons donc pour le volume V les équations d'équilibre de rotation

$$\int_V e_{mnj} \rho_0 (x_n + u_n) g_j dV + \int_{\partial V} e_{mnj} (x_n + u_n) n_i t_{ij} dS = 0$$

Appliquons à nouveau le théorème de la divergence

$$\int_{\partial V} n_i (x_n + u_n) t_{ij} dS = \int_V D_i [(x_n + u_n) t_{ij}] dV$$

et écrivons le résultat pour un volume infinitésimal :

$$e_{mnj} \{ \rho_0 (x_n + u_n) g_j + D_i [(x_n + u_n) t_{ij}] \} = 0 \quad (m = 1, 2, 3).$$

Tenant compte de la simplification apportée par les équations (2.8), il ne subsiste finalement que le résultat

$$e_{mnj} t_{ij} D_i (x_n + u_n) = 0 \quad (m = 1, 2, 3) \quad (2.9).$$

Une façon équivalente de l'exprimer est d'exiger la symétrie dans les indices n et j de l'expression que multiplie le symbole de permutation :

$$t_{ij} (\delta_{in} + D_i u_n) = t_{in} (\delta_{ij} + D_i u_j) \quad (2.10).$$

Pour $j = n$, cette relation est trivialement satisfaite, il n'y a donc bien que trois équations d'équilibre de rotation, correspondant aux trois cas où $j \neq n$. Contrairement aux équations de translation, elles sont essentiellement non linéaires, car les déplacements sont des inconnues au même titre que les tensions dans la résolution des problèmes.

Contrairement aussi au cas des matrices exprimant l'état de déformation du milieu, la matrice des tensions de Piola n'est pas symétrique.

On verra dans la section 2.6 qu'elle est fondamentalement conjuguée à la matrice, également non-symétrique, des gradients de déplacement.

2.5. La statique par les travaux virtuels

Les appellations d'équations d'équilibre de translation et de rotation sont une allusion directe au fait que ces équations peuvent être obtenues par la Statique Analytique, c'est-à-dire par l'application à la statique du principe des travaux virtuels.

Rappelons l'énoncé de ce principe : - La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système matériel soit en équilibre est que, pour tout déplacement virtuel du système compatible avec les liaisons, la somme des travaux des forces directement appliquées soit nulle.

Dans son application au milieu continu, la compatibilité avec les liaisons intermoléculaires, au sens du principe, implique un champ de déplacements virtuels respectant les distances entre points matériels. Le fait que dans ces conditions aucun travail n'est fourni par les forces de liaison est un postulat général de la Mécanique des Milieux Continus, justifié par une indifférence des phénomènes physiques vis-à-vis du choix du repère dans lequel ils sont décrits. De fait, le déplacement comme un corps rigide d'un ensemble de points matériels est équivalent à un simple changement de repère cartésien.

$$\text{Soit} \quad \delta u_j(x) = \hat{u}_j(x) - u_j(x) \quad (2.11)$$

un champ de déplacements virtuels infinitésimaux, que nous appellerons parfois indifféremment "variation" ou "perturbation" du champ $u_j(x)$. Il donne lieu sur un ensemble de points matériels au travail virtuel infinitésimal suivant des forces extérieures appliquées :

$$\delta = \int_V \rho_0 g_j \delta u_j dV + \int_{\partial V} n_i t_{ij} \delta u_j dS \quad (2.12)$$

soit, après application du théorème de la divergence,

$$\delta = \int_V \{ \rho_0 g_j \delta u_j + D_i (t_{ij} \delta u_j) \} dV \quad (2.13)$$

Considérons maintenant les variations du type "translation"

$$\delta u_j = dc_j = \text{constante} \quad (j = 1, 2, 3)$$

qui conservent les distances et sont équivalentes à de petites translations en sens opposé du repère de l'observateur. Suivant le principe des travaux virtuels, nous aurons $\delta = 0$ et comme $D_i \delta u_j = 0$ dans ce cas particulier

$$dc_j \int_V (\rho_0 g_j + D_i t_{ij}) dV = 0$$

Les constantes dc_j étant arbitraires et indépendantes, chaque intégrale est nulle. Le résultat final pour un volume infinitésimal restitue les équations d'équilibre de translation (2.8).

Des variations du type rotation infinitésimale autour de l'origine des axes, équivalentes à une rotation en sens opposé du repère, sont exprimées analytiquement par

$$\delta u_j = e_{jmn} d\omega_m (x_n + u_n) \quad (2.14)$$

où les $d\omega_m$ sont les vecteurs de rotation infinitésimale autour de chaque axe.

Ici

$$D_i \delta u_j = e_{jmn} d\omega_m (\delta_{in} + D_i u_n)$$

Suivant le principe des travaux virtuels, nous aurons encore $\delta = 0$, soit

$$e_{jmn} d\omega_m \int_V [(\rho_0 g_j + D_i t_{ij})(x_n + u_n) + t_{ij} (\delta_{in} + D_i u_n)] DV = 0$$

Compte tenu des équations d'équilibre de translation et du caractère arbitraire et indépendant des $d\omega_m$, ceci se réduit à

$$e_{jmn} \int_V t_{ij} (\delta_{in} + D_i u_n) dV = 0 \quad (m = 1, 2, 3).$$

Comme $e_{jmn} = e_{mni}$, nous retrouverons pour un volume infinitésimal le résultat (2.9) et par conséquent aussi (2.10).

2.6. Commutabilité des opérateurs δ et D_i

L'opérateur δ consiste à former, pour les mêmes valeurs des coordonnées matérielles, la différence entre deux champs de grandeurs intensives très voisins. On forme ainsi des variations matérielles ou Lagrangiennes. Les équations (2.11) en sont un exemple pour le champ des déplacements. La considération d'une famille de configurations dépendant de façon continue d'un paramètre, telle qu'introduite par les équations (1.1') par exemple, conduit à représenter une variation matérielle associée sous la forme

$$\delta u_j = dt D_t u_j (x; t) = dt v_j \quad (2.15)$$

Si, dans cette relation t est le temps dans une évolution réelle du milieu, la variation δu_j est une variation réelle. Il est clair que, si les conditions d'interversion de l'ordre des dérivées partielles sont réunies

$$D_i \delta u_j = dt D_i D_t u_j(x;t) = dt D_t D_i u_j = \delta D_i u_j \quad (2.16)$$

Plus généralement, le paramètre t pourrait représenter une évolution virtuelle du milieu à partir d'une configuration finale conventionnellement caractérisée par les déplacements $u_j(x;0)$. Dans ce cas, le résultat de commutabilité précédent subsiste mais la variation virtuelle à partir de la configuration finale s'obtient en faisant $t = 0$ après avoir effectué les opérations de dérivation. Dans ce cas, la grandeur v_j de la formule (2.15) est une vitesse virtuelle. Il est alors clair que toutes les conclusions établies à l'aide de déplacements virtuels peuvent l'être à partir de vitesses virtuelles.

Reprenant alors la formule (1.61) en la multipliant par un accroissement infinitésimal du paramètre

$$dt D_t f = dt \partial_t f + v_i dt \partial_i f$$

nous sommes en mesure de l'interpréter comme une relation

$$\delta f = dt \partial_t f + \delta u_i \partial_i f \quad (2.17)$$

entre la variation matérielle (réelle ou virtuelle) de la grandeur intensive $f(\xi;t)$ et sa variation Eulérienne ou spatiale $dt \partial_t f$, caractérisant la perturbation de son champ en un point fixe de l'espace.

Prenons une dérivée spatiale du résultat (2.17) :

$$\partial_j \delta f = dt \partial_j \partial_t f + \delta u_i \partial_j \partial_i f + (\partial_i f) \partial_j \delta u_i$$

et, d'autre part, appliquons (2.17) à la grandeur $\partial_j f$ au lieu de f elle-même :

$$\delta \partial_j f = dt \partial_t \partial_j f + \delta u_i \partial_i \partial_j f$$

La comparaison montre que, à condition de pouvoir intervertir les dérivées partielles de $f(\xi;t)$,

$$\partial_j \delta f = \delta \partial_j f + (\partial_i f) \partial_j \delta u_i \quad (2.18)$$

Si donc l'opérateur de variation matérielle δ commute avec les opérateurs de dérivation partielle D_i par rapport aux coordonnées matérielles, on voit qu'il ne commute pas avec les opérateurs de dérivation ∂_j par rapport aux coordonnées spatiales. Par contre, il y a commutabilité entre les variations et les dérivations spatiales :

$$dt \partial_t (\partial_j f) = \partial_j (dt \partial_t f) \quad (2.19)$$

2.7. Le théorème des travaux virtuels

Reprenons, en la développant, l'expression générale du travail virtuel infinitésimal (2.13)

$$\delta = \int_V [(\rho_0 g_i + D_i t_{ij}) \delta u_j + t_{ij} D_i \delta u_j] dV$$

Elle se simplifie par la considération des équations d'équilibre de translation (2.8). Appliquant alors la commutabilité des opérateurs δ et D_i , elle prend la forme

$$\delta = \int_V t_{ij} \delta a_{ji} dV \quad (2.20)$$

où l'on a noté par

$$a_{ji} = D_i u_j \quad (2.21)$$

les éléments de la matrice des gradients de déplacement.
 Ce résultat constitue, du moins en ce qui concerne la représentation de l'état de tension par les tensions de Piola, le théorème des travaux virtuels de la Mécanique des Milieux Continus.
 Ce théorème implique l'existence d'une densité (ici grandeur rapportée au volume de la configuration initiale) de travail virtuel représentée par un produit scalaire de matrices conjuguées, l'une représentative de l'état de tension, l'autre de l'état de déformation.
 Ce produit est dans le cas présent

$$\text{tr} (T \cdot \delta A) \quad (2.22)$$

où ni A , ni T , ne sont des matrices symétriques. Comme la trace d'un produit de deux matrices est invariante vis-à-vis de la commutation des facteurs aussi bien que vis-à-vis de la transposition du produit, on a les expressions équivalentes :

$$\text{tr} (T \cdot \delta A) = \text{tr} (\delta A \cdot T) = \text{tr} (T^T \cdot \delta A^T) = \text{tr} (\delta A^T \cdot T^T)$$

On observera, de par la façon dont il a été obtenu, que le théorème des travaux virtuels sous-entend :

1. une condition cinématique : la compatibilité de l'état de déformation; autrement dit l'existence d'un champ univoque de déplacements, tel que, dans le cas présent, les équations (2.21) soient satisfaites;
2. une condition statique : l'équilibre de translation des tensions et des forces massiques éventuelles.

Par contre, le théorème n'invoque aucune formulation particulière d'équations constitutives reliant l'état de déformation à l'état de tension et décrivant la nature physique du milieu (solide élastique ou fluide ou milieu rhéologique plus général), il est donc d'application générale.

2.8. Statique et Puissance virtuelle pour les tensions vraies

Les remarques faites à propos de la coalescence entre les diverses définitions de l'état de tension, quand les rotations et déformations matérielles sont infinitésimales, nous incite à établir la structure exacte des équations d'équilibre satisfaits par les tensions vraies, ce qui s'avère être un exercice facile de statique analytique. Il est relativement moins aisé d'établir la nature exacte de la mesure de l'état de déformation conjuguée aux tensions vraies, au sens des travaux virtuels.

Les calculs se font ici sur la configuration finale par suite de la définition même des tensions vraies

$$\delta = \int_{\Omega} \rho g_j \delta u_j d\Omega + \int_{\partial\Omega} v_i \tau_{ij} \delta u_j d\Sigma$$

et, après application du théorème de la divergence,

$$\delta = \int_{\Omega} [\rho g_j \delta u_j + \partial_i (\tau_{ij} \delta u_j)] d\Omega \quad (2.24)$$

La nullité du travail virtuel pour des δu_j constantes arbitraires, livre comme équations d'équilibre de translation

$$\rho g_j + \partial_i \tau_{ij} = 0 \quad (2.25)$$

Elles sont encore linéaires mais pour une représentation en coordonnées spatiales; ce sont les équations d'équilibre de la Mécanique des Fluides.

Elles permettent de réduire (2.24) à la forme

$$\delta = \int_{\Omega} \tau_{ij} \partial_i \delta u_j \, d\Omega \quad (2.26)$$

Pour les variations de déplacement de rotation (2.14) qui peuvent aussi s'écrire

$$\delta u_j = e_{jmn} d\omega_m \xi_n$$

il vient un résultat très simple

$$\partial_i \delta u_j = e_{jmn} d\omega_m \delta_{ni} = e_{jmi} d\omega_m$$

Son application à (2.26) avec $\delta = 0$ fournit

$$\int_{\Omega} e_{jmi} \tau_{ij} \, d\Omega = 0 \quad (m = 1, 2, 3)$$

Pour un volume infinitésimal, le résultat final exprime simplement la symétrie de la matrice des tensions vraies

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (2.27)$$

Cette symétrie permet alors de transformer l'expression du travail virtuel; échangeant les indices sommatoires (indices muets) i et j , puis invoquant la symétrie des tensions vraies

$$\tau_{ij} \partial_i \delta u_j = \tau_{ji} \partial_j \delta u_i = \tau_{ij} \partial_j \delta u_i$$

et le travail virtuel prend la forme

$$\delta = \int_{\Omega} \tau_{ij} \frac{1}{2} (\partial_i \delta u_j + \partial_j \delta u_i) \, d\Omega \quad (2.28)$$

où le facteur de τ_{ij} est maintenant symétrique lui aussi.

2.9. Statique et Travaux virtuels dans les changements de configuration infinitésimaux

L'hypothèse $|D_i u_j| \ll 1$ qui caractérise les changements de configuration infinitésimaux permet de simplifier (2.10) en

$$t_{nj} = t_{jn} \quad (2.33)$$

et de considérer les tensions de Piola comme symétriques en première approximation; résultat naturel puisqu'en première approximation, elles doivent aussi représenter les tensions vraies. Observons que le résultat (2.33) est obtenu directement en négligeant le déplacement \vec{u} devant \vec{x} dans le calcul des moments des forces. Ceci met en évidence une des conséquences essentielles de l'approximation consentie : L'équilibre du milieu et de chacune de ses parties est exprimé à partir de la configuration de référence au lieu de la configuration réelle. On a vu que la même hypothèse de linéarisation géométrique permettait de mesurer l'état de déformation par les grandeurs

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) \quad (2.34)$$

La combinaison de (2.33) et (2.34) permet alors de donner au travail virtuel (2.20) la forme

$$\delta \tau = \int_V t_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (2.35).$$

La mesure linéarisée de l'état de déformation se trouve ainsi être conjuguée aux tensions de Piola symétrisées.

On reconnaît la parenté de ce facteur avec la matrice des vitesses de déformation (1.65); il suffit pour cela d'interpréter les variations de déplacement en terme de vitesses virtuelles : $\delta u_j = dt v_j$, ce qui entraîne

$$\frac{1}{2} (\partial_i \delta u_j + \partial_j \delta u_i) = dt \theta_{ij} \quad (2.29).$$

Une première interprétation du théorème des travaux virtuels est donc fournie par l'expression équivalente de la Puissance virtuelle

$$P = \int_{\Omega} \tau_{ij} \theta_{ij} d\Omega \quad (2.30)$$

où les vitesses de déformation sont conjuguées aux tensions vraies pour fournir la densité Eulérienne (par unité de volume spatial) de puissance virtuelle, qui joue un rôle important en Mécanique des Fluides.

Une forme incrémentale plus adaptée à la théorie de l'Elasticité consiste à écrire (2.28) sous la forme

$$\delta \tau = \int_{\Omega} \tau_{ij} \Delta \phi_{ij} d\Omega \quad (2.31)$$

où, utilisant (2.29), on introduit une variation de Lie de la mesure d'Almansi

$$\Delta \phi_{ij} = \delta \phi_{ij} + \phi_{ir} \partial_j \delta u_r + \phi_{rj} \partial_i \delta u_r \quad (2.32)$$

Tout comme la dérivée temporelle de Lie, cet opérateur est parfaitement Eulérien et permet en définitive de considérer la mesure d'Almansi comme conjuguée aux tensions vraies. La raison profonde pour laquelle la variation à prendre en considération est la variation de Lie est liée à la notion d'opérateur différentiel objectif, qui se pose à propos de l'utilisation des coordonnées spatiales. En attendant de préciser cette notion au chapitre 4, disons qu'elle est justifiée par la nécessité de calculer des taux d'accroissements qui ne soient pas faussés par une rotation relative locale entre la matière et le repère de l'observateur.

3.1. Les équations constitutives pour les tensions de Piola

On a vu qu'en coordonnées matérielles, la densité de travail effectuée par les forces extérieures dans un changement de configuration infinitésimal pouvait s'exprimer par

$$\rho_0 g_j \delta u_j + D_i (t_{ij} \delta u_j)$$

Nous admettrons que ces changements se font à vitesses négligeables, de façon à pouvoir négliger l'énergie cinétique, et à température uniforme et constante, les échanges thermiques ayant le temps de s'opérer. De plus, nous pourrions alors postuler l'existence d'un équilibre thermodynamique local et égaler la densité du travail des forces extérieures à l'accroissement d'une densité d'énergie W

$$\delta W = \rho_0 g_j \delta u_j + D_i (t_{ij} \delta u_j) \quad (3.1)$$

W s'appelle la densité d'énergie de déformation, du point de vue thermodynamique c'est une énergie libre.

Si, au contraire, les changements se font si rapidement que les échanges thermiques entre particules n'ont pas le temps de s'opérer, l'équilibre thermodynamique local met en jeu la densité d'énergie interne U et le bilan énergétique doit aussi faire intervenir les changements d'énergie cinétique

$$\rho_0 v_j \delta v_j = -\delta U + \rho_0 g_j \delta u_j + D_i (t_{ij} \delta u_j) \quad (3.2)$$

$$v_j = D_t u_j$$

Cette équation est conforme à l'énoncé du principe de Mécanique rationnelle selon lequel la variation de l'énergie cinétique d'un ensemble de particules est égal à la somme des travaux effectués

tant par les forces extérieures que par les forces intérieures ($-\delta U$). Elle forme la base de l'Elastodynamique.

Enfin, la prise en considération des échanges thermiques lors d'un déséquilibre global fait l'objet de la thermo-élasticité.

Nous ne développerons ici que les conséquences de l'équation (3.1) de l'Elastostatique. Elle contient virtuellement tous les développements antérieurs concernant les tensions de Piola, puisqu'aussi bien son membre de droite n'est autre que la densité de travail virtuel à partir de laquelle la Statique Analytique nous a permis de retrouver les équations d'équilibre de translation (2.8) et celles de rotation (2.10). En fait, le théorème des Travaux virtuels représenté par (2.20) et (2.21) peut maintenant être transformé dans un théorème de conservation de l'énergie par l'égalité

$$\delta \mathcal{E} = \int_V \delta W \, dV$$

dont résulte alors

$$\delta W = t_{ij} \delta a_{ji} \quad (3.3)$$

Cette équation doit être interprétée comme le développement d'une différentielle exacte de la densité d'énergie de déformation.

Celle-ci est donc une fonction des neuf gradients du champ des déplacements et les tensions de Piola en constituent les dérivées partielles

$$t_{ij} = \frac{\partial W}{\partial a_{ji}} \quad (3.4)$$

Nous avons dans (3.4) la forme la plus générale des équations constitutives de la théorie de l'Elasticité. Cette forme n'est pas parfaite car elle relie les tensions aux gradients de déplacement, c'est-à-dire non seulement aux déformations mais aussi aux rotations. De fait, on a pu remarquer qu'elle a été obtenue indépendamment de la considération des équations d'équilibre de rotation.

Celles-ci vont introduire des contraintes responsables d'une certaine structure de l'énergie W .

En effet, on peut mettre les équations d'équilibre de rotation (2.9) sous la forme

$$e_{mnj} (t_{nj} + t_{ij} a_{ni}) = 0$$

soit encore

$$e_{mnj} \left(\frac{\partial W}{\partial a_{jn}} + a_{ni} \frac{\partial W}{\partial a_{ji}} \right) = 0 \quad (m = 1, 2, 3)$$

Ce sont trois équations aux dérivées partielles que doit vérifier la fonction W des a_{ji} . Leur solution générale s'obtient sans difficulté en les intégrant par la méthode des caractéristiques. Pour $m = 1$, les équations des caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial W}{\partial a_{32}} + a_{2i} \frac{\partial W}{\partial a_{3i}} - \frac{\partial W}{\partial a_{23}} - a_{3i} \frac{\partial W}{\partial a_{2i}} = 0$$

sont

$$\begin{aligned} \frac{da_{12}}{0} &= \frac{da_{23}}{-(1+a_{33})} = \frac{da_{31}}{a_{21}} = \frac{da_{21}}{-a_{31}} = \frac{da_{32}}{1+a_{22}} = \frac{da_{13}}{0} = \\ &= \frac{da_{11}}{0} = \frac{da_{22}}{-a_{32}} = \frac{da_{33}}{a_{23}} = \frac{dW}{0} \end{aligned}$$

Elles montrent que W doit être une fonction des intégrales premières des équations différentielles liant les a_{ij} .

Des intégrales premières immédiates sont

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}^2 + a_{31}^2 & a_{22} + \frac{1}{2} (a_{22}^2 + a_{32}^2) & a_{33} + \frac{1}{2} (a_{33}^2 + a_{23}^2) \end{array}$$

$$\text{et} \quad a_{22} (1 + a_{22}) + a_{32} (1 + a_{33})$$

$$a_{31} (1 + a_{33}) + a_{23} a_{21}$$

$$a_{21} (1 + a_{22}) + a_{32} a_{31}$$

En d'autres termes, ces grandeurs sont des constantes arbitraires pour les liaisons différentielles des caractéristiques.

On constate que les six grandeurs

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji} + a_{mi} a_{mj}) = \epsilon_{ji} \quad (3.5)$$

sont précisément des combinaisons de ces intégrales premières et que dès lors, de par leur symétrie, elles sont également intégrales premières des équations différentielles aux caractéristiques des deux autres équations aux dérivées partielles pour $m = 2$ et $m = 3$.

Ce sont en fait les seules intégrales premières indépendantes communes aux trois systèmes. En égard aux définitions (2.21) et (1.19), les ϵ_{ij} ne sont autres que les déformations de la mesure de Green; et, nous obtenons le théorème suivant :

La densité Lagrangienne d'énergie de déformation est une fonction des neuf gradients du champ des déplacements à travers les six éléments qui composent la matrice symétrique de déformation de Green.

3.2. Les tensions de Kirchhoff-Trefftz

Le résultat précédent permet de formuler une définition énergétique naturelle de nouvelles tensions, de nature purement Lagrangienne, déjà considérées par Piola et Kirchhoff mais dont Trefftz a montré l'importance et l'utilité.

Pour la généralité de la formulation indicielle W , qui est une fonction des six ϵ_{ij} distincts, sera considérée comme une fonction de six arguments $\frac{1}{2}(\epsilon_{ij} + \epsilon_{ji})$, où l'on maintiendra une distinction formelle entre ϵ_{ij} et ϵ_{ji} .

Nous obtenons ainsi formellement neuf dérivées partielles

$$s_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (3.6)$$

mais la symétrisation des arguments de la fonction fait en sorte que

$$s_{ji} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ji}} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} = s_{ij} \quad (3.7)$$

Les équations (3.6) sont alors considérées comme les équations constitutives générales liant les déformations de Green aux tensions s_{ij} de Kirchhoff-Trefftz qui sont symétriques elles aussi. La relation entre ces nouvelles tensions et les tensions de Piola s'obtiennent directement par application de la règle de dérivation des fonctions de fonction.

$$t_{pq} = \frac{\partial W}{\partial a_{pq}} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial a_{pq}} = s_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial a_{pq}}$$

De la relation (3.5), on tire

$$\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial a_{pq}} = \frac{1}{2} (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{jp} \delta_{iq} + \delta_{mp} \delta_{iq} a_{mj} + \delta_{jq} \delta_{mp} a_{mi})$$

et, par conséquent

$$t_{pq} = \frac{1}{2} (s_{pq} + s_{qp} + s_{qj} a_{pj} + s_{iq} a_{pi})$$

Utilisant encore la symétrie des s_{pq} , il vient finalement

soit encore

$$\begin{aligned}\delta W &= s_{im} \frac{1}{2} (D_m \xi_j \delta D_i \xi_j + D_i \xi_j \delta D_m \xi_j) \\ &= s_{im} \frac{1}{2} \delta (D_m \xi_j D_i \xi_j) = s_{im} \frac{1}{2} \delta (2 \varepsilon_{im} - \delta_{im})\end{aligned}$$

et finalement,

$$\delta W = s_{im} \delta \varepsilon_{im} \quad (3.10)$$

Cette formule étant équivalente à la définition (3.6) précédente. Trefftz a donné des relations (3.8) une interprétation géométrique élégante. Rappelons que la force de contact sur un élément de surface s'exprime en fonction des tensions de Piola par

$$d\vec{F} = dS n_q t_{qp} \vec{e}_p$$

La substitution de (3.8) fournit

$$d\vec{F} = dS n_q s_{qj} D_j \xi_p \vec{e}_p$$

mais, on a vu que

$$D_j \xi_p \vec{e}_p = \vec{g}_j$$

les vecteurs de la base locale du système de coordonnées curvilignes naturelles engendrées par la convection des plans de coordonnées cartésiennes de la configuration initiale.

L'équation

$$d\vec{F} = dS n_q s_{qj} \vec{g}_j \quad (3.11)$$

montre que les tensions de Kirchhoff-Trefftz sont toujours définies par unité de surface initiale mais résultent d'une décomposition de la traction de surface dans la métrique naturelle induite par le changement de configuration.

3.3. Les équations constitutives de l'Elasticité géométriquement linéaire

Le théorème (2.35) des travaux virtuels pour les changements de configuration infinitésimaux associé à la conservation de l'énergie fournit directement le résultat

$$\delta W = t_{ij} \delta \epsilon_{ij} \quad (3.12)$$

Rappelons que les déformations sont ici mesurées par les approximations linéaires (2.34). Par ailleurs, (3.8) montre que sous les mêmes conditions de linéarisation géométrique les tensions t_{ij} ne se distinguent pas des tensions de Kirchhoff-Trefftz.

4.1. Bases et changements de base

Soient \vec{e}_i les vecteurs unitaires du repère cartésien. Ils constituent une base orthonormée

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad (4.1)$$

dans laquelle tout vecteur possède une représentation unique

$$\vec{u} = u_i \vec{e}_i \quad (4.2)$$

On observera que les projections orthogonales du vecteur sur les axes

$$\vec{u} \cdot \vec{e}_j = u_i \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = u_i \delta_{ij} = u_j \quad (4.3)$$

sont identiques à ses composantes; tant que l'on se borne à des repères cartésiens, il n'y a pas lieu d'opérer une distinction entre les composantes contravariantes, normalement définies par (4.2), et covariantes, normalement définies par (4.3).

Soit \vec{e}_α une autre base orthonormée. Elle est entièrement définie par rapport à l'ancienne base par la connaissance des 9 nombres

$$\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_i = T_{\alpha i} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_\alpha \quad (4.4)$$

Chaque $T_{\alpha i}$ est le cosinus de l'angle formé par les vecteurs \vec{e}_α et \vec{e}_i . Si les $T_{\alpha i}$ sont rangés dans une matrice T de telle sorte que α soit l'indice des lignes et i celui des colonnes, une ligne de T rassemble les composantes d'un nouveau vecteur de base \vec{e}_α dans l'ancien repère. Par contre, une colonne de T rassemble les composantes d'un ancien vecteur de base \vec{e}_i dans le nouveau repère.

Les 9 $T_{\alpha i}$ ne sont évidemment pas indépendants. Comme

$$\vec{e}_\alpha = T_{\alpha i} \vec{e}_i \quad \vec{e}_\beta = T_{\beta j} \vec{e}_j \quad (4.5)$$

le fait que la nouvelle base est aussi orthornormée implique

$$\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = T_{\alpha i} T_{\beta j} \cdot \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = T_{\alpha i} T_{\beta i} = \delta_{\alpha\beta} \quad (4.6).$$

Matriciellement, cette relation s'écrit

$$T T^T = I \quad (4.7)$$

et, prenant le déterminant des deux côtés,

$$\det T \cdot \det T^T = (\det T)^2 = 1 \quad (4.8)$$

Multipliant (4.7) à droite par T , le résultat peut s'écrire

$$T (T^T T - I) = 0$$

et, la matrice T étant non-singulière puisque son déterminant vaut soit 1, soit -1, on a encore la propriété

$$T^T T = I \quad \text{ou} \quad T_{\alpha i} T_{\alpha j} = \delta_{ij} \quad (4.9)$$

Associée à (4.5), elle fournit la formule de changement de base inverse

$$T_{\alpha j} \vec{e}_\alpha = \vec{e}_j \quad (4.10)$$

par ailleurs évidente d'après l'interprétation déjà donnée des colonnes de T .

4.2. Tenseurs

Rapportons l'espace euclidien à deux repères (systèmes de coordonnées) arbitraires mais fixes l'un par rapport à l'autre; les formules de changement de coordonnées

$$x_i = X_i(y_j) \quad y_j = Y_j(x_i)$$

sont indépendantes du temps. Une grandeur physique sera dite "tensorielle" ou "tenseur" si on peut lui découvrir un caractère indépendant du repère choisi.

Cette indépendance se reconnaît à l'invariance d'un ou d'un ensemble de nombres, lors d'un changement de repère. Comme on se borne ici à des changements de repères cartésiens, l'invariance en question ne qualifie que des tenseurs cartésiens.

Une grandeur physique comme la masse volumique ρ en un point et pour une configuration arbitrairement choisie du milieu continu, s'exprime par un seul nombre, qui ne dépend pas du repère choisi. Un tel scalaire invariant est, par définition, un tenseur de rang zéro.

Une orientation fixe dans l'espace euclidien, indiquée par un vecteur (préférentiellement mais non nécessairement unitaire) \vec{n} est un tenseur de rang un. Dans un repère cartésien de base \vec{e}_i , cette orientation

$$\vec{n} = n_i \vec{e}_i \quad (4.11)$$

est "représentée" par trois nombres n_i , les composantes cartésiennes de ce vecteur. Dans une autre base \vec{e}_α la même orientation sera représentée par trois autres nombres n_α

$$\vec{n} = n_\alpha \vec{e}_\alpha \quad (4.12)$$

Une méthode pour reconnaître le caractère tensoriel de la grandeur représentée est de vérifier si la loi selon laquelle les nombres de sa représentation devraient changer avec un changement de repère est bien satisfaite; comme

$$\vec{n} = n_\alpha \vec{e}_\alpha = n_\alpha T_{\alpha i} \vec{e}_i = n_i \vec{e}_i$$

cette loi pour un tenseur de rang un ou vecteur polaire est

$$n_i = n_\alpha T_{\alpha i} \quad (4.13)$$

Inversément

$$n_i T_{\beta i} = n_\alpha T_{\alpha i} T_{\beta i} = n_\alpha \delta_{\alpha\beta} = n_\beta \quad (4.14)$$

Une autre méthode, dont la généralisation aux tenseurs de rang plus élevé est simple, consiste à vérifier l'invariance de scalaires formés avec une ou plusieurs orientations fixes mais arbitraires de l'espace euclidien. Soient u_i les nombres représentant dans une base \vec{e}_i une grandeur dont le caractère de tenseur de rang un est à vérifier. Considérons la forme linéaire

$$\phi_{(i)} = u_i n_i$$

formée avec ces nombres et ceux, n_i , représentant une orientation fixe mais arbitraire de l'espace. Dans une nouvelle base, nous aurons

$$\phi_{(\beta)} = u_\beta n_\beta = u_\alpha (T_{\beta i} n_i)$$

Si la valeur de la forme est invariante $\phi_{(\alpha)} = \phi_{(i)}$ nous obtiendrons par comparaison et à cause du caractère arbitraire de l'orientation choisie

$$u_i = u_\beta T_{\beta i}$$

Dans ce cas, la loi de transformation du type (4.13) est satisfaite et nous pouvons reconnaître aux nombres u_i le caractère de composantes d'un tenseur de rang un. Inversément, si u_i sont les composantes d'un tenseur de rang un, la forme linéaire est invariante. L'interprétation de la forme linéaire invariante est claire :

$$\phi = \vec{u} \cdot \vec{n} = u_i n_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = u_i n_i$$

est le produit scalaire de deux vecteurs polaires; il ne dépend que du module des deux vecteurs et de l'angle qu'ils font entre-eux.

Un tenseur cartésien de rang deux sera lié à l'invariance de la forme bi-linéaire

$$\phi = t_{ij} n_i m_j$$

comportant deux orientations arbitraires. S'il y a invariance

$$t_{ij} n_i m_j = t_{\alpha\beta} T_{\alpha i} T_{\beta j} n_\alpha m_\beta$$

doit être égal à $t_{\alpha\beta} n_\alpha m_\beta$ pour tout choix des orientations; et il en résulte les lois de transformation tensorielles

$$t_{\alpha\beta} = T_{\alpha i} T_{\beta j} t_{ij} \quad \text{et} \quad T_{\alpha m} T_{\beta n} t_{\alpha\beta} = t_{mn} \quad (4.15)$$

La généralisation aux tenseurs de rang supérieur est évidente. Si les tenseurs d'ordre zéro ne nécessitent pas de symbole spécial et si les vecteurs polaires, ou tenseurs de rang un, bénéficient d'un symbole spécial tel que \vec{u} , une symbolisation des tenseurs de rang plus élevé en tant que grandeurs physiques intrinsèques et des opérations intrinsèques qui les unissent devient lourde et peu transparente. On préférera garder les notations indicielles quoiqu'elles fassent usage d'un repère particulier. Un abus de langage naturel est alors introduit qui consiste à parler du tenseur t_{ij} , alors que l'ensemble des nombres t_{ij} ne constitue en fait que la représentation du tenseur dans le repère considéré. Il en va de même quand on définit un tenseur comme une forme multilinéaire invariante de plusieurs orientations de l'espace. La forme est caractérisée par ses coefficients, et ceux-ci sont les composantes du tenseur dans un repère particulier.

4.3. Quelques tenseurs particuliers

Revenons au produit scalaire de deux vecteurs polaires, et explicitons le comme une forme bi-linéaire dans les deux orientations des facteurs

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = m_i n_i = \delta_{ij} m_i n_j$$

Les coefficients de cette forme sont les symboles de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = j \\ 0 & \text{pour } i \neq j \end{cases}$$

La forme étant invariante, le symbole de Kronecker est un tenseur cartésien de rang deux. Il jouit de la propriété remarquable d'être isotrope; ceci veut dire que ses composantes ne changent pas de valeur dans un autre repère. En effet, en tant que tenseur, on aura dans une autre base

$$\delta_{\alpha\beta} = T_{\alpha i} T_{\beta j} \delta_{ij} = T_{\alpha i} T_{\beta i}$$

ce qui, selon (4.6), donne à $\delta_{\alpha\beta}$ sa signification de symbole de Kronecker dans les nouveaux indices.

On démontre que, à un module près, δ_{ij} est le seul tenseur cartésien isotrope de rang deux.

Venons-en maintenant au symbole de permutation e_{ijk} , défini de la façon suivante

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si la suite } ijk \text{ est une permutation paire} \\ & \text{de la suite naturelle } 123 \\ -1 & \text{si elle est une permutation impaire} \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

En d'autres termes, les seules valeurs non nulles du symbole sont

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1 \quad e_{321} = e_{213} = e_{132} = -1 \quad (4.16)$$

Dans tous les autres cas, deux au moins des indices ont la même valeur. Considérons alors la forme trilinéaire de trois orientations, dont les coefficients seraient formés des valeurs du symbole de permutation

$$\phi(i) = e_{ijk} m_i n_j p_k$$

On sait par la formule de Laplace du développement d'un déterminant que

$$\phi(i) = \det \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$$

Dans une nouvelle base, on trouve

$$\phi(i) = e_{ijk} T_{\alpha i} T_{\beta j} T_{\gamma k} m_{\alpha} n_{\beta} p_{\gamma}$$

mais, toujours par la formule de Laplace,

$$e_{ijk} T_{\alpha i} T_{\beta j} T_{\gamma k} = e_{\alpha\beta\gamma} \det T \quad (4.17)$$

où $e_{\alpha\beta\gamma}$ dénote le symbole de permutation dans le nouveau repère.

Or, au vu de (4.8), il y a lieu de distinguer deux cas :

1) $\det T = +1$. Dans ce cas, la formule (4.17) est celle de la transformation des composantes de e_{ijk} considéré comme un tenseur de rang trois et alors, comme il se doit, la forme trilinéaire est invariante

$$\phi(i) = e_{\alpha\beta\gamma} m_{\alpha} n_{\beta} p_{\gamma} = \phi(\alpha)$$

Si donc on se limite aux changements de repère cartésien qui conservent le sens du repère (dextrogyre ou levogyre), c'est-à-dire qui permettent de les superposer par une rotation, le symbole de permutation peut être considéré comme un tenseur cartésien isotrope complètement antisymétrique de rang 3.

- 2) $\det T = -1$. On est en présence d'un changement de repère qui altère son sens. Pour superposer l'ancien et le nouveau, il faut en plus d'une rotation une réflexion par rapport à un plan.

Si on ne veut pas écarter ces cas, on est conduit à considérer la formule de changement de composantes (4.17) comme définissant un pseudo-tenseur. On peut alors dire que le symbole de permutation est un pseudo-tenseur cartésien isotrope de rang trois. Sa forme trilinéaire associée prend un signe associé au sens du repère dans lequel on se trouve.

Le symbole de permutation quoique possédant en principe $3^3 = 27$ composantes, est, par suite de son antisymétrie par rapport à tous ses indices, défini en réalité à partir d'une seule valeur. Celle-ci est choisie conventionnellement comme $e_{123} = 1$ et s'appelle la composante stricte. Le symbole de permutation considéré comme un pseudo-tenseur étant isotrope, sa composante stricte est invariante; c'est le tenseur associé de rang zéro.

Il est évident que l'on pourrait aussi bien définir un tenseur véritable complètement antisymétrique de rang trois, que nous noterons ϵ_{ijk} pour le distinguer du symbole de permutation. Sa composante stricte ϵ_{123} sera prise égale à +1 pour un repère de sens gyrotoire conventionnellement choisi. C'est alors ce tenseur associé de rang zéro qui devient un pseudo-scalaire, son signe changeant avec le sens du repère.

Parmi les tenseurs isotropes de rang 4, le plus important est celui obtenu par contraction

$$e_{ijk} e_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp} = \begin{pmatrix} i & j \\ p & q \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Pour démontrer cette formule extrêmement utile, on peut faire appel à la formule évidente

$$\det \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{pmatrix} = e_{ijk}$$

On en tire par application de deux règles : le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de la matrice transposée; le produit des déterminants de deux matrices est égal au déterminant de leur produit,

$$e_{ijk} e_{pqk} = \det \left\{ \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1k} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2k} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kk} \end{pmatrix}$$

Développant par rapport aux éléments de la dernière colonne et notant que $\delta_{kk} = 3$, la formule (4.18) en découle par réduction.

Pour $q = j$, elle se réduit à

$$e_{ijk} e_{pjk} = 2 \delta_{ip} \quad (4.19)$$

et pour $q = j$ et $i = p$, on trouve

$$e_{ijk} e_{ijk} = 2 \delta_{ii} = 6 \quad (4.20).$$

4.4. Le produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} , noté ici $\vec{u} \times \vec{v}$, est défini sitôt qu'on a défini celui des vecteurs de base

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = e_{ijk} \vec{e}_k \quad (4.21)$$

Pour deux vecteurs quelconques en appliquant des propriétés d'associativité et distributivité

$$\vec{u} \times \vec{v} = u_i v_j \vec{e}_i \times \vec{e}_j = e_{ijk} u_i v_j \vec{e}_k \quad (4.22)$$

En détail, les composantes sont donc données par

$$k = 1 \quad u_2 v_3 - u_3 v_2$$

$$k = 2 \quad u_3 v_1 - u_1 v_3$$

$$k = 3 \quad u_1 v_2 - u_2 v_1$$

A cause de la présence du symbole de permutation dans la définition, le produit vectoriel de deux vecteurs polaires est un pseudo-vecteur. En effet, par définition,

$$\vec{e}_\alpha \times \vec{e}_\beta = e_{\alpha\beta\gamma} \vec{e}_\gamma$$

utilisant alors (4.16) et (4.10)

$$\vec{e}_\alpha \times \vec{e}_\beta = \frac{1}{\det T} T_{\alpha i} T_{\beta j} T_{\gamma k} e_{ijk} \vec{e}_\gamma = \frac{1}{\det T} T_{\alpha i} T_{\beta j} e_{ijk} \vec{e}_k$$

soit encore eu égard à (4.21)

$$T_{\alpha i} T_{\beta j} \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \det T \vec{e}_\alpha \times \vec{e}_\beta \quad (4.23).$$

Cette loi de transformation pseudo-tensorielle pour les produits des vecteurs de base entraîne évidemment la même loi pour le produit vectoriel de deux vecteurs polaires quelconques.

4.5. Structure des tenseurs cartésiens symétriques de rang 2.

Axes principaux

La symétrie d'un tenseur cartésien par rapport à deux de ses indices est une propriété intrinsèque. Si, en effet

$$t_{ij} = t_{ji} \quad (4.24)$$

dans un repère donné,

$$t_{\alpha\beta} = T_{\alpha i} T_{\beta j} t_{ij} = T_{\alpha j} T_{\beta i} t_{ji} = T_{\alpha j} T_{\beta i} t_{ij} = t_{\beta\alpha}$$

La première égalité résulte de la loi de transformation tensorielle, la seconde implique seulement l'échange des indices de sommation (indices muets), la troisième fait usage de la symétrie reconnue dans la base primitive, la dernière résulte à nouveau de la loi de transformation tensorielle.

Le tenseur symétrique étant une grandeur physique indépendante du repère, on peut se demander s'il est possible de lui associer des directions privilégiées de l'espace. Considérons le tenseur comme un opérateur établissant une correspondance entre vecteurs (tenseur opérateur).

Soit

$$t_{ij} u_j = v_i$$

la correspondance $\vec{u} \rightarrow \vec{v}$ représentée dans la base des \vec{e}_i .

Existe-t-il une direction privilégiée de l'espace, invariante dans la correspondance, c'est-à-dire telle que

$$\vec{v} = \tau \vec{u}$$

où τ est un scalaire, appelé valeur propre du tenseur?

Comme nous admettons pour τ des valeurs réelles aussi bien négatives que positives, nous convenons de parler d'invariance de direction; l'invariance d'orientation n'admettant que des τ positifs.

La question posée revient à examiner l'existence de solutions au problème algébrique

$$t_{ij} u_j = \tau u_i \quad \text{ou} \quad (t_{ij} - \tau \delta_{ij}) u_j = 0 \quad (4.25)$$

Ce système linéaire et homogène dans les inconnues u_i n'admet de solution autre que triviale ($u_i = 0$) que si

$$\det (t_{ij} - \tau \delta_{ij}) = 0 \quad (4.26).$$

C'est l'équation aux valeurs propres du tenseur. Les valeurs propres sont indépendantes du repère utilisé, car dans un autre repère

$$\begin{aligned} \det (t_{\alpha\beta} - \tau \delta_{\alpha\beta}) &= \det (T_{\alpha i} T_{\beta j} t_{ij} - \tau T_{\alpha i} T_{\beta j} \delta_{ij}) \\ &= \det T_{\alpha i} \det T_{\beta j} \det (t_{ij} - \tau \delta_{ij}) = \det (t_{ij} - \tau \delta_{ij}) \end{aligned}$$

La première égalité fait usage du caractère tensoriel de t_{ij} et de δ_{ij} , la seconde fait usage du théorème sur les déterminants de produits de matrices, la troisième fait usage de (4.8).

Il n'est pas exclu a priori qu'une valeur propre, racine de (4.26) soit un nombre complexe. Dès lors, si elle rend le système algébrique (4.25) compatible, la solution u_i , qui n'est d'ailleurs définie qu'à un facteur réel ou complexe près, peut être constituée de nombres complexes. Soient alors u_i^* les nombres complexes conjugués, nous avons l'égalité

$$u_i^* t_{ij} u_j = \tau u_i^* u_i \quad (4.27)$$

Or, $u_i^* u_i$ est un nombre réel car il est identique à son conjugué; il en est de même pour $u_i^* t_{ij} u_j$ car son conjugué

$$u_i t_{ij}^* u_j^* = u_j t_{ji}^* u_i^* = u_j t_{ij} u_i^*$$

se ramène successivement à l'expression initiale en échangeant d'abord les indices muets, puis en observant que la symétrie (4.24) en nombres réels est équivalente à $t_{ji}^* = t_{ij}$. Il résulte alors de (4.27) que τ , quotient de deux nombres réels, dont le dénominateur ne s'annule que si $u_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$), est lui-même un nombre réel. Ainsi la symétrie du tenseur a pour conséquence importante que ses valeurs propres ne peuvent être que réelles. A toute valeur propre réelle correspond alors au moins une solution réelle non triviale du système algébrique (4.25). Comme elle n'est définie qu'à un facteur réel près, elle n'identifie qu'une direction, et pas une orientation, privilégiée de l'espace. En principe, l'équation aux valeurs propres qui est du troisième degré admet trois racines. Montrons que si deux racines sont distinctes, les orientations associées sont orthogonales.

Pour la première racine τ_1 , soit $u_{i(1)}$ une solution propre associée, et $u_{i(2)}$ pour τ_2 .

On a par définition

$$t_{ij} u_j(1) = \tau_1 u_i(1)$$

et, par conséquent,

$$t_{ij} u_i(2) u_j(1) = \tau_1 u_i(1) u_i(2) \quad (4.28)$$

De même

$$t_{ij} u_j(2) = \tau_2 u_i(2)$$

et, par conséquent,

$$t_{ij} u_j(2) u_i(1) = t_{ji} u_i(2) u_j(1) = \tau_2 u_i(1) u_i(2)$$

Retranchant cette dernière relation membre à membre de l'égalité (4.28) et observant que la symétrie (4.24) annulera le premier membre résultant :

$$0 = [\tau_1 - \tau_2] u_i(1) u_i(2)$$

Comme, par hypothèse, les deux valeurs propres sont distinctes, nous obtenons la relation d'orthogonalité annoncée

$$u_i(1) u_i(2) = 0 \quad \text{si} \quad \tau_1 \neq \tau_2 \quad (4.29).$$

Dans le cas où les trois valeurs propres sont distinctes, il existe donc un ensemble de trois directions privilégiées orthogonales entre elles, dites axes principaux du tenseur. Les vecteurs propres n'étant définis qu'à un facteur réel près, il nous est loisible de les normer pour en faire des vecteurs unitaires

$$u_{i(m)} u_{i(m)} = 1 \quad (m = 1, 2, 3) \quad .$$

Prenons ces trois vecteurs unitaires comme nouvelle base orthonormée. Dans celle-ci, les composantes des vecteurs propres associés respectivement à τ_1 , τ_2 et τ_3 seront réduites à $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. De la sorte, le système algébrique (4.25) écrit pour la première solution propre dans la nouvelle base se réduit à

$$t_{11} = \tau_1 \quad t_{21} = 0 \quad t_{31} = 0 \quad (4.30)$$

Pour la seconde solution propre

$$t_{12} = 0 \quad t_{22} = \tau_2 \quad t_{32} = 0$$

et pour la troisième

$$t_{13} = 0 \quad t_{23} = 0 \quad t_{33} = \tau_3 \quad .$$

Il apparaît que la matrice représentant le tenseur dans une base d'axes principaux est diagonale et ses éléments diagonaux sont les valeurs propres

$$\begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Il reste à examiner les cas de dégénérescence, c'est-à-dire ceux correspondant à une racine multiple de l'équation aux valeurs propres. Dans le cas d'une racine double, soit τ_1 la racine simple distincte. Adoptons un repère dont le premier vecteur de base soit un des vecteurs propres normés $\vec{u}_{(1)}$ (il y en a évidemment deux possibles correspondant aux deux orientations sur le premier axe principal).

Dans un tel repère (4.30) est valable, et, comme la symétrie est une propriété intrinsèque, la matrice représentant le tenseur dans la nouvelle base aura la forme

$$\begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & t_{23} \\ 0 & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \quad t_{32} = t_{23}$$

Développant l'équation aux valeurs propres dans la nouvelle base, la solution connue $\lambda = \lambda_{(1)}$ se factorise et les deux autres solutions deviennent racines de

$$\det \begin{vmatrix} t_{22} - \tau & t_{23} \\ t_{32} & t_{33} - \tau \end{vmatrix} = \tau^2 - \tau (t_{22} + t_{33}) + t_{22} t_{33} - t_{23}^2 = 0$$

Le discriminant de cette équation algébrique est

$$(t_{22} + t_{33})^2 - 4 (t_{22} t_{33} - t_{23}^2) = (t_{22} - t_{33})^2 + 4 t_{23}^2 \geq 0$$

confirmant que les deux autres racines seront réelles.

La condition de racine double, c'est-à-dire l'annulation du discriminant, exige simultanément

$$t_{22} = t_{33} \quad (= \tau_2) \quad t_{23} = t_{32} = 0$$

Dès lors, le tenseur apparaît d'emblée comme ramené à une structure diagonale

$$\begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_2 \end{pmatrix}$$

et tous les axes perpendiculaires à $\vec{u}_{(1)}$ sont principaux.

Un tel tenseur est dit cylindrique.

Ceci implique que pour une racine double, le système algébrique (4.25) admet deux solutions linéairement indépendantes, la solution générale étant une combinaison linéaire arbitraire de celles-ci.

Finalement, si l'équation aux valeurs propres admet une racine triple $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau$, on pourra toujours déterminer une solution de (4.25) et donc un axe principal. Dès lors, on aura, en vertu de ce qui précède, la structure

$$\tau \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad t_{ij} = \tau \delta_{ij} \quad (4.32)$$

dans tout repère dont le premier vecteur de base est orienté selon cette direction. Mais, on a vu que δ_{ij} est un tenseur isotrope et par conséquent, t_{ij} n'en différant que par son module τ , est lui-même un tenseur isotrope ou sphérique, il a la même structure dans tous les repères cartésiens. Pour un tel tenseur, toutes les directions de l'espace sont principales.

4.6. Invariants fondamentaux et déviateur

Les valeurs propres étant indépendantes du repère, il en est de même des coefficients de l'équation algébrique (4.26), qui sont des fonctions symétriques des racines. Ces coefficients sont les invariants fondamentaux du tenseur. Développant (4.26) sous la forme

$$\phi(\tau) = -\tau^3 + \theta_1 \tau^2 - \theta_2 \tau + \theta_3 = (\tau_1 - \tau)(\tau_2 - \tau)(\tau_3 - \tau) = 0 \quad (4.33)$$

Les invariants fondamentaux s'expriment en fonction des valeurs propres comme :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \\ \theta_2 &= \tau_1 \tau_2 + \tau_2 \tau_3 + \tau_3 \tau_1 \\ \theta_3 &= \tau_1 \tau_2 \tau_3 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Leur intérêt est cependant de pouvoir être exprimés rationnellement en fonction des composantes du tenseur dans un repère arbitraire. Nous pouvons de nouveau recourir pour cela à la formule de Laplace; eu égard à (4.20), on peut écrire

$$e_{ijk} (t_{im} - \tau \delta_{im})(t_{jn} - \tau \delta_{jn})(t_{kp} - \tau \delta_{kp}) = e_{mnp} \det (t_{ij} - \tau \delta_{ij})$$

Après développement et réduction, on trouve

$$\theta_1 = \frac{1}{2} e_{mnp} e_{inp} t_{im} = \delta_{im} t_{im} = t_{ii} \quad (4.35)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2} e_{mnp} e_{mjk} t_{nj} t_{pk} = \frac{1}{2} (t_{jj} t_{kk} - t_{kj} t_{jk}) \quad (4.36)$$

$$= t_{22} t_{33} + t_{33} t_{11} + t_{11} t_{22} - (t_{23}^2 + t_{31}^2 + t_{12}^2)$$

$$\theta_3 = \frac{1}{6} e_{mnp} e_{ijk} t_{im} t_{jn} t_{kp} = \det (t_{ij}) \quad (4.37)$$

Proposons-nous de calculer les modifications subies par les invariants fondamentaux quand le tenseur est modifié par soustraction d'un tenseur sphérique. Nous allons donc évaluer les invariants fondamentaux du tenseur modifié

$$t_{ij} - \mu \delta_{ij}$$

Son équation aux valeurs propres est évidemment obtenue en remplaçant τ par $\tau + \mu$ dans (4.33), soit, après avoir réordonné dans les puissances de τ

$$-\tau^3 + \tau^2 (\theta_1 - 3\mu) - \tau (\theta_2 + 3\mu^2 - 2\theta_1\mu)$$

$$+ \theta_3 - \mu^3 + \theta_1\mu^2 - \theta_2\mu = 0$$

Le nouveau second invariant fondamental

$$\hat{\theta}_2 = \theta_2 + 3\mu^2 - 2\theta_1\mu = -\phi'(\mu)$$

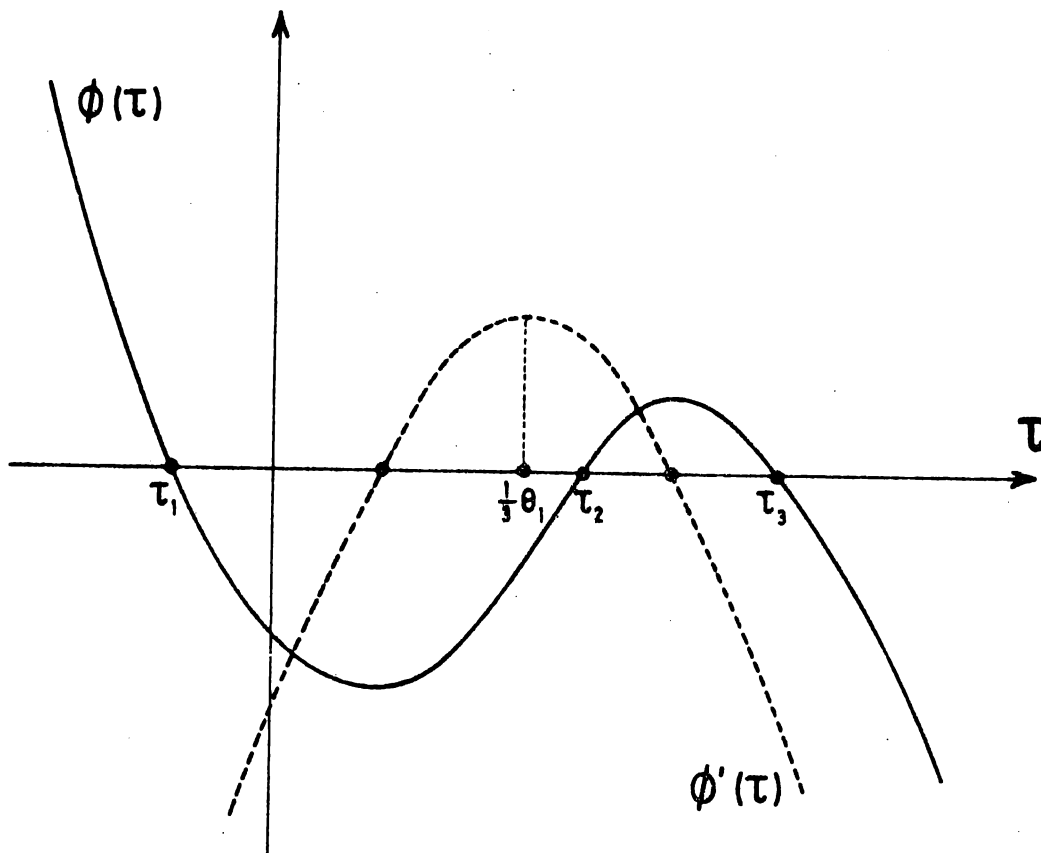
est maximum pour la valeur $\mu = \frac{1}{3}\theta_1$

qui annule le nouveau premier invariant fondamental.

De plus, ce maximum

$$\hat{\theta}_2 = \theta_2 - \frac{1}{3}\theta_1^2 = -\phi'\left(\frac{1}{3}\theta_1\right) \leq 0 \quad (4.38)$$

Comme on le vérifie immédiatement sur les graphes de $\phi(\tau)$ et de $\phi'(\tau)$ dont on sait que les racines sont réelles.



Il ne peut s'annuler que si les trois valeurs propres sont identiques, auquel cas le tenseur dont on est parti est déjà sphérique. Ce résultat est confirmé par l'expression de (4.38) dans les composantes t_{ij} . De (4.35) et (4.36), on tire

$$\hat{\theta}_2 = \frac{1}{6} (t_{jj} t_{kk} - 3 t_{kj} t_{jk}) \quad (4.39)$$

soit encore, après développement,

$$-\hat{\theta}_2 = \frac{1}{6} [(t_{11} - t_{22})^2 + (t_{22} - t_{33})^2 + (t_{33} - t_{11})^2] + t_{12}^2 + t_{23}^2 + t_{31}^2 \geq 0 \quad (4.40)$$

et on voit bien que l'annulation de $\hat{\theta}_2$ entraîne

$$t_{12} = t_{23} = t_{31} = 0 \quad t_{11} = t_{22} = t_{33} = \frac{1}{3} \theta_1$$

Le tenseur $\frac{1}{3} \theta_1 \delta_{ij}$ est, par définition, la partie sphérique du tenseur t_{ij} et son complément

$$\hat{t}_{ij} = t_{ij} - \frac{1}{3} \theta_1 \delta_{ij} \quad \hat{\theta}_1 = \hat{t}_{kk} = 0 \quad \hat{\theta}_2 = -\frac{1}{2} \hat{t}_{kj} \hat{t}_{jk} \quad (4.41)$$

est le tenseur déviateur de t_{ij} .

Son premier invariant fondamental est nul, son second invariant fondamental est négatif et son annulation entraîne la disparition complète du déviateur. On en conclut que l'annulation des deux premiers invariants θ_1 et θ_2 est une condition nécessaire et suffisante pour que le tenseur t_{ij} soit identiquement nul. Notons que ceci est confirmé par la relation, facile à établir dans les axes principaux,

$$(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2) = \theta_1^2 + 2 \theta_2 \quad (4.42).$$

4.7. Structure des tenseurs cartésiens de second rang avec symétrie gauche

La relation de symétrie (4.24) est remplacée par celle de symétrie gauche

$$k_{ji} = -k_{ij} \quad (4.43)$$

Le nombre de composantes distinctes d'un tel tenseur n'est que de 3 et nous pouvons toujours lui associer un pseudo-vecteur

$$k_m = -\frac{1}{2} e_{mnp} k_{np} \quad (4.44)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} k_1 &= -k_{23} = k_{32} \\ k_2 &= -k_{31} = k_{13} \\ k_3 &= -k_{12} = k_{21} \end{aligned} \tag{4.45}$$

Inversément

$$k_{ij} = -e_{ijm} k_m \tag{4.46}$$

Il est aisé de vérifier à partir de (4.17) que si k_{ij} obéit aux lois de transformations d'un vrai tenseur de second rang, k_m obéit à celles d'un pseudo-tenseur :

$$k_m = T_{\alpha m} k_\alpha \det T \tag{4.47}$$

Tout tenseur symétrique gauche de second rang possède une valeur propre nulle. En effet

$$u_j = k_j$$

est une solution des équations (4.25) pour $\tau = 0$ car

$$k_{ij} k_j = -e_{ijm} k_j k_m = 0 \tag{4.48}$$

les termes s'annulant deux à deux. Nous verrons que c'est la seule valeur propre réelle. Par conséquent, le tenseur n'a qu'une seule direction principale, celle qui porte son pseudo-vecteur associé. Pour des raisons liées à une interprétation cinématique possible du tenseur comme opérateur, nous l'appellerons l'axe de rotation du tenseur.

Dans un repère dont le premier vecteur de base est aligné avec l'axe de rotation, la matrice du tenseur prend la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & k_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce résultat peut être basé sur le résultat (4.48) et le fait que la symétrie gauche est elle aussi une propriété intrinsèque.

L'équation aux valeurs propres, toujours invariante, se réduit à

$$\kappa (\kappa^2 + k_1^2) = 0$$

En plus de la racine nulle, le tenseur possède une paire de valeurs propres imaginaires conjuguées $\kappa = \pm ik_1$ ($i = \sqrt{-1}$).

A un facteur près, les vecteurs propres correspondants peuvent être pris comme

$$w_1 = 0 \quad w_2 = 1 \quad w_3 = -i \quad \text{pour } \kappa = ik_1$$

$$w_1 = 0 \quad w_2 = i \quad w_3 = -1 \quad \text{pour } \kappa = -ik_1$$

Chacun est isotrope

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 0$$

et chacun d'eux est composé d'un vecteur partie réelle unitaire et d'un vecteur partie imaginaire unitaire perpendiculaires entre-eux.

Remarquons enfin que, considéré comme opérateur, un tenseur symétrique gauche de second rang se comporte comme un produit vectoriel.

Plus précisément, si le tenseur opère sur un vecteur r_j

$$u_i = k_{ij} r_j = -e_{ijm} k_m r_j = e_{mji} k_m r_j \quad (4.24)$$

On vérifie à l'aide de (4.22) que le résultat représente le produit vectoriel du pseudo-vecteur associé \vec{k} par le vecteur \vec{r} .

On a vu que le produit vectoriel de deux vecteurs polaires est un pseudo-vecteur; ici comme un des facteurs du produit est lui-même un pseudo-vecteur, le produit redevient un vecteur polaire.

Cette remarque fournit l'interprétation cinématique justifiant le nom d'axe de rotation pour la direction principale du tenseur et de pseudo-vecteur de rotation pour \vec{k} . Si le vecteur \vec{r} représente le vecteur de position d'un point de l'espace par rapport à un point de l'axe de rotation, le vecteur \vec{u} est le moment du pseudo-vecteur \vec{k} par rapport à ce point. Le champ des moments de \vec{k} ainsi engendré peut être identifié au champ des déplacements d'un solide dans une rotation finie autour de l'axe. Ce point de vue sera développé lors de l'analyse cinématique des déplacements finis.

4.8. Représentation matricielle des opérations tensorielles

Jusqu'au rang deux inclus, les tenseurs peuvent être représentés par des matrices et la transparence de la formulation matricielle peut être un avantage précieux pour orienter les manipulations nécessaires dans la poursuite d'un but déterminé. Un scalaire reste représenté par son unique symbole invariant, un vecteur u_i par une matrice unicolonne u , un tenseur du second rang a_{ij} par une matrice carrée A . La matrice orthogonale de changement de repère T a déjà été introduite dans la section 4.1.

Le terme "représentation", ici comme dans la notation tensorielle, implique l'usage d'un repère déterminé.

Les lois de transformation tensorielle (4.13) et (4.14) pour un vecteur polaire ont pour traduction matricielle respectivement

$$n = T^T \hat{n} \quad \text{et} \quad \hat{n} = T n \quad (4.25)$$

On observera que, si dans la notation tensorielle il était possible de distinguer les changements de représentation par la nature latine ou grecque de l'indice, on est maintenant obligé d'indiquer la nouvelle représentation par un signe particulier (ici un accent circonflexe). Pour les lois de transformation tensorielle d'un tenseur de second rang, on peut soit interpréter les formules (4.15), soit utiliser l'invariance d'une forme bilinéaire

$$\phi = m^T A n = \hat{m}^T \hat{A} \hat{n} = (Tm)^T \hat{A} T n = m^T T^T \hat{A} T n$$

et trouver par conséquent

$$A = T^T \hat{A} T \quad \text{d'où aussi} \quad \hat{A} = T A T^T \quad (4.26).$$

Si le tenseur isotrope de Kronecker possède sa représentation par la matrice identité I, le pseudo-tenseur e_{ijk} de rang trois n'a pas d'équivalent matriciel et doit être remplacé comme opérateur par un formalisme approprié. Un tel formalisme peut être basé comme suit sur le produit vectoriel.

La matrice symétrique gauche construite à partir du pseudo-vecteur associé k est notée

$$[k] = \begin{pmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{pmatrix} = -[k]^T \quad (4.27)$$

Dès lors, le produit vectoriel $\vec{k} \times \vec{r}$ reçoit la représentation

$$[k] r = -[r] k \quad \text{et on a} \quad [k] k = 0 \quad (4.28)$$

On vérifie directement la relation importante

$$[[k] r] = r k^T - k r^T \quad (4.29)$$

dont découle sans peine la formule du double produit vectoriel

$$[[k] r] u = (k^T u) r - (r^T u) k \quad (4.30)$$

D'autre part, on peut aussi vérifier directement que

$$[k] [r] = - (k^T r) I + r k^T \quad (4.31)$$

A titre d'exercice d'application de ces formules, étudions à nouveau la structure d'un tenseur symétrique gauche $[k]$.

Posant

$$\omega = \sqrt{k^T k}$$

nous pouvons ramener l'analyse à celle d'un tenseur symétrique gauche dont le pseudo-vecteur associé n est unitaire

$$[k] = \omega [n] \quad n^T n = 1$$

Soit u un autre vecteur unitaire perpendiculaire à n

$$u^T n = 0 \quad u^T u = 1$$

Opérant sur ce vecteur unitaire avec $[n]$, on forme

$$v = [n] u$$

Ce nouveau vecteur est aussi perpendiculaire à n , car

$$n^T v = n^T [n] u = 0$$

en vertu de (4.28); il est aussi perpendiculaire à u , car

$$u^T v = u^T [n] u = 0$$

puisque le scalaire $u^T [n] u$ est égal à son transposé

$$u^T [n]^T u = -u^T [n] u \quad .$$

Enfin, le nouveau vecteur est unitaire, car en utilisant la formule (4.31),

$$v^T v = -u^T [n] [n] u = -u^T (-I + n n^T) u = u^T u = 1 .$$

Effectuant une transformation tensorielle avec la matrice T^T représentée par ses colonnes

$$T^T = (n \quad u \quad v)$$

il vient successivement

$$[k] T^T = \omega ([n]n \quad [n]u \quad [n]v) = \omega (0 \quad v \quad -u)$$

car

$$[n] v = [n] [n] u = (-I + n n^T)u = -u \quad ,$$

et enfin

$$T [k] T^T = \omega \begin{pmatrix} 0 & n^T v & -n^T u \\ 0 & u^T v & -u^T u \\ 0 & v^T v & -v^T u \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est une des formes canoniques à laquelle le tenseur est réductible par une transformation orthogonale réelle.

Pour la transformation unitaire

$$T^* = \left(n \quad \frac{u-iv}{\sqrt{2}} \quad \frac{v-iu}{\sqrt{2}} \right) \quad T^* T = I$$

(T^* transposé conjugué de T), on obtient une forme diagonale complexe :

$$T [k] T^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\omega & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega \end{pmatrix} .$$

5.1. Compatibilité des déformations dans un domaine à connexion
linéaire simple

La linéarisation géométrique

$$| D_i u_j | \ll 1 \quad (5.1)$$

a permis d'exprimer le tenseur gradient des déplacements

$$D_i u_j = \epsilon_{ij} + \omega_{ji} \quad (5.2)$$

comme la somme d'un tenseur symétrique de déformations infinitésimales

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) = \epsilon_{ji} \quad (5.3)$$

et d'un tenseur de rotations infinitésimales antisymétrique

$$\omega_{ji} = \frac{1}{2} (D_i u_j - D_j u_i) = -\omega_{ij} \quad (5.4)$$

Si ce dernier est remplacé au profit de son pseudo-vecteur associé

$$\omega_m = \frac{1}{2} e_{mqj} D_q u_j \quad (5.5)$$

la décomposition du tenseur gradient prend une forme

$$D_i u_j = \epsilon_{ij} + e_{ijm} \omega_m \quad (5.6)$$

sur laquelle nous allons examiner les conditions auxquelles doivent satisfaire le champ des rotations et celui des déformations pour être compatibles.

Les équations (5.6) sont au nombre de 9 et l'élimination des trois composantes de déplacement entre elles fournit d'abord un ensemble de conditions à remplir par les rotations et déformations.

L'élimination s'opère formellement à partir des égalités

$$e_{ipq} D_p D_i u_j = 0 \quad \text{pour toute paire } (q, j) \quad (5.7)$$

qui expriment la commutabilité dans l'ordre des dérivations partielles des dérivées secondes des u_j . Remplaçant (5.6) dans ces égalités, il vient

$$e_{ipq} = D_p \epsilon_{ij} + e_{ipq} e_{ijm} D_p \omega_m = 0$$

mais, d'une part

$$e_{ipq} e_{ijm} D_p \omega_m = \begin{pmatrix} p & q \\ j & m \end{pmatrix} D_p \omega_m = D_j \omega_q - \delta_{qj} D_m \omega_m$$

et, d'autre part, (5.5) montre que

$$D_m \omega_m = \frac{1}{2} \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{u} = 0 \quad (5.8)$$

si bien que le résultat peut se mettre sous la forme

$$D_j \omega_q = e_{piq} D_p \epsilon_{ij} \quad (5.9)$$

Ce sont les équations de BELTRAMI; elles expriment les gradients des composantes de la rotation en fonction des dérivées premières du champ des déformations. On observera en faisant $j = q$ qu'elles contiennent la propriété (5.8) en vertu de la symétrie du tenseur des déformations. Les composantes de la rotation peuvent maintenant être elles-mêmes éliminées entre les équations (5.9) par le même procédé

$$e_{rjm} D_r D_j \omega_q = 0 \quad \text{pour toute paire } (m, q)$$

conduisant aux équations

$$\Gamma_{qm} = 0 \quad (5.10)$$

avec

$$T_{qm} = e_{piq} e_{rjm} D_p D_r \epsilon_{ij} = T_{mq} \quad (5.11)$$

La symétrie du tenseur T_{qm} , dit tenseur d'incompatibilité des déformations, apparaît clairement par échange des indices muets i et j d'une part, p et r d'autre part. On observera également que ce tenseur vérifie les équations différentielles

$$D_q T_{qm} = 0 \quad (5.12)$$

La nullité en tous points du domaine du tenseur d'incompatibilité apparaît donc comme une condition nécessaire pour l'existence d'un champ de rotations et d'un champ de déplacements.

Nous allons montrer que cette condition est aussi suffisante quand le domaine est à connexion linéaire simple.

Faisons appel pour le démontrer au théorème de Stokes :

$$\oint \vec{a} \cdot d\vec{x} = \int_S \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{a} \, dS$$

Le premier membre est la circulation d'un champ de vecteurs \vec{a} sur un contour fermé du domaine, le second est le flux du rotationnel de ce vecteur \vec{a} travers une surface du domaine s'appuyant sur le contour. Si \vec{a} est un vecteur polaire, $\text{rot } \vec{a}$ est un pseudo-vecteur et le sens positif de la normale \vec{n} est établi par la convention du pas droitier si le trièdre de référence est dextrogyre, du pas gauche dans le cas levogyre. En notations tensorielles

$$\oint a_j \, dx_j = \int_S n_r e_{rmj} D_m a_j \, dS \quad (5.13)$$

Si nous cherchons à intégrer un champ de rotations $\vec{\omega}$ à partir d'un champ de déformations donné en nous servant des équations (5.9) de Beltrami, il faut, pour qu'en chaque point il n'y ait qu'un seul vecteur rotation, vérifier sur tout circuit fermé la condition

$$\oint d\omega_q = \oint \omega_{q,j} \, dx_j = 0 \quad (q = 1, 2, 3) \quad (5.14)$$

Or, si le domaine est à connexion linéaire simple, tout circuit fermé est, par définition, réductible à un point par déformation continue, sans quitter le domaine. Lors de ce processus de réduction, il engendre une surface d'appui dont tous les points appartiennent au domaine. Appliquant alors le théorème de Stokes, les conditions (5.14) prennent la forme équivalente

$$\int_S n_r e_{rjm} D_m D_j \omega_q dS = 0$$

soit, après substitution des équations de Beltrami,

$$\int_S n_r T_{rq} dS = 0 \quad (5.15).$$

Par conséquent, si le tenseur d'incompatibilité est nul dans tout le domaine, les conditions pour que le champ des rotations soit univoque sont satisfaites. Observons que le champ univoque des rotations ainsi intégré n'est défini qu'à un vecteur de rotation

$$\omega_q = \beta_q = \text{constante}$$

près, solution des équations de Beltrami sans second membre.

La seconde étape consiste à construire le champ des déplacements par intégration des équations (5.6). Ici les conditions pour un champ univoque sont que pour tout circuit fermé

$$\oint du_j = \oint D_i u_j dx_i = 0$$

Après application du théorème de Stokes, elles deviennent

$$\int_S n_r e_{rpi} D_p D_i u_j dS = 0$$

et sont précisément satisfaites par les équations (5.7) dont les équations de Beltrami ont été déduites. Le champ de déplacements ainsi construit est donc univoque mais n'est défini qu'à un champ à six paramètres

(α_j, β_m) près

$$u_j = a_j + \epsilon_{ijm} x_i \beta_m$$

En supposant que l'origine 0 des axes cartésiens ait été choisi dans le domaine, les paramètres a_j et β_m peuvent être considérés comme les valeurs initiales des déplacements et des rotations en 0 pour les chemins d'intégration partant de ce point.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Dans un domaine à connexion linéaire simple, l'annulation en tout point, frontière comprise, des six composantes du tenseur d'incompatibilité des déformations est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un champ univoque de rotations et déplacements.

L'intégration d'un champ compatible de déformations ne détermine les déplacements qu'à un déplacement infinitésimal arbitraire de corps rigide près.

Il est clair que la complexité des conditions de compatibilité (5.10) permet difficilement de les utiliser pour la construction de champs de déformation compatibles, alors qu'on les dérive très facilement à partir de champs de déplacement.

Notons cependant les deux Lemmes suivants, dont le point de départ est constitué de données partielles sur le champ des déformations.

Subdivisons les composantes du tenseur d'incompatibilité en deux groupes :

le groupe diagonal

$$T_{11} = D_2 D_2 \epsilon_{33} + D_3 D_3 \epsilon_{22} - 2 D_2 D_3 \epsilon_{23}$$

$$T_{22} = D_3 D_3 \epsilon_{11} + D_1 D_1 \epsilon_{33} - 2 D_3 D_1 \epsilon_{31} \quad (5.16)$$

$$T_{33} = D_1 D_1 \epsilon_{22} + D_2 D_2 \epsilon_{11} - 2 D_1 D_2 \epsilon_{12}$$

et le groupe anti-diagonal :

$$T_{23} = - D_2 D_3 \epsilon_{11} + D_1 (- D_1 \epsilon_{23} + D_2 \epsilon_{31} + D_3 \epsilon_{12})$$

$$T_{31} = - D_3 D_1 \epsilon_{22} + D_2 (- D_2 \epsilon_{31} + D_3 \epsilon_{12} + D_1 \epsilon_{23}) \quad (5.17)$$

$$T_{12} = - D_1 D_2 \epsilon_{33} + D_3 (- D_3 \epsilon_{12} + D_1 \epsilon_{23} + D_2 \epsilon_{31})$$

Lemme 1

Un champ suffisamment différentiable mais par ailleurs arbitraire de glissements ($2 \epsilon_{23}$, $2 \epsilon_{31}$, $2 \epsilon_{12}$) peut être complété par un champ d'allongements spécifiques (ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{33}) de façon à être compatible. En d'autres termes, il est possible de construire un champ de déplacements tel que

$$D_2 u_3 + D_3 u_2 = 2 \epsilon_{23} \quad D_3 u_1 + D_1 u_3 = 2 \epsilon_{31} \quad D_1 u_2 + D_2 u_1 = 2 \epsilon_{12} \quad (5.18)$$

où les seconds membres sont donnés.

Procédons directement à l'intégration du champ des déplacements à partir des données de glissement. Puisqu'on déterminera par après les allongements spécifiques complémentaires par les équations

$$\epsilon_{11} = D_1 u_1 \quad \epsilon_{22} = D_2 u_2 \quad \epsilon_{33} = D_3 u_3 \quad (5.19)$$

nous insérons celles-ci dans les conditions de compatibilité

$$T_{23} = 0 \quad T_{31} = 0 \quad T_{12} = 0$$

supprimons l'opérateur de dérivation commun à tous les termes et obtenons des équations séparées pour chaque composante du déplacement

$$\begin{aligned} D_2 D_3 u_1 &= -D_1 \epsilon_{23} + D_2 \epsilon_{31} + D_3 \epsilon_{12} \\ D_3 D_1 u_2 &= -D_2 \epsilon_{31} + D_3 \epsilon_{12} + D_1 \epsilon_{23} \\ D_1 D_2 u_3 &= -D_3 \epsilon_{12} + D_2 \epsilon_{23} + D_2 \epsilon_{31} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Ce sont d'ailleurs les équations obtenues en éliminant deux des déplacements entre les équations (5.18).

Toute solution particulière de ces équations vérifie les propriétés

$$D_3 [2 \epsilon_{12} - D_2 u_1 - D_1 u_2] = 0$$

$$D_1 [2 \epsilon_{23} - D_3 u_2 - D_2 u_3] = 0$$

$$D_2 [2 \epsilon_{31} - D_1 u_3 - D_3 u_1] = 0$$

obtenues par simple addition deux à deux des équations (5.20); on a par conséquent pour cette solution particulière les relations

$$\begin{aligned} 2 \epsilon_{12} &= D_2 u_1 + D_1 u_2 + E_{12} (x_1, x_2) \\ 2 \epsilon_{23} &= D_3 u_2 + D_2 u_3 + E_{23} (x_2, x_3) \\ 2 \epsilon_{31} &= D_1 u_3 + D_3 u_1 + E_{31} (x_3, x_1) \end{aligned} \quad (5.21)$$

qui ne diffèrent des équations (5.18) demandées que par la présence des fonctions arbitraire E_{ij} .

Cependant, les équations (5.20) elles-mêmes montrent qu'à toute solution particulière on peut retrancher

$$u_1 = F_{12} (x_1, x_2) + F_{13} (x_1, x_3)$$

$$u_2 = F_{21} (x_2, x_1) + F_{23} (x_2, x_3)$$

$$u_3 = F_{31} (x_3, x_1) + F_{32} (x_3, x_2)$$

et il est manifestement toujours possible de choisir les fonctions arbitraires E_{ij} de telle sorte que

$$D_2 F_{12} + D_1 F_{21} = E_{12}$$

$$D_3 F_{23} + D_2 F_{32} = E_{23}$$

$$D_1 F_{31} + D_3 F_{13} = E_{31}$$

En d'autres termes, on ne nuit pas à la généralité en faisant les $E_{ij} = 0$ dans les équations (5.21). Celles-ci et (5.19) établissent bien alors la preuve du Lemme.

Lemme 2

Un champ suffisamment différentiable mais par ailleurs arbitraire d'allongements spécifiques (ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{33}) peut être complété par un champ de glissements de façon à être compatible.

Il suffit ici d'intégrer les déplacements par les équations (5.19) et de définir le champ complémentaire par les équations (5.18).

Les lemmes 1 et 2, appliqués dans un contexte différent et associés aux propriétés (5.12) permettent de retrouver les résultats suivants dus à WASHIZU.

Théorème 1

Si les conditions de compatibilité $T_{11} = 0$, $T_{22} = 0$ et $T_{33} = 0$ sont satisfaites dans le domaine V et sur sa frontière ∂V , il suffit que les conditions complémentaires $T_{23} = 0$, $T_{31} = 0$ et $T_{12} = 0$ soient satisfaites sur ∂V pour l'être aussi dans V .

Suivant le lemme 1, quels que soient T_{23} , T_{31} et T_{12} dans V , on peut trouver un champ de vecteurs \vec{U} tel que

$$T_{23} = D_2 U_3 + D_3 U_2 \quad T_{31} = D_3 U_1 + D_1 U_3 \quad T_{12} = D_1 U_2 + D_2 U_1$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_V (T_{23}^2 + T_{31}^2 + T_{12}^2) dV &= \int_V \{T_{23}(D_2 U_3 + D_3 U_2) + T_{31}(D_3 U_1 + D_1 U_3) + T_{12}(D_1 U_2 + D_2 U_1)\} dV \\ &= \int_{\partial V} [U_1(n_2 T_{21} + n_3 T_{31}) + U_2(n_3 T_{32} + n_1 T_{12}) + U_3(n_1 T_{13} + n_2 T_{23})] dS \\ &\quad - \int_V [U_1(D_2 T_{21} + D_3 T_{31}) + U_2(D_3 T_{32} + D_1 T_{12}) + U_3(D_1 T_{13} + D_2 T_{23})] dV \end{aligned}$$

mais par les propriétés (5.12) et les hypothèses

$$D_2 T_{21} + D_3 T_{31} = - D_1 T_{11} = 0$$

$$D_3 T_{32} + D_1 T_{12} = - D_2 T_{22} = 0$$

$$D_1 T_{13} + D_2 T_{23} = - D_3 T_{33} = 0$$

tandis que l'intégrale de frontière est aussi nulle en vertu des hypothèses. Par conséquent

$$\int_V (T_{23}^2 + T_{31}^2 + T_{12}^2) dV = 0$$

et le résultat annoncé en découle.

Théorème 2

Si les conditions de compatibilité $T_{23} = 0$, $T_{31} = 0$, $T_{12} = 0$ sont satisfaites dans le domaine V et sur sa frontière ∂V , il suffit que les conditions complémentaires $T_{11} = 0$, $T_{22} = 0$, $T_{33} = 0$ soient satisfaites sur ∂V pour l'être aussi dans V .

La démonstration est semblable en partant du Lemme 2 qui permet de poser

$$T_{11} = D_1 U_1 \quad T_{22} = D_2 U_2 \quad T_{33} = D_3 U_3$$

Définition

Nous appellerons régulier le champ des déformations induit par un changement de configuration. Celui-ci ayant lieu à l'intervention d'un champ univoque de déplacements, un champ régulier de déformations possède les propriétés suivantes :

- 1) Les déformations sont continues ainsi que leurs dérivées partielles premières et secondes. C'est la condition de régularité de V. VOLTERRA;
- 2) Le tenseur d'incompatibilité formé à partir des dérivées secondes est nul en tout point du champ.

Le première propriété peut éventuellement être violée pour la continuité des dérivées secondes sur certaines surfaces singulières.

Quant à la seconde propriété, il est clair qu'elle s'applique quel que soit le degré de connexité du domaine; l'élimination des déplacements et des rotations ne faisant pas intervenir de telles considérations.

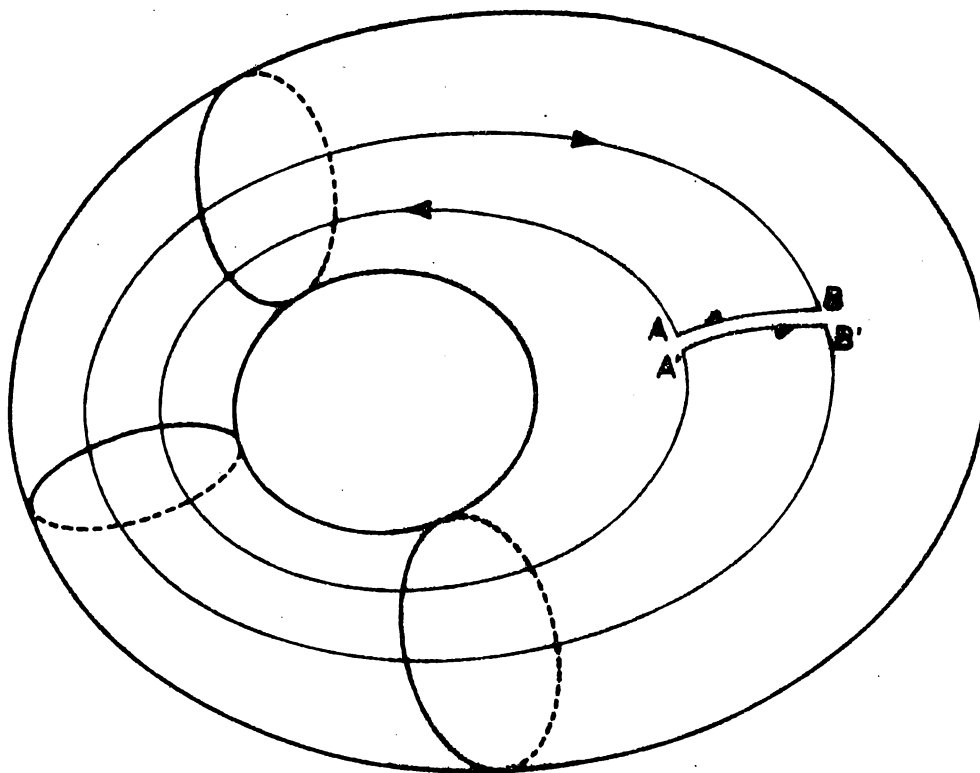
Nous pouvons alors résumer le résultat principal de la présente section de la façon suivante :

Dans un domaine à connexion linéaire simple, tout champ de déformations régulier peut être induit par un changement de configuration.

Nous verrons dans la section suivante que cette proposition, pour être vraie dans un domaine à connexion linéaire multiple, requiert du champ des déformations des propriétés supplémentaires.

5.2. Compatibilité des déformations dans un domaine à connexion linéaire multiple

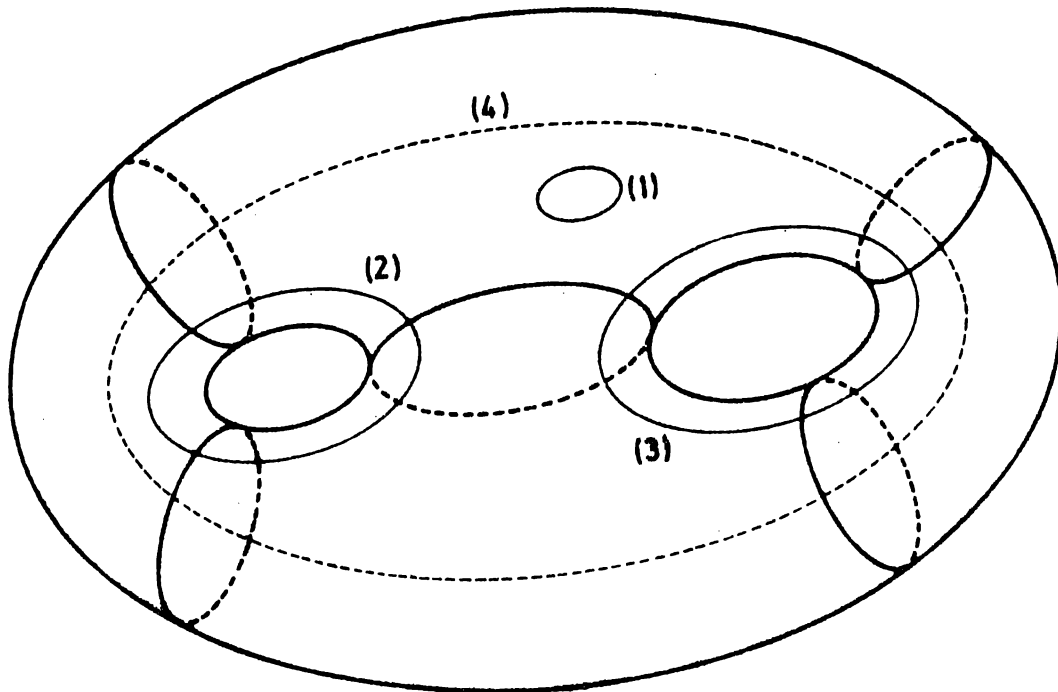
Considérons un domaine homéomorphe à un tore et examinons la nature des circuits fermés qui peuvent y être tracés.



Nous appellerons réconciliables deux circuits fermés qui peuvent être ramenés l'un à l'autre par déformation continue sans quitter le domaine. Tous les circuits réductibles sont réconciliables et appartiennent ainsi à une classe d'équivalence. Mais, le domaine considéré comporte aussi des circuits irréductibles tels que $AA'A$ ou $BB'B$; ils ne sont pas réconciliables avec les circuits réductibles mais sont réconciliables entre-eux; ils forment une seconde classe d'équivalence.

Un tel domaine, qui contient deux classes d'équivalence de circuits fermés, est, par définition, à connexion linéaire double.

Le domaine suivant, homéomorphe à un double tore, est à connexion linéaire triple.



Ses classes d'équivalences sont par exemple constituées des circuits fermés réductibles, dont un représentant est le circuit (1), des circuits irréductibles de type (2) et des circuits irréductibles de type (3). Le circuit de type (4) en traits interrompus est réconciliable à l'ensemble constitué d'un circuit (2) et d'un circuit (3) et n'est pas considéré comme un élément d'une nouvelle classe d'équivalence.

Revenons au cas du domaine à connexion linéaire double et joignons les deux circuits irréductibles AA'A et BB'B par un "pont" constitué de deux arcs AA' et BB' que nous ferons tendre à la limite l'un vers l'autre. Le circuit composé AA'B'BA est réductible; il possède une surface d'appui entièrement contenue dans le domaine. Par conséquent, appliquant le théorème de STOKES comme dans la section précédente, on peut en déduire que tout champ régulier de déformations, intégré par les équations (5.9) puis (5.6), engendre un champ de rotations et déplacements avec les propriétés

$$\int_{AA'} d\omega_q + \int_{A'B'} d\omega_q + \int_{B'B} d\omega_q + \int_{BA} d\omega_q = 0 \quad (5.22)$$

$$\int_{AA'} du_j + \int_{A'B'} du_j + \int_{B'B} du_j + \int_{BA} du_j = 0 \quad (5.23)$$

Examinons la première de ces propriétés d'unicité dans le cas limite où A'B' = AB. La première intégrale devient celle sur un circuit irréductible passant par A

$$\int_{AA'} d\omega_q = \oint_A d\omega_q = \Delta_A \omega_q$$

et est égale au saut subi par ω_q quand on parcourt une fois le circuit dans le sens indiqué. De même pour la troisième intégrale

$$\int_{B'B} d\omega_q = - \oint_B d\omega_q = - \Delta_B \omega_q$$

puisque le circuit irréductible passant par B est parcouru en sens opposé.

Quant aux intégrales sur le pont

$$\int_{A'B'} d\omega_q = \int_{AB} D_j \omega_q dx_j = \int_{AB} e_{piq} D_j \epsilon_{ij} dx_j$$

$$\int_{BA} d\omega_q = - \int_{AB} D_j \omega_q dx_j = - \int_{AB} e_{piq} D_j \epsilon_{ij} dx_j$$

elles se détruisent parce que parcourues sur le même arc en sens opposés avec, par définition d'un champ régulier, continuité des dérivées premières des déformations. L'équation (5.22) est donc équivalente à

$$\Delta_A \omega_q = \Delta_B \omega_q = \Delta \omega_q \quad (5.24)$$

Le saut subi par le vecteur rotation est le même pour tous les circuits irréductibles d'une même classe d'équivalence parcourus une fois dans le même sens. Nous dirons que les composantes ω_q sont polydromes; elles possèdent des constantes cycliques $\Delta \omega_q$.

La propriété d'univalence (5.23) dans le même cas limite donne lieu à une propriété un peu plus compliquée du champ des déplacements.

On a encore

$$\int_{AA'} du_j = \oint_A du_j = \Delta_A u_j$$

$$\int_{B'B} du_j = - \oint_B du_j = - \Delta_B u_j$$

Mais les intégrales sur le pont ne se détruisent plus complètement

$$\begin{aligned} & \int_{A'B'} D_i u_j dx_i + \int_{BA} D_i u_j dx_i \\ &= \int_{AB} [\epsilon_{ij} + e_{ijm} (\omega_m + \Delta\omega_m)] dx_i - \int_{AB} (e_{ij} + e_{ijm} \omega_m) dx_i \\ &= e_{ijm} \Delta\omega_m \int_{AB} dx_i \end{aligned}$$

car, si les déformations sont continues ce qui rend leur contribution nulle, les rotations sont différentes en vertu du résultat (5.24) le long de $A'B'$ et le long de AB . Nous obtenons comme résultat final

$$\Delta_B u_j = \Delta_A u_j + e_{ijm} \Delta \omega_m (x_{iB} - x_{iA}) \quad (5.25).$$

Dans l'ensemble, on peut constater que la polydromie du champ des déplacements pour une déformation régulière peut être définie par six paramètres $(\Delta \omega_m, \Delta_A u_j)$, la formule (5.25) permettant alors de calculer les constantes cycliques du déplacement au niveau d'un autre point B.

Dans un domaine à connexion linéaire multiple toute classe d'équivalence de circuits irréductibles possède ainsi son système propre de paramètres de polydromie. Énonçons quelques-unes des conclusions de cette analyse :

1. Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un champ de déformations dans un domaine à connexion linéaire multiple résulte d'un changement de configuration sont :
 - que le champ soit régulier,
 - que les conditions d'univalence

$$\Delta \omega_p = \oint e_{piq} D_q \epsilon_{ij} dx_j = 0 \quad (5.26)$$

$$\Delta u_j = \oint (\epsilon_{ij} + e_{ijm} \omega_m) dx_i = 0 \quad (5.27)$$

soient satisfaites pour un circuit type irréductible pris dans chaque classe d'équivalence.

Tout changement de configuration étant nécessairement lié à un champ univoque (monodrome) de rotations et de déplacements, les conditions sont nécessaires. Elles seront suffisantes si elles entraînent (5.26) et (5.27) sur n'importe quel circuit fermé du domaine. On a vu dans la section précédente que la régularité du champ avait pour conséquence la satisfaction de (5.26) et (5.27) pour tout circuit réductible.

D'autre part, le résultat (5.24) montre que si la condition (5.26) est satisfaite pour un circuit, elle l'est aussi pour tous les autres circuits

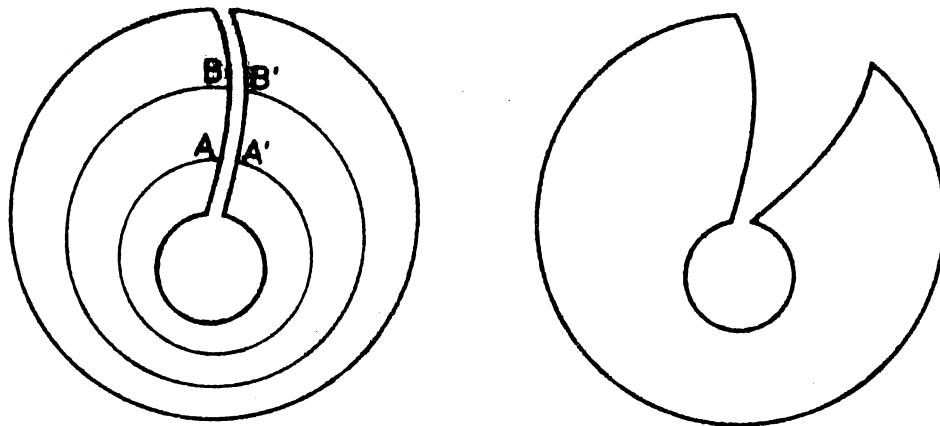
appartenant à la même classe d'équivalence; dans ce cas (5.25) se réduit à

$$\Delta_B u_j = \Delta_A u_j = \Delta u_j$$

et la même conclusion peut être tirée en ce qui concerne la condition (5.27).

Par opposition aux conditions de compatibilité (5.10) qui peuvent être qualifiées de "locales", les conditions additionnelles (5.26) et (5.27) sont des conditions de compatibilité "globales".

2. Une interprétation possible pour la formation de champs réguliers qui ne vérifient pas les conditions de compatibilité globale est fournie par le concept de dislocation dû à WEINGARTEN et VOLTERRA.



Tout domaine à connexion linéaire multiple peut être ramené à la connexion simple en introduisant, pour chaque classe d'équivalence de circuits irréductibles, une surface de coupure que l'on s'interdit de franchir. La figure montre deux coupures susceptibles d'empêcher la fermeture de tout circuit irréductible dans le domaine à connexion double précédemment considéré.

Chaque coupure possède deux faces et un segment dans une coupure peut être assimilé à un pont entre deux circuits irréductibles de la même classe, la branche A'B' appartenant à une face notée (+), la branche AB à la face opposée notée (-).

Supposons maintenant l'existence d'un champ de déformation régulier dans le domaine. Même s'il ne satisfait pas aux conditions de compatibilité globales, il définit (à un petit déplacement rigide près) un champ de déplacement univoque pour le domaine coupuré, qui est simplement connexe. Il correspond donc à un changement de configuration de ce domaine. Il est donc possible d'annuler toutes les déformations en revenant à une certaine configuration antérieure, c'est-à-dire en appliquant aux différents points les vecteurs déplacements changés de signe. On peut maintenant interpréter les formules (5.24) et (5.25) comme une séparation qui peut se produire entre les deux faces de chaque coupure. Si A dénote un "centre de réduction" choisi sur la coupure et B un point courant de la même coupure, la formule (5.25) démontre que le déplacement relatif entre les deux faces est du type petit déplacement comme un corps rigide. V. VOLTERRA lui a donné le nom de "distorsion" mais dans la terminologie actuelle, c'est une "dislocation".

Partant d'un domaine initialement disloqué, il est donc possible en refermant les coupures d'engendrer un champ de déformations régulier mais violant les conditions de compatibilité globales. On notera qu'à la suite de cette opération, aucune singularité du champ des déformations ne permettra d'identifier les surfaces de coupure primitives.

Nous sommes en présence d'un des mécanismes possibles par lesquels un milieu élastique peut être le siège de tensions initiales qui ne peuvent être relaxées par un changement de configuration.

On voit qu'il a son origine dans l'existence de circuits fermés irréductibles et correspond très exactement à la notion d'hyperstaticité cinématique de la Théorie des Structures.

5.3. Allongements principaux et invariants fondamentaux de la déformation

Le tenseur des déformations infinitésimales étant symétrique possède en chaque point des directions principales associées aux valeurs propres qui sont ici les "allongements principaux" notés ϵ_i ($i = 1, 2, 3$)
Les invariants fondamentaux correspondants seront notés :

$$I_1 = \epsilon_{ii} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = D_i u_i = \operatorname{div} \vec{u} \quad (5.28)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} e_{ijk} e_{mnk} \epsilon_{im} \epsilon_{jn} = \frac{1}{2} [\epsilon_{ii} \epsilon_{jj} - \epsilon_{ij} \epsilon_{ji}]$$

$$= \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2 \epsilon_3 + \epsilon_3 \epsilon_1$$

$$I_3 = \det \{ \epsilon_{ij} \} = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3$$

On notera que, en ne gardant que les termes petits du premier ordre,

$$\det J = e_{ijk} (\delta_{1i} + \epsilon_{1i}) (\delta_{2j} + \epsilon_{2j}) (\delta_{3k} + \epsilon_{3k})$$

$$= e_{123} + \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = 1 + I_1 \quad (5.29)$$

et que le premier invariant fondamental représente en conséquence l'accroissement spécifique de volume. Enfin, toujours selon la théorie générale, le second invariant Γ_2 du tenseur déviateur

$$\hat{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} I_1 \delta_{ij} \quad (5.30)$$

a pour valeur

$$\Gamma_2 = -\frac{1}{2} \hat{\epsilon}_{ij} \hat{\epsilon}_{ji} = -\frac{1}{6} \{ (\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + (\epsilon_{22} - \epsilon_{33})^2 + (\epsilon_{33} - \epsilon_{11})^2 + 6(\epsilon_{23}^2 + \epsilon_{31}^2 + \epsilon_{12}^2) \}$$

(5.31)

5.4. Tensions principales et invariants fondamentaux de l'état de tension

Comme on l'a déjà observé, il n'y a pas de distinction à opérer en pratique entre les tensions de Piola et les tensions vraies, quand les changements de configuration sont infinitésimaux. On adoptera dès lors la notation τ_{ij} pour le tenseur des tensions qui sera symétrique.

En chaque point, ce tenseur possède au moins un système de directions principales associées aux valeurs propres "tensions principales" qui seront notées σ_i ($i = 1, 2, 3$).

Les invariants fondamentaux seront notés

$$J_1 = \tau_{ii} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$J_2 = \frac{1}{2} e_{ijk} e_{mnk} \tau_{im} \tau_{jn} = \frac{1}{2} [\tau_{ii} \tau_{jj} - \tau_{ij} \tau_{ji}]$$

$$= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1$$

$$J_3 = \det \{ \tau_{ij} \} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

Le second invariant fondamental du tenseur déviateur

$$\hat{\tau}_{ij} = \tau_{ij} - \frac{1}{3} J_1 \delta_{ij} \tag{5.33}$$

sera noté

$$\Sigma_2 = -\frac{1}{2} \hat{\tau}_{ij} \hat{\tau}_{ji} = -\frac{1}{6} \{ (\tau_{11} - \tau_{22})^2 + (\tau_{22} - \tau_{33})^2 + (\tau_{33} - \tau_{11})^2 + 6(\tau_{23}^2 + \tau_{31}^2 + \tau_{12}^2) \}$$

(5.34).

5.5. Tensions et déformations octaédrales

Reprenons les formules de Cauchy (2.3) qui fournissent les composantes du vecteur traction de surface en fonction du tenseur des tensions et de l'orientation de la normale à la surface. Comme la configuration est celle de référence et les tensions de Piola sont assimilées aux tensions vraies

$$t_j = n_i \tau_{ij} \quad (5.34)$$

Supposons maintenant le repère orienté selon un système de directions principales, de sorte que le tenseur des tensions ait une matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Alors (5.34) se réduit à

$$t_1 = n_1 \sigma_1 \quad t_2 = n_2 \sigma_2 \quad t_3 = n_3 \sigma_3 \quad (5.35)$$

La tension normale à une facette s'exprime par

$$t_n = n_i t_i = n_1^2 \sigma_1 + n_2^2 \sigma_2 + n_3^2 \sigma_3 \quad (5.36)$$

de sorte que, sur chacune des 3 facettes d'un octaèdre, également inclinées sur les axes principaux ($n_i = \pm 1/\sqrt{3}$), la tension normale prend la même valeur

$$t_{on} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} J_1 \quad (5.37)$$

dite "tension octaédrale normale".

On peut évaluer la tension tangentielle totale sur une facette inclinée quelconque par le théorème de Pythagore

$$t_t^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 - t_n^2 = n_1^2 n_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + n_2^2 n_3^2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + n_3^2 n_1^2 (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \quad (5.38)$$

Pour les facettes de l'octaèdre, ceci donne

$$(3 t_{ot})^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = -6 \Sigma_2 \quad (5.39)$$

Les tensions octaédrales normale et tangentielle se trouvent ainsi être reliées respectivement au premier invariant de l'état de tension et au second invariant de son déviateur.

Un calcul similaire peut évidemment être fait pour le tenseur des déformations. Il conduit à définir un allongement octaédral

$$\epsilon_{on} = \frac{1}{3} (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) = \frac{1}{3} I_1 \quad (5.40)$$

et un glissement octaédral

$$\gamma_{ot} = 2 \epsilon_{ot}$$

tel que

$$(3 \epsilon_{ot})^2 = (\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2 = -6 \Gamma_2 \quad (5.41)$$

Notons qu'en général les directions principales de l'état de déformation et de l'état de tension en un même point ne coïncident que fortuitement. Ils coïncident cependant toujours quand les équations constitutives sont celles d'un milieu isotrope.

5.6. Cercles de MOHR

Si les grandeurs octaédrales fournissent une illustration de certains invariants fondamentaux, les cercles de MOHR sont une illustration graphique du caractère tensoriel des tenseurs symétriques de second rang dans l'espace euclidien tri-dimensionnel.

Éliminons n_2^2 et n_3^2 entre la relation (5.36), réécrite ici sous la forme

$$t_n - n_1^2 \sigma_1 = n_2^2 \sigma_2 + n_3^2 \sigma_3 \quad ,$$

la relation (5.38), sous la forme

$$t_t^2 + t_n^2 - n_1^2 \sigma_1^2 = n_2^2 \sigma_2^2 + n_3^2 \sigma_3^2$$

et la relation entre cosinus directeurs

$$1 - n_1^2 = n_2^2 + n_3^2$$

Il vient

$$\det \begin{vmatrix} t_n - n_1^2 \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ t_t^2 + t_n^2 - n_1^2 \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ 1 - n_1^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou, après réduction,

$$t_t^2 + \left(t_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + n_1^2 (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)$$

(5.42)

Dans un graphe (t_n, t_t) c'est l'équation d'un lieu dépendant encore du paramètre n_1^2 .

Si on maintient n_1^2 constant on réalise de fait une exploration conique des facettes dont la normale fait un angle constant avec la première direction principale (dans les deux sens d'orientation). Pour les besoins de la discussion, il est nécessaire d'introduire l'hypothèse

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (5.43)$$

à laquelle il est toujours possible de se ramener en modifiant l'ordre de numération des directions principales.

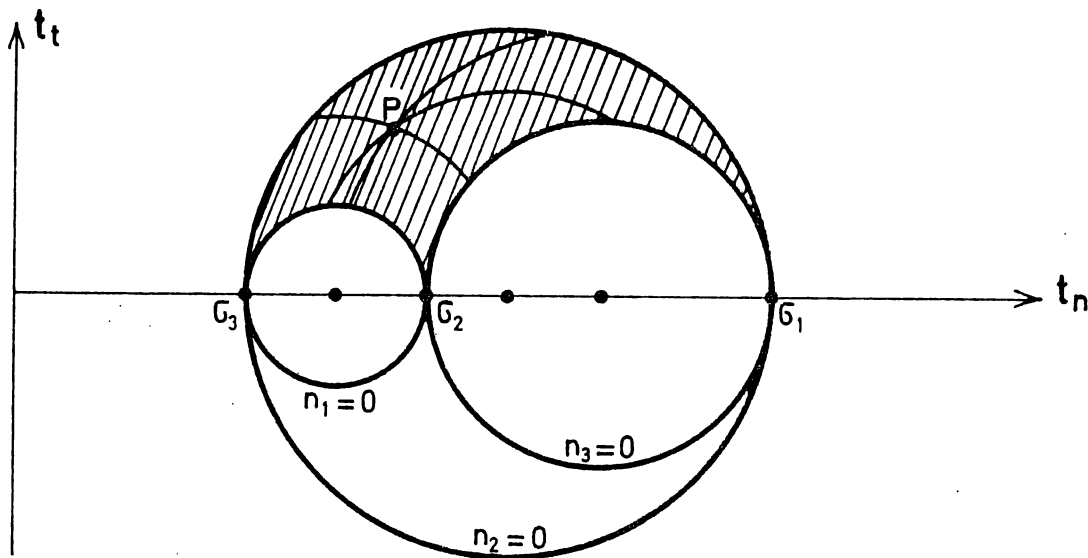
Le lieu (5.42) est une circonférence dont le centre a pour coordonnées

$$\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0 \right)$$

et dont le carré du rayon figure au second membre.

Pour $n_1 = 0$, c'est-à-dire en explorant les facettes parallèles à la première direction principale, on a le Cercle de Mohr $n_1 = 0$.

On observera que, en vertu de (5.43), la circonférence associée à une valeur de n_1^2 différente de zéro est de rayon plus grand; c'est, par exemple, celle passant par le point P de la figure.



Elle est alors limitée à un arc aux extrémités duquel soit n_2 , soit n_3 sont nuls avant de devenir imaginaires. Quand n_1^2 atteint son maximum = 1, l'arc se réduit au seul point $t_n = \sigma_1$, $t_t = 0$. Une élimination similaire de n_3^2 et n_1^2 conduit à la formule analogue

$$t_t^2 + \left(t_n - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 + n_2^2 (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)$$

qui dérive directement de (5.42) par permutation cyclique des indices. Elle correspond à une exploration conique autour de la seconde direction principale. Cette fois, pour $n_2^2 > 0$, le rayon de la circonférence est plus petit que celui du cercle de Mohr $n_2 = 0$ et le point limite pour $n_2^2 = 1$ est $(\sigma_2, 0)$.

Enfin, pour l'exploration conique autour de la troisième direction principale

$$t_t^2 + \left(t_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + n_3^2 (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)$$

et le rayon pour $n_3^2 > 0$ est à nouveau plus grand que celui du cercle de Mohr $n_3 = 0$. Le point limite pour $n_3^2 = 1$ est $(\sigma_3, 0)$.

La représentation graphique de Mohr montre (aire hachurée) quelles sont les combinaisons possibles de tensions normales et tangentielles.

Elle montre aussi l'existence de trois maxima relatifs de la tension tangentielle

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

dont le dernier est le maximum absolu. Ils correspondent aux orientations respectives

$$n_1 = 0 \quad n_2^2 = n_3^2 = \frac{1}{2}$$

$$n_2 = 0 \quad n_3^2 = n_1^2 = \frac{1}{2}$$

$$n_3 = 0 \quad n_1^2 = n_2^2 = \frac{1}{2}$$

5.7. Statique et travaux virtuels

La symétrie

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (5.44)$$

du tenseur des tensions est, comme on l'a vu, l'expression (exacte pour les tensions vraies, approximative pour les tensions de Piola) de l'équilibre de rotation élémentaire. Les équations d'équilibre de translation

$$L_j(\tau_{mn}) = -D_i \tau_{ij} = \rho_0 g_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (5.45)$$

mettent en évidence au premier membre les opérateurs différentiels agissant sur les tensions pour équilibrer les forces massiques. La dualité existant entre statique et cinématique découle du caractère "adjoint" des opérateurs différentiels agissant sur les variables adjointes u_j pour exprimer les déformations

$$M_{ij}(u_m) = \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) = \epsilon_{ij}$$

En effet, l'expression

$$\tau_{ij} M_{ij}(u_m) - u_j L_j(\tau_{mn}) = \frac{1}{2} \tau_{ij} (D_i u_j + D_j u_i) + u_j D_i \tau_{ij}$$

se transforme, eu égard à (5.44), en une divergence

$$\tau_{ij} D_i u_j + u_j D_i \tau_{ij} = D_i (u_j \tau_{ij})$$

Par intégration sur le volume, application du théorème de la divergence et par l'équation de Cauchy pour les tractions de surface

$$n_i \tau_{ij} = t_j$$

on retrouve le théorème des travaux virtuels

$$\int_V (\tau_{ij} \varepsilon_{ij} - \rho_0 u_j g_j) dV = \int_{\partial V} u_j n_i \tau_{ij} dS = \int_{\partial V} t_j u_j dS \quad (5.46)$$

On peut dire par conséquent que

u_j et τ_{ij} sont des variables adjointes

τ_{ij} et ε_{ij} sont des variables conjuguées.

5.3. Développement Taylorien de l'énergie de déformation

L'énergie de déformation spécifique est une fonction des éléments du tenseur des déformations, telle que dans un accroissement local arbitraire des déformations

$$\delta W = \tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \quad (5.47)$$

Sous forme développée, groupant les termes symétriques en τ_{ij} ,

$$\begin{aligned} \delta W = & \tau_{11} \delta \varepsilon_{11} + \tau_{22} \delta \varepsilon_{22} + \tau_{33} \delta \varepsilon_{33} \\ & + \tau_{23} \delta \gamma_{23} + \tau_{31} \delta \gamma_{31} + \tau_{12} \delta \gamma_{12} \end{aligned}$$

où, pour rappel, les glissements sont définis par

$$\gamma_{23} = 2 \varepsilon_{23} \quad \gamma_{31} = 2 \varepsilon_{31} \quad \gamma_{12} = 2 \varepsilon_{12}$$

Les équations constitutives sont donc exprimables de façon très générale sous la forme énergétique

$$\tau_{11} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{11}} \quad \tau_{22} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{22}} \quad \tau_{33} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{33}} \quad (5.48)$$

$$\tau_{23} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{23}} \quad \tau_{31} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{31}} \quad \tau_{12} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{12}}$$

Rappelons aussi que, à condition de considérer W comme une fonction de ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{33} et de

$$\gamma_{23} = \epsilon_{23} + \epsilon_{32} \quad \gamma_{31} = \epsilon_{31} + \epsilon_{13} \quad \gamma_{12} = \epsilon_{12} + \epsilon_{21} ,$$

la distinction formelle ainsi introduite entre ϵ_{ij} et ϵ_{ji} pour $i \neq j$ permet de rassembler les 6 formules (5.48) dans l'unique

$$\tau_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}}$$

avec, de plus, inclusion automatique de la symétrie $\tau_{ji} = \tau_{ij}$.

Supposons maintenant que W soit une fonction suffisamment régulière de ses arguments pour être développée en série de Taylor. Comme les ϵ_{ij} sont extrêmement petits, il est assez naturel de limiter le développement aux termes du second degré inclusivement :

$$W = W_0 + \epsilon_{ij} \left(\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_0 + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \epsilon_{pq} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{pq}} \right)_0 \quad (5.50)$$

W_0 est la valeur de l'énergie dans l'état de référence ($\epsilon_{ij} = 0$) et peut d'ailleurs, sans nuire à la généralité, être annulée par convention sur le niveau de référence de l'énergie.

L'indice zéro affectant les dérivées partielles indique qu'elles sont prises aussi dans l'état de référence. D'autre part, en vertu de (5.49), on peut écrire

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_0 = \tau_{ij}^0 \quad (5.51)$$

Ce sont les tensions initiales qui peuvent exister dans l'état de référence et dont la connaissance expérimentale détaillée pose d'ailleurs un problème difficile.

Finalement, avec $W_0 = 0$ et la notation

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{pq}} \right)_0 = C_{ij}^{pq} \quad (5.52),$$

on peut présenter le développement Taylorien sous la forme

$$W = \tau_{ij}^0 \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} C_{ij}^{pq} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{pq} \quad (5.53),$$

tandis que l'application des relations (5.49) fournit les équations constitutives explicites

$$\tau_{ij} - \tau_{ij}^0 = C_{ij}^{pq} \varepsilon_{pq} \quad (5.54).$$

La limitation du développement aux termes du second degré correspond donc à postuler une linéarité de type constitutif entre tensions et déformations; la théorie dite linéaire de l'élasticité repose donc simultanément sur la linéarisation de type géométrique et celle de type constitutif. Il est alors permis, dans ce cadre, d'appliquer le principe de superposition des solutions.

On observera que (5.53) peut aussi s'écrire

$$W = \tau_{ij}^0 \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} (\tau_{ij} - \tau_{ij}^0) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} (\tau_{ij} + \tau_{ij}^0) \quad (5.55).$$

Ce résultat, conséquence de la linéarité des équations constitutives, est le Théorème de Clapeyron intérieur. Il est le plus souvent présenté dans le cas particulier où l'on fait l'hypothèse d'un état de référence dit "naturel" où les tensions initiales seraient nulles.

Les coefficients (5.52) sont appelés modules d'élasticité. Ils forment un tenseur cartésien de rang quatre, dont le nombre de composantes est en principe égal à $3^4 = 81$.

Toutefois leur définition même de dérivées partielles secondes par rapport aux composantes d'un tenseur symétrique leur confère les propriétés de symétrie suivantes

$$C_{ij}^{Pq} = C_{ji}^{Pq} \quad \text{symétrie par rapport aux indices inférieurs}$$

$$C_{ij}^{Pq} = C_{ij}^{QP} \quad \text{symétrie par rapport aux indices supérieurs}$$

$$C_{ij}^{Pq} = C_{pq}^{ij} \quad \text{symétrie par rapport aux groupes d'indices.}$$

Le nombre de composantes distinctes est alors réduit à 21, ce qui est directement confirmé par la formule (5.53), où ils jouent le rôle de coefficients d'une forme quadratique à 6 variables distinctes.

Dans l'étude des propriétés d'isotropie de divers milieux élastiques, nous serons, pour la commodité, amenés à caractériser le milieu par la matrice du système linéaire (5.54). Si nous développons les sommations en tenant compte des symétries

$$\begin{aligned} \tau_{ij} - \tau_{ij}^0 = & C_{ij}^{11} \epsilon_{11} + C_{ij}^{22} \epsilon_{22} + C_{ij}^{33} \epsilon_{33} + C_{ij}^{23} (\epsilon_{23} + \epsilon_{32}) \\ & + C_{ij}^{31} (\epsilon_{31} + \epsilon_{13}) + C_{ij}^{12} (\epsilon_{12} + \epsilon_{21}) \quad , \end{aligned}$$

de sorte que, sous forme matricielle et dans un ordre conventionnel

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (5.57)$$

la matrice (symétrique) en question est

$$C = \begin{pmatrix} c_{11}^{11} & c_{11}^{22} & c_{11}^{33} & c_{11}^{23} & c_{11}^{31} & c_{11}^{12} \\ c_{22}^{11} & c_{22}^{22} & c_{22}^{33} & c_{22}^{23} & c_{22}^{31} & c_{22}^{12} \\ c_{33}^{11} & c_{33}^{22} & c_{33}^{33} & c_{33}^{23} & c_{33}^{31} & c_{33}^{12} \\ c_{23}^{11} & c_{23}^{22} & c_{23}^{33} & c_{23}^{23} & c_{23}^{31} & c_{23}^{12} \\ c_{31}^{11} & c_{31}^{22} & c_{31}^{33} & c_{31}^{23} & c_{31}^{31} & c_{31}^{12} \\ c_{12}^{11} & c_{12}^{22} & c_{12}^{33} & c_{12}^{23} & c_{12}^{31} & c_{12}^{12} \end{pmatrix} \quad (5.58)$$

La matrice de la forme quadratique de la densité d'énergie est la même à condition de prendre comme variables $(\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12})$.

5.9. Stabilité infinitésimale

Même en présence de tensions initiales, nous ne considérerons jamais, sauf mention explicite du contraire, que des configurations initiales stables. Il s'agit ici de stabilité vis-à-vis de changements infinitésimaux de configuration en l'absence de toutes forces extérieures; cette stabilité infinitésimale exige que l'énergie de déformation

$$U = \int_V (\tau_{ij}^0 \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} c_{ij}^{pq} \epsilon_{ij} \epsilon_{pq}) dV \geq 0 \quad (5.59)$$

possède un minimum ($= 0$ en raison de la convention $W_0 = 0$) pour $\epsilon_{ij} \equiv 0$ vis-à-vis de tous les changements infinitésimaux de configuration possibles, c'est-à-dire tels qu'il existe un champ univoque de petits déplacements

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (5.60)$$

respectant la continuité physique du milieu. L'égalité à zéro dans (5.59) ne peut alors avoir lieu que si le champ des déplacements est celui (infinitésimal) d'un corps rigide, auquel cas on sait que le champ des déformations est identiquement nul. Nous supposons qu'aucune contrainte de nature cinématique n'est imposée sur la frontière ∂V dont la présence limiterait ou empêcherait totalement l'existence de tels modes rigides de déplacement. En fait, la frontière sera considérée comme entièrement libre.

La condition (5.59) exige, pour être satisfaite, que la partie linéaire soit nulle et la partie quadratique définie positive dans les variables ϵ_{ij} contraintes par (5.60). La nullité de la partie linéaire

$$\int_V \tau_{ij}^0 \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) dV = \int_V \tau_{ij}^0 D_i u_j dV = 0$$

pour tout champ u_j continu ainsi que ses dérivées premières, devient à la suite d'une intégration par parties,

$$\int_{\partial V} (n_i \tau_{ij}^0) u_j dS - \int_V u_j (D_i \tau_{ij}^0) dV = 0$$

et, pour être satisfaite, demande que le champ des tensions initiales soit un champ auto-équilibré; en chaque point intérieur, les tensions initiales vérifient les équations d'équilibre de translation sans force massique

$$D_i \tau_{ij}^0 = 0 \quad \text{dans } V \quad (5.61)$$

et vérifient les équations d'équilibre en surface sans traction appliquée de l'extérieur

$$n_i \tau_{ij}^0 = 0 \quad \text{sur } \partial V \quad (5.62)$$

Les tensions initiales d'une configuration initiale stable ne peuvent être relaxées (c'est-à-dire disparaître complètement) par un changement de configuration respectant la continuité physique du milieu.

5.10. La condition de stabilité infinitésimale de Hadamard

Compte tenu des propriétés de symétrie (5.56), la seconde partie du critère de stabilité infinitésimale peut être mise sous la forme

$$\frac{1}{2} \int_V C_{ij}^{pq} \epsilon_{ij} \epsilon_{pq} dV = \frac{1}{2} \int_V C_{ij}^{pq} D_i u_j D_j u_q dV \geq 0 \quad (5.64)$$

et constitue une contrainte fondamentale à laquelle sont soumis les modules d'élasticité du milieu. Cette contrainte est facile à exploiter pour les milieux élastiques homogènes, c'est-à-dire ceux caractérisés par une matrice de modules qui est la même en tout point. Le théorème suivant est en effet de vérification immédiate :

Théorème : Dans un milieu élastique homogène stable, sans condition cinématique aux frontières, la matrice des modules est définie positive.

La condition est de toute évidence suffisante pour le critère (5.64). Elle est aussi nécessaire car, en l'absence de condition cinématique aux frontières, on peut utiliser un champ de déplacements linéaire

$$u_j = \alpha_j + \alpha_{ji} x_i$$

pour lequel le champ des déformations

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\alpha_{ji} + \alpha_{ij})$$

est arbitraire et constant, de sorte que la condition de stabilité se réduit dans ce cas particulier à

$$\frac{1}{2} C_{ij}^{pq} \epsilon_{ij} \epsilon_{pq} \int_V dV \quad \text{définie positive.}$$

Quand le milieu n'est pas homogène, se pose le problème difficile de trouver des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité portant sur les matrices locales des modules. Une condition locale nécessaire a été établie par Hadamard dans le cas où la matrice varie de point en

point d'une façon suffisamment régulière. Il considère à cet effet une perturbation de déplacement localisée dans un pavé au voisinage de l'origine (qui est en fait, moyennant une translation, un point intérieur arbitraire du milieu)

$$u_j = a_j \phi(x)$$

où a_j est un vecteur arbitraire et

$$\phi(x) = (x_1^2 - \epsilon_1^2)^2 (x_2^2 - \epsilon_2^2)^2 (x_3^2 - \epsilon_3^2)^2 \quad \text{pour} \quad -\epsilon_i \leq x_i \leq \epsilon_i$$

$$\equiv 0 \quad \text{en dehors du pavé.}$$

Le déplacement et ses gradients sont alors continus aux frontières du pavé. On pose

$$C_{ij}^{pq} a_j a_q = S_i^p$$

qui est un tenseur cartésien de second rang et symétrique; on peut donc toujours considérer les axes orientés selon un système de directions principales dans lequel ce tenseur possède à l'origine une structure diagonale. Alors, moyennant une régularité suffisante de S_i^p à l'origine, (5.64) tend à la limite des $\epsilon_i \rightarrow 0$ vers l'expression

$$\frac{1}{2} S_1 \int_V (D_1 \phi)^2 dV + \frac{1}{2} S_2 \int_V (D_2 \phi)^2 dV + \frac{1}{2} S_3 \int_V (D_3 \phi)^2 dV \quad .$$

Les intégrales ne doivent être étendues qu'au pavé et sont élémentaires. On trouve

$$\int_V (D_1 \phi)^2 dV = 3 \left(\frac{256}{5 \cdot 7 \cdot 9} \right)^3 \frac{(\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3)^9}{\epsilon_1^2}$$

et on en conclut que l'expression

$$\frac{S_1}{\epsilon_1} + \frac{S_2}{\epsilon_2} + \frac{S_3}{\epsilon_3}$$

doit être définie positive, ce qui implique

$$S_1 > 0 \quad S_2 > 0 \quad S_3 > 0 \quad .$$

Le tenseur S_i^p est donc défini positif puisque ses valeurs principales sont positives; en d'autres termes, la forme quadratique

$$S_i^p b_i b_p \quad \text{est définie positive.}$$

Finalement, la condition nécessaire de stabilité infinitésimale de Hadamard est que, en tout point, la forme biquadratique

$$C_{ij}^{pq} b_i b_p a_j a_q \quad \text{soit définie positive.} \quad (5.65)$$

Comparée à la condition locale

$$C_{ij}^{pq} \epsilon_{ij} \epsilon_{pq} \quad \text{définie positive} \quad (5.66)$$

qui est-elle, suffisante, la condition de Hadamard est plus faible.

On le voit aisément en la mettant, grâce aux propriétés (5.56), sous la forme équivalente

$$C_{ij}^{pq} (b_i a_j + b_j a_i)(b_p a_q + b_q a_p) \quad \text{définie positive}$$

qui n'est qu'un cas particulier de (5.66). En effet, le tenseur $(b_i a_j + b_j a_i)$ n'est pas un tenseur symétrique de type général.

En notations matricielles évidentes, ce tenseur s'écrit

$$T = b a^T + a b^T$$

et son équation aux valeurs propres

$$T c = \lambda c$$

a toujours une solution $\lambda = 0$ pour une direction principale c qui est orthogonale à la fois au vecteur a et au vecteur b : $a^T c = 0$, $b^T c = 0$. Il s'en suit que les inégalités auxquelles sont soumis les modules d'élasticité pour satisfaire la condition de Hadamard sont moins restrictives que celles assurant à leur matrice la définie positivité.

On a vu que la condition de Hadamard n'est pas suffisante pour la stabilité infinitésimale dans le cas d'un milieu homogène. L'étude des cas d'inhomogénéité pour lesquels elle le serait éventuellement reste à faire.

5.11. Isotropie et anisotropie

Les équations (5.54), (5.61) et (5.62) permettent de simplifier un peu l'élasticité linéaire en observant que la détermination des tensions initiales et celle des tensions additionnelles dues aux changements de configuration sont des problèmes séparables.

Du fait que les tensions initiales dans une configuration stable forment un champ auto-équilibré, les tensions additionnelles satisfont aux mêmes équations d'équilibre avec les forces extérieures que les tensions totales. On ne modifie donc pas le problème de la détermination des tensions additionnelles en faisant l'hypothèse que les tensions initiales sont nulles (hypothèse dite de l'état naturel). Ceci revient à ne considérer dans la densité d'énergie de déformation que la partie quadratique dépendant des modules d'élasticité, ce que nous ferons dorénavant.

La détermination des tensions initiales est un problème extrêmement complexe de physique des matériaux, tant sur le plan théorique que sur le plan expérimental. Dans les rares cas où les tensions initiales sont considérées comme connues, il suffit de les ajouter aux tensions additionnelles pour obtenir les tensions totales.

Nous allons maintenant envisager quelques hypothèses particulières, fréquemment utilisées pour simplifier le tenseur des modules d'élasticité.

Isotropie

Un matériau élastique isotrope est celui qui ne présente aucune direction préférentielle. Son énergie de déformation doit pouvoir s'exprimer en fonction des invariants fondamentaux du tenseur des déformations de façon à présenter la même formulation, quelle que soit l'orientation choisie pour le repère cartésien.

Comme nous nous bornons pour la densité d'énergie aux formes quadratiques homogènes, il n'y aura que deux combinaisons d'invariants fondamentaux distincts à considérer. À partir des combinaisons quadratiques homogènes I_1^2 et Γ_2 on peut écrire pour un matériau isotrope la forme à deux modules K et G

$$W = \frac{1}{2} K I_1^2 - 2 G \Gamma_2 \quad (5.67)$$

Rappelons que

$$I_1 = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$$

et que, selon (5.31), on peut écrire

$$\begin{aligned} -2 \Gamma_2 &= \frac{1}{3} (\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + \frac{1}{3} (\epsilon_{22} - \epsilon_{33})^2 + \frac{1}{3} (\epsilon_{33} - \epsilon_{11})^2 \\ &+ \frac{1}{2} (\gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2 + \gamma_{12}^2) \end{aligned}$$

de sorte que l'application des formules (5.43) conduit aux relations constitutives explicites

$$\tau_{11} = (K + \frac{4}{3} G) \epsilon_{11} + (K - \frac{2}{3} G) (\epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \quad (5.68)$$

pour une tension normale

$$\tau_{23} = G \gamma_{23} \quad (5.69)$$

pour une tension tangentielle, les autres éléments du tenseur étant simplement obtenus par une permutation cyclique des indices.

La dernière relation justifie que l'on appelle G le module de glissement.

D'autre part, formant la moyenne arithmétique des tensions normales :

$$\frac{\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}}{3} = K (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) = K I_1 \quad (5.70)$$

et se rappelant la signification du premier invariant comme changement de volume spécifique, on obtient la justification de l'appellation de K comme module de compressibilité.

Un matériau isotrope peut donc être caractérisé par ces deux modules.

S'ils sont tous deux positifs

$$G > 0 \quad K > 0 \quad (5.71)$$

on a une condition nécessaire et suffisante pour que la densité d'énergie soit localement définie positive. La matrice des modules se présente sous la forme

$$\begin{pmatrix} K + \frac{4}{3} G & K - \frac{2}{3} G & K - \frac{2}{3} G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3} G & K + \frac{4}{3} G & K - \frac{2}{3} G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3} G & K - \frac{2}{3} G & K + \frac{4}{3} G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix} \quad (5.72)$$

Le système de modules de LAME est lié au précédent par

$$\lambda = K - \frac{2}{3} G \quad \mu = G \quad (5.73)$$

et donne aux équations constitutives la forme simple

$$\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{qq} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij} \quad (\varepsilon_{qq} = I_1) \quad (5.74)$$

équivalente à la présentation des modules généraux sous la forme

$$C_{ij}^{pq} = \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{jp} \delta_{iq}) \quad (5.75)$$

qui s'accorde bien avec les propriétés de symétrie requises et le fait qu'un tenseur isotrope de rang 4 doit être une combinaison linéaire des tenseurs isotropes $\delta_{ij} \delta_{pq}$, $\delta_{ip} \delta_{jq}$ et $\delta_{jp} \delta_{iq}$.
La densité d'énergie prend alors la forme

$$W = \frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_{qq})^2 + \mu \varepsilon_{pq} \varepsilon_{qp} \quad (5.76).$$

La formule (5.75) permet un examen rapide de la condition de stabilité infinitésimale de Hadamard (5.65), qui se réduit ici à

$$\lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + 2 \mu (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b}) \geq 0$$

soit encore, si θ est l'angle entre les deux vecteurs, à

$$\lambda \cos^2 \theta + 2 \mu > 0$$

Finalement, on obtient comme conditions de Hadamard

$$\mu > 0 \quad \text{et} \quad \lambda + 2 \mu > 0 \quad .$$

Revenant aux modules de compressibilité et de glissement, elles deviennent

$$G > 0 \quad K > -\frac{4}{3} G \quad (5.77)$$

Il suffit donc que les termes diagonaux de la matrice (5.72) soient positifs. On observera que, si les conditions de Hadamard autorisent un module de compressibilité négatif (mais borné inférieurement), elles coïncident exactement avec les conditions de vitesse de propagation réelles pour les ondes S et P dans le milieu. Cette remarque sera amplifiée plus tard quand on verra le rôle joué par la condition générale de Hadamard pour le caractère elliptique des équations aux dérivées partielles de l'élasticité linéaire.

Le système de modules (G,K) est conceptuellement le plus simple pour un matériau isotrope et donne un sens à la décomposition des états de déformation et de tension en une partie isotrope (ou sphérique) et un déviateur, car on déduit facilement de (5.68) et (5.69) que les invariants correspondants sont deux à deux proportionnels

$$J_1 = 3 K I_1 \qquad \Sigma_2 = 4 G^2 \Gamma_2 \qquad (5.76).$$

Dans un milieu isotrope, le mécanisme de changement de volume avec préservation de la similitude sous tension sphérique et le mécanisme de distortion sans changement de volume sous l'action du déviateur de l'état de tension fonctionnent indépendamment. Les directions principales de l'état de déformation coïncident partout localement avec celles de l'état de tension. Ceci n'est plus vrai en général dans les milieux anisotropes. Dans les applications techniques, on n'utilise guère le système de modules (G,K) ou celui de Lamé. Ceci tient à la détermination expérimentale des modules par l'essai de traction simple sur une éprouvette prismatique. Si l'axe 1 est orienté selon l'axe de l'éprouvette, l'application de forces de traction F axiales sur les extrémités provoque un état de tension dans la partie prismatique qui se réduit à

$$\tau_{11} = \frac{F}{S}$$

où S est la section de l'éprouvette.

Les autres composantes de l'état de tension sont nulles et l'on a donc par les formules (5.69)

$$\gamma_{23} = 0 \quad \gamma_{31} = 0 \quad \gamma_{12} = 0$$

et par les formules (5.68)

$$\tau_{11} = \left(K + \frac{4}{3} G\right) \epsilon_{11} + \left(K - \frac{2}{3} G\right) (\epsilon_{22} + \epsilon_{33})$$

$$0 = \left(K + \frac{4}{3} G\right) \epsilon_{22} + \left(K - \frac{2}{3} G\right) (\epsilon_{33} + \epsilon_{11})$$

$$0 = \left(K + \frac{4}{3} G\right) \epsilon_{33} + \left(K - \frac{2}{3} G\right) (\epsilon_{11} + \epsilon_{22})$$

Par soustraction l'une de l'autre, les deux dernières montrent que

$$\epsilon_{22} = \epsilon_{33}$$

et que dès lors on peut définir un coefficient ν par

$$\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\nu \epsilon_{11} \quad \text{avec} \quad \nu = \frac{K - \frac{2}{3} G}{2\left(K + \frac{1}{3} G\right)} \quad (5.79)$$

Ce rapport s'appelle le coefficient de Poisson; c'est une mesure de la réduction des dimensions transversales qui accompagne expérimentalement l'allongement de l'éprouvette. Il est positif pour tous les corps connus, ce qui indique que normalement $K > \frac{2}{3} G$. Sa limite supérieure quand K tend vers l'infini est $1/2$; c'est le coefficient de Poisson des milieux incompressibles. Enfin, la première relation devient

$$\tau_{11} = E \epsilon_{11} \quad \text{avec} \quad E = \frac{3K}{K + \frac{1}{3} G} G = 2(1+\nu)G \quad (5.80)$$

où E s'appelle le module de traction ou module de YOUNG.

L'inversion des relations (5.79) et (5.30)

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (5.31)$$

permet d'exprimer les équations constitutives (5.68) et (5.69) à l'aide du module de Young et du coefficient de Poisson; ces équations deviennent singulières pour le cas limite $\nu = 0.5$ de l'incompressibilité. Par contre, les équations résolues par rapport aux déformations et connues sous le nom de loi de HOOKE

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} \left[\tau_{11} - \nu (\tau_{22} + \tau_{33}) \right] \quad \text{---} \\ \gamma_{23} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{23} \quad \text{---} \end{aligned} \qquad (5.32)$$

ne sont jamais singulières.

Isotropie transversale

Dans un milieu non isotrope, l'expression de la densité d'énergie ne peut être complètement indépendante de l'orientation du repère. Si cependant, les propriétés du milieu restent invariantes vis-à-vis de certaines rotations du repère, il y a lieu de rechercher les combinaisons invariantes du tenseur des déformations pour de telles rotations. Cette recherche peut être menée par un procédé généralisant celui qui conduit aux invariants fondamentaux. Soit E la matrice du tenseur des déformations; examinons la façon dont l'expression $\det(E-Q)$ varie avec un changement d'orientation du repère gouverné par la matrice de rotation R :

$$\begin{aligned} \det(E - Q) &= \det(R^T \hat{E} R - Q) = \det \left[R^T (\hat{E} - RQR^T) R \right] \\ &= \det(\hat{E} - RQR^T) \end{aligned}$$

Il s'en suit que si la matrice Q est invariante

$$R Q R^T = Q \quad ,$$

le développement du déterminant conduira à un polynôme dans les éléments de Q , dont les coefficients seront des combinaisons des éléments de E invariants dans cette rotation. Appliquons ceci au cas de l'isotropie transversale.

Le milieu possède une direction privilégiée (fibre), toutes les directions perpendiculaires à celle-ci étant équivalentes du point de vue des propriétés élastiques. Prenant le premier axe du repère selon la fibre, les rotations permises pour l'invariance des propriétés élastiques sont du type

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{arbitraire.}$$

La matrice Q la plus générale qui soit invariante pour ce groupe de rotations est

$$Q = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix} \quad a, b, c \text{ arbitraires.}$$

Par conséquent, l'expression

$$\begin{aligned} \det (E-Q) &= a(b^2+c^2) + ab (\epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + c^2 \epsilon_{11} \\ &+ a(\epsilon_{23}^2 - \epsilon_{22}\epsilon_{33}) + b(\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{13}^2 - \epsilon_{11}(\epsilon_{22} + \epsilon_{33})) \\ &+ \det E \end{aligned}$$

est invariante, quels que soient les paramètres a, b, c .

On découvre donc deux invariants du premier degré, les coefficients de ab et de c^2 (dont la somme restitue le premier invariant fondamental); deux invariants du second degré, les coefficients de a et de b (dont la somme restitue le second invariant fondamental) et l'invariant I_3 comme terme indépendant.

La forme quadratique de la densité d'énergie sera du type

$$W = \frac{1}{2} A \epsilon_{11}^2 + \frac{1}{2} B (\epsilon_{22} + \epsilon_{33})^2 + C \epsilon_{11} (\epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \\ + 2 D (\epsilon_{23}^2 - \epsilon_{22} \epsilon_{33}) + 2 E (\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{13}^2)$$

et engendre une matrice de modules

$$\begin{pmatrix} A & C & C & 0 & 0 & 0 \\ C & B & B-2D & 0 & 0 & 0 \\ C & B-2D & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

Elle est définie positive si tous les déterminants principaux qu'on peut en extraire sont positifs.

En pratique, on sait qu'il suffit pour cela de contrôler le caractère positif d'une séquence emboîtée de déterminants principaux.

On obtient ici, par exemple, les conditions

$$A > 0 \quad B > D > 0 \quad E > 0 \quad A(B-D) > 4 C^2 \quad .$$

Orthotropie

Les propriétés élastiques sont symétriques par rapport à trois plans orthogonaux, dont les intersections définissent le choix des axes du repère. Une rotation de 180° autour du 3ème axe étant permise, on vérifie que la rotation

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

laisse invariantes les matrices du type

$$Q = \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ e & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Une rotation de 180° autour du premier axe étant aussi permise, les matrices invariantes précédentes sont réduites à celles pour lesquelles les paramètres $d = e = 0$, auquel cas on vérifie qu'elles sont aussi invariantes pour la rotation de 180° autour du second axe.

L'expression générale invariante est ici

$$\begin{aligned} \det(L-Q) &= -abc + bc \epsilon_{11} + ca \epsilon_{22} + ab \epsilon_{33} \\ &+ a(\epsilon_{23}^2 - \epsilon_{22} \epsilon_{33}) + b(\epsilon_{31}^2 - \epsilon_{33} \epsilon_{11}) + c(\epsilon_{12}^2 - \epsilon_{11} \epsilon_{22}) \\ &+ \det L \end{aligned}$$

On voit apparaître trois invariants du premier degré et trois du second, entraînant une forme quadratique à neuf modules du type

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} (\Lambda_{11} \epsilon_{11}^2 + \Lambda_{22} \epsilon_{22}^2 + \Lambda_{33} \epsilon_{33}^2 + 2\Lambda_{23} \epsilon_{22} \epsilon_{33} + 2\Lambda_{31} \epsilon_{33} \epsilon_{11} + 2\Lambda_{12} \epsilon_{11} \epsilon_{22}) \\ &+ 2G_{23} (\epsilon_{23}^2 - \epsilon_{22} \epsilon_{33}) + 2G_{31} (\epsilon_{31}^2 - \epsilon_{33} \epsilon_{11}) + 2G_{12} (\epsilon_{12}^2 - \epsilon_{11} \epsilon_{22}) \end{aligned}$$

dont la matrice

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} - 2G_{12} & \Lambda_{13} - 2G_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda_{21} - 2G_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} - 2G_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda_{31} - 2G_{31} & \Lambda_{32} - 2G_{32} & \Lambda_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} \end{pmatrix}$$

est définie positive sous les conditions

$$G_{23} > 0 \quad G_{31} > 0 \quad G_{12} > 0$$

$$\Lambda_{11} > 0 \quad \Lambda_{11} \Lambda_{22} > (\Lambda_{12} - 2G_{12})^2$$

$$\Lambda_{11} \Lambda_{22} \Lambda_{33} + (\Lambda_{23} - 2G_{23})(\Lambda_{31} - 2G_{31})(\Lambda_{12} - 2G_{12}) >$$

$$\Lambda_{11} (\Lambda_{23} - 2G_{23})^2 + \Lambda_{22} (\Lambda_{31} - 2G_{31})^2 + \Lambda_{33} (\Lambda_{12} - 2G_{12})^2$$

Symétrie ternaire

Si l'axe 1 coïncide avec un axe de symétrie ternaire (symétrie par rapport aux rotations de 120° autour de cet axe), on vérifie facilement que les seules matrices Q invariantes vis-à-vis de l'opérateur

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 120^\circ & \sin 120^\circ \\ 0 & -\sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

sont celles invariantes vis-à-vis d'une rotation d'angle arbitraire autour du même axe.

Par conséquent, la symétrie ternaire est équivalente à l'isotropie transversale par rapport à cet axe.

5.12. Critères de limite élastique

Pour la plupart des matériaux, mais tout spécialement les matériaux métalliques, le comportement peut être considéré comme élastique dans un domaine de l'état de tension suffisamment restreint et dont il importe de connaître les limites. Nous ne développons ici que quelques critères classiques relatifs aux matériaux isotropes.

1. Le critère de TRESCA (1864) repris par GUEST (1900) selon lequel la limite est constituée par une certaine valeur de la plus grande tension tangentielle.

Dans un essai de traction simple, l'état de tension est uniaxial; l'axe de l'éprouvette est principal et correspond à la tension $\sigma_1 = \frac{P}{S}$, tandis que $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. La théorie des cercles de Mohr indique alors comme plus grande tension tangentielle la valeur $\frac{1}{2} \sigma_1$.

Si l'analyse de l'essai de traction conduit à limiter le domaine élastique à $\sigma_1 < \sigma_e$, valeur connue sous le nom de limite élastique, le critère de Tresca-Guest appliqué à un état de tension général demandera la vérification en tout point de

$$\sigma_1 - \sigma_3 < \sigma_e \quad (5.33)$$

L'application de ce critère en un point requiert la connaissance des tensions principales, laquelle demande en général la solution d'une équation du troisième degré. Le critère est formulé, comme l'exige l'isotropie du milieu, en terme d'invariants de l'état de tension. Il peut s'accorder avec l'explication de déformations permanentes par glissement relatif de plans réticulaires dans les micro-cristaux. Ce glissement aurait lieu à l'intervention du passage d'une dislocation dont la propagation serait assurée par l'application d'une tension tangentielle minima, caractéristique du plan réticulaire en question.

2. Le critère de HÜBER-HENCKY-VON MISES

La forme la plus générale d'un critère de matériau isotrope serait du type

$$f(J_1, J_2, J_3) < 0$$

Se basant sur le fait que, dans certaines limites, l'expérience indique qu'un métal ne voit pas son comportement élastique affecté par la superposition d'un état de tension sphérique, Von Mises (1913) a proposé de ne faire intervenir que les invariants du déviateur. Il a proposé en fait le critère

$$\begin{aligned} -6\Sigma_2 &= (\tau_{11}-\tau_{22})^2 + (\tau_{22}-\tau_{33})^2 + (\tau_{33}-\tau_{11})^2 + 6(\tau_{23}^2 + \tau_{21}^2 + \tau_{12}^2) \\ &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 < 2\sigma_e^2 \end{aligned} \quad (5.84)$$

Hencky (1924) interprète ce critère comme limitant dans (5.67) la partie "distorsion" de l'énergie de déformation

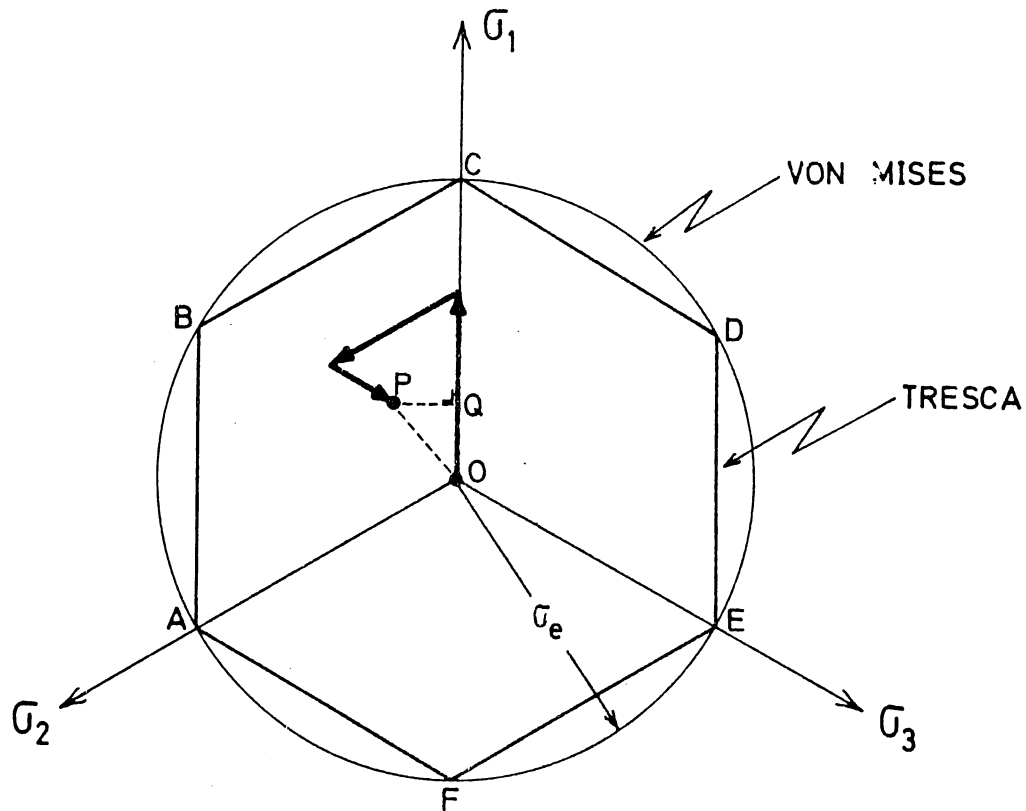
$$-2G\Gamma_2 = -\frac{1}{2G}\Sigma_2 < \frac{1}{6G}\sigma_e^2$$

Nadai (1937) l'interprète à l'aide du concept de tension tangentielle octaédrale défini par (5.39); il prend alors la forme

$$|t_{ot}| < \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_e \quad (5.85)$$

Le critère de Hüber-Hencky-Von Mises est d'application simple car il s'exprime rationnellement dans les éléments de l'état de tension pour un repère quelconque.

Pour la plupart des métaux, il est en meilleur accord avec l'expérience que le critère de Tresca.



La différence entre les deux critères peut être illustrée simplement par une construction graphique appropriée. Considérons un système coplanaire de 3 vecteurs unitaires \vec{g}_i faisant entre-eux des angles de 120° , de sorte que

$$\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (5.86)$$

Le point représentatif d'un état de tension, dont les valeurs principales sont $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, sera défini par le vecteur de position

$$\vec{s} = \sigma_1 \vec{g}_1 + \sigma_2 \vec{g}_2 + \sigma_3 \vec{g}_3 \quad (5.87)$$

Les états de tension qui ne diffèrent que par un état sphérique auront le même point représentatif car les vecteurs de base sont liés par la relation

$$\vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 = 0 \quad (5.83)$$

Ceci est précisément sans importance pour les deux critères envisagés qui ne dépendent que des différences entre tensions principales.

On trouve à partir de (5.86) et (5.87) que

$$\vec{s} \cdot \vec{s} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1 = \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

et donc, eu égard à (5.84), le critère

$$\vec{s} \cdot \vec{s} = -3 \Sigma_2 < \sigma_e^2$$

de sorte que le domaine où la limite élastique selon Von Mises n'est pas transgressé est un cercle de rayon σ_e .

Le théorème de Pythagore permet de calculer la projection \overline{PQ} d'un point représentatif sur l'axe des σ_1

$$\overline{PQ}^2 = \vec{s} \cdot \vec{s} - (\vec{s} \cdot \vec{g}_1)^2 = 3 \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2$$

Pour que la tension tangentielle $\frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3)$ ne dépasse pas la limite de Tresca, il faut que

$$\overline{PQ} < \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_e$$

ce qui limite le domaine élastique à la bande comprise entre les droites AB et ED. Comme $\frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_1)$ et $\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)$ peuvent à leur tour devenir les tensions tangentielles maximum, le domaine est en définitive l'hexagone ABCDEF qui s'avère être inscrit au cercle de Von Mises.

Visiblement, le critère de Tresca est légèrement plus sévère que celui de Von Mises, tous deux ayant été formulés de manière à coïncider dans un essai uniaxial, tel que représenté par le point C.

On observera qu'ils coïncident aussi dans les états biaxiaux du type $(\sigma_2 = 0, \sigma_3 = \sigma_1 = \sigma_e)$ tels que représentés par le point D.

3. Critères plus généraux

S'il est exact que les matériaux peuvent supporter une compression hydrostatique (sphérique) apparemment illimitée sans présenter de déformations permanentes, il doit exister une limite rapprochée pour leur décohésion dans un état de traction sphérique. La réalisation expérimentale d'un tel état est si difficile que, si la connaissance de cette limite est importante sur le plan théorique, elle l'est sans doute moins sur le plan pratique.

On peut concevoir que l'influence de l'état de tension sphérique soit prise en considération par un critère du genre

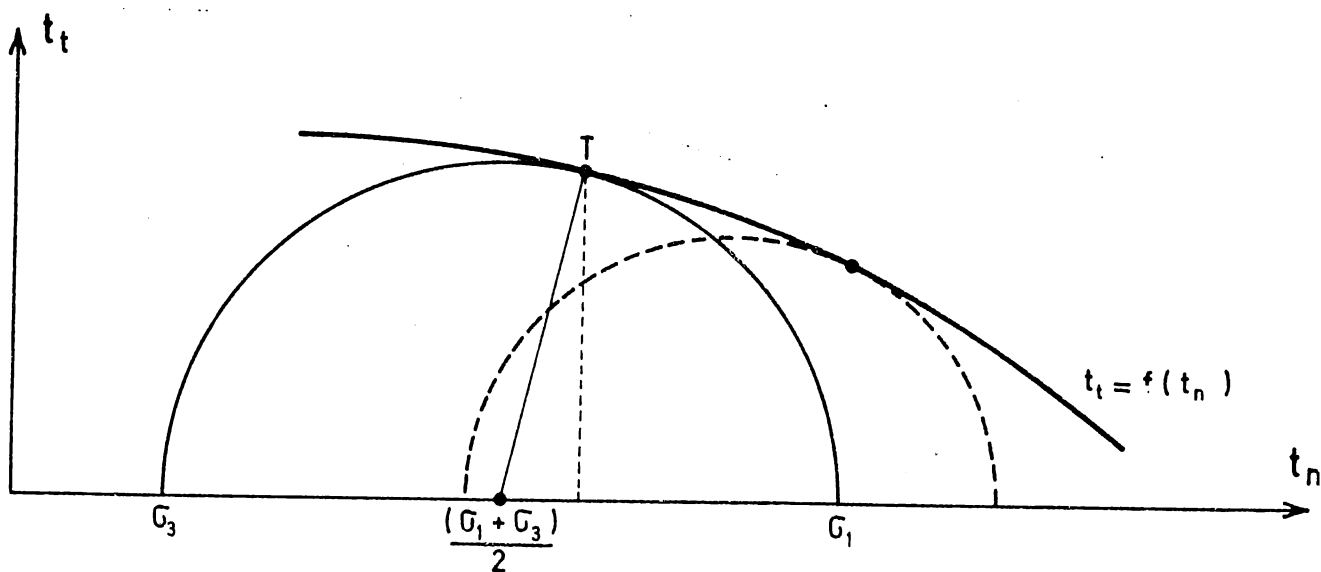
$$\Sigma_2 = f(J_1)$$

équivalent dans l'interprétation de Nadai à une relation

$$t_{ot} = f(t_{on}) \quad (5.89)$$

entre les tensions octaédrales normale et tangentielle. Les critères généraux de ce type reviennent à postuler la non-intervention du 3ème invariant fondamental de l'état de tension.

Un autre critère, dû à Mohr, est celui dit "de la courbe intrinsèque".



Il émet l'hypothèse que la limite élastique est atteinte sur une facette quand la tension tangentielle t_t qui y règne dépasse une limite dépendant de la tension normale t_n qu'elle subit.

L'équation de la limite

$$t_t = f(t_n)$$

est la courbe intrinsèque du matériau isotrope.

Dans un diagramme de Mohr (t_n, t_t) la courbe intrinsèque constituant par définition une limite supérieure doit être une enveloppe des cercles de Mohr limites $n_2 = 0$ des états de tension, où l'on a rangé les tensions principales selon la convention (5.43). Nous disposons donc de l'équation

$$t_t^2 + \left(t_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

exprimant que le point de contact sur l'enveloppe appartient au cercle de Mohr $n_2 = 0$ et de l'équation

$$\frac{1}{t_t} \left(t_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right) = -f'(t_n)$$

exprimant que la droite joignant le centre du cercle au point de contact est perpendiculaire à la tangente à la courbe intrinsèque.

Remplaçant t_t par $f(t_n)$, cette équation prend la forme

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = t_n + f f' \quad (5.90)$$

et la précédente devient

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = f \sqrt{1 + f'^2} \quad (5.91)$$

Les équations (5.90) et (5.91) peuvent être considérées comme les équations paramétriques en t_n d'un lieu limite

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = F \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \quad (5.92)$$

qui généralise manifestement le critère de Tresca.

5.13. Les équations de NAVIER

Les équations de NAVIER de l'élasticité linéaire sont les équations aux dérivées partielles qui gouvernent le vecteur déplacement. Ce sont les équations d'équilibre de translation en volume dans lesquelles les tensions (additionnelles) ont été remplacées au profit des déformations par les équations constitutives et les déformations elles-mêmes au profit des déplacements

$$D_i (C_{ij}^{pq} D_p u_q) + \rho_o g_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (5.93)$$

Ces équations sont accompagnées de conditions aux limites qui consistent à imposer soit les déplacements

$$u_q = \bar{u}_q \quad \text{sur} \quad \partial_1 V \quad (5.94)$$

sur une partie $\partial_1 V$ de la frontière, soit les tractions de surface

$$n_i \tau_{ij} = n_i C_{ij}^{pq} D_p u_q = \bar{t}_j \quad (5.95)$$

sur la partie complémentaire $\partial_2 V$.

Nous allons commencer par établir le caractère elliptique de ces équations aux dérivées partielles, en montrant par la méthode de CAUCHY-KOWALEWSKA que la donnée simultanée des valeurs u_q et t_j sur une portion de frontière permet toujours de calculer les dérivées partielles du déplacement jusqu'à un ordre quelconque.

Les déplacements ont alors sur cette portion de surface un développement Taylorien complet et s'il est convergent la solution des équations de Navier est analytique dans un voisinage de cette portion de surface. Quelques notations spéciales seront avantageuses pour la démonstration. Si n_i dénote comme d'habitude les cosinus directeurs de la normale à la surface, nous introduisons

$$\Delta = n_i D_i \quad (5.96)$$

pour la dérivée selon cette normale. Trois dérivées dans un plan tangent à la surface peuvent être obtenues par les opérateurs

$$\partial_s = e_{smr} n_m D_r \quad (5.97)$$

Elles ne sont évidemment pas indépendantes ce qui s'exprime visiblement par l'identité

$$n_s \partial_s \equiv 0 \quad (5.98)$$

Chacune de ces dérivées se fait dans une direction perpendiculaire à la fois à la normale et à un des axes cartésiens. Une dérivée partielle selon un axe cartésien est maintenant décomposable en

$$D_p = n_p \Delta - e_{pts} n_t \partial_s \quad (5.99)$$

comme on le vérifie facilement en substituant (5.96) et (5.97) et en se rappelant que $n_t n_t = 1$.

Les valeurs de u_q étant données sur la surface, les dérivées $\partial_s u_q$ dans le plan tangent sont connues. Remplaçant alors (5.99) dans les données (5.95) de t_j sur la surface, il vient en rejetant les termes connus au second membre

$$n_i n_p C_{ij}^{pq} u_q = t_j + e_{pts} n_t n_i C_{ij}^{pq} \partial_s u_q \quad (j=1,2,3) \quad (5.100)$$

Un système de trois équations aux trois dérivées premières encore inconnues des u_q .

Or, selon la condition de stabilité infinitésimale de Hadamard, la matrice

$$n_i n_p C_{ij}^{pq} = S_j^q$$

de ce système est définie positive et par conséquent inversible.

Les trois dérivées restantes sont donc définies de façon unique.

Les équations de Navier nous donnent maintenant

$$C_{ij}^{pq} D_p D_i u_q = -\rho_0 g_j - D_p u_q D_i C_{ij}^{pq}$$

où le second membre est connu. Encore une fois, les dérivées $D_i u_q$ étant connues sur la surface, il en est de même des dérivées secondes $\partial_s D_i u_q$ et la substitution de D_p fournit alors

$$n_p C_{ij}^{pq} \Delta D_i u_q = e_{pts} n_t C_{ij}^{pq} \partial_s D_i u_q - \rho_0 g_j - D_p u_q D_i C_{ij}^{pq}$$

avec un second membre connu.

La connaissance des dérivées $\Delta D_i u_q$ encore inconnues se ramène finalement à celle des $\Delta \Delta u_q$ comme le montre le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \Delta D_i u_q &= n_r D_r D_i u_q = D_i (n_r D_r u_q) - D_i n_r \cdot D_r u_q \\ &= D_i \Delta u_q - D_i n_r \cdot D_r u_q \\ &= (n_i \Delta - e_{its} n_t \partial_s) \Delta u_q - D_i n_r \cdot D_r u_q \\ &= n_i \Delta \Delta u_q - (e_{its} n_t \partial_s \Delta u_q + D_i n_r \cdot D_r u_q) \end{aligned}$$

où seul le premier terme du second membre est inconnu. Par conséquent, la substitution de ce résultat dans les équations de Navier donne un résultat du type

$$n_i n_p C_{ij}^{pq} \Delta \Delta u_q = a_j$$

Ces équations, de second membre connu, sont du même type que (5.100) et fournissent toujours une solution unique pour les dérivées secondes encore inconnues. On a donc pu calculer sur la surface l'ensemble de toutes les dérivées partielles secondes de u_q . Le processus se répète indéfiniment en prenant les dérivées partielles successives des équations de Navier. Il faut évidemment pour cela que le champ des modules d'élasticité et le tenseur de courbure de la surface aient sur la surface des dérivées de tous ordres.

En conclusion, la condition nécessaire de stabilité infinitésimale de Hadamard est aussi une condition suffisante pour l'ellipticité des équations de Navier.

Par contre, l'unicité de la solution des équations de Navier avec leurs conditions aux limites coïncide avec la vérification du critère de stabilité infinitésimale. Elle est donc assurée par tout système de conditions suffisantes à cet effet, en particulier, le caractère défini positif local de la densité d'énergie. En effet, les équations étant linéaires, l'unicité est assurée si le système homogène

$$D_i (C_{ij}^{pq} D_p u_q) = 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

$$u_j = 0 \quad \text{sur} \quad \partial_1 V$$

$$n_i C_{ij}^{pq} D_p u_q = 0 \quad \text{sur} \quad \partial_2 V$$

ne possède que la solution triviale. Or, multipliant chaque équation de Navier homogène par la composante de déplacement correspondante et intégrant

$$\int_V u_j D_i (C_{ij}^{pq} D_p u_q) dV = 0$$

Après intégration par parties, ceci devient

$$\int_{\partial V} u_j (n_i C_{ij}^{pq} D_p u_q) dS - \int_V C_{ij}^{pq} D_i u_j D_p u_q dV = 0$$

La première intégrale est nulle en vertu des conditions aux limites homogènes, et, si la condition de stabilité infinitésimale est satisfaite, la seconde ne peut être nulle que si

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) \equiv 0$$

Moyennant une légère extension du sens habituel, nous considérons que ce résultat correspond à la solution triviale; ou bien les conditions cinématiques homogènes imposées sur $\partial_1 V$ sont suffisantes pour empêcher l'existence de tout mode rigide de déplacement (c'est le cas de la plupart des problèmes) et $\varepsilon_{ij} \equiv 0$ entraîne la solution triviale proprement dite $u_j \equiv 0$, ou bien ces conditions sont insuffisantes ou inexistantes et la solution du problème initial n'est définie qu'à un mode rigide de déplacement près.

Dans le cas particulier du milieu isotrope, où les modules sont fournis par les équations (5.75), et homogène (les modules de Lamé sont constants), les équations de Navier sans force massique prennent la forme simple

$$(\lambda + \mu) D_j (D_i u_i) + \mu D_i D_i u_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (5.101)$$

où

$$D_i D_i = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \nabla^2$$

est l'opérateur harmonique. Multipliant chaque équation par D_j et sommant, il vient après simplification du facteur $\lambda + 2\mu > 0$,

$$\nabla^2 I_1 = 0 \quad (5.102)$$

Le premier invariant est une fonction harmonique.

Ceci permet de voir, en prenant le Laplacien des équations de Navier, que chacune des composantes du déplacement obéit à l'équation bi-harmonique

$$\nabla^2 \nabla^2 u_j = 0 \quad (5.103).$$

Ces résultats expliquent le rôle important joué par les opérateurs harmonique et bi-harmonique dans tous les problèmes d'élasticité où le milieu est supposé être isotrope et homogène. Ils subsistent en présence de forces massiques quand celles-ci dépendent d'un potentiel harmonique, comme c'est le cas dans un champ gravitationnel en dehors des masses attirantes :

$$g_j = - D_j \phi \quad \text{avec} \quad \nabla^2 \phi = 0 \quad .$$

5.14. Les équations de BELTRAMI-MICHELL

On peut en principe transformer les équations de compatibilité locale des déformations (5.11) en y substituant les tensions aux déformations par inversion des équations constitutives.

Ceci a été fait par Beltrami et Michell dans le cas du milieu isotrope et homogène pour lequel on dispose déjà des équations inversées (5.82), que l'on peut synthétiser sous la forme

$$E \varepsilon_{ij} = (1+\nu) \tau_{ij} - \nu \tau_{rr} \delta_{ij} \quad (\tau_{rr} = J_1) \quad (5.104)$$

En vue de simplifier le résultat par utilisation des équations d'équilibre en volume, il y a lieu de modifier d'abord la présentation des équations de compatibilité. On les multiplie par $e_{stq} e_{num}$, applique la formule (4.13), puis fait $n = s$ pour trouver

$$D_i D_i \varepsilon_{tu} + D_t D_u \varepsilon_{ii} - D_t D_i \varepsilon_{iu} - D_u D_i \varepsilon_{it} = 0$$

Remplaçant maintenant (5.104)

$$(1+\nu) D_i D_i \tau_{tu} - \nu \delta_{tu} D_i D_i \tau_{uu} + D_t D_u \tau_{ii} \\ - (1+\nu) D_t D_i \tau_{iu} - (1+\nu) D_u D_i \tau_{it} = 0 \quad .$$

Transformant les deux derniers termes par les équations d'équilibre

$$(1+\nu) D_i D_i \tau_{tu} - \nu \delta_{tu} D_i D_i \tau_{uu} + D_t D_u \tau_{ii} + (1+\nu) \rho_o (D_t g_u + D_u g_t) = 0$$

Pour $t = u$, on obtient une équation permettant d'éliminer le second terme. Divisant encore par $(1+\nu)$, il vient finalement

$$\nabla^2 \tau_{tu} + \frac{1}{1+\nu} D_t D_u \tau_{ii} + \rho_o \left[D_t g_u + D_u g_t + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{tu} D_i g_i \right] = 0$$

(5.105)

Les tensions doivent donc vérifier ces 6 équations aux dérivées partielles du second ordre ainsi que les 3 équations d'équilibre du premier ordre.

Il en ressort que pour des forces massiques dépendant d'un potentiel harmonique, le premier invariant J_1 est une fonction harmonique et chaque composante de la tension une fonction bi-harmonique.

Enfin, il ne faut pas oublier que si le domaine est à connexion linéaire multiple, les conditions de compatibilité globales se transforment elles-aussi en des conditions supplémentaires sur les tensions.

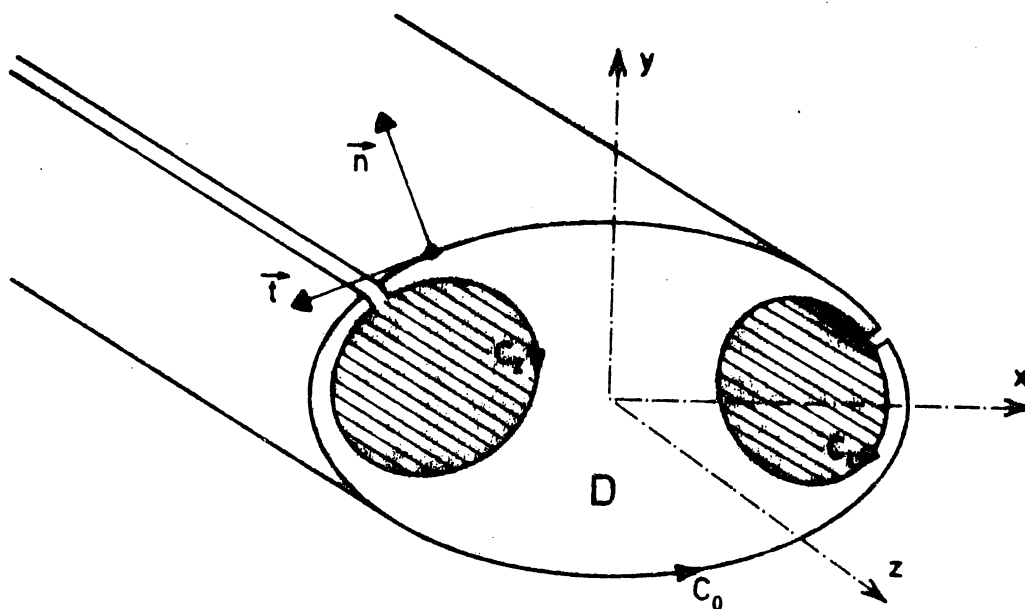
CHAPITRE 6 EXTENSION, FLEXION ET TORSION DES POUTRES PRISMATIQUES

Une poutre prismatique est un domaine limité par une surface cylindrique extérieure (le manteau), deux sections planes perpendiculaires aux génératrices et, si la poutre est creuse, une ou plusieurs surfaces cylindriques intérieures. L'axe Oz d'un repère cartésien droit sera pris parallèle aux génératrices des cylindres. Dans une section perpendiculaire aux génératrices et rapportée aux axes Ox et Oy, le domaine D est limité par la directrice extérieure c_0 et les directrices intérieures c_i ($i = 1 \dots n$) des cavités.

L'introduction de coupures, constituant des **ponts** entre chaque directrice de cavité et c_0 , permet de définir un contour complet, noté c , parcouru dans le sens mathématique positif pour c_0 et négatif pour les autres c_i . Il est tel que la normale \vec{n} extérieure au domaine, la tangente \vec{t} dans le sens de parcours et le vecteur unitaire \vec{e}_z forment un trièdre de même sens que le repère cartésien.

Si θ désigne l'angle que fait la normale extérieure avec l'axe Ox, on aura pour le sens de parcours précité

$$\cos \theta = \frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial y}{\partial s} \quad \sin \theta = \frac{\partial y}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial s} \quad (6.1)$$



6.1. Formules de Green et de Stokes

La théorie fait intervenir, pour un matériau isotrope, comme les équations générales de Navier et de Beltrami-Michell le font pressentir, un certain nombre de fonctions harmoniques dans les variables (x,y) . Les versions correspondantes des formules de Green et de Stokes sont alors d'une grande utilité. Soit $\vec{a}(x,y)$ un champ de vecteurs univoque et différentiable dans D ; par application du théorème de la divergence, il vient

$$\int_D \operatorname{div} \vec{a} \, dx \, dy = \int_C (\vec{a} \cdot \vec{n}) \, ds = \sum_0^n \int_{C_i} (\vec{a} \cdot \vec{n}) \, ds$$

puisque les intégrales sur les branches de chaque pont se détruisent. Prenant

$$\vec{a} = \phi(x,y) \operatorname{grad} \psi(x,y)$$

nous obtenons la première formule de Green

$$\int_D (\phi \nabla^2 \psi + \operatorname{grad} \phi \cdot \operatorname{grad} \psi) \, dx \, dy = \sum_0^n \int_{C_i} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \, ds \quad (6.2)$$

où

$$\nabla^2 = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

La deuxième formule de Green s'obtient en soustrayant de la première le résultat d'un échange entre ϕ et ψ :

$$\int_D (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) \, dx \, dy = \sum_0^n \int_{C_i} (\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}) \, ds \quad (6.3)$$

Dans ces formules, on peut changer le sens de parcours sur les contours C_i sans changer le signe du second membre, tant que les dérivées normales restent prises vers l'extérieur du domaine.

La formule de Stokes

$$\int_D \vec{a} \cdot \text{rot } \vec{a} \, dx \, dy = \int_C (\vec{a}, \vec{t}) \, ds = \sum_0^n \int_{c_i} (\vec{a}, \vec{t}) \, ds$$

appliquée aussi à $\vec{a} = \phi \, \text{grad } \psi$ et $\vec{a} = \psi \, \text{grad } \phi$, livre

$$\int_D \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx \, dy = \sum_0^n \int_{c_i} \phi \, d\psi = - \sum_0^n \int_{c_i} \psi \, d\phi \quad (6.4)$$

mais ici il faut observer que $\frac{\partial \psi}{\partial s}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial s}$ changent de signe avec un changement de sens du parcours sur un circuit.

6.2. Le centroïde

À partir d'un choix arbitraire pour l'origine O des axes, on peut évaluer comme suit l'aire Ω du domaine D et les coordonnées (\hat{x}, \hat{y}) de son centre d'aire, ou centroïde : prenant $\phi = x$ et $\psi = y$ dans la formule de Stokes

$$\Omega = \int_D dx \, dy = \sum_0^n \int_{c_i} x \, dy = - \sum_0^n \int_{c_i} y \, dx \quad (6.5).$$

ensuite pour $\phi = \frac{1}{2} x^2$ et $\psi = y$, puis $\phi = x$ et $\psi = \frac{1}{2} y^2$,

$$\Omega \hat{x} = \int_D x \, dx \, dy = \sum_0^n \int_{c_i} \frac{1}{2} x^2 \, dy = - \sum_0^n \int_{c_i} y \, x \, dx \quad (6.6)$$

$$\Omega \hat{y} = \int_D y \, dx \, dy = \sum_0^n \int_{c_i} xy \, dy = - \sum_0^n \int_{c_i} \frac{1}{2} y^2 \, dx$$

Dans ces formules, les directrices sont parcourues dans le sens engendré par le contour c complet, c'est-à-dire positif pour c_0 , rétrograde pour les c_i des cavités.

Nous aurons également besoin de calculer les aires et centroïdes des domaines enfermés par chacune des courbes directrices séparées; à condition de parcourir les contours dans le sens mathématique positif, ceci nous donnera

$$\Omega_i = \int_{c_i} x dy = - \int_{c_i} y dx \quad (i=0, 1, \dots, n) \quad (6.5)'$$

$$\Omega_i \hat{x}_i = \int_c \frac{1}{2} x^2 dy = - \int_{c_i} y x dx \quad (i=0, 1, \dots, n) \quad (6.6)'$$

$$\Omega_i \hat{y}_i = \int_{c_i} xy dy = - \int_{c_i} \frac{1}{2} y^2 dx$$

La translation des axes de référence au centroïde du domaine D est une opération élémentaire. Comme elle simplifie la présentation des résultats, nous la supposons réalisée et ferons usage par la suite des propriétés correspondantes

$$\int_D x dx dy = 0 \quad \int_D y dx dy = 0 \quad (6.7)$$

6.3. Les moments d'inertie

Les moments d'inertie d'une section droite de la poutre par rapport aux axes Ox et Oy sont définis comme suit :

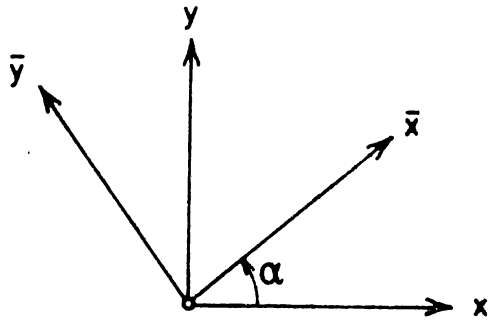
$$I_{xx} = \int_D x^2 dx dy = \frac{1}{3} \sum_0^n \int_{c_i} x^3 dy = - \sum_0^n \int_{c_i} x^2 y dx$$

$$I_{xy} = \int_D xy dx dy = - \frac{1}{2} \sum_0^n \int_{c_i} xy^2 dx = \frac{1}{2} \sum_0^n \int_{c_i} x^2 y dy \quad (6.8)$$

$$I_{yy} = \int_D y^2 dx dy = - \frac{1}{3} \sum_0^n \int_{c_i} y^3 dx = \sum_0^n \int_{c_i} xy^2 dy$$

Ce sont les éléments d'un tenseur symétrique de rang deux à deux dimensions :

$$\int_D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (x \ y) dx dy \quad .$$



Le changement d'orientation d'axes

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

donne lieu à la nouvelle matrice du tenseur

$$f_D \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} (\bar{x} \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} = R \left\{ f_D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (x y) dx dy \right\} R^T$$

c'est à dire aux formules explicites

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = I_{xx} \cos^2 \alpha + 2 I_{xy} \sin\alpha \cos\alpha + I_{yy} \sin^2 \alpha$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = (I_{yy} - I_{xx}) \sin\alpha \cos\alpha + I_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (6.9)$$

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{xx} \sin^2 \alpha - 2 I_{xy} \sin\alpha \cos\alpha + I_{yy} \cos^2 \alpha$$

Quelle que soit l'origine O choisie, il existe au moins deux directions principales perpendiculaires pour lesquelles le produit d'inertie $I_{\bar{x}\bar{y}} = 0$. Elles correspondent aux angles α définis par

$$\tan 2\alpha = \frac{2 I_{xy}}{I_{xx} - I_{yy}}$$

ou encore

$$\tan \alpha = \frac{I_{yy} - I_{xx} \pm \sqrt{(I_{yy} - I_{xx})^2 + 4 I_{xy}^2}}{2 I_{xy}}$$

Si on a déjà $I_{xy} = 0$, les angles sont $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Si de plus $I_{xx} = I_{yy}$, toutes les directions sont principales et les moments d'inertie sont les mêmes par rapport à tout axe passant par O .

Pour un scalaire λ arbitraire, on a

$$\int_D (x + \lambda y)^2 dx dy > 0$$

Soit, en développant,

$$I_{xx} + 2 \lambda I_{xy} + \lambda^2 I_{yy} > 0$$

Ce trinôme en λ ne pouvant avoir de racines réelles, on en conclut que le second invariant du tenseur est positif

$$I_2 = I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2 > 0 \quad (6.10)$$

Le premier invariant, ou moment d'inertie polaire, est évidemment positif également

$$I_p = I_{xx} + I_{yy} = \int_D (x^2 + y^2) dx dy > 0 \quad (6.11)$$

Supposons maintenant que le point O choisi soit le centroïde et calculons les moments d'inertie par rapport à des axes parallèles aux axes du repère mais centrés en $x = a$ et $y = b$.

La matrice du tenseur sera donnée par

$$\int_D \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} (x - a \quad y - b) dx dy$$

et, en vertu des propriétés (6.7) du centroïde, nous trouverons les moments

$$I_{xx} + a^2 \Omega \quad I_{xy} + a b \Omega \quad I_{yy} + b^2 \Omega$$

Ceci permet de voir facilement que le premier et le second invariant du tenseur des moments d'inertie sont minimum quand les axes sont issus du centroïde.

6.4. La méthode semi-inverse de Barré de Saint-Venant

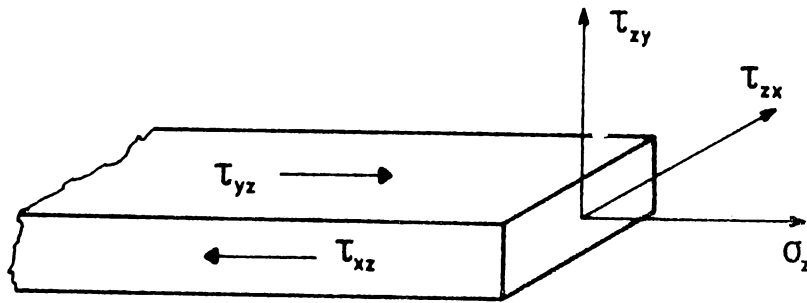
En conformité avec l'utilisation des coordonnées (x, y, z) , les tenseurs de déformation et de tensions seront notés comme suit

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} .$$

La méthode semi-inverse de Barré de Saint-Venant consiste à poser

$$\sigma_x \equiv 0 \quad \sigma_y \equiv 0 \quad \tau_{xy} \equiv 0 \quad (6.12)$$

et à rechercher la solution générale exacte des équations de l'élasticité pour une poutre isotrope dans le cadre de cette hypothèse. La solution, dont le développement fait l'objet de ce chapitre, correspond à une certaine conception de la transmission des efforts entre fibres parallèles aux génératrices; elles n'exercent l'une sur l'autre que des actions tangentiellles orientées elles-mêmes parallèlement aux génératrices.



Les forces massiques sont négligées ce qui, eu égard aux hypothèses (6.12), réduit les équations d'équilibre en volume aux suivantes

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (6.14)$$

On suppose le manteau et les cavités libres de toute traction de surface, ce qui correspond aux conditions

$$n_x \sigma_x + n_y \tau_{yx} + n_z \tau_{zx} = 0$$

$$n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_y + n_z \tau_{zy} = 0$$

$$n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + n_z \sigma_z = 0$$

Toute normale aux surfaces cylindriques étant perpendiculaire à l'axe Oz, on a $n_z = 0$ et les deux premières conditions sont trivialement satisfaites par les hypothèses (6.12). La troisième est réduite à

$$n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} = \cos \theta \tau_{xz} + \sin \theta \tau_{yz} = 0$$

$$\text{sur les } c_i \quad (6.15)$$

soit encore, eu égard à (6.1),

$$\tau_{xz} \frac{\partial y}{\partial s} - \tau_{yz} \frac{\partial x}{\partial s} = 0 \quad (6.16)$$

Cette forme ne nécessite aucune spécification du sens de parcours car elle est homogène et $\partial y/\partial s$ et $\partial x/\partial s$ changent simultanément de signe avec un changement de sens.

Enfin, l'hypothèse de l'isotropie conduit aux relations constitutives, telles que simplifiées par (6.12)

$$E \epsilon_x = E \frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \sigma_z \quad E \epsilon_y = E \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \sigma_z \quad (6.17)$$

$$E \epsilon_z = E \frac{\partial w}{\partial z} = \sigma_z \quad (6.18)$$

$$G \gamma_{xy} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (6.19)$$

$$G \gamma_{xz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \tau_{xz} \quad G \gamma_{yz} = G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \tau_{yz} \quad (6.20)$$

L'élimination des déplacements entre ces équations, suivie d'une simplification par les équations d'équilibre; c'est à dire l'ensemble des équations de Beltrami-Michell livre ici

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0 \quad (6.21)$$

$$(1 + \nu) \nu^2 \tau_{xz} = - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z}$$

$$(1 + \nu) \nu^2 \tau_{yz} = - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} \quad (6.22)$$

avec la notation

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

pour l'opérateur de Laplace à deux dimensions.

6.5. Résultantes des tensions sur une section droite.

Loi d'équarissage

Les équations (6.21) montrent que la tension normale σ_z dans les fibres est distribuée selon une loi linéaire du type

$$\sigma_z = E (\epsilon + x K_x + y K_y) \quad (6.23)$$

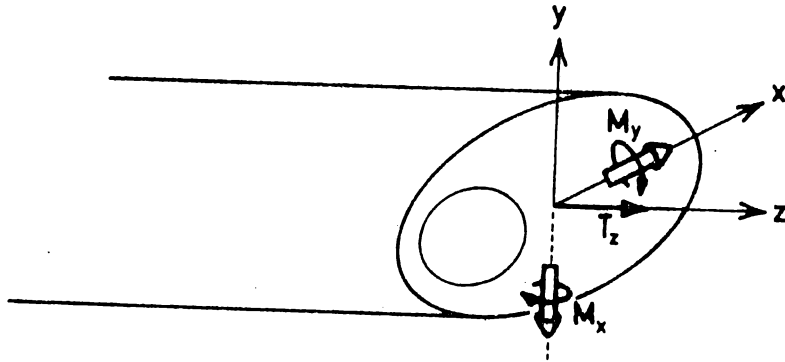
dont les coefficients ϵ , K_x et K_y sont au plus des fonctions linéaires de z . Ces coefficients peuvent être exprimés en fonction de l'effort de traction total et des deux moments fléchissants agissant dans une section droite $z = \text{constante}$.

Nous supposons que l'axe Oz est la fibre neutre de la poutre, c'est-à-dire passe par le centroïde de chaque section droite; nous pouvons alors utiliser les propriétés (6.7) et obtenons

$$F_z = \int_D \sigma_z \, dx \, dy = E \Omega \epsilon$$

$$M_x = \int_D x \sigma_z \, dx \, dy = E (I_{xx} K_x + I_{xy} K_y) \quad (6.24)$$

$$M_y = \int_D y \sigma_z \, dx \, dy = E (I_{xy} K_x + I_{yy} K_y)$$



Dans le cas où l'orientation des axes a été choisie telle que le produit d'inertie soit nul, les équations sont découplées et leur solution est

$$\epsilon = \frac{T_z}{E\Omega} \quad K_x = \frac{M_x}{EI_{xx}} \quad K_y = \frac{M_y}{EI_{yy}} \quad (6.25)$$

En pratique, les orientations principales ne sont effectivement utilisées que si elles sont connues d'avance, en général par des considérations de symétrie.

Pour des orientations non principales, on utilisera les formules plus générales

$$K_x = \frac{I_{yy} M_x - I_{xy} M_y}{E(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \quad K_y = \frac{-I_{xy} M_x + I_{xx} M_y}{E(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \quad (6.26)$$

La substitution de telles formules dans (6.23) exprime la tension normale en fonction de l'effort de traction total et des moments fléchissants et constitue la loi d'équarissage.

Un calcul formel du taux de variation des résultantes (6.24) avec la position de la section droite peut être mené à partir de l'équation d'équilibre longitudinal (6.14).

Par exemple

$$\frac{dF_z}{dz} = \int_D \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dx dy = - \int_D \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) dx dy = \sum_0^n \int_{c_i} (n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz}) ds$$

Dans l'intégration, on a tenu compte de la continuité du champ des tensions tangentielle sur les ponts reliant les directrices. Il vient eu égard aux conditions aux limites (6.15)

$$\frac{dF_z}{dz} = 0 \quad (6.27)$$

On établit de même les équations

$$\frac{dM_x}{dz} = T_x \quad \frac{dM_y}{dz} = T_y \quad (6.28)$$

où les seconds membres sont les efforts tranchants

$$T_x = \int_D \tau_{xz} dx dy \quad T_y = \int_D \tau_{yz} dx dy \quad (6.29)$$

Pour la première, par exemple,

$$\begin{aligned} \frac{dM_x}{dz} &= \int_D x \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dx dy = - \int_D x \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) dx dy \\ &= - \sum_0^n \int_{c_i} x (n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz}) ds + \int_D \tau_{xz} dx dy \end{aligned}$$

et le résultat suit par application des conditions aux limites.

Il apparaît immédiatement par (6.13) que les efforts tranchants sont comme les tensions tangentielle elles-mêmes, indépendants de la coordonnée z :

$$\frac{d\Gamma_x}{dz} = 0 \qquad \frac{d\Gamma_y}{dz} = 0 \qquad (6.30)$$

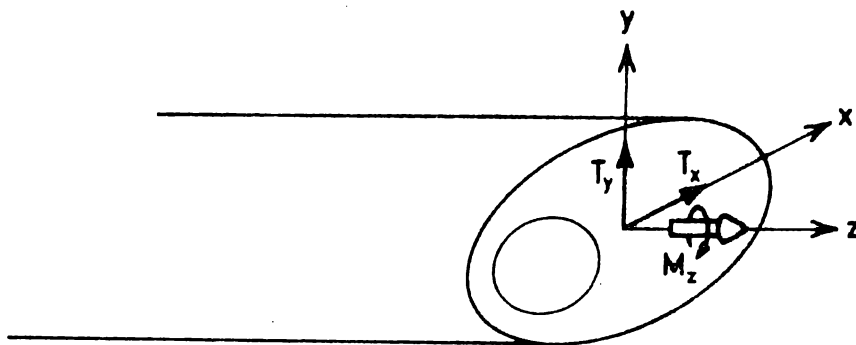
Les moments fléchissants sont donc, comme K_x et K_y , des fonctions linéaires de z .

Les dérivées de K_x et de K_y seront deux paramètres essentiels dans le développement de la théorie

$$a = \frac{dK_x}{dz} = \frac{I_{yy} \Gamma_x - I_{xy} \Gamma_y}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \qquad (6.31)$$

$$b = \frac{dK_y}{dz} = \frac{-I_{xy} \Gamma_x + I_{yy} \Gamma_y}{E(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)}$$

Ils sont directement liés aux efforts tranchants.



La dernière résultante de section droite à envisager est le moment de torsion

$$M_z = \int_D (x \tau_{yz} - y \tau_{xz}) dx dy \qquad (6.32)$$

Il est aussi indépendant de z

$$\frac{df_z}{dz} = 0 \quad (6.33)$$

Les équations (6.25) et la constance des efforts tranchants, de l'effort de traction et du moment de torsion ont par ailleurs l'expression des équations d'équilibre global d'une tranche dz de la poutre.

6.6. Intégration des déplacements transversaux

Des équations (6.17) et (6.19) découlent pour les déplacements transversaux des équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6.34)$$

et la forme complexe $u + i v$ est une fonction analytique de la variable complexe $x + i y$. Posant donc

$$u + i v = u_0 + i v_0 + (\rho + i \omega_0)(x + i y) + (u_2 + i v_2)(x + i y)^2$$

où les coefficients ne sont plus fonctions que de z , il vient en particulier

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \rho + 2 u_2 x - 2 v_2 y$$

Ce résultat est inséré dans (6.17) où σ_z est aussi remplacé par son expression (6.23) et produit par identification

$$\rho = - \nu \varepsilon \quad u_2 = - \frac{\nu}{2} \dot{\kappa}_x \quad v_2 = \frac{\nu}{2} \dot{\kappa}_y$$

Il vient ainsi

$$\begin{aligned}
 u &= u_0(z) - y \omega_0(z) - v \left\{ \epsilon x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)K_x(z) + xy K_y(z) \right\} \\
 v &= v_0(z) + x \omega_0(z) - v \left\{ \epsilon y + xy K_x(z) - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)K_y(z) \right\}
 \end{aligned}
 \tag{6.35}$$

Faisant $x = 0$ et $y = 0$, on voit que $u_0(z)$ et $v_0(z)$ représentent les déplacements transversaux de la fibre neutre. Formons maintenant la rotation matérielle d'une fibre autour de son axe

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \omega_0(z) - v \left\{ y K_x(z) - x K_y(z) \right\}
 \tag{6.36}$$

Il ressort de cette formule que $\omega_0(z)$ est la rotation de la fibre neutre. Les autres termes de (6.35) sont des effets de Poisson, c'est-à-dire proviennent des contractions ou expansions transversales des fibres dues à leur état de tension ou de compression longitudinale. Dérivant par rapport à z les équations (6.20) et faisant usage de (6.13) et (6.18), on trouve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} = - K_x(z)
 \tag{6.37}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = - \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_z}{\partial y} = - K_y(z)$$

ce qui permet d'interpréter K_x et K_y comme les courbures (linéarisées) des fibres, en particulier celles de la fibre neutre

$$\frac{d^2 u_0}{dz^2} = - K_x \qquad \frac{d^2 v_0}{dz^2} = - K_y
 \tag{6.37)'$$

En dérivant encore ces formules, on trouve une interprétation cinématique des paramètres a et b comme dérivées des courbures :

$$\frac{d^3 u_0}{dz^3} = -a \qquad \frac{d^3 v_0}{dz^3} = -b \qquad (6.38)$$

En dérivant deux fois par rapport à z les formules (6.35), les effets de Poisson, qui ne sont que linéaires en z , disparaissent.

Identifiant alors le résultat avec (6.37), on en conclut que

$$\frac{d^2 \omega_0}{dz^2} = \theta$$

Le paramètre (constante)

$$\theta = \frac{d\omega_0}{dz} \qquad (6.39)$$

ou torsion de la fibre neutre joue, avec a et b , un rôle essentiel dans le calcul des tensions tangentielles. Tandis que a et b sont liés de façon simple aux efforts tranchants par les relations de raideur, inverses de (6.31)

$$T_x = L I_{xx} a + L I_{xy} b \qquad (6.40)$$

$$T_y = L I_{xy} a + L I_{yy} b$$

la relation de raideur entre θ et les résultantes de tensions tangentielles ne pourra être établie que plus tard dans la section 6.13.

Remarquons enfin que la torsion des fibres

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \theta + \nu (bx - ay) \qquad (6.41)$$

comporte, en plus de celle accompagnant la fibre neutre, un effet de Poisson dû aux efforts tranchants et dont la répartition est linéaire. Pour faciliter l'évaluation des intégrales portant sur les déplacements transversaux, il sera utile de mettre ces derniers sous la forme

$$u = u_0(z) - \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = v_0(z) - \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6.42)$$

avec

$$\phi = v \left(\epsilon \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{x^3}{3} K_x + \frac{y^3}{3} K_y \right) \quad (6.43)$$

$$\psi = \frac{x^2 + y^2}{2} \omega_0(z) - \frac{v}{6} (y^3 + 3yx^2) K_x + \frac{v}{6} (x^3 + 3xy^2) K_y$$

En dérivant ces relations par rapport à z , il viendra de même

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{du_0}{dz} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{dv_0}{dz} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \quad (6.42')$$

avec

$$\lambda = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{v}{3} (ax^3 + by^3)$$

$$\mu = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{x^2 + y^2}{2} \theta - \frac{v}{6} (y^3 + 3yx^2) a + \frac{v}{6} (x^3 + 3xy^2) b \quad (6.43')$$

6.7. Equations gouvernant le champ des tensions tangentielles

Si les hypothèses de de Saint-Venant conduisent à des résultats très simples pour la tension longitudinale dans les fibres et leur déplacement transversal, la détermination des tensions tangentielles et du déplacement longitudinal dépend de la solution de problèmes faisant intervenir l'opérateur de Laplace à deux dimensions.

Il est avantageux de considérer la paire (τ_{xz}, τ_{yz}) comme les composantes d'un vecteur $\vec{\tau}$ à définir en tout point du domaine D d'une section droite; on sait déjà par (6.13) que ce vecteur est indépendant de la section droite choisie. Exprimons la divergence et le rotationnel du champ de ce vecteur en fonction des paramètres (a, b, θ) :

$$\operatorname{div} \vec{\tau} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = - E (ax + by) \quad (6.44)$$

$$\operatorname{rot}_z \vec{\tau} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}$$

et selon (6.20) et (6.41)

$$\operatorname{rot}_z \vec{\tau} = G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2 G \frac{\partial \omega}{\partial z} = 2 G \{ \theta + v (bx - ay) \} \quad (6.45)$$

Ces équations définissent le champ de manière univoque moyennant l'application des conditions aux limites (6.16)

$$\tau_{xz} \frac{\partial y}{\partial s} - \tau_{yz} \frac{\partial x}{\partial s} = 0 \quad \text{sur } c_i \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

et de conditions circuitales (chaque circuit est décrit dans le sens mathématique positif)

$$\int_{c_i} \vec{\tau} \cdot d\vec{s} = 2 G G_i \{ \theta + v (b\hat{x}_i - a\hat{y}_i) \} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (6.46)$$

pour chacune des directrices de cavité.

Ces conditions proviennent d'une interprétation des conditions de compatibilité globales nécessaires pour l'univalence du déplacement longitudinal et seront démontrées dans la section suivante.

Les conditions de compatibilité locales correspondantes sont assurées par le respect des équations d'équilibre et des équations de Beltrami-Michell, qui leur sont alors équivalentes. Or, les équations (6.21) ont été utilisées pour la construction du champ σ_z et, comme on le vérifie facilement, les équations (6.22) sont satisfaites par (6.44) et (6.45). On peut donc considérer que toutes les conditions d'intégrabilité pour le déplacement w restant sont satisfaites.

Nous ramenons finalement la détermination des tensions tangentielles à des problèmes de Poisson, avec conditions aux limites du type de Dirichlet ou de Neumann, en posant

$$\tau_{xz} = E \frac{\partial \phi}{\partial x} + G \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (6.47)$$

$$\tau_{yz} = E \frac{\partial \phi}{\partial y} - G \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Les équations (6.44), (6.45), (6.16) et (6.46) deviennent ainsi

$$\nabla^2 \phi = - (a x + b y) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{sur les } c_i \quad (6.48)$$

$$\nabla^2 \Psi = - 2 \theta - 2 \nu (b x - a y)$$

avec $d\Psi = 0$ sur les c_i (6.49)

$$\int_{c_i} \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds = 2 \Omega_i \theta + 2 \nu \Omega_i (b \hat{x}_i - a \hat{y}_i)$$

Comme l'addition d'une constante à Ψ ne modifie ni le champ des tensions, ni les équations à satisfaire, il est loisible de poser

$$\Psi = 0 \quad \text{sur } c_0 \quad \Psi = \psi_i \quad \text{sur les } c_i \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (6.49')$$

et les n valeurs constantes prises par la fonction sur les directrices de cavité sont précisément à déterminer par les n conditions circuitales.

6.8. Intégration du déplacement longitudinal

Intégrons (6.37)' sous la forme

$$\frac{du_0}{dz} = q - \int_0^z K_x(\zeta) d\zeta \quad \frac{dv_0}{dz} = -p - \int_0^z K_y(\zeta) d\zeta \quad (6.50)$$

faisant apparaître les pentes (p,q) de la fibre neutre dans la section de référence $z = 0$.

L'intégration de

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E} \sigma_z = \epsilon + x K_x(z) + y K_y(z) \quad (6.51)$$

peut alors être mise sous la forme

$$w = \epsilon z + x \int_0^z K_x(\zeta) d\zeta + y \int_0^z K_y(\zeta) d\zeta + w_0 + py - qx + g(x,y) \quad (6.52)$$

Les trois premiers termes constituent une intégrale particulière, nulle dans la section de référence $z = 0$. De l'intégrale générale de l'équation sans second membre, qui est une fonction arbitraire de (x,y) , on a extrait une forme linéaire telle que les paramètres (p,q) apparaissent maintenant comme des petites rotations de la poutre autour des axes Ox et Oy .

Avec le paramètre w_0 , qui est une translation longitudinale, on a ainsi mis en évidence trois des degrés de liberté comme corps rigide qui accompagnent toujours l'intégration des déplacements à partir des déformations. Les trois autres proviennent des constantes d'intégration des équations (6.39) (rotation autour de Oz) et (6.50) (translations latérales).

Il reste à déterminer la fonction $g(x,y)$, dite gauchissement de la section droite parce que, la barre et le tube circulaires mis à part, elle n'est pas, comme les autres termes de w , linéaire dans les variables x et y et ne conserve donc pas la planéité de la section.

On verra que $g(x,y)$ n'est définie qu'à une constante additive près, qui ne serait d'ailleurs autre que w_0 si on rendait $g(x,y)$ unique par la condition supplémentaire

$$\int_D g \, dx \, dy = 0 \quad (6.53)$$

Le gauchissement de la section de référence est alors donné par

$$w(x,y,0) = py - qx + w_0 + g(x,y) \quad (6.54)$$

et on peut choisir les paramètres de la forme linéaire de telle façon que $w(x,y,0)$ soit un gauchissement vrai, c'est-à-dire soit doué des propriétés

$$\int_D w(x,y,0) \, dx \, dy = 0 \quad \int_D w(x,y,0) \, x \, dx \, dy = 0 \quad (6.55)$$

$$\int_D w(x,y,0) \, y \, dx \, dy = 0$$

En effet, eu égard à (6.7) et (6.8) on obtient (6.55) avec

$$w_0 = 0$$

$$I_{xx} q - I_{xy} p = \int_D g x \, dx \, dy$$

$$I_{xy} q - I_{yy} p = \int_D g y \, dx \, dy \quad (6.56)$$

On observera que les propriétés (6.7) du centroïde n'exigent pas pour le calcul des seconds membres que g satisfasse nécessairement à (6.53).

L'équation (6.54) montre l'impossibilité d'assigner à la poutre dans la section $z = 0$ des conditions de support cinématique $w(x,y,0)$ arbitraires. En particulier, exception faite à nouveau pour la barre ou le tube circulaires, il n'est pas possible d'exiger l'encastrement parfait $w \equiv 0$, sans introduire une solution correctrice à la théorie de de Saint-Venant. L'adoption du gauchissement vrai est alors la meilleure solution au sens des moindres carrés; on remplace l'exigence $w \equiv 0$ impossible à satisfaire par la condition moins sévère

$$\int_D w^2(x,y,0) \, dx \, dy \quad \text{minimum}$$

P, Q, w_0

On vérifie facilement qu'elle conduit aux équations (6.56).

Ce point de vue est dû à WEINSTEIN. Une autre justification consiste à postuler que la solution correctrice induit des tensions longitudinales proportionnelles au gauchissement à éliminer

$$\hat{\sigma}_z = f(z) (py - qx + w_0 + g)$$

Comme ces tensions additionnelles doivent être statiquement équivalentes à zéro, elles satisfont aux conditions

$$\int_D \hat{\sigma}_z \, dx \, dy = 0 \quad \int_D \hat{\sigma}_z x \, dx \, dy = 0$$

$$\int_D \hat{\sigma}_z y \, dx \, dy = 0$$

qui sont de nouveau équivalentes aux équations (6.56).

Calculons maintenant les glissements à partir des équations (6.35) et (6.42)' avec (6.50) et (6.52); il vient

$$\gamma_{xz} = -\frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = -\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \quad (6.57)$$

On voit, les dérivées des fonctions λ et μ étant nulles pour $x = 0$ et $y = 0$, que, sans gauchissement les glissements sont nuls au niveau de la fibre neutre; les sections resteraient alors planes et perpendiculaires à cette fibre.

On a vu que toutes les conditions de compatibilité locales étaient assurées pour l'intégration de w et donc de g . De fait, l'élimination de g entre les équations (6.57) restitue (6.45). Les conditions de compatibilité globales

$$\delta dg = \delta \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = 0$$

ou conditions d'univalence de g , ne doivent être vérifiées, selon la théorie générale, que pour un membre de chacune des classes d'équivalence de circuits irréductibles.

Choisissant les directrices mêmes des cavités, il vient

$$\int_{c_i} \gamma_{xz} dx + \gamma_{yz} dy + \int_{c_i} \frac{\partial \mu}{\partial y} dx - \frac{\partial \mu}{\partial x} dy = 0$$

car

$$\int_{c_i} \frac{\partial \lambda}{\partial x} dx + \frac{\partial \lambda}{\partial y} dy = \int_{c_i} d\lambda = 0$$

Avec les équations constitutives (6.20), ceci devient

$$\frac{1}{G} \int_{c_i} \vec{\tau} \cdot d\vec{s} = \theta \int_{c_i} xdy - ydx - \frac{va}{2} \int_{c_i} (x^2 - y^2) dx + 2xy dy - \frac{vb}{2} \int_{c_i} 2xydx - (x^2 - y^2) dy$$

On peut alors utiliser au second membres les formules (6.5)' et (6.6)' pour chaque circuit supposé décrit dans le sens direct. On obtient ainsi la justification annoncée pour les conditions circuitales (6.46).

Une autre expression des glissements découle des formules (6.47)

$$\gamma_{xz} = 2(1+\nu) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \gamma_{yz} = 2(1+\nu) \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6.58)$$

En la comparant à (6.57) on constate l'existence de relations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial y} \quad \frac{\partial H}{\partial y} = - \frac{\partial Z}{\partial x} \quad (6.59)$$

pour les fonctions

$$H = g - 2(1+\nu) \phi - \lambda \quad (6.60)$$

et

$$Z = \psi + \mu \quad (6.61)$$

La fonction harmonique Z est soumise à des conditions aux limites de Dirichlet

$$\begin{aligned} dZ &= d\mu && \text{sur les } c_i \\ \text{soit } Z &= \mu && \text{sur } c_0 \\ Z &= \mu + \psi_i && \text{sur les } c_i \quad (i=1,2,\dots,n) \end{aligned} \quad (6.62)$$

Par ailleurs comme la structure de Cauchy-Riemann donne aux frontières les relations

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \frac{\partial Z}{\partial s} \qquad \frac{\partial H}{\partial s} = - \frac{\partial Z}{\partial n}$$

les conditions circuitales sont homogènes pour Z

$$\int_{c_i} \frac{\partial Z}{\partial n} ds = - \int_{c_i} \frac{\partial H}{\partial s} ds = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (6.62)'$$

De même, les données de Neumann de la fonction harmonique conjuguée H sont fournies directement par les dérivées des données de Dirichlet de Z :

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \frac{\partial \mu}{\partial s} \qquad \text{sur les } c_i \quad (i=0,1,\dots,n). \quad (6.63).$$

On déduit en particulier de (6.60) que le gauchissement est solution du problème à données de Neumann

$$\nabla^2 g = - 2(ax+by) \quad (6.64)$$

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \frac{\partial \lambda}{\partial n} + \frac{\partial \mu}{\partial s} \qquad \text{sur les } c_i$$

et n'est déterminé qu'à une constante additive près.

Si ce problème est résolu, les tensions tangentielles peuvent en être déduites en multipliant par G les équations (6.57).

De façon équivalente, on peut poser

$$g = k + \lambda$$

et résoudre le problème

$$\nabla^2 k = - 2(1+\nu)(ax+by)$$

$$\frac{\partial k}{\partial n} = \frac{\partial \mu}{\partial s} \qquad \text{sur les } c_i$$

les tensions étant alors données par

$$\tau_{xz} = G \left(\frac{\partial k}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \quad \tau_{yz} = G \left(\frac{\partial k}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \right)$$

Examinons par exemple les conditions sous lesquelles la section droite peut rester plane.

Compte tenu de (6.52) ceci demande

$$g(x,y) = \alpha x + \beta y$$

Le Laplacien de cette fonction étant nul, on en conclut déjà qu'il faut $a = 0$ et $b = 0$: la présence d'un effort tranchant détruit nécessairement la planéité d'une section droite. Il reste la possibilité $\theta \neq 0$. Il faut alors pouvoir vérifier les conditions aux limites

$$\alpha \frac{\partial x}{\partial n} + \beta \frac{\partial y}{\partial n} = \alpha \frac{\partial y}{\partial s} - \beta \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} (\alpha y - \beta x) = \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{\theta}{2} (x^2 + y^2) \right\}$$

L'équation d'une directrice doit être de la forme

$$\frac{1}{2} \theta (x^2 + y^2) = \alpha y - \beta x + \gamma_i \quad (i=0,1,\dots,n)$$

Les directrices sont des circonférences concentriques, ce qui implique qu'il ne peut exister plus d'une cavité; de plus, pour que les axes aient leur origine au centroïde, il faudra prendre $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et donc $g \equiv 0$.

Pour une circonférence unique, on a le cas de la barre circulaire en torsion; pour deux circonférences concentriques, le cas du tube circulaire.

6.9. Séparation des solutions

Nous avons formulé la solution générale du problème des poutres prismatiques dans le cadre des hypothèses de de Saint-Venant. Elle est naturellement décomposable en solutions partielles, que la linéarité des équations permet de superposer. Les solutions partielles les plus simples sont celles pour lesquelles il n'y a pas de tensions tangentielles, c'est-à-dire celles correspondant à des paramètres θ , a et b nuls; ce sont :

(i) L'extension

Toutes les fibres sont soumises à la même **tension** normale

$$\sigma_z = T_z / \Omega$$

et subissent le même allongement spécifique ϵ . La poutre est en état de tension uniaxial et la relation de raideur globale est

$$T_z = E \Omega \epsilon$$

Il y a une contraction transversale par effet de Poisson

$$u = -\nu \epsilon x$$

$$v = -\nu \epsilon y$$

(ii) La flexion pure

Les efforts tranchants étant nuls, la poutre est soumise à des couples fléchissants constants et la tension normale dans les fibres est répartie selon une loi d'équarissage

$$\sigma_z = x K_x + y K_y$$

où les courbures constantes sont liées aux couples fléchissants par les équations de raideur

$$M_x = E I_{xx} K_x + E I_{xy} K_y$$

$$M_y = E I_{xy} K_x + E I_{yy} K_y$$

L'absence de tensions tangentielles entraîne les relations

$$\frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{\partial w}{\partial y}$$

montrant que les fibres restent perpendiculaires aux sections droites. Mais, comme dans le cas de l'extension, celles-ci subissent une distortion dans leur plan par effet de Poisson

$$u = - \nu \frac{1}{2} (x^2 - y^2) K_x - \nu xy K_y$$

$$v = - \nu xy K_x + \nu \frac{1}{2} (x^2 - y^2) K_y$$

Quoique les sections restent planes, cette distortion ne permet pas d'envisager un support cinématique de la poutre par un encastrement parfait sans introduire une correction à la solution de de Saint-Venant. Les solutions partielles de l'extension et de la flexion pure sont caractérisées par l'indépendance des fibres longitudinales, qui n'exercent aucun effort les unes sur les autres. Au contraire, l'interaction tangentielle entre fibres joue un rôle fondamental dans la torsion et la flexion composée (flexion accompagnée d'efforts tranchants). Nous allons chercher à séparer la contribution de la torsion pure de celle de la flexion composée.

6.10. La torsion pure

La torsion pure peut être définie sans ambiguïté comme la solution partielle pour laquelle

$$\sigma_z \equiv 0$$

ce qui entraîne l'absence de moments fléchissants et d'efforts tranchants.

Par conséquent, du point de vue cinématique

$$K_x = 0 \quad K_y = 0 \quad a = 0 \quad b = 0 \quad \varepsilon = 0$$

Nous remplacerons ici θ par $\hat{\theta}$ étant donné qu'une autre partie de θ proviendra, comme on le verra, de la flexion sans torsion.

Le champ des tensions tangentielles obéit ici aux équations simplifiées

$$\operatorname{div} \vec{\tau} = 0 \quad (6.44)'$$

$$\operatorname{rot}_z \vec{\tau} = 2 G \hat{\theta} \quad (6.45)'$$

et sa résultante sur une section droite doit être un couple de torsion C . Le champ obéit sur les directrices aux conditions homogènes (6.16) et aux conditions circuitalles simplifiées

$$\int_{c_i} \vec{\tau} \cdot d\vec{s} = 2 G \hat{\theta} \Omega_i \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (6.46)'$$

La condition (6.44)', analogue à la condition d'incompressibilité de l'hydrodynamique bi-dimensionnelle, est satisfaite en introduisant la fonction de torsion $\theta(x,y)$ de PRANDTL, analogue à une fonction de courant, telle que

$$\tau_{xz} = G \hat{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \tau_{yz} = - G \hat{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (6.47)'$$

Ceci revient à faire dans la théorie générale $\Phi \equiv 0$ et $\Psi = \theta \theta(x,y)$.

Il en résulte que la fonction de torsion est solution du problème

$$\nabla^2 \theta = -2$$

$$d\theta = 0 \quad \text{sur les } c_i \quad (6.49)'$$

soit encore

$$\begin{aligned} \theta &= 0 && \text{sur } c_0 \\ \theta &= \alpha_i && \text{sur les } c_i \quad (i=1,2,\dots,n) \end{aligned}$$

les constantes α_i étant à déterminer par les conditions circuiales

$$\int_{c_i} \frac{\partial \theta}{\partial n} ds = 2 \Omega_i \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (6.49)''$$

Pour calculer le couple de torsion C , on peut prendre le moment par rapport à l'axe Oz (les efforts tranchants sont nuls) selon la formule (6.32); on obtient la formule de raideur

$$C = G J \hat{\theta} \quad (6.65)$$

où le coefficient de raideur de torsion

$$J = - \int_D \left(x \frac{\partial \theta}{\partial x} + y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) dx dy \quad (6.66)$$

Une transformation de Green avec $\phi = \theta$ et $\psi = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$ fournit

$$\begin{aligned} \int_D \left(2 \theta + x \frac{\partial \theta}{\partial x} + y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) dx dy &= \sum_0^n \int_{c_i} \theta \left(x \frac{\partial x}{\partial n} + y \frac{\partial y}{\partial n} \right) ds \\ &= \sum_1^n \alpha_i \int_{c_i} x dy - y dx = - 2 \sum_1^n \alpha_i \Omega_i \end{aligned}$$

en tenant compte du fait que les directrices de cavité sont parcourues dans le sens rétrograde. Il vient donc encore

$$J = 2 \int_D \theta \, dx \, dy + 2 \sum_1^n \alpha_i \Omega_i \quad (6.66)'$$

Cette formule suggère la définition d'une fonction de torsion $\hat{\theta}$ dont les valeurs sont étendues à l'intérieur des cavités par la convention

$$\hat{\theta} = \theta \quad \text{dans } D \quad \hat{\theta} = \alpha_i \quad \text{dans } \Omega_i \quad (i=1,2,\dots,n)$$

Moyennant cette convention, on a aussi

$$J = 2 \int_{\Omega_0} \hat{\theta} \, dx \, dy \quad (6.66)''$$

Les déplacements de torsion pure se réduisent à

$$u = u_0(z) - \omega_0(z) y \quad \text{avec} \quad u_0(z) = q_\theta z + u_0(0)$$

$$v = v_0(z) + \omega_0(z) x \quad \text{avec} \quad v_0(z) = -p_\theta z + v_0(0)$$

$$w = p_\theta y - q_\theta x + g_\theta(x,y) \quad \text{avec} \quad \omega_0(z) = \hat{\theta} z + r_\theta$$

Définissons un point (x_F, y_F) de la section droite par les relations

$$q_\theta = \hat{\theta} y_F \quad p_\theta = \hat{\theta} x_F$$

Les déplacements transversaux prennent alors la forme

$$u = u_0(0) - y r_\theta - \hat{\theta} z (y - y_F)$$

$$v = v_0(0) + x r_\theta + \hat{\theta} z (x - x_F)$$

Les deux premiers termes sont des petits déplacements de corps rigide; les derniers sont des déplacements de torsion par lesquels chaque section tourne sans déformation dans son plan autour du point (x_F, y_F) qui devient ainsi un centre de torsion.

La position du centre de torsion dépend ainsi des valeurs des paramètres de rotation (p_θ , q_θ) définis par le support cinématique de la poutre.

Le gauchissement de torsion étant manifestement proportionnel à la torsion, introduisons le gauchissement unitaire $H_\theta(x, y)$ par

$$g_\theta(x, y) = \hat{\theta} H_\theta(x, y)$$

La notation est cohérente, car dans l'équation (6.60) les fonctions ϕ et λ sont identiquement nulles avec a et b. Le gauchissement unitaire de torsion obéit donc aux équations

$$\nabla^2 H_\theta = 0 \tag{6.68}$$

$$\frac{\partial H_\theta}{\partial n} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} (x^2 + y^2) \quad \text{sur les } c_i$$

Si ce problème de Neumann est résolu, on peut en déduire également les tensions par les équations

$$\tau_{xz} = G \hat{\theta} \left(\frac{\partial H_\theta}{\partial x} - y \right) \quad \tau_{yz} = G \hat{\theta} \left(\frac{\partial H_\theta}{\partial y} + x \right) \tag{6.69}.$$

Enfin, la fonction harmonique conjuguée de H_θ

$$Z_\theta = \theta + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \tag{6.70}$$

dont les données aux limites sont du type de Dirichlet

$$\begin{aligned} Z_\theta &= \frac{1}{2} (x^2 + y^2) && \text{sur } c_0 \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \alpha_i && \text{sur les } c_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \tag{6.70}'$$

avec

$$\int_{c_i} \frac{\partial Z_\theta}{\partial n} ds = 0 \quad (i=1,2,\dots,n)$$

détermine aussi les tensions par les formules (6.68) à l'intervention des équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial H_\theta}{\partial x} = \frac{\partial Z_\theta}{\partial y} \quad \frac{\partial H_\theta}{\partial y} = - \frac{\partial Z_\theta}{\partial x}$$

De la comparaison entre (6.47)' et (6.69) on conclut à

$$x = - \frac{\partial H_\theta}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad y = \frac{\partial H_\theta}{\partial x} - \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

Calculons alors le moment d'inertie polaire de la section; il vient

$$I_p = \int_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_D \left\{ \left(\frac{\partial H_\theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_\theta}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy + \int_D \left\{ \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (6.71)$$

car, par une transformation de Stokes,

$$\int_D \left(\frac{\partial H_\theta}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial H_\theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) dx dy = - \sum_0^n \int_{c_i} H_\theta d\theta = 0$$

D'autre part, par la première formule de Green appliquée à θ grad θ .

$$\begin{aligned} \int_D \text{grad } \theta \cdot \text{grad } \theta \, dx \, dy &= - \int_D \theta \, \nabla^2 \theta \, dx \, dy + \sum_0^n \int_{c_i} \theta \, \frac{\partial \theta}{\partial n} \, ds \\ &= 2 \int_D \theta \, dx \, dy + 2 \sum_1^n \alpha_i \, \Omega_i = J \end{aligned} \quad (6.72)$$

La substitution de ce résultat dans (6.71)

$$J = I_p - \int_D \left\{ \left(\frac{\partial H_\theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_\theta}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (6.73)$$

met en évidence la contribution du gauchissement au coefficient de raideur de torsion. Elle est toujours négative et par conséquent le coefficient de raideur de torsion de la théorie de de Saint-Venant est toujours inférieur au moment d'inertie polaire.

Il lui est égal pour la barre et pour le tube circulaires.

6.11. Le centre de torsion pour un pseudo-encastrement

Utilisant la condition approchée de pseudo-encastrement de WEINSTEIN

$$\int_D w^2(x,y,0) dx dy \quad \text{minimum}$$

on trouve ici, comme cas particulier des équations (6.56) avec l'interprétation (6.67)

$$I_{xx} y_F - I_{xy} x_F = \int_D H_\theta x dx dy \quad (6.74)$$

$$I_{xy} y_F - I_{yy} x_F = \int_D H_\theta y dx dy$$

Cette définition du centre de torsion avait déjà été proposée antérieurement à WEINSTEIN par KAPPUS.

6.12. La flexion sans torsion

Il s'agit ici d'une flexion avec efforts tranchants. Au départ, la définition d'une flexion sans torsion semble devoir contenir une part inévitable de convention. En effet, d'un point de vue cinématique, l'équation (6.41) démontre l'impossibilité d'annuler la torsion de toutes les fibres par suite de l'effet de Poisson. La convention $\theta = 0$ annule la torsion de la fibre neutre ou encore, ce qui est plus significatif, la torsion moyenne des fibres réelles

$$\int_D \frac{\partial \omega}{\partial z} dx dy = 0$$

Une telle définition de la flexion sans torsion a été proposée par TIMOSHENKO et suivie par plusieurs autres auteurs, dont SOKOLNIKOFF, MINDLIN et SALVADORI. Son défaut majeur est de ne pas séparer les énergies de déformation en flexion et torsion pure.

Une autre façon d'établir une convention est de choisir le centre de flexion, c'est-à-dire le point par où passent dans une section droite les lignes d'action des efforts tranchants résultants; c'est un point de vue de statique. BARRE de SAINT-VENANT avait lui-même choisi d'étudier le cas où les résultantes passent par le centroïde (ici l'origine des axes), mais on pourrait, plus logiquement, choisir le cas où le centre coïncide avec le centre de torsion au sens de KAPPUS et WEINSTEIN. Il se fait que cette dernière définition de la flexion sans torsion coïncide avec la définition proposée par TREFFTZ, basée sur la condition que les énergies de déformation en torsion pure et en flexion sans torsion soient découplées. Il en résulte certaines simplifications par rapport à la définition de TIMOSHENKO; le centre de flexion-torsion a des coordonnées indépendantes du coefficient de Poisson et le champ des tensions tangentielles induit par effet de Poisson devient statiquement équivalent à zéro. Enfin, cette définition est réconciliable avec le point de vue cinématique; elle annule une moyenne pondérée de la torsion des fibres, la fonction de pondération n'étant autre que la fonction de torsion étendue.

Comme la torsion des fibres est due ici uniquement à un effet de Poisson, nous posons $\theta = \nu c$ dans (6.41)

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \nu (b x - a y + c) \quad (6.75)$$

et chercherons plus tard à déterminer le paramètre c de façon à découpler les énergies de torsion pure et de flexion sans torsion. Les équations gouvernant le champ des tensions tangentielles sont ici

$$\operatorname{div} \vec{\tau} = -E (a x + b y)$$

$$\operatorname{rot}_z \vec{\tau} = 2 \nu G (b x - a y + c)$$

Avec l'introduction, due à WEBER, d'une solution du type (6.47), où, pour faire la distinction avec le cas de la torsion pure, nous remplaçons Ψ par K , nous obtenons le problème (6.48), c'est-à-dire

$$\nabla^2 \phi = - (a x + b y) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{sur les } c_i \quad (6.48)$$

et l'équivalent particulier de (6.49)

$$\nabla^2 K = - 2 \nu (b x - a y + c)$$

$$d K = 0 \quad \text{sur les } c_i$$

soit encore (6.76)

$$K = 0 \quad \text{sur } c_0$$

$$K = \beta_i \quad \text{sur les } c_i \quad (i=1,2,\dots,n)$$

Les constantes β_i étant à déterminer par les conditions circuitales

$$\int_{c_i} \frac{\partial K}{\partial n} ds = 2 \nu \Omega_i (b \hat{x}_i - a \hat{y}_i + c) \quad (6.76)'$$

Le champ engendré par le potentiel ϕ s'appellera le champ principal; celui engendré par la fonction de courant K , qui tient compte des effets de Poisson, sera le champ secondaire.

Pour achever la définition du champ secondaire, il y a lieu de déterminer le paramètre c . Calculons à cet effet la densité d'énergie de déformation qui, selon le théorème de Clapeyron intérieur, vaut

$$W = \frac{1}{2} (\epsilon_x \sigma_x + \epsilon_y \sigma_y + \epsilon_z \sigma_z + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{xy} \gamma_{xy})$$

et que les hypothèses de la méthode semi-inverse réduisent déjà à

$$W = \frac{1}{2} (\epsilon_z \sigma_z + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})$$

Par application des lois constitutives (6.18) et (6.20) du milieu isotrope, nous en obtenons une expression dépendant uniquement des tensions :

$$W = \frac{1}{2E} \sigma_z^2 + \frac{1}{2G} (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \quad (6.77)$$

Comme $\sigma_z \equiv 0$ en torsion pure, le premier terme ne donnera lieu à aucun couplage. Par contre, superposant les états de tension tangentielle,

$$\tau_{xz} = E \frac{\partial \phi}{\partial x} + G \frac{\partial K}{\partial y} + G \hat{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\tau_{yz} = E \frac{\partial \phi}{\partial y} - G \frac{\partial K}{\partial x} - G \hat{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

nous obtenons les termes suivants pour le couplage énergétique entre flexion sans torsion et flexion pure :

$$W' = E\hat{\theta} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + G\hat{\theta} \left(\frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)$$

La formule de Stokes

$$\int_D \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) dx dy = \sum_0^n \int_{c_i} \phi d\theta = 0$$

montre que la contribution du premier terme est nulle quand elle est intégrée sur la section droite. La contribution du second peut s'écrire au facteur $G\hat{\theta}$ près

$$\int_D \text{grad } K \cdot \text{grad } \theta dx dy = - \int_D K \nabla^2 \theta dx dy + \sum_0^n \int_{c_i} K \frac{\partial \theta}{\partial n} ds$$

Eu égard aux équations (6.49)', (6.49)" et (6.76), elle devient nulle si

$$\int_D K dx dy + \sum_1^n \beta_i \Omega_i = 0 \quad (6.78)$$

C'est la condition obtenue par TREFFTZ; elle ne détermine le paramètre c et ne définit donc la flexion sans torsion qu'implicitement.

Si, par contre, on l'écrit sous la forme

$$\int_D \text{grad } K \cdot \text{grad } \theta dx dy = - \int_D \theta \nabla^2 K dx dy + \sum_0^n \int_{c_i} \theta \frac{\partial K}{\partial n} ds$$

et fait usage de (6.76) et (6.76)', il vient (après division par 2 v) la condition de découplage équivalente

$$\int_D 0 (bx - ay + c) dx dy + \sum_1^n \alpha_i \Omega_i (b\hat{x}_i - a\hat{y}_i + c) \\ = \int_{\Omega_0} \hat{\theta} (bx - ay + c) dx dy = 0 \quad (6.79)$$

Elle fournit non seulement la valeur explicite de c

$$c J = 2 a \int_{\Omega_0} \hat{\theta} y dx dy - 2 b \int_{\Omega_0} \hat{\theta} x dx dy \quad (6.80)$$

mais aussi l'interprétation cinématique de la flexion sans torsion.

En effet, la torsion des fibres, donnée par (6.75), se trouve être annulée en moyenne pondérée

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial \omega}{\partial z} \hat{\theta} dx dy = 0 \quad (6.81)$$

Comme la fonction poids est la fonction de torsion étendue, la pondération est appliquée à la torsion des fibres virtuelles situées dans les cavités. Au contraire, dans la définition de Timoshenko, il s'agit de la moyenne ordinaire et des seules fibres réelles. En dehors de sa propriété la plus importante, qui est de rendre les énergies de flexion et de torsion additives, la définition de TREFFTZ de la flexion sans torsion possède encore deux caractéristiques intéressantes par leur simplicité.

i) L'équivalence statique à zéro du champ secondaire

Quel que soit le paramètre c, les efforts tranchants du champ secondaire sont nuls, car par des formules de Stokes

$$G \int_D \frac{\partial K}{\partial y} dx dy = G \sum_0^n \int_{c_i} x dK = 0$$

$$- G \int_D \frac{\partial K}{\partial x} dx dy = G \sum_0^n \int_{c_i} y dK = 0$$

Par contre, le couple de torsion du champ secondaire dépend du paramètre :

$$\begin{aligned} - G \int_D \left(x \frac{\partial K}{\partial x} + y \frac{\partial K}{\partial y} \right) dx dy &= G \int_D K \nabla^2 \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) dx dy - G \sum_0^n \int_{c_i} K (x dy - y dx) \\ &= 2 G \left\{ \int_D K dx dy + \sum_1^n \beta_i \Omega_i \right\} \end{aligned}$$

Il est bien nul quand la condition (6.78) de Trefftz est satisfaite.

ii) L'identité entre centre de flexion et centre de torsion

Le centre de flexion (x_F, y_F) est le point de la section droite par où passent les lignes d'action des efforts tranchants afin de former un système statiquement équivalent au champ des tensions tangentielles. En vertu du résultat précédent, il suffit d'examiner l'équivalence avec le champ principal. L'égalité des moments par rapport au centroïde livre

$$E \int_D \left(x \frac{\partial \phi}{\partial y} - y \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy = - y_F T_x + x_F T_y$$

Transformant le premier membre par la formule de Stokes et substituant (6.40) au second, il vient, après simplification par E,

$$- \sum_0^n \int_{c_i} \phi (x dx + y dy) = a (- y_F I_{xx} + x_F I_{xy}) + b (- y_F I_{xy} + x_F I_{yy})$$

Il y a donc lieu de décomposer ϕ dans ses parties dues aux paramètres a et b

$$\phi = a \phi_a + b \phi_b$$

gouvernées, selon (6.43), par les équations

$$\nabla^2 \phi_a = -x \qquad \frac{\partial \phi_a}{\partial n} = 0 \quad \text{sur les } c_i \quad (6.82)$$

$$\nabla^2 \phi_b = -y \qquad \frac{\partial \phi_b}{\partial n} = 0 \quad \text{sur les } c_i \quad (6.83)$$

et l'identification des coefficients de a et de b fournit les équations suivantes pour le calcul du centre de flexion

$$y_F I_{xx} - x_F I_{xy} = \sum_0^n \int_{c_i} \phi_a (x dx + y dy) \quad (6.84)$$

$$y_F I_{xy} - x_F I_{yy} = \sum_0^n \int_{c_i} \phi_b (x dx + y dy)$$

En montrant que les seconds membres sont équivalents à ceux des équations (6.74), on établit l'identité entre le centre de flexion et le centre de torsion de WEINSTEIN-KAPPUS. A cet effet, multiplions la première des équations (6.82) par le gauchissement unitaire en torsion

$$H_\theta \nabla^2 \phi_a = -x H_\theta$$

et intégrons avec application de la seconde formule de Green

$$\int_D H_\theta x dx dy = - \int_D \phi_a \nabla^2 H_\theta dx dy + \sum_0^n \int_{c_i} (\phi_a \frac{\partial}{\partial n} H_\theta - H_\theta \frac{\partial}{\partial n} \phi_a) ds$$

Finalement, eu égard à (6.67) et à la deuxième des équations (6.82)

$$\int_D H_\theta x dx dy = \sum_0^n \int_{c_i} \phi_a (x dx + y dy)$$

On établirait de façon analogue l'équivalence entre les deux autres seconds membres de (6.74) et (6.84).

Les équivalences en question ont été découvertes par CICALA qui, adoptant la définition de Timoshenko, considère notre (x_F, y_F) comme constituant seulement les valeurs principales des coordonnées du centre de flexion; une partie secondaire dépendant encore du coefficient de Poisson. C'est un autre avantage de la définition de Trefftz que de rendre le centre de flexion-torsion indépendant des effets de Poisson.

L'intégration du gauchissement de flexion peut être envisagée de plusieurs façons. Si le potentiel du champ principal des tensions tangentielles a été déterminé, on a

$$g = 2 (1 + \nu) \phi + H + \lambda$$

et il suffit d'encore déterminer la fonction harmonique H avec les données de Neumann

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \nu \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{x^2 + y^2}{2} c - \frac{a}{b} (y^3 + 3yx^2) + \frac{b}{6} (x^3 + 3xy^2) \right\} \text{ sur les } c_i,$$

qui apporte un effet de Poisson supplémentaire.

Si une solution formelle suffisamment simple existe, on peut préférer le passage par la fonction harmonique conjuguée Z dont les données sont de Dirichlet.

On peut aussi chercher d'emblée le gauchissement global par son équation de Poisson et ses données de Neumann aux limites (6.64), auquel cas on sait qu'on peut en déduire simultanément les tensions tangentielles.

6.13. La relation de raideur pour la torsion

On a vu que les paramètres (a, b) avaient une interprétation cinématique comme dérivées de courbures (6.38) et une interprétation en terme d'efforts tranchants liées par des équations de raideur (6.40).

Nous sommes maintenant en mesure d'étendre ce point de vue au paramètre θ , déjà défini du point de vue cinématique par (6.39) comme torsion de la fibre neutre. Superposant la torsion pure et la flexion sans torsion, on a

$$\theta = \hat{\theta} + \nu c$$

où la partie $\hat{\theta}$, due à la torsion pure, est liée par (6.15) au couple de réduction en (x_F, y_F) de la résultante des tensions tangentielles, c'est-à-dire au moment M_F par rapport à l'axe de flexion-torsion :

$$G J \hat{\theta} = M_F = \int_D \left[(x-x_F)\tau_{yz} - (y-y_F)\tau_{xz} \right] dx dy \quad (6.85)$$

Le paramètre c dépend des paramètres a et b suivant (6.80) que nous réécrivons sous la forme

$$c = a y_0 - b x_0 \quad (6.86)$$

en définissant le point (x_0, y_0) par les formules

$$J y_0 = 2 \int_{\Omega_0} \hat{\theta} y dx dy \quad J x_0 = 2 \int_{\Omega_0} \hat{\theta} x dx dy \quad (6.87)$$

Nous pouvons maintenant réécrire la torsion des fibres comme

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \hat{\theta} + \nu (bx - ay + c)$$

et, tablant sur l'interprétation (6.79) de la flexion sans torsion, redéfinir $\hat{\theta}$ par la moyenne pondérée

$$J \hat{\theta} = 2 \int_{\Omega_0} \hat{\theta} \frac{\partial \omega_z}{\partial z} dx dy \quad (6.87)'$$

Nous complétons alors les relations de raideur par

$$\frac{M_F}{GJ} = 0 + \nu (b x_0 - a y_0) \quad (6.88)$$

ce qui permet en définitive d'interpréter les 3 paramètres en fonction des résultantes des tensions tangentielles au centre de réduction (x_F, y_F) .

6.14. L'énergie totale en fonction des déformations des fibres

Exprimons la densité d'énergie en fonction des déformations

$$W = \frac{1}{2} E \epsilon_z^2 + \frac{1}{2} G (\gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)$$

et remplaçons-y l'allongement spécifique par (6.51)

$$\epsilon_z = \epsilon + x K_x(z) + y K_y(z)$$

et les glissements par leurs expressions

$$\gamma_{xz} = 2(1+\nu) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} + \hat{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\gamma_{yz} = 2(1+\nu) \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial K}{\partial x} - \hat{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

résultant d'une superposition de la torsion et de la flexion sans torsion. Il a déjà été vérifié comment, par intégration sur la section droite, la contribution de θ était découplée de celle de ϕ et pouvait l'être de celle de K par un choix judicieux du paramètre c . En fait les contributions de ϕ et de K sont elles-mêmes découplées, comme le montre la formule de Stokes

$$\int_D \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial K}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial K}{\partial x} \right) dx dy = \sum_0^n \int_{a_1} \phi dK = 0$$

Il vient ainsi pour l'énergie par unité de longueur

$$\begin{aligned}
 L = \int_D W \, dx \, dy &= \frac{1}{2} E (\Omega \epsilon^2 + I_{xx} K_x^2 + 2 I_{xy} K_x K_y + I_{yy} K_y^2) \\
 &+ 2G(1+\nu)^2 \int_D \text{grad}\phi \cdot \text{grad}\phi \, dx \, dy + \frac{1}{2} G \int_D \text{grad}K \cdot \text{grad}K \, dx \, dy \\
 &+ \frac{1}{2} G \hat{\theta}^2 \int_D \text{grad} \theta \cdot \text{grad} \theta \, dx \, dy
 \end{aligned}$$

L'interprétation de cette formule en terme de déformations de fibres fait appel à la décomposition de ϕ dans ses parties gouvernées par les équations (6.82) et (6.83) et la décomposition analogue de K

$$K = a K_a + b K_b$$

avec

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 K_a &= y - y_0 & \nabla^2 K_b &= -x + x_0 \quad \text{dans } D \\
 d K_a &= 0 & d K_b &= 0 \quad \text{sur les } c_i \quad (6.89)
 \end{aligned}$$

$$\int_{c_i} \frac{\partial K_a}{\partial n} \, ds = \Omega_i (y_0 - \hat{y}_i) \quad \int_{c_i} \frac{\partial K_b}{\partial n} \, ds = \Omega_i (-x_0 + \hat{x}_i) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

Toutes les fonctions de tension ont alors reçu des définitions de nature purement géométrique.

Eu égard au résultat (6.72) et aux nouvelles définitions

$$\begin{aligned}
 S_{xx} &= 4(1+\nu)^2 \int_D \text{grad}\phi_a \cdot \text{grad}\phi_a \, dx \, dy + \int_D \text{grad} K_a \cdot \text{grad} K_a \, dx \, dy \\
 S_{xy} &= 4(1+\nu)^2 \int_D \text{grad}\phi_a \cdot \text{grad}\phi_b \, dx \, dy + \int_D \text{grad} K_a \cdot \text{grad} K_b \, dx \, dy \quad (6.90) \\
 S_{yy} &= 4(1+\nu)^2 \int_D \text{grad}\phi_b \cdot \text{grad}\phi_b \, dx \, dy + \int_D \text{grad} K_b \cdot \text{grad} K_b \, dx \, dy
 \end{aligned}$$

dont plusieurs variantes sont d'ailleurs possibles par transformations de Green, il vient pour l'énergie par unité de longueur

$$L = \frac{E}{2} \left[\Omega \varepsilon^2 + I_{xx} (\ddot{u}_0)^2 + 2 I_{xy} \ddot{u}_0 \ddot{v}_0 + I_{yy} (\ddot{v}_0)^2 \right] \\ + \frac{G}{2} \left[S_{xx} (\ddot{u}_0^*)^2 + 2 S_{xy} \ddot{u}_0^* \ddot{v}_0^* + S_{yy} (\ddot{v}_0^*)^2 + J \hat{\theta}^2 \right] \quad (6.91)$$

Le premier terme est l'énergie d'extension où ε est l'allongement spécifique de la fibre neutre, les trois suivants représentent une énergie de flexion engendrée par les courbures de cette fibre; nous trouvons ensuite un groupe de trois termes dus aux variations de ces courbures et, enfin, le terme d'énergie de torsion.

6.15. L'énergie totale en fonction des sollicitations

Les déformations peuvent être remplacées au profit des sollicitations, telles que l'effort de traction, les moments fléchissants, efforts tranchants et moment de torsion à l'aide de formules telles que (6.25) ou (6.26) et (6.31).

Pour le moment de torsion nous utiliserons (6.85) où M_F est le moment de torsion pris par rapport à l'axe de flexion-torsion.

Pour ne pas alourdir le résultat, on prendra le cas où les axes ont été orientés de façon à annuler le produit d'inertie I_{xy} .

Il vient alors la forme, dite complémentaire, de l'énergie par unité de longueur

$$\Lambda = \frac{1}{2E\Omega} T_z^2 + \frac{1}{2EI_{xx}} M_x^2 + \frac{1}{2EI_{yy}} M_y^2 \\ + \frac{1}{2G} \left[S_{xx} \left(\frac{T_x}{I_{xx}} \right)^2 + 2 S_{xy} \frac{T_x}{I_{xx}} \frac{T_y}{I_{yy}} + S_{yy} \left(\frac{T_y}{I_{yy}} \right)^2 + \frac{1}{J} M_F^2 \right]$$

(6.92)

6.16. Les équations constitutives généralisées de la flexion-torsion des poutres

Un développement de l'énergie conduisant à une interprétation plus fondamentale a pour point de départ le théorème de Clapeyron dans lequel on substitue aux déformations leurs expressions comme dérivées des déplacements; pour le cas présent

$$L_c = \frac{1}{2} \int_D \left[\sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy$$

Supposant toujours $I_{xy} = 0$ pour simplifier la présentation des calculs, exprimons les tensions en fonction des sollicitations :

$$\sigma_z = \frac{T}{\Omega} + \frac{M_x}{I_{xx}} x + \frac{M_y}{I_{yy}} y \quad (6.93)$$

$$\tau_{xz} = \frac{T_x}{I_{xx}} \left(\frac{\partial \phi_a}{\partial x} + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial K_a}{\partial y} \right) + \frac{T_y}{I_{yy}} \left(\frac{\partial \phi_b}{\partial x} + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial K_b}{\partial y} \right) + \frac{M_F}{J} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (6.94)$$

$$\tau_{yz} = \frac{T_x}{I_{xx}} \left(\frac{\partial \phi_a}{\partial y} - \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial K_a}{\partial x} \right) + \frac{T_y}{I_{yy}} \left(\frac{\partial \phi_b}{\partial y} - \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial K_b}{\partial x} \right) - \frac{M_F}{J} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

et effectuons les intégrations. Un certain nombre de termes disparaissent en vertu de formules de Stokes telles que la suivante

$$\int_D \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy = \sum_0^n \int_{c_i} w d\theta = 0$$

et celles où θ est remplacé par K_a ou par K_b . D'autres termes donnent lieu à des définitions de déplacements généralisés, dont il importe de reconnaître d'équivalence.

Le développement du terme en $\sigma_z \partial w / \partial z$, par exemple, suggère les définitions suivantes :

$$\Omega W(z) = \int_D w \, dx \, dy \quad (6.95)$$

pour un déplacement longitudinal moyen $W(z)$,

$$I_{xx} \alpha(z) = \int_D w \, x \, dx \, dy \quad (6.96)$$

$$I_{yy} \beta(z) = \int_D w \, y \, dx \, dy$$

pour des rotations moyennes $\alpha(z)$ et $\beta(z)$ des sections droites. Ces définitions se réduisent à des identités quand la section reste plane :

$$w = W + x \alpha + y \beta$$

A l'aide des équations (6.82) et (6.83), on obtient pour les rotations moyennes des définitions équivalentes

$$I_{xx} \alpha(z) = - \int_D w \nabla^2 \phi_a \, dx \, dy = \int_D \text{grad } w \cdot \text{grad } \phi_a \, dx \, dy \quad (6.96)'$$

$$I_{yy} \beta(z) = - \int_D w \nabla^2 \phi_b \, dx \, dy = \int_D \text{grad } w \cdot \text{grad } \phi_b \, dx \, dy$$

Elles se présentent cette fois comme moyennes pondérées du vecteur rotation locale $\text{grad } w$ et sont précisément celles qui conviennent au développement des termes $\tau_{xz} \partial w / \partial x$ et $\tau_{yz} \partial w / \partial y$. Enfin, le développement des termes en $\tau_{xz} \partial u / \partial z$ et $\tau_{yz} \partial v / \partial z$ suggère l'introduction de moyennes pondérées $U(z)$, $V(z)$, des déplacements transversaux :

$$I_{xx} u(z) = \int_D \left[\left(\frac{\partial \phi_a}{\partial x} + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial K_a}{\partial y} \right) u + \left(\frac{\partial \phi_a}{\partial y} - \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial K_a}{\partial x} \right) v \right] dx dy \quad (6.97)$$

$$I_{yy} v(z) = \int_D \left[\left(\frac{\partial \phi_b}{\partial x} + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial K_b}{\partial y} \right) u + \left(\frac{\partial \phi_b}{\partial y} - \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial K_b}{\partial x} \right) v \right] dx dy$$

Les propriétés

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\partial \phi_a}{\partial x} dx dy &= I_{xx} & \int_D \frac{\partial \phi_a}{\partial y} dx dy &= \int_D \frac{\partial \phi_b}{\partial x} dx dy = I_{xy} \\ \int_D \frac{\partial \phi_b}{\partial y} dx dy &= I_{yy} \end{aligned} \quad (6.98)$$

qui découlent naturellement de l'application de la première formule de Green aux paires de fonctions (x, ϕ_a) , (y, ϕ_a) , (x, ϕ_b) et (y, ϕ_b) , ainsi que

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\partial K_a}{\partial x} dx dy = 0 & \quad \int_D \frac{\partial K_a}{\partial y} dx dy = 0 & \quad \int_D \frac{\partial K_b}{\partial x} dx dy = 0 \\ \int_D \frac{\partial K_b}{\partial y} dx dy = 0 \end{aligned} \quad (6.98)'$$

qui découlent des formules de Stokes appliquées aux paires analogues (x, K_a) , (y, K_a) , (x, K_b) et (y, K_b) et sont d'ailleurs implicitement contenues dans l'équivalence à zéro du champ secondaire des tensions tangentielles, font en sorte que les définitions (6.97) se réduisent bien à des identités si u et v étaient indépendants de x et y .

Il reste à interpréter le déplacement généralisé $\omega(z)$ associé au moment de torsion M_F

$$\begin{aligned}
J\omega(z) &= \int_D \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} u - \frac{\partial \theta}{\partial x} v \right) dx dy = \int_D \theta \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \\
&\quad + \sum_0^n \int_{c_i} \theta \left(u \frac{\partial y}{\partial n} - v \frac{\partial x}{\partial n} \right) ds \\
&= 2 \int_D \theta \omega_z dx dy - \sum_1^n \alpha_i \int_{c_i} u dx + v dy = 2 \int_{\Omega_0} \hat{\theta} \omega_z dx dy
\end{aligned} \tag{6.98}$$

Ce déplacement fait intervenir la même pondération pour la rotation des fibres que celle déjà rencontrée pour pondérer leur torsion. Encore une fois cette définition se réduit à une identité pour un ω_z indépendant de x et de y .

L'énergie par unité de longueur prend ainsi la forme

$$L_c = \frac{1}{2} \left[T_z \frac{dW}{dz} + M_x \frac{d\alpha}{dz} + M_y \frac{d\beta}{dz} + T_x \left(\alpha + \frac{dU}{dz} \right) + T_y \left(\beta + \frac{dV}{dz} \right) + M_F \frac{d\omega}{dz} \right] \tag{6.99}$$

Elle est sous une forme canonique, comportant une somme de produits de variables conjuguées. Comparons la à la forme complémentaire (6.92) qui, étant quadratique et homogène dans les variables sollicitation (ou forces généralisées) peut, en vertu du théorème d'Euler, revêtir la forme

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left[T_z \frac{\partial \Lambda}{\partial T_z} + M_x \frac{\partial \Lambda}{\partial M_x} + M_y \frac{\partial \Lambda}{\partial M_y} + T_x \frac{\partial \Lambda}{\partial T_x} + T_y \frac{\partial \Lambda}{\partial T_y} + M_F \frac{\partial \Lambda}{\partial M_F} \right]$$

Il vient, par identification avec (6.99), les équations constitutives généralisées de la théorie des poutres

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial \Lambda}{\partial T_z} = \frac{1}{E\Omega} T_z \tag{100}$$

$$\frac{d\alpha}{dz} = \frac{\partial \Lambda}{\partial M_x} = \frac{1}{EI_{xx}} M_x \quad \frac{d\beta}{dz} = \frac{\partial \Lambda}{\partial M_y} = \frac{1}{EI_{yy}} M_y \tag{100}'$$

$$\alpha + \frac{dU}{dz} = \frac{\partial \Lambda}{\partial T_x} = \frac{S_{xx}}{G} \frac{T_x}{I_{xx}^2} + \frac{S_{xy}}{G} \frac{T_y}{I_{yy}^2} \quad \beta + \frac{dV}{dz} = \frac{\partial \Lambda}{\partial T_y} = \frac{S_{xy}}{G} \frac{T_x}{I_{xx}^2} + \frac{S_{yy}}{G} \frac{T_y}{I_{yy}^2}$$

(100)''

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{\partial \Lambda}{\partial M_F} = \frac{1}{GJ} M_F$$

(100)'''

Les premiers membres sont les déformations généralisées, conjuguées aux forces généralisées correspondantes. En particulier

$$\alpha + \frac{dU}{dz} \quad \text{et} \quad \beta + \frac{dV}{dz}$$

sont les déformations généralisées dues aux efforts tranchants; par construction même, ce sont des moyennes pondérées de glissements :

$$I_{xx} \left(\alpha + \frac{dU}{dz} \right) = \int \left[\left(\frac{\partial \phi_a}{\partial x} + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial K_a}{\partial y} \right) \gamma_{xz} + \left(\frac{\partial \phi_a}{\partial y} - \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial K_a}{\partial x} \right) \gamma_{yz} \right] dx dy$$

(101)

$$I_{yy} \left(\beta + \frac{dV}{dz} \right) = \int \left[\left(\frac{\partial \phi_b}{\partial x} + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial K_b}{\partial y} \right) \gamma_{xz} + \left(\frac{\partial \phi_b}{\partial y} - \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial K_b}{\partial x} \right) \gamma_{yz} \right] dx dy$$

Il est par exemple intéressant de vérifier qu'elles sont nulles quand les glissements proviennent seulement d'un état de torsion pure; à l'aide des équations (6.89) on peut effectivement les ramener à des expressions proportionnelles à

$$\int_{\Omega_0} \hat{\theta} (y-y_0) dx dy \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_0} \hat{\theta} (x-x_0) dx dy$$

qui sont bien nulles en vertu de (6.87).

6.17. Formulation unidimensionnelle de la flexion-torsion des poutres

En introduisant les déplacements moyens $U(z)$, $V(z)$, $W(z)$ et les rotations moyennes $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\omega(z)$, les équations constitutives et les équations d'équilibre prennent la forme d'équations différentielles ordinaires pour la variable z . Cette présentation de la théorie de Barré de Saint-Venant ne doit pas faire oublier qu'elle n'est solution exacte des équations de l'élasticité que si les efforts tranchants et le moment de torsion sont constants. De plus, les efforts doivent être appliqués dans les sections terminales comme le prescrivent la loi d'équarissage et les solutions des problèmes gouvernant la distribution des tensions tangentielles. Enfin, les sections doivent être libres de se contracter dans leur plan et de gauchir. Ces limitations sont sévères pour les applications techniques qui requièrent des mises en charge par tractions de surfaces appliquées au manteau et des contraintes cinématiques ou statiques terminales moins restrictives. Il est possible de donner à la théorie de de Saint-Venant les extensions nécessaires pour rendre les efforts tranchants et moment de torsion variables tout en conservant une solution exacte. Comme l'a montré MICHELL, une telle extension met en jeu un couplage entre les problèmes de fonctions harmoniques de la torsion et de la flexion, tels que rencontrés dans ce chapitre et les problèmes de fonctions bi-harmoniques des états de tension plans. Elle sera donc préférablement abordée après l'étude de ces derniers. Cette théorie plus générale ne permet pas encore, malgré sa complexité, de libéraliser les contraintes terminales. Ici, il est d'usage de faire appel au principe de de Saint-Venant selon lequel toute perturbation à la distribution des tensions sur une section terminale, étant nécessairement réalisée par l'addition d'une distribution statiquement équivalente à zéro, tend à disparaître à une distance de l'extrémité du même ordre de grandeur que les dimensions transversales.

Les équations constitutives généralisées, associées aux équations d'équilibre plus générales

$$\frac{dM_x}{dz} = T_x \quad \frac{dM_y}{dz} = T_y \quad \frac{dT_z}{dz} = 0$$

$$\frac{dT_x}{dz} + p_x = 0 \quad \frac{dT_y}{dz} + p_y = 0 \quad \frac{dM_F}{dz} + m = 0$$

qui comportent des charges transversales $p_x(z)$, $p_y(z)$ et $m(z)$, fournissent une approximation d'usage courant. Leur justification peut être rattachée aux applications des principes variationnels de la théorie de l'Elasticité et sera donc différée jusqu'après l'étude de ces derniers. Une telle formulation uni-dimensionnelle présente surtout l'avantage de conditions aux limites simples. Un encastrement dans la section $z = 0$, par exemple, est représenté par les conditions

$$U(0) = 0 \quad V(0) = 0 \quad W(0) = 0 \quad \alpha(0) = 0 \quad \beta(0) = 0 \quad \omega(0) = 0$$

On y reconnaît un pseudo-encastrement, dans le sens qui a été donné à ce terme lors de la définition d'un gauchissement vrai. L'énergie de déformation par unité de longueur dans cette formulation a déjà été présentée sous sa forme "complémentaire" (6.92) et de Clapeyron (6.99). Elle possède évidemment une forme directement exprimée dans les déformations généralisées

$$L = \frac{1}{2} E_{II} \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} EI_{xx} \left(\frac{d\alpha}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} EI_{yy} \left(\frac{d\beta}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} GJ \left(\frac{d\omega}{dz} \right)^2$$

$$+ \frac{G}{2(S_{xx} S_{yy} - S_{xy}^2)} \left[I_{xx}^2 S_{yy} \left(\alpha + \frac{dU}{dz} \right)^2 + I_{yy}^2 S_{xx} \left(\beta + \frac{dV}{dz} \right)^2 - (I_{xx}^2 + I_{yy}^2) S_{xy} \left(\alpha + \frac{dU}{dz} \right) \right. \\ \left. \left(\beta + \frac{dV}{dz} \right) \right] \quad (101)$$

Dans certaines conditions, que nous allons analyser, elle peut encore être simplifiée en supprimant la partie relative aux déformations dues aux efforts tranchants. Examinons le cas d'une poutre encastree dans la section $z = 0$ et soumise à un effort tranchant T_x à l'extrémité $z = \ell$. Il vient par intégration de l'équilibre

$$M_x = T_x (z - \ell)$$

puis, par intégration des déformations

$$\alpha(z) = \frac{T_x}{EI_{xx}} \left(\frac{1}{2} z^2 - \ell z \right)$$

$$U(\ell) = \frac{T_x \ell^3}{3EI_{xx}} + \frac{S_{xx} T_x \ell}{GI_{xx}^2}$$

La poutre sera dite longue si le second terme est petit devant le premier, c'est-à-dire si le déplacement transversal est dû en ordre principal à la courbure des fibres et non à la déformation due aux efforts tranchants. Ceci suppose que le paramètre sans dimensions

$$\frac{6S_{xx}(1+\nu)}{I_{xx} \ell^2} \ll 1 \quad \text{ou} \quad \ell \ll \sqrt{\frac{6S_{xx}(1+\nu)}{I_{xx}}}$$

Dans une poutre longue par rapport aux deux directions transversales, on peut donc négliger les déformations dues aux efforts tranchants et poser

$$\alpha = - \frac{dU}{dz} \qquad \beta = - \frac{dV}{dz}$$

ce qui revient à exprimer une perpendicularité en moyenne des sections droites par rapport aux fibres. L'énergie simplifiée est alors fonction des courbures moyennes

$$L = \frac{1}{2} E\Omega \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 + \frac{1}{2} EI_{xx} \left(\frac{d^2U}{dz^2}\right)^2 + \frac{1}{2} EI_{yy} \left(\frac{d^2V}{dz^2}\right)^2 + \frac{1}{2} GJ \left(\frac{d\omega}{dz}\right)^2 \quad (101)'$$

6.18. Applications

La détermination pratique des fonctions de la torsion et de la flexion se ramène, comme on l'a vu, à la résolution de problèmes elliptiques du type de Poisson ou de Laplace avec des données aux frontières du type de Dirichlet ou de Neumann. La tendance actuelle est de plus en plus à la résolution par voie purement numérique, soit à partir d'un schéma de différences finies ou d'un assemblage d'éléments finis. Les principes variationnels qui gouvernent les fonctions cherchées sont alors d'une grande importance et seront présentés comme cas particuliers des principes variationnels généraux de l'élasticité linéaire.

Il faut cependant mentionner l'existence de nombreuses analogies avec d'autres phénomènes physiques, tels que la déflexion d'une membrane ou d'une interface fluide libre ou chargée, le champ du potentiel à la surface d'une cuve rhéoelectrique, qui permettent une résolution par voie expérimentale. On consultera avec profit à ce sujet, le chapitre sur les analogies de MINDLIN et SALVADORI dans le livre de HETENYI.

Dans les exemples qui vont suivre, la méthode suivie sera strictement "inverse"; on partira de solutions analytiques simples de l'équation de Laplace et on examinera les formes géométriques qui permettent d'en faire la solution du problème posé.

A. Fonctions de torsion de la barre elliptique

Pour les fonctions de la torsion, nous partons du fait que le gauchissement unitaire $H_\theta(x,y)$ est conjugué harmonique de $Z_\theta(x,y)$
 $= \theta(x,y) + \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

Des solutions simples sont donc fournies par des polynômes de la variable complexe $x+iy$, dont un terme typique sera

$$H_\theta + i Z_\theta = (p_m + iq_m)(x + iy)^m$$

soit

$$H_\theta = p_m (x^m - \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} y^2 \dots) - q_m (m x^{m-1} y + \dots)$$

$$Z_\theta = p_m (m x^{m-1} y + \dots) + q_m (x^m - \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} y^2 \dots)$$

Rassemblant par exemple les contributions de q_0 et q_2 , la fonction de torsion

$$\theta = q_0 + q_2 (x^2 - y^2) - \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$$

prend la valeur zéro sur l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

à condition de choisir

$$q_0 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$2 q_2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

La fonction

$$\theta = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

régulière à l'intérieur de l'ellipse, nulle sur son pourtour, vérifie automatiquement (6.49)' de par sa construction; c'est la fonction de Prandtl pour la torsion d'une barre de section elliptique. Le gauchissement unitaire associé est, à une constante près

$$H_\theta = - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy$$

Les tensions tangentielles s'obtiennent par dérivations partielles de l'une ou l'autre

$$\frac{\tau_{xy}}{G\theta} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial H_\theta}{\partial x} - y = - \frac{2a^2 y}{a^2 + b^2}$$

$$\frac{\tau_{xy}}{G\theta} = - \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial H_\theta}{\partial y} + x = + \frac{2b^2 x}{a^2 + b^2}$$

La plus grande tension est en valeur absolue ($a > b$) τ_{xz} en $y = \pm b$.

La raideur de torsion demande, par exemple, l'évaluation de l'intégrale double de la fonction de Prandtl sur la section.

Posant

$$x = \rho a \cos \theta \quad y = \rho b \sin \theta \quad \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = ab\rho$$

on trouve

$$J = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \theta ab\rho d\rho = \frac{2a^3 b^3}{a^2 + b^2} 2\pi \int_0^1 (1-\rho^2)\rho d\rho = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

Le centre de torsion est, par raison de symétrie, situé à l'origine. La fonction de gauchissement est régulière à valeur unique dans tout l'intérieur de l'ellipse; par conséquent pour transformer la barre elliptique en tube elliptique, il suffit de retrancher la matière contenue dans la courbe d'équation $\vartheta = \alpha$, constante positive à choisir. Cette courbe est une autre ellipse

$$\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1$$

avec

$$\frac{m}{a^2} = \frac{n}{b^2} = \mu < 1 \qquad \alpha = (1-\mu^2) \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} .$$

Dès lors, la fonction de Prandtl étendue $\hat{\vartheta}$ est celle qui vaut

$$\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} (1-\rho^2) \qquad \text{dans la région} \quad \mu \leq \rho \leq 1$$

et μ dans la cavité. Il vient aisément pour le coefficient de raideur de torsion du tube elliptique

$$J = 2 \int_{\Omega_0} \hat{\vartheta} \, dx \, dy = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} (1 - \mu^4)$$

Ce résultat montre clairement qu'une portion importante de la région centrale peut être enlevée sans diminuer notablement la raideur de torsion.

B. Fonctions de torsion de la barre et du tube circulaires

Il suffit de faire $b = a$ dans les résultats précédents. Les "trajectoires" de tension sont les circonférences centrées à l'origine. La particularité la plus marquante est la disparition du gauchissement.

Comme démontré précédemment, la barre et le tube circulaires sont les seules pièces prismatiques dont l'état de torsion est compatible avec un encastrement parfait.

C. Fonctions de torsion avec pôles

La présence de puissances négatives de $(x+iy)$ ou, plus généralement, de $(x-x_0)+i(y-y_0)$ dans l'expression de $H_\theta + i Z_\theta$ est possible pour autant qu'un tel pôle en $x=x_0$, $y=y_0$ ne fasse pas partie du domaine élastique, soit qu'il soit localisé à l'extérieur de la directrice c_0 , ou à l'intérieur d'une cavité. La contribution typique d'un pôle simple à l'origine est

$$H_\theta + i Z_\theta = \frac{p_{-1} + i q_{-1}}{(x+iy)} = \frac{(p_{-1} + i q_{-1})(x-iy)}{x^2 + y^2}$$

Discutons par exemple le cas d'une fonction de torsion comportant la contribution d'un pôle simple en $x=a, y=0$ et d'un autre en $x=b, y=0$:

$$\theta = \frac{p(x-a)}{(x-a)^2 + y^2} + \frac{q(x-b)}{(x-b)^2 + y^2} - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + hx + k$$

Normalisons les paramètres a, b, p, q, h et k à notre disposition par la condition que cette fonction soit nulle sur une circonférence de base

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Remplaçant y^2 par $r^2 - x^2$, la fonction

$$\frac{p(x-a)}{r^2 + a^2 - 2ax} + \frac{q(x-b)}{r^2 + b^2 - 2bx} - \frac{1}{2} r^2 + h x + k$$

doit être identiquement nulle.

Comme démontré précédemment, la barre et le tube circulaires sont les seules pièces prismatiques dont l'état de torsion est compatible avec un encastrement parfait.

C. Fonctions de torsion avec pôles

La présence de puissances négatives de $(x+iy)$ ou, plus généralement, de $(x-x_0)+i(y-y_0)$ dans l'expression de $H_\theta + i Z_\theta$ est possible pour autant qu'un tel pôle en $x=x_0$, $y=y_0$ ne fasse pas partie du domaine élastique, soit qu'il soit localisé à l'extérieur de la directrice c_0 , ou à l'intérieur d'une cavité. La contribution typique d'un pôle simple à l'origine est

$$H_\theta + i Z_\theta = \frac{p_{-1} + i q_{-1}}{(x+iy)} = \frac{(p_{-1} + i q_{-1})(x-iy)}{x^2 + y^2}$$

Discutons par exemple le cas d'une fonction de torsion comportant la contribution d'un pôle simple en $x=a, y=0$ et d'un autre en $x=b, y=0$:

$$\theta = \frac{p(x-a)}{(x-a)^2 + y^2} + \frac{q(x-b)}{(x-b)^2 + y^2} - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + hx + k$$

Normalisons les paramètres a, b, p, q, h et k à notre disposition par la condition que cette fonction soit nulle sur une circonférence de base

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Remplaçant y^2 par $r^2 - x^2$, la fonction

$$\frac{p(x-a)}{r^2 + a^2 - 2ax} + \frac{q(x-b)}{r^2 + b^2 - 2bx} - \frac{1}{2} r^2 + h x + k$$

doit être identiquement nulle.

Ceci implique notamment la condition

$$abh = 0$$

résultant de l'annulation du terme en x^3 du numérateur après réduction au même dénominateur. Il est indifférent de prendre $a = 0$ ou $b = 0$ (échange du rôle des pôles); par contre l'alternative $h = 0$ est en principe à prendre aussi en considération.

Cas $b = 0$

On obtient pour autres conditions (annulation des coefficients de x^2, x et du terme indépendant), après réduction,

$$p = a(2k-r^2) \quad q = -h r^2 \quad (2k-r^2)(a^2-r^2) = 0$$

C.1. : on fait le choix

$$k = \frac{1}{2} r^2 \quad \text{qui entraîne} \quad p = 0$$

Il n'existe donc plus que le pôle à l'origine. La fonction de torsion

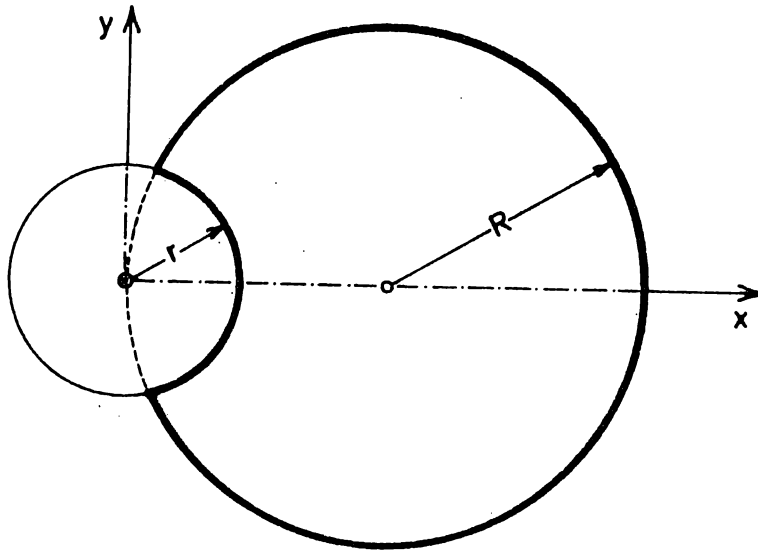
$$\theta = \frac{-hr^2 x}{x^2+y^2} - \frac{1}{2} (x^2+h^2) + hx + \frac{1}{2} r^2$$

est encore nulle sur la circonférence

$$x^2 + y^2 - 2 h x = 0$$

et représente celle d'un arbre de rayon h pourvu d'une entaille circulaire de rayon r centrée sur son pourtour (arbre à clavette). Le gauchissement unitaire est, à une constante près,

$$H = \left(1 - \frac{r^2}{x^2+y^2}\right) h y$$



C.2. : on fait le choix

$$a = r$$

La fonction de torsion devient

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{r(2k-r^2)(x-r)}{(x-r)^2 + y^2} - \frac{hr^2 x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + hx + k \\ &= (x^2 + y^2 - r^2) \left\{ \frac{k-r^2 + xr - \frac{1}{2} (x^2 + y^2)}{(x-r)^2 + y^2} + \frac{hx}{x^2 + y^2} \right\} \end{aligned}$$

Elle s'annule encore sur la courbe d'équation

$$-\frac{1}{2} + \frac{k-r^2/2}{(x-r)^2 + y^2} + \frac{hx}{x^2 + y^2} = 0$$

Pour $h = 0$, on perd le pôle à l'origine et le lieu d'annulation

$$(x-r)^2 + y^2 = 2k - r^2$$

est une circonférence centrée au pôle restant. Elle forme une encoche de clavette pour l'arbre de rayon r centré à l'origine et la solution n'est donc pas essentiellement nouvelle.

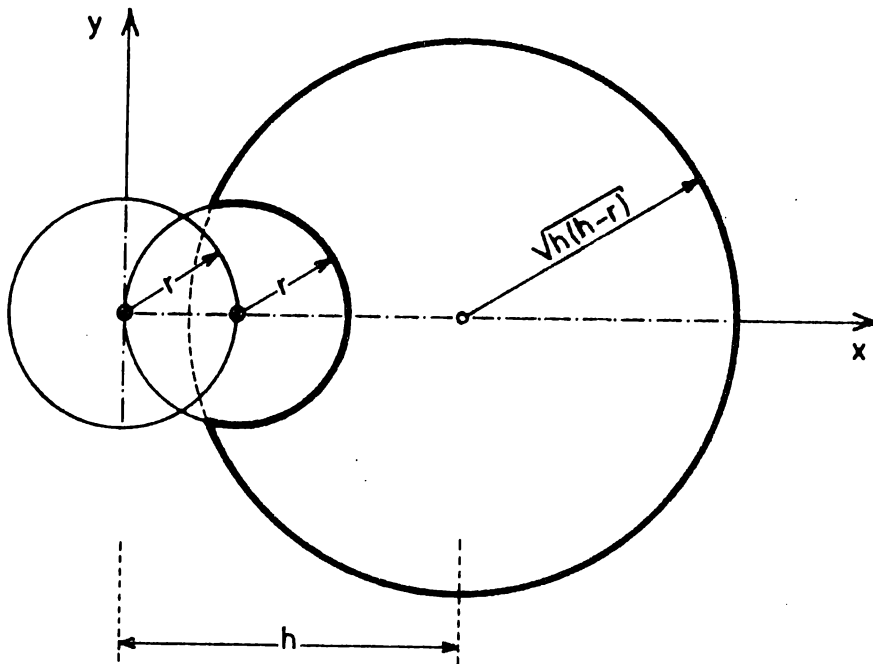
Par contre, en prenant

$$k = r^2 - \frac{1}{2} h r$$

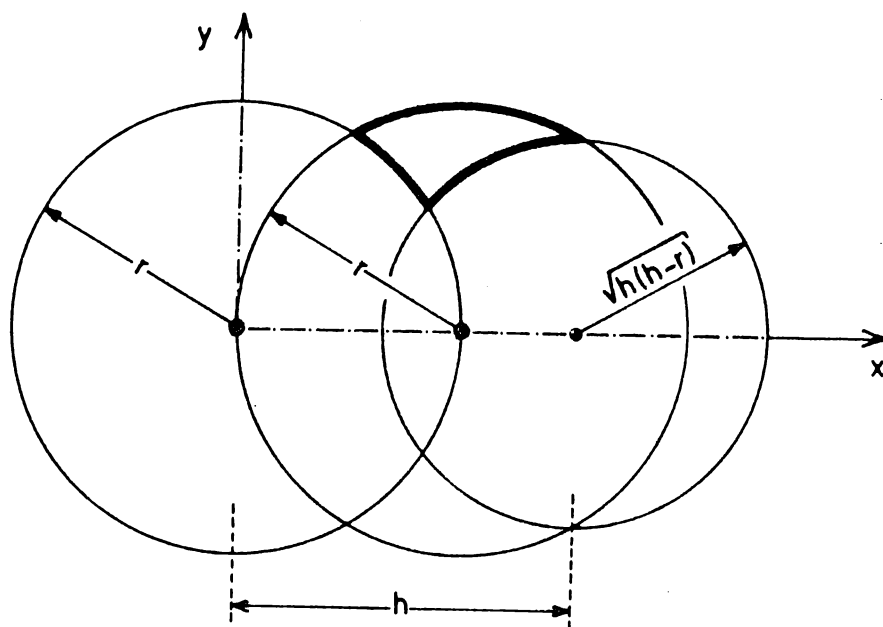
on ne perd aucun pôle et la fonction est encore nulle sur les deux circonférences

$$x^2 + y^2 - 2 r x = 0 \quad \text{centrée au pôle } x=r \text{ et passant par le pôle à l'origine}$$

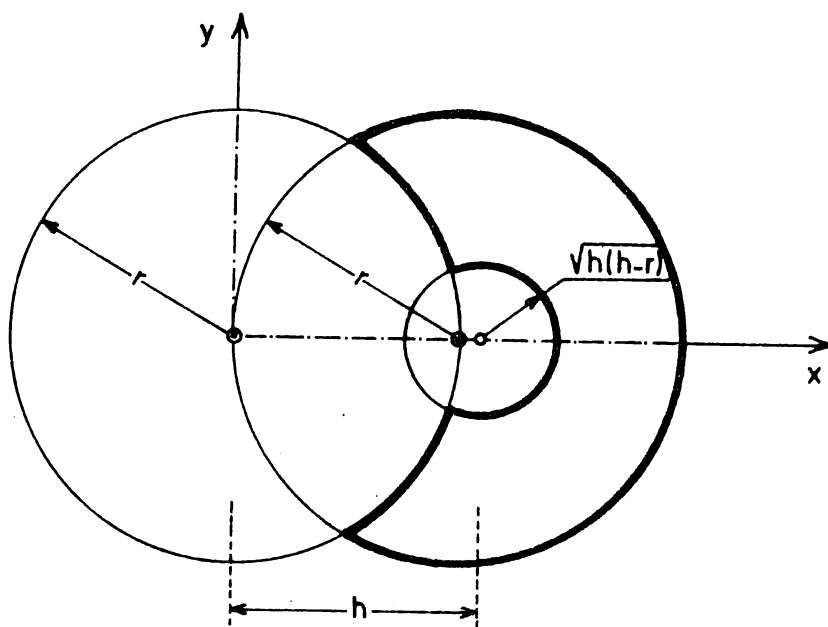
$$(x-h)^2 + y^2 = h(h-r) \quad \text{centrée en } x=h$$



Comme domaines dont les pôles sont exclus, on trouve soit un cercle avec encoche de clavette centrée en un point intérieur, soit un triangle curviligne



soit encore une portion d'anneau excentré.



C.3. : examinons maintenant le cas où l'on fait d'emblée $h = 0$.

Les conditions pour que la fonction

$$\theta = \frac{p(x-a)}{(x-a)^2+y^2} + \frac{q(x-b)}{(x-b)^2+y^2} - \frac{1}{2} (x^2+y^2) + k$$

soit nulle sur la circonférence $x^2 + y^2 = r^2$

se ramènent à un système linéaire et homogène dans les inconnues

$$p, q \text{ et } \lambda = k - \frac{1}{2} r^2$$

$$- 2 b p - 2 a q + 4 a b \lambda = 0$$

$$(r^2 + b^2 + 2 a b)p + (r^2 + a^2 + 2ab)q - [2b(r^2+a^2)+2a(r^2+b^2)] \lambda = 0$$

$$- a(r^2+b^2)p - b(r^2+a^2)q + (r^2+a^2)(r^2+b^2) \lambda = 0$$

Le déterminant est, après réduction,

$$\Delta = 2 (a-b)(a^2-r^2)(b^2-r^2)(r^2-ab)$$

Pour ne pas retomber dans les cas précédents et obtenir des pôles qui ne sont pas situés sur le cercle de base, rendons les équations compatibles par le choix

$$r^2 = a b$$

On trouve alors

$$p = a \lambda \quad q = b \lambda \quad k = \frac{1}{2} r^2 + \lambda$$

Il reste à voir sur quels autres lieux la fonction

$$0 = \lambda \left[1 + \frac{a(x-a)}{(x-a)^2+y^2} + \frac{b(x-b)}{(x-b)^2+y^2} \right] + \frac{1}{2} (r^2 - x^2 - y^2)$$

s'annule encore ou prend une valeur constante α .

Ceci revient à étudier l'équation

$$(x^2+y^2-r^2) \left[\frac{\lambda(x^2+y^2)+ab-(a+b)x}{[(x-a)^2+y^2][(x-b)^2+y^2]} - \frac{1}{2} \right] = \alpha$$

On voudrait, par exemple, que cette équation soit approximativement vérifiée sur une petite circonférence $(x-a)^2+y^2=\epsilon^2$ excluant le pôle de façon à obtenir la fonction de torsion d'un arbre percé d'un petit trou excentré.

Substituant à nouveau y^2

$$x^2 + y^2 - r^2 = \epsilon^2 - a^2 - r^2 + 2ax$$

$$x^2 + y^2 + ab - (a+b)x = \epsilon^2 - a^2 + 2ax + ab - (a+b)x$$

$$(x-b)^2 + y^2 = \epsilon^2 - a^2 + 2ax + b^2 - 2bx$$

Si ϵ est petit devant $(b-a)$, on peut négliger les termes en ϵ^2 et ces expressions deviennent respectivement

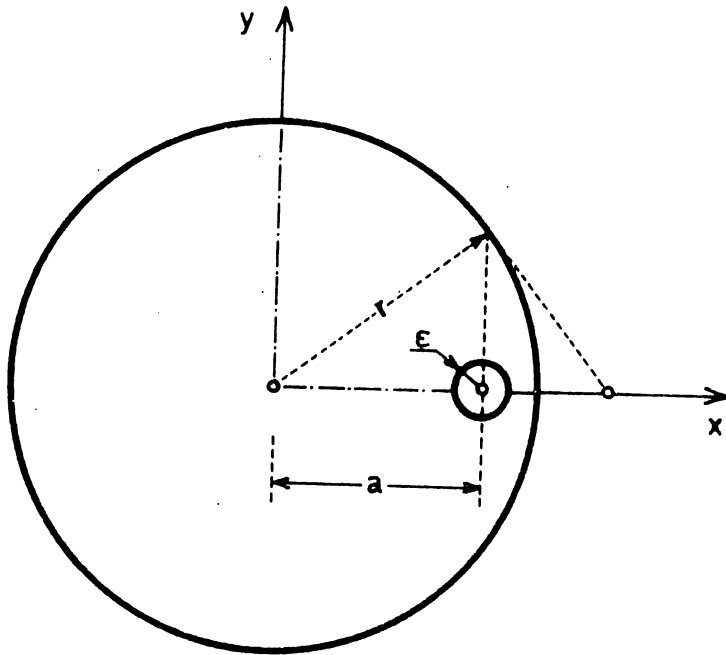
$$-a(a+b-2x) \quad (b-a)(a-x) \quad (b-a)(a+b-2x)$$

Il faut alors vérifier l'équation

$$-a(a+b-2x) \left[\frac{\lambda(a-x)}{\epsilon^2(a+b-2x)} - \frac{1}{2} \right] = -\frac{a\lambda}{\epsilon} (a-x) + \frac{a}{2} (a+b-2x) = \alpha$$

ce qui a lieu pour

$$\lambda = \epsilon^2 \quad \alpha = \frac{a(b-a)}{2}$$



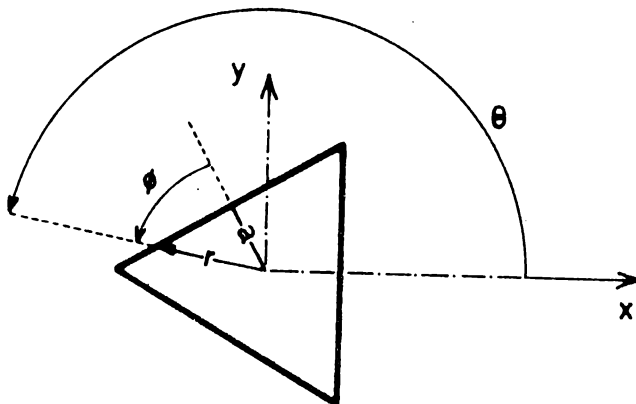
Au bord $x = a + \epsilon$ du trou, la tension tangentielle est, négligeant les termes en ϵ^2 ,

$$\tau_{yz} = G\hat{\theta} a \left(2 + \frac{\epsilon}{a}\right)$$

alors que, sans trou, elle y prendrait la valeur

$$\tau_{yz} = G\hat{\theta} (a + \epsilon).$$

D. Fonction de torsion de la barre triangulaire



Soit

$$r \cos \phi = r \cos (\theta - \theta_1) = x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1 = a$$

l'équation d'un côté situé à la distance a de l'origine et dont la normale extérieure fait l'angle θ_1 avec l'axe des x .

Si les trois côtés sont à la même distance, la fonction

$$\Lambda \prod_{i=1}^3 (x \cos \theta_i + y \sin \theta_i - a)$$

est nulle sur la frontière; nous allons examiner dans quelles conditions elle peut devenir la fonction de torsion de cette barre.

Prenant $\theta_1 = 0$, le produit développé s'écrit

$$\begin{aligned} \Lambda [& x^3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + x^2 y \sin(\theta_2 + \theta_3) + xy^2 \sin \theta_2 \sin \theta_3 - ax^2 (\cos \theta_2 + \cos \theta_3 + \cos \theta_2 \cos \theta_3) \\ & - ay^2 \sin \theta_2 \sin \theta_3 - axy (\sin \theta_2 + \sin \theta_3 + \sin(\theta_2 + \theta_3)) + a^2 y (\sin \theta_2 + \sin \theta_3) \\ & + a^2 x (1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3) - a^3] \end{aligned}$$

Pour être fonction de torsion, cette expression doit être du type

$$Z_\theta(x, y) - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \quad \text{où} \quad Z_\theta(x, y) \text{ est harmonique.}$$

Il faut donc y retrouver les combinaisons harmoniques

$$x^3 - 3xy^2 \qquad y^3 - 3x^2y$$

ce qui exige respectivement

$$\sin \theta_2 \sin \theta_3 = -3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \quad \text{ou} \quad \tan \theta_2 \tan \theta_3 = -3$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = 0$$

et impose les angles $\theta_2 = 120^\circ$ $\theta_3 = 240^\circ$

Par conséquent, la section sera un triangle équilatéral. Il vient alors

$$\frac{1}{4} A (x^3 - 3xy^2) + \frac{3}{4} Aa (x^2 + y^2) - Aa^3$$

La forme désirée demande encore $A = -\frac{2}{3a}$.

La fonction de torsion est en définitive

$$\theta = -\frac{1}{6a} (x^3 - 3xy^2) - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{2}{3} a^2$$

Comme

$$(x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3xy^2 - y^3)$$

le gauchissement unitaire est, à une constante près,

$$H = \frac{a}{6} (3xy^2 - y^3)$$

Le coefficient de raideur de torsion vaut $J = 9 \frac{\sqrt{3}}{5} a^4$.

E. Fonction de torsion de la barre rectangulaire

La section a pour frontières $x = \pm a$ et $y = \pm b$.

Pour traiter ce problème par une méthode de développement en série de fonctions propres, nous allons chercher à le formuler de telle façon que l'équation aux dérivées partielles soit homogène à variables séparables et qu'une paire de conditions aux limites soit homogène.

Par exemple, si

$$\theta = M + a^2 - x^2$$

la fonction M doit satisfaire l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = 0$$

et doit être nulle pour $x = \pm a$. Par contre, elle doit prendre les valeurs

$$M = x^2 - a^2 \quad \text{pour} \quad y = \pm b \quad .$$

La solution de l'équation de Laplace du type $M = f(x)g(y)$ se ramène à celle des équations différentielles

$$-\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} = \alpha^2$$

Le problème étant invariant vis-à-vis du changement de x en $-x$, aussi bien que du changement de y en $-y$, la solution doit présenter les mêmes caractéristiques et, par conséquent, les solutions à retenir pour les équations différentielles sont respectivement $\cos \alpha x$ et $\cosh \alpha y$.

Le choix du signe de la constante de séparation α^2 est maintenant justifié du fait qu'il permet de satisfaire aux conditions aux limites pour $x = \pm a$ en prenant

$$\alpha a = n \frac{\pi}{2} \quad n = 1, 3, 5 \dots$$

La solution du problème est donc du type

$$M = \sum_{1,3,\dots} A_n \cos \frac{n\pi}{2a} x \cosh \frac{n\pi}{2a} y$$

Les coefficients A_n sont à déterminer par les conditions aux limites pour $y = \pm b$

$$x^2 - a^2 = \sum_{1,3,\dots} (A_n \cosh \frac{n\pi b}{2a}) \cos \frac{n\pi x}{2a}$$

Les fonctions $\cos n u$ (n impair) étant orthogonales dans l'intervalle $|\ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \ |$ les coefficients se déterminent à la Fourier en multipliant la relation par $\cos \frac{n\pi x}{2a}$ et intégrant de $-a$ à $+a$.

Il vient

$$A_n \cosh \frac{n\pi b}{2a} = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{32 a^2}{(n\pi)^3}$$

d'où la fonction de torsion

$$\theta = a^2 - x^2 + \sum_{1,3,\dots} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{32 a^2}{(n\pi)^3} \frac{\cosh \frac{n\pi}{2a} y}{\cosh \frac{n\pi b}{2a}} \cos \frac{n\pi}{2a} x$$

On obtient un développement similaire en échangeant dans la formule les rôles de x et y , a et b .

Si nous ajoutons $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ à cette formule, nous obtenons la fonction harmonique conjuguée du gauchissement unitaire.

Celui-ci vaut donc

$$H_\theta = xy + \sum_{1,3,\dots} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{32 a^2}{(n\pi)^3} \frac{\sinh \frac{n\pi}{2a} y}{\cosh \frac{n\pi b}{2a}} \sin \frac{n\pi}{2a} x$$

La tension tangentielle est maximum au point milieu d'un grand côté.

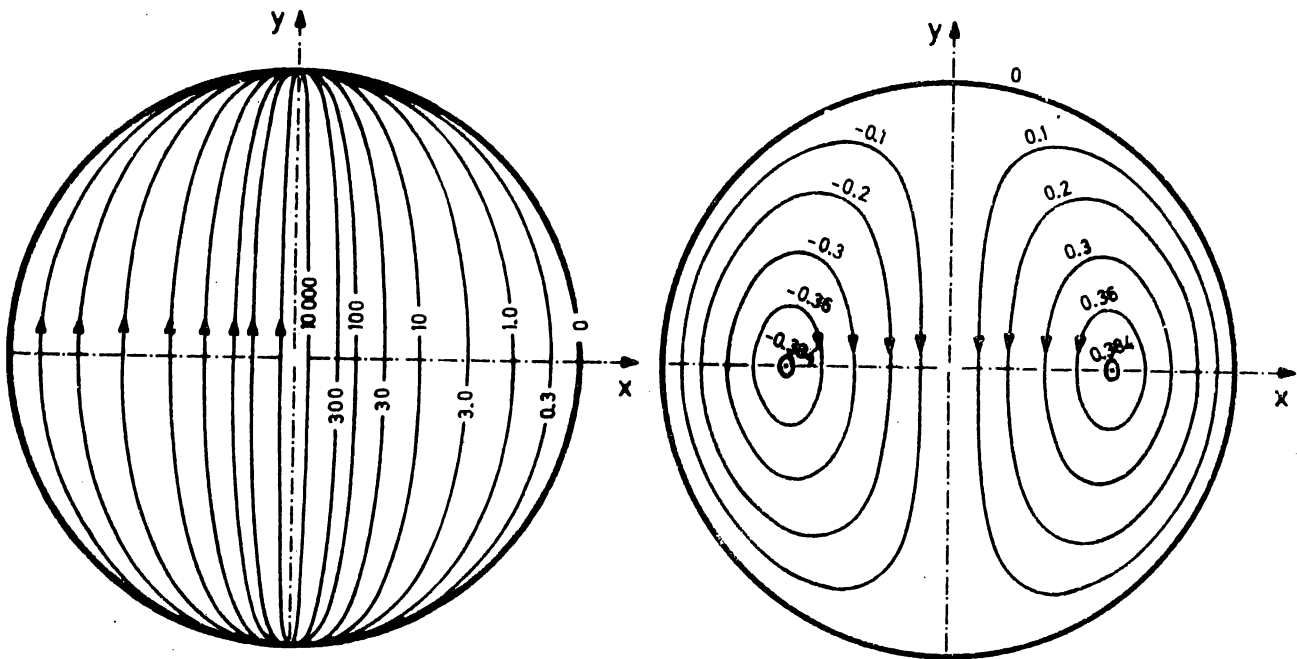
Donc, si $b > a$, en $x = a$ et $y = 0$

$$\left(\frac{\tau_{yz}}{G\theta}\right)_{\max} = 2a - \sum_{1,3,\dots} \frac{16a}{(n\pi)^2} \frac{1}{\cosh \frac{n\pi b}{2a}}$$

Le coefficient de raideur de torsion vaut

$$J = \frac{8}{3} b a^3 - \frac{1024}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi b}{2a}$$

F. Les fonctions de flexion pour une barre circulaire



CHAMP PRINCIPAL

ETAT DE TORSION DOUBLE
DU CHAMP SECONDAIRE

Par symétrie, on a $I_{xy} = 0$ et $c = 0$, quelle que soit l'orientation des axes issus de l'origine du cercle de rayon R . Il suffit de considérer le cas d'un effort tranchant selon Oy , auquel cas $b = T/I_{yy}$ et $a = 0$. La fonction de flexion du champ principal est solution du problème

$$\nabla^2 \bar{\phi} = -b y \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} = 0 \quad \text{pour } r = R.$$

Posons $\bar{\phi} = -\frac{1}{6} b y^3 + M$ avec alors

$$\nabla^2 M = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial M}{\partial r} = \frac{1}{2} b y^2 \sin\theta = \frac{1}{2} b R^2 \sin^3\theta \quad \text{pour } r=R.$$

Comme

$$4 \sin^3\theta = 3 \sin\theta - \sin 3\theta$$

nous avons une indication sur les puissances de $x + iy = r e^{i\theta}$

à choisir pour la fonction harmonique M ; prenons

$$M = I_m (p r e^{i\theta} + q r^3 e^{3i\theta}) \quad p \text{ et } q \text{ réels, soit}$$

$$M = p r \sin\theta + q r^3 \sin 3\theta$$

$$\frac{\partial M}{\partial r} = p \sin\theta + 3 q r^2 \sin 3\theta$$

Il en découle par identification à la limite $r = R$

$$p = \frac{3}{8} b R^2 \quad q = -\frac{1}{24} b$$

La fonction de flexion du champ principal est alors après réduction

$$\phi = \frac{1}{8} b (3 R^2 - r^2) r \sin\theta = \frac{1}{8} b (3 R^2 - x^2 - y^2) y$$

Les trajectoires des tensions, c'est-à-dire les courbes partout tangentes aux tensions du champ principal satisfont à l'équation différentielle

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} dy - \frac{\partial \phi}{\partial y} dx = 0$$

qui est ici

$$2 xy dy + (3 R^2 - x^2 - 3 y^2) dx = 0$$

Un facteur intégrant est x^{-4} et on trouve pour trajectoires les courbes

$$x^2 + y^2 - R^2 + k x^3 = 0 \quad \text{où } k \text{ est une constante}$$

Elles passent toutes par les sommets $x = 0, y = \pm R$ où elles ont une tangente horizontale.

Pour la fonction de flexion Ψ du champ secondaire, nous disposons des relations entre fonctions harmoniques conjuguées

$$Z = \Psi + \mu = \Psi + \frac{1}{6} \nu b (x^3 + 3 xy^2)$$

$$H \quad \text{avec} \quad \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \quad \text{pour } r = R$$

Ceci donne

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{4} \nu b R^2 (-\sin\theta + \sin 3\theta)$$

et nous prendrons en conséquence une fonction harmonique du même type que M. Après les calculs d'identification, il vient

$$H = \frac{1}{12} \nu b (-3 R^2 r \sin\theta + r^3 \sin 3\theta)$$

et, par conséquent,

$$Z = \frac{1}{12} \nu b (3 R^2 r \cos\theta - r^3 \cos 3\theta)$$

$$\Psi = \frac{1}{4} \nu b (R^2 - r^2) r \cos\theta = \frac{1}{4} \nu b (R^2 - x^2 - y^2) x$$

Les trajectoires de tensions $\Psi = \text{constante}$ mettent en évidence un état de torsion double avec des points limites $y = 0$, $x = \pm \frac{R}{\sqrt{3}}$. Le problème du gauchissement est alors résolu avec

$$g = H + 2(1+\nu) \mathfrak{F} + \frac{1}{3} \nu b y^3 = \frac{1}{4} \nu b (3 R^2 - x^2 - y^2) y + \frac{1}{2} \nu b R^2 y$$

G. Les fonctions de flexion du tube circulaire

Les conditions aux limites pour la fonction M sont maintenant

$$\frac{\partial M}{\partial r} = \frac{1}{2} b R^2 \sin^3 \theta \quad \text{pour } r = R \quad \text{circonférence extérieure}$$

$$\frac{1}{2} b \rho^2 \sin^3 \theta \quad \text{pour } r = \rho \quad \text{circonférence intérieure} .$$

Un pôle à l'origine étant permis puisque ne faisant pas partie du domaine D, on prendra

$$M = I_m \left(p r e^{i\theta} + q r^3 e^{3i\theta} + m \frac{e^{-i\theta}}{r} + n \frac{e^{-3i\theta}}{r^3} \right)$$

avec p, q, m et n réels, soit

$$M = p r \sin \theta + q r^3 \sin 3\theta - \frac{m}{r} \sin \theta - \frac{n}{r^3} \sin 3\theta$$

Une fois, les paramètres identifiés par les conditions aux limites :

$$p = \frac{3b}{8} (R^2 + \rho^2) \quad q = -\frac{b}{24} \quad m = -\frac{3b}{8} \rho^2 R^2 \quad n = 0$$

il vient

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{b}{24} \left[9(R^2 + \rho^2) r \sin \theta - r^3 \sin 3\theta + 9 \frac{\rho^2 R^2}{r} \sin \theta - 4r^3 \sin^3 \theta \right] \\ &= \frac{b}{8} \left[3(R^2 + \rho^2) - x^2 - y^2 + 3 \frac{\rho^2 R^2}{x^2 + y^2} \right] y \end{aligned}$$

Procédant d'une façon analogue pour la fonction H, il vient

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{vb}{4} \left[- (R^2 + \rho^2) r \sin\theta + \frac{1}{3} r^3 \sin 3\theta - R^2 \rho^2 \frac{\sin\theta}{r} \right] \\
 &= \frac{vb}{4} \left[- R^2 - \rho^2 + x^2 - \frac{1}{3} y^2 - \frac{R^2 \rho^2}{x^2 + y^2} \right] y
 \end{aligned}$$

et pour la fonction conjuguée

$$Z = \frac{vb}{4} \left[R^2 + \rho^2 + y^2 - \frac{1}{3} x^2 - \frac{R^2 \rho^2}{x^2 + y^2} \right] x$$

La fonction du champ secondaire est alors

$$\psi = \frac{vb}{4} \left(R^2 + \rho^2 - x^2 - y^2 - \frac{R^2 \rho^2}{x^2 + y^2} \right) x$$

et s'annule sur chacune des circonférences limites.

Le gauchissement vaut

$$g = \frac{b}{4} \left(3R^2 + 3\rho^2 - x^2 - y^2 + \frac{3\rho^2 R^2}{x^2 + y^2} \right) y + \frac{vb}{2} \left(R^2 + \rho^2 + \frac{\rho^2 R^2}{x^2 + y^2} \right) y$$

H. Les fonctions de flexion de la barre rectangulaire

Les conditions de symétrie sont les mêmes que pour la barre circulaire. La fonction du champ principal est simplement

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{6} b (-y^3 + 3h^2 y)$$

qui vérifie bien les conditions

$$\nabla^2 \bar{\Phi} = -by \quad \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} = 0 \quad \text{pour } x = \pm a \quad \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} = 0 \quad \text{pour } y = \pm h .$$

En fait $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \equiv 0$ et on a pour champ principal

$$\tau_{xz} = 0 \qquad \tau_{yz} = \frac{1}{2} E b (h^2 - y^2)$$

Pour le champ secondaire, il faut, par exemple, trouver la fonction harmonique H telle que

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial y} = \nu b xy \qquad \text{pour } x = \pm a$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial \mu}{\partial x} = -\frac{1}{2} \nu b (x^2 + y^2) \qquad \text{pour } y = \pm h$$

Cherchons à rendre une des deux conditions aux limites homogène et l'autre bien conditionnée du point de vue du développement en série de fonctions propres, en ajoutant à H une fonction harmonique particulière. Posant

$$H = -\frac{1}{6} \nu b (y^3 - 3 y x^2 + 6 a^2 y) + M$$

la fonction harmonique M doit alors satisfaire aux conditions

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 0 \qquad \text{pour } x = \pm a$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \nu b (a^2 - x^2) \qquad \text{pour } y = \pm h$$

La solution de ce problème est semblable à celle de la fonction de torsion. M doit être paire en x , impaire en y ; une solution à variables séparées est donc du type $\cos \alpha x \sinh \alpha y$. La première condition exige

$$\sin \alpha a = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = m \frac{\pi}{a} \qquad (m=0, 1, 2, \dots)$$

et nous considérons le développement

$$\frac{\partial M}{\partial y} = A_0 + \sum_1^{\infty} A_m \cos h \frac{m\pi}{a} y \cos \frac{m\pi}{a} x$$

Les coefficients correspondant au développement de Fourier pour $y = \pm h$

$$A_0 + \sum_1^{\infty} A_m \cos h \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} x = v b (a^2 - x^2)$$

$$A_0 = \frac{2}{3} v b a^2 \quad A_m \cos h \frac{m\pi}{a} = 4 v b a^2 \frac{(-1)^{m+1}}{(m\pi)^2}$$

$$(m = 1, 2 \dots)$$

Intégrant le développement par rapport à y et tenant compte de l'autre condition aux limites, il vient à une constante près

$$M = \frac{2}{3} v b a^2 y + 4 v b a^3 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(m\pi)^3} \frac{\sinh \frac{m\pi}{a} y}{\cosh \frac{m\pi h}{a}} \cos \frac{m\pi}{a} x$$

$$H = -\frac{1}{6} v b (y^3 - 3yx^2 + 2a^2y) + 4 v b a^3 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(m\pi)^3} \frac{\sinh \frac{m\pi}{a} y}{\cosh \frac{m\pi h}{a}} \cos \frac{m\pi}{a} x$$

Pour la fonction Z , on peut procéder de la même manière.

On pose

$$Z = \frac{1}{6} v b (2a^2x - x^3 + 3xy^2) + N$$

de sorte que la fonction N reste harmonique.

Sur le pourtour du rectangle Z doit être égal à μ , car ψ s'y annule.
On trouve ainsi que

$$N = 0 \quad \text{sur} \quad x = \pm a$$

$$N = \frac{1}{3} \nu b x (x^2 - a^2) \quad \text{sur} \quad y = \pm h$$

N est impaire en x, paire en y, de sorte que

$$N = \sum_1^{\infty} A_m \cosh \frac{m\pi}{a} y \sin \frac{m\pi}{a} x$$

pour $y = \pm h$ ceci doit correspondre au développement de Fourier de

$$\frac{1}{3} \nu b x (x^2 - a^2)$$

Après détermination des coefficients, il vient

$$Z = \frac{1}{6} \nu b (2a^2 x - x^3 + 3xy^2) + 4 \nu b a^3 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^m \cosh \frac{m\pi}{a} y}{(m\pi)^3 \cosh \frac{m\pi h}{a}} \sin \frac{m\pi}{a} x$$

Il est aisé de vérifier que les fonctions H et Z ainsi trouvées satisfont aux équations de Cauchy-Riemann.

La fonction de courant secondaire est

$$\psi = Z - \mu = \frac{1}{3} \nu b x (a^2 - x^2) + 4 \nu b a^3 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^m \cosh \frac{m\pi}{a} y}{(m\pi)^3 \cosh \frac{m\pi h}{a}} \sin \frac{m\pi}{a} x$$

Elle confère toujours aux trajectoires une configuration de torsion double, symétrique par rapport au plan $x = 0$ sur lequel elle est également nulle.

Les problèmes plans de la théorie de l'élasticité sont abordés comme solutions exactes des problèmes tridimensionnels. Pour les matériaux isotropes, ces solutions s'expriment par des fonctions bi-harmoniques de deux variables. Le recours aux fonctions de la variable complexe correspondante est particulièrement indiqué, en raison de la facilité avec laquelle les solutions sont construites et manipulées pour transformation de coordonnées.

7.1. Lemmes pour l'intégration d'équations aux dérivées partielles sous forme complexe

Soit

$$\partial = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \quad (7.1)$$

un opérateur complexe aux dérivées partielles et

$$\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \quad (7.2)$$

l'opérateur complexe conjugué; on aura pour l'opérateur de Laplace

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \partial \bar{\partial} = \bar{\partial} \partial \quad (7.3).$$

Soit maintenant

$$f(\zeta) = f(x + iy) = p(x, y) + i q(x, y)$$

une fonction analytique de la variable complexe ζ . On sait que ses parties réelle $p(x, y)$ et imaginaire $q(x, y)$ sont harmoniques et obéissent aux équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{\partial q}{\partial x} \qquad (7.4)$$

Nous aurons aussi à considérer la fonction analytique conjuguée

$$\bar{f}(\zeta) = p(x,y) - i q(x,y)$$

En vertu des équations de Cauchy-Riemann la dérivée de la fonction analytique peut avoir l'une ou l'autre des formes suivantes

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\zeta} = f'(\zeta) &= \frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} + i \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} - i \frac{\partial p}{\partial y} \\ &= \frac{\partial q}{\partial y} - i \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$f'(\zeta) = \partial p = i \partial q$$

et par conséquent

$$\partial f = \partial(p + iq) = 2 f'(\zeta) \qquad (7.5)$$

$$\partial \bar{f} = \partial(p - iq) = 0 \qquad (7.6)$$

De façon plus générale, si f et g sont deux fonctions analytiques,

$$\partial(\bar{g}f) = 2 \bar{g} f' \qquad (7.7).$$

Examinons le problème inverse : trouver l'intégrale générale de

$$\partial h = 2 \bar{g} f' \qquad (7.8)$$

où le second membre est donné; on trouve

$$h = \bar{g}f + \bar{k} \quad (7.9)$$

où k est une fonction analytique arbitraire. En effet, le premier terme est une solution particulière en vertu de (7.7) et le second est la solution générale sans second membre en vertu de (7.6). Remarquons que, puisque

$$\partial h = \partial(a + ib) = \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\right) + i \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right)$$

le problème posé consistait à donner la divergence et le rotationnel d'un champ de vecteurs. La solution générale sans second membre correspond alors bien aux équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y} \qquad \frac{\partial b}{\partial y} = - \frac{\partial a}{\partial x}$$

exprimant que b et a sont harmoniques conjugués, $b + ia$ une fonction analytique de ζ , et $a + ib = i(b - ia)$ la conjuguée d'une fonction analytique. Quant au second membre du problème (7.8), il est en fait assez général. Il suppose seulement que les données pour la divergence et le rotationnel soient analytiques; ces données peuvent alors être développées en séries de Taylor convergentes (éventuellement dans un domaine restreint) et le remplacement de

$$x = \frac{1}{2} (\zeta + \bar{\zeta}) \qquad y = - \frac{i}{2} (\zeta - \bar{\zeta})$$

met le second membre sous la forme d'une somme de termes du type indiqué.

Une difficulté est à signaler quand l'inconnue h est réelle. Dans ce cas, le problème posé consiste à déterminer h à partir des données de ses deux dérivées partielles $\partial h/\partial x$ et $\partial h/\partial y$. Le choix de la fonction \bar{k} ne permettra de mettre h sous forme réelle que si les données vérifient au préalable la condition d'intégrabilité

$$\operatorname{Im} \bar{\partial}(2\bar{g}f') = - \operatorname{Im} \partial(2g\bar{f}') = - 4 \operatorname{Im}(g'\bar{f}') = 0$$

Ceci demande $g' = f'$ si bien, qu'à une constante près, l'intégrale particulière est $f\bar{f}$ et est réelle.

7.2. La structure d'une fonction biharmonique

Soit h une fonction biharmonique réelle de x et y

$$\nabla^2 \nabla^2 h = \partial\bar{\partial} \bar{\partial} \partial h = 0 \quad (7.10)$$

Intégrons cette équation par la méthode précédente; il vient successivement

$$\bar{\partial} \bar{\partial} \partial h = 4 \bar{f}'' ,$$

le facteur numérique et la double dérivation de la fonction analytique arbitraire n'étant là que pour faciliter les intégrations ultérieures sans que la généralité du résultat en soit affectée; prenant la conjuguée du résultat

$$\partial \partial \bar{\partial} h = 4 f'' \rightarrow \nabla^2 h = \partial \bar{\partial} h = 2 f' + 2 \bar{f}' ,$$

car le résultat doit être réel; ensuite

$$\bar{\partial} h = f + \zeta \bar{f}' + \bar{g}' \quad \text{ou} \quad \partial h = \bar{f} + \bar{\zeta} f' + g'$$

et finalement

$$h = \frac{1}{2} (\zeta \bar{f} + \bar{\zeta} f) + \frac{1}{2} (g + \bar{g}) = \operatorname{Re} \{ \bar{\zeta} f + g \} \quad (7.11)$$

Une fonction biharmonique générale est donc construite à partir de deux fonctions analytiques. En termes réels

$$h = xp(x,y) + yq(x,y) + r(x,y) \quad (7.11)'$$

où p et q sont harmoniques conjugués et r harmonique.

Prenant pour r la partie réelle de la fonction analytique $(x+iy)(p+iq)$, on voit que l'expression $xp(x,y) - yq(x,y)$ est aussi biharmonique (et même harmonique); par conséquent, par combinaison avec le résultat précédent, $xp(x,y)$ et $yq(x,y)$ sont des fonctions biharmoniques.

Posant $f = \zeta k$, on obtient une autre représentation générale en termes réels

$$h = (x^2 + y^2) p(x,y) + r(x,y) \quad (7.11)''$$

qui ne fait plus intervenir que deux fonctions harmoniques et indépendantes.

7.3. Structure de la solution des problèmes de déformation plane

Les problèmes de déformation plane sont strictement bi-dimensionnels du point de vue des déplacements. Ils correspondent à une situation où

$$w \equiv 0 \quad u = u(x,y) \quad v = v(x,y) \quad (7.12)$$

Les déformations correspondantes sont réduites à un tenseur bi-dimensionnel

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

indépendant de la coordonnée z , tandis que

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \equiv 0 \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \equiv 0 \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \equiv 0.$$

Pour un milieu isotrope, il en découle d'une part

$$\tau_{xz} \equiv 0 \qquad \tau_{yz} \equiv 0 \qquad (7.13)$$

d'autre part, un champ de tensions σ_x , σ_y , τ_{xy} et σ_z indépendant de la coordonnée z et lié aux déformations par les équations constitutives

$$E \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \qquad E \frac{\partial v}{\partial y} = \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \qquad (7.14)$$

$$G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \tau_{xy} \qquad (7.15)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \qquad (\text{de } \epsilon_z \equiv 0) \qquad (7.16)$$

Eliminant σ_z à l'aide de cette dernière relation, les équations (7.14) prennent la forme

$$\hat{E} \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_x - \hat{\nu} \sigma_y \qquad \hat{E} \frac{\partial v}{\partial y} = \sigma_y - \hat{\nu} \sigma_x \qquad (7.17)$$

moyennant les définitions suivantes d'un module de Young et d'un coefficient de Poisson équivalents (au sens des tensions planes)

$$\hat{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \qquad \hat{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu} \qquad (7.18)$$

Dans ces conditions, on trouve que le module de glissement est inchangé

$$\hat{G} = \frac{\hat{E}}{2(1+\hat{\nu})} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad .$$

Réolvons maintenant les équations (7.17) pour les tensions :

$$\sigma_x = 2 \hat{G} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \hat{\nu} \hat{\epsilon} \right) \quad \sigma_y = 2 \hat{G} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \hat{\nu} \hat{\epsilon} \right) \quad (7.19)$$

où on a posé

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{1-\hat{\nu}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \quad (7.20).$$

Cette définition appelle un commentaire relatif au cas du milieu incompressible, caractérisé par $\nu = 0.5$ et, par conséquent $\hat{\nu} = 1$. La première expression de $\hat{\epsilon}$ devient indéterminée car

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad .$$

Par contre, la seconde expression reste déterminée; on pourrait l'écrire

$$\hat{\epsilon} = - \frac{2}{E} p \quad \text{où} \quad p = - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y)$$

est une pression qui ne dépend pas d'une loi constitutive (sauf comme on le voit par un passage à la limite) mais constitue une réaction contre la condition géométrique d'incompressibilité. En substituant (7.19) et (7.15) dans les équations d'équilibre sans forces de volume, ici réduites à

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (7.21)$$

on obtient les équations de Navier du problème. Elles peuvent être présentées sous forme d'équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad \frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial y} = - \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (7.22)$$

$$\text{où} \quad \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (7.23)$$

dénote la rotation matérielle des fibres parallèles à O_z .
On pourra donc poser

$$\hat{\epsilon} + i \omega = \frac{2}{\hat{G}} F'(\zeta) \quad (7.24)$$

On en déduit

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = (1 - \hat{\nu}) \hat{\epsilon} = \frac{1 - \hat{\nu}}{\hat{G}} (F' + \bar{F}')$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \omega = \frac{2}{i \hat{G}} (F' - \bar{F}')$$

Ces deux équations peuvent être rassemblées sous la forme complexe

$$\partial(u + iv) = (1 - \hat{\nu}) \hat{\epsilon} + 2i\omega = \frac{1}{\hat{G}} \{ (3 - \hat{\nu})F' - (1 + \hat{\nu})\bar{F}' \}$$

L'application du lemme d'intégration fournit alors

$$u + iv = \frac{1}{2\hat{G}} \{ (3 - \hat{\nu})F - (1 + \hat{\nu}) \zeta \bar{F}' + \bar{H}' \} \quad (7.25)$$

et le champ des déplacements est exprimé en fonction de deux fonctions analytiques $F(\zeta)$ et $H(\zeta)$. Le champ des tensions suit sans difficulté. De (7.24) et (7.20), on déduit

$$\sigma_x + \sigma_y + i \hat{E} \omega = 4 (1 + \hat{\nu}) F' \quad (7.26)$$

Ensuite, combinant (7.19) et (7.15)

$$\sigma_x - \sigma_y - 2i \tau_{xy} = 2 \hat{G} \partial(u - iv)$$

qui devient après utilisation de (7.25)

$$\sigma_x - \sigma_y - 2i \tau_{xy} = -2(1+\nu) \bar{\zeta} F'' + 2 H'' \quad (7.27)$$

Enfin, σ_z découle directement de (7.16).

7.4. Structure de la solution du problème des tensions planes

On considère ici une plaque, dont le feuillet moyen est repéré par les coordonnées cartésiennes x et y , limitée par des faces $z = \pm h$ supposées libres de tractions de surface. Puisque σ_z , τ_{zx} et τ_{zy} sont alors nuls sur les faces, on cherchera une solution correspondant à un état de tension plan, c'est-à-dire telle que

$$\sigma_z \equiv 0 \quad \tau_{xz} \equiv 0 \quad \tau_{yz} \equiv 0 \quad (7.28)$$

Les équations d'équilibre sans forces de volume sont identiques à celles (7.21) de l'état plan de déformation, et trois des relations constitutives sont similaires, à savoir : (7.15) et

$$E \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_x - \nu \sigma_y \quad E \frac{\partial v}{\partial y} = \sigma_y - \nu \sigma_x \quad (7.17)'$$

qui demandent seulement les modifications appropriées de module et de coefficient de Poisson. Cette dernière différence mise à part, il en existe plus fondamentale : si on veut une solution exacte dans le cadre de l'élasticité tri-dimensionnelle, il y aura lieu de considérer les champs de déplacement (u, v, w) et de tensions $(\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y)$ comme fonctions de la coordonnée z . Ceci nous oblige à prendre également en considération les relations

$$\frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (7.29)$$

qui se trouvaient être identiquement satisfaites dans la section 7.3., ainsi que

$$E \frac{\partial w}{\partial z} = -\nu (\sigma_x + \sigma_y) \quad (7.30).$$

Soustrayant cette dernière équation de chacune des équations (7.17)', il vient

$$\sigma_x = 2G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad \sigma_y = 2G \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (7.31)$$

que l'on rapprochera de (7.19). Substituant ce résultat et (7.15) dans les équations d'équilibre (7.21), ces équations de Navier prennent à nouveau une forme de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = - \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

avec, cette fois, la définition

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \quad (7.32)$$

La fonction analytique $\varepsilon + i\omega$ de la variable $\zeta = x+iy$ contiendra encore la coordonnée z comme paramètre. Toutefois, éliminant w entre les équations (7.29), il vient

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \quad (7.33)$$

Si la partie imaginaire ω ne dépend donc pas de z , la partie réelle ne peut être que la somme d'une fonction de z seul et d'une fonction harmonique indépendante de z ; par conséquent, on posera

$$\varepsilon + i\omega = \frac{2}{G} \{ a(z) + F'(\zeta) \} \quad (7.34)$$

où $a(z)$ est une fonction réelle de z .

Additionnant les équations (7.17)'

$$E \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = (1-\nu)(\sigma_x + \sigma_y)$$

puis soustrayant (7.30)

$$E \varepsilon = \sigma_x + \sigma_y \quad (7.35).$$

Nous en déduisons

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1-\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = (1-\nu)\varepsilon$$

et par conséquent

$$\partial(u+iv) = (1-\nu)\varepsilon + 2 i\omega = \frac{2}{G} \left\{ (1-\nu)a + \frac{1-\nu}{2}(F'+\bar{F}') + F' - \bar{F}' \right\}$$

dont l'intégrale générale sera

$$u + iv = \frac{1}{2G} \left\{ 2(1-\nu)a\zeta + (3-\nu)F - (1+\nu)\zeta\bar{F}' + \bar{K}(\zeta; z) \right\}$$

La structure de la solution dans la variable z s'obtient par l'examen des conditions d'intégrabilité du déplacement w ; l'équation (7.33) en est une, déjà satisfaite. Les deux autres découlent de l'élimination de w entre l'équation

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\nu \varepsilon \quad (7.36)$$

qui est une conséquence de (7.30) et (7.35), et chacune des équations (7.29). Elles peuvent être mises sous la forme complexe

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (u - iv) = v \partial \varepsilon$$

Après remplacement des solutions trouvées pour (u, v) et ε , il vient la condition

$$2(1-\nu) \zeta \frac{d^2 a}{dz^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} = 4 \nu F''$$

qui se sépare en

$$\frac{d^2 a}{dz^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} = 4 \nu F''.$$

Nous en prenons des intégrales qui respectent les conditions de symétrie

$$u(x, y, -z) = u(x, y, +z)$$

$$v(x, y, -z) = v(x, y, +z)$$

caractérisant une extension de la plaque, écartant ainsi délibérément une solution représentant une flexion de la plaque par couples fléchissants.

Pour K , nous aurons par exemple

$$K = 2 \nu \left(z^2 - \frac{1}{3} h^2 \right) F'' + H'$$

où H est une fonction analytique de ζ seulement. La fonction réelle $a(z)$, qui doit être paire, ne peut être qu'une constante et il n'y a pas de restriction à la supposer absorbée dans H' .
Donc

$$u + iv = \frac{1}{2G} \left\{ (3-\nu)F - (1+\nu)\zeta\bar{F}' + 2\nu \left(z^2 - \frac{1}{3} h^2 \right) \bar{F}'' + \bar{H}' \right\}$$

(7.37)

Intégrons maintenant le déplacement transversal en mettant les équations (7.29) sous la forme complexe

$$\partial w = - \frac{\partial}{\partial z} (u-iv) = - \frac{2\nu}{G} z F''$$

dont l'intégrale satisfaisant (7.36) est

$$w = - \frac{\nu z}{G} (F' + \bar{F}') = - \frac{2\nu z}{G} \operatorname{Re} F' \quad (7.38).$$

Pour les tensions :

$$\sigma_x + \sigma_y + i E \omega = E (\epsilon + i\omega) = 4 (1+\nu) F' \quad (7.39)$$

$$\sigma_x - \sigma_y - 2 i \tau_{xy} = 2 G \partial(u-iv) = - 2(1+\nu)\bar{\zeta}F'' + 4\nu(z^2 - \frac{1}{3}h^2)F''' + 2H'' \quad (7.40)$$

7.5. L'état de tension plan au sens restreint

Le problème traité dans la section précédente est, dans la terminologie de LOVE, le problème des tensions planes généralisé. On y a cherché la forme d'une solution exacte de l'élasticité tridimensionnelle, dont les propriétés (7.28) réduisent le tenseur des tensions à une structure bi-dimensionnelle qui toutefois dépend encore partiellement de la troisième coordonnée. L'état de tension plan au sens restreint n'est en général pas une solution exacte de l'élasticité tridimensionnelle; il correspond à l'état plan généralisé par substitution aux grandeurs (u, v) et $(\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y)$ de leur moyenne sur l'épaisseur de la plaque.
Comme

$$\int_{-h}^h (z^2 - \frac{1}{3} h^2) dz = 0$$

il suffit de supprimer dans les résultats de la section 7.4. les termes en $(z^2 - 1/3 h^2)$. La solution du problème de l'état plan au sens restreint se présente sous la forme

$$u + iv = \frac{1}{2G} \{ (3-\nu)F - (1+\nu) \zeta \bar{F}' + H' \} \quad (7.41)$$

$$\sigma_x + \sigma_y + i E \omega = 4(1+\nu) F' \quad (7.42)$$

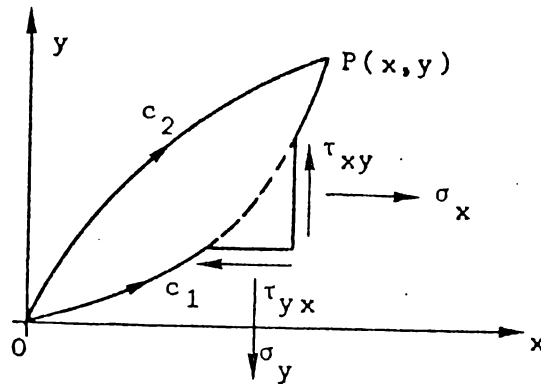
$$\sigma_x - \sigma_y - 2i \tau_{xy} = - 2(1+\nu) \zeta \bar{F}'' + 2H' \quad (7.43)$$

L'analogie avec la structure de la solution du problème de l'état plan de déformation est maintenant évidente; il suffit de comparer les équations (7.41) à (7.43) avec (7.25) à (7.27) pour voir que les résultats se déduisent l'un de l'autre moyennant les correspondances $E \leftrightarrow \hat{E}$ et $\nu \leftrightarrow \hat{\nu}$. Il ne faut cependant pas perdre de vue que si $\sigma_z = 0$ dans l'état plan de tension, tandis que $\epsilon_z \neq 0$, cette situation est inversée dans l'état plan de déformation. Les résultats (7.37) à (7.40) généralisent ceux obtenus par KOLOSOV et MUSHKELISHVILI; les termes en $(z^2 - \frac{1}{3} h^2)$ qu'ils contiennent sont proportionnels au coefficient de Poisson et peuvent donner des effets importants dans les régions à gradients élevés de F' pour les déplacements, ou F'' pour les tensions.

La détermination des fonctions F et H est évidemment liée aux conditions aux limites du problème. On distingue en général le cas où les tractions de surface sont spécifiées sur les frontières, ou premier problème fondamental, du cas où les déplacements sont spécifiés, appelé second problème fondamental. Quand le domaine s'étend à l'infini, il est indispensable de spécifier le comportement du tenseur des tensions à l'infini et éventuellement la rotation matérielle et la résultante des forces extérieures appliquées.

7.6. La fonction d'Airy

Soit O l'origine et $P(x,y)$ un point quelconque de la surface moyenne d'une plaque. Un chemin c_1 tracé de O vers P dans la surface moyenne découpe un ruban cylindrique; de génératrices parallèles à l'axe Oz , dont nous considérons une des faces, par exemple celle dont la normale extérieure est située à droite par rapport au sens du parcours.



Avec O comme centre de réduction, la résultante des tractions de surface sur cette face de ruban comporte : les composantes d'une somme vectorielle par unité d'épaisseur

$$X_{c_1} = \int_{c_1} \sigma_x dy - \tau_{yx} dx \quad Y_{c_1} = \int_{c_1} \tau_{xy} dy - \sigma_y dx$$

(7.44)

et un moment par rapport à l'axe Oz

$$M_{c_1} = \int_{c_1} (x \tau_{xy} - y \sigma_x) dy - (x \sigma_y - y \tau_{yx}) dx.$$

(7.45)

Si la plaque est à connexion linéaire simple, tout autre chemin c_2 tracé de O vers P dans le milieu est réconciliable avec le premier (section 5.2) ou, ce qui revient au même, l'ensemble des

deux chemins forme un circuit fermé réductible. En l'absence de forces de volume et de tractions de surface sur les faces $z = \pm h$ l'équilibre de la portion de plaque intérieure au circuit fermé se traduira par

$$X_{c_1} - X_{c_2} = 0 \quad Y_{c_1} - Y_{c_2} = 0 \quad M_{c_1} - M_{c_2} = 0$$

car la normale extérieure subit un changement d'orientation par rapport au sens du parcours de O vers P quand on passe d'un chemin à l'autre. Ces relations expriment que les grandeurs (7.44) et (7.45) sont indépendantes du chemin parcouru de O vers P(x,y). Les intégrands sont donc des différentielles exactes de fonctions à valeur unique (monodromes). Ainsi pour (7.44)

$$\sigma_x dy - \tau_{yx} dx = dX \quad \tau_{xy} dy - \sigma_y dx = dY \quad (7.46)$$

ou, de façon équivalente,

$$\sigma_x = \frac{\partial X}{\partial y}, \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial X}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \sigma_y = -\frac{\partial Y}{\partial x} \quad (7.47)$$

En ce qui concerne (7.45)

$$(x \tau_{xy} - y \sigma_x) dy - (x \sigma_y - y \tau_{yx}) dx = dM$$

et, si nous y substituons les formules (7.47),

$$x \left(\frac{\partial Y}{\partial y} dy + \frac{\partial Y}{\partial x} dx \right) - y \left(\frac{\partial X}{\partial y} dy + \frac{\partial X}{\partial x} dx \right) = x dY - y dX = dM$$

Posant

$$\phi = M - x Y + y X \quad (7.48)$$

ceci s'écrit encore

$$d\phi = d(M - xY + yX) = X dy - Y dx \quad (7.49)$$

et est équivalent aux relations

$$X = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad Y = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (7.50)$$

Elles transforment les formules (7.47) comme suit

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (7.51)$$

La fonction $\phi(x,y)$ est connue sous le nom de fonction d'AIKY; de par sa construction elle doit assurer le respect des équations d'équilibre sans force de volume

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (7.52)$$

ce qui est de vérification immédiate. De plus, la méthode suivie fournit une interprétation physique de cette fonction et de ses dérivées partielles.

Intégrant les formules (7.46) de 0 à P, il vient d'abord pour la somme vectorielle des tractions de surfaces

$$X_p = X(x,y) - X(0,0) = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_0 \quad (7.53)$$

$$Y_p = Y(x,y) - Y(0,0) = - \frac{\partial \phi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_0$$

Ensuite l'intégration de (7.49) donne pour le moment par rapport à l'origine M_0

$$\phi(x,y) - \phi(0,0) = M_0 - x Y(x,y) + y X(x,y)$$

$$\text{ou } M_0 = \phi(x,y) - \phi(0,0) - x \frac{\partial \phi}{\partial x} - y \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (7.54)$$

soit encore pour le moment par rapport au point P

$$M_P = M_0 - x Y_P + y X_P = \phi(x,y) - \phi(0,0) - x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_0 - y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_0 \quad (7.54)'$$

Les équations (7.51) montrent que le champ des tensions n'est pas altéré quand on ajoute à la fonction d'Airy une forme linéaire arbitraire

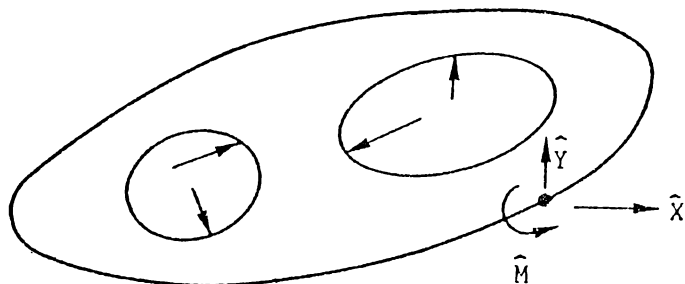
$$\alpha + \beta x + \gamma y$$

dont les coefficients peuvent être ajustés de façon à donner à la fonction d'Airy et à ses dérivées partielles des valeurs arbitrairement choisies en un point arbitrairement choisi. Il est donc loisible de prendre ϕ et ses dérivées partielles nulles à l'origine, auquel cas on aura plus simplement

$$X_P = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad Y_P = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad M_P = \phi \quad (7.55)$$

Nous appellerons parfois α , β et γ ou leurs équivalents en coordonnées polaires les paramètres improductifs de la fonction d'Airy.

Quand la plaque contient des cavités, c'est-à-dire quand elle représente un domaine à connexion linéaire multiple, la fonction d'Airy et ses dérivées partielles premières peuvent être polydromes.



L'équilibre d'une portion de plaque délimitée par un circuit fermé irréductible exige

$$\oint dX + \hat{X} = 0 \quad \oint dY + \hat{Y} = 0 \quad \oint dM + \hat{M}_0 = 0$$

où les intégrales sont les éléments de réduction à l'origine de la résultante des tractions de surface appliquées le long du circuit fermé et $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{M}_0)$ ceux des charges appliquées le long des bords des cavités entourées. Il vient alors par (7.50) pour le saut que subissent les dérivées partielles de la fonction d'Airy en parcourant une fois le circuit fermé

$$\Delta \frac{\partial \phi}{\partial y} = \oint d \frac{\partial \phi}{\partial y} = - \hat{X} \quad \Delta \frac{\partial \phi}{\partial x} = \oint d \frac{\partial \phi}{\partial x} = \hat{Y} \quad (7.56)$$

La formule (7.49) permet le même calcul pour la polydromie de la fonction d'Airy elle-même

$$\Delta \phi = \oint d \phi = \oint dM + \oint d(yX - xY) = - \hat{M}_0 + \Delta(yX - xY)$$

soit finalement

$$\Delta \phi = - \hat{M}_0 - y \hat{X} + x \hat{Y} = - \hat{M}(x, y) \quad (7.57)$$

où (x, y) est un point arbitrairement choisi du contour et

$\hat{M}(x,y)$ le moment des forces de cavité par rapport à ce point. La fonction d'Airy et ses dérivées premières restent donc monodromes si les cavités ne sont pas chargées ou, plus généralement, si les charges appliquées sont, pour chaque cavité, statiquement équivalentes à zéro.

7.7. Représentation complexe de la fonction d'Airy

La fonction d'Airy a les dimensions d'un moment de force par unité d'épaisseur. Elle doit également pouvoir être exprimée à partir des fonctions $F(\zeta)$ et $H(\zeta)$ quand le milieu est isotrope. Nous obtenons en comparant (7.51) avec (7.42) et (7.43)

$$\sigma_x + \sigma_y = \nabla^2 \phi = \partial \bar{\partial} \phi = 2(1+\nu)(F' + \bar{F}') \quad (7.58)$$

$$\sigma_x - \sigma_y - 2i \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

$$= -\partial \bar{\partial} \phi = -2(1+\nu) \bar{\zeta} F'' + 2 H''$$

(7.59)

Intégrons une première fois cette dernière équation

$$\partial \phi = (1+\nu) \bar{\zeta} F' - H' + \bar{K}$$

où $K(\zeta)$ est une nouvelle fonction analytique inconnue. Prenons la relation complexe conjuguée

$$\bar{\partial} \phi = (1+\nu) \zeta \bar{F}' - \bar{H}' + K$$

et appliquons-lui l'opérateur ∂

$$\partial\bar{\partial}\phi = 2(1+\nu)\bar{F}' + 2K'$$

Comparant avec (7.58) on voit que $K' = (1+\nu)F'$ et par conséquent

$$\partial\phi = (1+\nu)\bar{\zeta}F' + (1+\nu)\bar{F} - K' \quad (7.60)$$

et une dernière intégration livre

$$\phi = \frac{1+\nu}{2} (\bar{\zeta}F + \zeta\bar{F}) - \frac{1}{2} (H + \bar{H}) \quad (7.61)$$

Cette expression ne dépend en fait que des deux fonctions analytiques $(1+\nu)F(\zeta)$ et $H(\zeta)$; pour les cas des tensions planes généralisé le même procédé d'intégration donne un terme supplémentaire d'effet tridimensionnel

$$\phi = \frac{1+\nu}{2} (\bar{\zeta}F + \zeta\bar{F}) - \nu (z^2 - \frac{1}{3}h^2)(F' + \bar{F}') - \frac{1}{2} (H + \bar{H}) \quad (7.62)$$

Pour le cas des déformations planes il conduit de nouveau à (7.61) avec $\hat{\nu}$ au lieu de ν .

Par référence à (7.11) on en conclut que la fonction d'Airy est toujours biharmonique. Ceci est d'ailleurs une conséquence directe des équations de Beltrami-Michell. En effet, on sait que le premier invariant $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ est une fonction harmonique en (x, y, z) . D'autre part, dans le problème de l'état plan de déformation, on obtient de (7.16) et du fait que les tensions sont indépendantes de z

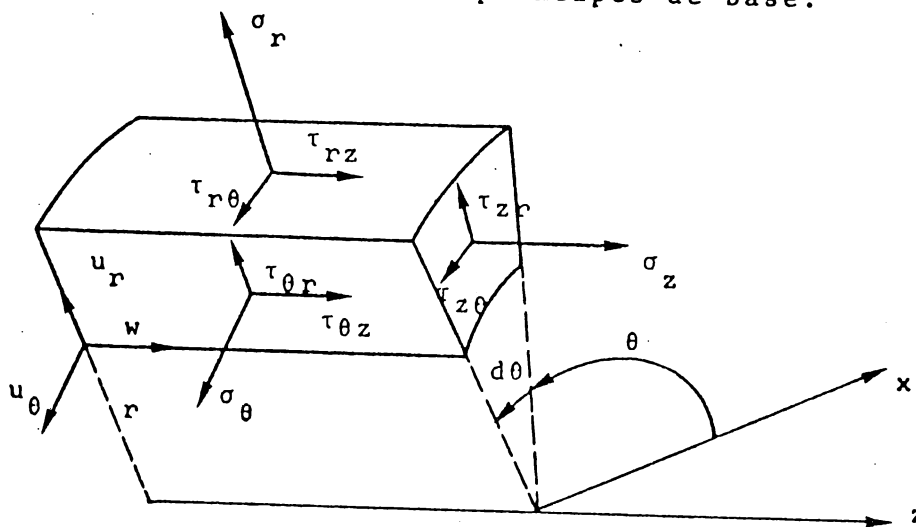
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = \nabla^2 \nabla^2 \phi = 0$$

La même conclusion découle, dans le cas des tensions planes généralisé, du fait que $\sigma_z = 0$ et que

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0 .$$

7.8. Coordonnées polaires

La représentation complexe permet un passage aisé des coordonnées cartésiennes (x,y) aux coordonnées polaires (r,θ) . Avant d'effectuer ce passage, il paraît utile de formuler au préalable les équations fondamentales : cinématiques, statiques et constitutives à partir des principes de base.



Ecrivons pour un élément dont les coordonnées sont comprises entre r et $r + dr$, θ et $\theta + d\theta$, z et $z + dz$, le travail virtuel effectué par les tensions. Conformément au principe de linéarisation géométrique, ce calcul est effectué à partir de la configuration de référence; il vient ainsi

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \{ r d\theta dz (\sigma_r \delta u_r + \tau_{r\theta} \delta u_\theta + \tau_{rz} \delta w) \} dr \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta} \{ dr dz (\tau_{\theta r} \delta u_r + \sigma_\theta \delta u_\theta + \tau_{\theta z} \delta w) \} d\theta \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \{ rd\theta dr (\tau_{zr} \delta u_r + \tau_{z\theta} \delta u_\theta + \sigma_z \delta w) \} dz \end{aligned}$$

Ce calcul tridimensionnel, basé en fait sur un système de coordonnées cylindriques (r,θ,z) , se réduit à un calcul en coordonnées polaires aussi bien dans le cas des déformations planes d'un milieu isotrope où, selon (7.12) et (7.13),

$$\delta w \equiv 0 \quad \tau_{rz} = \cos\theta \tau_{xz} + \sin\theta \tau_{yz} \equiv 0$$

$$\tau_{\theta z} = -\sin\theta \tau_{xz} + \cos\theta \tau_{yz} \equiv 0$$

que dans le cas de l'état de tension plan où l'on dispose de (7.28). Dans les deux cas ne subsistent que les termes

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_r \delta u_r + r \tau_{r\theta} \delta u_\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta r} \delta u_r + \sigma_\theta \delta u_\theta) \right] dr d\theta dz$$

$$= \text{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \{ r(\sigma_r - i \tau_{r\theta}) \delta(u_r + i u_\theta) \} + \frac{\partial}{\partial \theta} \{ (\tau_{\theta r} - i \sigma_\theta) \delta(u_r + i u_\theta) \} \right] dr d\theta dz$$

Divisant cette expression par le volume $r d\theta dr dz$ de l'élément et ajoutant le travail virtuel des forces de masse, l'accroissement d'énergie par unité de volume initial devient

$$\delta W = \text{Re} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \{ r(\sigma_r - i \tau_{r\theta}) \delta(u_r + i u_\theta) \} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \{ (\tau_{\theta r} - i \sigma_\theta) \delta(u_r + i u_\theta) \} \right. \\ \left. + \rho_0 (g_r - i g_\theta) \delta(u_r + i u_\theta) \right] \quad (7.63)$$

Les équations d'équilibre s'obtiennent, comme dans le cas général, en exprimant la nullité de l'accroissement d'énergie dans un changement de configuration compatible avec un élément rigide. Une translation de l'élément s'exprimera par exemple sous la forme

$$\delta(u_r + i u_\theta) = e^{-i\theta} \delta(u + iv)$$

où δu et δv sont deux constantes arbitraires. Annuler l'accroissement d'énergie revient dans ces conditions à annuler la partie réelle de

$$e^{-i\theta} \delta(u+iv) \left[\frac{\sigma_r - i\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r - i\tau_{r\theta}) - \frac{i}{r} (\tau_{\theta r} - i\sigma_\theta) \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta r} - i\sigma_\theta) + \rho_0 (g_r - ig_\theta) \right] \quad (7.64)$$

Cependant, comme le facteur devant le crochet est une grandeur complexe arbitraire, la partie réelle et la partie imaginaire du crochet doivent être nulles séparément. Ceci fournit les équations d'équilibre de translation

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \rho_0 g_r = 0 \quad (7.65)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\tau_{r\theta} + \tau_{\theta r}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \rho_0 g_\theta = 0$$

Dans le développement de l'expression (7.63) un certain nombre de termes disparaissent maintenant en vertu de la nullité du crochet de (7.64); il reste

$$\delta W = \text{Re} \left[\frac{i}{r} (\tau_{\theta r} - i\sigma_\theta) \delta(u_r + iu_\theta) + (\sigma_r - i\tau_{r\theta}) \frac{\partial}{\partial r} (\delta u_r + i\delta u_\theta) \right. \\ \left. + (\tau_{\theta r} - i\sigma_\theta) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\delta u_r + i\delta u_\theta) \right] \quad (7.66)$$

Considérons alors le mode de rotation infinitésimale de l'élément rigide, caractérisé par

$$\delta u_r = 0 \qquad \delta u_\theta = r \delta \alpha$$

Comme l'accroissement d'énergie est encore nul, il vient en égalant à zéro le coefficient de la constante arbitraire $\delta \alpha$

$$-\tau_{\theta r} + \tau_{r\theta} = 0 \quad (7.67)$$

qui est l'équation d'équilibre de rotation.

Mettons maintenant (7.66) sous la forme canonique

$$\delta W = \sigma_r \delta \epsilon_r + \tau_{r\theta} \delta \gamma_{r\theta} + \sigma_\theta \delta \epsilon_\theta \quad (7.68)$$

il vient par identification des coefficients de σ_r , $\tau_{r\theta}$ et σ_θ les relations cinématiques

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \gamma_{r\theta} &= -\frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \\ \epsilon_\theta &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (7.69)$$

Si la densité d'énergie W est connue en fonction des déformations (ϵ_r , $\gamma_{r\theta}$, ϵ_θ), l'expression (7.68) est équivalente aux équations constitutives générales

$$\sigma_r = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_r} \quad \tau_{r\theta} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{r\theta}} \quad \sigma_\theta = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_\theta} \quad (7.70).$$

Les équations constitutives linéarisées et sans tension initiale dépendent des formes quadratiques suivantes :

$$i) \quad W = \frac{1}{2} K (\epsilon_r + \epsilon_\theta)^2 + G \left\{ \frac{2}{3} (\epsilon_r^2 + \epsilon_\theta^2 - \epsilon_r \epsilon_\theta) + \frac{1}{2} \gamma_{r\theta}^2 \right\}$$

pour l'état de déformation plane en milieu isotrope.

Elle dérive de la forme générale (5.67) par calcul des invariants I_1 et $-I_2$, compte tenu du fait que le tenseur des déformations peut être présenté sous la forme

$$t_{pq} = s_{qp} + s_{qj} a_{pj} = s_{qj} (\delta_{pj} + D_j u_p) = s_{qj} D_j \xi_p \quad (3.8)$$

Il est aisé de vérifier que cette relation satisfait bien aux conditions d'équilibre de rotation (2.10) exigées des tensions de Piola.

Les mettant sous la forme équivalente

$$t_{qp} D_q \xi_n = t_{qn} D_q \xi_p$$

et substituant (3.8), elles deviennent

$$s_{qj} D_q \xi_n D_j \xi_p = s_{qj} D_j \xi_n D_q \xi_p$$

Echangeant dans le membre de droite les indices muets q et j ,

$$s_{qj} D_q \xi_n D_j \xi_p = s_{jq} D_q \xi_n D_j \xi_p$$

ces équations apparaissent comme vérifiées par la symétrie des tensions de Kirchhoff-Trefftz. On pourrait dès lors considérer les équations (3.8) comme fournissant une définition de ces tensions :

$$s_{qr} = \partial_p x_r t_{qp} \quad (3.9)$$

destinée à libérer les conditions d'équilibre de rotation par une simple symétrie. Elles donnent alors à la formule de conservation d'énergie (3.3) la forme

$$\delta W = s_{im} D_m \xi_j \delta D_i u_j = s_{im} D_m \xi_j \delta D_i \xi_j$$

Echangeant les indices muets i et m et appliquant la symétrie $s_{mi} = s_{im}$, il vient aussi

$$\delta W = s_{im} D_i \xi_j \delta D_m \xi_j$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_r & \frac{1}{2} \gamma_{r\theta} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{r\theta} & \varepsilon_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dans le système d'axes localement orthogonaux, \vec{e}_r , \vec{e}_θ , \vec{e}_z .
Avec les modules de Lamé, on obtient des formules simples

$$\sigma_r = \lambda (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + 2\mu \varepsilon_r$$

$$\sigma_\theta = \lambda (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + 2\mu \varepsilon_\theta$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \gamma_{r\theta}$$

On observera que la relation

$$\sigma_z = \nu (\sigma_r + \sigma_\theta)$$

ne peut pas être obtenue par voie énergétique, cette tension n'effectuant aucun travail virtuel tant que l'on maintient $w \equiv 0$.

$$\text{ii) } W = \frac{1}{2} \hat{E} (\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2 + 2\nu\varepsilon_r\varepsilon_\theta) + \frac{1}{2} G \gamma_{r\theta}^2$$

pour le problème des tensions planes. Ceci s'obtient le plus facilement en particulierisant les équations de Hooke selon les hypothèses (7.28)

$$E \varepsilon_r = \sigma_r - \nu \sigma_\theta$$

$$G \gamma_{r\theta} = \tau_{r\theta}$$

$$E \varepsilon_\theta = \sigma_\theta - \nu \sigma_r$$

Quand ces équations sont résolues par rapport aux tensions et substituées dans la formule de Clapeyron

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_r \epsilon_r + \sigma_\theta \epsilon_\theta + \tau_{r\theta} \gamma_{r\theta})$$

il en résulte l'expression donnée.

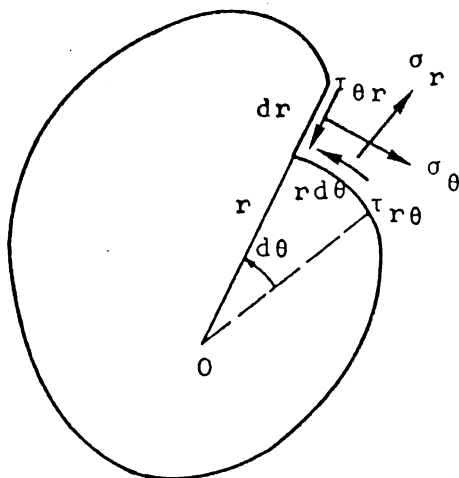
C'est ici le résultat

$$\epsilon_z = -\hat{\nu} (\epsilon_r + \epsilon_\theta)$$

qui ne peut être obtenu par voie énergétique. Il est une conséquence directe de la loi de Hooke

$$E \epsilon_z = -\nu (\sigma_r + \sigma_\theta).$$

Les équations d'équilibre (7.65), sans les forces de volume, peuvent être, comme dans le cas de coordonnées cartésiennes, satisfaites par l'usage d'une fonction d'Airy. Calculons le travail virtuel des tractions de surface sur un contour fermé (épaisseur unité)



$$\oint (\sigma_r \delta u_r + \tau_{r\theta} \delta u_\theta) r d\theta - (\tau_{\theta r} \delta u_r + \sigma_\theta \delta u_\theta) dr$$

$$= \operatorname{Re} \oint r d\theta (\sigma_r - i\tau_{r\theta}) \delta(u_r + iu_\theta) - dr (\tau_{\theta r} - i\sigma_\theta) \delta(\dot{u}_r + i\dot{u}_\theta)$$

En l'absence de forces de volume et si le contour n'entoure aucune cavité chargée, ce travail virtuel doit être nul quand les déplacements représentent un déplacement de translation de l'élément.

Donc pour

$$\delta u_r + i\delta u_\theta = e^{-i\theta} (\delta u + i\delta v)$$

on doit avoir

$$\oint e^{-i\theta} \{ (\sigma_r - i\tau_{r\theta})rd\theta - (\tau_{\theta r} - i\sigma_\theta)dr \} = 0$$

L'intégrale doit être celle de la différentielle exacte d'une fonction monodrome. Posons donc

$$e^{-i\theta} \{ (\sigma_r - i\tau_{r\theta})rd\theta - (\tau_{\theta r} - i\sigma_\theta)dr \} = d\{e^{-i\theta}(A+iB)\}$$

Il en résulte

$$r\sigma_r = \frac{\partial A}{\partial \theta} + B \qquad r\tau_{r\theta} = -\frac{\partial B}{\partial \theta} + A$$

$$\tau_{\theta r} = -\frac{\partial A}{\partial r} \qquad \sigma_\theta = \frac{\partial B}{\partial r}$$

L'équation d'équilibre (7.67) demande alors

$$\frac{A}{r} + \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\partial}{\partial r}(rA) = \frac{\partial B}{\partial \theta}$$

et cette équation est satisfaite en prenant

$$rA = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \qquad B = \frac{\partial \phi}{\partial r} .$$

Il vient finalement

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \end{aligned} \qquad (7.71)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)$$

L'état de tension dans la base localement orthogonale $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ se présente sous la forme

$$\begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & 0 \\ \tau_{\theta r} & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$$

σ_z étant nulle mais les autres tensions étant éventuellement fonctions de z dans le problème des tensions planes généralisé. Dans le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires (cylindriques) les transformations tensorielles

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \cos^2 \theta \sigma_x + \sin^2 \theta \sigma_y + 2 \sin \theta \cos \theta \tau_{xy} \\ \sigma_\theta &= \sin^2 \theta \sigma_x + \cos^2 \theta \sigma_y - 2 \sin \theta \cos \theta \tau_{xy} \\ \tau_{r\theta} &= (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \tau_{xy} + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (7.72)$$

peuvent être résumées comme suit

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y \quad (7.73)$$

$$\sigma_r - \sigma_\theta - 2i \tau_{r\theta} = e^{2i\theta} (\sigma_x - \sigma_y - 2i \tau_{xy}) \quad (7.74)$$

Par ailleurs

$$u_r + i u_\theta = e^{-i\theta} (u + iv) \quad (7.75)$$

Ces relations permettent de transformer immédiatement les structures cartésiennes des solutions des problèmes plans dans leur structure polaire :

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad u_r + iu_\theta &= \frac{e^{-i\theta}}{2G} \{ (3-\hat{\nu})F - (1+\hat{\nu})\zeta\bar{F}' + \bar{H}' \} \\
 \sigma_r + \sigma_\theta + i\hat{E}\omega &= 4(1+\hat{\nu})F' \\
 \sigma_r - \sigma_\theta - 2i\tau_{r\theta} &= e^{2i\theta} \{ -2(1+\hat{\nu})\bar{\zeta}F'' + 2H'' \} \\
 \sigma_z &= \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)
 \end{aligned} \tag{7.76}$$

pour le problème des déformations planes; la fonction d'Airy restant donnée par l'expression (7.61) avec ν remplacé par $\hat{\nu}$.

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad u_r + iu_\theta &= \frac{e^{-i\theta}}{2G} \{ (3-\nu)F - (1+\nu)\zeta\bar{F}' + 2\nu(z^2 - \frac{1}{3}h^2)\bar{F}'' + \bar{H}' \} \\
 \sigma_r + \sigma_\theta + iE\omega &= 4(1+\nu)F' \\
 \sigma_r - \sigma_\theta - 2i\tau_{r\theta} &= e^{2i\theta} \{ -2(1+\nu)\bar{\zeta}F'' + 4\nu(z^2 - \frac{1}{3}h^2)F''' + 2H'' \} \\
 w &= -\frac{2\nu z}{G} \operatorname{Re} F'
 \end{aligned} \tag{7.77}$$

pour le problème des tensions planes généralisé; la fonction d'Airy restant donnée par (7.62).

Dans ces solutions, il y a lieu de mettre la variable complexe elle-même sous la forme polaire

$$\zeta = x + iy = re^{i\theta} \tag{7.78}.$$

7.9. Applications en coordonnées cartésiennes

Nous nous référons à l'étroite parenté entre les divers états plans pour ne considérer ici que le cas des tensions planes, au sens restreint, et examinons les contributions aux tensions et déplacements de fonction polynomiales de la variable $x + iy$. Prenons d'abord les solutions polynomiales engendrées par la fonction F et soit

$$(1+\nu)F = \sum_0 (a_m + ib_m)(x + iy)^m$$

Comme l'indique le résultat général (7.39), ces solutions mettent en jeu un champ de changements de volume

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1-\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$$

et un champ de rotations matérielles ω des particules; l'ensemble étant encore à combiner avec des glissements pour satisfaire à l'existence d'un champ de déplacements.

On trouve

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2a_1 + 2a_2x - 6b_2y + \operatorname{Re} \sum_3 [m(a_m + ib_m) \{ (3-m)x^2 \\ &\quad - (1+m)y^2 + 4ixy \} (x+iy)^{m-3}] \\ \sigma_y &= 2a_1 + 6a_2x - 2b_2y + \operatorname{Re} \sum_3 [m(a_m + ib_m) \{ (1+m)x^2 \\ &\quad + (m-3)y^2 + 4ixy \} (x+iy)^{m-3}] \end{aligned} \quad (7.78)$$

$$\tau_{xy} = -2a_2y + 2b_2x + \operatorname{Im} \sum_3 [m(m-1)(a_m + ib_m)(x^2+y^2)(x+iy)^{m-3}]$$

$$\phi = a_0x + b_0y + \operatorname{Re} \sum_1 [(a_m + ib_m)(x^2+y^2)(x+iy)^{m-1}]$$

$$\begin{aligned} 2G(u+iv) &= \frac{3-\nu}{1+\nu} (a_0+ib_0) + 2 \frac{1-\nu}{1+\nu} a_1(x+iy) + \frac{4}{1+\nu} b_1(-y+ix) \\ &\quad + \sum_2 \left[\frac{3-\nu}{1+\nu} (a_m+ib_m)(x+iy)^m - m(a_m-ib_m)(x^2+y^2)(x-iy)^{m-2} \right] \end{aligned}$$

Les coefficients a_0 et b_0 ne font intervenir que des déplacements de translation et font aussi partie des termes improductifs de la fonction d'Airy. Le coefficient b_1 est responsable du petit déplacement rigide de rotation.

A. L'état de tension hydrostatique

Il est représenté par les termes associés au coefficient a_1 . Toutes les directions du plan sont principales pour les états de déformation et de tension. Cette situation se présente (pour un rayon de courbure tendant vers l'infini) dans un réservoir sphérique à paroi mince soumis à pression interne.

B. Gradient uniforme de changement de volume

Le gradient dans la direction Ox est associé aux termes en a_2 , dans la direction Oy aux termes en b_2 . Le champ des déplacements devient déjà relativement complexe.

Les solutions engendrées par la fonction H sont plus simples. Elles sont caractérisées par la nullité du premier invariant de l'état de tension et de la rotation

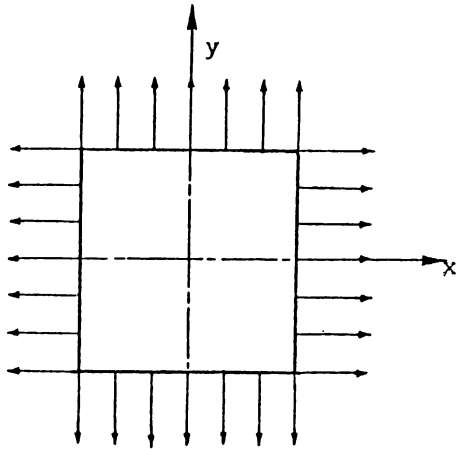
$$\sigma_x \text{ et } \sigma_y = 0 \qquad \omega = 0$$

et ne comportent que des mécanismes de distortion par glissement. Pour

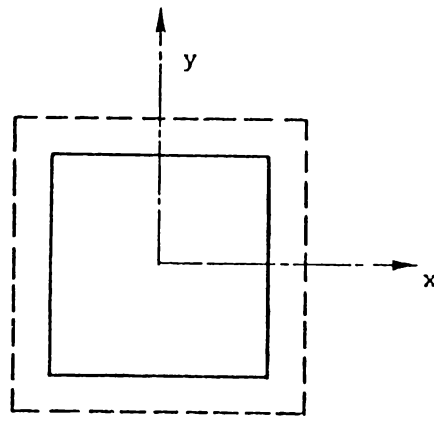
$$H' = \sum_0 (p_m + iq_m)(x + iy)^m$$

on trouve

$$\sigma_x - i\tau_{xy} = \sum_1 m(p_m + iq_m)(x + iy)^{m-1}$$

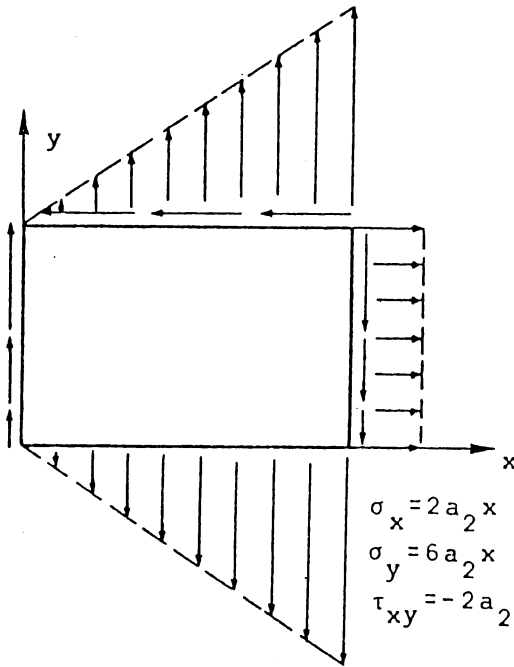


$$\sigma_x = \sigma_y = a_1 \quad \tau_{xy} = 0$$



$$Eu = 2(1-\nu)a_1x$$

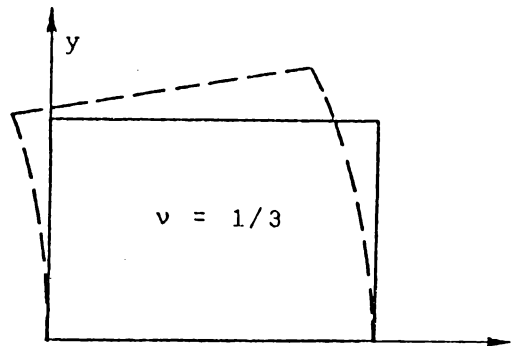
$$Ev = 2(1-\nu)a_1y$$



$$\sigma_x = 2a_2x$$

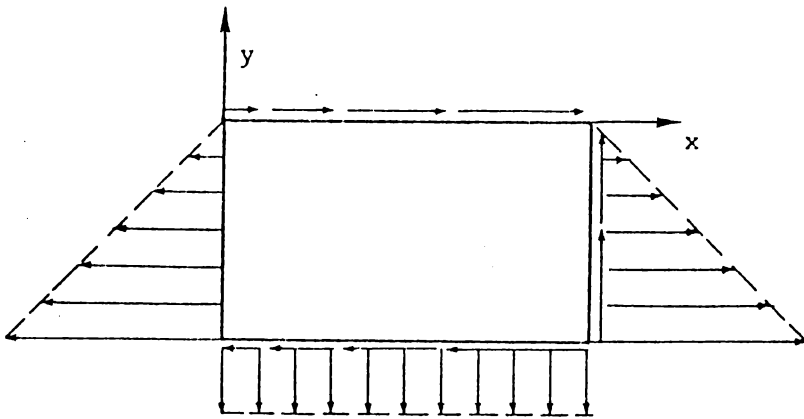
$$\sigma_y = 6a_2x$$

$$\tau_{xy} = -2a_2y$$



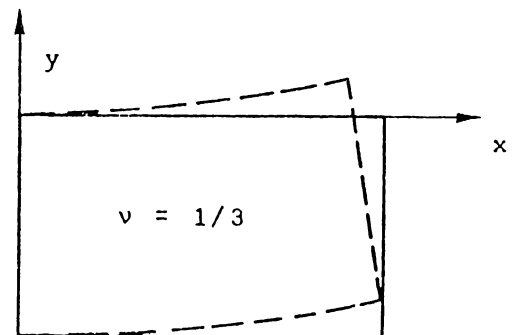
$$Eu = a_2(1-3\nu)x^2 - a_2(5+\nu)y^2$$

$$Ev = 2(3-\nu)a_2xy$$



$$\sigma_x = -6b_2y \quad \sigma_y = -2b_2y$$

$$\tau_{xy} = 2b_2x$$



$$Eu = -2(3-\nu)b_2xy$$

$$Ev = b_2(5+\nu)x^2 - b_2(1-3\nu)y^2$$

$$\phi = - \operatorname{Re} H = - p_{-1} - \operatorname{Re} \sum_0 \left[\frac{p_m + iq_m}{m+1} (x+iy)^{m+1} \right]$$

$$2G(u+iv) = \sum_0 (p_m - iq_m)(x-iy)^m$$

Les solutions dues à un coefficient q_m sont étroitement apparentées à celles d'un coefficient p_m .

Si $u(x,y)$, $v(x,y)$, $\sigma_x(x,y)$, $\tau_{xy}(x,y)$ dénotent les champs associés à un coefficient p_m , ceux associés au coefficient q_m leur sont liés par

	u	v	σ_x	τ_{xy}
$m=0, 4, 8 \dots$	$v(y, -x)$	$-u(y, -x)$	$\sigma_x(y, -x)$	$\tau_{xy}(y, -x)$
$m=1, 5, 9 \dots$	$-u(y, -x)$	$-v(y, -x)$	$\tau_{xy}(y, -x)$	$-\sigma_x(y, -x)$
$m=2, 6, 10 \dots$	$-v(y, -x)$	$u(y, -x)$	$-\sigma_x(y, -x)$	$-\tau_{xy}(y, -x)$
$m=3, 7, 11 \dots$	$u(y, -x)$	$v(y, -x)$	$-\tau_{xy}(y, -x)$	$\sigma_x(y, -x)$

Les termes associés à p_0 et q_0 sont de simples translations; avec p_{-1} ils forment la partie improductive de la fonction d'Airy.

C. Cisaillement pur uniforme

La solution associée à p_1 est un cisaillement pur uniforme tel que vu dans un repère aligné sur les directions principales. Celle associée à q_1 présente le même cas dans un repère analogue, pour le cas plan, au repère octaédral; c'est-à-dire tourné de 45° par rapport au premier.

D. Accroissement linéaire d'une tension normale

Les cas associés à p_2 et q_2 montrent l'effet d'un flux de cisaillement constant sur l'accroissement linéaire d'une des tensions normales, combiné à une flexion transversale.

Des solutions simples sont obtenues par combinaison des solutions dues à F et H. Ainsi, on peut se proposer de rechercher celles pour lesquelles $\sigma_y \equiv 0$. On voit facielement que cette hypothèse est réalisée pour

$$p_1 = 2a_1 \quad p_2 = 3a_2 \quad q_2 = b_2 \quad p_3 = 0 \quad a_3 = 0 \quad q_3 = 2b_3$$

et que tous les autres coefficients doivent être nuls. La solution de cisaillement pur due à q_1 fait partie de cette catégorie, ainsi que :

E. Extension simple

$$\sigma_x = 4a_1 \quad \sigma_y \equiv 0 \quad \tau_{xy} \equiv 0 \quad Eu = 4a_1 x \quad Ev = -4\nu a_1 y$$

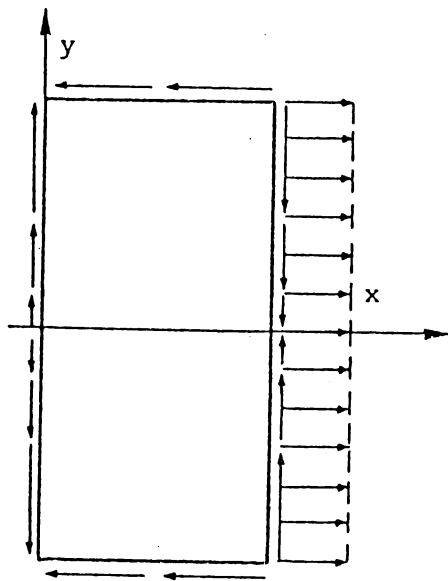
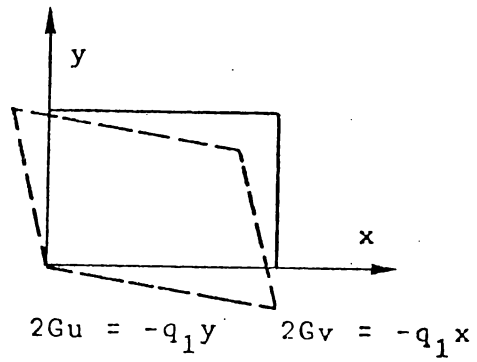
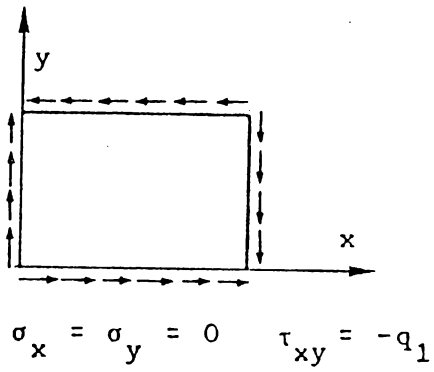
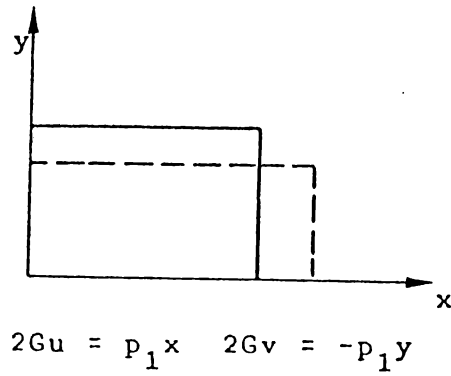
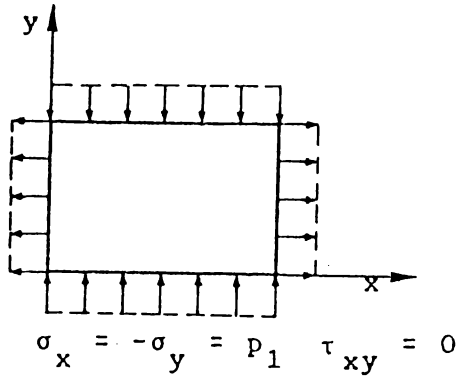
F. Flexion pure

$$\sigma_x = -8b_2 y \quad \sigma_y \equiv 0 \quad \tau_{xy} \equiv 0 \quad Eu = -8b_2 xy \quad Ev = 2(1-\nu)b_2(x^2 - y^2)$$

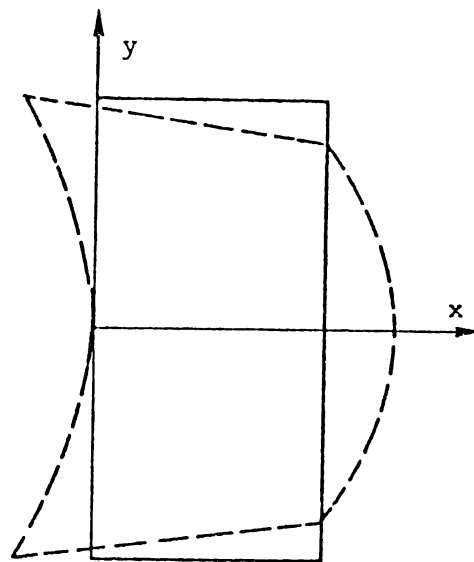
G. Shear Lag

$$\sigma_x = 8a_2 x \quad \tau_{xy} = -8a_2 y \quad \sigma_y \equiv 0$$

$$Eu = 4a_2 [x^2 - (2+\nu)y^2] \quad Ev = -8\nu a_2 xy$$



$\tau_{xy} = -2p_2 y$



$2Gv = -2p_2 xy$

Il s'agit d'une mise en charge longitudinale par tensions tangentiellles appliquées sur les bords d'une plaque rectangulaire. La solution trouvée donne une tension normale uniforme dans une section $x = \text{constante}$ mais un gauchissement important de la section droite. Quand le gauchissement est empêché, comme au voisinage d'un encastrement parfait, c'est la distribution des tensions normales qui comporte une déficience parabolique, phénomène connu dans la littérature anglo-saxonne sous le vocable de shear-lag. Il sera analysé plus tard à l'aide d'approximations variationnelles.

H. Flexion par effort tranchant

Combinant les termes en q_1 et b_3 par la relation $q_1 = 12b_3h^2$, de telle façon que la tension tangentielle s'annule pour $y = \pm h$, on trouve la flexion par effort tranchant

$$\sigma_x = -24 b_3 xy \quad \tau_{xy} = 12b_3 (y^2 - h^2) \quad \sigma_y \equiv 0$$

à laquelle on peut faire correspondre (toujours à un mode rigide près) les déplacements

$$Eu = 4 b_3 y [(2+\nu)y^2 - 3 h^2] - 12 b_3 x^2 y$$

$$Ev = 4 b_3 x [x^2 - 3 h^2 + 3 \nu y^2]$$

On observera de nouveau le gauchissement des sections $x = \text{constante}$. Cette solution coïncide évidemment avec celle du champ principal de flexion de la barre de section rectangulaire discutée en 6.18.H.

I. Flexion de de Saint-Venant d'une poutre rectangulaire avec semelles

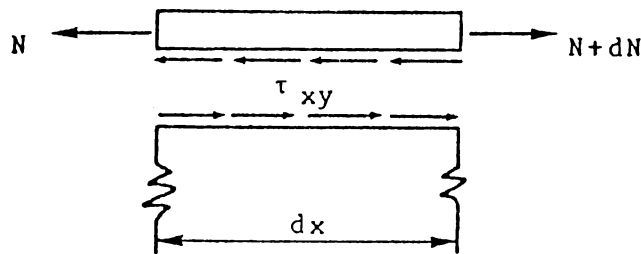
La répartition des tensions normales en flexion montre l'efficacité des fibres extrêmes dans leur contribution au moment fléchissant. Une poutre de flexion efficiente est donc constituée de deux concentrations de fibres extrêmes, les semelles, tenues à distance par une âme d'épaisseur relativement

faible, dont une autre fonction très importante est de transmettre les efforts tranchants. Une analyse de première approximation de ce type de poutre consiste à la considérer comme une tôle en état plan de tension (l'âme) soumise à des conditions aux limites particulières en $y = \pm h$. On admettra qu'une semelle, de section A , est en état de tension ou compression uniaxiale uniforme. Si N est l'effort total dans la semelle, positif en cas de traction

$$\frac{N}{A} = E \varepsilon_x = \sigma_x - \nu \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad y = h$$

La seconde égalité exprime l'égalité entre l'allongement de la semelle et celui du bord de l'âme auquel elle est rattachée; c'est une condition de compatibilité des déformations.

Il y a d'autre part une condition d'équilibre longitudinal de la semelle



$$\frac{dN}{dx} = t \tau_{xy} = - t \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

où t est l'épaisseur de l'âme.

L'élimination de l'effort normal fournit la condition aux limites pour la fonction d'Airy

$$\frac{d}{dx} \left[A \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \right] + t \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{pour } y = h$$

Cette condition peut être intégrée une fois en x et devient

$$A \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + t \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad y = h$$

ce qui fixe le terme en γy de la partie indéterminée de la fonction d'Airy. Dans une poutre symétrique en flexion la fonction d'Airy est impaire en y et il en est alors de même du terme en A de la condition aux limites. On observera que pour l'équilibre de la semelle inférieure ($y = -h$) le second terme doit maintenant être retranché ce qui assure aussi le caractère impair du second terme.

Nous inspirant du cas sans semelles, nous essayons pour la flexion de de Saint-Venant de la poutre une fonction d'Airy du type

$$\phi = y(g(x) + \frac{y^2}{h^2} f(x))$$

Cette fonction doit être biharmonique pour assurer la compatibilité des déplacements

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \phi = y g^{IV} + \frac{y^3}{h^2} f^{IV} + \frac{12}{h^2} y f'' = 0$$

Introduisant l'opérateur $D = h \frac{d}{dx}$

ceci se traduit par les deux conditions

$$(a) \quad D^4 f = 0 \quad D^4 g + 12 D^2 f = 0 \quad (b)$$

La condition aux limites en $y = h$

$$A \left(\frac{6}{h} f - \nu h g'' - \nu h f'' \right) + t g + 3 t f = 0$$

devient, par introduction du paramètre âme-semelle $m = \frac{th}{A}$,

$$3(2+m)f - \nu D^2 f + mg - \nu D^2 g = 0 \quad (c)$$

Appliquant à cette relation l'opérateur D^2 et tenant compte des conditions précédentes (a) et (b)

$$3(2+m+4\nu)D^2f + m D^2g = 0 \quad (d)$$

Une nouvelle application de D^2 donne alors successivement $D^4g = 0$ à cause de (a), puis $D^2f = 0$ à cause de (b), puis $D^2g = 0$ à cause de (d). Finalement, f et g sont toutes deux des fonctions linéaires, liées par (c), c'est-à-dire

$$3(2+m)f = -mg \quad (e)$$

et
$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \equiv 0$$

ce qui correspond à la condition de de Saint-Venant.

La fonction linéaire $f(x)$ est liée au moment fléchissant; de

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{6y}{h^2} f \quad N = A(\sigma_x)_{y=h} = \frac{6A}{h} f$$

on trouve pour moment fléchissant

$$M = 2Nh + t \int_{-h}^h \sigma_x y dy = 4A(3+m)f$$

La distribution de la tension tangentielle est

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -g' - 3 \frac{y^2}{h^2} f' = \frac{3}{h} \left[\frac{2}{m} + 1 - \frac{y^2}{h^2} \right] Df$$

et l'effort tranchant

$$T = t \int_{-h}^h \tau_{xy} dy = 4th \left(1 + \frac{3}{m}\right) f' = 4A(3+m) f' = \frac{dM}{dx}$$

J. Mise en charge transversale d'une poutre à semelles

Il suffit d'ajouter à la fonction d'Airy un terme en y^5 pour développer une solution où la poutre peut recevoir une charge transversale distribuée, susceptible de varier linéairement. Les calculs seront conduits comme précédemment.

$$\phi = y \left[g(x) + \frac{y^2}{h^2} f(x) + \frac{y^4}{h^4} p(x) \right]$$

Conditions pour que ϕ soit biharmonique

$$120 p + 12 D^2 f + D^4 g = 0 \quad (a)$$

$$40 D^2 p + D^4 f = 0 \quad (b)$$

$$D^4 p = 0 \quad (c)$$

dont on tire les conclusions temporaires $D^6 f = 0$ $D^8 g = 0$.
Condition aux limites due à la présence de la semelle :

$$3(2+m)f + 5(4+m)p + mg - v(D^2 g + D^2 f + D^2 p) = 0 \quad (d)$$

En lui appliquant l'opérateur D^6 , on trouve $D^6 g = 0$.
Appliquant alors D^2 à (a)

$$10 D^2 p + D^4 f = 0$$

qui, eu égard à (b), donne maintenant

$$D^2 p = 0 \quad D^4 f = 0$$

Ceci permet en appliquant D^4 à (d) de trouver $D^4 g = 0$.

Les équations (a) et (b) sont trivialement satisfaites et (a) se réduit à

$$10 p + D^2 f = 0 \quad (e).$$

Par application de D^2 , (d) se transforme en

$$3(2+m) D^2 f + m D^2 g = 0 \quad (f).$$

Le remplacement de p et de $D^2 g$ au profit de $D^2 f$ dans (d) permet finalement d'exprimer g en fonction de f et de sa dérivée seconde, f étant un polynôme général du troisième degré :

$$g = -3 \left(\frac{2}{m} + 1 \right) f + \left(\frac{1}{2} + \frac{2(1-\nu)}{m} - \frac{6\nu}{2} \right) D^2 f \quad (g).$$

Le calcul des tensions livre notamment

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{y}{h^2} D^2 g + \frac{y^3}{h^4} D^2 f = \left[\frac{y^3}{h^4} - 3 \left(\frac{2}{m} + 1 \right) \frac{y}{h^2} \right] D^2 f$$

et la charge appliquée transversalement à la semelle supérieure ($y = h$) est

$$p_y = t(\sigma_y)_{y=h} = -\frac{t}{h} \left(2 + \frac{6}{m} \right) D^2 f.$$

La même charge est évidemment appliquée sur la semelle inférieure ($y = -h$). Cette charge peut être linéairement variable avec x et sa donnée définit les coefficients du polynôme du premier degré $D^2 f$. Si, par exemple, cette charge était nulle, on serait ramené au cas 7.9.I. Ensuite

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{6}{h^2} y f + \frac{20}{h^4} y^3 p = \frac{6}{h^2} y f - \frac{2}{h^4} y^3 D^2 f$$

et la charge répartie induit une distribution des tensions normales qui n'est plus proportionnelle à la distance à la fibre neutre. Avec

$$N = A(\sigma_x - \nu \sigma_y)_{y=h} = \frac{2A}{h} \left[3f - \left\{ 1 - \nu \left(1 + \frac{3}{m} \right) \right\} D^2 f \right].$$

il est possible d'exprimer le moment fléchissant

$$\begin{aligned}
 M &= 2Nh + t \int_{-h}^h \sigma_x y dy = 4ht \left(f - \frac{1}{5} D^2 f \right) + 4A \left[3f - \left\{ 1 - \left(1 + \frac{3}{m} \right) \right\} D^2 f \right] \\
 &= 4A(3+m)f - 4A \left[1 + \frac{m}{5} - \nu \left(1 + \frac{3}{m} \right) \right] D^2 f
 \end{aligned}$$

Si donc $D^2 f$ est connu de par les charges appliquées, la connaissance du moment fléchissant détermine entièrement la fonction f . Il vient encore

$$\begin{aligned}
 \tau_{xy} &= - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = - g' - 3 \frac{y^2}{h^2} f' - 5 \frac{y^4}{h^4} p' \\
 &= \frac{3}{h} \left[\frac{2}{m} + 1 - \frac{y^2}{h^2} \right] Df - \frac{1}{2h} \left[1 + \frac{4(1-\nu)}{m} - \frac{12\nu}{m^2} - \frac{y^4}{h^4} \right] D^3 f
 \end{aligned}$$

$$T = t \int_{-h}^h \tau_{xy} dy = 4t \left(\frac{3}{m} + 1 \right) Df - 4t \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{m} - \frac{\nu}{m} \left(1 + \frac{3}{m} \right) \right) D^3 f = \frac{dM}{dx}$$

Enfin,

$$\frac{dT}{dx} = \frac{4t}{h} \left(\frac{3}{m} + 1 \right) D^2 f = - 2 p_y$$

Ce calcul est un contrôle destiné à vérifier l'exactitude des équations d'équilibre global de la poutre qui sont une conséquence obligatoire de l'équilibre détaillé de chaque élément. Le cas où la charge transversale est appliquée à une seule semelle peut être traité en superposant à la solution précédente une solution comportant des charges qui s'opposent et qui dépend d'une fonction d'Airy développée en puissances paires de y .

7.10. Applications en coordonnées polaires

Nous nous réservons un champ d'application très étendu en étudiant la solution générale du problème de l'état plan pour un domaine contenant un anneau circulaire centré à l'origine. Nous demandons que les tensions y prennent une valeur unique, ce qui implique que les fonctions H'' , F'' et $\text{Re}F'$ soient analytiques dans l'anneau. Le théorème de Laurent nous assure alors de l'existence de développements convergents dans l'anneau du type

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} (p_m + iq_m) \zeta^m$$

pour H'' et F'' . Après une double intégration, nous écrivons

$$H = (\gamma + i\delta)\zeta(\ln\zeta - 1) + (\alpha + i\beta)\ln\zeta + \sum_{-\infty}^{\infty} (\alpha_m + i\beta_m)\zeta^m$$

$$(1+\nu)F = \eta\zeta(\ln\zeta - 1) + (\lambda + i\mu)\ln\zeta + \sum_{-\infty}^{\infty} (\lambda_m + i\mu_m)\zeta^m$$

Le coefficient η est réel pour que $\text{Re}F'$ ne soit pas multiforme. Avec

$$\zeta = r e^{i\theta} \quad \ln\zeta = \ln r + i\theta$$

nous obtenons alors les développements en coordonnées polaires des déplacements et des tensions

$$\begin{aligned} 2Gu_r = & -\theta \cos\theta \left(\delta + \frac{3-\nu}{1+\nu} \mu \right) + \theta \sin\theta \left(-\gamma + \frac{3-\nu}{1+\nu} \lambda \right) \\ & + nr \left(2 \frac{1-\nu}{1+\nu} \ln r - \frac{3-\nu}{1+\nu} \right) + 2 \frac{1-\nu}{1+\nu} \lambda_1 r + \frac{\alpha}{r} \\ & + \cos\theta \left[\alpha_1 - \lambda + \gamma \ln r - \frac{\alpha}{r^2} + \frac{1-3\nu}{1+\nu} \lambda_2 r^2 + \frac{3-\nu}{1+\nu} (\lambda_0 + \lambda \ln r) \right] \\ & + \sin\theta \left[-\beta_1 - \mu - \delta \ln r - \frac{\beta}{r^2} - \frac{1-3\nu}{1+\nu} \mu_2 r^2 + \frac{3-\nu}{1+\nu} (\mu_0 + \mu \ln r) \right] \end{aligned}$$

$$+ \sum_2^{\infty} \cos m\theta \left[\frac{2-m-\nu(2+m)}{1+\nu} \lambda_{m+1} r^{m+1} + m \alpha_m r^{m-1} + \frac{2+m-\nu(2-m)}{1+\nu} \frac{\lambda_{1-m}}{r^{m-1}} - m \frac{\alpha_{-m}}{r^{m+1}} \right]$$

$$+ \sum_2^{\infty} \sin m\theta \left[- \frac{2-m-\nu(2+m)}{1+\nu} \mu_{m+1} r^{m+1} - m \beta_m r^{m-1} + \frac{2+m-\nu(2-m)}{1+\nu} \frac{\mu_{1-m}}{r^{m-1}} + m \frac{\beta_{-m}}{r^{m+1}} \right]$$

$$2Gu_{\theta} = \frac{4}{1+\nu} \eta \theta r + \theta \cos \theta (-\gamma + \frac{3-\nu}{1+\nu} \lambda) + \theta \sin \theta (\delta + \frac{3-\nu}{1+\nu} \mu) + \frac{4}{1+\nu} \mu_1 r - \frac{\beta}{r}$$

$$+ \cos \theta \left[-\beta_1 + \mu - \delta \ln r + \frac{\beta_{-1}}{r^2} + \frac{5+\nu}{1+\nu} \mu_2 r^2 + \frac{3-\nu}{1+\nu} (\mu_0 + \mu \ln r) \right]$$

$$+ \sin \theta \left[-\alpha_1 - \lambda - \gamma \ln r - \frac{\alpha_{-1}}{r^2} + \frac{5+\nu}{1+\nu} \lambda_2 r^2 - \frac{3-\nu}{1+\nu} (\lambda_0 + \lambda \ln r) \right]$$

$$+ \sum_2^{\infty} \cos m\theta \left[\frac{4+m+\nu m}{1+\nu} \mu_{m+1} r^{m+1} - m \beta_m r^{m-1} + \frac{3-\nu}{1+\nu} \frac{\mu_{1-m}}{r^{m-1}} + m \frac{\beta_{-m}}{r^{m+1}} \right]$$

$$+ \sum_2^{\infty} \sin m\theta \left[\frac{4+m+\nu m}{1+\nu} \lambda_{m+1} r^{m+1} - m \alpha_m r^{m-1} - \frac{3-\nu}{1+\nu} \frac{\lambda_{1-m}}{r^{m-1}} - m \frac{\alpha_{-m}}{r^{m+1}} \right]$$

$$\phi = \beta \theta + \theta \cos \theta (\delta - \mu) r + \theta \sin \theta (\lambda + \gamma) r$$

$$+ \eta r^2 (\ln r - 1) + \lambda_1 r^2 - \alpha \ln r - \alpha_0$$

$$+ \cos \theta \left[\lambda r \ln r + \lambda_0 r + \lambda_2 r^3 - \gamma r (\ln r - 1) - \frac{\alpha_{-1}}{r} - \alpha_1 r \right]$$

$$+ \sin \theta \left[\mu r \ln r + \mu_0 r - \mu_2 r^3 + \delta r (\ln r - 1) - \frac{\beta_{-1}}{r} + \beta_1 r \right]$$

$$+ \sum_2^{\infty} \cos m\theta \left[\lambda_{m+1} r^{m+2} - \alpha_m r^m + \frac{\lambda_{1-m}}{r^{m-2}} - \frac{\alpha_{-m}}{r^m} \right]$$

$$+ \sum_2^{\infty} \sin m\theta \left[-\mu_{m+1} r^{m+2} + \beta_m r^m + \frac{\mu_{1-m}}{r^{m-2}} - \frac{\beta_{-m}}{r^m} \right]$$

(7.79)

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \eta(2\ell nr-1) + 2\lambda_1 - \frac{\alpha}{r} \\
&+ \cos\theta \left(\frac{3\lambda+\gamma}{r} + 2\lambda_2 r + \frac{2\alpha-1}{r^3} \right) \\
&+ \sin\theta \left(\frac{3\mu-\delta}{r} - 2\mu_2 r + \frac{2\beta-1}{r^3} \right) \tag{7.80} \\
&+ \sum_2^{\infty} \cos m\theta \left[-(m-2)(m+1)\lambda_{m+1} r^{m+m(m-1)} \alpha_m r^{m-2} - (m-1)(m+2) \frac{\lambda_{1-m}}{r^m} \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. + m(m+1) \frac{\alpha_{-m}}{r^{m+2}} \right] \\
&+ \sum_2^{\infty} \sin m\theta \left[(m-2)(m+1)\mu_{m+1} r^{m-m(m-1)} \beta_m r^{m-2} - (m-1)(m+2) \frac{\mu_{1-m}}{r^m} \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. + m(m+1) \frac{\beta_{-m}}{r^{m+2}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta} &= \frac{\beta}{r^2} + \cos\theta \left(2\mu_2 r - \frac{\delta+\mu}{r} - 2 \frac{\beta-1}{r^3} \right) + \sin\theta \left(2\lambda_2 r + \frac{\lambda-\gamma}{r} + 2 \frac{\alpha-1}{r^3} \right) \\
&+ \sum_2^{\infty} \cos m\theta \left[m(m+1) \left(\mu_{m+1} r^m - \frac{\beta_{-m}}{r^{m+2}} \right) + m(m-1) \left(\frac{\mu_{1-m}}{r^m} - \beta_m r^{m-2} \right) \right] \\
&\tag{7.81} \\
&+ \sum_2^{\infty} \sin m\theta \left[m(m+1) \left(\lambda_{m+1} r^m + \frac{\alpha_{-m}}{r^{m+2}} \right) - m(m-1) \left(\alpha_m r^{m-2} + \frac{\lambda_{1-m}}{r^m} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\sigma_\theta = \eta(2\ell nr+1) + 2\lambda_1 + \frac{\alpha}{r} \tag{7.82}$$

$$+ \cos\theta \left(6\lambda_2 r + \frac{\lambda-\gamma}{r} - 2 \frac{\alpha-1}{r^3} \right) + \sin\theta \left(-6\mu_2 r + \frac{\mu+\delta}{r} - 2 \frac{\beta-1}{r^3} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_2^{\infty} \cos m\theta \left[(m+1)(m+2)\lambda_{m+1} r^{m-m(m-1)} \alpha_m r^{m-2} + (m-1)(m-2) \frac{\lambda_{1-m}}{r^m} \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - m(m+1) \frac{\alpha_{-m}}{r^{m+2}} \right] \\
& + \sum_2^{\infty} \sin m\theta \left[-(m+1)(m+2)\mu_{m+1} r^{m+m(m-1)} \beta_m r^{m-2} + (m-1)(m-2) \frac{\mu_{1-m}}{r^m} \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - m(m+1) \frac{\beta_{-m}}{r^{m+2}} \right]
\end{aligned}$$

La première ligne des expressions trouvées pour les déplacements met en évidence les termes polydromes. Ils sont conformes à la théorie de Volterra car les différences entre les valeurs pour $\theta+2\pi$ et θ sont

$$2G\Delta u_r = -2\pi \cos\theta \left(\delta + \frac{3-\nu}{1+\nu} \mu \right) + 2\pi \sin\theta \left(-\gamma + \frac{3-\nu}{1+\nu} \lambda \right)$$

$$2G\Delta u_\theta = \frac{8\pi}{1+\nu} \eta r + 2\pi \cos\theta \left(-\gamma + \frac{3-\nu}{1+\nu} \lambda \right) + 2\pi \sin\theta \left(\delta + \frac{3-\nu}{1+\nu} \mu \right)$$

Or, selon la théorie générale, il faut pour un centre de réduction pris à l'origine

$$\Delta u = \Delta p - y\Delta\omega$$

$$\Delta v = \Delta q + x\Delta\omega$$

c'est-à-dire

$$\Delta u_r = \Delta p \cos\theta + \Delta q \sin\theta$$

$$\Delta u_\theta = -\Delta p \sin\theta + \Delta q \cos\theta + r\Delta\omega$$

Par comparaison, il vient :

$$\Delta\omega = \frac{8\pi}{E} \eta \qquad \Delta p = - \frac{2\pi}{E} [(1+\nu)\delta + (3-\nu)\mu]$$

$$\Delta q = \frac{2\pi}{E} [-(1+\nu)\gamma + (3-\nu)\lambda]$$

Les modes rigides de déplacement sont représentés par les coefficients $(\alpha_1, \beta_1, \mu_1)$. La polydromie de la fonction d'Airy est, comme on l'a vu, liée à la résultante des tensions appliquées à l'intérieur de la cavité.

Si elle est nulle, on aura

$$\beta = 0 \qquad \delta = \mu \qquad \gamma = -\lambda$$

Quant aux termes improductifs de la fonction d'Airy, ce sont ceux liés aux coefficients $(\alpha_0, \lambda_0, \mu_0)$.

La méthode qui a été suivie et qui est basée essentiellement sur la représentation complexe de MUSHKELISHVILI-KOLOSOV a l'avantage de fournir les déplacements aussi bien que les tensions. Si ces dernières seules sont prises en considération, leur développement en série de Fourier peut être obtenu rapidement de la façon suivante. Si a_r et a_θ dénotent les composantes respectivement radiale et tangentielle du gradient de la fonction d'Airy

$$a_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad a_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

le Laplacien de la fonction d'Airy sera

$$\nabla^2 \phi = \text{div grad } \phi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} \right]$$

soit, pour l'opérateur de Laplace en coordonnées polaires,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \qquad (7.83)$$

Une fonction harmonique du type

$$\cos m\theta f(r) \quad \text{ou} \quad \sin m\theta f(r)$$

a donc sa fonction $f(r)$ gouvernée par l'équation différentielle

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) - \frac{m^2}{r} f = 0$$

Le changement de variable $r = e^t$ la transforme en

$$\frac{d^2 f}{dt^2} - m^2 f = 0$$

Nous obtenons donc pour solution générale quand $m \neq 0$

$$f = A e^{mt} + B e^{-mt} = A r^m + B r^{-m} \quad (7.84)$$

Nous savons d'autre part par la section 7.2. que le produit d'une fonction harmonique par $x^2 + y^2 = r^2$ fournit une fonction bi-harmonique. Par conséquent, une fonction bi-harmonique du type

$$\cos m\theta f(r) \quad \text{ou} \quad \sin m\theta f(r)$$

correspond à

$$f(r) = A r^m + B r^{-m} + r^2 (C r^m + D r^{-m}) \quad (7.85)$$

C'est bien la solution générale à quatre constantes arbitraires, sauf pour les cas $m=0$ et $m=1$ où on peut faire $f(r) \equiv 0$ par un choix approprié de valeurs, non toutes nulles, des constantes. Pour $m = 0$, la solution générale du cas harmonique est

$$f = A + B t = A + B \ln r \quad (\text{harmonique } m=0) \quad (7.86)$$

et une fonction biharmonique ne dépendant que de r a donc pour expression générale

$$\phi = f = A + B \ln r + r^2(C + D \ln r) \quad (\text{biharmonique } m=0) \quad (7.87)$$

Enfin, pour $m=1$, la solution harmonique (7.84) est générale. On peut alors se rappeler que, toujours selon les résultats obtenus dans la section (7.2), on peut construire une fonction bi-harmonique en multipliant une fonction harmonique par $x = r \cos \theta$ ou $y = r \sin \theta$. C'est par conséquent en multipliant une fonction harmonique de r seulement, telle que donnée par (7.86), par r lui-même qu'on pourra compléter la solution générale d'une fonction biharmonique du type $\cos \theta f(r)$ ou $\sin \theta f(r)$. Le terme en D de (7.85) qui, pour $m=1$ ne se distingue pas du terme en A , sera donc remplacé par un terme en $r \ln r$:

$$f(r) = Ar + \frac{B}{r} + Cr^3 + Dr \ln r \quad (\text{biharmonique } m=1) \quad (7.88)$$

Ces résultats confirment la structure obtenue pour la partie monodrome de la fonction d'Airy en (7.79).

A. Ouverture circulaire libre de charges appliquées dans une plaque en état de tension plan

Soit $r = a$ le bord de l'ouverture sur laquelle les tensions σ_r et $\tau_{r\theta}$ doivent s'annuler. On peut exprimer cette propriété plus simplement à partir de la fonction d'Airy elle-même. En effet, on sait qu'il est toujours possible d'annuler cette fonction et ses dérivées premières en un point quelconque par un choix judicieux des paramètres improductifs. Si on choisit un point de la circonférence $r = a$, la fonction d'Airy et ses dérivées premières resteront nulles en vertu des propriétés (7.55) puisque, en l'absence de tractions de surfaces sur le bord de l'ouverture, on aura partout $X_p=0$, $Y_p=0$ et $M_p=0$. On peut donc remplacer les conditions

$$\sigma_r = 0 \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{pour} \quad r = a$$

par les conditions équivalentes

$$\phi = 0 \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad \text{pour} \quad r = a$$

Elles conduisent aux liaisons suivantes entre coefficients

$$\beta = 0 \quad \mu = \delta \quad \lambda = -\gamma$$

ce qui rend ϕ monodrome comme il fallait s'y attendre,

$$2\alpha_0 = -a^2 \eta + (1-2\ell na) \alpha \qquad 2\lambda_1 = \frac{\alpha}{a} + (1-2\ell na) \eta$$

$$\alpha_1 = 2a^2 \lambda_2 + \lambda_0 - 2\gamma \ell na \qquad \alpha_{-1} = a^2 \gamma - \lambda_2 a^4$$

$$\beta_1 = -\mu_0 + 2a^2 \mu_2 - 2\delta \ell na \qquad \beta_{-1} = -a^2 \delta + \mu_2 a^4$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{-m} &= -m a^{2m+2} \lambda_{m+1} + (m-1) a^{2m} \alpha_m \\ \lambda_{1-m} &= -(m+1) a^{2m} \lambda_{m+1} + m a^{2m-2} \alpha_m \\ \beta_{-m} &= m a^{2m+2} \mu_{m+1} - (m-1) a^{2m} \beta_m \\ \mu_{1-m} &= (m+1) a^{2m} \mu_{m+1} - m a^{2m-2} \beta_m \end{aligned} \right\} \quad m \geq 2$$

Avec la notation $\rho = r/a$ cela conduit à la fonction d'Airy

$$\begin{aligned} \phi &= \eta a^2 \left(\rho^2 \ell n \rho + \frac{1-\rho^2}{2} \right) - \alpha \left(\ell n \rho + \frac{1-\rho^2}{2} \right) \\ &+ \left(\rho - \frac{1}{\rho} - 2\rho \ell n \rho \right) (\gamma \cos \theta - \delta \sin \theta) a + \frac{(\rho^2 - 1)^2}{\rho} (\lambda_2 \cos \theta - \mu_2 \sin \theta) a^3 \end{aligned}$$

$$+ \sum_2^{\infty} \left[\rho^{m+2} - (m+1)\rho^{2-m} + m\rho^{-m} \right] (\lambda_{m+1} \cos m\theta - \mu_{m+1} \sin m\theta) a^{m+2} \quad (7.89)$$

$$+ \sum_2^{\infty} \left[\rho^m - m\rho^{2-m} + (m-1)\rho^{-m} \right] (\alpha_m \cos m\theta - \beta_m \sin m\theta) a^m$$

Supposons maintenant que la frontière extérieure du domaine soit située dans toutes les directions à des distances r beaucoup plus grandes que a . Nous supprimerons alors dans la fonction d'Airy les termes qui donneraient lieu à des tensions qui tendraient vers l'infini avec ρ . Ceci conduit à ne retenir que les coefficients $(\alpha, \gamma, \delta, \alpha_2, \beta_2)$. On trouve pour les tensions

$$a^2 \sigma_{\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} = \alpha \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) - 2 \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^3}\right) (\gamma \cos \theta - \delta \sin \theta) - 2 \left(1 + \frac{3}{\rho^4}\right) a^2 (\alpha_2 \cos 2\theta - \beta_2 \sin 2\theta)$$

$$a^2 \tau_{r\theta} = - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) = 2 \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{\rho}\right) (\gamma \sin \theta + \delta \cos \theta) - 2 \left(1 + \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4}\right) a^2 (\alpha_2 \sin 2\theta + \beta_2 \cos 2\theta)$$

$$a^2 \sigma_r = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} = \alpha \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) - 2 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^3}\right) (\gamma \cos \theta - \delta \sin \theta) + 2 \left(1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4}\right) a^2 (\alpha_2 \cos 2\theta - \beta_2 \sin 2\theta)$$

Les termes en γ et δ ne contribuent pas à l'état de tension régnant à grande distance mais ils ne s'éteignent que lentement, en fait comme ρ^{-1} . Ils sont de plus associés à des déplacements polydromes et représentent par conséquent des états d'auto-tension réguliers qui peuvent provenir de la fermeture de dislocations du type Weingarten-Volterra. L'auto-tension en provenance de la fermeture d'une dislocation en $\Delta\omega$ (terme en η) est absente; elle induirait des σ_r et σ_{θ} se comportant à grande distance comme $\ln \rho$. Les tensions dues aux termes restants s'interprètent à grande distance, soit en coordonnées polaires, soit en coordonnées cartésiennes. On dispose à cet effet des relations

$$\sigma_{\theta} + \sigma_r = \sigma_x + \sigma_y = \frac{2}{a} \alpha$$

$$\sigma_x - \sigma_y - 2i\tau_{xy} = (\sigma_r - \sigma_{\theta} - 2i\tau_{r\theta})e^{-2i\theta} = 4(\alpha_2 + i\beta_2)$$

i) Cas hydrostatique $\alpha_2 = 0$ $\beta_2 = 0$

à grande distance $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_r = \sigma_{\theta} = \frac{\alpha}{a} = \sigma_{\infty}$

tandis qu'à distance finie

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\infty} \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) \quad \sigma_r = \sigma_{\infty} \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) \quad \tau_{r\theta} \equiv 0$$

La perturbation de l'état de tension hydrostatique à l'infini s'éteint comme ρ^{-2} . La tension principale maximale est atteinte au bord de l'ouverture où $\sigma_{\theta} = 2\sigma_{\infty}$.

ii) Cas du cisaillement pur $\alpha = 0$ $\alpha_2 = 0$

à grande distance $\tau_{xy} = -2\beta_2 = \tau_{\infty}$ $\sigma_x = \sigma_y = 0$

$$\sigma_{\theta} = -\tau_{\infty} \left(1 + \frac{3}{4}\right) \sin 2\theta$$

$$\sigma_r = \tau_{\infty} \left(1 - \frac{4}{2} + \frac{3}{4}\right) \sin 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\infty} \left(1 + \frac{2}{2} - \frac{3}{4}\right) \cos 2\theta$$

La perturbation sur σ_{θ} s'éteint plus rapidement que les autres mais elle est responsable au bord de l'ouverture d'une tension principale localement maximale

$$\sigma_{\theta} = \pm 4\tau_{\infty}$$

iii) Traction pure à l'infini

Pour avoir à grande distance $\sigma_x = \sigma_\infty$ $\sigma_y = 0$ $\tau_{xy} = 0$

on prend $\beta_2 = 0$ $\sigma_\infty = 4\alpha_2 = \frac{2}{a} \alpha$

$$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_\infty} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{\rho^4}\right) \cos 2\theta$$

$$\frac{\tau_{r\theta}}{\sigma_\infty} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4}\right) \sin 2\theta$$

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_\infty} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4}\right) \cos 2\theta$$

La tension principale maximale locale est $\sigma_\theta = 3\sigma_\infty$ ($\theta = \pm \frac{\pi}{2}$).

La question se pose de savoir à quel point la présence de l'ouverture cause un risque de dépassement local de la limite élastique. En adoptant le critère de TRESCA on est amené à comparer entre elles la tension tangentielle maximum locale et celle régnant à grande distance. Leur rapport sera le facteur de surtension. Il faut observer que, dans le sens perpendiculaire à la plaque, $\sigma_z = 0$ est une des trois tensions principales.

i) Cas hydrostatique

A grande distance la tension tangentielle maximum est $\frac{1}{2} \sigma_\infty$. Localement ($\rho=1$), on a σ_∞ . Le facteur de surtension est 2.

ii) Cas du cisaillement pur

A grande distance, on a τ_∞ ; localement $2\tau_\infty$. Le facteur de surtension est 2.

iii) Traction pure
.....

A grande distance, on a $\frac{1}{2} \sigma_{\infty}$; localement $\frac{3}{2} \sigma_{\infty}$.
Le facteur de surtension en ici égal à 3.

Le critère de Hüber-Hencky-Von Mises conduit à des résultats légèrement différents. Selon (5.58) le critère peut s'écrire

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) < 2 \sigma_e^2$$

Dans l'état plan de tension, ceci se réduit à

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \tau_{xy}^2 < \sigma_e^2$$

Ce résultat mis sous la forme

$$\frac{3}{4}(\sigma_x - \sigma_y - 2i\tau_{xy})(\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}) + \frac{1}{4}(\sigma_x + \sigma_y)^2 < \sigma_e^2$$

permet d'en déduire immédiatement l'expression en coordonnées polaires

$$\sigma_r^2 + \sigma_{\theta}^2 - \sigma_r \sigma_{\theta} + 3 \tau_{r\theta}^2 < \sigma_e^2$$

ce qui n'est d'ailleurs qu'une confirmation du fait que le premier membre est un invariant cartésien. On peut alors calculer par voie analytique son maximum local. La racine carrée de son rapport avec sa valeur à l'infini sera le facteur de surtension. Les calculs conduisent en définitive aux mêmes localisations des maxima dans chacun des cas étudiés.

i) Hydrostatique
.....

A grande distance $\sigma_{\infty}^2 + \sigma_{\infty}^2 - \sigma_{\infty}^2 = \sigma_{\infty}^2$, localement $4 \sigma_{\infty}^2$;
facteur de surtension 2.

ii) Cisaillement

A grande distance $3\tau_{\infty}^2$, localement $16\tau_{\infty}^2$; facteur de surtension

$$\frac{4}{\sqrt{3}} = 2.3094$$

iii) Traction pure

A grande distance σ_{∞}^2 , localement $9\sigma_{\infty}^2$; facteur 3.

B. Dislocation de Volterra de l'anneau circulaire

Le domaine est un anneau circulaire d'épaisseur t bordé par les circonférences $r = a$ et $r = b$, libres de charges appliquées. On peut utiliser la fonction d'Airy (7.89) qui assure déjà la nullité de σ_r et $\tau_{r\theta}$ en $r = a$. Pour obtenir la même nullité en $r = b$, rajoutons la forme improductive

$$m + \rho (n \cos\theta + p \sin\theta)$$

de façon à lui permettre à nouveau d'être nulle ainsi que ses dérivées premières pour $r = b$ ou $\rho = b/a = \beta$ (la confusion avec l'ancien coefficient β n'est pas à craindre). Les conditions

$$\phi + m + \rho (n \cos\theta + p \sin\theta) = 0$$

$$\rho = \beta$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \rho} + n \cos\theta + p \sin\theta = 0$$

où ϕ est donné par (7.89)

fournissent de nouvelles relations entre les coefficients restants. L'annulation du terme indépendant de θ dans la première équation ne fait que déterminer le coefficient improductif m et est sans intérêt. Par contre, dans la seconde, elle donne

$$2 \eta a^2 \beta^2 \ln \beta = \alpha (1 - \beta^2)$$

Pour les termes en $\sin\theta$ et $\cos\theta$ nous éliminons les coefficients improductifs n et p entre les deux nouvelles conditions, obtenant

$$\gamma = (1+\beta^2) a^2 \lambda_2 \qquad \delta = (1+\beta^2) a^2 \mu_2$$

Les coefficients de $\sin m\theta$ et $\cos m\theta$ disparaissent pour $m \geq 2$ car ils obéissent à des conditions linéaires et homogènes de déterminant non singulier. Il vient ainsi pour la fonction d'Airy (7.89), débarassée des termes improductifs n'ayant servi que d'auxiliaires de calcul

$$\phi = - \eta a^2 P(\rho) - a(\gamma \cos\theta - \delta \sin\theta) F(\rho) \qquad (7.90)$$

$$\text{où} \quad P(\rho) = - \rho^2 \ln \rho + \frac{1}{2}(\rho^2 - 1) + \frac{2\beta^2 \ln \beta}{\beta^2 - 1} \left(\frac{\rho^2 - 1}{2} - \ln \rho \right) \qquad (7.91)$$

$$F(\rho) = \frac{1}{\rho} - \rho + 2 \rho \ln \rho - \frac{1}{\beta^2 + 1} \frac{(\rho^2 - 1)^2}{\rho} \qquad (7.92)$$

Le calcul des tensions par les formules (7.71) donne

$$\sigma_\theta = 2\eta \left(1 + \ln \frac{r}{a} - \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \ln \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{6r}{a^2 + b^2} - \frac{2}{r} - \frac{2a^2 b^2}{(a^2 + b^2)r^3} \right) (\gamma \cos\theta - \delta \sin\theta)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{2(r^2 - a^2)(r^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)r^3} (\gamma \sin\theta + \delta \cos\theta)$$

$$\sigma_r = 2\eta \left(\ln \frac{r}{a} + \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \ln \frac{b}{a} \right) + \frac{2(r^2 - a^2)(r^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)r^3} (\gamma \cos\theta - \delta \sin\theta)$$

Enfin, la substitution des coefficients trouvés dans l'expression des déplacements fournit

$$E\omega = 4\eta\theta + 4\left(\frac{1}{r} + \frac{2r}{a^2+b^2}\right)(\gamma\sin\theta + \delta\cos\theta)$$

$$2Gu_r = \frac{2(1-\nu)}{1+\nu}\eta\left[r\ln\frac{r}{a} + r\left(\frac{1}{2} - \frac{b^2}{b^2-a^2}\ln\frac{b}{a}\right)\right] - \eta\left[\frac{3-\nu}{1+\nu}r + \left(\frac{2a^2b^2}{b^2-a^2}\ln\frac{b}{a}\right)\frac{1}{r}\right]$$

$$+(\gamma\cos\theta - \delta\sin\theta)\left[1 + \frac{1-3\nu}{1+\nu}\frac{r^2}{b^2+a^2} - \frac{2(1-\nu)}{1+\nu}\ln\frac{r}{a} - \frac{a^2b^2}{b^2+a^2}\frac{1}{r^2}\right]$$

$$- \frac{4}{1+\nu}(\gamma\sin\theta + \delta\cos\theta)\theta + \alpha_1\cos\theta - \beta_1\sin\theta$$

$$2Gu_\theta = \frac{4}{1+\nu}\eta r\theta + (\gamma\sin\theta + \delta\cos\theta)\left[1 + \frac{2(1-\nu)}{1+\nu}\ln\frac{r}{a} - \frac{a^2b^2}{b^2+a^2}\frac{1}{r^2} + \frac{5+\nu}{1+\nu}\frac{r^2}{b^2+a^2}\right]$$

$$- \frac{4}{1+\nu}(\gamma\cos\theta - \delta\sin\theta)\theta + \frac{4}{1+\nu}\mu_1 r - (\alpha_1\sin\theta + \beta_1\cos\theta)$$

Les termes en $(\alpha_1, \beta_1, \mu_1)$ ne représentent que des modes rigides. Les paramètres $(\lambda, \gamma, \delta)$ dont dépend le champ régulier des tensions et déformations peuvent être liés aux dislocations dans une section $\theta = \text{cte}$ arbitrairement choisie. Entre $\theta=0$ et $\theta=2\pi$ par exemple, il vient

$$E\Delta\omega = 8\pi\eta \quad E\Delta u_r = -8\pi\delta \quad E\Delta u_\theta = -8\pi\gamma + E\Delta\omega r$$

On peut aussi les lier aux éléments de la résultante des tensions dans la section. Prenant le centre de courbure comme centre de réduction, ce qui suppose les sections $\theta=0$ et $\theta=2\pi$ prolongées jusqu'au centre par un bras rigide, il vient par intégration directe

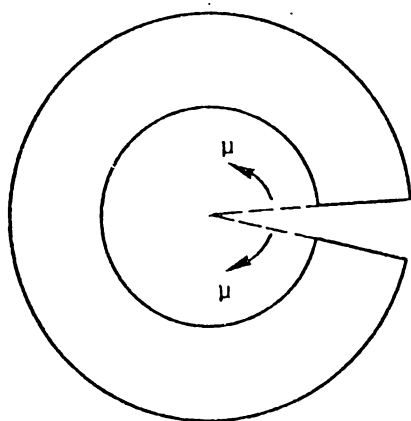
$$N_{\theta} = t \int_a^b \sigma_{\theta} dr = -8 \gamma S$$

$$N_r = t \int_a^b \tau_{r\theta} dr = -8 \delta S$$

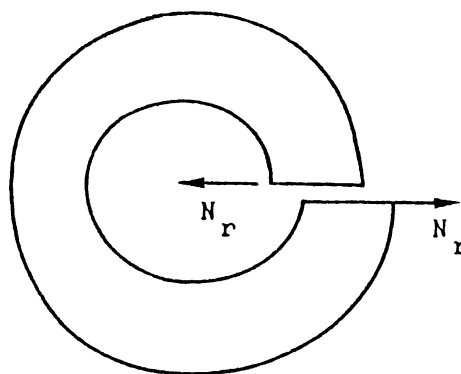
$$\mu = t \int_a^b \sigma_{\theta} r dr = 4 B \eta$$

où
$$S = \frac{t}{4} \left(\ln \frac{b}{a} - \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \quad (7.93)$$

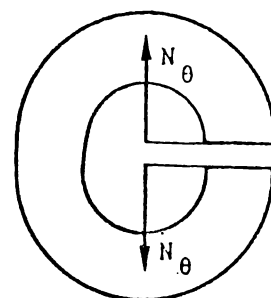
et
$$B = \frac{t}{4} \left(\frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{2a^2 b^2}{b^2 - a^2} \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2 \right) \quad (7.94)$$



$\Delta \omega$ négatif associé à
couples négatifs



Δu_r positif associé
à un cisaillement
pur positif



Δu_{θ} négatif
associé à un
effort normal
négatif N

La figure montre les trois dislocations élémentaires auxquelles correspondent finalement les relations de raideur

$$\mu = \frac{EB}{2\pi} \Delta\omega \quad N_r = \frac{ES}{\pi} \Delta u_r \quad N_\theta = \frac{ES}{\pi} \Delta u_\theta \quad (7.95)$$

C. Les poutres de flexion à courbure constante

On peut considérer que les résultats qui viennent d'être obtenus sont ceux relatifs à la flexion d'une poutre de section rectangulaire $t(b-a)$, de courbure constante, dont les sections extrêmes se rejoignent. Mais ils sont évidemment d'application au problème de la sollicitation d'une poutre courbe dont l'angle d'ouverture est inférieur à 2π . Seules les sections d'extrémité $\theta=\theta_1$ et $\theta=\theta_2$ sont sollicitées ou supportées. La solution est exacte pour autant que les sections terminales soient libres de se déformer dans leur plan et de gauchir et que les sollicitations terminales soient appliquées comme la solution le prévoit. On est donc en présence d'une théorie très analogue à celle de Barré de Saint-Venant du moins en ce qui concerne la flexion (y compris l'effet des efforts tranchants) et l'extension. La différence principale avec la flexion des poutres à fibres rectilignes est l'apparition de la tension radiale entre fibres, nécessaire pour assurer leur équilibre. Nous allons en développer une présentation unidimensionnelle susceptible d'être appliquée dans un contexte plus large. Notre point de départ est la fonction d'Airy (7.90) dont les deux fonctions $P(\rho)$ et $F(\rho)$ jouissent des propriétés suivantes :

posant

$$\begin{aligned} Q(\rho) &= \frac{1}{\rho} (\rho P') = P'' + \frac{1}{\rho} P' \\ &= \frac{4\beta^2 \ln \beta}{\beta^2 - 1} - 2 - 4 \ln \rho \end{aligned} \quad (7.96)$$

on doit avoir (et on vérifie immédiatement)

$$(\rho Q')' = 0 \quad (7.97)$$

du fait que $P(\rho)$ est biharmonique. De plus, on a par construction

$$P(1) = 0 \quad P'(1) = 0 \quad P'(\beta) = 0 \quad (7.98)$$

Posant de la même façon

$$\begin{aligned} G(\rho) &= \frac{1}{\rho} (\rho F') - \frac{F}{\rho^2} = F'' + \left(\frac{F}{\rho}\right)' \\ &= \frac{4}{\rho} - \frac{8}{\beta^2 + 1} \rho \end{aligned} \quad (7.99)$$

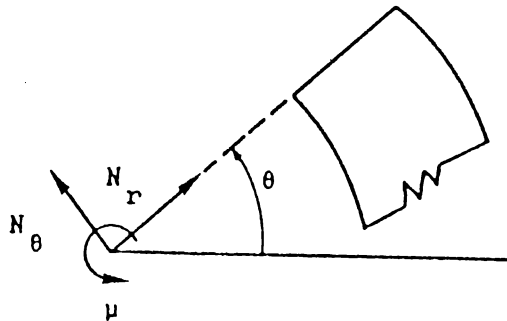
On doit avoir (et on vérifie tout aussi facilement)

$$(\rho G')' - \frac{1}{\rho} G = 0 \quad (7.100)$$

du fait que $\cos\theta F(\rho)$ et $\sin\theta F(\rho)$ sont biharmoniques. De plus

$$F(1) = 0 \quad F'(1) = 0 \quad F(\beta) = \beta F'(\beta)$$

car $(F/\rho)'$ est nul pour $\rho = 1$ et $\rho = \beta$ (7.101)



De
$$\tau_{r\theta} = - \frac{\gamma \sin\theta + \delta \cos\theta}{a} \left(\frac{F}{\rho}\right)'$$

nous calculons l'effort tranchant

$$N_r = at \int_1^\beta \tau_{r\theta} d\rho = -t (\gamma \sin\theta + \delta \cos\theta) \frac{F(\beta)}{\beta} \quad (7.102)$$

De $\sigma_\theta = -\eta P'' - \frac{\gamma \cos\theta - \delta \sin\theta}{a} F''$

nous calculons l'effort normal

$$N_\theta = at \int_1^\beta \sigma_\theta d\rho = -t(\gamma \cos\theta - \delta \sin\theta) F'(\beta) \quad (7.103)$$

et le moment au niveau du centre de courbure

$$\mu = a^2 t \int_1^\beta \sigma_\theta \rho d\rho = -a^2 t \eta (\rho P' - P) \Big|_1^\beta - at(\gamma \cos\theta - \delta \sin\theta) (\rho F' - F) \Big|_1^\beta$$

soit en définitive

$$\mu = a^2 t \eta P(\beta) \quad (7.104)$$

Par rapport à nos calculs de résultantes antérieurs, nous trouvons

$$F'(\beta) = 2 \ln \beta - 2 \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 + 1} = \frac{8}{t} S$$

$$P(\beta) = \frac{\beta^2 - 1}{2} - \frac{2\beta^2}{\beta^2 - 1} (\ln \beta)^2 = \frac{4}{a^2 t} B$$

Exprimons maintenant les tensions en fonction de ces résultantes

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \frac{N_r}{8aS} \left(\frac{F}{\rho}\right)', & \sigma_\theta &= -\frac{\mu}{4B} P'' + \frac{N_\theta}{8aS} F'' \\ & & \sigma_r &= -\frac{\mu}{4B} \frac{P'}{\rho} + \frac{N_\theta}{8aS} \left(\frac{F}{\rho}\right)' \end{aligned} \quad (7.105)$$

et calculons l'énergie de déformation par unité d'angle d'ouverture de la poutre. Pour un matériau isotrope :

$$\begin{aligned} L_{\theta} &= \frac{t}{2} \int_a^b (\sigma_{\theta} \varepsilon_{\theta} + \sigma_r \varepsilon_r + \tau_{r\theta} \gamma_{r\theta}) r dr \\ &= \frac{a^2 t}{2E} \int_1^{\beta} (\sigma_{\theta} + \sigma_r)^2 \rho d\rho + \frac{(1+\nu) a^2 t}{E} \int_1^{\beta} (\tau_{r\theta}^2 - \sigma_r \sigma_{\theta}) \rho d\rho \end{aligned}$$

Dans la première partie, la combinaison harmonique

$$\sigma_{\theta} + \sigma_r = -\frac{\mu}{4B} Q(\rho) + \frac{N_{\theta}}{8aS} G(\rho)$$

fait intervenir les intégrales

$$\begin{aligned} \int_1^{\beta} \rho Q^2 d\rho &= \int_1^{\beta} (\rho Q P'' + Q P') d\rho = \rho Q P' + Q P \Big|_1^{\beta} - \int_1^{\beta} (\rho Q' P' + (PQ)') d\rho \\ &= \rho Q P' - \rho Q' P \Big|_1^{\beta} + \int_1^{\beta} P(\rho Q')' d\rho \\ &= -\beta Q'(\beta) P(\beta) = 4P(\beta) \quad (\text{en vertu de (7.97) et (7.98)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{\beta} \rho G^2 d\rho &= \int_1^{\beta} \rho G [F'' + (\frac{F}{\rho})'] d\rho = \rho G F' + G F \Big|_1^{\beta} - \int_1^{\beta} (F' + \frac{F}{\rho}) (\rho G)' d\rho \\ &= \rho G F' + G F - F(\rho G)' \Big|_1^{\beta} + \int_1^{\beta} F [(\rho G')' - \frac{G}{\rho}] d\rho \\ &= \beta [G(\beta) F'(\beta) - F(\beta) G'(\beta)] = 8 F'(\beta) \end{aligned}$$

(en vertu de (7.100) et (7.101)). Et enfin

$$\int_1^\beta \rho G Q d\rho = 16 H$$

dont l'expression ne paraît pas réductible comme les autres à une forme simple

$$H = \frac{11}{18}(\beta-1) + \frac{1}{9} \frac{\beta(\beta-1)}{\beta^2+1} - \frac{\beta \ln \beta}{\beta+1} - \frac{2\beta^2 \ln \beta}{3(\beta^2+1)(\beta+1)}$$

Dans la seconde partie, le terme en $\tau_{r\theta}^2$ fait intervenir

$$J = \int_1^\beta \rho \left(\frac{F}{\rho}\right)' \left(\frac{F}{\rho}\right)' d\rho = 4 \ln \beta \left(1 + \frac{2\beta^2}{(\beta^2+1)^2}\right) - 6 \frac{\beta^2-1}{\beta^2+1}$$

Le terme en N_θ^2 du produit $\sigma_r \sigma_\theta$ fait intervenir une intégrale ayant la même valeur que la précédente car la différence :

$$\int_1^\beta \left(\frac{F}{\rho}\right)' \left[\rho \left(\frac{F}{\rho}\right)' - \rho F''\right] d\rho = - \int_1^\beta \rho \left(\frac{F}{\rho}\right)' \left[\rho \left(\frac{F}{\rho}\right)'\right]' d\rho = - \frac{1}{2} \left[\rho \left(\frac{F}{\rho}\right)'\right]^2 \Big|_1^\beta = 0$$

Comme le terme en μ^2 du même produit donne une contribution nulle, du fait que

$$\int_1^\beta P' P'' d\rho = \frac{1}{2} (P')^2 \Big|_1^\beta = 0$$

il ne reste que la contribution du produit μN_θ

$$\begin{aligned} \int_1^\beta \left[F'' P' + \rho P'' \left(\frac{F}{\rho}\right)' \right] d\rho &= \int_1^\beta \left[(P' F')' - \frac{F P''}{\rho} \right] d\rho \\ &= P' \left(F' - \frac{F}{\rho} \right) \Big|_1^\beta + \int_1^\beta P' \left(\frac{F}{\rho}\right)' d\rho = 32K \end{aligned}$$

pour laquelle on trouve

$$K = \frac{\beta^3 - 1}{9(\beta^2 + 1)} - \frac{\beta \ln \beta}{3(\beta + 1)}$$

Finalement, il vient

$$L_{\theta} = \frac{\mu^2}{2EB} - \frac{at\mu N_{\theta}}{2EBS} \left[H - 2(1+\nu)K \right] + \frac{N_{\theta}^2}{2ES} + \frac{(1+\nu)tJ}{64ES^2} (N_r^2 - N_{\theta}^2)$$

Cette structure de l'énergie suggère l'établissement d'un modèle unidimensionnel de la poutre courbe basée sur un concept de fibre neutre. Si la fibre neutre est caractérisée par $r=R$, on aura entre le moment fléchissant M , calculé au niveau de la fibre neutre, et μ , calculé au niveau du centre de courbure, la relation

$$\mu = M + R N_{\theta}$$

Le rayon de la fibre neutre est alors déterminé par la condition que l'énergie soit une simple somme de celles dues respectivement au moment fléchissant, à l'effort tranchant et à l'effort normal. Pour que le terme en MN_{θ} disparaisse, il faut que

$$\frac{R}{a} = \frac{t}{2S} \hat{H} = \frac{4\hat{H}}{F'(\beta)} \quad \hat{H} = H - 2(1+\nu)K \quad (7.106)$$

et l'énergie par unité d'arc de la fibre neutre prend la forme

$$L = \frac{1}{R} L_{\theta} = \frac{M^2}{2EI} + \frac{N_{\theta}^2}{2ES_{\theta}} + \frac{N_r^2}{2GS_r} \quad (7.107)$$

avec

$$I = BR = \frac{a^3 t}{4} \frac{R}{a} P(\beta) \quad (7.108)$$

$$\frac{at}{S_r} = \frac{J}{4\hat{H}F'(\beta)} \quad (7.109)$$

$$\frac{at}{S_{\theta}} = 2\left(\frac{1}{H} - \frac{2}{P(\beta)} \frac{R}{a}\right) - 2(1+\nu) \frac{at}{S_r} \quad (7.110)$$

Les valeurs numériques consignées dans la table suivante montrent que la fibre neutre a un rayon légèrement inférieur à la moyenne arithmétique des rayons extrêmes, que la section résistant aux efforts normaux est pratiquement égale à la section transversale réelle et la section résistant au cisaillement en est environ les 5/6. Les calculs ont été faits pour $\nu = 0.3$.

β	R/a	at/S_{θ}	at/S_r	$a^3 t/I$	$12/(\beta-1)^3$
1.1	1.04892	10.0145	12.0056	12 016.0	12 000
1.3	1.14090	3.35783	3.99777	449.123	444.444
1.5	1.22719	2.01065	2.40766	98.3154	96.000

Quant au moment d'inertie, il est très proche de celui de la poutre droite de même section comme le montrent les valeurs de comparaison de la dernière colonne.

Il nous reste à découvrir quels sont les déplacements et les déformations généralisés associés aux résultantes. A cet effet, nous revenons au théorème de Clapeyron intérieur où les déformations sont exprimées par les formules (7.69)

$$2L_{\theta} = t \int_a^b \left[\sigma_{\theta} \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} \right) + \tau_{r\theta} \left(-\frac{u_{\theta}}{r} + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \sigma_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right] r dr$$

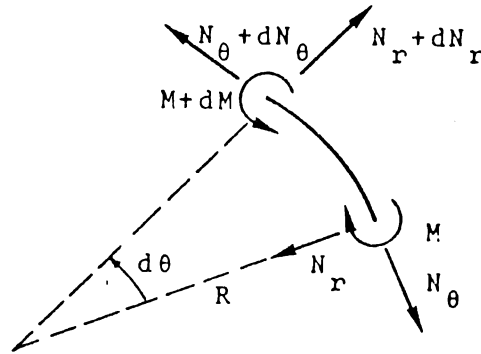
Du fait que les frontières $r=a$ et $r=b$ ne sont pas chargées, cette expression est en fait réductible à la suivante

$$2L_{\theta} = t \frac{d}{d\theta} \int_a^b (\sigma_{\theta} u_{\theta} + \tau_{r\theta} u_{\theta}) dr$$

dont l'interprétation physique est directe et qui découle d'ailleurs de la précédente par des intégrations par parties. La substitution des résultats (7.105) conduit ainsi à

$$2L_{\theta} = at \frac{d}{d\theta} \int_1^{\beta} \left[-\frac{\mu}{4B} P''u_{\theta} + \frac{N_{\theta}}{8aS} F''u_{\theta} + \frac{N_r}{8aS} \left(\frac{F}{\rho}\right)'u_r \right] d\rho \quad (7.111)$$

Cette expression sera comparée à celle résultant d'une théorie unidimensionnelle pour une fibre de rayon R, dont les déplacements radial et tangentiel seront notés respectivement par U_r et U_{θ} . Le travail virtuel des forces appliquées aux extrémités d'un segment $Rd\theta$ de fibre sera



$$\frac{d}{d\theta} (M\delta\alpha + N_{\theta}\delta U_{\theta} + N_r\delta U_r) d\theta \quad (7.112)$$

où α est la rotation de la section droite; de sorte que l'expression à comparer à (7.111) est

$$\frac{d}{d\theta} (M\alpha + N_{\theta}U_{\theta} + N_rU_r)$$

avec $\mu = M + RN_{\theta}$

La comparaison fournit les définitions des déplacements de la fibre neutre et de la rotation de section en tant que moyennes pondérées des déplacements exacts

$$\alpha = -\frac{1}{\alpha P(\beta)} \int_1^{\beta} P''u_{\theta} d\rho = \frac{\int_a^b \left[1 + \ell n \frac{r}{a} - \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \ell n \frac{b}{a} \right] u_{\theta} dr}{\frac{b^2 - a^2}{4} - \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \left(\ell n \frac{b}{a} \right)^2}$$

$$U_r = \frac{1}{F'(\beta)} \int_1^\beta \left(\frac{F}{\rho}\right)' u_r d\rho = \frac{\int_a^b \frac{(r^2-a^2)(r^2-b^2)}{(b^2+a^2)r^3} u_r dr}{\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2} - \ln \frac{b}{a}}$$

$$U_\theta - R\alpha = \frac{1}{F'(\beta)} \int_1^\beta F'' u d\rho = \frac{\int_a^b \left[\frac{3r}{a^2+b^2} - \frac{1}{r} - \frac{a^2 b^2}{(b^2+a^2)r^3} \right] u_\theta dr}{\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2} - \ln \frac{b}{a}}$$

Comme on le vérifie facilement, ces définitions se réduisent bien à des identités quand on fait $u_r = U_r$, $u_\theta = U_\theta$, $u_\theta = r\alpha$. Développons maintenant les conséquences de (7.112). Pour les translations

$$\delta U_r = \delta U \cos \theta + \delta V \sin \theta \quad \delta U_\theta = -\delta U \sin \theta + \delta V \cos \theta \quad \delta \alpha = 0$$

(δU et δV des constantes) le travail virtuel doit être nul, ce qui confirme les équations d'équilibre des résultantes

$$\frac{dN_r}{d\theta} - N_\theta = 0 \quad \frac{dN_\theta}{d\theta} + N_r = 0 \quad (7.113)$$

que l'on peut obtenir à partir des équations (7.102) et (7.103). Le travail virtuel doit aussi être nul pour la petite rotation d'ensemble

$$\delta U_r = 0 \quad \delta U_\theta = R\delta\Omega \quad \delta \alpha = \delta\Omega \quad (\text{une constante})$$

livrant ainsi la troisième équation d'équilibre

$$\frac{d}{d\theta} (M + RN_\theta) = \frac{d\mu}{d\theta} = 0 \quad (7.114)$$

confirmée par le résultat antérieur (7.104). Le travail virtuel, simplifié par les équations d'équilibre,

$$M\delta\left(\frac{d\alpha}{d\theta}\right) + N_{\theta}\delta\left(U_r + \frac{d}{d\theta}U_{\theta}\right) + N_r\delta\left(-U_{\theta} + R\alpha + \frac{d}{d\theta}U_r\right)$$

met en évidence les déformations généralisées

$$\frac{d\alpha}{d\theta} \quad \text{conjuguée au moment fléchissant } M$$

$$U_r + \frac{d}{d\theta}U_{\theta} \quad \text{conjuguée à l'effort normal } N_{\theta}$$

$$R\alpha - U_{\theta} + \frac{d}{d\theta}U_r \quad \text{conjuguée à l'effort tranchant } N_r$$

de sorte que le théorème de Clapeyron intérieur du modèle unidimensionnel est aussi

$$2L_{\theta} = M \frac{d\alpha}{d\theta} + N_{\theta} \left(U_r + \frac{d}{d\theta} U_{\theta} \right) + N_r \left(- U_{\theta} + R\alpha + \frac{d}{d\theta} U_r \right)$$

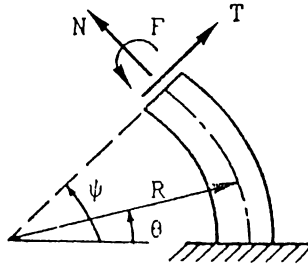
et, par comparaison avec (7.107) conduit aux équations constitutives généralisées de la théorie des poutres courbes

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{RM}{EI}$$

$$U_r + \frac{dU_{\theta}}{d\theta} = \frac{RN_{\theta}}{ES_{\theta}} \quad (7.115)$$

$$R\alpha - U_{\theta} + \frac{dU_r}{d\theta} = \frac{RN_r}{GS_r}$$

Comme dans le cas des poutres droites, on peut examiner l'importance relative des déformations dues à l'effort tranchant et à l'effort normal, que la courbure ne permet pas de dissocier. Etudions le cas de la poutre courbe encastree dans la section $\theta=0$ et chargée dans la section $\theta=\psi$



Comme on a

$$\frac{d^2 N_r}{d\theta^2} + N_r = 0$$

l'effort tranchant dans une section quelconque est du type

$$N_r = A \cos \theta + B \sin \theta \quad \text{d'où} \quad N_\theta = \frac{dN_r}{d\theta} = -A \sin \theta + B \cos \theta$$

Ajustant les constantes pour les charges terminales, il vient

$$N_r = T \cos(\theta - \psi) + N \sin(\theta - \psi) \quad N_\theta = -T \sin(\theta - \psi) + N \cos(\theta - \psi)$$

Ensuite, comme $M + RN_\theta = F + RN$

$$M = F + RN [1 - \cos(\theta - \psi)] + RT \sin(\theta - \psi)$$

L'intégration de la rotation de section avec la condition aux limites $\alpha(0) = 0$ livre

$$EI\alpha = FR\theta + R^2 N [\theta - \sin \psi - \sin(\theta - \psi)] + R^2 T [\cos \psi - \cos(\theta - \psi)]$$

Intégrons les déplacements par la méthode de variation des constantes en prenant

$$U_{\theta} = P \cos \theta + Q \sin \theta \quad U_r = P \sin \theta - Q \cos \theta$$

Pour P et Q constants, c'est la solution générale des deux dernières équations (7.115) rendues homogènes en posant $N_{\theta} = 0$, $N_r = 0$ et $\alpha = 0$. Considérant maintenant P et Q comme des fonctions de θ , on satisfait aux équations inhomogènes en intégrant

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{RN_{\theta}}{ES_{\theta}} \cos \theta + \left(\frac{RN_r}{GS_r} - R\alpha \right) \sin \theta \quad \frac{dQ}{d\theta} = \frac{RN_{\theta}}{ES_{\theta}} \sin \theta - \left(\frac{RN_r}{GS_r} - R\alpha \right) \cos \theta$$

avec les conditions aux limites $P(0) = 0$ et $Q(0) = 0$. Ceci conduit à écrire la solution sous la forme

$$U_{\theta} - iU_r = \frac{R}{ES_{\theta}} \int_0^{\theta} N_{\theta}(\omega) e^{i(\omega-\theta)} d\omega - \frac{iR}{GS_r} \int_0^{\theta} N_r(\omega) e^{i(\omega-\theta)} d\omega + iR \int_0^{\theta} \alpha(\omega) e^{i(\omega-\theta)} d\omega$$

La substitution des résultats trouvés pour N_{θ} , N_r et α et l'intégration donne finalement

$$\begin{aligned} U_{\theta} = & \frac{R^2(F+RN)}{EI} (\theta - \sin \theta) + \frac{R^3}{EI} (T \cos \psi - N \sin \psi) (1 - \cos \theta) \\ & - \frac{R}{2} \left(\frac{R^2}{EI} + \frac{1}{GS_r} - \frac{1}{ES_{\theta}} \right) (T \sin \psi + N \cos \psi) \sin \theta \\ & + \frac{R}{2} \left(\frac{R^2}{EI} + \frac{1}{GS_r} + \frac{1}{ES_{\theta}} \right) [T \theta \sin(\psi - \theta) + N \theta \cos(\psi - \theta)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_r = & \frac{R^2(F+RN)}{EI} (\cos \theta - 1) \\ & - \frac{R}{2} \left(\frac{R^2}{EI} - \frac{1}{GS_r} + \frac{1}{ES_{\theta}} \right) (T \cos \psi - N \sin \psi) \sin \theta \\ & + \frac{R}{2} \left(\frac{R^2}{EI} + \frac{1}{GS_r} + \frac{1}{ES_{\theta}} \right) [T \theta \cos(\psi - \theta) - N \theta \sin(\psi - \theta)] \end{aligned}$$

Ces expressions suggèrent que si

$$\frac{1}{GS_r} + \frac{1}{ES_\theta} \ll \frac{R^2}{EI}$$

soit, en pratique, $\left(\frac{b-a}{R}\right)^2 \ll 3$,

on peut négliger les déformations dues à l'effort tranchant et à l'effort normal et simplifier les équations constitutives en

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{RM}{EI} \quad U_r + \frac{dU_\theta}{d\theta} = 0 \quad R\alpha - U_\theta + \frac{dU_r}{d\theta} = 0$$

Ceci conduit à l'équation différentielle de déformation

$$\frac{d^2 U_r}{d\theta^2} + U_r = -\frac{R^2 M}{EI}$$

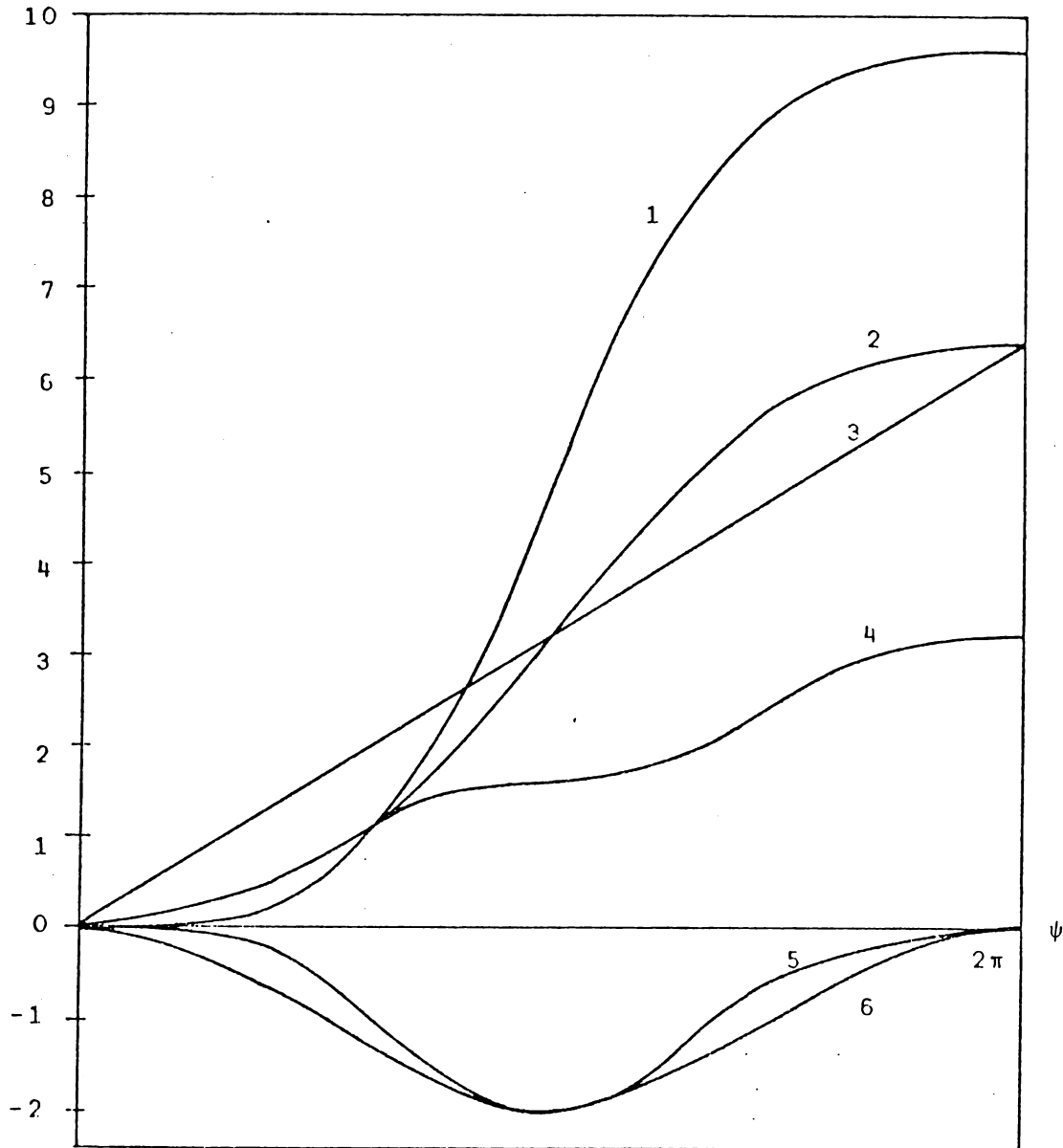
Une poutre courbe satisfaisant à cette condition sera dite "mince". Pour une poutre mince, les déplacements et la rotation d'extrémité ($\theta = \psi$) se réduisent à

$$\alpha = F \frac{R}{EI} \psi + N \frac{R^2}{EI} (\psi - \sin\psi) + T \frac{R^2}{EI} (\cos\psi - 1)$$

$$U_\theta = F \frac{R^2}{EI} (\psi - \sin\psi) + N \frac{R^3}{EI} \left(\frac{3\psi}{2} - 2\sin\psi + \frac{\sin 2\psi}{4} \right) + T \frac{R^3}{EI} \left(-\frac{3}{4} + \cos\psi - \frac{\cos 2\psi}{4} \right)$$

$$U_r = F \frac{R^2}{EI} (\cos\psi - 1) + N \frac{R^3}{EI} \left(-\frac{3}{4} + \cos\psi - \frac{\cos 2\psi}{4} \right) + T \frac{R^3}{EI} \left(\frac{\psi}{2} - \frac{\sin 2\psi}{4} \right)$$

Les fonctions d'influence correspondantes sont représentées à la figure suivante comme fonctions de l'ouverture angulaire ψ . Elles ne sont jamais nulles si $\psi > 0$ à l'exception de deux d'entre-elles, pour lesquelles cette situation se produit quand l'argument limite $\psi = 2\pi$ (anneau complet fendu).



Les fonctions d'influence de la poutre circulaire mine.

$$1) \frac{EIU_0}{R^3N} = \frac{3}{2} \psi - \sin\psi + \frac{\sin 2\psi}{4}$$

$$4) \frac{EIU_r}{R^3T} = \frac{\psi - \sin\psi \cos\psi}{2}$$

$$2) \frac{\alpha EI}{R^2N} = \frac{EIU_0}{R^2F} = \psi - \sin\psi$$

$$5) \frac{EIU_\theta}{R^3T} = \frac{EIU_r}{R^3N} = -\frac{3}{4} + \cos\psi - \frac{\cos 2\psi}{4}$$

$$3) \frac{EI\alpha}{RF} = \psi$$

$$6) \frac{EIU_r}{R^2F} = \frac{EI\alpha}{R^2T} = \cos\psi - 1$$

Il en serait d'ailleurs de même pour les fonctions d'influence tenant compte des déformations dues aux efforts normaux et tranchants, ce qui achève de justifier le critère de "minceur" au niveau des déplacements d'extrémité.

La théorie unidimensionnelle a déjà permis l'introduction de conditions aux limites simplifiées, tel le pseudo-encastrement dont on vient de faire usage dans le problème précédent pour étendre le domaine d'application de la solution exacte trouvée. Elle permet aussi une analyse approchée de la déformation quand les sollicitations sont de type plus général. Il est évident que les formules générales de la section 7.10 permettent d'établir des solutions exactes pour les poutres courbes ou anneaux chargés le long des frontières $r = a$ et $r = b$, mais les déplacements moyens α , U_r et U_θ , et dans certains cas la distribution des tensions σ_θ seront obtenues avec une précision suffisante en tenant compte uniquement de charges distribuées équivalentes, radiale $p_r(\theta)$, tangentielle $p_\theta(\theta)$, couples $c(\theta)$, sur la fibre neutre :

$$p_r = t \frac{b}{R} \sigma_r(b) - t \frac{a}{R} \sigma_r(a)$$

$$p_\theta = t \frac{b}{R} \tau_{r\theta}(b) - t \frac{a}{R} \tau_{r\theta}(a)$$

$$c + R p_\theta = t \frac{b^2}{R} \tau_{r\theta}(b) - t \frac{a^2}{R} \tau_{r\theta}(a)$$

L'équivalence statique avec les charges réelles est obtenue en égalant les travaux virtuels sur les déplacements cinématiques d'un segment de poutre $d\theta$, entraîné comme un corps rigide avec les déplacements et la rotation de sa fibre neutre.

Il suffit alors d'ajouter au travail virtuel (7.112) l'expression

$$(p_r \delta U_r + p_\theta \delta U_\theta + c \delta \alpha) R \theta$$

pour obtenir la généralisation des équations d'équilibre

$$\frac{dN_r}{d\theta} - N_\theta + p_r R = 0 \quad \frac{dN_\theta}{d\theta} + N_r + p_\theta = 0$$

(7.113)'

$$\frac{d}{d\theta} (M + R N_\theta) + c + R p_\theta = 0$$

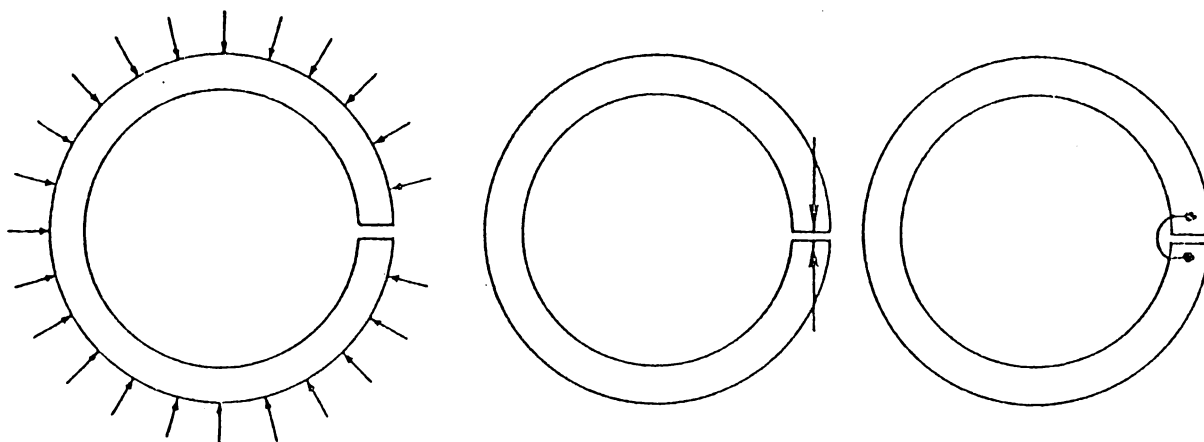
(7.114)'

Comme pour les poutres droites, les solutions approchées basées sur ces équations d'équilibre plus générales et sur les équations constitutives (7.115) sont susceptibles d'une justification variationnelle.

Quand la poutre est mince, toutes les sollicitations conduisant à une même répartition du moment fléchissant deviennent équivalentes et cette circonstance peut être mise à profit dans certains problèmes d'usinage.

Un segment de piston par exemple peut être assimilé à un anneau rectangulaire fendu et doit prendre une forme circulaire de diamètre égal à celui d'un cylindre quand il est soumis à une pression radiale uniforme $\sigma_r(b)$.

Soit $p = -p_r$ la charge radiale de fibre neutre.



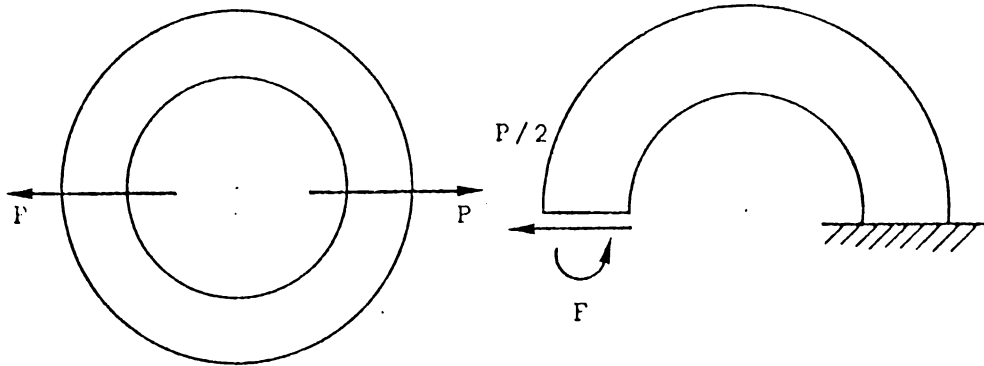
Le moment de flexion possède alors la distribution

$$M = p R^2 (1 - \cos \theta)$$

équivalente à celle engendrée par une paire de forces normales $N=pR$ appliquée aux extrémités qui se font face. Lors de l'usinage du segment, les deux extrémités sont maintenues par un joint articulé exerçant les réactions N en question. L'écart entre les lèvres de la fente dans la configuration sans tensions est liée à la pression à exercer par la relation

$$\Delta U_{\theta} = 3\pi \frac{R^4}{EI} p$$

L'anneau dynamométrique est un autre exemple d'application de la théorie unidimensionnelle des poutres courbes



C'est un anneau complet soumis à deux forces radiales P concentrées et diamétralement opposées. Par symétrie, il est équivalent au problème d'un demi anneau (crochet), dont une extrémité serait encastrée et l'autre soumise à l'effort tranchant $P/2$ accompagné d'un moment de flexion F . Ce dernier est à déterminer de telle façon que la rotation de la section d'extrémité soit nulle. Avec les notations du problème précédent, on peut poser $\psi = \pi$, $N = 0$, $T = P/2$. Comme

$$EI\alpha = RF\theta + R^2 P \frac{1}{2} (\cos\theta - 1)$$

l'annulation de la rotation pour $\theta = \pi$ fournit

$$F = \frac{1}{\pi} PR = \mu$$

La distribution du moment fléchissant devient alors

$$M = F - RT \sin(\pi - \theta) = PR \left(\frac{1}{\pi} - \frac{\sin \theta}{2} \right)$$

tandis que l'effort tranchant et l'effort normal ont les répartitions

$$N_r = -\frac{P}{2} \cos \theta \qquad N_\theta = \frac{P}{2} \sin \theta$$

Ceci détermine entièrement les tensions dans la pièce.

Le déplacement radial d'extrémité vaut

$$U_r = \frac{PR^3}{EI} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) + \frac{\pi PR}{4} \left(\frac{1}{ES_\theta} + \frac{1}{GS_r} \right)$$

c'est la relation de raideur de l'anneau dynamométrique.

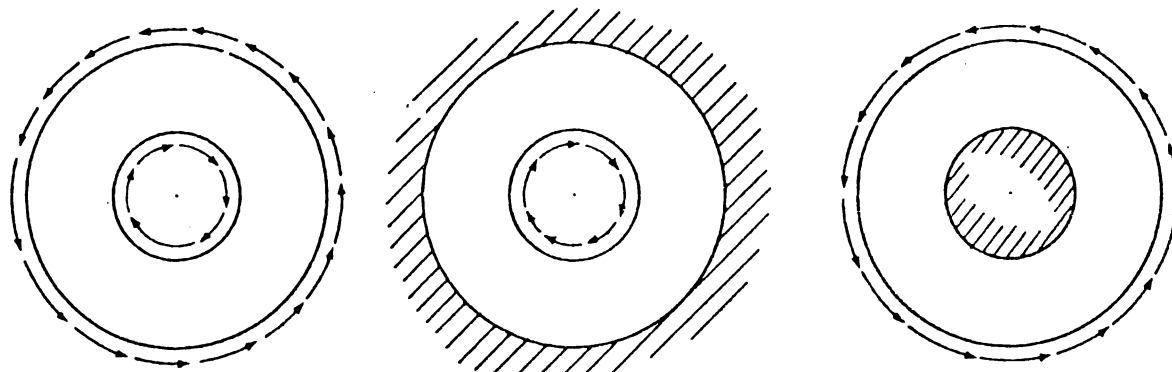
Si, au lieu de mesurer l'extension de l'anneau, on mesure sa contraction transversale, la théorie prévoit pour celle-ci la valeur

$$\frac{PR^3}{EI} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) + \frac{PR}{2} \left(\frac{1}{GS_r} - \frac{1}{ES_\theta} \right)$$

On notera que, comme

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} = 0.14878 \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} = 0.13662$$

la sensibilité de cette dernière mesure est légèrement inférieure à la première.

D. L'anneau sollicité en torsion

Ce cas particulier de l'anneau sollicité le long de ses bords $r=a$ et $r=b$ est remarquable par le fait que, si l'état de tension ne dépend que de r , la fonction d'Airy, elle, dépend de l'angle polaire θ . Elle doit même être polydrome puisque la résultante des tensions dans la cavité n'est pas nulle mais un couple dont l'intensité sera notée C . La solution est fournie par le premier terme de (7.79)

$$\phi = \beta\theta$$

auquel correspondent les résultats suivants

$$\sigma_r = 0 \quad \sigma_\theta = 0 \quad \tau_{r\theta} = \frac{\beta}{r^2} \quad u_r = 0 \quad 2Gu_\theta = -\frac{\beta}{r}$$

On en déduit

$$C = t \int_0^{2\pi} \tau_{r\theta} r^2 d\theta = 2\pi\beta t$$

Le déplacement radial étant identiquement nul, on peut toujours ajouter une rotation d'ensemble pour annuler le déplacement tangentiel, soit au niveau $r=b$, ce qui correspond à l'anneau sollicité en torsion de l'intérieur et encastré à l'extérieur, soit au niveau $r=a$ où il est alors sollicité de l'extérieur et encastré à l'intérieur.

La rotation relative entre les fibres en $r=b$ et $r=a$ est

$$\frac{u_{\theta}(b)}{b} - \frac{u_{\theta}(a)}{a} = \frac{c}{G} \frac{b^2 - a^2}{4\pi t a^2 b^2}$$

c'est la relation de raideur associée à ce cas de sollicitation. En appliquant la théorie unidimensionnelle généralisée, on trouve les charges de fibre neutre équivalentes

$$p_r = 0 \quad p_{\theta R} = -t\beta \frac{b-a}{ab} \quad c + p_{\theta R} = 0$$

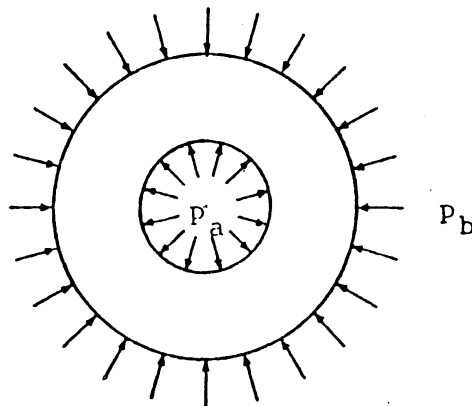
et pour solution des équations d'équilibre (7.113)' et (7.114)' et des équations constitutives (7.115)

$$N_{\theta} = 0 \quad M = 0 \quad N_r = t\beta \frac{b-a}{ab}$$

$$U_r = 0 \quad U_{\theta} = -\frac{R}{GS_r} N_r + R\alpha_0 \quad \alpha = \alpha_0$$

Les résultats $\sigma_{\theta} = 0$ et $\sigma_r = 0$ qu'on peut en déduire pour le champ des tensions sont corrects, mais la distribution des tensions tangentielles est complètement différente; ce qui n'a rien de surprenant puisque les conditions aux limites $\tau_{r\theta} = 0$ pour $r=a$ et $r=b$ sont essentiellement différentes des conditions réelles.

E. Le tube épais sous pression



Traisons d'abord ce problème dans la catégorie des déformations planes $\epsilon_z = 0$. Quoique la cavité soit sollicitée, la résultante interne est nulle et la fonction d'Airy est monodrome; elle ne dépend en fait que de la variable r et sera donc du type (7.87). On en déduit par les formules (7.71)

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad \sigma_r = \frac{B}{r^2} + 2C + D(1+2\lambda nr)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{B}{r^2} + 2C + D(3+2\lambda nr)$$

Par rapport à la solution générale (7.79) de la fonction d'Airy dans une couronne, nous avons la correspondance

$$A = -\alpha_0 \quad B = -\alpha \quad C = \lambda_1 - \lambda \quad D = \lambda$$

Or, on a vu que le déplacement tangentiel u_θ associé à λ est polydrome :

$$2Gu_\theta = \frac{4}{1+\hat{\nu}} \lambda \theta r$$

Le fait qu'il faut donc prendre $\lambda = D = 0$ peut d'ailleurs se retrouver simplement en observant que la symétrie centrale du problème exige que $u_\theta \equiv 0$. Alors

$$\epsilon_r = \frac{du_r}{dr} \quad \epsilon_\theta = \frac{u_r}{r}$$

et, par conséquent

$$\epsilon_r = \frac{d}{dr} (r \epsilon_\theta)$$

Or, selon (7.17),

$$\hat{E} \epsilon_r = \sigma_r - \hat{\nu} \sigma_\theta \quad \hat{E} \epsilon_\theta = \sigma_\theta - \hat{\nu} \sigma_r$$

ce qui permet d'exprimer la relation précédente sous la forme

$$\sigma_r - \hat{\nu} \sigma_\theta = \frac{d}{dr} (r \sigma_\theta - \hat{\nu} r \sigma_r)$$

Quand on substitue la solution précédente dans cette équation, les termes en B et C disparaissent et on ne peut la vérifier qu'en prenant $D = 0$.

Les conditions aux limites

$$-p_a = \frac{B}{a^2} + 2C \quad -p_b = \frac{B}{b^2} + 2C$$

fournissent les valeurs des constantes B et C; il vient

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2}$$

Pour le déplacement radial, on aura directement

$$\hat{E} u_r = r \hat{E} \epsilon_\theta = r (\sigma_\theta - \hat{\nu} \sigma_r)$$

soit, après substitution des tensions et usage de (7.18),

$$2Gu_r = (1-2\nu) \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} r + \frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r}$$

Enfin, dans le sens du tube, la tension de traction ou de compression est uniforme

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) = 2\nu \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2}$$

Cette circonstance permet de traiter le même problème dans la catégorie des tensions planes, quand le tube est libre de s'allonger ou de se contracter : $\sigma_z = 0$. Le champ des tensions radiale et tangentielle n'est pas modifié mais les équations constitutives

$$E \varepsilon_r = \sigma_r - \nu \sigma_\theta \qquad E \varepsilon_\theta = \sigma_\theta - \nu \sigma_r$$

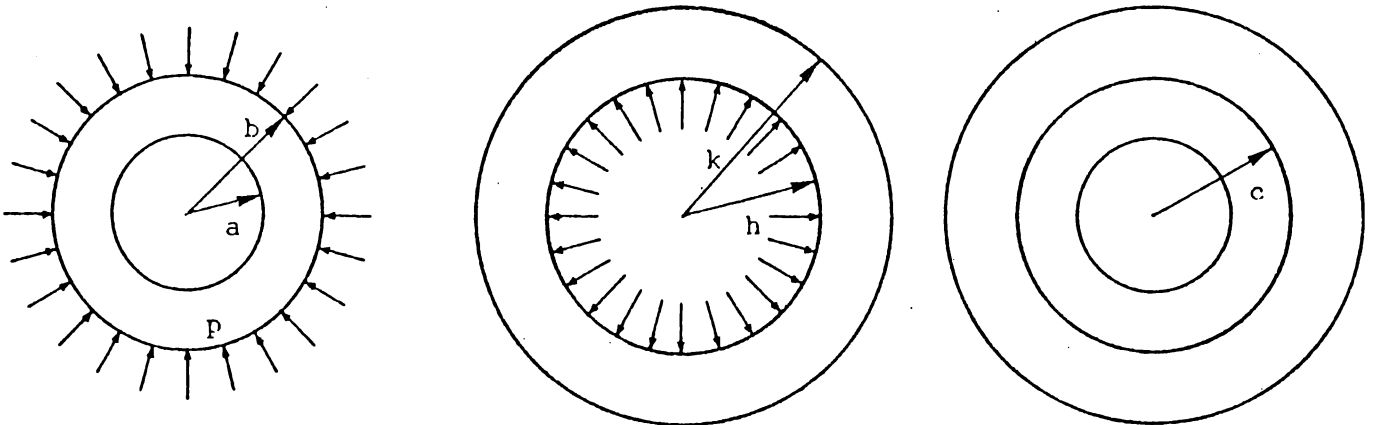
qui sont maintenant d'application, conduisent à modifier le déplacement radial en

$$E u_r = r(\sigma_\theta - \nu \sigma_r) = (1-\nu) \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} r + (1+\nu) \frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r}$$

Le tube subit éventuellement un allongement axial uniforme

$$E \varepsilon_z = -\nu (\sigma_r + \sigma_\theta) = -2\nu \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2}$$

F. Frettage des tubes et anneaux cylindriques



Nous supposons les tubes libres de se contracter ou de s'allonger. Le tube intérieur soumis à une pression extérieure p subit alors, selon les résultats de la section précédente, un déplacement radial extérieur

$$E_i (u_r)_i = (v_i - \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}) pb$$

Le tube extérieur, soumis à la pression interne p subit un déplacement radial interne

$$E_e (u_r)_e = (v_e + \frac{k^2 + h^2}{k^2 - h^2}) ph$$

Supposons la pression p telle que le tube intérieur puisse pénétrer sans jeu dans le tube extérieur

$$b + (u_r)_i = h + (u_r)_e = c$$

La première égalité fournit la relation qui existera entre la différence primitive des rayons $b-h$ (jeu négatif) et la pression d'interface p qui s'établira

$$b-h = p \left\{ \frac{b}{E_i} \left(-v_i + \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} \right) + \frac{h}{E_e} \left(v_e + \frac{k^2 + h^2}{k^2 - h^2} \right) \right\}$$

Cette relation se simplifie quand les matériaux sont les mêmes :

$$b-h = \frac{p}{E} \left\{ v(h-b) + h \frac{k^2 + h^2}{k^2 - h^2} + b \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} \right\}$$

Comme $h-b$ est négligeable devant b , on trouve finalement la formule simple

$$b-h = \frac{2p}{E} b^3 \frac{k^2 - a^2}{(k^2 - h^2)(b^2 - a^2)}$$

Ce problème illustre une autre possibilité d'existence de tensions internes qui ne peuvent être relaxées par un changement de configuration. Le domaine peut ici être à connexion linéaire simple ($a=0$). Il se distingue essentiellement du cas des tensions dues à la fermeture de dislocations de Volterra par la violation des conditions de régularité. Sur l'interface, la discontinuité de σ_θ entraîne une discontinuité des valeurs de ϵ_r et ϵ_θ .

G. Force concentrée à l'origine d'une plaque indéfinie

De la solution générale présentée dans la section 7.10., retenons les termes qui donnent lieu à des tensions inversement proportionnelles à la distance r à l'origine. Ce sont

$$H = (\gamma + i\delta)\zeta(\ln\zeta - 1) \quad (1+\nu)F = (\lambda + i\mu)\ln\zeta$$

Pour que le champ des déplacements reste monodrome, il sera nécessaire de prendre

$$\gamma + i\delta = \frac{3-\nu}{1+\nu} (\lambda - i\mu)$$

et, comme on le verra, les coefficients λ et μ seront, à un facteur près, les composantes de la somme vectorielle des forces P_x et P_y agissant, par unité d'épaisseur, dans une cavité contenant l'origine.

Par application de (7.41), nous obtenons le champ de déplacement monodrome

$$2G(u+iv) = 2 \frac{3-\nu}{1+\nu} (\lambda + i\mu)\ln r - (\lambda - i\mu) e^{2i\theta}$$

tandis que les formules (7.77), limitées à l'état plan au sens restreint, donnent

$$\sigma_r + \sigma_\theta + i E \omega = 4 (\lambda + i\mu) \frac{e^{-i\theta}}{r}$$

$$\sigma_r - \sigma_\theta - 2i\tau_{r\theta} = 2(\lambda + i\mu) \frac{e^{-i\theta}}{r} + 2 \frac{3-\nu}{1+\nu} (\lambda - i\mu) \frac{e^{i\theta}}{r}$$

soit encore

$$\sigma_r = \frac{2}{1+\nu} (3+\nu) \frac{\lambda \cos\theta + \mu \sin\theta}{r}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{2}{1+\nu} (1-\nu) \frac{\mu \cos\theta - \lambda \sin\theta}{r}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{2}{1+\nu} (1-\nu) \frac{\lambda \cos\theta + \mu \sin\theta}{r}$$

Pratiquant une petite cavité circulaire autour de l'origine, il vient

$$-P_x = \int_0^{2\pi} (\cos\theta \sigma_r - \sin\theta \tau_{r\theta}) r d\theta \quad -P_y = \int_0^{2\pi} (\sin\theta \sigma_r + \cos\theta \tau_{r\theta}) r d\theta$$

soit, après substitution des valeurs trouvées et calcul des intégrales

$$P_x = -\frac{8\pi}{1+\nu} \lambda \quad P_y = -\frac{8\pi}{1+\nu} \mu$$

Le moment par rapport à l'origine

$$M_o = \int_0^{2\pi} \tau_{r\theta} r^2 d\theta = 0$$

si bien qu'on peut considérer le champ comme celui dû à une force concentrée située à l'origine. Une autre façon d'obtenir ce résultat consiste à examiner la fonction d'Airy correspondante

$$\begin{aligned} \phi &= \operatorname{Re} \{ (1+\nu) \bar{\zeta} F - \bar{H} \} = \operatorname{Re} \left[(\lambda + i\mu) \bar{\zeta} \left\{ \ln \zeta - \frac{3-\nu}{1+\nu} (\ln \bar{\zeta} - 1) \right\} \right] \\ &= \frac{\lambda + i\mu}{2} \left[\bar{\zeta} \ln \zeta - \frac{3-\nu}{1+\nu} \bar{\zeta} (\ln \bar{\zeta} - 1) \right] + \frac{\lambda - i\mu}{2} \left[\zeta \ln \bar{\zeta} - \frac{3-\nu}{1+\nu} \zeta (\ln \zeta - 1) \right] \end{aligned}$$

Quand on parcourt un circuit fermé partant d'un point P d'affixe ζ et entourant l'origine le saut de ϕ est

$$\Delta\phi = \operatorname{Re} \left[(\lambda+i\mu)\bar{\zeta}2\pi i\left(1+\frac{3-\nu}{1+\nu}\right) \right] = \frac{8\pi}{1+\nu}(\lambda y-\mu x)$$

D'autre part, en appliquant l'opérateur ∂ de la section 7.1.,

$$\partial\phi = \frac{\lambda+i\mu}{2} \left[2\frac{\bar{\zeta}}{\zeta} \right] + \frac{\lambda-i\mu}{2} \left[2\ln\bar{\zeta} - 2\frac{3-\nu}{1+\nu} \ln\zeta \right]$$

Quand on parcourt le circuit fermé, ceci donne

$$\Delta\partial\phi = -2\pi i(\lambda-i\mu)\left(1+\frac{3-\nu}{1+\nu}\right)$$

soit

$$\Delta\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{8\pi}{1+\nu}\mu \qquad \Delta\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{8\pi}{1+\nu}\lambda$$

Ces résultats confirment les précédents quand on applique au circuit fermé l'interprétation de la fonction d'Airy et de ses dérivées partielles, exposée à la section 7.6.

Revenant au problème du déplacement dû à cette mise en charge, observons que le remplacement de r par r/r_0 comme argument du logarithme ne fait qu'introduire une translation et rend la contribution de ce terme nulle sur la circonférence de rayon r_0 choisi. En ajoutant encore le champ dû au terme

$$(1+\nu)F = (\lambda_2 + i\mu_2)\zeta^2$$

nous pouvons par le choix

$$\frac{3-\nu}{1+\nu}r_0^2(\lambda_r + i\mu_r) = \lambda + i\mu$$

annuler sur la même circonférence le terme en $e^{2i\theta}$
 et enfin annuler complètement u et v pour $r=r_0$ en ajoutant
 une nouvelle translation. Le résultat final est

$$2G(u+iv) = 2 \frac{3-\nu}{1+\nu} (\lambda+i\mu) \ln \frac{r}{r_0} + (\lambda+i\mu) \left(\frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right) e^{2i\theta} - 2 \frac{1+\nu}{3-\nu} (\lambda-i\mu) \left(\frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right)$$

En fixant ainsi les conditions aux limites de telle façon que
 la plaque soit encastrée sur les bords d'une circonférence,
 dont le rayon peut être pris aussi grand que l'on veut, on a
 introduit une correction au champ des tensions sans toutefois
 modifier la résultante des forces agissant dans la cavité.
 Nous bornant au cas d'une force P_x seule, il vient

$$\sigma_r = - \frac{P_x}{4\pi} \left[\frac{3+\nu}{r} + \frac{(1+\nu)^2}{3-\nu} \frac{r}{r_0^2} \right] \cos \theta$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{P_x}{4\pi} \left[\frac{1-\nu}{r} - \frac{(1+\nu)^2}{3-\nu} \frac{r}{r_0^2} \right] \sin \theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_x}{4\pi} \left[\frac{1-\nu}{r} - \frac{3(1+\nu)^2}{3-\nu} \frac{r}{r_0^2} \right] \cos \theta$$

Les réactions induites au niveau de l'encastrement diminuent
 de façon inversement proportionnelle à r_0 .

Il est évidemment illusoire de chercher une expression des
 déplacements correspondant à un déplacement nul à l'infini.
 La présence du terme logarithmique montre que, du moment que
 l'on est à une distance finie du point d'application de la
 force, le déplacement local tend vers l'infini quand on veut
 le rendre nul à l'infini ($r_0 \rightarrow \infty$).

Le plan ou "feuillet" moyen de la plaque est rapporté à des axes cartésiens Ox et Oy ; les deux faces étant caractérisées par $z = \pm h$. Le bord cylindrique est défini par une courbe directrice c fermée du feuillet moyen, qui comporte généralement un certain nombre de points anguleux.

En principe l'épaisseur $2h$ est faible comparée aux dimensions transversales.

La sollicitation symétrique par rapport au feuillet moyen, ou problème d'extension des plaques, a fait l'objet de l'analyse exposée dans les sections 7.4 et 7.5.

Nous considérons ici les sollicitations de symétrie gauche par rapport au feuillet moyen; le cas général pouvant alors être obtenu par superposition tant que l'on reste dans le cadre de la théorie linéaire de l'Elasticité.

L'objectif principal est de réduire à deux dimensions la formulation d'un problème qui, strictement, en comporte trois. Ceci implique que la structure de la solution dans sa dépendance de la variable z ait une forme explicite qui résulte, soit d'un traitement tri-dimensionnel exact, comme on a pu le faire dans le cas de l'extension, soit d'hypothèses simplificatrices rationnelles. C'est ce dernier point de vue qui sera adopté pour l'exposé et dont le développement sera fait en s'appuyant sur les principes variationnels.

Comme on le verra plusieurs types d'approximations variationnelles conduisent essentiellement aux mêmes équations bi-dimensionnelles, les différences ne portant que sur des valeurs numériques de coefficients de raideur.

Nous adopterons comme théorie de base celle qui conduit au respect intégral des équations d'équilibre.

1. Hypothèses de base

Le type de symétrie repris pour la flexion et l'exemple de la théorie des poutres suggèrent la structuration en z suivante pour certaines composantes du champs des tensions

$$\sigma_x = z S_x(x,y) \quad \sigma_y = z S_y(x,y) \quad \tau_{xy} = z S_{xy}(x,y)$$

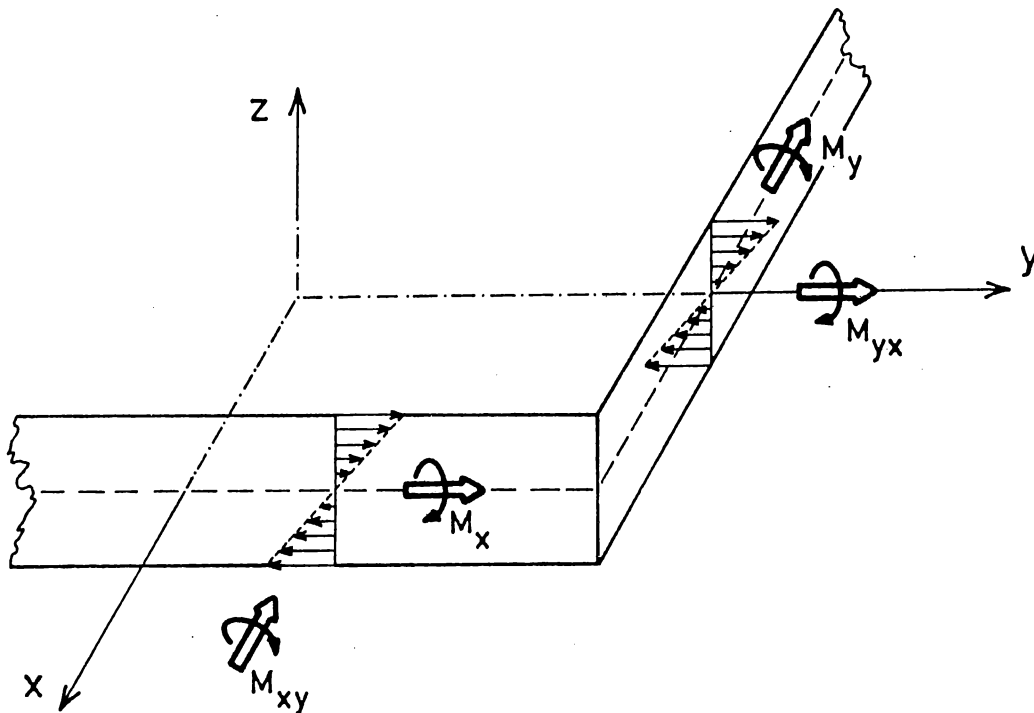
On peut considérer chacune comme le premier terme d'un développement Taylorien dans les puissances impaires de z du champ exact.

Il convient d'introduire immédiatement une signification physique plus directe aux fonctions des deux variables (x,y) impliquées dans cette structuration. Définissons donc les moments de flexion et de torsion distribués

$$M_x = \int_{-h}^h \sigma_x z dz \quad M_y = \int_{-h}^h \sigma_y z dz \quad M_{xy} = \int_{-h}^h \tau_{xy} z dz$$

(.1)

illustrés à la figure



En adoptant alors la structuration proposée pour les tensions il vient

$$\sigma_x = \frac{3z}{2h^3} M_x(x,y) \quad \sigma_y = \frac{3z}{2h^3} M_y(x,y) \quad \tau_{xy} = \frac{3z}{2h^3} M_{xy}(x,y) \quad (.2)$$

Les autres hypothèses portent encore sur le champ des tensions; la plus importante est

$$\sigma_z \equiv 0 \quad (.3)$$

Enfin, aux limites $z = \pm h$ on suppose

$$\tau_{zx} = 0 \quad \tau_{zy} = 0 \quad (z = \pm h) \quad (.4)$$

Les faces $z = \pm h$ ne sont donc pas chargées de l'extérieur et toute mise en charge transversale devra être introduite par le truchement des forces de volume. Leur remplacement par l'application plus réaliste de pressions transversales sur les faces peut faire l'objet de corrections a posteriori.

.2 Application du principe variationnel canonique

En utilisant le principe variationnel canonique nous savons que le fait de n'avoir introduit aucune hypothèse restrictive sur les déplacements conduit à respecter rigoureusement l'équilibre. Il serait donc loisible de commencer par l'examen de ce problème et de le faire suivre d'une application du principe du minimum de l'énergie complémentaire. Ce faisant on perdrait cependant toute information sur les déplacements, ce qui constituerait un appauvrissement appréciable de la théorie.

Le principe canonique

$$\delta(H_1 + H_2 - U + P) = 0$$

comporte les termes suivants, où la simplification par (.3) est déjà incorporée,

$$H_1 = \iiint \left[\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy dz$$

$$H_2 = \iiint \left[\tau_{zx} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \tau_{zy} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] dx dy dz$$

et, pour un milieu isotrope,

$$U = \frac{1}{2E} \iiint \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu \sigma_x \sigma_y + 2(1+\nu) \tau_{xy}^2 \right) dx dy dz$$

$$+ \frac{1}{2G} \iiint (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) dx dy dz$$

Enfin pour l'énergie potentielle des charges de volume selon l'axe des z et des charges appliquées aux bords

$$P = - \iiint Z w dx dy dz - \int_{-h}^h dz \oint_c (\bar{t}_x u + \bar{t}_y v + \bar{t}_z w) ds$$

Examinons d'abord les simplifications apportées par les hypothèses de structuration sur un terme de H_1 tel que

$$\iiint \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz = \iint \left\{ M_x \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^h \frac{3z}{2h^3} u dz \right\} dx dy$$

Il en résulte une définition naturelle d'un déplacement moyen

$$\alpha(x, y) = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h u z dz$$

dont on peut observer qu'elle serait identiquement satisfaite si on introduisait l'hypothèse de structuration de déplacement

$$u(x, y, z) = z \alpha(x, y)$$

La grandeur $\alpha(x, y)$ apparaît ainsi comme liée à la rotation d'une facette de normale orientée selon l'axe des x . Plus généralement, sans qu'il soit nécessaire de faire appel à cette hypothèse de structuration, nous avons en intégrant par parties à partir de

$$z \, dz = -d \left(\frac{h^2 - z^2}{2} \right)$$

la définition équivalente

$$\alpha = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h \frac{h^2 - z^2}{2} \frac{\partial u}{\partial z} \, dz$$

La grandeur α apparaît ainsi plus clairement comme une moyenne sur l'épaisseur, pondérée par la fonction $(h^2 - z^2)/2$, de la pente locale $\partial u / \partial z$ de la facette déformée. Le facteur numérique devant l'intégrale est précisément l'inverse du poids total

$$\int_{-h}^h \frac{h^2 - z^2}{2} \, dz = \frac{2h^3}{3}$$

de la fonction de pondération.

Moyennant l'introduction des deux rotations moyennes

$$\alpha = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h \frac{h^2 - z^2}{2} \frac{\partial u}{\partial z} \, dz \quad \beta = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h \frac{h^2 - z^2}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \, dz \quad (.5)$$

on trouve donc l'expression bi-dimensionnelle

$$H_1 = \iint \left[M_x \frac{\partial \alpha}{\partial x} + M_y \frac{\partial \beta}{\partial y} + M_{xy} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \right] \, dx \, dy$$

Nous pourrions procéder de la même façon pour H_2 à condition de connaître la structuration des tensions τ_{zx} et τ_{zy} . Celle-ci nous sera fournie par les équations d'équilibre de translation

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0$$

dont le principe même exige qu'elles soient satisfaites en tant qu'équations d'Euler liées aux variations inconditionnelles de $u(x,y,z)$ et $v(x,y,z)$.

Introduisant dans ces équations les structurations (.2)

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = - \frac{3z}{2h^3} \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = - \frac{3z}{2h^3} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right)$$

et il vient par intégration

$$\tau_{zx} = \frac{3}{2h^3} \frac{h^2 - z^2}{2} \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \right) + A(x,y)$$

$$\tau_{zy} = \frac{3}{2h^3} \frac{h^2 - z^2}{2} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) + B(x,y)$$

Les fonctions A et B ne peuvent qu'être nulles par suite des hypothèses (.4). D'autre part, l'intégration sur l'épaisseur introduit les efforts tranchants distribués

$$T_x = \int_{-h}^h \tau_{zx} dz \quad T_y = \int_{-h}^h \tau_{zy} dz \quad (.6)$$

et fait apparaître les équations d'équilibre bidimensionnelles

$$T_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \quad T_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad (.7)$$

tandis que la structuration obtenue pour les tensions tangentielles transversales prend sa forme définitive analogue à
(.2)

$$\tau_{zx} = \frac{3}{2h^3} \frac{h^2 - z^2}{2} T_x \quad \tau_{zy} = \frac{3}{2h^3} \frac{h^2 - z^2}{2} T_y \quad (.8)$$

Substituée dans H_2 elle lui donne la forme bidimensionnelle cherchée

$$H_2 = \iint [T_x (\alpha + \frac{\partial W}{\partial x}) + T_y (\beta + \frac{\partial W}{\partial y})] dx dy$$

moyennant l'introduction naturelle d'une moyenne pondérée du déplacement transversal

$$W(x,y) = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h \frac{h^2 - z^2}{2} w dz \quad (.9)$$

Toutes les tensions étant maintenant structurées en z , il devient possible d'effectuer l'intégration par rapport à cette variable de l'énergie de déformation; il vient

$$U = \frac{1}{2E} \frac{3}{2h^3} \iint [M_x^2 + M_y^2 - 2\nu M_x M_y + 2(1+\nu) M_{xy}^2] dx dy$$

$$+ \frac{1}{2G} \frac{3}{5h} \iint (T_x^2 + T_y^2) dx dy$$

Examinons maintenant l'énergie potentielle des charges appliquées.

Aucune hypothèse restrictive n'ayant été faite concernant le déplacement $w(x,y,z)$, l'équation d'équilibre de translation verticale, avec force de volume Z

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

doit être vérifiée. Introduisant l'hypothèse (.3) et les structurations (.8), on trouve que Z doit avoir aussi une distribution parabolique en z

$$Z = q(x,y) \frac{3}{2h^3} \frac{h^2 - z^2}{2} \quad (.10)$$

où

$$q = \int_{-h}^h Z \, dz \quad (.11)$$

est la charge transversale totale. Ceci transforme l'équation d'équilibre en

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + q = 0 \quad (.12)$$

et met le terme correspondant de l'énergie potentielle sous la forme bi-dimensionnelle canonique

$$- \iint q W \, dx \, dy$$

Les équations d'équilibre sur le bord ne pourront être satisfaites de façon tridimensionnelle que si

$$\bar{t}_x = \frac{3z}{2h^3} (\bar{M}_x \cos \theta + \bar{M}_{yx} \sin \theta)$$

$$\bar{t}_y = \frac{3z}{2h^3} (\bar{M}_{xy} \cos \theta + \bar{M}_y \sin \theta)$$

$$\bar{t}_z = \frac{3}{2h^3} \frac{h^2 - z^2}{2} (\bar{T}_x \cos \theta + \bar{T}_y \sin \theta)$$

les cosinus directeurs de la normale extérieure à la plaque le long du bord étant donnés par $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$.

Ceci met le terme correspondant de l'énergie potentielle sous la forme

$$- \oint \left[\alpha(\bar{M}_x \cos\theta + \bar{M}_{yx} \sin\theta) + \beta(\bar{M}_{xy} \cos\theta + \bar{M}_y \sin\theta) + W(\bar{T}_x \cos\theta + \bar{T}_y \sin\theta) \right] ds$$

$$= - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \oint (\alpha + i\beta) \left[e^{i\theta} (\bar{M}_x - \bar{M}_y - 2i\bar{M}_{xy}) + e^{-i\theta} (\bar{M}_x + \bar{M}_y) \right] ds - \operatorname{Re} \oint W (\bar{T}_x + i\bar{T}_y) e^{-i\theta} ds$$

Par les transformations tensorielles

$$\alpha + i\beta = e^{i\theta} (\alpha_n + i\alpha_t)$$

$$M_x + M_y = M_n + M_t$$

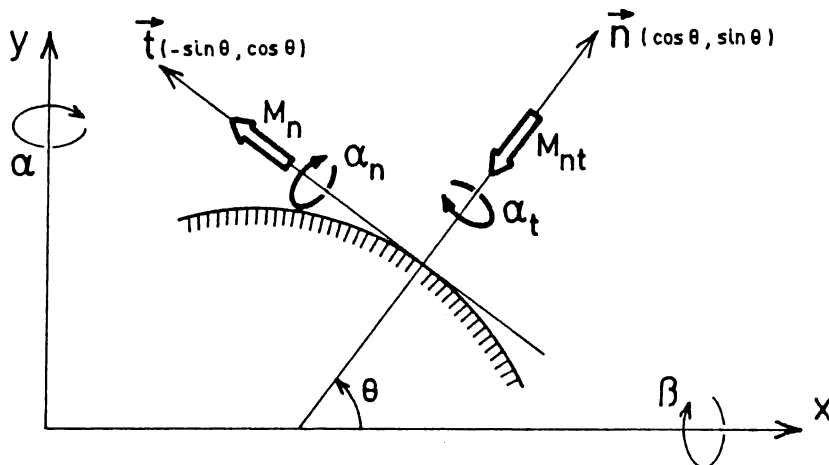
$$M_x - M_y - 2iM_{xy} = e^{-2i\theta} (M_n - M_t - 2iM_{nt})$$

$$T_x + iT_y = e^{i\theta} (T_n + iT_t)$$

on obtient la forme adaptée à l'orientation locale du bord

$$- \frac{1}{2} \operatorname{Re} \oint (\alpha_n + i\alpha_t) (2\bar{M}_n - 2i\bar{M}_{nt}) ds - \operatorname{Re} \oint W (\bar{T}_n + i\bar{T}_t) ds$$

$$= - \oint (\alpha_n \bar{M}_n + \alpha_t \bar{M}_{nt} + W \bar{T}_n) ds$$



.3. Le principe canonique bi-dimensionnel

Rassemblant les résultats précédents, nous avons le principe canonique bi-dimensionnel

$$\begin{aligned}
 \delta \left\{ \iint \left[M_x \frac{\partial \alpha}{\partial x} + M_y \frac{\partial \beta}{\partial y} + M_{xy} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) + T_x \left(\alpha + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right. \right. \\
 \left. \left. + T_y \left(\beta + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] dx dy \right. \\
 - \frac{1}{2D} \iint \left[\frac{M_x^2 + M_y^2 - 2\nu M_x M_y}{1 - \nu^2} + \frac{2}{1-\nu} M_{xy}^2 \right] dx dy \\
 - \frac{1}{2G} \frac{3}{5h} \iint \left[T_x^2 + T_y^2 \right] dx dy \\
 \left. - \iint q W dx dy - \oint \left(\alpha_n \bar{M}_n + \alpha_t \bar{M}_{nt} + W \bar{T}_n \right) ds \right\} = 0
 \end{aligned}
 \tag{.13}$$

La seule innovation est l'introduction du paramètre traditionnel

$$D = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1-\nu^2}
 \tag{.14}$$

appelé "raideur de flexion" de la plaque.

Dans ce principe, les trois variables déplacement

$$\alpha(x,y) \qquad \beta(x,y) \qquad W(x,y)$$

et les 5 variables représentatives des tensions

$$M_x(x,y) \qquad M_y(x,y) \qquad M_{xy}(x,y) \qquad T_x(x,y) \qquad T_y(x,y)$$

peuvent être variées indépendamment

Comme on le vérifie facilement, les équations d'Euler associées aux variations de α, β et W sont respectivement les équations d'équilibre de rotation (.7) et de translation verticale (.12) d'une petite portion $dx dy$ de surface de la plaque.

Les termes aux limites engendrés par la variation des intégrales de surface deviennent, après une transformation tensorielle analogue à la précédente,

$$\oint (\delta \alpha_n M_n + \delta \alpha_t M_{nt} + \delta W T_n) ds$$

de sorte que les conditions aux limites naturelles sont simplement

$$M_n = \bar{M}_n \quad M_{nt} = \bar{M}_{nt} \quad T_n = \bar{T}_n \quad (.15)$$

Les variations de M_x , M_{xy} et M_y fournissent des équations de compatibilité-comportement

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{1}{D(1-\nu^2)} (M_x - \nu M_y) \quad \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{1}{D(1-\nu^2)} (M_y - \nu M_x)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{1}{D} \frac{2}{1-\nu} M_{xy}$$

plus souvent présentées sous la forme inverse (qui justifie la définition de la raideur de flexion D)

$$M_x = D \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \quad M_y = D \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} + \nu \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)$$

$$M_{xy} = D \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \quad (.16)$$

Enfin, les variations de T_x et T_y fournissent des relations de compatibilité-comportement entre efforts tranchants et glissements généralisés

$$T_x = 2nGh \left(\alpha + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \quad T_y = 2nGh \left(\beta + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \quad (.17)$$

$$\text{avec } n = 5/6 \quad (.18)$$

Cherchons à exprimer les lois de compatibilité-comportement aux limites dans les directions naturelles. Partant des relations

$$M_x + M_y = (1+\nu) D \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (\alpha + i\beta) \right]$$

$$M_x - M_y - 2i M_{xy} = (1-\nu) D \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (\alpha - i\beta)$$

équivalentes à (.16) et appliquant les transformations tensorielles précédentes, nous obtenons, eu égard à

$$\partial = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial n} - i \frac{\partial}{\partial s} \right) \quad (.19)$$

$$M_n + M_t = (1+\nu) D \operatorname{Re} \left[e^{-i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial n} - i \frac{\partial}{\partial s} \right) e^{i\theta} (\alpha_n + i\alpha_t) \right]$$

$$M_n - M_t - 2iM_{nt} = (1-\nu) D e^{i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial n} - i \frac{\partial}{\partial s} \right) e^{-i\theta} (\alpha_n - i\alpha_t)$$

Avec $\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0$ et $\frac{\partial \theta}{\partial s} = \dot{\theta}$ la courbure du bord, ceci devient

$$M_n + M_t = (1+\nu) D \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\partial}{\partial n} - i \frac{\partial}{\partial s} \right) (\alpha_n + i\alpha_t) + \dot{\theta} (\alpha_n + i\alpha_t) \right]$$

$$M_n - M_t - 2iM_{nt} = (1-\nu) D \left[\left(\frac{\partial}{\partial n} - i \frac{\partial}{\partial s} \right) (\alpha_n - i\alpha_t) - \dot{\theta} (\alpha_n - i\alpha_t) \right]$$

dont on tire en particulier

$$M_n = D \left[\frac{\partial \alpha_n}{\partial n} + \nu \left(\frac{\partial \alpha_t}{\partial s} + \dot{\theta} \alpha_n \right) \right] \quad (.20)$$

$$M_{nt} = D \frac{1-\nu}{2} \left[\frac{\partial \alpha_t}{\partial n} + \frac{\partial \alpha_n}{\partial s} - \dot{\theta} \alpha_t \right] \quad (.21)$$

Par un calcul similaire, il vient

$$T_n = 2nGh \left[\alpha_n + \frac{\partial W}{\partial n} \right] \quad (.22)$$

Sur les parties du bord où s'appliquent des conditions aux limites cinématiques telles que

$$\alpha_n = \bar{\alpha}_n \quad \alpha_t = \bar{\alpha}_t \quad W = \bar{W}$$

les variations correspondantes ne sont pas libres et les termes correspondants ne figurent pas dans l'énergie potentielle.

Comme lescas des variations libres ou imposées s'excluent mutuellement on a, en chaque point du bord, 8 combinaisons différentes possibles selon les 3 alternatives indépendantes :

$$\begin{aligned} \alpha_n = \bar{\alpha}_n & \quad \text{ou} & \quad M_n = \bar{M}_n \\ \alpha_t = \bar{\alpha}_t & \quad \text{ou} & \quad M_{nt} = \bar{M}_{nt} \\ W = \bar{W} & \quad \text{ou} & \quad T_n = \bar{T}_n \end{aligned} \quad (.23)$$

Les plus fréquentes parmi les combinaisons homogènes rencontrées en pratique sont :

$$\underline{\text{le bord libre}} \quad M_n = 0 \quad M_{nt} = 0 \quad T_n = 0$$

$$\underline{\text{le bord encastré}} \quad \alpha_n = 0 \quad \alpha_{nt} = 0 \quad W = 0$$

Il y a deux cas de conditions qui se rapprochent de la notion de bord simplement appuyé :

$$\text{soit} \quad M_n = 0 \quad M_{nt} = 0 \quad W = 0$$

$$\text{soit} \quad M_n = 0 \quad \alpha_t = 0 \quad W = 0$$

D'autres conditions homogènes peuvent prévaloir en présence de certaines symétries. Ainsi si une plaque est symétrique, tant

au point de vue géométrie que chargement, par rapport à un axe du feuillet moyen, on aura le long de cet axe :

$$\alpha_n = 0 \quad M_{nt} = 0 \quad \text{et} \quad T_n = 0$$

.4. Compatibilité des déformations

Une précision peut être apportée au problème de la compatibilité des déformations en remarquant que la variation des efforts tranchants T_x et T_y , qui a conduit aux équations (.17), n'épuise pas les renseignements fournis par le principe canonique. En effet, aucune hypothèse n'a été formulée initialement concernant les tensions de cisaillement τ_{zx} et τ_{zy} . Leur structuration (.8) n'a été qu'une conséquence du principe tri-dimensionnel lui-même. On est donc en droit de varier librement ces tensions comme fonctions des trois variables (x, y, z) ce qui, selon la théorie générale, demande la vérification des équations détaillées de compatibilité-comportement

$$\tau_{zx} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \tau_{zy} = G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (.24)$$

Multipliées par $\frac{3}{2h^3} \frac{h^2 - z^2}{2}$ et intégrées sur l'épaisseur, ces

équations restituent en vertu de (.8) et des définitions (.5) et (.9) les équations (.17), avec lesquelles elles ne pouvaient d'ailleurs pas être contradictoires. Elles n'apportent donc rien de plus aux équations de la théorie bi-dimensionnelle qui est complète. Elles peuvent par contre apporter une information supplémentaire concernant le champ des déplacements. Si, par exemple, on adopte l'hypothèse

$$w(x, y, z) = W(x, y)$$

qui est compatible avec la définition (.9) qu'elle réduit à une identité, on satisfait exactement aux équations (.24) précédentes et aux conditions de symétrie du problème avec le champ

$$u = \frac{3}{4Gh^3} (h^2 z - \frac{1}{3} z^3) T_x - z \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$v = \frac{3}{4Gh^3} (h^2 z - \frac{1}{3} z^3) T_y - z \frac{\partial W}{\partial y}$$

Les seules approximations qui subsistent alors dans la théorie bi-dimensionnelle sont celles portant sur les équations de compatibilité-comportement

$$E \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_x - \nu \sigma_y \quad E \frac{\partial v}{\partial y} = \sigma_y - \nu \sigma_x \quad G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \tau_{xy}$$

qui ne sont satisfaites qu'en moyenne pondérée.

On le vérifie facilement en multipliant ces équations par z et les intégrant sur l'épaisseur pour retrouver les équations (.16).

.5. Autres types d'approximation

Dans la théorie de HENCKY, les approximations sont faites sur le champ des déplacements

$$u = z \alpha (x, y) \quad v = z \beta (x, y) \quad w = W (x, y) \quad (.25)$$

ce qui peut être considéré comme une interprétation restrictive des définitions (.5) et (.9). Ce faisant, on ne peut plus varier que les grandeurs (α, β, W) , fonctions de deux variables seulement, et ce sont les équations d'équilibre qui sont approchées par des moyennes pondérées.

Si l'on ne faisait aucune autre approximation, on pourrait se servir uniquement du principe de variation des déplacements. On obtiendrait alors pour déformations

$$\epsilon_x = z \frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad \epsilon_y = z \frac{\partial \beta}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = z \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)$$

$$\epsilon_z = 0 \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial W}{\partial x} + \alpha \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial W}{\partial y} + \beta$$

et, comme les lois de comportement doivent être satisfaites, on aurait notamment

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y)$$

ce qui constitue une différence fondamentale par rapport à (.3).
Egalement

$$\tau_{zx} = G \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \alpha \right) \quad \tau_{zy} = G \left(\frac{\partial W}{\partial y} + \beta \right) \quad (.26)$$

deviennent des distributions constantes sur l'épaisseur qui remplacent les lois paraboliques (.8), ce qui ne permet pas non plus de satisfaire à (.4).

En définitive, les équations de la théorie bi-dimensionnelle correspondante sont formellement identiques à celles de la théorie précédente moyennant les deux modifications suivantes :

1. Remplacement de $\sigma_z = 0$ par $\epsilon_z = 0$, conduisant au remplacement de l'ancienne raideur de flexion D par une raideur plus grande $D/(1-\nu^2)$;
2. Augmentation de la raideur au cisaillement transversal, dont le facteur numérique passe de $5/6$ à 1 .

L'hypothèse $w = W(x,y)$ est avantageuse pour l'introduction des charges transversales, car, quelle que soit la façon détaillée dont ces charges sont appliquées : forces de volume et/ou pressions sur les faces, l'énergie potentielle

$$\begin{aligned}
 & - \iiint Z w \, dx dy dz - \iint \left[(t_z w)_{z=h} + (t_z w)_{z=-h} \right] dx dy \\
 & = - \iint q W \, dx dy
 \end{aligned}$$

ne dépend en définitive que de la somme

$$q = \int_{-h}^h Z \, dz + \sigma_z(x, y, h) - \sigma_z(x, y, -h)$$

Il est aussi possible de revenir au principe canonique tri-dimensionnel et de faire usage de la possibilité d'y introduire simultanément des approximations sur le champ des tensions et sur le champ des déplacements. Dans la formulation de E. REISSNER, par exemple, on se sert simultanément de (.2), (.3), (.4) et (.25) comme hypothèses. Ceci transforme directement H_1 et H_2 dans leur forme bi-dimensionnelle antérieure. La structuration de τ_{zx} et τ_{zy} , nécessaire au calcul de l'énergie complémentaire, est ici obtenue par les équations variationnelles (.24), que les hypothèses sur les déplacements transforment en (.26). Par conséquent, dans cette approximation, les tensions de cisaillement ont la même distribution constante sur l'épaisseur que celle de la théorie de HENCKY et il faut prendre $n = 1$. Par contre, l'hypothèse $\sigma_z = 0$ entraîne pour la raideur de flexion la valeur D de la théorie de base. Enfin, l'énergie potentielle s'accomode de n'importe quelle mise en charge transversale, la solution ne dépendant en définitive que de la répartition de la charge totale.

Dans la suite, on traitera ensemble, étant donné leur identité formelle, les équations résultant des théories précédentes. La raideur de flexion sera toujours notée D et la raideur impliquée dans les déformations dues aux efforts tranchants sera affectée du coefficient n . Ces équations seront celles de la "Théorie des plaques d'épaisseur modérée".

.6. L'hypothèse de KIRCHHOFF

L'hypothèse introduite originellement par KIRCHHOFF est que toute fibre perpendiculaire au feuillet moyen dans la configuration initiale reste perpendiculaire à celui-ci au cours de la déformation. Elle se traduit analytiquement dans le cadre des hypothèses du type déplacement par l'exigence

$$\alpha + \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \qquad \beta + \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \qquad (.27)$$

Cette nullité des glissements transversaux est alors valable, non seulement pour le feuillet moyen, mais pour tous les feuillets $z = \text{cte}$. Par contre, dans le cadre de la théorie respectant l'équilibre, les conditions (.27) n'expriment plus qu'une perpendicularité en moyenne pondérée. Elles permettent d'éliminer les rotations au profit du seul déplacement transversal, ce qui réduit les équations de compatibilité-comportement à des relations entre moments et éléments du tenseur de courbure

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Explicitement

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \qquad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = -D (1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \qquad (.28)$$

Sur les bords, les conditions de perpendicularité deviennent

$$\alpha_n + \frac{\partial W}{\partial n} = 0 \qquad \alpha_t + \frac{\partial W}{\partial s} = 0 \qquad (.29)$$

Ceci donne à (.20) la forme

$$M_{nt} = - D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + v \left(\frac{\partial^2 W}{\partial s^2} + \dot{\theta} \frac{\partial W}{\partial n} \right) \right] \quad (.30)$$

La transformation de (.21) donne d'abord

$$M_{nt} = - D \frac{1-v}{2} \left[\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial W}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial W}{\partial n} - \dot{\theta} \frac{\partial W}{\partial s} \right]$$

On peut simplifier cette formule en même temps qu'obtenir celle de l'opérateur de Laplace, qui peut être utile par la suite, en observant que

$$\nabla^2 = \partial \bar{\partial} = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial n} - i \frac{\partial}{\partial s} \right) \left[e^{i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial n} + i \frac{\partial}{\partial s} \right) \right]$$

est un opérateur réel. Il vient donc en annulant la partie imaginaire, la relation

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial n} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial s} = 0$$

qui transforme la formule de M_{nt} en

$$M_{nt} = - D (1-v) \left[\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial W}{\partial n} - \dot{\theta} \frac{\partial W}{\partial s} \right] \quad (.31)$$

tandis que l'on trouve

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial n^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial n} \quad (.32)$$

Les relations de compatibilité-comportement (.17) disparaissent complètement dans la théorie de KIRCHHOFF car elles provenaient de relations variationnelles liées aux efforts tranchants et ceux-ci sont absents du principe canonique.

En effet H_2 disparaît en vertu de (.27) tandis que l'intégrand de H_1 devient

$$- (M_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2 M_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y})$$

Si nous divisons cette dernière expression par 2 et la considérons, en vertu du théorème de CLAPEYRON intérieur, comme la densité d'énergie de déformation, nous obtenons pour densité d'énergie complémentaire en y remplaçant les courbures au profit des moments

$$\frac{1}{2D(1-\nu^2)} [(M_x + M_y)^2 + 2(1+\nu)(M_{xy}^2 - M_x M_y)]$$

une expression qui ne dépend que des moments.

Ceci ne signifie pas que les efforts tranchants eux-mêmes soient nuls; ils sont en fait toujours calculables par les équations d'équilibre (.7) mais sont ramenés au statut de variables auxiliaires ignorables. Les équations variationnelles (.7) disparaissent aussi car le principe n'engendre plus que l'équation d'équilibre

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad (.33)$$

liée aux variations sur W . C'est l'ancienne équation (.12) dans laquelle les efforts tranchants ont précisément été éliminés à l'aide de (.7).

Ces résultats peuvent aussi être interprétés d'une manière quelque peu artificielle mais très efficace en considérant la plaque comme formée d'un matériau à isotropie transversale, obtenu en faisant tendre vers l'infini le module de glissement lié au cisaillement transversal. Ceci revient à faire tendre le coefficient n vers l'infini. Ce procédé fait bien disparaître les termes d'effort tranchant dans l'énergie complémentaire. Par ailleurs, en divisant par n les équations (.17) et passant à la limite, on obtient les conditions (.27).

Nous pouvons maintenant présenter le principe variationnel canonique incorporant l'hypothèse de KIRCHHOFF :

$$\begin{aligned} \delta \left\{ - \iint \left[M_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2 M_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] dx dy \right. \\ \left. - \frac{1}{2D(1-\nu^2)} \iint \left[(M_x + M_y)^2 + 2(1+\nu)(M_{xy}^2 - M_x M_y) \right] dx dy \right. \\ \left. - \iint q W dx dy + \oint \left(\bar{M}_n \frac{\partial W}{\partial n} + \bar{M}_{nt} \frac{\partial W}{\partial s} - \bar{T}_n W \right) ds \right\} = 0 \end{aligned} \quad (.34)$$

Les équations variationnelles de ce principe sont (.33) pour δW et les équations (.28) pour les variations sur les moments. Les conditions aux limites naturelles requièrent une attention particulière.

.7. Les conditions aux limites de la théorie de KIRCHHOFF

L'ensemble des termes aux limites du principe (.34) se présente d'abord sous la forme

$$\begin{aligned} \oint - (\cos \theta M_x + \sin \theta M_{yx}) \delta \frac{\partial W}{\partial x} ds - (\cos \theta M_{xy} + \sin \theta M_y) \delta \frac{\partial W}{\partial y} ds \\ + \delta W \cos \theta \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \right) ds + \delta W \sin \theta \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) ds \\ + \left(\bar{M}_n \delta \frac{\partial W}{\partial n} + \bar{M}_{nt} \delta \frac{\partial W}{\partial s} - \bar{T}_n \delta W \right) ds = 0 \end{aligned}$$

Quand les dérivées de la variation de la flèche W sont exprimées dans les directions naturelles du bord à l'aide de (.19) et les efforts tranchants introduits par les équations d'équilibre (.7), il vient après usage des formules tensorielles

$$\oint (\bar{M}_n - M_n) \delta \frac{\partial W}{\partial n} ds + (\bar{M}_{nt} - M_{nt}) \frac{\partial}{\partial s} \delta W ds + (T_n - \bar{T}_n) \delta W ds = 0$$

Si la variation δW est connue le long du bord, sa dérivée $\frac{\partial}{\partial s} \delta W$ dans la direction du bord est connue également et n'est pas une grandeur indépendante. Il y a donc lieu d'intégrer le second terme par parties. Il vient ainsi, de façon formelle

$$\left[(\bar{M}_{nt} - M_{nt}) \delta W \right] + \oint (\bar{M}_n - M_n) \delta \frac{\partial W}{\partial n} ds + (K_n - \bar{K}_n) \delta W ds = 0$$

avec un effort tranchant modifié, dit effort tranchant de KIRCHHOFF,

$$K_n = T_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} \quad (.35)$$

Si le bord est une courbe régulière, sans points anguleux, et, si le moment de torsion imposé \bar{M}_{nt} est continu, le terme cyclique

$$\left[(\bar{M}_{nt} - M_{nt}) \delta W \right] = 0$$

En général cependant, le contour est formé d'arcs réguliers séparés par des points anguleux. Soit $W_i = W(s_i)$ le déplacement local en un point anguleux. Le terme en question peut s'écrire en décomposant le contour en ses arcs réguliers

$$\sum_{\text{arcs}} \left[(\bar{M}_{nt} - M_{nt})_{s=s_j-0} \delta W_j - (\bar{M}_{nt} - M_{nt})_{s=s_i+0} \delta W_i \right]$$

Soit, en regroupant les termes appartenant à une même variation de la flèche au niveau d'un point anguleux

$$\sum_i (\bar{Z}_i - \Delta_i M_{nt}) \delta W_i$$

où
$$\bar{Z}_i = \bar{M}_{nt}(s_i + 0) - \bar{M}_{nt}(s_i - 0)$$

est une force de coin et

$$\Delta_i M_{nt} = M_{nt}(s_i + 0) - M_{nt}(s_i - 0) \quad (.36)$$

est la discontinuité subie par le moment de torsion interne par suite du changement d'orientation du contour parcouru dans le sens positif. L'interprétation de cette transformation par intégration par parties est due à KELVIN et TAIT.

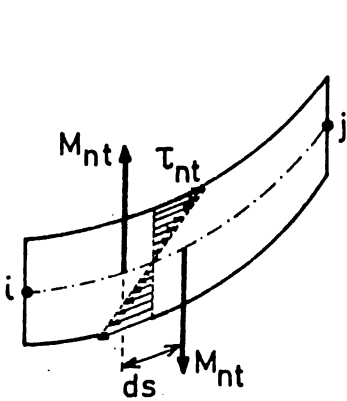


fig. a

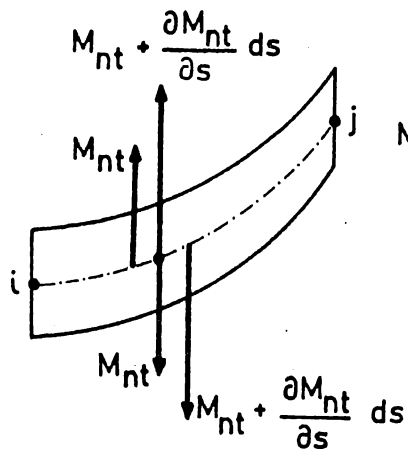


fig. b

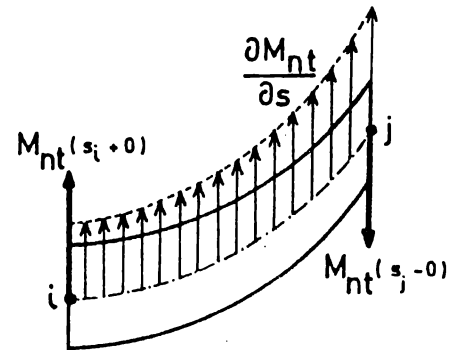


fig. c

Sur une bande de longueur ds d'un arc régulier, les tensions tangentiellles τ_{nt} forment un couple d'intensité $M_{nt} ds$. Ce couple peut toujours au sens de la statique être remplacé par un couple équivalent formé de deux forces verticales d'intensité M_{nt} distantes de ds (figure a). Cette équivalence reste vraie pour les changements de configuration de la plaque impliquant des déformations car le travail virtuel des deux forces est en toute généralité

$$M_{nt} W - M_{nt} \left(W + \frac{\partial W}{\partial s} ds \right) = - M_{nt} \frac{\partial W}{\partial s} ds$$

et, l'hypothèse de KIRCHHOFF ayant la seconde des équations (.29) pour conséquence, ce travail virtuel est aussi celui

$$M_{nt} \alpha_t ds$$

des tensions tangentiellles τ_{nt} .

Le remplacement successif par des couples de forces verticales se traduit finalement (figures b et c) pour un arc régulier par des forces localisées verticales $M_{nt}(s_i + 0)$ et $M_{nt}(s_j - 0)$ aux extrémités de l'arc et une distribution résiduelle d'efforts tranchants d'intensité $\partial M_{nt} / \partial s$ (appelés parfois efforts tranchants de remplacement).

Les conditions aux limites de type statique de la théorie de KIRCHHOFF sont donc

$$M_n = \bar{M}_n \quad (.37)$$

engendrées dans le principe canonique par les variations aux limites $\delta \frac{\partial W}{\partial n}$,

$$K_n = \bar{K}_n \quad (.38)$$

dues aux variations aux limites δW , et

Sur une bande de longueur ds d'un arc régulier, les tensions tangentiellles τ_{nt} forment un couple d'intensité $M_{nt} ds$. Ce couple peut toujours au sens de la statique être remplacé par un couple équivalent formé de deux forces verticales d'intensité M_{nt} distantes de ds (figure a). Cette équivalence reste vraie pour les changements de configuration de la plaque impliquant des déformations car le travail virtuel des deux forces est en toute généralité

$$M_{nt} W - M_{nt} \left(W + \frac{\partial W}{\partial s} ds \right) = - M_{nt} \frac{\partial W}{\partial s} ds$$

et, l'hypothèse de KIRCHHOFF ayant la seconde des équations (.29) pour conséquence, ce travail virtuel est aussi celui

$$M_{nt} \alpha_t ds$$

des tensions tangentiellles τ_{nt} .

Le remplacement successif par des couples de forces verticales se traduit finalement (figures b et c) pour un arc régulier par des forces localisées verticales $M_{nt}(s_i + 0)$ et $M_{nt}(s_j - 0)$ aux extrémités de l'arc et une distribution résiduelle d'efforts tranchants d'intensité $\partial M_{nt} / \partial s$ (appelés parfois efforts tranchants de remplacement).

Les conditions aux limites de type statique de la théorie de KIRCHHOFF sont donc

$$M_n = \bar{M}_n \quad (.37)$$

engendrées dans le principe canonique par les variations aux limites $\delta \frac{\partial W}{\partial n}$,

$$K_n = \bar{K}_n \quad (.38)$$

dues aux variations aux limites δW , et

$$\Delta_i M_{nt} = \bar{Z}_i \quad (.39)$$

due aux variations locales de la flèche au niveau des points anguleux. Les charges imposables sur les bords sont donc en principe constituées de moments de flexion, d'efforts tranchants et de forces concentrées aux points anguleux.

Les conditions de type cinématique qui peuvent être imposées ne portent plus que sur la flèche et sa pente normale.

Le tableau des alternatives se présente comme suit

$$\frac{\partial W}{\partial n} = -\bar{\alpha}_n \quad \text{ou} \quad M_n = \bar{M}_n \quad (.40)$$

$$W = \bar{W} \quad \text{ou} \quad K_n = \bar{K}_n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \Delta_i M_{nt} = \bar{Z}_i \end{array} \right.$$

L'hypothèse de KIRCHHOFF a donc pour effet de restreindre les conditions aux limites admissibles; en particulier il n'est plus possible d'imposer, comme dans les théories précédentes, chacune des résultantes des tractions de surface séparément.

Les conditions homogènes les plus fréquentes sont :

$$\text{le bord libre} \quad M_n = 0 \quad K_n = 0$$

$$\text{le bord simplement appuyé} \quad M_n = 0 \quad W = 0$$

$$\text{le bord encastré} \quad \frac{\partial W}{\partial n} = 0 \quad W = 0$$

En cas de symétrie par rapport à un axe

$$\frac{\partial W}{\partial n} = 0 \quad \text{avec} \quad K_n = 0.$$

L'effort tranchant réel T_n doit être obtenu à partir des équations d'équilibre.

$$2(T_x + iT_y) = \partial(M_x - M_y + 2i M_{xy}) + \bar{\partial} (M_x + M_y)$$

Par transformation tensorielle ceci devient

$$\begin{aligned} 2(T_n + iT_t) &= e^{-i\theta} \left[e^{-i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial n} - i \frac{\partial}{\partial s} \right) e^{2i\theta} (M_n - M_t + 2iM_{nt}) \right. \\ &\quad \left. + e^{i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial n} + i \frac{\partial}{\partial s} \right) (M_n + M_t) \right] \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial n} - i \frac{\partial}{\partial s} \right) (M_n - M_t + 2iM_{nt}) + 2 \dot{\theta} (M_n - M_t + 2iM_{nt}) \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial n} + i \frac{\partial}{\partial s} \right) (M_n + M_t) \end{aligned}$$

soit, en particulier

$$T_n = \frac{\partial M_n}{\partial n} + \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} + \dot{\theta} (M_n - M_t) \quad (.41)$$

Ajoutant l'effort tranchant de remplacement

$$K_n = \frac{\partial M_n}{\partial n} + 2 \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} + \dot{\theta} (M_n - M_t) \quad (.42)$$

On a aussi au départ de (.7) et de (.28)

$$T_x = -D \frac{\partial}{\partial x} v^2 W \quad T_y = -D \frac{\partial}{\partial y} v^2 W \quad (.43)$$

et par conséquent

$$T_n = -D \frac{\partial}{\partial n} v^2 W \quad (.44)$$

Si on y remplace l'opérateur de Laplace par (.32), il vient compte tenu de (.31)

$$K_n = -D \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + \theta \frac{\partial W}{\partial n} + \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} \right) - D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial W}{\partial n} - \theta \frac{\partial W}{\partial s} \right)$$

(.45)

8. Le principe variationnel de KIRCHHOFF

Nous appelons ainsi le principe de variation des déplacements incorporant l'hypothèse de KIRCHHOFF. Avec forces imposées aux bords il s'écrit

$$\frac{1}{2} \iint D \{ (\nabla^2 W)^2 + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] \} dx dy$$

$$- \iint q W dx dy - \sum_i W_i \bar{Z}_i - \int (\bar{K}_n W - \bar{M}_n \frac{\partial W}{\partial n}) ds \quad \min_w$$

(.46)

Le terme dépendant du coefficient de POISSON dans l'énergie de déformation est une divergence et peut donc être transféré aux limites :

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}$$

avec, par exemple,

$$A = \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \qquad B = - \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

de sorte que

$$(1-\nu) D \iint \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] dx dy$$

$$= (1-\nu) D \oint \frac{\partial W}{\partial y} d \frac{\partial W}{\partial x} \quad (.47)$$

Ceci peut encore être mis sous une forme plus symétrique, permettant finalement de passer aux directions locales,

$$\frac{1-\nu}{2} D \oint \frac{\partial W}{\partial y} d \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial x} d \frac{\partial W}{\partial y} =$$

$$\frac{1-\nu}{2} D \oint \frac{\partial W}{\partial s} d \frac{\partial W}{\partial n} - \frac{\partial W}{\partial n} d \frac{\partial W}{\partial s} - \left[\left(\frac{\partial W}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial s} \right)^2 \right] d\theta \quad (.48)$$

Ce qui montre que cette contribution est nulle dans le cas d'un bord complètement encastré.

La recherche de l'équation variationnelle et des conditions aux limites naturelles se fait plus facilement à partir de la transformation (.47) et fournit, tous calculs effectués,

$$\nabla^2 \nabla^2 W = \frac{1}{D} q \quad (.49)$$

comme équation d'Euler, parfois connue sous le nom d'équation de Sophie GERMAIN. Il vient aussi

$$- D \nabla^2 W + (1-\nu) D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial s^2} + \theta \frac{\partial W}{\partial n} \right) = \overline{M}_n \quad (.50)$$

comme condition naturelle résultant de l'annulation du coefficient de la variation $(\partial W / \partial n)$ dans l'intégrale curviligne. C'est l'équation (.37) telle que modifiée par (.30) et (.32).

De même l'annulation du coefficient de la variation δW dans l'intégrale curviligne livre

$$- D \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 W - D (1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial s \partial n} - \dot{\theta} \frac{\partial W}{\partial s} \right) = \bar{K}_n \quad (.51)$$

qui est l'équivalent de (.38) modifiée par (.44) et (.31). Enfin en faisant varier la flèche au niveau des points anguleux il vient l'équivalent de (.39) modifiée par (.31)

$$- D (1-\nu) \Delta_i \left(\frac{\partial^2 W}{\partial s \partial n} - \dot{\theta} \frac{\partial W}{\partial s} \right) = \bar{Z}_i \quad (.52)$$

.9. Structure de la solution des équations des plaques d'épaisseur modérée

L'équation de Sophie GERMAIN gouvernant le déplacement transversal dans la Théorie de KIRCHHOFF pour plaques isotropes, annonce le rôle important qu'y jouent les fonctions bi-harmoniques et donc les fonctions de la variable complexe $\zeta = x + iy$. On peut se demander si l'inclusion des déformations dues aux efforts tranchants, comme elle se présente dans la théorie des plaques d'épaisseur modérée, peut modifier fondamentalement le caractère analytique des solutions.

De fait, si la partie principale de la solution continue de dépendre de fonctions analytiques, une autre partie est gouvernée par un autre opérateur elliptique. Elle permet, quand cela est nécessaire, un ajustement rapide de l'état de tension-déformation sur des distances de l'ordre de l'épaisseur de la plaque, de façon à satisfaire aux 3 conditions aux limites qu'autorise cette théorie, alors que la théorie de KIRCHHOFF ne peut en satisfaire que deux.

Il s'agit d'un "effet de bord" dont nous chercherons à obtenir l'interprétation physique.

Reprenons les équations des plaques d'épaisseur modérée

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = T_x \quad (e.1)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = T_y$$

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = -q \quad (e.2)$$

$$M_x = D \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)$$

$$M_y = D \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} + \nu \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) \quad (c.1)$$

$$M_{xy} = D \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)$$

$$T_x = 2 \text{ Ghn} \left(\alpha + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \quad (c.2)$$

$$T_y = 2 \text{ Ghn} \left(\beta + \frac{\partial W}{\partial y} \right)$$

On peut déjà noter qu'en éliminant les efforts tranchants entre (e.1) et (e.2), puis y substituant les moments tirés de (c.1) on obtient une première équation de NAVIER

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) = - \frac{q}{D} \quad (n.1)$$

Une seconde résulte de la substitution de (c.2) dans (e.2)

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \nabla^2 W = - \frac{q}{2\text{Ghn}} \quad (n.2)$$

Enfin une troisième s'obtient en éliminant W entre les équations (c.2), y substituant les efforts tranchants tirés de (e.1), puis les moments tirés de (c.1). Le résultat s'exprime uniquement en fonction de la grandeur

$$\Omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \quad (t.1)$$

sous forme de l'équation aux dérivées partielles

$$4 \text{ Ghn } \Omega = (1-\nu) D \nabla^2 \Omega$$

ou, après réduction pour D donné par (.14),

$$\nabla^2 \Omega = \frac{3n}{h^2} \Omega \quad (\text{n.3})$$

La signification physique de cette grandeur est simple. Comme

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

est la rotation matérielle autour d'un axe parallèle à Oz, la torsion locale d'une fibre perpendiculaire au feuillet moyen est

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

Multipliant cette équation par la fonction de pondération parabolique

$$\frac{3}{2h^3} \frac{h^2 - z^2}{2}$$

et intégrant sur l'épaisseur, le second membre devient celui de (t.1) moyennant les définitions (.5) et nous avons donc l'interprétation de

$$\Omega = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h \frac{h^2 - z^2}{2} \frac{\partial \omega}{\partial z} dz$$

comme moyenne pondérée de la torsion d'une fibre. Une interprétation semblable est possible dans le cadre des théories de HENCKY ou de REISSNER, où la torsion de la fibre est uniforme.

On voit que ce phénomène de torsion, quand il se produit, donne lieu à des variations importantes sur des distances de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la plaque, car une solution typique de l'équation (n.3) est

$$\Omega = C \exp \left(\lambda \frac{x}{h} + \mu \frac{y}{h} \right) \quad \lambda^2 + \mu^2 = 3n.$$

Par contre les équations de Navier (n.1) et (n.2) donneront des solutions du même ordre de régularité que la distribution de charge transversale q . Il est intéressant de rapprocher de l'équation de Sophie GERMAIN, la combinaison de (n.1) et (n.2)

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D} - \frac{1}{2Ghn} \nabla^2 q \quad (n.4)$$

montrant que la flèche ne sera pas affectée par l'effet de bord. Pour établir la structure de la solution générale, envisageons d'abord le cas où la plaque n'est pas chargée transversalement, c'est-à-dire $q=0$. Satisfaisons à l'équation d'équilibre homogène (e.2) qui en résulte par une fonction de courant ψ

$$T_x = - (1-\nu) D \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad T_y = (1-\nu) D \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (e.3)$$

Ceci, substitué dans (e.1) en même temps que les moments tirés de (c.1), permet de mettre (e.1) sous forme d'équations de CAUCHY-RIEMANN

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \{ (1-\nu)(\Omega-\psi) \} \\ \frac{\partial \beta}{\partial y} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial}{\partial x} \{ (1-\nu)(\Omega-\psi) \} \end{aligned}$$

Nous pouvons donc trouver une fonction analytique $A(\zeta)$ telle que

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} = 2 \left(\frac{dA}{d\zeta} + \overline{\frac{dA}{d\zeta}} \right) \quad (r.1)$$

$$(1-\nu)(\Omega-\psi) = \frac{2}{i} \left(\frac{dA}{d\zeta} - \overline{\frac{dA}{d\zeta}} \right)$$

ou encore

$$\psi = \Omega + \frac{2i}{1-\nu} \left(\frac{dA}{d\zeta} - \overline{\frac{dA}{d\zeta}} \right) \quad (r.2)$$

L'élimination de W entre les équations (c.2) (condition d'intégrabilité) et la substitution de (e.3) fournit d'autre part

$$(1-\nu) D \nabla^2 \psi = 4 G h n \Omega, \text{ ou encore avec } D \text{ remplacé par} \\ (.14)$$

$$\Omega = \frac{h^2}{3n} \nabla^2 \psi \quad (f)$$

La définition (t.1) de la torsion de fibre, les résultats (r.1) et (f) nous permettent maintenant de trouver une expression de l'opérateur complexe

$$\partial = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \text{ appliqué à } \alpha + i\beta$$

$$\partial(\alpha + i\beta) = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + 2i \Omega = 2 \left(\frac{dA}{d\zeta} + \overline{\frac{dA}{d\zeta}} \right) + \frac{2ih^2}{3n} \partial \bar{\psi}$$

Nous servant des lemmes d'intégration développés dans la section 7.1, il vient

$$\alpha + i\beta = A + \zeta \frac{\overline{dA}}{d\zeta} + \frac{2ih^2}{3n} \bar{\psi} + \overline{\frac{dB}{d\zeta}} \quad (d.1)$$

où $B(\zeta)$ est une nouvelle fonction analytique.

Pour intégrer le déplacement transversal nous formons à l'aide des équations (c.2) et (e.3) la combinaison

$$\partial W = - (\alpha - i\beta) - \frac{2ih^2}{3n} \partial \psi \quad (d.2)$$

La substitution du résultat (d.1), après remplacement de i par $-i$, donne

$$\partial W = - \bar{A} - \bar{\zeta} \frac{dA}{d\zeta} - \frac{dB}{d\zeta}$$

dont l'intégrale générale, compte tenu du fait que le résultat doit être réel, est

$$W = - \frac{1}{2} (\zeta \bar{A} + \bar{\zeta} A + B + \bar{B}) = - \operatorname{Re} | \bar{\zeta} A + B | \quad (d.3)$$

Comme on devait s'y attendre, la flèche a la structure type d'une fonction biharmonique, tandis que les rotations α et β auront une partie analytique et une autre dépendant de la torsion transversale des fibres. Pour mettre ceci mieux en évidence dans (d.1), appliquons l'opérateur ∂ à l'équation (r.2)

$$\partial \psi = \partial \Omega + \frac{4i}{1-\nu} \frac{d^2 A}{d\zeta^2}$$

et substituons ceci dans le conjugué de (d.1) qui devient alors

$$\alpha - i\beta = \bar{A} + \bar{\zeta} \frac{dA}{d\zeta} + \frac{dB}{d\zeta} + \frac{8h^2}{3(1-\nu)n} \frac{d^2 A}{d\zeta^2} - \frac{2ih^2}{3n} \partial \Omega \quad (d.4)$$

observons aussi qu'en prenant le Laplacien de l'équation (r.2) on a

$$\nabla^2 \psi = \nabla^2 \Omega$$

si bien que l'équation (f) n'est qu'une forme déguisée de l'équation (n.3) régissant la torsion transversale.

On supprime les déformations dues aux efforts tranchant en faisant tendre n vers l'infini dans ces résultats. Cela montre que dans la théorie de KIRCHHOFF, comme on le vérifie par ailleurs directement, il ne peut y avoir de torsion transversale (il n'y a en fait pas de rotation transversale).

A partir des expressions générales (d.3) et (d.4) des déplacements on déduit successivement pour les tensions

$$\frac{M_x + M_y}{D(1+\nu)} - i(1-\nu)(\psi - \Omega) = 4 \frac{dA}{d\zeta} \quad (m.1)$$

équation qui contient (r.2) comme partie imaginaire,

$$\begin{aligned} \frac{M_x - M_y - 2iM_{xy}}{D(1-\nu)} = \partial(\alpha - i\beta) = 2 \int \frac{d^2 A}{d\zeta^2} + 2 \frac{d^2 B}{d\zeta^2} + \frac{16h^2}{3(1-\nu)n} \frac{d^3 A}{d\zeta^3} \\ - \frac{2ih^2}{3n} \partial\partial\Omega \end{aligned} \quad (m.2)$$

$$\frac{T_x - iT_y}{D(1-\nu)} = -i\partial\psi = -i\partial\Omega + \frac{4}{1-\nu} \frac{d^2 A}{d\zeta^2} \quad (m.3)$$

.10. L'effet de bord.

La structure obtenue pour la solution des équations de la flexion des plaques d'épaisseur modérée sépare la partie dépendant de l'opérateur biharmonique de la partie qui dépend de l'opérateur elliptique gouvernant la torsion transversale.

Il faut observer que cette séparation ne coïncide pas avec une simple superposition d'une solution de KIRCHHOFF et d'une solution

due à la seule torsion transversale, car en faisant tendre n vers l'infini on a bien $\Omega = 0$ en vertu de (n.3) mais on supprime aussi dans le champ des rotations et celui des moments d'autres termes analytiques liés aux déformations par efforts tranchants. Par contre la simple superposition s'applique au champ du déplacement transversal et au champ des efforts tranchants .

Il suffirait d'ailleurs du changement de fonction analytique

$$B = C - \frac{8h^2}{3(1-\nu)n} \frac{dA}{d\zeta}$$

pour structurer la solution générale sous une forme où la superposition d'une solution de KIRCHHOFF et d'un effet de torsion transversale s'applique maintenant aux champs de rotations, moments et efforts tranchants, mais plus au déplacement transversal qui devient

$$W = - \operatorname{Re} \left\{ \bar{\zeta} A + C - \frac{8h^2}{3(1-\nu)n} \frac{dA}{d\zeta} \right\}$$

Les termes aux limites en provenance de la torsion transversale affectent toutes les grandeurs à l'exception de W , si bien qu'il n'est pas possible de séparer le problème de la seule torsion transversale du problème général

$$\alpha_n = - \frac{2h^2}{3n} \frac{\partial \Omega}{\partial s} \quad \alpha_t = \frac{2h^2}{3n} \frac{\partial \Omega}{\partial n}$$

$$M_n = - D(1-\nu) \frac{2h^2}{3n} \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \Omega}{\partial n} - \dot{\theta} \frac{\partial \Omega}{\partial s} \right)$$

$$M_{nt} = D(1-\nu) \frac{h^2}{3n} \left(\frac{\partial^2}{\partial n^2} - \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial n} \right) \Omega$$

$$= D(1-\nu) \left(-\Omega + \frac{2h^2}{3n} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial n^2} \right) = D(1-\nu) \left[\Omega - \frac{2h^2}{3n} \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial n} \right) \Omega \right]$$

$$T_n = - D(1-\nu) \frac{\partial \Omega}{\partial s}$$

La solution générale du problème de KIRCHHOFF s'obtient en faisant $\Omega = 0$ et faisant tendre n vers l'infini. Il y a lieu ici d'opérer le calcul des efforts tranchants de KIRCHHOFF

$$K_x - i K_y = T_x - i T_y + i \partial M_{xy}$$

Or

$$\frac{-M_{xy}}{D(1-\nu)} = \text{Im} \left(\bar{\zeta} \frac{d^2 A}{d\zeta^2} + \frac{d^2 B}{d\zeta^2} \right) = \frac{1}{2i} \left(\bar{\zeta} \frac{d^2 A}{d\zeta^2} + \frac{d^2 B}{d\zeta^2} - \zeta \frac{d^2 \bar{A}}{d\bar{\zeta}^2} - \frac{d^2 \bar{B}}{d\bar{\zeta}^2} \right)$$

et l'application de la règle de dérivation par l'opérateur ∂ donne

$$\frac{K_x - i K_y}{D(1-\nu)} = \frac{4}{1-\nu} \frac{d^2 A}{d\zeta^2} - \bar{\zeta} \frac{d^3 A}{d\zeta^3} + \frac{d^2 \bar{A}}{d\bar{\zeta}^2} - \frac{d^3 B}{d\zeta^3}$$

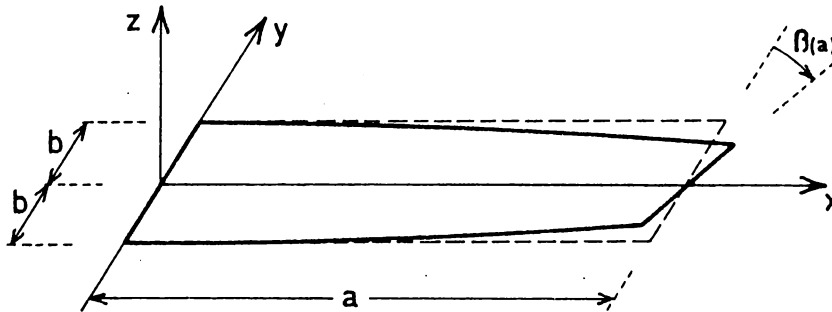
.11. Torsion d'une lame

La structure établie dans la section précédente permet de construire systématiquement des solutions des équations de la théorie des plaques d'épaisseur modérée à partir d'un choix pour les fonctions de variable complexe A et B et du choix d'une solution de l'équation (n.3).

On en déduit les conditions aux limites auxquelles cette solution pourrait correspondre et la difficulté est évidemment d'obtenir, éventuellement par superposition, les conditions réellement désirées.

L'exemple choisi dans cette section pour illustrer la théorie et celui de la section suivante ont l'avantage de la simplicité et permettent une comparaison avec des résultats d'autres théories.

Si en effet une plaque a la forme d'une lame rectangulaire dont les bords $y = \pm b$ sont entièrement libres de tensions appliquées. et si la charge transversale est nulle, la plaque peut aussi être considérée comme une poutre sujette à flexion ou à torsion. La comparaison d'une solution de type plaque peut être faite avec une solution de type Barré de Saint-Venant. Examinons d'abord le problème de la torsion, il correspond aux conditions aux limites



$$\begin{array}{lll}
 M_x = 0 & \beta = 0 & w = 0 \\
 & & \text{pour } x = 0 \\
 M_x = 0 & \beta = \beta(a) & w = -y \beta(a) \\
 & & \text{pour } x = a
 \end{array}$$

En effet dans une torsion de de Saint-Venant les σ_x des fibres longitudinales sont nulles et par conséquent on s'attendra à avoir

$$M_x = 0$$

tandis que les sections tournent dans leur plan $x = \text{cte}$ comme si elles étaient rigides, ce qui permet de prévoir une solution où

$$\beta = x\theta \quad W = -xy\theta \quad \text{avec } \theta = \frac{\beta(a)}{a}$$

De plus on sait qu'entre fibres longitudinales (parallèles à Ox) il n'y a que des actions tangentielles représentées ici par τ_{xy} et τ_{xz} , ou plutôt par leur résultantes M_{xy} et T_z , tandis que $\sigma_z \equiv 0$,

$$\tau_{yz} \equiv 0 \rightarrow T_y \equiv 0$$

$$\sigma_y \equiv 0 \rightarrow M_y \equiv 0$$

Les bords latéraux $y = \pm b$ seront donc libres de tensions à condition qu'on y ait encore

$$M_{xy} = 0 \quad \text{pour } y = \pm b.$$

Les équations d'équilibre (e.1) et (e.2) se réduisent ainsi à

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = T_x \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial T_x}{\partial x} = 0$$

et on voit que T_x et M_{xy} ne dépendent que de la variable y . Les équations de compatibilité - comportement donnent, elles,

$$0 = D \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) = 0$$

$$0 = D \nu \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0$$

$$M_{xy} = D \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \theta \right)$$

et α ne dépend non plus que de y ainsi que M_{xy} .

On notera enfin qu'une des conditions de KIRCHHOFF est identiquement vérifiée

$$\beta + \frac{\partial W}{\partial y} \equiv 0$$

ainsi que la seconde des équations (c.2), tandis que la première de ces équations livre

$$T_x = 2 n G h (\alpha - y\theta)$$

On a donc

$$T_x = \frac{dM_{xy}}{dy} = D \frac{1-\nu}{2} \frac{d^2\alpha}{dy^2} = 2nGh (\alpha - y\theta)$$

soit, après réduction, l'équation différentielle

$$\frac{d^2\alpha}{dy^2} - \frac{3n}{h^2} \alpha = - \frac{3n}{h^2} y \theta$$

dont la solution de parité appropriée en y est

$$\alpha = \theta y + C \sinh \sqrt{3n} \frac{y}{h}$$

On en déduit

$$M_{xy} = D \frac{1-\nu}{2} \left(2\theta + \frac{\sqrt{3n}}{h} C \cosh \sqrt{3n} \frac{y}{h} \right)$$

et détermine la constante C par la condition que ce moment de torsion soit nul pour $y = \frac{1}{2} b$. D'où finalement

$$M_{xy} = D(1-\nu) \left(- - \frac{\cosh \sqrt{3n} \frac{y}{h}}{\cosh \sqrt{3n} \frac{b}{h}} \right) \theta$$

$$T_x = - D (1-\nu) \frac{\sqrt{3n}}{h} \frac{\sinh \sqrt{3n} \frac{y}{h}}{\cosh \sqrt{3n} \frac{b}{h}} \theta$$

$$\alpha = \left(y - \frac{2h}{\sqrt{3n}} \frac{\sinh \sqrt{3n} \frac{y}{h}}{\cosh \sqrt{3n} \frac{b}{h}} \right) \theta$$

le dernier résultat représente en fait le gauchissement de torsion d'une section. On peut observer que la torsion transversale des fibres

$$\Omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) = \frac{\cosh \sqrt{3n} \frac{y}{h}}{\cosh \sqrt{3n} \frac{b}{h}} \theta$$

est bien, si $b \gg h$, concentrée au voisinage des bords $y = \pm b$ où elle atteint en définitive la même valeur que la torsion longitudinale.

La répartition des tensions tangentielles dans une section $x = \text{cte}$ est, en adoptant la théorie de flexion de plaques respectant l'équilibre, donnée par

$$\tau_{xz} = \frac{h^2 - z^2}{2} \frac{3}{2h^3} T_x \quad \tau_{xy} = \frac{3}{2h^3} z M_{xy}$$

et, comme on peut le vérifier, dépend d'une fonction de torsion

$$\tau_{xz} = -G \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \tau_{xy} = G \theta \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

avec

$$\theta = (h^2 - z^2) \left(\frac{\cosh \sqrt{3n} \frac{y}{h}}{\cosh \sqrt{3n} \frac{b}{h}} - 1 \right) \quad n = \frac{5}{6}$$

La comparaison, ou le contrôle, de ce résultat avec la torsion de Barré de Saint Venant est maintenant possible.

Si à l'aide du principe

$$\iint \left\{ \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + 4 \theta \right\} dy dz \quad \text{minimum}$$

parmi les fonctions de torsion nulles le long des bords $y = \pm b$ et $z = \pm h$ de la section, on cherche une approximation variationnelle du type

$$\theta = (h^2 - z^2) g(y) \quad \text{avec } g(\pm b) = 0$$

il vient exactement le même résultat.

Il est par contre plus délicat de le justifier comme approximation pour $h \ll b$ de la solution exacte trouvée à la section .18.E. pour la torsion d'une barre de section rectangulaire.

Le coefficient T de raideur de torsion de la lame, qui intervient dans la relation Couple-Torsion

$$C = G J \theta$$

peut être calculé soit par la relation classique,

$$J = 2 \iint \theta dy dz$$

soit par calcul direct du couple

$$C = \int_{-b}^b (M_{xy} - y T_x) dy.$$

On trouve

$$J = \frac{1}{3} (2b)(2h)^3 \left(1 - \frac{\tanh \mu}{\mu}\right) \text{ où } \mu = \sqrt{3n} \frac{b}{h}$$

La solution de KIRCHHOFF du même problème est donnée par

$$\alpha = \theta y \quad \beta = \theta x \quad W = -\theta xy$$

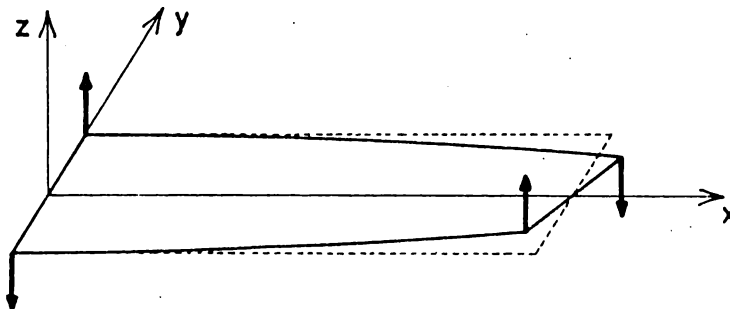
$$M_x \equiv 0 \quad M_y \equiv 0 \quad M_{xy} = D(1-\nu)\theta$$

$$T_x \equiv 0 \quad T_y \equiv 0$$

de sorte que, mais c'est un cas exceptionnel, il suffit de supprimer l'effet de la torsion transversale dans la solution précédente. La condition de bord libre en $y = \pm b$ n'est plus satisfaite qu'au sens de KIRCHHOFF par

$$K_y = T_y - \frac{dM_{xy}}{dy} = 0$$

La sollicitation se ramène en définitive à la présence de quatre forces de coin d'intensité $2D(1-\nu)\theta$



et la raideur de torsion, légèrement relevée par l'imposition de la deuxième contrainte de KIRCHHOFF

$$\alpha + \frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

correspond maintenant à l'approximation classique

$$J = \frac{1}{3} (2b) (2h)^3.$$

.12. Flexion de de SAINT-VENANT d'une lame

Avec les mêmes hypothèses : $M_y \equiv 0$ et $T_y \equiv 0$, provenant des hypothèses $\sigma_y \equiv 0$ et $\tau_{xy} \equiv 0$ de la théorie de BARRE de SAINT-VENANT, et $q = 0$, les équations d'équilibre (e.1) et (e.2) montrent que T_x et M_{xy} ne dépendent toujours que de y , tandis que

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = T_x - \frac{dM_{xy}}{dy} \quad (\text{f.1})$$

Eliminant W entre les équations (c.2), ici réduites à

$$\beta + \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \quad (\text{f.2})$$

$$\alpha + \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{2nGh} T_x \quad (\text{f.3})$$

il vient

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 2 \Omega = - \frac{1}{2nGh} \frac{dT_x}{dy} \quad (\text{f.4})$$

montrant que la torsion transversale n'est toujours fonction que de y .

Enfin les équations (c.1) sont réduites à

$$M_x = D(1-v^2) \frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad (f.5)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} = -v \frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad (f.6)$$

$$M_{xy} = D \frac{1-v}{2} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \quad (f.7)$$

Des quatre dernières équations on tire

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{M_x}{D(1-v^2)} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{M_{xy}}{D(1-v)} + \frac{1}{4nGh} \frac{dT_x}{dy}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{M_{xy}}{D(1-v)} - \frac{1}{4nGh} \frac{dT_x}{dy} \quad \frac{\partial \beta}{\partial y} = -v \frac{M_x}{D(1-v^2)}$$

Des équations du type BELTRAMI-MICHELL provenant alors de l'élimination de α et β , l'une $\frac{\partial M_x}{\partial y} = 0$ montre que M_x dépend de x seulement ; l'autre

$$-\frac{v}{D(1-v^2)} \frac{dM_x}{dx} = \frac{1}{D(1-v)} \frac{dM_{xy}}{dy} - \frac{1}{4nGh} \frac{d^2 T_x}{dy^2}$$

peut être combinée avec (f.1) pour l'élimination du moment de torsion M_{xy} . Il vient

$$\frac{1}{1+v} \frac{dM_x}{dx} = T_x - \frac{h^2}{3n} \frac{d^2 T_x}{dy^2}$$

et les deux membres, dont l'un ne dépend que de x et l'autre de y peuvent être égaux à une constante commune c .

Dès lors

$$M_x = (1+\nu) c (x - a)$$

la constante d'intégration étant choisie de façon à annuler le moment de flexion dans la section terminale $x=a$, et

$$T_x = c + A \cos h \sqrt{3n} \frac{y}{h}$$

le second terme respectant la parité en y du premier.

Par (f.1) il devient possible d'intégrer M_{xy}

$$M_{xy} = -\nu c y + \frac{h}{\sqrt{3n}} A \sin h \sqrt{3n} \frac{y}{h}$$

la constante d'intégration étant de nouveau fixée (nulle) par le type de parité requis. Pour que ce moment soit nul en $y \pm b$ il faut

$$\frac{h}{\sqrt{3n}} A \sin h \sqrt{3n} \frac{b}{h} = \nu c b$$

D'autre part, on peut exprimer l'intensité de la solution en fonction de l'effort tranchant vertical total

$$V_x = \int_{-b}^b T_x dy = 2bc + 2A \frac{h}{\sqrt{3n}} \sinh \sqrt{3n} \frac{b}{h} = (1+\nu)2cb$$

Il vient ainsi pour le champ des tensions

$$T_x = \frac{V_x}{2(1+\nu)b} \left(1 + \nu \sqrt{3n} \frac{b}{h} \frac{\cosh \sqrt{3n} \frac{y}{h}}{\sinh \sqrt{3n} \frac{b}{h}} \right)$$

$$M_x = \frac{V_x}{2b} (x-a)$$

$$M_{xy} = -\nu \frac{V_x}{2(1+\nu)b} \left(y - b \frac{\sinh \sqrt{3n} \frac{y}{h}}{\sinh \sqrt{3n} \frac{b}{h}} \right)$$

et pour le champ des rotations

$$\beta = - \frac{\nu}{D(1-\nu^2)} \frac{\nu x}{2b} y(x-a) = \frac{-3\nu}{2Eh^3} \frac{\nu x}{2b} y(x-a)$$

$$\alpha = \frac{3}{2Eh^3} \frac{\nu x}{2b} \left\{ \frac{x^2}{2} - ax + \nu \left(-\frac{y^2}{2} + \frac{2bh}{\sqrt{3n}} \frac{\cosh \sqrt{3n} \frac{y}{h}}{\sinh \sqrt{3n} \frac{b}{h}} + k \right) \right\}$$

où la constante k peut encore être fixée par une condition de pseudo-encastrement dans la section $x=0$

$$\int_{-b}^b \alpha dy = 0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{6} b^2 - \frac{2h^2}{3n}$$

Enfin le déplacement transversal est

$$W = \frac{3}{2Eh^3} \frac{\nu x}{2b} \left\{ -\frac{x^3}{6} + a \frac{x^2}{2} + (1+\nu) \frac{2h^2}{3n} x \right. \\ \left. + \nu \left(-\frac{y^2}{2} (x-a) - \frac{b^2}{6} x \right) + c \right\}$$

où la constante de translation verticale c reste à déterminer, par une condition de pseudo-encastrement dans la section $x=0$ par exemple.

On y remarquera la courbure transversale (anticlastique) due à un effet de POISSON et le terme contenant n, responsable de la flèche due à la déformation par effort tranchant.

Si le problème est examiné du point de vue des fonctions de flexion, on peut constater que les tensions tangentielles peuvent être exprimées sous la forme

$$\tau_{xz} = \frac{3V}{4bh^3} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{3V}{4bh^3} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)$$

où la fonction de flexion principale

$$\phi = \frac{1}{6} (-z^3 + 3h^2z)$$

correspond à celle de la barre de section rectangulaire de la section .18.H, tandis que la fonction secondaire des effets de POISSON

$$\Psi = \frac{h^2 - z^2}{2} \left(y - b \frac{\sinh \sqrt{3n} \frac{y}{h}}{\sinh \sqrt{3n} \frac{b}{h}} \right)$$

est une approximation variationnelle du type

$$\Psi = (h^2 - z^2) g(y) \quad g(\pm b) = 0$$

rendant minimum la fonctionnelle

$$\int \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 - 2y\Psi \right] dy dz$$

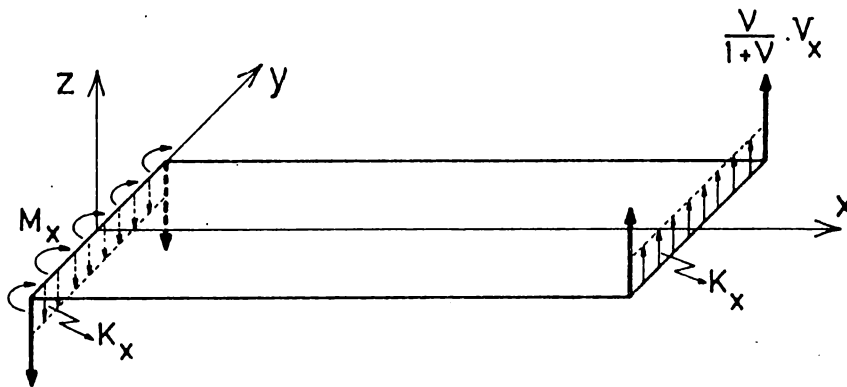
parmi les fonctions prenant une valeur nulle sur les bords.

En faisant tendre n vers l'infini on trouve le problème de KIRCHHOFF associé dans lequel non seulement l'effet de bord est supprimé mais un terme de W , lié à la flèche due à la déformation par effort tranchant disparaît aussi. Le moment de torsion M_{xy} n'est plus nul sur les bords $y = \pm b$ mais bien l'effort tranchant K_y de KIRCHHOFF. La solution correspond finalement au problème de la flexion de KIRCHHOFF de la plaque soumise à une distribution uniforme d'effort tranchant de KIRCHHOFF

$$K_x = T_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = \frac{V_x}{2b} \frac{1-\nu}{1+\nu}$$

des forces de coin additionnelles d'intensité $\frac{\nu}{1+\nu} V_x$, et en $x = 0$ à une distribution uniforme de moments de flexion

$$M_x = \frac{-aV_x}{2b}$$



.13. Solutions particulières pour charge transversale

Si l'on dispose d'une solution particulière des équations de la flexion des plaques qui tient compte de la présence d'une charge transversale $q(x,y)$, sans toutefois satisfaire les conditions aux limites, le problème peut être ramené à celui d'une solution complémentaire sans charges avec conditions aux limites modifiées. Attribuant l'indice zéro à la solution particulière, la solution complémentaire doit vérifier

$$\alpha_n = \bar{\alpha}_n - \alpha_{on} \quad \text{ou} \quad M_n = \bar{M}_n - M_{on}$$

$$\alpha_t = \bar{\alpha}_t - \alpha_{ot} \quad \text{ou} \quad M_{nt} = \bar{M}_{nt} - M_{ont}$$

$$W = \bar{W} - W_o \quad \text{ou} \quad T_n = \bar{T}_n - T_{on}$$

pour les alternatives de la théorie des plaques d'épaisseur modérée et

$$\frac{\partial W}{\partial n} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial n} - \frac{\partial W_o}{\partial n} \quad \text{ou} \quad M_n = \bar{M}_n - M_{on}$$

$$W = \bar{W} - W_o \quad \text{ou} \quad T_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} = \bar{K}_n - T_{on} - \frac{\partial M_{ont}}{\partial s}$$

$$\Delta_i M_{nt} = \bar{Z}_i - \Delta_i M_{nto}$$

pour la théorie de KIRCHHOFF.

La recherche d'une solution particulière peut être menée comme suit, lorsque la distribution de la charge est simple, en particulier polynomiale, ce qui couvre un grand nombre de cas pratiques : on recherche une solution particulière des équations de POISSON successives

$$\nabla^2 \phi = q(x, y)$$

$$\nabla^2 \lambda = (1-\nu) \phi$$

le champ de déplacements

$$\alpha = - \frac{1}{D(1-\nu)} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \quad \beta = - \frac{1}{D(1-\nu)} \frac{\partial \lambda}{\partial y}$$

$$W = - \frac{1}{2nGh} \phi + \frac{1}{D(1-\nu)} \lambda$$

et le champ de moments et efforts tranchants

$$M_x = -\phi + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} \quad M_y = -\phi + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} \quad M_{xy} = -\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y}$$

$$T_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad T_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

vérifient alors les équations générales de la théorie des plaques d'épaisseur modérée. Aux limites ils donnent les contributions

$$\alpha_{on} = -\frac{1}{D(1-\nu)} \frac{\partial \lambda}{\partial n} \quad \alpha_{ot} = -\frac{1}{D(1-\nu)} \frac{\partial \lambda}{\partial s}$$

$$W_o = -\frac{1}{2nGh} \phi + \frac{1}{D(1-\nu)} \lambda$$

$$M_{on} = -\frac{1+\nu}{2} \phi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial n^2} + \dot{\theta} \frac{\partial \lambda}{\partial n} \right)$$

$$= -\phi + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial s^2} + \dot{\theta} \frac{\partial \lambda}{\partial n}$$

$$M_{ont} = -\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \lambda}{\partial n} + \frac{1}{2} \dot{\theta} \frac{\partial \lambda}{\partial s}$$

$$T_{on} = -\frac{\partial \phi}{\partial n}$$

On observera que dans cette solution particulière la torsion transversale est nulle. En y faisant tendre n vers l'infini on trouve la solution particulière correspondante pour la théorie de KIRCHHOFF.

.14. Flexion des plaques en coordonnées polaires

A partir de transformations tensorielles

$$\alpha_r + i\alpha_\theta = e^{-i\theta}(\alpha + i\beta)$$

$$M_r + M_\theta = M_x + M_y$$

$$M_r - M_\theta - 2i M_{r\theta} = e^{2i\theta} (M_x - M_y - 2iM_{xy})$$

$$T_r - iT_\theta = e^{i\theta}(T_x - iT_y)$$

$$\partial = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} - i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

analogues à celles utilisées précédemment pour le traitement des conditions aux limites dans les directions naturelles, la fonctionnelle du principe variationnel canonique prend, en coordonnées polaires, la forme suivante

$$\int \left[M_r \frac{\partial \alpha_r}{\partial r} + M_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \alpha_\theta}{\partial \theta} + \frac{\alpha_r}{r} \right) + M_{r\theta} \left(\frac{\partial \alpha_\theta}{\partial r} - \frac{\alpha_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha_r}{\partial \theta} \right) \right. \\ \left. + T_r \left(\alpha_r + \frac{\partial W}{\partial r} \right) + T_\theta \left(\alpha_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \right] r dr d\theta \\ - \frac{1}{2D(1-\nu^2)} \int \left[(M_r + M_\theta)^2 + 2(1+\nu)(M_{r\theta}^2 - M_r M_\theta) \right] r dr d\theta \\ - \frac{1}{4nGh} \int (T_r^2 + T_\theta^2) r dr d\theta - \int qW r dr d\theta \\ - \oint (\bar{M}_r \alpha_r + \bar{M}_{r\theta} \alpha_\theta + \bar{T}_r W) r d\theta$$

Les équations variationnelles associées aux déplacements α_r , α_θ et W sont les équations d'équilibre

$$\frac{\partial}{\partial r} (r M_r) - M_\theta + \frac{\partial}{\partial \theta} M_{r\theta} = r T_r$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r M_{r\theta}) + M_{r\theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} M_\theta = r T_\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r T_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} T_\theta = - r q$$

Les équations de compatibilité - comportement sont les équations variationnelles des moments et efforts tranchants. On trouve

$$M_r = D \left(\frac{\partial \alpha_r}{\partial r} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha_\theta}{\partial \theta} + \nu \frac{\alpha_r}{r} \right)$$

$$M_\theta = D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \alpha_\theta}{\partial \theta} + \frac{\alpha_r}{r} + \nu \frac{\partial \alpha_r}{\partial r} \right)$$

$$M_{r\theta} = D \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \alpha_\theta}{\partial r} - \frac{\alpha_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha_r}{\partial \theta} \right)$$

$$T_r = 2 n G h \left(\alpha_r + \frac{\partial W}{\partial r} \right)$$

$$T_\theta = 2 n G h \left(\alpha_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)$$

La solution générale de ces équations est immédiatement déductible de la solution générale en coordonnées cartésiennes

$$W = - \operatorname{Re} \{ \bar{\zeta} A + B \}$$

$$\alpha_r - i \alpha_\theta = e^{i\theta} \left(\bar{A} + \bar{\zeta} \frac{dA}{d\zeta} + \frac{dB}{d\zeta} + \frac{8h^2}{3(1-\nu)n} \frac{d^2 A}{d\zeta^2} \right) - \frac{2ih^2}{3n} \left(\frac{\partial}{\partial r} - i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \Omega$$

$$\frac{M_r + M_\theta}{D(1+\nu)} - i(1-\nu)(\psi - \Omega) = 4 \frac{dA}{d\zeta}$$

$$\frac{M_r - M_\theta - 2i M_{r\theta}}{D(1-\nu)} = e^{2i\theta} \left(2 \frac{d^2 A}{d\zeta^2} + 2 \frac{d^2 B}{d\zeta^2} + \frac{16h^2}{3(1-\nu)n} \frac{d^3 A}{d\zeta^3} \right)$$

$$- \frac{2h^2}{3n} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta \partial r} + i \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta^2} \right) \right)$$

$$\frac{T_r - i T_\theta}{D(1-\nu)} e^{i\theta} \frac{4}{1-\nu} \frac{d^2 A}{d\zeta^2} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + i \frac{\partial}{\partial r} \right) \Omega$$

. 15. Problèmes de flexion axisymétriques

Examinons le cas particulier des solutions indépendantes de l'angle polaire θ . Par symétrie on aura

$$T_\theta = 0 \quad M_{r\theta} = 0 \quad \alpha_\theta = 0$$

et les équations de la théorie se réduisent à

$$\frac{d}{dr} (r M_r) - M_\theta = r T_r \quad \frac{d}{dr} (r T_r) = - r q(r)$$

$$M_r = D \left(\frac{d\alpha_r}{dr} + \nu \frac{\alpha_r}{r} \right)$$

$$T_r = 2nGh \left(\alpha_r + \frac{dW}{dr} \right)$$

$$M_\theta = D \left(\frac{\alpha_r}{r} + \nu \frac{d\alpha_r}{dr} \right)$$

Il ne sera pas question d'effet de bord car, par suite de la symétrie,

$$2 \Omega = \frac{\partial \alpha_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha_r}{\partial \theta} + \frac{\alpha_\theta}{r} = 0$$

En l'absence de charge transversale ($q(r)=0$) l'intégration élémentaire fournit une solution contenant quatre constantes arbitraires a, b, c, e et un paramètre R de non dimensionalisation du rayon :

$$\frac{T_r}{D} = \frac{4a}{r}$$

$$\frac{M_r}{D} = 2a(1+\nu) \ln \frac{r}{R} + (1-\nu)a + (1+\nu)b - (1-\nu)\frac{c}{r^2}$$

$$\frac{M_\theta}{E} = 2a(1+\nu) \ln \frac{r}{R} - (1-\nu)a + (1+\nu)b + (1-\nu)\frac{c}{r^2}$$

$$\alpha_r = 2ar \ln \frac{r}{R} - ar + br + \frac{c}{r}$$

$$W = \frac{8ah^2}{3(1-\nu)n} \ln \frac{r}{R} - ar^2 \ln \frac{r}{R} + ar^2 - \frac{b}{2}r^2 - c \ln \frac{r}{R} + e$$

Plaque annulaire, simplement appuyée pour $r = R$ et chargée pour $r = \rho < R$ par un effort tranchant $T_r = T$

Pour les conditions aux limites

$$W = 0 \quad \text{et} \quad M_r = 0 \quad \text{en } r = R$$

$$T_r = T \quad \text{et} \quad M_r = 0 \quad \text{en } r = \rho$$

de ce problème, les valeurs trouvées pour les constantes sont :

$$a = \frac{T\rho}{4D} \quad e = \frac{b}{2}R^2 - aR^2$$

$$(1+\nu)b = - (1-\nu)a - \frac{\rho^2}{R^2 - \rho^2} 2a(1+\nu) \ln \frac{R}{\rho}$$

$$(1-\nu)c = - \frac{\rho^2 R^2}{R^2 - \rho^2} 2a(1+\nu) \ln \frac{R}{\rho}$$

La force transversale totale appliquée le long du bord intérieur est, si comptée positivement dans le sens de Oz,

$$Q = - 2\pi T\rho$$

Le cas de la charge concentrée à l'origine que l'on obtiendrait en faisant

$$\rho \rightarrow 0 \quad T \rightarrow \infty \quad \text{avec } \lim_{\rho \rightarrow 0} T\rho = - \frac{Q}{2\pi}$$

offre ici peu d'intérêt car on trouve $\lim_{r \rightarrow 0} \alpha_r = \infty$

et cette solution ne répond pas au problème de la plaque pleine, simplement appuyée le long du bord $r = R$, et chargée en son centre. Celui-ci doit évidemment correspondre au cas limite du problème avec $\alpha_r = 0$ au lieu de $M_r = 0$ le long du bord intérieur :

Plaque annulaire simplement appuyée pour $r = R$ et encastrée sur un piston de rayon ρ .

Les constantes correspondant aux conditions aux limites

$$W = 0 \quad \text{et} \quad M_r = 0 \quad \text{pour} \quad r = R$$

$$T_r = T \quad \text{et} \quad \alpha_r = 0 \quad \text{pour} \quad r = \rho$$

sont données par

$$a = \frac{T\rho}{4D} = - \frac{Q}{8\pi D} \quad e = \frac{b}{2} R^2 - a R^2$$

$$\left(\frac{1+\nu}{1-\nu} + \frac{\rho^2}{R^2} \right) \frac{b}{a} = \frac{\rho^2}{R^2} (1+2 \ln \frac{R}{\rho}) - 1$$

$$\left(\frac{1+\nu}{1-\nu} + \frac{\rho^2}{R^2}\right) \frac{c}{a} = \frac{2\rho^2}{1-\nu} \left(1 + (1+\nu) \ln \frac{R}{\rho}\right)$$

Le passage à la limite fournit ici

$$\lim \frac{b}{a} = -\frac{1-\nu}{1+\nu} \quad \lim \frac{c}{a} = 0 \quad \text{et}$$

$$\frac{8\pi D}{Q} W = \left(r^2 - \frac{8h^2}{3(1-\nu)n}\right) \ln \frac{r}{R} + \frac{3+\nu}{2(1+\nu)} (R^2 - r^2)$$

$$\frac{4\pi D}{Q} \alpha_r = -r \ln \frac{r}{R} + \frac{r}{1+\nu}$$

$$T_r = -\frac{Q}{2\pi} \frac{1}{r}$$

$$M_r = -\frac{Q}{4\pi} (1+\nu) \ln \frac{r}{R}$$

$$M_\theta = -\frac{Q}{4\pi} \left((1+\nu) \ln \frac{r}{R} - 1 + \nu \right)$$

Les tensions présentent, comme il fallait s'y attendre, une singularité à l'origine, logarithmique pour les moments mais en r^{-1} pour l'effort tranchant. Il n'est donc pas étonnant que si l'on prend en considération les déformées dues aux efforts tranchants, la flèche présente également une singularité logarithmique. Elle disparaît en théorie de KIRCHHOFF ($n \rightarrow \infty$) où la flèche sous la charge prend la valeur finie

$$\frac{Q}{8\pi D} \frac{3+\nu}{2(1+\nu)} R^2$$

Les fonctions analytiques du problème s'avèrent être les suivantes

$$A = \frac{Q}{8\pi D} \left(-\zeta \left(\ln \frac{\zeta}{R} - 1 \right) + \frac{1-\nu}{2(1+\nu)} \zeta \right)$$

$$B = \frac{Q}{8\pi D} \left(\frac{8h^2}{3(1-\nu)n} \ln \frac{\zeta}{R} - \frac{3+\nu}{2(1+\nu)} R^2 \right)$$

et contiennent toutes deux une singularité de type logarithmique, celle de B provenant uniquement de la prise en compte des déformations par efforts tranchants. Par contre la fonction analytique

$$C = B + \frac{8h^2}{3(1-\nu)n} \frac{dA}{n\zeta}$$

introduite à la section .10 reste régulière.