

Effet gyroscopique des rotors sur les vitesses critiques de flexion

B. *Tracy de Venetia*.

Considérons un disque rigide en rotation autour d'un arbre qui présente une certaine élasticité de flexion. La discussion de la stabilité du mouvement met en évidence l'existence de vitesses critiques pour lesquelles le moindre déséquilibre statique ou dynamique provoque des flèches croissant éventuellement jusqu'à la rupture.

Tant que l'on ne considère que l'énergie du centre de gravité du disque et que l'on suppose une symétrie circulaire parfaite pour les forces de rappel élastiques, on peut mettre en évidence une vitesse angulaire critique réelle. Dans ces conditions, il y en a en général n réelles pour un arbre portant n disques et elles coïncident alors avec les n fréquences circulaires des modes normaux de vibration de l'arbre au repos. Pour un observateur en rotation avec l'arbre, ce sont les forces de Coriolis qui maintiennent la stabilité du mouvement entre les vitesses critiques.

Quand on généralise un peu le problème en introduisant des raideurs de flexion différentes suivant les plans longitudinaux (c'est le cas par exemple d'un arbre rainuré), on constate que la vitesse critique se dédouble et fait apparaître une plage d'instabilité (1). Celle-ci ne provient d'ailleurs plus d'une excentricité initiale, mais est provoquée par la moindre perturbation extérieure d'ailleurs tout aussi inévitable.

Nous n'avons pas encore parlé de l'effet gyroscopique du disque. Celui-ci s'introduit quand on prend en considération l'énergie dans le mouvement relatif autour du centre de gravité. Le cas couramment envisagé est celui où l'ellipsoïde central d'inertie est de révolution et où les forces et couples de rappel élastiques ont la symétrie circulaire. On se contente alors généralement d'établir l'existence d'une position d'équilibre par les méthodes de la statique et de constater que pour la moindre excentricité initiale, cette position s'éloigne à l'infini pour deux valeurs critiques de la vitesse de rotation (dont l'une peut d'ailleurs être imaginaire).

Nous voudrions ici discuter la stabilité de la position d'équilibre et montrer que si l'ellipsoïde central d'inertie n'est pas de révolution, les vitesses critiques

(1) STODOLA, A. — Turbines à vapeur et à gaz, 2^e édition. — Dunod, chap. X, n^o 191.
BIEZENO und GRAMMEL. — Technische Dynamik. — Berlin, J. Springer, 1930, pages 975 à 1037.

sont dédoublées et font de nouveau apparaître entre elles des plages d'instabilité. Ce cas se présente par exemple pour un moteur d'avion entraînant une hélice à deux pales.

Description du problème.

Un arbre dont la masse sera négligée tourne dans deux paliers. Les centres de ceux-ci définissent l'axe géométrique de la rotation, tandis que l'axe élastique sera la fibre moyenne susceptible de déformations. Sur l'arbre est fixé rigidement un rotor de masse M , de centre de gravité G , sur lequel se coupent à angles droits les trois axes principaux d'inertie (fig. 1).

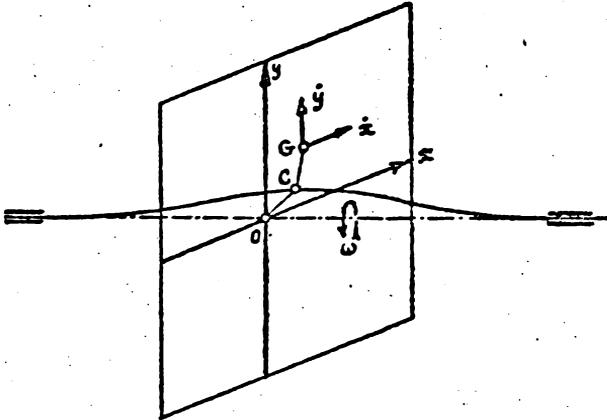


Fig. 1.

Menons par G un plan perpendiculaire à l'axe géométrique. O sera le point de percée de cet axe dans ce plan, c'est le centre de rotation. C , point de percée de l'axe élastique dans le même plan, sera le centre élastique. Nous considérons un système d'axes orthogonaux dans ce plan, ayant leur origine au centre de rotation, et tournant avec la vitesse angulaire ω de l'arbre.

La position du rotor est fixée par les coordonnées x et y du centre de gravité et les trois coordonnées nécessaires pour l'orientation des axes principaux d'inertie. Parmi celles-ci, il en est une qui implique une énergie potentielle de déformation par torsion de l'arbre entre la section de fixation et l'extrémité entraînée à vitesse angulaire uniforme. Étant donné que la raideur de torsion est généralement considérable et que le couplage de la vibration de torsion est très faible, nous pouvons négliger son influence et la supposer nulle.

Le problème principal consiste alors à établir l'expression de l'énergie cinétique totale T du disque et de l'énergie potentielle V de la déformation élastique de l'arbre en fonction des quatre coordonnées restantes; les équations du mouvement résulteront des expressions de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0 \quad ($$

q désignant une des coordonnées et l'accent prime signifiant la dérivation par rapport au temps.

Energie cinétique du centre de gravité.

Suivant le théorème de König, l'énergie cinétique totale est la somme de l'énergie cinétique T_g du centre de gravité et de l'énergie cinétique T_r dans le mouvement relatif autour de celui-ci. On aura :

$$2T_g = Mv_g^2$$

v_g étant la vitesse absolue du centre de gravité. Pour l'obtenir, nous la décomposons en vitesse relative par rapport aux axes (x, y) de composantes (x', y') et en vitesse d'entraînement de composantes $(-\omega y, +\omega x)$. Nous obtenons ainsi :

$$2T_g = M[(x' - \omega y)^2 + (y' + \omega x)^2] \quad (2)$$

Energie potentielle de déformation.

Quand on n'envisage que l'énergie cinétique du centre de gravité, les forces d'inertie, qui en résultent sont situées dans le plan normal et il suffira d'envisager la déformation élastique et son potentiel pour de telles forces. Si l'arbre n'a pas de symétrie circulaire, mais possède un plan de symétrie longitudinal, nous prendrons l'axe des y dans ce plan. Sous l'action d'une force f_x suivant l'axe des x , il y aura un déplacement x_c du centre élastique lié à la force par la relation :

$$f_x = \frac{\partial V}{\partial x} = a_1^2 x_c$$

On aura de même pour la force f_y et le déplacement conséquent y_c :

$$f_y = \frac{\partial V}{\partial y} = a_2^2 y_c$$

De ces relations, nous tirons :

$$2V = a_1^2 x_c^2 + a_2^2 y_c^2 \quad (3)$$

Il nous faut encore tenir compte du fait que le centre de gravité ne coïncide pas avec le centre élastique, mais a de petites excentricités ϵ et ζ , de sorte que l'on a en général entre les coordonnées de ces deux points les relations :

$$x - x_c = \epsilon \qquad y - y_c = \zeta$$

Exprimée en fonction des coordonnées du centre de gravité, l'énergie potentielle prend donc la forme :

$$2V = a_1^2 (x - \epsilon)^2 + a_2^2 (y - \zeta)^2 \quad (4)$$

Stabilité sans effet gyroscopique.

Comme on a momentanément négligé T_r , le problème est ramené aux deux degrés de liberté représentés par les coordonnées x et y .

Les équations (1) du mouvement obtenues à partir de (2) et (4) sont :

$$\begin{aligned} Mx'' - 2M\omega y' - M\omega^2 x + a_1^2 x &= a_1^2 \varepsilon \\ My'' + 2M\omega x' - M\omega^2 y + a_2^2 y &= a_2^2 \zeta \end{aligned} \quad (5)$$

Ce sont des équations linéaires à coefficients constants. On reconnaît dans les termes qui contiennent les dérivées premières des coordonnées les composantes de la force de Coriolis, qui joue un rôle prépondérant dans la stabilité de la position. Les termes qui contiennent le carré de la vitesse angulaire de rotation sont les composantes de la force centripète qui détermine les vitesses critiques proprement dites.

On sait que la solution des équations (5) comporte la somme d'une solution particulière (x_0, y_0) et de la solution générale du système homogène (x_v, y_v) . La solution particulière détermine l'existence d'une position d'équilibre, tandis que la solution générale décide de la stabilité de cette position en montrant la façon dont les écarts à cette position varient avec le temps.

1. — Positions d'équilibre et vitesses critiques.

La solution particulière évidente :

$$x_0 = \frac{a_1^2 \varepsilon}{a_1^2 - \omega^2 M} \quad y_0 = \frac{a_2^2 \zeta}{a_2^2 - \omega^2 M}$$

tombe en défaut pour les valeurs de la vitesse angulaire :

$$\omega_1^2 = \frac{a_1^2}{M} \quad \omega_2^2 = \frac{a_2^2}{M} \quad (6)$$

Ce sont les vitesses critiques pour lesquelles la position d'équilibre s'éloigne théoriquement à l'infini. On trouve la solution particulière qui convient dans ces cas en prenant pour x_0 et y_0 des polynômes du second degré en t . Les systèmes d'équations qui déterminent les coefficients sont obtenus en annulant dans les équations (5) du mouvement les coefficients des diverses puissances du temps. Pour la vitesse critique ω_1 , on trouve par exemple :

$$\begin{aligned} x_0 &= f_0 + \frac{1}{2\omega_1} [\omega_2^2 \zeta - (\omega_2^2 - \omega_1^2) h_0] t + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\omega_1}{\mu_1} \right)^2 (\omega_2^2 - \omega_1^2) t^2 \\ y_0 &= h_0 - 2\varepsilon \left(\frac{\omega_1}{\mu_1} \right)^2 \omega_1 t \end{aligned} \quad (7)$$

où f_0 et h_0 sont deux constantes arbitraires et μ_1 la fréquence circulaire de la vibration donnée par la solution du système homogène et que nous rencontrerons plus loin.

Les écarts augmentent donc avec le temps du fait de la présence des excen-

tricités initiales, et même si celles-ci étaient nulles, ils augmenteraient encore du fait de la constante h_0 introduite par une perturbation extérieure.

2. — Vibrations autour de la position d'équilibre.

L'existence d'une position d'équilibre en dehors des vitesses critiques n'implique pas nécessairement la stabilité. Il faut encore que les fréquences de vibration autour de cette position soient réelles. Les vibrations sont données par la solution générale du système homogène. Si nous posons :

$$x_v = X \cos (\mu t + \nu)$$

$$y_v = Y \sin (\mu t + \nu)$$

Les équations (5) sans seconds membres se réduisent au système :

$$(a_1^2 - \omega^2 M - \mu^2 M) X - 2M\omega\mu Y = 0 \tag{8}$$

$$-2M\omega\mu X + (a_2^2 - \omega^2 M - \mu^2 M) Y = 0$$

linéaire et homogène dans les amplitudes inconnues X et Y.

Pour avoir une solution non identiquement nulle, il faut que le déterminant des coefficients soit nul, ce qui conduit à l'équation aux fréquences :

$$M^2\mu^4 - M\mu^2(a_1^2 + a_2^2 + 2\omega^2 M) + (a_1^2 - \omega^2 M)(a_2^2 - \omega^2 M) = 0 \tag{9}$$

Remarquons que le réalisant de cette équation bicarrée peut s'écrire :

$$M^2[(a_1^2 - a_2^2)^2 + 8\omega^2 M(a_1^2 + a_2^2)]$$

quantité toujours plus grande que zéro et donc que les carrés des fréquences sont toujours réels. Pour que les fréquences elles-mêmes soient réelles, il faut encore que ces quantités soient positives; nous distinguons donc deux cas :

Premier cas. — La vitesse angulaire est plus petite que la plus petite vitesse critique ou plus grande que la plus grande.

En inspectant l'équation aux fréquences, on conclut :

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega^2 > 0$$

$$\mu_1^2 \mu_2^2 = (\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) > 0$$

et par conséquent les deux carrés sont positifs, partant, les fréquences circulaires elles-mêmes réelles. Il y a deux vibrations elliptiques harmoniques autour de la position d'équilibre et par conséquent stabilité.

Deuxième cas. — La vitesse angulaire est comprise entre les deux vitesses critiques. La somme des carrés reste positive, mais le produit devient négatif. Un des carrés est alors positif, l'autre négatif, c'est-à-dire qu'une des fréquences est réelle et l'autre imaginaire. Or, les fonctions circulaires d'argument imaginaire se ramènent aux fonctions hyperboliques d'argument réel, qui dans le cas du sinus et du cosinus croissent indéfiniment avec le temps. C'est dire qu'il y a instabilité de perturbation dans toute la plage comprise entre les deux vitesses critiques.

On remarquera que lorsqu'on se trouve sur une des vitesses critiques, une des fréquences de vibration s'annule; par exemple, pour $\omega = \omega_1$, on aura :

$$\mu_2^2 = 0 \quad \text{et} \quad \mu_1^2 = \frac{1}{M} (a_2^2 + 3a_1^2)$$

Cette dernière valeur est celle qui intervient dans la formule. (7).

S'il n'y a plus que deux constantes arbitraires dans la solution du système homogène, les deux autres se retrouvent dans la solution particulière.

La plage d'instabilité disparaît dès qu'on introduit la symétrie circulaire. En effet, on a alors manifestement :

$$a_1^2 = a_2^2 = a^2$$

et les deux vitesses critiques (6) se rejoignent en réduisant à rien la plage qu'elles limitaient. D'ailleurs, l'équation (9) aux fréquences devient :

$$(a^2 - \omega^2 M - \mu^2 M + 2M\omega\mu)(a^2 - \omega^2 M - \mu^2 M - 2M\omega\mu) = 0$$

En annulant la deuxième parenthèse, on obtient les fréquences :

$$\mu_1 = -\left(\omega + \frac{a}{\sqrt{M}}\right) \quad \text{et} \quad \mu_2 = -\left(\omega - \frac{a}{\sqrt{M}}\right)$$

toujours réelles. Chacune des équations (8) est alors vérifiée en faisant $X = Y$, ce qui montre que les deux vibrations sont polarisées circulairement.

On a une idée claire de l'état dynamique en construisant un diagramme donnant en abscisses les carrés de la vitesse angulaire de rotation, en ordonnées les

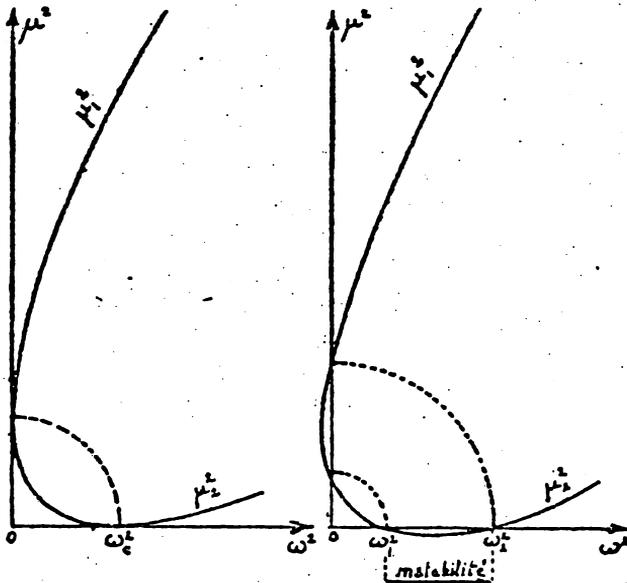


Fig. 2.

carrés des pulsations naturelles de vibration. Il y aura vitesse critique quand le carré d'une des pulsations s'annule, instabilité dans toute la région où il est négatif (fig. 2).

Remarquons pour terminer, que les vitesses angulaires critiques coïncident avec les pulsations des vibrations naturelles au repos, comme on peut le déduire immédiatement en faisant $\omega = 0$ dans l'équation (9) aux fréquences.

Energie cinétique dans le mouvement relatif.

Jusqu'ici, nous n'avons fait que retrouver des résultats bien connus; si nous voulons maintenant introduire l'effet gyroscopique du disque, il faudra ajouter à T_g l'énergie cinétique dans le mouvement relatif autour du centre de gravité.

Imaginons un système d'axes ayant son origine en G est restant parallèle à un système fixe extérieur, l'énergie cinétique T_r résultera de la rotation des trois axes principaux d'inertie du rotor par rapport à ce système. Si nous exprimons cette rotation par ses trois composantes p , q et r suivant les axes principaux, cette énergie sera donnée par :

$$2T_r = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 \quad (10)$$

A, B et C étant les moments d'inertie autour des axes correspondants.

Au repos, le plan des axes I et II du disque ne coïncidera pas rigoureusement avec le plan normal à l'axe géométrique par suite d'excentricités inévitables, mais une très petite rotation autour de leur droite d'intersection suffira pour l'y ramener.

Nous ferons l'hypothèse d'une symétrie circulaire parfaite de l'arbre, de sorte qu'il n'y aura pas d'énergie potentielle de torsion emmagasinée dans une rotation de la section normale autour d'une droite située dans son plan primitif. De plus, nous disposons librement de l'orientation des axes x et y et nous la prendrons telle qu'ils viennent en coïncidence respectivement avec les axes I et II après la petite rotation nécessaire à la coïncidence des plans.

Transportons les axes x et y en G en leur adjoignant un axe z parallèle à l'axe géométrique, de façon à pouvoir étudier les oscillations angulaires des axes du disque. Il faudra encore tenir compte du fait que par rapport à un système fixe extérieur, ces axes sont en rotation à la vitesse angulaire uniforme ω autour de z .

S'il n'y a pas d'énergie potentielle de torsion, l'orientation des axes I, II et III résultera toujours d'une rotation d'un petit angle φ autour d'une droite passant par G dans le plan des axes x , y et repérée par l'angle θ qu'elle fait avec Gx. Les deux coordonnées φ et θ suffisent donc à fixer l'orientation du rotor.

Les coordonnées des points situés à la distance unité sur I, II et III sont les cosinus directeurs de ces axes par rapport aux axes x , y et z . Se reportant à la figure 3, on aura :

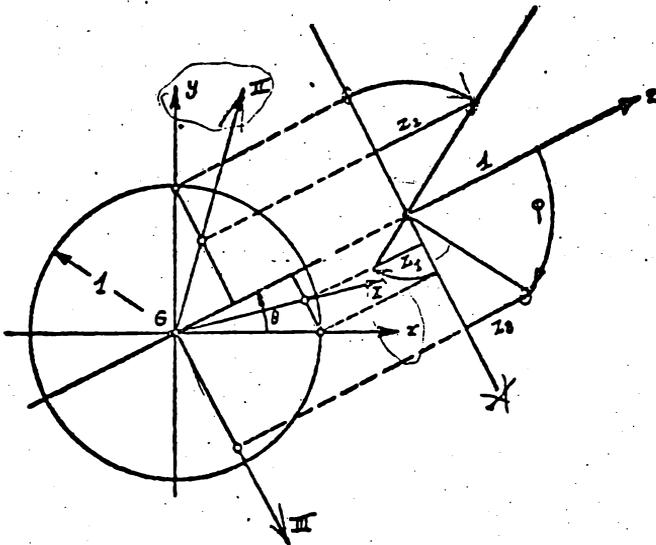


Fig. 3.

Cosinus directeurs de I :

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - \sin^2 \theta (1 - \cos \varphi) \\ y_1 &= \sin \theta \cos \theta (1 - \cos \varphi) \\ z_1 &= -\sin \theta \sin \varphi \end{aligned} \quad (11)$$

Cosinus directeurs de II :

$$\begin{aligned} x_2 &= \sin \theta \cos \theta (1 - \cos \varphi) \\ y_2 &= 1 - \cos^2 \theta (1 - \cos \varphi) \\ z_2 &= \cos \theta \sin \varphi \end{aligned} \quad (12)$$

Cosinus directeurs de III :

$$\begin{aligned} x_3 &= \sin \varphi \sin \theta \\ y_3 &= -\sin \varphi \cos \theta \\ z_3 &= \cos \varphi \end{aligned} \quad (13)$$

Les angles φ et θ variant avec le temps donnent une contribution aux composantes de la rotation instantanée :

$$\begin{aligned} p_1 &= \varphi' \cos \theta - \theta' \sin \varphi \sin \theta \\ q_1 &= \varphi' \sin \theta + \theta' \sin \varphi \cos \theta \\ r_1 &= \theta' (\cos \varphi - 1) \end{aligned} \quad (14)$$

La contribution de la vitesse angulaire ω autour de l'axe des z étant :

$$p_2 = \omega z_1 \quad q_2 = \omega z_2 \quad r_2 = \omega z_3 \quad (15)$$

Nous avons donc finalement :

$$\begin{aligned} p &= \varphi' \cos \theta - (\theta' + \omega) \sin \varphi \sin \theta \\ q &= \varphi' \sin \theta + (\theta' + \omega) \sin \varphi \cos \theta \\ r &= -\theta' + (\theta' + \omega) \cos \varphi \end{aligned} \quad (16)$$

L'emploi des coordonnées φ et θ à l'inconvénient de conduire à des équations non linéaires; aussi changeons-nous de variables angulaires en adoptant :

$$\alpha = \varphi \cos \theta \quad \beta = \varphi \sin \theta \quad (17)$$

Tant que φ reste petit, on peut écrire :

$$\sin \varphi = \varphi \quad \cos \varphi = 1 - \frac{1}{2} \varphi^2$$

et on en déduit que (16) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} p &= \alpha' - \omega \beta & q &= \beta' + \omega \alpha \\ r &= \frac{\alpha' \beta - \beta' \alpha}{2} + \omega \left(1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

Ces valeurs de p , q et r introduites dans (10) nous donnent finalement l'énergie T_r cherchée. Nous ne commettons pas d'approximation supplémentaire en négligeant dans r carré les termes qui contiennent α et β à la troisième puissance et au delà, puisqu'ils sont du même ordre de grandeur que φ . Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned} 2T_r &= A(\alpha' - \omega \beta)^2 + B(\beta' + \omega \alpha)^2 \\ &+ C[\omega^2 - \omega^2(\alpha^2 + \beta^2) + \omega(\alpha' \beta - \beta' \alpha)] \end{aligned} \quad (19)$$

Energie potentielle de déformation.

Les angles α et β sont ceux que fait l'axe III du rotor avec l'axe géométrique respectivement en projection dans le plan des yz et celui des xz . Du fait de deux petites excentricités de montage γ et δ , l'axe III du rotor ne coïncide pas en direction avec la tangente à l'axe élastique en C, mais les angles α_c et β_c de cette dernière sont liés aux précédents par des relations constantes :

$$\alpha_c = \alpha - \gamma \quad \beta_c = \beta - \delta$$

L'arbre ayant une symétrie circulaire parfaite, il est aisé de montrer que l'énergie potentielle a la forme suivante :

$$2V = a^2(x_c^2 + y_c^2) + 2b(x_c \beta_c - y_c \alpha_c) + c^2(\alpha_c^2 + \beta_c^2) \quad (20)$$

où l'on revient facilement aux coordonnées x , y , α , β de Lagrange.

Stabilité avec effet gyroscopique.

Partant des équations (2), (19) et (20), nous pouvons maintenant écrire les équations (1) de Lagrange. Explicitées, elles ont la forme :

$$\begin{aligned} Mx'' - 2M\omega y' + (a^2 - \omega^2 M)x + b\beta &= a^2\varepsilon + b\delta \\ My'' + 2M\omega x' + (a^2 - \omega^2 M)y - b\alpha &= a^2\xi - b\gamma \\ A\alpha'' + (C - B - A)\omega\beta' + [c^2 - \omega^2(B - C)]\alpha - by &= -b\xi + c^2\gamma \\ B\beta'' - (C - B - A)\omega\alpha' + [c^2 - \omega^2(A - C)]\beta + bx &= b\varepsilon + c^2\delta \end{aligned} \quad (21)$$

Nous retrouvons ainsi un système linéaire à coefficients constants dont la discussion peut être menée de façon tout à fait parallèle à celle du système (5).

1. — *Positions d'équilibre et vitesses critiques.*

On a une solution particulière où les coordonnées se réduisent à des constantes pourvu que le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a^2 - \omega^2 M & 0 & 0 & b \\ 0 & a^2 - \omega^2 M & -b & 0 \\ 0 & -b & c^2 - \omega^2(B - C) & 0 \\ b & 0 & 0 & c^2 - \omega^2(A - C) \end{vmatrix} \quad (22)$$

soit différent de zéro. Cette solution tombe en défaut pour les valeurs de ω carré qui annulent ce déterminant; ce sont les vitesses critiques pour lesquelles il y a augmentation continue des écarts. En effet, la solution particulière sera représentée dans ces cas par des polynômes du second degré en t pour les coordonnées.

L'équation (22) aux vitesses critiques, développée, prend la forme :

$$[(a^2 - \omega^2 M)|c^2 - \omega^2(A - C)| - b^2] [(a^2 - \omega^2 M)|c^2 - \omega^2(B - C)| - b^2] = 0 \quad (23)$$

Il y aura quatre vitesses critiques, une paire pour chaque parenthèse; mais elles ne sont pas toutes nécessairement réelles, il suffira de faire la discussion pour la première parenthèse.

Posons $A - C = H$, nous dirons que le rotor est du type tambour relativement à l'axe 1 si $H > 0$; sinon qu'il est du type disque. Un rotor non symétrique pourra naturellement être du type disque relativement à l'un des axes et du type tambour relativement à l'autre.

La première parenthèse s'écrit alors :

$$P = \omega^4 M H - \omega^2 (M c^2 + H a^2) + (a^2 c^2 - b^2) = 0 \quad (24)$$

Le dernier terme de cette équation ne contient que des constantes relatives à l'énergie potentielle. Celle-ci étant essentiellement positive pour toutes les valeurs des écarts, et prenant la valeur :

$$V = u^2 \left(a^2 - \frac{b^2}{c^2} \right) > 0$$

pour le système d'écart :

$$x_0 = y_0 = u \quad -\beta_0 = \alpha_0 = u \frac{b}{c^2}$$

nous pouvons conclure que :

$$a^2 c^2 - b^2 > 0$$

Distinguons alors deux cas :

Premier cas : Rotor type tambour ou $H > 0$.

Dans l'équation (24), la somme et le produit des racines sont positifs; il y a deux vitesses critiques réelles, dont l'une plus basse et l'autre plus haute que celle calculée sans effet gyroscopique.

En effet, cette dernière, obtenue en faisant $H = 0$:

$$\omega^2 = \frac{a^2 c^2 - b^2}{M c^2}$$

donne à P le signe opposé au coefficient de ω^4 :

$$\frac{P}{MH} = -b^2 \frac{a^2 c^2 - b^2}{M^2 c^4} < 0$$

Deuxième cas : Rotor type disque ou $H < 0$.

Le produit des racines de (24) devient inférieur à zéro. Il y a une vitesse critique imaginaire et une réelle plus haute que celle calculée sans effet gyroscopique.

Suivant les cas, il y aura donc quatre vitesses critiques réelles (rotor double-tambour), ou trois (rotor disco-tambour), ou deux (rotor double-disque).

Quand il y a symétrie circulaire ($A = B$), les deux parenthèses deviennent identiques et il y a soit deux vitesses critiques réelles (rotor type tambour), soit une seule (rotor type disque).

Ce dédoublement des vitesses critiques provenant d'une dissymétrie du rotor fait apparaître d'une façon analogue à la dissymétrie élastique de l'arbre des plages d'instabilité entre les vitesses critiques ainsi dédoubleées.

2. — Vibrations autour de la position d'équilibre.

La solution générale du système homogène déduit de (21) s'obtient aisément en posant :

$$\begin{aligned} x &= X \cos (\mu t + \nu) & y &= Y \sin (\mu t + \nu) \\ \alpha &= R \sin (\mu t + \nu) & \beta &= S \cos (\mu t + \nu) \end{aligned}$$

Après substitution, on trouve un système d'équations homogènes dans les quatre amplitudes inconnues; la condition de compatibilité est l'annulation du déterminant aux fréquences :

$$\begin{vmatrix} a^2 - (\omega^2 + \mu^2)M & -2\omega\mu M & 0 & b \\ -2\omega\mu M & a^2 - (\omega^2 + \mu^2)M & -b & 0 \\ 0 & -b & c^2 - \omega^2(B-C) - A\mu^2 & \omega\mu(C-B-A) \\ b & 0 & \omega\mu(C-B-A) & c^2 - \omega^2(A-C) - B\mu^2 \end{vmatrix} \quad (25)$$

Ce déterminant donne quatre racines réelles pour μ carré. Si elles sont toutes positives, il y aura vibrations stables. Sinon il y aura, au moins une fréquence imaginaire et donc instabilité de perturbation. Or, si nous faisons $\mu = 0$ dans ce déterminant, nous obtenons évidemment le produit des racines multiplié par le coefficient de la plus haute puissance de μ : ABM^2 , et nous remarquons qu'il devient identique au déterminant des vitesses critiques.

Il y a de façon tout à fait générale vitesse critique chaque fois qu'une fréquence de vibration passe par zéro. On voit qu'on peut écrire :

$$\mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2 \mu_4^2 = \frac{HK}{AB} (\omega_1^2 - \omega^2) (\omega_2^2 - \omega^2) (\omega_3^2 - \omega^2) (\omega_4^2 - \omega^2)$$

Nous aurons de nouveau une image claire de l'état de stabilité en dessinant la courbe algébrique en (μ^2, ω^2) représentée par l'équation (25). Remarquons qu'on peut écrire celle-ci sous la forme :

$$C_1 C_2 - b^2 C_3 = 0$$

où $C_1 = 0$ est la parabole :

$$M^2(\omega^2 - \mu^2)^2 - 2a^2 M(\omega^2 + \mu^2) + a^4 = 0$$

et $C_2 = 0$ l'hyperbole :

$$(AB\mu^2 - HK\omega^2)(\mu^2 - \omega^2) - c^2[(A+B)\mu^2 + (H+K)\omega^2] + c^4 = 0$$

toutes deux indépendantes du coefficient de couplage b . Tandis que $C_3 = 0$ est l'hyperbole :

$$(a^2 - \omega^2 M - \mu^2 M)[2c^2 - \omega^2(H+K) - \mu^2(A+B)]$$

$$-4M(C-B-A)\omega^2 \mu^2 - b^2 = 0$$

Or, les directions asymptotiques et les asymptotes éventuelles de la courbe (25) ne dépendent que des termes des deux degrés les plus élevés, tous contenus dans le produit $C_1 C_2$.

Cette courbe aura donc deux branches admettant la direction asymptotique de 45° de la parabole C_1 et deux autres branches admettant les asymptotes :

$$\mu^2 = \omega^2 + \frac{2c^2}{C}$$

et

$$\mu^2 = \frac{HK}{AB} \omega^2 + \frac{c^2}{AB} \frac{(A+B)HK + (H+K)AB}{AB - HK}$$

de l'hyperbole C_2 . Le coefficient angulaire de la dernière asymptote étant positif ou négatif suivant que H et K sont ou non de mêmes signes, on a déjà comme indication importante qu'un rotor double-disque ou double-tambour présente une stabilité définitive au-dessus d'une certaine vitesse angulaire, un rotor disco-tambour une instabilité définitive.

Les intersections de la courbe avec l'axe des μ^2 , ou carrés des fréquences naturelles de vibration au repos, sont obtenues en faisant $\omega = 0$ dans l'équation (25) et sont dès lors :

$$\mu^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{c^2}{A} + \frac{a^2}{M} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{A} - \frac{a^2}{M}\right)^2 + \frac{4b^2}{AM}} \right]$$

et l'expression analogue où A est remplacé par B. On peut observer qu'il n'y a plus identité avec les vitesses critiques.

Il reste à délimiter de façon exacte les plages d'instabilité. Pour ce faire, servons-nous du fait que la courbe (25) est une fonction continue du coefficient de couplage b , sans que celui-ci modifie les asymptotes ni les directions asymptotiques.

Or, pour $b = 0$, la courbe est composée de la parabole $C_1 = 0$ elle-même et de l'hyperbole $C_2 = 0$. La parabole donne lieu à une vitesse critique a^2/M qui se dédoublera en faisant apparaître une plage d'instabilité quand on fera $b \neq 0$, tandis que l'hyperbole montre une plage d'instabilité entre les abscisses c^2/H et c^2/K . Le terme « entre » signifie en passant par l'infini, quand H et K sont de signes différents, donc dans le cas d'un rotor disco-tambour.

Faisons maintenant varier b de façon continue depuis zéro jusqu'à sa valeur finale. Les vitesses critiques se déplacent de façon continue tout en restant les limites des plages d'instabilité.

Il y aura deux plages : une première située entre les deux vitesses critiques qui se réduisent à a^2/M pour $b = 0$, une seconde entre les deux autres vitesses critiques. Quand les deux limites sont de signes différents, il faut de nouveau entendre que la plage s'étend de l'une à l'autre en passant par l'infini et non par l'origine qui est toujours un point stable.

D'après cela, nous pouvons formuler la règle suivante :

Les vitesses critiques étant écrites sous la forme :

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{c^2}{H} + \frac{a^2}{M} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{H} - \frac{a^2}{M} \right)^2 + \frac{4b^2}{MH}} \right]$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{c^2}{K} + \frac{a^2}{M} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{K} - \frac{a^2}{M} \right)^2 + \frac{4b^2}{MK}} \right]$$

si nous donnons au radical le signe de la parenthèse, les plages seront délimitées par les paires de racines qui ont le signe moins devant le radical et d'autre part le signe plus. En effet, la paire qui a le signe moins est manifestement celle qui se réduit à a^2/M pour $b = 0$, moyennant la convention de signe adoptée pour le radical.

B. FRAEJIS de VEUBEKE.
Ingénieur Electricien-Mécanicien.