

**B. FRAEIJIS de VEUBEKE**

(V<sup>e</sup> E. M.)

---

# **L'Aérodynamique des Planeurs**

---

*Extrait de la Revue des Élèves des Écoles Spéciales de l'Université  
de Louvain. — II<sup>e</sup> et IV<sup>e</sup> Trimestre 1939.*

---

Université de L  
Sciences Appliquées et  
Chemin des Chevreuils, L  
B-4000 LIEGE

LOUVAIN

Établissements FR. CEUTERICK  
rue Vital Decoster, 66

---

1939

# L'Aérodynamique des Planeurs

---

Les récentes performances obtenues avec ces fragiles engins aux envergures démesurées que sont les planeurs modernes : 652 km. en ligne droite par le Russe Rastorgoueff, 36 h. 35 m. avec retour au point de départ par Kurt Schmidt et 6.687 m. au-dessus du point de départ par Walter Drechsel sur Goppingen 3 « Minimoa », ont mis de plus en plus l'aérodynamique pure à l'ordre du jour.

Cette science reste une des plus rebelles à se laisser enfermer dans un appareillage mathématique; cependant, malgré le grand nombre d'hypothèses simplificatrices introduites, les indications théoriques légèrement retouchées par celles du « Tunnel aérodynamique » se sont révélées des bases sûres pour le dessin des appareils.

## **Dessin théorique de la voilure.**

La théorie restée classique dans ce domaine est celle de Prandtl, la voici dans ses grandes lignes.

On suppose d'abord le fluide parfait, c'est-à-dire la pression sur une section  $dS$  sans composante tangentielle, on démontre alors aisément que la grandeur de la pression en un point est indépendante de l'orientation de la section.

Une deuxième hypothèse est celle de l'incompressibilité de l'air, si elle est admissible pour les vitesses qui nous occupent elle l'est à peine pour celle récemment atteinte par le monoplan de record « Messerschmitt » (209 mètres/sec. ou 755,110 km / heure); quant aux vitesses plus proches encore de celle du son, l'apparition d'ondes de choc nécessite une étude de l'écoulement sur de nouvelles bases.

$\rho$  désignant la masse spécifique de l'air, nous aurons donc :

$$\rho = \text{Cte} \quad \text{et} \quad \text{div } \vec{V} = 0 \quad (1)$$

Les équations classiques du mouvement s'écrivent avec des forces de masse de résultante  $\vec{F}$  dont nous indiquerons les composantes par X, Y, Z :

$$X = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{du}{dt}, \quad Y = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{dv}{dt}, \quad Z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{dw}{dt} \quad (2)$$

$p$  étant la pression, et  $u, v, w$  les composantes de la vitesse. Écrivant alors avec Euler :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{dv}{dt} = \dots \quad \frac{dw}{dt} = \dots$$

car  $u, v$  et  $w$  sont aussi fonctions de  $t$  à travers les variables  $x, y$  et  $z$ , et introduisant le vecteur rotation instantanée de la particule fluide ou tourbillon de la vitesse :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{curl } \vec{V} \quad (1) \quad (3)$$

On peut ramener les 3 équations algébriques à l'équation vectorielle unique :

$$\vec{F} = 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \quad (2) \quad (4)$$

Un cas fréquent est celui où les forces de masse dérivent d'un potentiel U, dans ce cas les équations (2) montrent

(1) Rappelons que les composants de curl  $\vec{V}$  sont :

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

et que ce vecteur est axial.

(2) Le produit vectoriel est défini de façon que pour  $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C}$ ,  $\vec{A}, \vec{B}$  et  $\vec{C}$  pris dans l'ordre reproduisent le sens du Trièdre de référence.

Les composantes se tirent alors de la matrice :

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

qu'il existe un potentiel des accélérations  $J$  :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial J}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial J}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial J}{\partial z}$$

avec 
$$J = U - \frac{p}{\rho}$$

Comme nous ne considérerons que des mouvements permanents, le terme  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$  tombe dans l'équation (4) et celle-ci devient finalement :

$$2 \vec{\Omega} \wedge \vec{V} + \text{grad} \left( \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U \right) = 0 \quad (5)$$

Dans la région où le mouvement est irrotationnel ( $\vec{\Omega} = 0$ ) elle se réduit à :

$$\text{grad} \left( \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U = C \quad (6)$$

De toute façon, si nous projetons l'équation (5) le long d'un tube de courant élémentaire (fig. 1), le produit vectoriel  $2 \vec{\Omega} \wedge \vec{V}$  perpendiculaire à la vitesse, aura donc une projection nulle

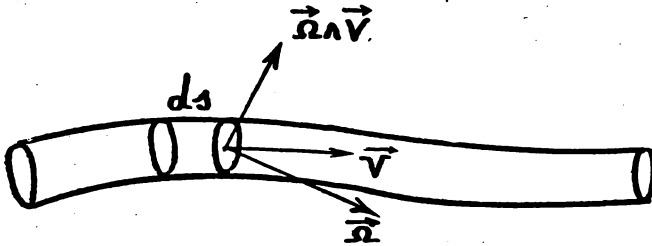


FIG. 1

et le gradient sera pris dans la direction de la vitesse, nous aurons partout le long du tube :

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U \right) = 0 \quad \text{c. à d.} \quad \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U = C_1. \quad (7)$$

Équation classique de Bernouilli dont la seule différence d'avec (6) est que la constante  $C_1$  peut varier dans ce cas avec le tube élémentaire considéré.

Considérons maintenant une aile sustentatrice autour de laquelle l'air s'écoule en mouvement permanent avec une vitesse  $\vec{V}_\infty$  à l'infini, normale à l'envergure (fig. 2).

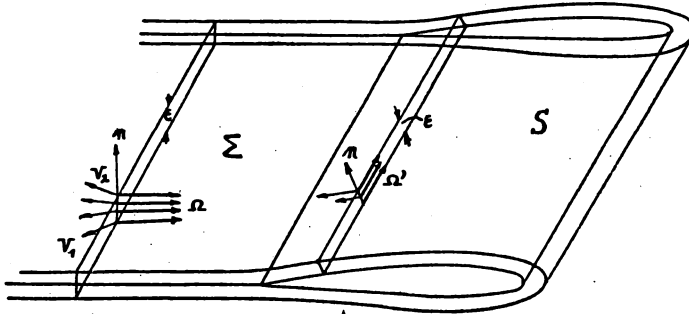


FIG. 2

Les filets supérieurs et inférieurs se rejoignent le long d'une nappe  $\Sigma$  se détachant du bord de fuite de l'aile. Comme tous ces filets viennent de l'infini amont, où l'équation (6) est réalisée, la constante de l'équation (7) sera la même pour tous les filets. Une condition physique nécessaire est la continuité de la pression à travers  $\Sigma$ , l'équation (7) montre alors que si nous négligeons la variation de  $U$  (fonction de force de la pesanteur dans ce cas), la vitesse d'un filet supérieur tangent à  $\Sigma$  en un de ses points sera égale en valeur absolue à celle du filet inférieur tangent au même point, mais ces vitesses ne coïncideront en général pas en direction. Cette discontinuité de direction peut s'obtenir en passant à la limite ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) d'une couche d'épaisseur  $\epsilon$  à travers laquelle la vitesse varierait rapidement mais continûment de  $\vec{V}_1$  à  $\vec{V}_2$  ( $|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2|$ ) par exemple par la loi :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \frac{h}{\epsilon} (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \quad 0 < h < \epsilon$$

qui met en évidence un tourbillon :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2\epsilon} n \wedge (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \quad \text{constant le long de } h.$$

La nappe  $\Sigma$  est donc constituée par une surface de tourbillons libres  $\vec{\Omega}$  qui disparaissent d'ailleurs quand  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  coïncident, ce qui a lieu par raison de symétrie pour un obstacle cylindrique d'envergure infinie.

L'existence de cette nappe a suggéré l'artifice extrêmement élégant de substituer à l'aile un fluide fictif au repos en considérant sa surface comme une surface de discontinuité ana-

logue, la vitesse y passant de 0 à la vitesse  $\vec{V}$  du filet tangent au point considéré. Ainsi apparaît une couche fictive de tourbillons dits « liés », donnés en un point de la surface S par la limite de l'expression :

$$\vec{\Omega}' = \frac{1}{2\epsilon} \vec{n} \wedge \vec{V}$$

qui montre que ce tourbillon est perpendiculaire à  $\vec{V}$ , tandis que le tourbillon libre bissectait les directions de  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$ .

Nous avons ainsi ramené les perturbations introduites dans l'écoulement par la présence de l'aile à celles introduites par l'existence de 2 régions tourbillonnaires, ce qui va nous permettre d'appliquer la loi de Biot et Savart. Celle-ci donne en tous points la vitesse d'un fluide incompressible en repos à l'infini, due à la présence de volumes tourbillonnaires connus à un instant déterminé, c'est-à-dire pour lesquels on connaît en tous points le vecteur tourbillon au même instant; elle ne suppose d'ailleurs nullement le mouvement permanent, les volumes tourbillonnaires ayant en général un mouvement de déplacement et de déformation calculables par la dite loi, sans que la vitesse d'un de ces éléments de volume intervienne directement dans sa part contributive à la vitesse d'un autre point.

Le remarquable théorème de sir Thomson <sup>(1)</sup> sur l'invariance vis-à-vis du temps de la circulation de la vitesse relative à un contour lié au fluide, quand il existe pour son mouvement un potentiel des accélérations, montre que ces volumes intéressent toujours les mêmes particules fluides et que le

---

<sup>(1)</sup> Une démonstration géométrique de ce théorème est donnée dans « Aérodynamique » de Joukowski.

tourbillon d'une particule fluide est indestructible; c'est une des conséquences de notre toute première hypothèse, la genèse et la destruction des tourbillons devant être attribuées à la viscosité.

La loi de Biot et Savart s'écrit <sup>(1)</sup> :

$$\vec{V} = \frac{1}{2\pi} \iiint_v \frac{\vec{\Omega} \wedge \vec{r}}{r^3} d\mu \quad d\mu = dx' dy' dz' \quad (8)$$

L'intégrale triple étant étendue à l'ensemble des volumes tourbillonnaires,  $d\mu$  étant l'élément de volume où règne le tourbillon  $\vec{\Omega}(x', y', z')$  et  $\vec{r}$  la distance de cet élément au point  $(x, y, z)$  dont on recherche la vitesse :

$\vec{r}$  composantes :  $x - x', y - y', z - z'$ .

Considérons la surface formée des lignes partout tangentes au tourbillon et s'appuyant sur une petite section droite  $dS$ , elle enferme un tube tourbillon (fig. 3), cherchons la part

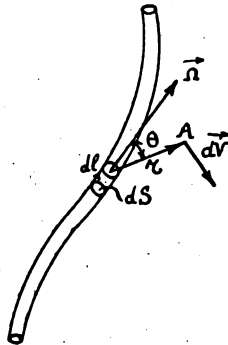


FIG. 3.

contributive d'un élément de longueur  $dl$  de ce tube; nous aurons d'après (8) :

$$d\vec{V} = \frac{\vec{\Omega} \wedge \vec{r}}{2\pi r^3} dS dl$$

<sup>(1)</sup> Pour une démonstration de la loi de Biot et Savart, voir, par exemple Villat « Mécanique des Fluides ».

Prenons  $\vec{dl}$  dans le sens de  $\vec{\Omega}$ , nous pourrons écrire alors :

$$\vec{dV} = \frac{\Omega dS}{2\pi r^3} \vec{dl} \wedge \vec{r}$$

$\Omega dS$  représente le flux du tourbillon à travers la section  $dS$ , d'après une propriété purement géométrique de  $\vec{\Omega}$  et aisée à vérifier, on a :

$$\operatorname{div} \vec{\Omega} \equiv 0 \quad (9)$$

et le flux est constant à un instant donné dans tout le tube; d'après le théorème de Stokes, il est égal à la demi-circulation de la vitesse sur un contour tracé autour de la surface du tube, le théorème de Thomson s'applique alors et montre que le flux dans le tube se maintient constant durant tout le mouvement; si nous désignons par  $I$  la circulation autour du tube ou « intensité » du tube tourbillon, nous aurons :

$$I = 2\Omega dS$$

et 
$$\vec{dV} = \frac{1}{4\pi} \frac{dI \wedge \vec{r}}{r^3} \quad \text{ou} \quad |dV| = \frac{1}{4\pi} \frac{dI \sin \theta}{r^2}$$

Loi qui présente une analogie frappante avec celle de l'électro-magnétisme.

Comme l'équation (8) suppose le fluide au repos à l'infini, nous obtiendrons les vitesses en tous les points pour le cas qui nous occupe en composant les vitesses dues aux couches de tourbillons libres et liés et données par la loi de Biot et Savart avec la vitesse  $\vec{V}_\infty$  :

$$\vec{V} = \vec{V}_\infty + \frac{1}{2\pi} \iiint_{\Sigma_e} \frac{\vec{\Omega}(x', y', z') \wedge \vec{r}}{r^3} d\tau + \frac{1}{2\pi} \iiint_{S_e} \frac{\vec{\Omega}'(x', y', z') \wedge \vec{r}}{r^3} d\tau \quad (10)$$

On conçoit que, connaissant ainsi les vitesses le long de la surface extérieure de  $S_e$ , l'équation (7) nous permette en négligeant la variation de  $U$ , d'y calculer partout les pressions; une intégration sur cette surface nous donnera alors la résultante de l'action du fluide sur l'aile; l'équation (4) nous donnera cependant une expression équivalente de cette résultante.



tante plus commode à calculer. En effet, étant donné que

$$\text{grad} \left( \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

est vérifiée, aux variations de U près, autour de  $S_\epsilon$ , cette équation montre que pour maintenir le mouvement permanent

( $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$ ) il nous faut communiquer au fluide par unité de masse une force :

$$\vec{F} = 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{V}$$

ou pour un volume  $d\tau$  une force :

$$\vec{F}' = 2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{V} d\tau$$

la force totale communiquée s'obtiendra en intégrant cette relation dans tout le volume où  $\vec{\Omega} \wedge \vec{V} \neq 0$ , c'est-à-dire à première vue dans les couches  $\Sigma_\epsilon$  et  $S_\epsilon$ , mais dans  $\Sigma_\epsilon$  le tourbillon à la direction moyenne de la vitesse, ce qui annule le produit vectoriel, cette force totale s'exprimera donc en définitive par :

$$\vec{R} = 2\rho \iiint_{S_\epsilon} \vec{\Omega}'(x', y', z') \wedge \vec{V} d\tau \quad (11)$$

elle est égale et directement opposée à l'action résultante du fluide sur l'aile.

Introduisons maintenant dans (11) l'expression (10) de la vitesse :

$$\begin{aligned} \vec{R} = 2\rho \iiint_{S_\epsilon} \vec{\Omega}' \wedge \vec{V}_\infty d\tau + 2\rho \iiint_{S_\epsilon} \vec{\Omega}' \wedge \left[ \frac{1}{2\pi} \iiint_{\Sigma_\epsilon} \frac{\vec{\Omega} \wedge \vec{r}}{r^3} d\tau \right] d\tau \\ + \frac{\rho}{\pi} \iiint_{S_\epsilon} \vec{\Omega}' \wedge \left[ \iiint_{S_\epsilon} \frac{\vec{\Omega}' \wedge \vec{r}}{r^3} d\tau \right] d\tau \quad (12) \end{aligned}$$

C'est pour le calcul des 3 termes du second membre que Prandtl a été amené à introduire une série de simplifications :

1° Tous les  $\Omega'$  sont parallèles à l'envergure et donc perpendiculaires à  $\vec{V}_\infty$ , ce qui est d'ailleurs rigoureux pour un mouvement plan.

Si nous choisissons le système d'axes de la fig 4,  $\vec{V}_\infty$  étant dirigé suivant l'axe  $oz$ , et  $ox$  étant le sens positif pour  $\vec{\Omega}'$ , nous aurons :

$$\vec{\Omega}' \wedge \vec{V}_\infty = - \Omega' V_\infty \vec{j}$$

Suivant les expressions données pour les composantes du produit vectoriel et  $\vec{j}$  désignant le vecteur unitaire suivant l'axe  $oy$ .

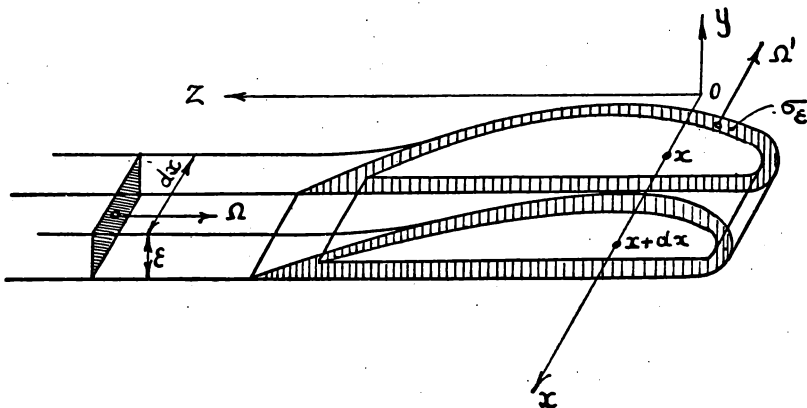


FIG. 4.

Le premier terme de  $\vec{R}$  représente donc un vecteur dirigé suivant  $oy$  et dont la valeur de la projection suivant cet axe est :

$$P \text{ aile sur fluide} = - 2\rho V_\infty \iiint_{S_\epsilon} \Omega' d\tau = - P \text{ fluide sur aile}$$

Cette première composante de la résultante du fluide sur l'aile s'appelle la « portance » :

$$P = 2\rho V_\infty \iiint_{S_\epsilon} \Omega' d\tau$$

Soit  $\sigma_\epsilon$  une section de  $S_\epsilon$  normale à l'envergure, l'élément de volume étant alors  $d\tau = d\sigma_\epsilon dx$

$$P = \rho V_\infty \int_B^A dx \ 2 \iint_{\sigma_\epsilon} \Omega' d\sigma_\epsilon$$

Mais  $2 \iint_{\sigma_\epsilon} \Omega' d\sigma_\epsilon$  représente dans ces conditions la circulation de la vitesse dans cette section et

$$P = \rho V_\infty \int_B^A C(x) dx. \quad (13)$$

Nous venons d'appliquer la loi de Stokes, remarquons que le système d'axe choisi étant gauche, les sens positifs pour la circulation de la vitesse et le flux du tourbillon se correspondent par la règle du tiré-bouchon.

La correspondance entre les sens positifs de la circulation et de la portance est d'ailleurs, comme il se doit, indépendante du choix des axes, car si interviennent des opérations axiales telles que le curl et le produit vectoriel qui sont sensibles à ce choix, l'expression de chaque composante de  $\vec{R}$  en contient un nombre pair ce qui a pour effet de restituer des vecteurs polaires à partir d'autres vecteurs polaires.

Pour une aile d'envergure infinie, nous aurions de façon rigoureuse, une portance par unité de longueur

$$P = \rho V_\infty C$$

Cette portance étant obtenue en direction à partir de celle de  $\vec{V}_\infty$  par une rotation de 90 degrés dans le sens inverse de la circulation.

2° La nappe  $\Sigma$  est plane et les tourbillons libres y sont normaux à l'envergure, les tubes tourbillons qui se détachent du bord de fuite de l'aile sont donc rectilignes et ont la direction de  $\vec{V}_\infty$ ; leur intensité est alors reliée de façon simple à la variation de la circulation le long de l'envergure. Appliquons en effet l'équation (9) au flux tourbillonnaire de la figure 4, le tourbillon est partout tangent sauf sur les surfaces hachurées où il est normal d'après nos hypothèses.

Le sens positif pour  $\Omega$  étant celui de  $oz$  nous aurons :

$$C(x + dx) - C(x) = -2\epsilon dx \Omega$$

d'où :

$$\Omega = -\frac{1}{2\epsilon} \frac{dG}{dx} \quad (14)$$

3° Dans l'expression du second terme de (12) intervient l'expression :

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2\pi} \iiint_{\Sigma_\epsilon} \frac{\vec{\Omega} \wedge \vec{r}}{r^3} d\tau$$

à connaître pour tous les points de la couche  $S_\epsilon$ , elle représente la vitesse due aux tourbillons libres. Choisissons un axe  $ox$  tel que cette vitesse calculée pour un point de l'axe représente la moyenne de celles calculées dans la section  $\sigma_\epsilon$  correspondante, nous adopterons alors cette vitesse pour toute la section et nous la calculerons en admettant que les tourbillons libres se détachent depuis l'axe  $ox$ .

On aura pour un point de l'axe  $ox$  :

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{r} = -\Omega r \sin \theta \vec{j} \quad d\tau = \epsilon dz dx$$

et :

$$\omega = \frac{-\epsilon}{2\pi} \int_B^A \Omega dx \int_0^\infty \frac{dz \sin \theta}{r^2}$$

Soit  $\xi$  le point de l'axe  $ox$  pour lequel on calcule la vitesse induite; on a :

$$dz \sin \theta = rd\theta$$

$$r \sin \theta = x - \xi$$

d'où :

$$\int_0^\infty \frac{dz \sin \theta}{r^2} = \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{x - \xi} = \frac{1}{x - \xi}$$

et

$$\omega = \frac{\epsilon}{2\pi} \int_B^A \frac{\Omega dx}{\xi - x}$$

ou d'après (14) :

$$\omega(\xi) = -\frac{1}{4\pi} \int_B^A \frac{dG}{dx} \frac{dx}{\xi - x}$$

Ceci donne pour le second terme de  $\vec{R}$  :

$$\vec{T} \text{ aile sur fluide} = \rho \int_{\mathbf{B}}^{\Lambda} dx \iint_{\sigma_{\epsilon}} (\mathcal{Q}\vec{\Omega}' d\sigma) \wedge \vec{\omega} = -\vec{T} \text{ fluide sur aile}$$

parallèle à  $\vec{V}_{\infty}$  et appelé « traînée ».

Mais

$$\vec{\Omega}' \wedge \vec{\omega} = \Omega' \omega \vec{k},$$

$\vec{k}$  étant le vecteur unitaire de l'axe  $oz$ , d'où pour la projection de la traînée de l'aile sur l'axe  $oz$  :

$$T = -\rho \int_{\mathbf{B}}^{\Lambda} C(x) \omega(x) dx$$

On montrerait aisément que dans les mêmes hypothèses, le 3<sup>me</sup> terme de  $\vec{R}$  est nul.

4<sup>o</sup>) Adoptons le sens opposé à  $oy$  comme sens positif pour les vitesses induites.

La résultante du fluide sur l'aile étant en définitive donnée par les deux composantes :

$$P = \rho V_{\infty} \int_{\mathbf{B}}^{\Lambda} C(x) dx$$

$$T = \rho \int_{\mathbf{B}}^{\Lambda} C(x) \omega(x) dx \quad (16)$$

avec la relation

$$\omega(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{B}}^{\Lambda} \frac{dC}{dx} \frac{dx}{\xi - x} \quad (15)$$

tout le problème a été ramené à la connaissance de  $C(x)$ .

L'hypothèse essentielle introduite par Prandtl consiste à admettre dans chaque section un *mouvement plan* avec des vitesses à l'infini  $\vec{V}_{\infty}$  et  $\vec{\omega}(x)$  (fig. 4bis).

Si nous désignons par  $\alpha_a$  l'angle que fait une droite liée au profil avec  $\vec{V}_\infty$  et que nous nommerons « incidence apparente », on voit que l'angle  $\alpha_r$  ou incidence réelle d'après Prandtl lui est reliée par l'équation :

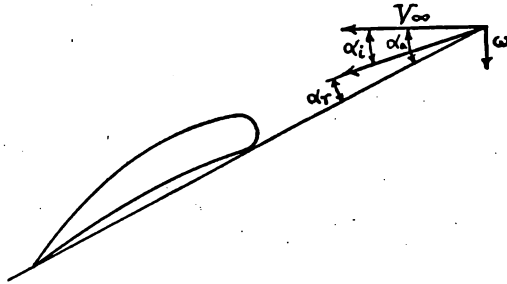


FIG. 4bis.

rente », on voit que l'angle  $\alpha_r$  ou incidence réelle d'après Prandtl lui est reliée par l'équation :

$$\alpha_i = \alpha_a - \alpha_r = \text{arc tg } \frac{\omega}{V_\infty} \quad (17)$$

$\alpha_i$  est « l'incidence induite » due à la vitesse induite  $\omega$ .

### Le problème plan.

Somme toute la théorie de Prandtl ramène le problème de l'aile d'envergure limitée à celui de l'aile illimitée qui constitue le problème de Kutta-Joukowski. La théorie des fonctions analytiques est ici d'un grand secours ; on sait en effet que pour un écoulement irrotationnel ( $\text{curl } \vec{V} = 0$ ) on peut faire dériver la vitesse d'un potentiel :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Introduites dans l'équation (1) qui est une conséquence de l'hypothèse sur l'incompressibilité, ces relations donnent :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

exprimant que la fonction  $\varphi$  est harmonique, on peut dans ce

cas lui associer la fonction harmonique conjuguée  $\psi$  :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (18)$$

caractérisée par le fait que les courbes  $\psi = C^te$  sont des lignes de courant, c'est-à-dire tangentes partout à la vitesse, la condition de tangence d'une telle ligne est en effet :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad \text{ou} \quad u dy - v dx = 0$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi = 0.$$

L'ensemble  $f = \varphi + i \psi$  constitue d'après les équations (18) interprétées comme les relations de Cauchy-Riemann une fonction analytique de la variable :

$$z = x + iy.$$

Toute fonction analytique  $f(z)$  a donc une partie réelle et une partie imaginaire susceptibles de représenter un potentiel et une fonction de courant, le problème consiste alors à rechercher le potentiel  $f(z)$  dont la partie imaginaire admette l'obstacle comme ligne de courant et qui donne une vitesse uniforme à l'infini.

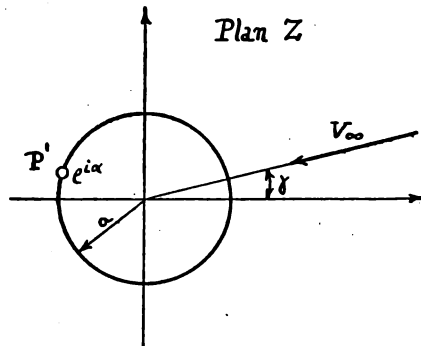


FIG. 5

Ce potentiel est connu pour le cylindre indéfini de rayon  $a$  : (fig. 5)

$$f(Z) = \frac{C}{2\pi i} \log Z + V_\infty \left( \frac{Z}{e^{i\gamma}} + \frac{a^2 e^{i\gamma}}{Z} \right)$$

où  $C$  est la circulation de la vitesse et  $V_\infty$  fait l'angle  $\gamma$  avec  $OX$

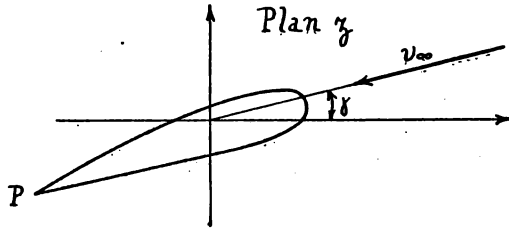


FIG. 6

Le potentiel complexe autour d'un profil d'aile dans le plan  $z$  s'obtiendra alors par une représentation conforme des 2 plans l'un sur l'autre, la circonférence de rayon  $a$  correspondant au profil ainsi que les directions  $ox$  et  $OX$  en sorte que dans le plan  $z$ , la vitesse  $v_\infty$  fasse aussi l'angle  $\gamma$  avec  $ox$ .

La fixation de la circulation  $C$  est purement arbitraire car, à chaque valeur de  $C$  correspond un écoulement possible autour du cylindre. Joukowski l'a cependant fixée pour les profils qui ont un angle ou même un point de rebroussement au bord de sortie, en ce point, en effet, on a pour une représentation conforme :

$$Z = Z(z)$$

$$\frac{dZ}{dz} = \infty$$

et comme :

$$\frac{df(z)}{dz} = u - iv = \frac{df(Z)}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dz}$$

la vitesse  $y$  serait infinie si on n'avait  $\frac{df(Z)}{dZ} = 0$  en ce point.

Soit  $ae^{i\alpha}$  le point de  $Z$  qui correspond au point anguleux de  $z$ , la condition donne :

$$\frac{df(Z)}{dZ} = \frac{C}{2\pi i} \frac{1}{Z} + V_\infty \left( \frac{1}{e^{i\gamma}} - \frac{a^2 e^{i\gamma}}{Z^2} \right) = 0 \text{ pour } Z = ae^{i\alpha}$$

d'où 
$$C = 4\pi a V_\infty \sin(\alpha - \gamma) \quad (19)$$

fixant la circulation pour les divers angles d'attaque.

On voit que cette théorie définit une seule famille de profils, famille caractérisée par le paramètre  $\alpha$ .



### Les polaires du tunnel aérodynamique.

La théorie des profils à pointes donne à C une valeur proportionnelle à  $V_\infty$ , en sorte que d'après Prandtl la portance et la traînée sont proportionnelles à  $V_\infty^2$ , c'est bien ce qui se vérifie au tunnel pour des vitesses telles que  $\frac{V_\infty^2}{(340 \text{ m/sec})^2}$  soit négligeable vis-à-vis de l'unité. On attribue à l'élément de surface d'aile :

$$dS = p(x) dx$$

une portance et une traînée élémentaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} dP = \frac{\rho V_\infty^2}{2} C_y p dx \\ dT = \frac{\rho V_\infty^2}{2} C_x p dx \end{array} \right. \quad (20)$$

Une différence essentielle se manifeste cependant, le paradoxe de d'Alembert vérifié dans la théorie de Joukowski ne l'est plus au tunnel pour un mouvement plan. L'écoulement plan physique n'est donc pas irrotationnel, la viscosité de l'air provoque des configurations tourbillonnaires qui peuvent être étudiées théoriquement <sup>(1)</sup> au point de vue de leur stabilité et de la résistance à l'avancement qu'elles provoquent, la configuration réalisée physiquement est étroitement dépendante du nombre de Reynolds.

On est donc conduit à décomposer le coefficient  $C_x$  en deux autres :

$$C_x = C_{x_t} + C_{x_p}$$

le premier explicitant la part de traînée due à la théorie de Prandtl, le second une traînée dite « de profil » réalisée en mouvement plan.

Les coefficients :  $C_y$ ,  $C_x$ , et  $C_{x_p}$  sont sans dimensions comme on le vérifie aisément, ils dépendent pour un angle d'attaque donné des variables ;  $V_\infty$ ,  $\rho$ ,  $\nu$  et D,  $\nu$  étant le coefficient de viscosité cinématique et D une dimension caractéristique du solide, la masse n'intervient que par  $\rho$  et ces coefficients doivent en être indépendants, la seule variable de dimension nulle dont ils pourraient dépendre est alors  $\frac{V_\infty D}{\nu}$ , qui cons-

(1) Villat : « Théorie des Tourbillons ».

titue le nombre de Reynolds. Pour une famille de profils homothétiques ces coefficients sont donc fonctions de l'angle d'attaque et du nombre de Reynolds. Une mesure expérimentale de ces coefficients vaut pour l'ensemble des valeurs qui laissent  $\frac{V_\infty D}{\nu}$  invariant.

Entre la théorie de Prandtl et les expressions (20) existent donc les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} dP = \frac{\rho V_\infty}{2} C_y p dx = \rho V_\infty C(x) dx \\ dT_i = \frac{\rho V_\infty^2}{2} C x_i p dx = \rho C(x) \omega(x) dx \end{array} \right. \quad (21)$$

et pour toute l'aile nous aurons :

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \frac{\rho V_\infty^2}{2} \int_B^A C_y(x) p(x) dx = \rho V_\infty \int_B^A C(x) dx = \frac{\rho V_\infty^2}{2} \overline{C_y} S \\ T_i = \frac{\rho V_\infty^2}{2} \int_B^A C x_i(x) p(x) dx = \rho \int_B^A C(x) \omega(x) dx = \frac{\rho V_\infty^2}{2} \overline{C x_i} S \\ T_p = \frac{\rho V_\infty^2}{2} \int_B^A C x_p(x) p(x) dx = \frac{\rho V_\infty^2}{2} \overline{C x_p} S \\ T = T_i + T_p \end{array} \right. \quad (22)$$

$\overline{C_y}$ ,  $\overline{C x_i}$ ,  $\overline{C x_p}$  sont des valeurs moyennes,  $S = \int_B^A p dx$  est la surface de l'aile.

### Le théorème de la circulation elliptique.

Prandtl a recherché la distribution de la circulation qui minimise la traînée induite pour une portance donnée, comme :

$$T_i = \rho \int_B^A C(x) dx$$

$$P = \rho V_\infty \int_B^A C(x) \omega(x) dx$$

Ce minimum est atteint pour une vitesse donnée par le minimum du quotient :

$$\frac{\int_B^A C(x) dx}{\int_B^A C(x) \omega(x) dx}$$

Il faut donc :

$$\delta \int_B^A C dx - \lambda \delta \int_B^A C \omega dx = 0$$

On voit que cette relation est identiquement vérifiée par  $\omega = \frac{1}{\lambda}$ ,  $\lambda$  étant fixé par la valeur désirée pour la portance.

La recherche de la distribution de la circulation qui réalise une vitesse induite constante le long de l'envergure et plus

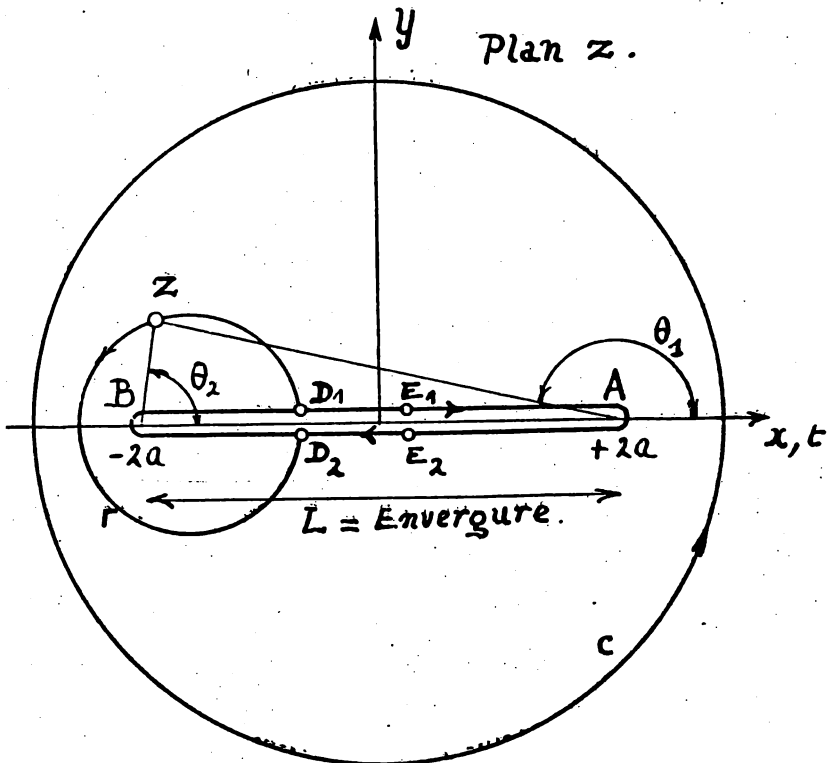


FIG. 7

généralement une vitesse induite donnée  $\omega(x)$  se ramène à l'inversion de l'équation intégrale :

$$\omega(x) = + \frac{1}{4\pi} \int_B^A \frac{dc}{d\xi} \frac{d\xi}{x - \xi}$$

Cette inversion a été obtenue la première fois par M. Betz dans son « Beitrage zur Tragflugtheorie », en voici une démonstration tout à fait différente, analogue à celle de E. Carafoli <sup>(1)</sup>.

Supposons la nappe des tourbillons libres prolongée indéfiniment dans les deux sens, ceci nous donnera sur AB une vitesse induite double :

$$v(x) = 2\omega(x) \tag{23}$$

mais nous aurons l'avantage d'avoir dans un plan passant par AB et normal à la nappe, un mouvement plan possédant un potentiel complexe hors de la coupure AB.

Pour un tourbillon plan isolé en un point  $z_k$  et d'intensité  $I_k$  le potentiel complexe s'écrit :

$$f(z) = \frac{I_k}{2\pi i} \log(z - z_k)$$

dans notre cas, nous avons au point  $t$  de AB un tourbillon plan élémentaire dont l'intensité est donnée par (14) :

$$I_t = - \frac{dC}{dt} dt$$

d'où, pour l'ensemble des tourbillons sur AB le potentiel complexe :

$$f(z) = - \frac{1}{2\pi i} \int_B^A \frac{dC}{dt} \log(z - t) dt$$

$$\frac{df}{dz} = v_x - iv_y = - \frac{1}{2\pi i} \int_B^A \frac{dC}{dt} \frac{dt}{z - t} \tag{24}$$

et comme  $z = x + iy$ ,

$$v_x = + \frac{1}{2\pi} \int_B^A \frac{dC}{dt} \frac{y dt}{(x - t)^2 + y^2}, \quad v_y = - \frac{1}{2\pi} \int_B^A \frac{dC}{dt} \frac{(x - t) dt}{(x - t)^2 + y^2}$$

---

(1) E. Carafoli : « Aérodynamique des Ailes d'avions ».

Cherchons ce que devient  $v_x$  quand nous nous approchons d'un point  $x$  de AB en faisant tendre  $y$  vers zéro. Remarquons qu'en dehors du point  $t = x$ , la fonction intégrée est nulle avec  $y$  en sorte que nous pourrions limiter l'intervalle d'intégration à celui qui s'étend de  $x - \epsilon$  à  $x + \epsilon$ ,  $\epsilon$  étant arbitrairement petit.

D'où :

$$\lim_{y \rightarrow 0} v_x = \frac{1}{2\pi} \lim_{y \rightarrow 0} \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \frac{dC}{dt} \frac{y dt}{(x-t)^2 + y^2}$$

soit  $\left(\overline{\frac{dC}{dt}}\right)$  une valeur moyenne de  $\frac{dC}{dt}$  dans cet intervalle :

$$\lim_{y \rightarrow 0} v_x = \frac{1}{2\pi} \left(\overline{\frac{dC}{dt}}\right) \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \text{arc tg } \frac{x-t}{y} \right]_{x-\epsilon}^{x+\epsilon}$$

d'ailleurs comme  $\epsilon$  est arbitrairement petit et si  $\frac{dC}{dt}$  est continu dans l'intervalle AB :

$$\overline{\frac{dC}{dt}} = \frac{dC}{dx}$$

d'où :

$$\lim_{y \rightarrow 0} v_x = \frac{1}{2\pi} \frac{dC}{dx} \lim_{y \rightarrow 0} \left( 2 \text{ arc tg } \frac{-\epsilon}{y} \right) = \pm \frac{1}{2} \frac{dC}{dx} \quad (25)$$

suivant que  $y$  tend vers zéro par valeurs négatives ou positives. AB est donc une ligne de discontinuité pour la vitesse  $v_x$ . Quant à la vitesse  $v_y$  elle tend bien vers  $2\omega(x)$  quand on y fait  $y = 0$ .

Supposons que la fonction  $v(x)$  donnée soit entière quand on y remplace  $x$  par  $z$ , (1) il en sera de même pour  $v(z)$ , qui se réduira sur AB à  $v_y$  pour  $z$  réel.

La fonction :

$$\frac{dg}{dz} = \frac{df}{dz} - 2i\omega(z) = v_x - iv_y - iv(z) \quad (2)$$

aura sa partie imaginaire nulle sur AB, seule la composante suivant  $ox$  de la vitesse subsiste, qui est précisément tangente

(1) Ceci sera toujours vrai si la fonction  $\omega(x)$  satisfait à cette condition de A à B.

(2) Remarquons que les sens positifs pour  $v_y$  et  $\omega(x)$  sont opposés.

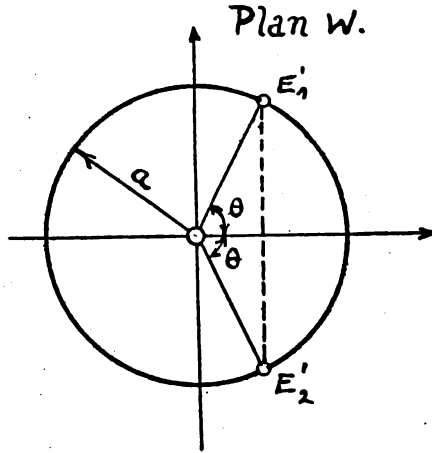


FIG. 7bis

à AB; le potentiel complexe  $g(z)$  est donc celui d'un écoulement autour d'une plaque mince AB avec des vitesses opposées en deux points opposés de la plaque  $E_1$  et  $E_2$ . Une représentation conforme de la plaque sur le cercle de rayon  $a = \frac{L}{4}$  du plan W est donnée par :

$$z = W + \frac{a^2}{W} \quad (26)$$

Car, pour  $W = ae^{i\theta}$  nous aurons  $z = 2a \cos \theta$  et quand W décrit la circonférence, z décrit deux fois AB, deux points opposés tels que  $E_1$  et  $E_2$  correspondant aux points  $E_1'$  et  $E_2'$  ( $\pm \theta$ ). (fig. 7bis)

Le potentiel demandé dans le plan W doit voir sa partie imaginaire s'annuler sur la circonférence et sa partie réelle prendre des valeurs opposées pour  $\pm \theta$ .

Un potentiel de la forme :

$$i A_n \left( W^n - \frac{a^{2n}}{W^n} \right)$$

où  $A_n$  est réel, réalise bien cette condition car pour  $W = ae^{i\theta}$  il se réduit à :

$$- 2 A_n a^n \sin n\theta .$$

Notre potentiel aura donc la forme :

$$g(W) = i \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left( W^n - \frac{a^{2n}}{W^n} \right)$$

et comme

$$W^n - \frac{a^{2n}}{W^n} = \left( W - \frac{W}{a^2} \right) \left[ \left( W^{n-1} + \frac{a^{2(n-1)}}{W^{n-1}} \right) + a^2 \left( W^{n-2} + \frac{a^{2(n-2)}}{W^{n-2}} \right) + \dots \right]$$

il vient :

$$g(W) = i \left( W - \frac{W}{a^2} \right) \sum_{n=0}^{n-1} B_n \left( W^n + \frac{a^{2n}}{W^n} \right)$$

où les  $B_n$  sont réels.

Passons à  $g(z)$  au moyen de (26), comme :

$$z^n = \left( W + \frac{a^2}{W} \right)^n = \left( W^n + \frac{a^{2n}}{W^n} \right) + na^2 \left( W^{n-2} + \frac{a^{2(n-2)}}{W^{n-2}} \right) + \dots$$

et

$$W - \frac{a^2}{W} = \sqrt{z^2 - 4a^2}$$

on a

$$g(z) = \sqrt{z^2 - 4a^2} (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{dg(z)}{dz} &= \frac{z}{\sqrt{z^2 - 4a^2}} (a_0 + a_1 z + \dots) + \sqrt{z^2 - 4a^2} (a_1 + 2a_2 z + \dots) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{z^2 - 4a^2}} (b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n) \end{aligned}$$

Ceci montre que la fonction  $\sqrt{z^2 - 4a^2} \frac{dg(z)}{dz}$  est régulière dans tout le plan, on peut donc lui appliquer le théorème de Cauchy pour un contour C fermé et sans points doubles :

$$\sqrt{z^2 - 4a^2} \frac{dg(z)}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \sqrt{z^2 - 4a^2} \frac{dg(z)}{dz} \frac{dz}{z - \zeta}$$

comme  $\frac{dg(z)}{dz} = \frac{df}{dz} - 2i\omega(z)$  il vient :

$$\sqrt{z^2 - 4a^2} \frac{dg(z)}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \sqrt{z^2 - 4a^2} \frac{df}{dz} \frac{dz}{z - \zeta} - \frac{1}{\pi} \int_C \sqrt{z^2 - 4a^2} \omega(z) \frac{dz}{z - \zeta} \quad (27)$$

$w(z)$  étant par hypothèse une fonction régulière dans tout le plan, la dernière intégrale comporte une fonction à deux points de branchement ( $\pm 2a$ ), mais holomorphe, c'est-à-dire uniforme et monogène dans toute couronne entourant ces points, les intégrales sur tous les contours entourant ces points sont donc équivalentes, il en est nécessairement de même pour la première intégrale vu qu'elle ne diffère de la précédente que par la fonction du premier membre, régulière dans tout le plan.

Intégrons alors sur une circonférence de rayon très grand, pour laquelle le développement :

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} \left( \frac{1}{1-\frac{x}{z}} \right) = \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} + \dots \right) \text{ convergent si } \left| \frac{x}{z} \right| < 1$$

convergera certainement. Introduisons alors ce développement dans l'expression (24) de  $\frac{df}{dz}$  :

$$\frac{df}{dz} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z} \int_B^A \frac{dG}{dx} dx - \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z^2} \int_B^A \frac{dG}{dx} x dx \dots$$

Dans le second membre le premier terme est nul car on a  $C_A = C_B = 0$ .

La série est convergente car le reste après  $n$  termes :

$$R_n = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z^n} \int_B^A \frac{dG}{dx} \frac{x^n dx}{z-x}$$

tend manifestement vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini.

Pour les grandes valeurs de  $|z|$ ,  $\frac{df}{dz}$  est donc de l'ordre de  $\frac{1}{z^2}$ , on voit alors aisément que la première intégrale dans (27) s'évanouit quand le contour tend vers le point à l'infini; il reste alors :

$$\sqrt{z^2 - 4a^2} \frac{dg}{dz} = -\frac{1}{\pi} \int_c \sqrt{z^2 - 4a^2} w(z) \frac{dz}{z-z} \quad (28)$$

Prenons pour cette dernière intégrale un contour qui se rapproche indéfiniment de AB. Pour deux points  $D_1$  et  $D_2$  en regard, la fonction  $\sqrt{z^2 - 4a^2}$  voit son argument,  $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ ,



augmenter de  $\pi$  quand on passe de  $D_1$  à  $D_2$  par le contour  $\Gamma$  par exemple; en effet, tandis que la variation totale de  $\theta_1$  est nulle, celle de  $\theta_2$  atteint  $2\pi$ , la fonction prend alors en ces points des valeurs opposées :

$$+ |\sqrt{x^2 - 4a^2}| \quad \text{et} \quad - |\sqrt{x^2 - 4a^2}|$$

Soit :  $z = \xi + i\eta$ .

Le premier membre de (28) tend alors suivant la branche du contour, vers :

$$+ \sqrt{\xi^2 - 4a^2} \frac{dg}{d\xi} \quad \text{par la branche supérieure,}$$

$$- \sqrt{\xi^2 - 4a^2} \frac{dg}{d\xi} \quad \text{par la branche inférieure,}$$

Mais, d'après (25)  $\frac{dg}{d\xi} = v_x = \pm \frac{1}{2} \frac{dC}{d\xi}$  suivant qu'on tend vers la coupure par valeurs négatives ou positives, le premier membre de (28) tend donc pour les deux branches vers la même valeur :

$$- \sqrt{\xi^2 - 4a^2} \frac{1}{2} \frac{dC}{d\xi} = - \frac{1}{\pi} \int_A^B \sqrt{x^2 - 4a^2} \omega(x) \frac{dx}{x - \xi}$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_B^A (-\sqrt{x^2 - 4a^2}) \omega(x) \frac{dx}{x - \xi}$$

d'où finalement :

$$\sqrt{\xi^2 - 4a^2} \frac{dC}{d\xi} = \frac{4}{\pi} \int_B^A \sqrt{x^2 - 4a^2} \omega(x) \frac{dx}{\xi - x} \quad (39)$$

qui constitue la formule de Betz.

On voit que pour  $\omega = C^{te}$  on obtient une distribution elliptique de la circulation :

$$C(x) = C_0 \sqrt{1 - \frac{4x^2}{L^2}}$$

en posant :

$$\omega = \frac{C_0}{2L}$$

Une telle distribution introduite dans les expressions (22)

conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \frac{\rho S V_{\infty}^2}{2} \overline{C}_y = \rho V_{\infty} \frac{\pi L C_o}{4} \\ T_i = \frac{\rho S V_{\infty}^2}{2} \overline{C}_{x_i} = \rho \frac{C_o}{2L} \frac{\pi L C_o}{4} \end{array} \right. \quad (40)$$

*Influence de l'allongement :*

Nous en tirons :

$$\frac{T_i}{P} = \frac{\overline{C}_{x_i}}{\overline{C}_y} = \frac{C_o}{2 L V_{\infty}} = \frac{\overline{C}_y}{\pi \frac{L^2}{S}} \quad (41)$$

$\lambda = \frac{L^2}{S}$  s'appelle l'allongement de l'aile, c'est aussi le rapport de l'envergure à la profondeur moyenne de l'aile définie par :

$$L p_m = S$$

Nous obtenons en définitive :

$$T_i = P \frac{\overline{C}_y}{\pi \lambda} \quad (42)$$

Toutes choses égales, la trainée varie en raison inverse de l'allongement de l'aile, elle disparaît d'ailleurs pour  $\lambda = \infty$  (mouvement plan). Pratiquement on est rapidement limité par le poids de construction, le moment fléchissant à l'encastrement de l'aile variant en première approximation proportionnellement à  $\sqrt{\lambda}$  pour une même portance. Pour les planeurs de performance actuels l'allongement varie de 12 à 19.

Les incidences induites sont constantes avec  $\omega$  pour une distribution elliptique, elles sont influencées de la même façon par l'allongement :

$$\text{tg } \alpha_i = \frac{\omega}{V_{\infty}} = \frac{\overline{C}_y}{\pi \lambda} \quad (43)$$

*Réalisation d'une distribution elliptique :*

Nous disposons de trois variables pour répartir la circulation : le profil des sections, leur angle d'attaque, leur pro-

fondeur. Pour résoudre le problème il nous faut connaître les caractéristiques du mouvement plan dans toutes les sections. La courbe qui relie  $C_y$  à  $\alpha_r$  dans un mouvement plan autour d'un profil à l'allure sinusoïdale prévue par la théorie de Joukowski, la zone d'utilisation est presque rigoureusement linéaire et peut s'exprimer analytiquement par :

$$C_y = k (\alpha_r - \alpha_0) \quad (44)$$

$\alpha_0$  étant l'angle de portance nulle du profil (fig. 8).

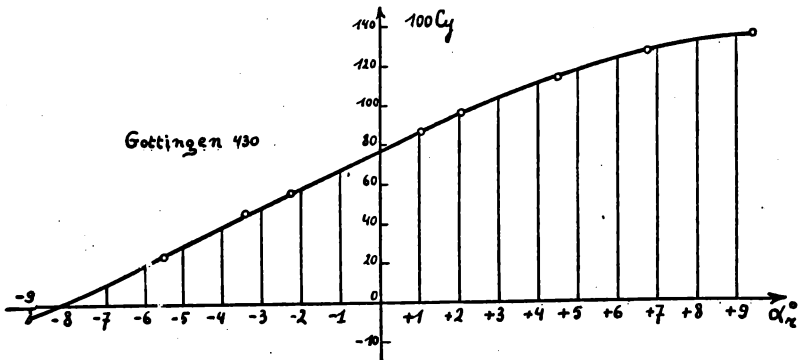


FIG. 8

Les lois qui relient la circulation, la profondeur de l'aile et les coefficients de portance et de traînée sont les expressions (21) qui, simplifiées, s'écrivent :

$$\begin{cases} C(x) = \frac{V_\infty}{2} C_y p(x) \\ \omega(x) = V_\infty \frac{Cx_i}{C_y} \end{cases}$$

et auxquelles nous devons ajouter l'équation (15) ou (39).

Pour clarifier l'étude il semble préférable de séparer les ailes en deux grandes classes, celles dont toutes les sections ont des profils homothétiques et celles à profils évolutifs.

1°) Ailes à profils homothétiques.

Leur simplicité réside dans le fait que  $k$  et  $\alpha_0$  sont les mêmes dans toutes les sections (1).

(1) Pour être tout à fait rigoureux il faudrait prendre en considération la variation de  $k$  et  $\alpha_0$  avec le nombre de Reynolds car  $D$  varie; jusque tout près des bords marginaux la correction à apporter est négligeable, au delà elle n'intéresse qu'une partie négligeable de l'envergure.

Pour réaliser une distribution elliptique nous avons à satisfaire l'équation :

$$C_q \sqrt{1 - \frac{4x^2}{L^2}} = \frac{V_\infty}{2} C_y p(x). \quad (45)$$

Une solution intéressante consiste à faire varier elliptiquement la profondeur de l'aile :

$$p = p_o \sqrt{1 - \frac{4x^2}{L^2}}$$

il reste alors

$$C_y = \frac{2C_o}{V_\infty p_o} = C'^o$$

Ce qui est réalisable pour toutes les incidences de l'aile (1) en calant tous les profils à la même incidence apparente. En effet  $\alpha_i$  étant constant dans une distribution elliptique,  $\sigma_r$  sera constant et par conséquent  $C_y$  (44). Pour un autre type d'aile une distribution elliptique ne se réalise en général que pour une incidence de l'aile. Nous pouvons en outre

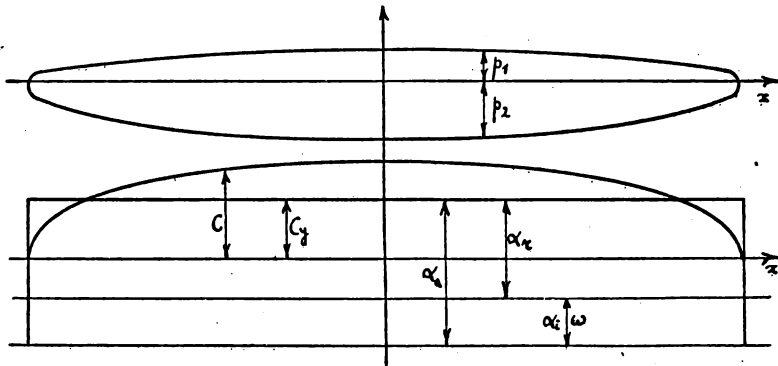


FIG 9

Répartition des caractéristiques d'une aile elliptique pour une circulation elliptique

imposer p. ex. qu'à l'incidence de vol normale les centres de poussée soient alignés sur une droite. Si  $C_m$  désigne en % de la profondeur la distance du centre de poussée au bord d'attaque

(1) Nous entendons par incidence de l'aile, l'angle que fait avec  $V_\infty$  une droite de référence arbitraire normale à l'envergure et qui peut être par exemple la droite de référence du profil médian.

à cet incidence, l'aile sera constituée en plan par les deux arcs d'ellipse :

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= C_m p_o \sqrt{1 - \frac{4x^2}{L^2}} \\ p_2 &= (1 - C_m) p_o \sqrt{1 - \frac{4x^2}{L^2}} \end{aligned} \right\} \text{fig. 9.}$$

de cette façon on pourra concentrer les efforts sur un longeron droit sollicité, dans cette position, seulement par des efforts tranchants et moments fléchissants, en outre nous justifierons d'avantage l'hypothèse (3°) de la droite portante de Prandtl.

La relation entre  $\overline{C_y}$  et  $\overline{C_x} = \overline{C_{x_p}} + \overline{C_{x_i}}$  s'appelle la polaire de l'aile, elle constitue dans le cas présent une véritable caractéristique du profil, car les valeurs moyennes sont les valeurs de  $C_y$  et  $C_x$  dans chaque section :

$$\overline{C_y} = C_y \quad \overline{C_{x_p}} = C_{x_p} \quad \overline{C_{x_i}} = C_{x_i}$$

La relation entre  $C_y$  et  $C_{x_p}$  s'appelle la polaire du profil, elle s'identifie ici avec la polaire de l'aile pour l'allongement infini ( $\overline{C_{x_i}} = 0$ ), elle peut se déduire d'une polaire d'aile d'allongement  $\lambda$  par la formule dérivée de (41) :

$$\overline{C_{x_i}} = \frac{\overline{C_y^2}}{\pi\lambda} \quad \overline{C_{x_p}} = \overline{C_x} - \overline{C_{x_i}}$$

ce qui constitue un moyen de déterminer les caractéristiques d'un mouvement plan en expérimentant sur une aile finie. On passera également des incidences apparentes relevées au cours de l'essai aux incidences réelles permettant de graduer la polaire de profil au moyen de :

$$\alpha_i \cong \text{tg } \alpha_i = \frac{\overline{C_y}}{\pi\lambda} \quad \alpha_r = \alpha_a - \alpha_i \quad (46)$$

On en verra un exemple fig. 10, relatif à un profil « Göttingen 430 » la polaire relevée à l'essai étant celle d'allongement 5 (fig. 10).

La relation entre  $\overline{C_{x_i}}$  et  $\overline{C_y}$  s'appelle la polaire théorique de l'aile, elle est parabolique d'où le nom de parabole induite qu'on lui donne souvent.

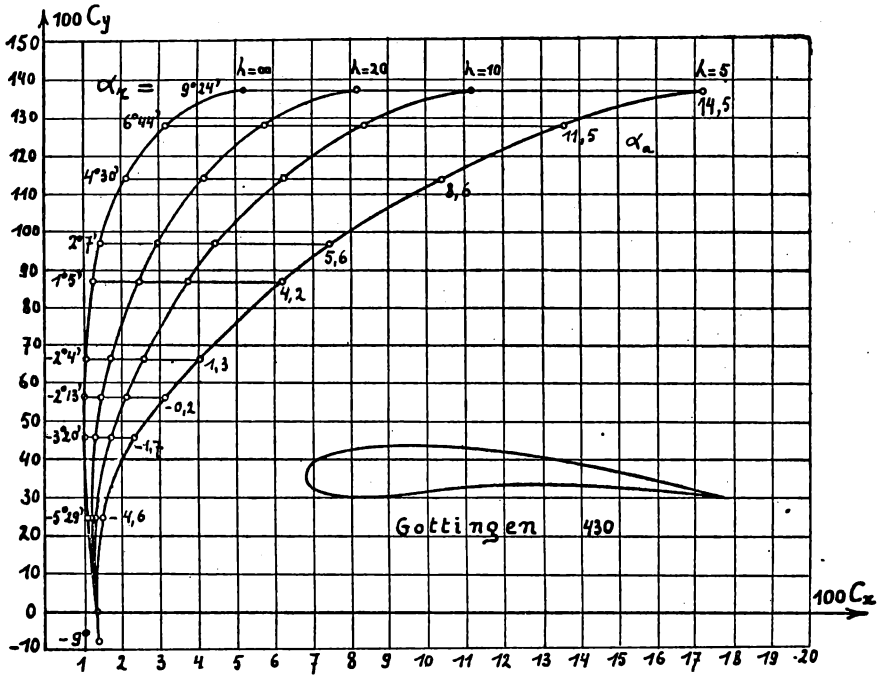


FIG. 10

Pour les ailes dont la profondeur varie suivant d'autres lois nous pouvons tracer d'après (45) la courbe de répartition des  $Cy$  (fig. 11). Nous en déduisons d'après (44) les incidences réelles dans chaque section et par (46) les incidences apparentes auxquelles les différents profils devront être calés; entre deux profils il y aura généralement une torsion :

$$\alpha = \alpha_{a1} - \alpha_{a2} = \alpha_{r1} - \alpha_{r2} = \frac{1}{k} (C_{y1} - C_{y2}).$$

Ceci ayant été réalisé pour une valeur donnée de  $\overline{C_y}$  c.-à-d. de l'incidence de l'aile, imaginons que nous augmentions celle-ci; tous les  $\alpha_a$  seront augmentés de la même quantité.

Si la distribution de la circulation restait elliptique ( $\alpha_i = C^{te}$ ) nous aurions aussi  $\Delta\alpha_r = C^{te}$  et par conséquent  $\Delta C_y = C^{te}$  d'après (44).

Mais alors l'équation (45) demande :

$$\Delta C_y = \frac{2}{V_\infty} \Delta C_o \frac{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{L^2}}}{p(x)} = C^{te}$$

et on aurait nécessairement

$$p(x) = p_o \sqrt{1 - \frac{4x^2}{L^2}}$$

c.-à-d. une aile elliptique. La distribution de la circulation n'est donc elliptique qu'à une incidence choisie d'une aile non elliptique.

2°) Les Ailes à profils évolutifs :

$k$  et  $\alpha_o$  sont ici variables le long de l'envergure, on les suppose connues pour chaque section. La détermination du calage des profils suivant la variation de profondeur de l'aile se fait comme pour les ailes à profils homothétiques à partir de la courbe de répartition des  $C_y$ . Pour une aile elliptique la condition sous laquelle la distribution se maintient elliptique est :

$$\Delta C_y = \frac{2}{V_\infty p_o} \Delta C_o = C^{te}$$

Comme dans ce cas  $\Delta \alpha_r = C^{te}$  il faut que  $k$  soit constant le long de l'envergure, les caractéristiques des profils utilisés doivent donc être parallèles dans leur partie linéaire. En pratique  $k$  varie très peu d'un profil à l'autre on peut donc s'attendre en général à ce que pour une aile elliptique la distribution de la circulation se maintienne elliptique.

Souvent la surface de l'aile ne s'appuie que sur deux ou trois profils connus, les profils intermédiaires générés n'ont en général jamais été soufflés, on pourra se tirer d'affaire alors en interpolant linéairement les coefficients  $k$  et  $\alpha_o$ .

L'emploi d'ailes à profils évolutifs s'est généralisé sur les planeurs. Ces ailes sont plus souples dans leurs qualités aérodynamiques, elles peuvent obéir à plus d'exigences constructives et permettent une répartition des vitesses induites aux grandes incidences qui augmente la défense latérale aux abords de la perte de vitesse. Citons par exemple le planeur sélectionné pour les Jeux olympiques de Finlande en 1940; le profil à l'emplanture est le Gottingen 549 de 16 % d'épaisseur

relative, il évolue vers les bords marginaux avec le Gottingen 676. Un autre planeur allemand le F. V. A. a une section centrale dotée du Joukowski 433, évolue ensuite vers le Gottingen 532 et vers les bords marginaux avec le U. S. A. M. 3.

### **Caractéristiques aérodynamiques d'une aile donnée.**

Le problème de déterminer les caractéristiques géométriques d'une aile était simple parce que nous nous imposons une distribution donnée de la circulation, le problème inverse se complique du fait qu'il dépend d'une équation intégrale. Il nous faut en effet connaître les vitesses induites pour déterminer partout la circulation de la vitesse, mais celles-ci se déduisent d'une intégration portant sur la dérivée de la fonction recherchée.

Il est pourtant essentiel de pouvoir suivre l'évolution de la distribution des vitesses induites aux grandes incidences. Il faut rechercher que les extrémités de l'aile ne se mettent jamais en perte de vitesse avant la partie centrale, les ailerons qui assurent la défense latérale sont en effet placés aux extrémités et doivent rester efficaces pour pouvoir redresser une vrille éventuelle. Cela pourra se faire en choisissant des profils d'extrémité plus porteurs au moment où se produit le décollement des filets d'air, ou en réalisant une évolution de la distribution de la circulation telle que les vitesses induites les plus fortes se répartissent aux extrémités et diminuent ainsi l'incidence réelle des profils extrêmes vis-à-vis des profils centraux. Il faut donc éviter que déjà à l'incidence normale les extrémités de l'aile soient plus chargées (aile trapézoïdale), mais plutôt rechercher l'inverse (aile rectangulaire), ceci au double point de vue des efforts sur le longeron et de la défense latérale. Sur une aile à profils homothétiques on recherchera donc toujours à avoir de la torsion négative.

Handley-Page a fait des expériences sur l'influence de la forme de l'aile sur le décollement des filets d'air, qui concordent tout à fait avec les prévisions théoriques qu'on pourrait faire à partir des courbes  $C_y$  des fig. 9 et 11. Il a constaté que pour une aile elliptique le décollement se produit simultanément sur toute l'envergure, pour une aile trapézoïdale il s'amorce aux extrémités, pour une aile rectangulaire au



centre; c'est encore cette raison qui a conduit à placer des fentes de bord d'attaque aux extrémités des ailes fortement trapézoïdales des avions « Junkers ».

La connaissance des caractéristiques géométriques de l'aile suppose la connaissance de l'envergure  $L$  et des fonctions :  $p(x)$ ,  $k(x)$ ,  $\alpha_o(x)$ ,  $\alpha_a(x)$ . Pour en déduire  $C(x)$  nous pouvons par exemple nous servir d'une méthode par approximations successives. Commençons par attribuer à  $\alpha_i = \frac{\omega(x)}{V_\infty}$  une valeur constante, d'où nous tirerons les incidences réelles et  $Cy(x)$ ; ceci donnera à  $\frac{C(x)}{V_\infty}$  la valeur :

$$\frac{C(x)}{V_\infty} = \frac{1}{2} Cy(x) p(x)$$

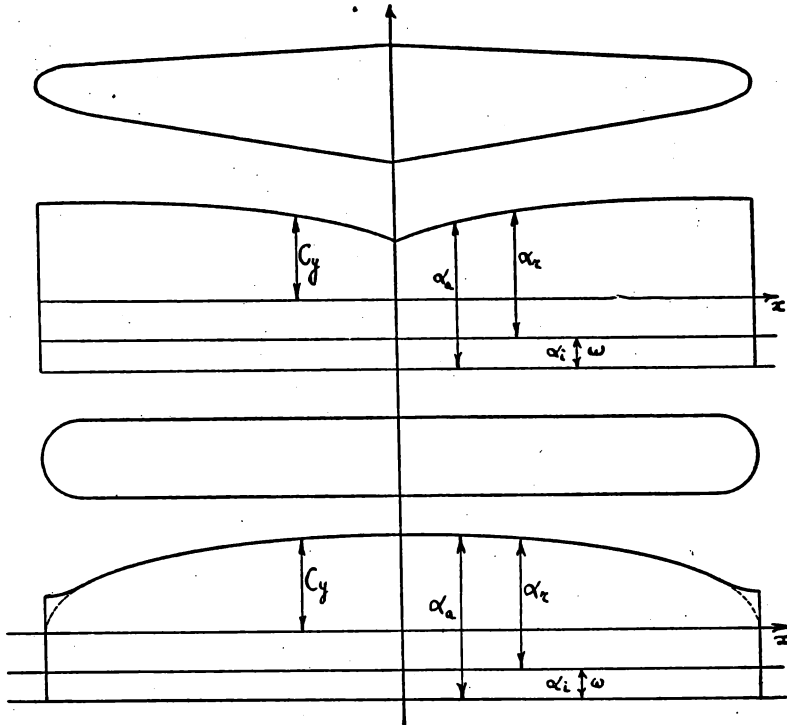


FIG. 11 } Aile trapézoïdale à congés elliptiques.  
 } Aile rectangulaire à congés circulaires.  
 Répartition des caractéristiques pour une distribution elliptique.

Nous en déduisons d'après (15) une nouvelle courbe pour  $\frac{\omega(x)}{V_\infty}$  qui ne concorde pas avec la supposition, nous pourrions alors refaire les calculs avec cette nouvelle répartition des  $\alpha_i$  jusqu'à ce que les deux dernières courbes soient jugées suffisamment concordantes. Ce procédé converge très rapidement et trois opérations conduisent en général au résultat avec des erreurs négligeables. De  $C(x)$  on déduit aisément les autres caractéristiques aérodynamiques et notamment  $\bar{C}_y$  et  $\bar{C}_x$ . Quand ces opérations auront été faites pour un certain nombre d'incidences on pourra tracer la polaire de l'aile.

Nous pouvons aussi nous servir d'un développement en série de Fourier comme l'ont fait Trefftz et Glauert.

Si nous explicitons l'équation intégrale à résoudre au moyen des relations (44), (17) et (15) nous obtenons :

$$C(x) = \frac{V_\infty}{2} pk \left[ \alpha_a - \alpha_o - \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_B^A \frac{dC}{d\xi} \frac{d\xi}{x - \xi} \right] \quad (47)$$

Posons  $x = -\frac{L}{2} \cos \theta$ ;  $\theta$  variant de 0 à  $\pi$  quand  $x$  varie de B à A.

Comme l'aile est symétrique, la circulation prend les mêmes valeurs pour  $\theta$  et  $\pi - \theta$  en sorte que son développement en série de Fourier ne contiendra pas de termes en cosinus :

$$C = 2L V_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \quad (48)$$

La vitesse induite devient :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{4\pi} \int_B^A \frac{dC}{d\xi} \frac{d\xi}{x - \xi} = \frac{V_\infty}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n A_n \cos n\varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} \\ &= \frac{V_\infty}{\pi} \sum n A_n \int_0^\pi \frac{\cos n\varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi \end{aligned}$$

Recherchons la valeur d'une de ces intégrales au moyen du calcul des résidus; la fonction intégrée prenant les mêmes valeurs pour  $\pm \varphi$  nous aurons d'abord :

$$I = \int_0^\pi \frac{\cos n\varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi.$$

Posons :

$$z = e^{i\varphi} \quad dz = iz d\varphi$$

d'où 
$$\cos n\varphi = \frac{z^{2n} + 1}{2z^n}$$

et 
$$z = e^{i\theta} \quad \cos \theta = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

Nous sommes ainsi ramenés à intégrer sur le cercle unité du plan  $z$ .

$$I = \frac{1}{2i} \int_c \frac{z^{2n} + 1}{2z^n \left( \frac{z^2 + 1}{2z} - \frac{z^2 + 1}{2z} \right)} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2i} \int_c \frac{z^{2n} + 1}{z^n (z - z) \left( z - \frac{1}{z} \right)} dz$$

La fonction intégrée comporte deux pôles simples en  $z$  et  $\frac{1}{z}$  sur le contour, il faudra tenir compte de leur demi-résidus en passant à un contour d'intégration  $c'$  intérieur au précédent :

$$I = \frac{\pi i}{2i} \left[ \frac{z^{2n} + 1}{z^n \left( z - \frac{1}{z} \right)} + \frac{z^{-2n} + 1}{z^{-n} \left( \frac{1}{z} - z \right)} \right] + \frac{1}{2i} \int_{c'} \frac{z^{2n} + 1}{z^n (z - z) \left( z - \frac{1}{z} \right)} dz$$

Le premier terme étant nul on voit que ces deux pôles ne donnent aucune contribution à la valeur de l'intégrale, décomposons le second terme :

$$I = \frac{1}{2i} \int_{c'} \frac{z^n dz}{(z - z) \left( z - \frac{1}{z} \right)} + \frac{1}{2i} \int_{c'} \frac{dz}{z^n (z - z) \left( z - \frac{1}{z} \right)}$$

Le premier terme de la décomposition est encore nul car la fonction est régulière dans tout domaine intérieur au cercle unité, la fonction du second terme a un pôle d'ordre  $n$  à l'origine intérieur au contour  $c'$  par conséquent :

$$I = \frac{2\pi i}{2i} \frac{1}{(n-1)!} \left[ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{1}{(z - z) \left( z - \frac{1}{z} \right)} \right]_{z=0}$$

et en remarquant que :

$$\frac{1}{(z - z) \left( z - \frac{1}{z} \right)} = \frac{z}{z^2 - 1} \left( \frac{1}{z - z} - \frac{1}{z - \frac{1}{z}} \right)$$

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{\pi}{(n-1)!} \frac{z}{z^2-1} (-1)^{n-1} (n-1)! \left[ (z-z)^{-n} - \left(z-\frac{1}{z}\right)^{-n} \right]_{z=0} \\
 &= \pi \frac{z}{z^2-1} (-1)^{n-1-n} \left(\frac{1}{z^n} - z^n\right) = \pi \frac{z^{2n}-1}{z^n(z^2-1)}
 \end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned}
 \sin n\theta &= \frac{z^{2n}-1}{2iz^n} \\
 I &= \int_0^\pi \frac{\cos n\varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi = \pi \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}
 \end{aligned}$$

La vitesse induite prend donc la forme :

$$\omega = \frac{V_\infty}{\sin \theta} \sum_n A_n \sin n\theta \tag{49}$$

Introduisons ces développements dans l'équation (47) à vérifier :

$$2L V_\infty \sum A_n \sin n\theta = \frac{V_\infty}{2} \rho k \left[ \alpha_a - \alpha_o - \frac{\sum A_n \sin n\theta}{\sin \theta} \right]$$

Posons avec Glauert <sup>(1)</sup>  $\mu = \frac{\rho k}{4L}$  la relation prend la forme simple :

$$\sum (\sin \theta + n\mu) A_n \sin n\theta = \mu(\alpha_a - \alpha_o) \sin \theta = \mu\beta \sin \theta \tag{50}$$

où  $\mu$  et  $\beta = \alpha_a - \alpha_o$ , variables le long de l'envergure sont donc fonctions de  $\theta$ .

Si on se limite à  $n$  termes du développement on pourra déterminer les  $n$  coefficients  $A$  au moyen d'un système d'équations linéaires obtenues en vérifiant la relation (50) pour  $n$  valeurs de l'angle  $\theta$ . La portance et la traînée sont données par :

$$\begin{aligned}
 P &= \rho V_\infty \int_B^A C(x) dx = \rho V_\infty 2L V_\infty \frac{L}{2} \int_0^\pi (\sum A_n \sin \theta) \sin \theta d\theta = \\
 &= \rho V_\infty^2 L^2 A_1 \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

---

<sup>(1)</sup> GLAUERT : *The elements of Aerofoil and Airscrew theory*, Cambridge Un. Press.

$$T_i = \rho \int_B^A C \omega dx = \rho 2 L V_\infty \frac{L}{2} \int_0^\pi (\sum A_n \sin n\theta) (\sum n A_n \sin n\theta) d\theta$$

$$= \rho V_\infty^2 L^2 \frac{\pi}{2} \sum n A_n^2$$

Nous en tirons :

$$\frac{T_i}{P} = \frac{\sum n A_n^2}{A_1}$$

Pour une portance donnée le minimum de la trainée induite a donc lieu pour

$$A_n = 0 \quad n = 2, 3, \dots$$

La circulation vaut alors :

$$C = 2 L V_\infty A_1 \sin \theta = 2 L V_\infty A_1 \sqrt{1 - \frac{4x^2}{L^2}}$$

et la vitesse induite :

$$\omega = V_\infty A_1 \frac{\sin \theta}{\sin \theta} = V_\infty A_1$$

et nous retrouvons le théorème de la circulation elliptique.

### Conditions à remplir par l'aile d'un planeur.

Sur un avion destiné à être rapide, avion de chasse, de record ou de transport, on recherche avant tout, à une certaine incidence, un minimum de trainée totale pour une portance donnée ;

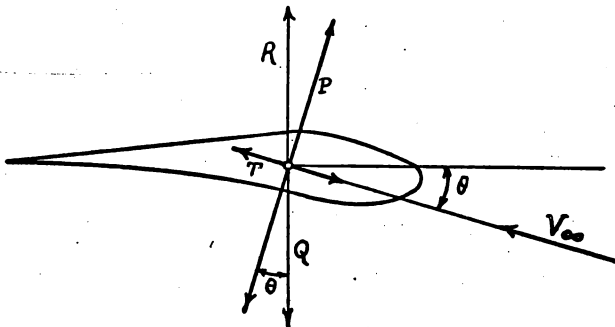


FIG. 12

ceci consiste à minimiser  $\overline{C_x}_i + \overline{C_x}_p$  pour une valeur donnée de  $\overline{C_y}$ . On peut minimiser chacun de ces coefficients séparément, le premier en adoptant une distribution elliptique de la circulation, le second en recherchant des profils fins et en les faisant travailler dans chaque section au  $\alpha_r$  correspondant à la meilleure finesse.

Pour un planeur les conditions de minimum sont légèrement différentes (fig. 12).

Considérons en effet un planeur plongé dans une masse d'air environnante qui se déplace sans déformation. Nous supposons la trajectoire inclinée de l'angle  $\theta$  sur l'horizon. Soit  $q$  le poids du planeur nous aurons les équations d'équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{C_y} \frac{\rho S V_\infty^2}{2} = q \cos \theta \\ \overline{C_x} \frac{\rho S V_\infty^2}{2} + \sigma \frac{\rho V_\infty^2}{2} = q \sin \theta \end{array} \right.$$

$\sigma$  étant un coefficient tenant compte de la traînée des parties autres que l'aile.

Nous en tirons :

$$f = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\overline{C_x} S + \sigma}{\overline{C_y} S}$$

$f$  s'appelle la finesse du planeur; elle mesure la distance horizontale parcourue par unité de hauteur dans le mouvement relatif au fluide environnant. Pour les planeurs modernes elle atteint de 21 à 28.

La première relation nous donne d'autre part :

$$V_\infty = \sqrt{\cos \theta} \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{\frac{q}{S}} \frac{1}{\sqrt{\overline{C_y}}} = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{\frac{q}{S}} \frac{1}{\left[ \overline{C_y}^2 + \left( \overline{C_x} + \frac{\sigma}{S} \right)^2 \right]^{1/4}}$$

d'ou :

$$V_x = V_\infty \cos \theta = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{\frac{q}{S}} \frac{\overline{C_y}}{\left[ \overline{C_y}^2 + \left( \overline{C_x} + \frac{\sigma}{S} \right)^2 \right]^{3/4}}$$

$$V_y = V_\infty \sin \theta = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{\frac{q}{S}} \frac{\overline{Cx} + \frac{\sigma}{S}}{\left[ \overline{Cy}^2 + \left( \overline{Cx} + \frac{\sigma}{S} \right)^2 \right]^{3/4}}$$

C'est cette dernière expression ou vitesse de chute verticale relative qu'il faut minimiser, moyennant une légère approximation on peut en donner une expression plus simple.  $\theta$  étant très petit quand  $V_y$  doit être minimum on peut prendre :

$$\sqrt{\cos \theta} \cong 1 \quad \text{et} \quad \sin \theta \cong \text{tg } \theta$$

il vient alors :

$$V_y \cong V_\infty \text{tg } \theta \cong \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{\frac{q}{S}} \frac{\overline{Cx} + \frac{\sigma}{S}}{\overline{Cy}^{3/2}}$$

Nous rechercherons donc à avoir :

$\sigma$  petit, c.-à-d. la plus grande finesse du fuselage et des empennages à l'angle d'attaque désiré.

$\frac{q}{S}$  petit c.-à-d. une faible charge moyenne au  $m^2$ , elle se tient actuellement aux environs de  $15 \text{ kg}/m^2$ .

Enfin une caractéristique qui intéresse la voilure :

$$\frac{\overline{Cx}_i + \overline{Cx}_p}{\overline{Cy}^{3/2}} \quad \text{minimum.}$$

Nous pouvons à nouveau y minimiser deux termes indépendamment :

Pour  $\overline{Cy}$  donné :  $\frac{\overline{Cx}_i}{\overline{Cy}^{3/2}}$  sera comme plus haut minimé par une distribution elliptique de la circulation et un allongement maximum compatible avec le poids de construction.

$\frac{\overline{Cx}_p}{\overline{Cy}^{3/2}}$  sera minimé en recherchant des profils pour lesquels

$\frac{\overline{Cx}_p^2}{\overline{Cy}^3}$  est minimum à un certain angle d'attaque et en les

faisant travailler à cet angle pour l'incidence choisie de l'aile. Remarquons que ceci fixe la courbe de répartition des  $Cy$  et par conséquent la *variation* de profondeur de l'aile si l'on

désire une circulation elliptique; cette forme peut être incompatible avec les exigences constructives, il y a là des compromis qui relèvent de l'habileté d'un dessinateur de planeur.

Se donnant alors la charge moyenne au m<sup>2</sup>  $\left(\frac{q}{S}\right)$  compatible avec une bonne stabilité et un allongement  $\lambda$  compatible avec une construction légère, on déduira après un calcul approximatif du poids en vol les valeurs de S et L qui permettront le calcul de  $\overline{C_y}$ ,  $\overline{C_{x_p}}$  et  $\overline{C_{x_i}} = \frac{\overline{C_y^2}}{\pi\lambda}$  pour la dite incidence. Les équations d'équilibre donnent alors  $V_\infty$ , la formule (40),  $C_o$  et la formule (17) les incidences apparentes des profils.

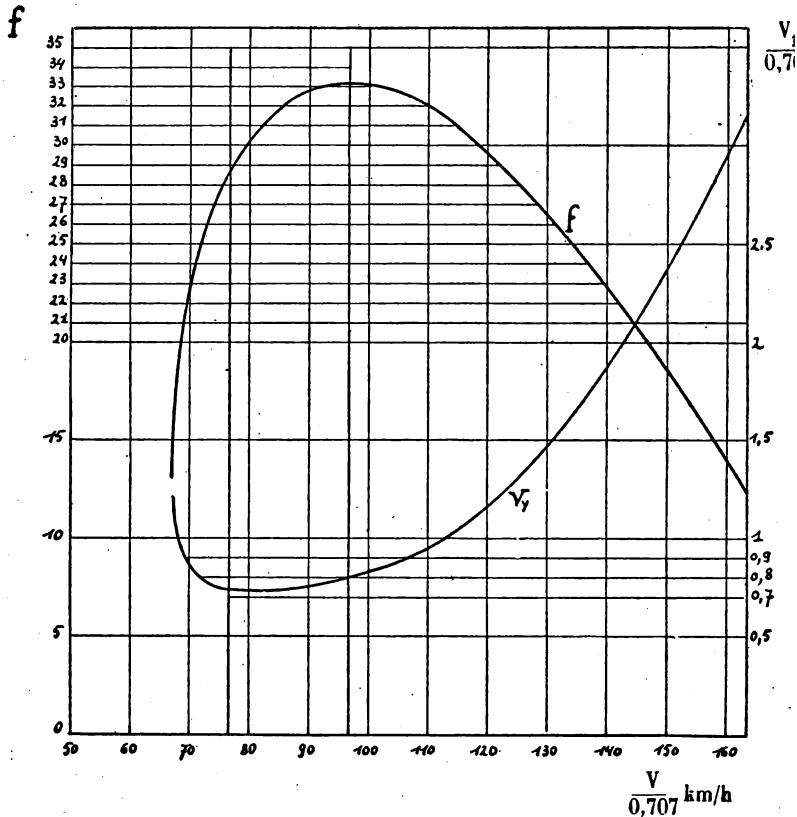


FIG. 13



Les performances du planeur se déduisent des expressions (52) et de la polaire de l'aile. A titre d'exemple théorique nous les avons calculées et portées en diagramme (fig. 13). L'aile est elliptique à profils Gottingen 430 calés à la même incidence, sa polaire pour l'allongement 20 est donnée fig. 10.-

Nous avons pris  $\frac{q}{S} = 15 \text{ kgs/m}^2$ ,  $q = 120 \text{ kgs}$  à vide et 195 kgs avec Pilote.

Ceci donne :

$$S = 14 \text{ m}^2 \text{ et } \frac{\sigma}{S} = 0,0007 \quad \text{pour } \sigma = 0,0098$$

pois spécifique de l'air standard :  $\delta = 1,225 \text{ kgs/m}^3$   
d'où

$$\sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{\frac{q}{S}} = \sqrt{\frac{2 \times 9,81}{1,225}} \sqrt{15} = 15,5 \text{ m/sec.}$$

On remarque sur les diagrammes deux positions importantes, l'une correspond à la plus faible vitesse de descente verticale c'est celle qui permettra de gagner le maximum d'altitude avec le minimum de temps dans une ascendance locale; à l'autre correspond la plus grande finesse, elle sera utilisée pour se déplacer entre deux ascendances avec la plus faible chute de hauteur et convient donc mieux pour les vols de distance, la première pour les vols de durée. Le pilote a intérêt à ne jamais sortir de la zone ainsi délimitée, il se rendra compte de sa position par son indicateur de vitesse et son variomètre.

## La fonction de transformation d'un profil

Comme nous l'avons montré, la détermination de la résultante aérodynamique et de son moment par rapport à un point au cours d'un mouvement plan permanent, pose le problème d'une représentation-conforme du contour ( $c$ ) du profil sur une circonférence, qui réalise une correspondance biunivoque entre les aires extérieures. Nous étudierons de plus près la forme qu'elle présente.

Nous pouvons, sans nuire à la généralité, prendre pour circonférence celle ( $\Gamma$ ) de rayon unité dans le plan  $Z$  (fig. 14).

Par la relation  $ZZ' = 1$ , nous ferons correspondre aux aires extérieures le cercle unité du plan  $Z'$ , dont l'origine correspondra au point à l'infini du plan  $Z$  (fig. 14<sup>bis</sup>). La condition que les points à l'infini de  $z$  et  $Z$  soient homologues, impose à la fonction  $z(Z')$  une singularité à l'origine. Son développement en série de Laurent autour de  $Z' = 0$  :

$$z = \dots \frac{b_n}{Z'^n} + \dots + \frac{b_1}{Z'} + a_0 + a_1 Z' + \dots + a_n Z'^n + \dots$$

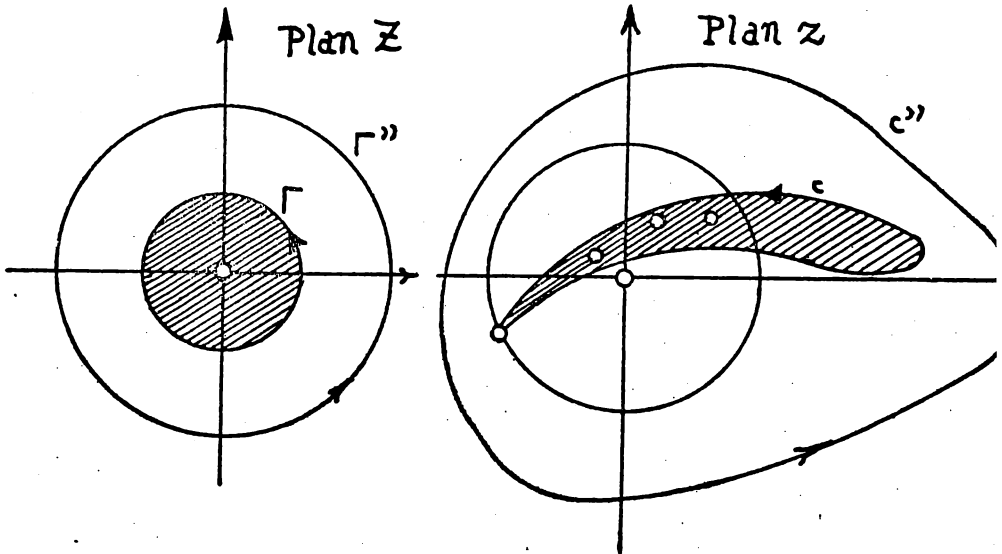


Fig. 14

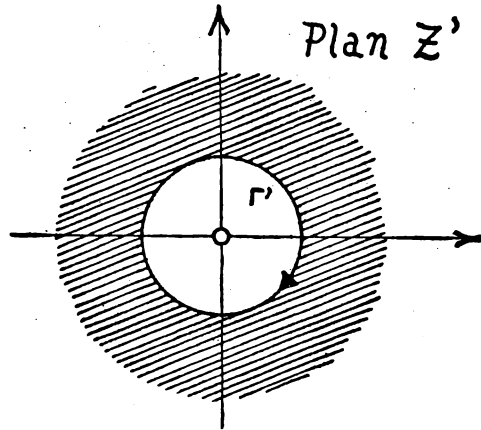


Fig. 14 bis

aura pour domaine de convergence uniforme toute couronne circulaire, centrée à l'origine et intérieure (au sens étroit) à la circonférence unité  $\Gamma'$ . La correspondance n'admet en effet hors de  $\Gamma$  aucune singularité à distance finie.

Nous sommes ainsi assurés de la convergence dans le même domaine de la série dérivée :

$$\frac{dz}{dZ'} = \dots - \frac{nb_n}{Z'^{n+1}} \dots - \frac{b_1}{Z'^2} + a_1 + 2a_2 Z' + \dots + na_n Z'^{n-1} + \dots$$

et par suite de celle de la série :

$$\frac{dz}{dZ} = -Z'^2 \frac{dz}{dZ'} = \dots + \frac{nb_n}{Z'^{n-1}} \dots + b_1 - a_1 Z'^2 \dots - na_n Z'^{n+1} + \dots$$

Pour que la représentation entre  $z$  et  $Z$  reste conforme dans les voisinages des points à l'infini il faudra :

$$\frac{dz}{dZ} \neq 0 \text{ et } \neq \infty \text{ pour } Z' = 0$$

Nous en tirons les conditions :

$$b_1 \neq 0 \quad b_i = 0 \quad i = 2, 3, \dots, n, \dots$$

En sorte que la singularité de la fonction  $z(Z')$  soit réduite à un pôle simple et que la fonction de transformation se présente sous la forme :

$$(51) \quad z = b_1 Z + a_0 + \frac{a_1}{Z} + \frac{a_2}{Z^2} + \dots + \frac{a_n}{Z^n} + \dots$$

La convergence uniforme du second membre étant assurée dans tout domaine borné du plan  $Z$  limité intérieurement par  $\Gamma$  ( $\Gamma$  exclu).

La transformation inverse, en dehors du pôle simple à l'infini, possède un ensemble de singularités dans le continu formé par  $c$  et son domaine intérieur, le domaine de convergence de la série inverse :

$$(52) \quad Z = d_1 z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots + \frac{c_n}{z^n} + \dots$$

est donc limité intérieurement par une circonférence centrée à l'origine et passant par la première de ces singularités.

La relation entre les coefficients des deux séries s'obtient par le calcul des résidus <sup>(1)</sup>

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c''} z^{n-1} Z dz \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''} Z^{n-1} z dZ$$

où nous pouvons toujours choisir  $c''$  et  $\Gamma''$  comme deux contours correspondants dans les domaines de convergence respectifs de (52) et (51).

Nous pouvons alors remplacer, dans la première intégrale par exemple, la fonction  $z$  par son expression (51) et  $\frac{dz}{dZ}$  par la série qu'on en dérive; et réciproquement pour la seconde

<sup>(1)</sup> L'intégration d'une fonction  $f(z)$  sur un contour fermé où elle est continue, uniforme et monogène et admet un développement uniformément convergent :

$$f(z) = \dots + \frac{d_n}{z^n} + \dots + \frac{d_1}{z} + c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$$

est légitime terme à terme. Or chaque terme intégré donne une fonction uniforme dans tout le plan et par suite une contribution nulle, à l'exception du terme en  $\frac{1}{z}$ .

$$\int f(z) dz = [d_1 \log z]$$

Le terme entre crochet indiquant qu'il faut prendre la différence des valeurs en un même point de ce terme quand on a parcouru une fois le contour dans le sens d'intégration. Posons :

$$z = \rho e^{i\theta}$$

il vient :

$$\int f(z) dz = d_1 [\log \rho + i(\theta + 2\pi)] - d_1 [\log \rho + i\theta] = 2\pi i d_1.$$

intégrale :

$$(53) \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''} z^{n-1} (Z) Z \frac{dz}{dZ} dZ \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''} Z^{n-1} (z) z \frac{dZ}{dz} dz$$

Il suffit alors d'égaliser  $c_n$  au coefficient du terme en  $\frac{1}{Z}$  de la fonction intégrée et de même  $a_n$  au coefficient du terme en  $\frac{1}{z}$ .

On obtient de cette façon

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= -a_1 \\ c_2 &= -b_1 a_2 - a_0 a_1 \\ c_3 &= -b_1^2 a_3 - a_0^2 a_1 - a_1^2 b_1 - 2a_0 a_2 b_1 \\ &\dots \end{aligned} \right\} \text{et les formules symétriques :} \quad (54)$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_1 &= -c_1 \\ a_2 &= -d_1 c_2 - c_0 c_1 \\ a_3 &= -d_1^2 c_3 - c_0^2 c_1 - c_1^2 d_1 - 2c_0 c_2 d_1 \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

d'autre part :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dz}{dZ} = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dZ}{dz}}$$

nous donne :

$$b_1 = \frac{1}{d_1}$$

Enfin, le premier groupe de (54) considéré comme un système récurrent dans les  $a_i$  nous donne :

$$a_2 = -\frac{c_2 + a_0 a_1}{b_1} = -d_1 c_2 - d_1 a_0 a_1$$

En comparant avec l'expression de  $a_2$  donnée dans le second groupe il vient :

$$c_0 + d_1 a_0 = 0$$

ce qui complète les relations cherchées.

**Correspondance entre les vitesses à l'infini :**

Soit :

$$b_1 = B_1 e^{i\varphi_1}$$

Quand  $Z$  tend vers l'infini dans la direction  $\alpha$ , c.-à-d. quand on fait tendre  $R$  vers l'infini dans l'expression :

$$Z = R e^{i\alpha}$$

$$z = b_1 R e^{i\alpha} + a_0 + \frac{a_1}{R e^{i\alpha}} + \dots = B_1 R e^{i(\alpha + \varphi_1)} + a_0 + \dots$$

tend vers l'infini dans la direction  $(\alpha + \varphi_1)$ .

Soit maintenant  $f(Z)$  le potentiel complexe de l'écoulement autour du cercle unité; si la vitesse tend alors vers une valeur finie et déterminée dont la valeur conjuguée est donnée par :

$$V_\infty e^{-i\gamma} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{df}{dZ}$$

la vitesse tendra dans le plan  $z$  vers une valeur finie et déterminée de conjuguée :

$$v_\infty e^{-i\delta} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{df}{dz} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{df}{dZ} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dZ}{dz} = \frac{V_\infty}{B_1} e^{-i(\gamma + \varphi_1)}$$

d'où les correspondances entre les vitesses à l'infini :

$$(55) \quad \begin{cases} V_\infty = B_1 v_\infty \\ \gamma = \delta - \varphi_1 \end{cases} \quad (\text{fig. 15}).$$

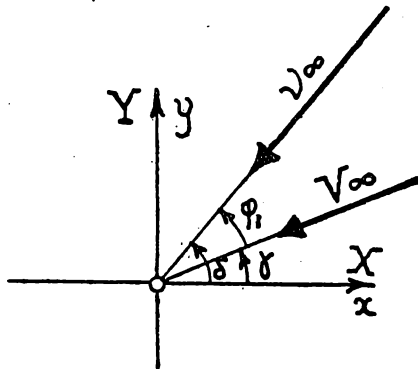


Fig. 15

Correspondances entre les vitesses à l'infini

### Groupe des similitudes :

Les propriétés du profil étudié sont évidemment indépendantes du groupe des similitudes, il est par conséquent possible par la transformation :

$$z = \frac{1}{b_1} (z - a_0)$$

de ramener la fonction de transformation à la forme aussi générale :

$$z = Z + \frac{a_1}{Z} + \frac{a_2}{Z^2} + \dots \quad (56)$$

Tandis que les relations (54) réduites à :

$$\begin{cases} a_1 = -c_1 \\ a_2 = -c_2 \\ a_3 = -c_3 - c_1^2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -a_1 \\ c_2 = -a_2 \\ c_3 = -a_3 - a_1^2 \end{cases}$$

conduisent à la série inverse :

$$Z = z + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots \quad (57)$$

Dans ces conditions les vitesses à l'infini se correspondent en grandeur et en direction. L'origine du plan  $z$  est dite rapportée au *centre* du profil.

### Singularités de la transformation :

En dehors d'un pôle simple à l'infini, la fonction  $z(Z)$  admet un ensemble de singularités dans le continu formé de  $\Gamma$  et de son domaine intérieur.

S'il n'y a pas de singularités sur  $\Gamma$  la convergence de (56) est assurée sur le contour lui-même et le contour transformé  $c$  est par définition un arc analytique régulier, dont la tangente varie par conséquent de façon continue.

Le cas le plus intéressant est celui où la fonction comporte une singularité sur le contour, qui correspond à une discontinuité dans la variation de la tangente à  $c$ .

Supposons par exemple qu'au point  $z_0$  correspondant à  $e^{i\alpha}$  sur  $\Gamma$ , la discontinuité ait la valeur  $\beta\pi$  quand on parcourt  $c$  dans le sens indiqué (fig. 16).

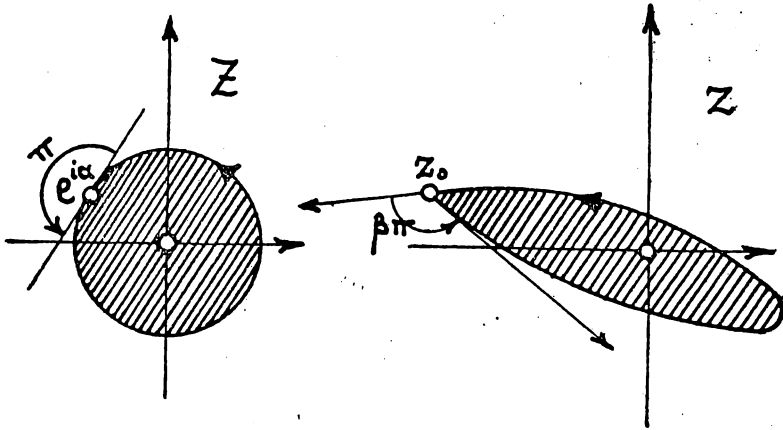


Fig. 16

Les fonctions  $(z - z_0)$  et  $dz$ , y subissent une discontinuité d'argument :  $(1 + \beta)\pi$ . Tandis qu'au point correspondant sur  $\Gamma$  les fonctions  $(Z - e^{i\alpha})$  et  $dZ$  subissent une discontinuité d'argument  $\pi$ .

La discontinuité est donc pour la dérivée  $\frac{dz}{dZ}$  :

$$(1 + \beta)\pi - \pi = \beta\pi.$$

Formons maintenant la fonction  $(Z - e^{i\alpha})^\beta$  dont la discontinuité vaut aussi  $\beta\pi$ ; la fonction

$$\Phi(Z) = \frac{dz}{dZ} (Z - e^{i\alpha})^{-\beta}$$

est analytique régulière sur  $\Gamma$ , ses singularités sont celles de  $\frac{dz}{dZ}$  dans  $\Gamma$  (au sens étroit).

On aurait formé de même

$$\Psi(z) = \frac{dZ}{dz} (z - z_0)^{\frac{\beta}{1+\beta}}$$

analytique régulière sur  $c$ . Si  $\beta = 1$ , le contour possède un point de rebroussement, et  $e^{i\alpha}$  est un zéro simple de  $\frac{dz}{dZ}$  ou un pôle simple de  $\frac{dZ}{dz}$ .



Si  $\beta < 1$ , le profil admet un angle dièdre à la pointe;  $e^{ia}$  est un point de branchement algébrique ou algebrico-logarithmique pour  $\frac{dz}{dZ}$  et une singularité pour  $z(Z)$ , qui n'est plus une fonction uniforme dans tout domaine contenant ce point.

Dans ces derniers cas on n'est plus assuré de la convergence de (56) sur tous les points de  $\Gamma$ . Entourons la singularité sur le contour d'une petite demi-circonférence, nous formerons ainsi le contour  $H$ , sur lequel et en dehors duquel  $\frac{dz}{dZ}$  est holomorphe <sup>(1)</sup> (fig. 17).

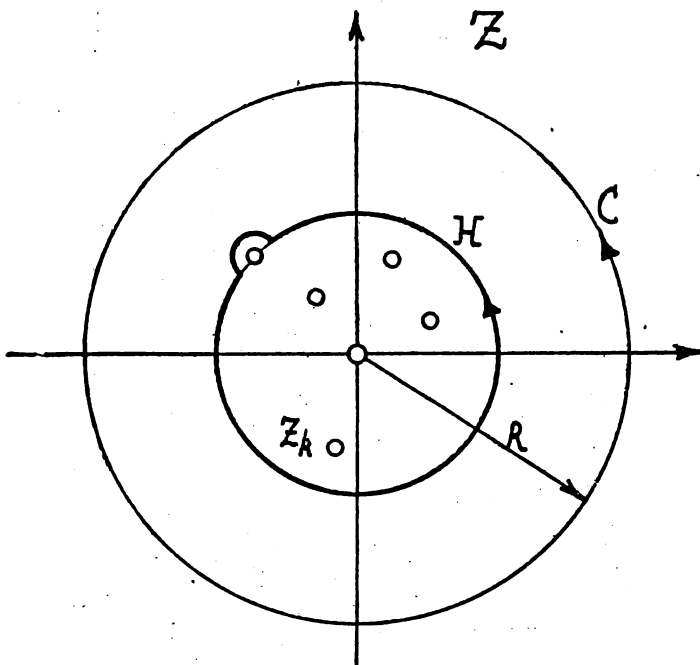


Fig. 17

L'ensemble des singularités intérieures à la circonférence unité doit précisément satisfaire à la condition d'uniformité sur  $H$ .

(1) Rappelons que la propriété d'holomorphic condense celles de continuité, uniformité et monogénéité.

Pour la réaliser nous mettrons  $\frac{dz}{dZ}$  sous la forme d'une somme de produits de facteurs holomorphes sur H.

Laissons de côté le cas de singularités essentielles. Un facteur de la forme :

$$(Z - Z_k)^{\beta_k} \quad \text{où} \quad |Z_k| < 1$$

introduit un branchement si  $\beta_k$  n'est pas un entier, nous le rendrons holomorphe sur H en introduisant à l'origine une singularité compensatrice :  $Z^{-\beta_k}$ .

Chaque facteur prend ainsi la forme :

$$\left(1 - \frac{Z_k}{Z}\right)^{\beta_k}$$

où  $\beta_k$  peut être quelconque. Cet artifice n'a nullement particularisé la forme de la fonction  $\frac{dz}{dZ}$  car, comme on le remarquera, l'origine peut être un point régulier ou singulier quelconque moyennant un choix convenable des exposants  $\beta_k$ .

Comme :

$$\lim_{Z \rightarrow \infty} \frac{dz}{dZ} = 1$$

on aura comme forme générale :

$$(58) \quad \frac{dz}{dZ} = \left(1 - \frac{e^{i\alpha}}{Z}\right)^\beta \sum_i Z^{-i} \sum_m \prod_n \left(1 - \frac{Z_{imn}}{Z}\right)^{\beta_{imn}} \quad l = 0, 1 \dots$$

Les sommations et produits étant étendus à un nombre fini de termes, sans quoi il y aurait au moins un point limite de  $Z_{imn}$ , partant, une singularité essentielle.

L'origine sera un point régulier si l'on n'a que le terme pour :

$$l = 0 \quad \text{et} \quad \beta + \sum_n \beta_{omn} = \lambda_m,$$

entier négatif ou nul pour chaque valeur de  $m$ .

Les  $Z_{imn}$  et  $\beta_{imn}$  sont encore conditionnés par l'uniformité de la fonction  $z(Z)$  sur H. Ceci se traduit comme on peut d'ailleurs le constater sur :

$$(59) \quad \frac{dz}{dZ} = 1 - \frac{a_1}{Z^2} - \frac{2a_2}{Z^3} \dots$$

par l'absence du terme en  $\frac{1}{Z}$  dont l'intégration aurait fourni

un logarithme. Il faudra donc annuler le coefficient du terme en  $\frac{1}{Z}$  de l'expression (58).

Cherchons pour cela le développement d'un facteur :

$$\left(1 - \frac{Z_k}{Z}\right)^{\beta_k} = 1 + \frac{a_{1k}}{Z} + \frac{a_{2k}}{Z^2} + \dots$$

en série de Laurent relative à l'origine, le cercle limitant intérieurement la convergence passant par  $|Z_k| < 1$  et H se trouvant par conséquent dans le domaine de convergence.

Nous aurons :

$$a_{1k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{H}} \left(1 - \frac{Z_k}{Z}\right)^{\beta_k} dZ$$

Une première intégration par parties donne :

$$a_{1k} = \frac{1}{2\pi i} \left[ Z \left(1 - \frac{Z_k}{Z}\right)^{\beta_k} \right] - \frac{\beta_k Z_k}{2\pi i} \int_{\mathbb{H}} \left(1 - \frac{Z_k}{Z}\right)^{\beta_k - 1} \frac{dZ}{Z}$$

Le crochet est nul vu l'uniformité de la fonction qu'il renferme, une seconde intégration par parties donne alors :

$$a_{1k} = -\frac{\beta_k Z_k}{2\pi i} \left[ \left(1 - \frac{Z_k}{Z}\right)^{\beta_k - 1} \log Z \right] + \frac{\beta_k(\beta_k - 1) Z_k^2}{2\pi i} \int_{\mathbb{H}} \left(1 - \frac{Z_k}{Z}\right)^{\beta_k - 2} \frac{\log Z dZ}{Z^2}$$

Comme la fonction intégrée était holomorphe sur H et en dehors nous pouvons remplacer le contour d'intégration par une grande circonférence sur laquelle :

$$Z = R e^{i\theta}$$

Le premier terme du second membre devient :

$$-\beta_k Z_k \left(1 - \frac{Z_k}{R e^{i\theta}}\right)^{\beta_k - 1}$$

L'intégrale du second terme J est inférieure en module à :

$$|J| \leq \frac{2\pi R \log R}{R^2}$$

qui tend vers zéro quand R tend vers l'infini, il reste alors la limite du premier terme :

$$a_{1k} = -\beta_k Z_k$$

Les termes suivants s'obtiennent de façon récursive au moyen d'une intégration par parties :

$$a_{2k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} Z \left(1 - \frac{Z_k}{Z}\right)^{\beta_k} dZ = \frac{1}{2\pi i} \left[ \frac{Z^2}{2} \left(1 - \frac{Z_k}{Z}\right)^{\beta_k} \right] - \frac{\beta_k Z_k}{4\pi i} \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{Z_k}{Z}\right)^{\beta_k - 1}$$

le crochet étant nul et l'intégrale équivalente à celle pour  $a_{1k}$ , d'où :

$$a_2 = \frac{\beta_k (\beta_k - 1) Z_k^2}{2}$$

d'où finalement : (1)

$$(60) \quad \left(1 - \frac{Z_k}{Z}\right)^{\beta_k} = 1 - \frac{\beta_k Z_k}{Z} + \frac{\beta_k (\beta_k - 1) Z_k^2}{2 Z^2} - \frac{\beta_k (\beta_k - 1) (\beta_k - 2) Z_k^3}{3! Z^3} \dots$$

En remplaçant ces facteurs par leurs développements dans (58), on trouve la condition d'uniformité de  $z(Z)$  :

$$- \sum_m (\beta e^{i\alpha} + \sum_n \beta_{omn} Z_{omn}) + m_1 = 0$$

$m_1$  désignant le nombre de termes de la sommation d'indice  $m$  pour  $l = 1$ .

### Formes particulières.

Une forme plus simple et qui satisfait largement aux besoins de la pratique est celle pour laquelle  $\frac{dz}{dZ}$  n'a pas de branchements qui ne soient des zéros ou des infinis, dans ce cas on a la forme plus simple :

$$(61) \quad \frac{dz}{dZ} = \left(1 - \frac{e^{i\alpha}}{Z}\right)^{\beta} \prod_k \left(1 - \frac{Z_k}{Z}\right)^{\beta_k}$$

et l'origine est un point régulier si  $\beta + \sum \beta_k = n$  entier négatif ou nul.

La condition d'uniformité de la fonction  $z(Z)$  est ici :

$$(62) \quad \beta e^{i\alpha} + \sum_k \beta_k Z_k = 0$$

(1) Cette série correspond à une détermination particulière, en effet on a de façon plus précise :

$$a_{1k} = -\beta_k Z_k (1 - \frac{Z_k}{Z})^{\beta_k - 1} \dots \text{ posons } 1 = e^{2k\pi i} \text{ on a :}$$

$$a_{1k} = -\beta_k Z_k e^{i 2k (\beta_k - 1) \pi}, a_{2k} = \frac{1}{2} \beta_k (\beta_k - 1) Z_k^2 e^{i 2k (\beta_k - 2) \pi}, \text{ etc.}$$

Le choix fait, correspond à  $k = 0$ .

L'angle à la pointe du profil vaut :  $\pi(1 - \beta)$ .

La valeur du coefficient  $a_1$ , essentielle à la détermination du moment de la résultante aérodynamique est d'après (59), le coefficient changé de signe du terme en  $\frac{1}{Z^2}$  de  $\frac{dz}{dZ}$ . On le trouvera en fonction des  $Z_k$  et  $\beta_k$  en remplaçant à nouveau chaque facteur par son développement (60). Il vient :

$$-a_1 = \frac{e^{2i\alpha}(\beta - 1)\beta}{2} + \sum_k \frac{Z_k^2(\beta_k - 1)\beta_k}{2} + \beta e^{i\alpha} \sum_k \beta_k Z_k + \sum_{j \neq k} \beta_j \beta_k Z_j Z_k$$

ou en se servant de (62) :

$$(63) \quad +a_1 = e^{2i\alpha} \frac{\beta(\beta + 1)}{2} - \sum_k \frac{\beta_k(\beta_k - 1)Z_k^2}{2} - \sum_{j \neq k} \beta_j \beta_k Z_j Z_k$$

Dans le cas où les  $\beta_k$  seraient tous égaux à 1, les relations (62) et (63) prennent les formes simples :

$$\left\{ \begin{array}{l} (62') \quad \beta e^{i\alpha} + \sum_k Z_k = 0 \\ (63') \quad a_1 = e^{2i\alpha} \frac{\beta(\beta + 1)}{2} - \sum_{j \neq k} Z_j Z_k \end{array} \right.$$

et la dérivée peut s'écrire :

$$\frac{dz}{dZ} = \left(1 - \frac{e^{i\alpha}}{Z}\right)^\beta \left[1 + \frac{\beta e^{i\alpha}}{Z} + \frac{m_2}{Z^2} + \dots + \frac{m_n}{Z^n}\right]$$

ce qui fait prévoir une intégrale de la forme :

$$z = \left(1 - \frac{e^{i\alpha}}{Z}\right)^{\beta+1} \left[Z + \frac{p_1}{Z} + \dots + \frac{p_{n-2}}{Z^{n-2}}\right] + b$$

ou

$$z - b = \left(1 - \frac{e^{i\alpha}}{Z}\right)^{\beta+1} Z \prod_j \left(1 - \frac{Z_j}{Z}\right)$$

### Transformations à $n$ termes <sup>(1)</sup> :

Si la série (56) est arrêtée au  $n^{\text{ième}}$  terme on a immédiatement l'expression valable dans tout le plan :

---

(1) Les profils obtenus par ces transformations sont connus sous le nom de « profils von Mises ».

$$(64) \left\{ \begin{array}{l} z = Z + \frac{a_1}{Z} + \dots + \frac{a_{n-1}}{Z^{n-1}} \qquad \sum_k Z_k = 0. \\ \text{et} \\ \frac{dz}{dZ} = 1 - \frac{a_1}{Z^2} \dots - \frac{(n-1)a_{n-1}}{Z^n} = \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{Z_k}{Z} \right) \end{array} \right.$$

Les seconds membres sont des fonctions rationnelles avec pôle à l'origine : On voit d'après l'expression de  $\frac{dz}{dZ}$  que ces transformations ne peuvent donner que des profils avec rebroussements. Tout contour analytique du plan  $Z$  passant par un des  $Z_k$  et laissant les autres dans son domaine intérieur fournit une représentation conforme de ce contour et de son domaine extérieur sur le contour et le domaine extérieur d'un profil à un point de rebroussement.

Nous appellerons *famille* de profils définis par cette transformation l'ensemble correspondant à une famille de circonférences passant par un des  $Z_k$  et comprenant les autres dans son domaine intérieur. Cette famille est caractérisée par le paramètre  $\mu$ , affixe du centre d'une circonférence, dont le rayon est alors défini sans ambiguïté par les conditions précédentes (fig. 18).

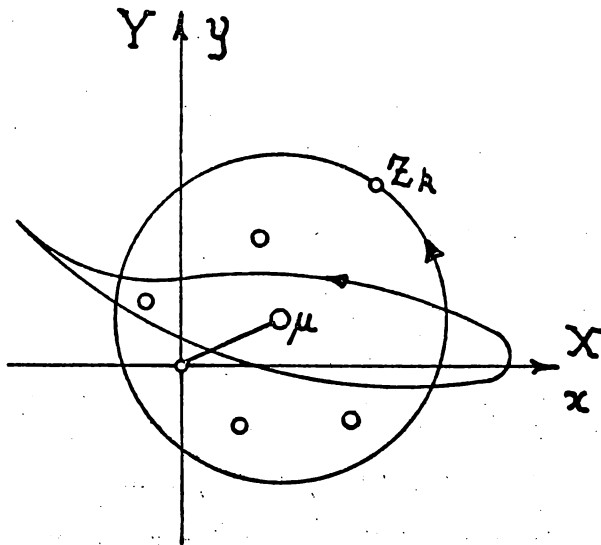


Fig. 18

Nous rechercherons quelle est en fonction du paramètre et de (64) l'expression de la fonction représentant la famille sur la circonférence unité avec correspondance des vitesses à l'infini. Nous nous servirons de la propriété d'indépendance des profils vis-à-vis du groupe des similitudes.

Effectuons d'abord une translation des axes au centre de la circonférence :

$$Z = Z' + \mu$$

Nous avons :

$$z = Z' + \mu + \frac{a_1}{Z' + \mu} + \frac{a_2}{(Z' + \mu)^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{(Z' + \mu)^{n-1}}$$

Mais

$$\frac{1}{Z' + \mu} = \frac{1}{Z'} - \frac{\mu}{Z'^2} + \frac{\mu^2}{Z'^3} \dots$$

$$\frac{1}{(Z' + \mu)^2} = \frac{1}{Z'^2} - \frac{2\mu}{Z'^3} + \frac{3\mu^2}{Z'^4} - \frac{4\mu^3}{Z'^5} \dots$$

.....

$$\frac{1}{(Z' + \mu)^{n-1}} = \frac{(n-2)!}{Z'^{n-1}} - \frac{\mu(n-1)!}{Z'^n} + \frac{\mu^2 n!}{2Z'^{n+1}} - \frac{\mu^3(n+1)!}{3!Z'^{n+2}} \dots$$

séries de Laurent valables hors de la circonférence de rayon  $\mu$  dans le plan  $Z'$ , d'où :

$$z = Z' + \mu + \frac{a_1}{Z'} + \frac{a_2 - \mu a_1}{Z'^2} + \dots$$

$$+ \frac{(n-2)! \left[ a_{n-1} - \mu a_{n-2} + \frac{\mu^2}{2} a_{n-3} + \dots + (-1)^k \frac{\mu^k}{k!} a_{n-k} \dots \right]}{Z'^{n-1}} + \dots$$

Ceci montre que si l'on superpose les plans  $Z$  et  $z$ , ce que nous avons appelé *centre* du profil coïncide avec le centre de la circonférence génératrice, il faudra en effet pour ramener le centre à l'origine effectuer la translation :

$$z = z' + \mu$$

Soit  $Z_k$  l'affixe du zéro sur le contour du plan  $Z$ , la transformation :

$$z' = Z' + \frac{a_1}{Z'} + \frac{a_2 - \mu a_1}{Z'^2} \dots$$

Réalise la représentation du profil sur la circonférence du

plan  $Z'$  centrée à l'origine de rayon :

$$|Z_k - \mu|$$

avec correspondance des vitesses à l'infini.

Si nous le ramenons à la circonférence unité du plan  $Z''$  par la similitude :

$$Z' = Z'' (\mu - Z_k)$$

qui ramène le zéro sur le contour au point d'affixe  $(-1)$ , il nous faudra opérer la même similitude :

$$z' = z'' (\mu - Z_k)$$

pour conserver la correspondance entre vitesses à l'infini dans les plans  $Z''$  et  $z''$ .

Il viendra finalement en supprimant les accents :

$$(65) \quad z = Z + \frac{a_1}{(\mu - Z_k)^2 Z} + \frac{a_2 - \mu a_1}{(\mu - Z_k)^3 Z^2} + \dots + \frac{(n-2)! \left[ a_{n-1} - \mu a_{n-2} \dots + (-1)^k \frac{\mu^k}{k!} a_{n-k} \dots \right]}{(\mu - Z_k)^n Z^{n-1}} \dots$$

qui représente la famille de paramètre  $\mu$  sur la circonférence unité avec correspondance des vitesses à l'infini.

Bien entendu cette expression n'a d'intérêt que pour la détermination de la résultante aérodynamique et de son moment, pour la construction géométrique du profil on se servira de la série arrêtée (64).

### Transformation de Joukowski.

C'est la Transformation la plus simple qui entre dans la catégorie précédente :

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{l} z = Z + \frac{a^2}{Z} = \frac{(Z + ia)(Z - ia)}{Z} \\ \frac{dz}{dZ} = 1 - \frac{a^2}{Z^2} = \frac{(Z + a)(Z - a)}{Z^2} \end{array} \right.$$

Au prix d'une similitude dans les deux plans on peut toujours la ramener à :

$$\left\{ \begin{array}{l} z = Z + \frac{1}{Z} = \frac{(Z + i)(Z - i)}{Z} \\ \frac{dz}{dZ} = \frac{(Z + 1)(Z - 1)}{Z^2} \end{array} \right.$$



Les valeurs imaginaires pures du paramètre  $\mu$ , auxquelles correspondent des circonférences génératrices passant par les deux zéros de  $\frac{dz}{dZ}$  d'affixes  $(+1)$  et  $(-1)$ , donneront des profils à deux points de rebroussement, qui sont des arcs de circonférence limités aux points  $(-2)$  et  $(+2)$  du plan  $z$ . On aura en particulier le segment  $(-2) (+2)$  de l'axe réel pour la circonférence unité ( $\mu = 0$ ).

Les valeurs réelles du paramètre  $\mu$ , pour lesquelles les circonférences génératrices ne passent plus que par un des zéros, conduisent à des profils symétriques à un point de rebroussement.

Enfin les valeurs complexes de  $\mu$  donnent les profils généraux, dont la courbure est fonction de la partie imaginaire de  $\mu$  et l'épaisseur, de la partie réelle.

En particulier la courbure peut être caractérisée par le *squelette* du profil, arc de circonférence intérieur au profil et tangent au point de rebroussement, qui correspond à la circon-

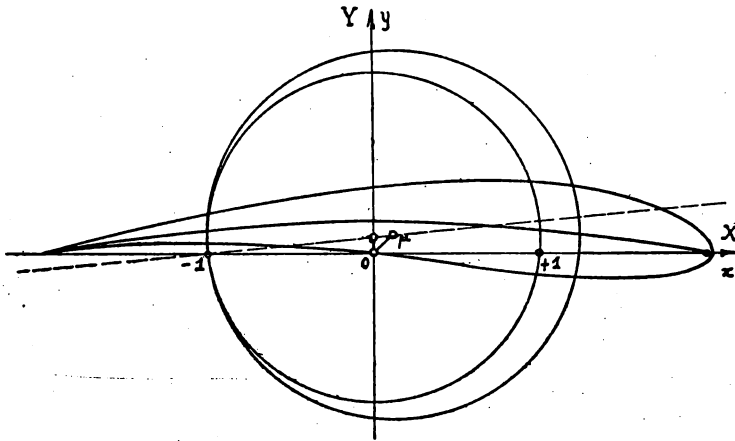


FIG. 19.  
Profil Göttingen 430.

férence génératrice tangente à celle du profil au zéro et centrée sur l'axe imaginaire (fig. 19).

Si nous choisissons le point  $(-1)$  comme zéro sur le contour, la fonction représentant la famille des profils Joukowski

sur la circonférence unité sera, sous la condition que la partie réelle de  $\mu$  soit positive ou nulle :

$$z = Z + \frac{1}{(\mu + 1)^2 Z} - \frac{\mu}{(\mu + 1)^3 Z^2} \cdots + (-1)^n \frac{\mu^n}{(\mu + 1)^{n+2} Z^{n+1}} + \cdots$$

### Une généralisation de la Transformation de Joukowski.

On peut reprocher aux profils Joukowski l'amincissement excessif de la partie arrière, que provoque le point de rebroussement et qui rend sa réalisation pratique délicate. Un aspect particulier de la Transformation de Joukowski nous permettra de la généraliser et de former une famille de profils de même nature avec l'angle dièdre désiré à la pointe.

Remarquons qu'on peut écrire :

$$z = Z + \frac{a^2}{Z}$$

sous la forme :

$$z = \frac{2a(Z + a)^2 + 2a(Z - a)^2}{(Z + a)^2 - (Z - a)^2}$$

Nous généraliserons cette transformation sous la forme :

$$z = \frac{m(Z - a)^n + p(Z - b)^n}{q(Z - a)^n + r(Z - b)^n}$$

qu'on transformera aisément en :

$$\frac{(Z - a)^n}{(Z - b)^n} = -\frac{r}{q} \frac{z - \frac{p}{r}}{z - \frac{m}{q}}$$

Posons :

$$k = -\frac{r}{q} \quad a' = \frac{p}{r} \quad b' = \frac{m}{q}$$

et nous aurons :

$$\frac{(Z - a)^n}{(Z - b)^n} = k \frac{z - a'}{z - b'}$$

Soient  $x$  et  $x'$  deux points homologues de cette relation

$$\frac{(x - a)^n}{(x - b)^n} = k \frac{x - a'}{x - b'}$$

Par division membre à membre nous obtenons la relation :

$$\left(\frac{Z-a}{Z-b} : \frac{x-a}{x-b}\right)^n = \left(\frac{z-a'}{z-b'} : \frac{x'-a'}{x'-b'}\right)$$

aisée à interpréter car les quantités :

$$\lambda = \frac{Z-a}{Z-b} : \frac{x-a}{x-b} \quad \text{et} \quad \lambda' = \frac{z-a'}{z-b'} : \frac{x'-a'}{x'-b'}$$

représentent les rapports anharmoniques d'un groupe de quatre points homologues dont deux fixes ( $a, a'$ ) et ( $b, b'$ ), qui seront dits *foyers* de la transformation.

Ces rapports anharmoniques sont liés de façon simple :

$$\lambda^n = \lambda \quad \text{ou} \quad \Lambda^n e^{in\theta} = \Lambda' e^{i\theta'}$$

Il est aisé de vérifier que quand  $Z$  parcourt une circonférence passant par les foyers  $a$  et  $b$ , l'argument de  $\lambda$  est constant sur les deux arcs, sa discontinuité étant  $\pm \pi$  quand  $Z$  traverse un foyer. En particulier,  $\lambda$  est réel quand  $x$  se trouve aussi sur cette circonférence. D'ailleurs, dans le plan  $\lambda$  qui est relié au plan  $Z$  par une transformation homographique (1), le foyer  $b$  est rejeté à l'infini et le pinceau des circonférences passant par  $a$  et  $b$  est transformé dans le faisceau des droites passant par l'origine ce qui confirme l'assertion faite plus haut (fig. 20).

La relation entre arguments :

$$\theta' = n(\theta + 2k\pi) \quad k = 0, 1, \dots$$

montre alors que  $\theta'$  est constant sur ces arcs, mais subit la discontinuité  $\pm n\pi$ .

Pour chaque valeur de  $k$  c.-à-d. pour chaque détermination choisie, et on remarquera qu'on ne change de détermination après un circuit fermé que si celui-ci entoure *un* des foyers, il correspondra dans le plan  $z$  deux arcs de circonférence se coupant aux foyers sous l'angle  $n\pi$ . Les domaines hachurés et leurs complémentaires sont les domaines des points homologues. Par généralisation de la transformation de Joukowski nous considérerons l'ensemble des circonférences du pinceau

---

(1) Une transformation homographique  $W = \frac{az+b}{cz+d}$  a la propriété de conserver la valeur du rapport anharmonique de quatre points quelconques et de transformer toute circonférence en une autre, les droites étant incluses dans le groupe des circonférences.

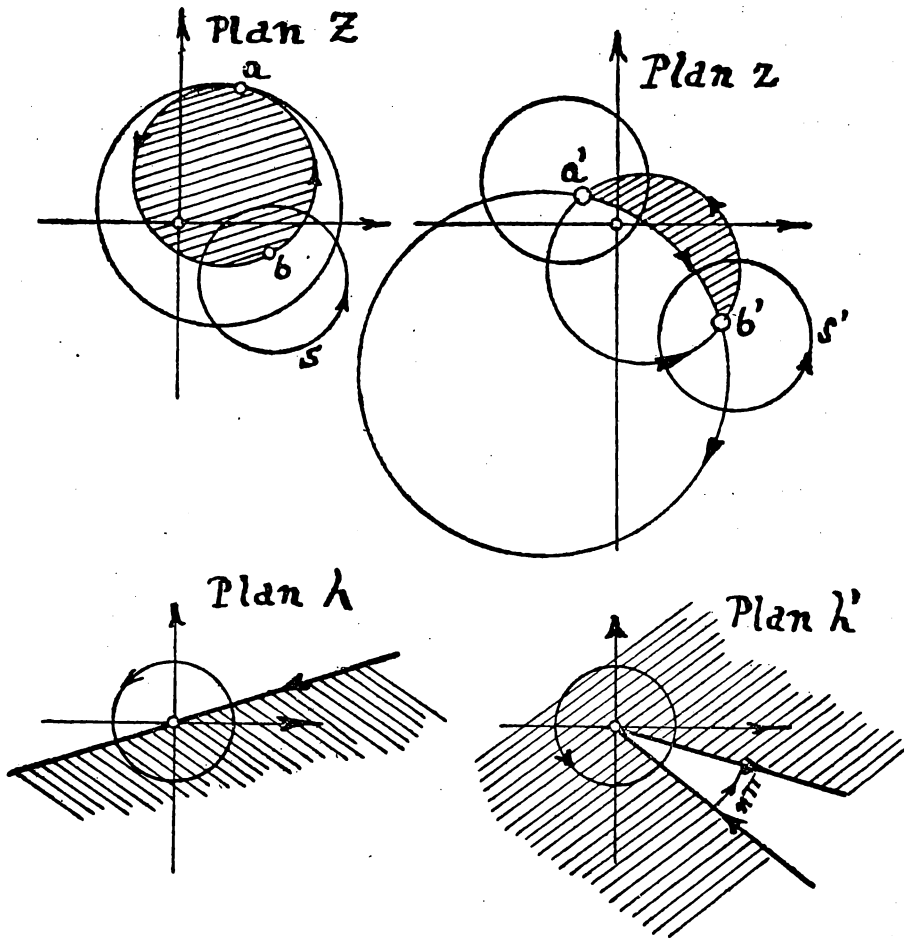


Fig. 20

comme générateur de l'ensemble des *squelettes*. Toute circonférence passant par un des foyers et entourant l'autre donnant un profil d'angle  $n\pi$  à la pointe (fig. 21).

Par des similitudes dans les deux plans nous prendrons la forme :

$$\frac{z-r}{z+r} = \left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^n$$

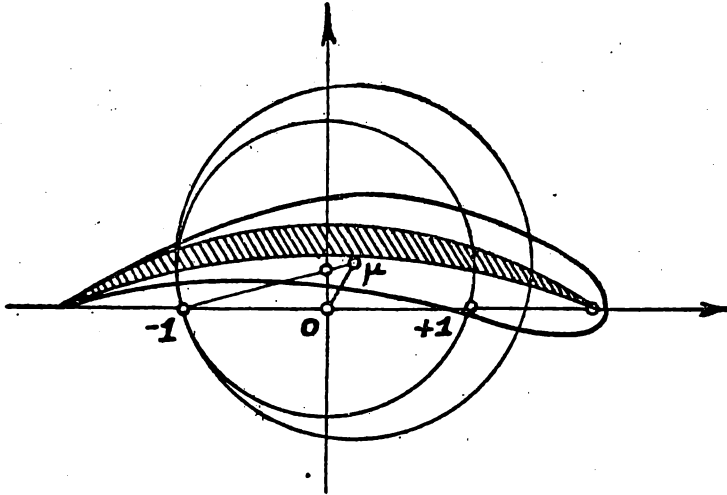


Fig. 21

et

$$z = -r + \frac{2r}{1 - \left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^n}$$

Développons  $\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^n$  en série de Laurent valable hors de la circonférence unité : par la même méthode que nous avons employée pour  $\left(1 - \frac{Z_k}{Z}\right)^{\beta_k}$  (1).

$$\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^n = 1 + \frac{m_1}{Z} + \frac{m_2}{Z^2} + \dots$$

On a

$$m_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_c \left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^n dZ = \frac{-2n}{2\pi i} \int_c \left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^{n-1} \frac{ZdZ}{(Z+1)^2}$$

En intégrant par parties et ne conservant que les intégrales qui ne s'évanouissent pas quand le rayon du contour  $c$  tend vers l'infini ;

par la substitution :  $Z = (Z-1) + 1$  il vient :

$$m_1 = \frac{-2n}{2\pi i} \int_c \left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^{n-1} \frac{Z-1}{Z+1} \frac{dZ}{Z+1} = -2\pi i \frac{2n}{2\pi i} \left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^n$$

---

(1) Même remarque au sujet du choix de la détermination.

et quand  $R \rightarrow \infty$   $m_1 = -2n$ .

$$m_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_c \left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^n Z dZ = -\frac{2n}{2\pi i} \int_c \left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^{n-1} \frac{Z^2 dZ}{(Z+1)^2}$$

et par la substitution :

$$Z^2 = (Z+1)(Z-1) + 1$$

$$m_2 = -\frac{2n}{2\pi i} \int_c \left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^{n-1} \frac{Z-1}{Z+1} dZ = -2nm_1 = 4n^2$$

de même en opérant la substitution :

$$Z^3 = Z(Z+1)(Z-1) + 1$$

on trouverait :

$$m_3 = -\frac{2n}{3} m_2 + \frac{1}{3} m_1 = -\frac{8n^3}{3} - \frac{2}{3} n = -\frac{2n(4n^2+1)}{3} \quad \text{etc...}$$

Cherchons maintenant le développement de

$$z = -r + \frac{2r}{Z} - \frac{4n^2}{Z^2} + \frac{2n(4n^2+1)}{3Z^3} \dots$$

on a :

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z}{Z^2} dZ = \frac{2r}{2\pi i} \int_c \frac{1}{S} \frac{dZ}{Z}$$

où  $S = 2n - \frac{4n^2}{Z} \dots$  tend vers la valeur  $2n$  quand  $R \rightarrow \infty$

d'où :

$$b_1 = 2\pi i \frac{2r}{2\pi i S} + E$$

où E est une intégrale qui s'évanouit quand  $R \rightarrow \infty$ , d'où :

$$b_1 = \frac{2r}{2n} = \frac{r}{n}$$

Pour qu'il y ait correspondance entre les vitesses à l'infini, il faudra donc faire  $r = n$  et la formule devient :

$$(67) \quad \frac{z-n}{z+n} = \left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^n \quad (1)$$

On montrerait par la même voie que sous cette forme on a

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{n^2-1}{3}.$$

---

(1) Le cas  $n = 2$  nous ramène à  $z = Z + \frac{1}{Z}$ .

### Transformations à Singularités essentielles :

Prenons une fonction rationnelle :

$$\frac{P}{Q} = \frac{Z^{n-1} + a_1 Z^{n-2} \dots + a_n}{Z^n + b_1 Z^{n-1} \dots + b_{n+1}}$$

où nous pouvons toujours supposer les racines du numérateur et du dénominateur différentes. Ces dernières représentent alors des pôles de même ordre que leurs ordres de multiplicité respectifs.

Soit  $Z_k$  un de ces pôles et  $\alpha_k$  son ordre de multiplicité, on aura dans une petite couronne centrée autour de ce point :

$$\frac{P}{Q} = \frac{m\alpha_k}{(Z-Z_k)^{\alpha_k}} + \dots + \frac{m_1}{(Z-Z_k)} + n_0 + n_1 (Z-Z_k) \dots$$

La fonction  $e^{\frac{P}{Q}}$  y admettra un développement analogue mais illimité dans les deux sens :

$$e^{\frac{P}{Q}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} p_n (Z-Z_k)^n$$

c.-à-d. que chaque pôle de  $\frac{P}{Q}$  est une singularité essentielle isolée pour  $e^{\frac{P}{Q}}$ .

Prenons maintenant le développement de  $\frac{P}{Q}$  dans une couronne entourant *toutes* les racines du dénominateur et centrée à l'origine :

$$\frac{P}{Q} = \frac{r_1}{Z} + \frac{r_2}{Z^2} + \dots + \frac{r_n}{Z^n} + \dots$$

Le développement correspondant de  $e^{\frac{P}{Q}}$  s'obtiendra aisément par la méthode d'intégrations successives par parties que nous avons déjà signalée; il est en effet à nouveau légitime de faire tendre le contour d'intégration vers le point à l'infini, puisqu'on ne traverse aucune singularité au cours de cette opération.

Nous pouvons généraliser et prendre au lieu de  $\frac{P}{Q}$  une série de type :

$$S(Z) = \frac{r_1}{Z} + \frac{r_2}{Z^2} + \dots + \frac{r_n}{Z^n} + \dots$$

soumise à la seule condition de converger uniformément vers une fonction holomorphe sur et en dehors d'une circonférence centrée à l'origine. La même méthode d'intégration donne alors pour :

$$(68) \quad e^{S(z)} = 1 + \frac{a_1}{Z} + \frac{a_2}{Z^2} + \dots$$

une formule récurrente :

$$(69) \quad a_n = \frac{r_1}{n} a_{n-1} + \frac{2r_2}{n} a_{n-2} + \dots + \frac{kr_k}{n} a_{n-k} \dots + r_n$$

qui permet la détermination rapide des coefficients de proche en proche.

On voit que  $z = Zc^S$  satisfait à la forme (51) demandée pour la fonction de transformation. Un produit de fonctions du type (68) reproduit une fonction du même type, nous aurons donc une forme très générale de fonction de transformation pour une circonférence entourant les singularités en prenant une somme de ces fonctions :

$$z = Z \sum_i m_i e^{S_i}$$

On trouvera aisément les conditions à vérifier par les  $m_i$  et les coefficients des séries  $S_i$  pour qu'on ait la forme (56).

Si on veut placer un zéro simple ou un branchement sur le contour de façon à obtenir des profils à pointe il faudra partir de l'expression de la dérivée; on aura par exemple :

$$\frac{dz}{dZ} = \left(1 - \frac{e^{i\alpha}}{Z}\right)^\beta e^S$$

à condition que  $S(Z)$  converge uniformément sur la circonférence unité et que ses coefficients soient choisis de façon à annuler le terme en  $\frac{1}{Z}$ .

L'intégration sera parfois possible sous forme finie, on pourra en tous cas toujours la faire en repassant à la forme (59) au moyen des expressions (60), (68) et (69), c.-à-d. par la méthode d'intégration par parties.