

Calcul des cadres bordant une ouverture circulaire dans un champ plan de tensions

Par B. FRAEIJIS DE VEUBEKE

Ingénieur à l'Aéronautique civile belge,
Maître de Conférences à l'Université de Louvain

Université de Liège

T - Sciences Appliquées et Mathématiques

1. Chemin des Chevreuils; Bât B52/4

B-4000 LIEGE

Le problème constructif posé par la présence des hublots dans les coques à revêtement travaillant se présente fréquemment. Cette étude, dans laquelle le problème a été quelque peu idéalisé, a pour objet de fixer dans quelle mesure la concentration des tensions peut être réduite par l'emploi d'un cadre approprié. Toutes autres considérations mises à part, les conclusions semblent nettement favorables aux renforts annulaires rivés uniquement sur le pourtour intérieur.

LES tensions appliquées au cadre à sa jonction avec la tôle sont essentiellement fonction des déformations de l'ensemble. S'il était possible de trouver un cadre de rigidité parfaitement équivalente à celle du panneau de tôle qu'il remplace, il suffirait de vérifier sa résistance au système de tensions préexistantes au bord de la jonction.

Le problème est alors le suivant : le système de tensions appliquées à la jonction et la déformation étant imposées à la jonction, déterminer les caractéristiques de rigidité du cadre, qui permettent la compatibilité de ces deux données ; enfin vérifier si les tensions internes qui en résultent dans le cadre restent dans les limites permises.

Cette ligne d'attaque ne conduit généralement pas à une solution viable. Pratiquement, on sera conduit à examiner le remplacement du panneau découpé par un cadre d'un modèle réalisable. Celui-ci n'ayant pas une rigidité équivalente, induira dans la tôle un champ de perturbation, dont il faudra minimiser les répercussions en agissant sur quelques paramètres restés libres dans son choix.

Dans cette étude, il sera admis que le champ de perturbation n'obéit à d'autres conditions aux limites, hormis celles au niveau du cadre, qu'à celle de s'évanouir à grande distance de l'ouverture. Ceci implique que les dimensions de l'ouverture soient raisonnables comparées aux distances pour lesquelles de nouvelles conditions viendraient à jouer. La signification quantitative à accorder au terme « raisonnable » dépend de la rapidité suivant laquelle le champ de perturbation s'évanouit, c'est une qualité à discuter dans chaque cas d'espèce.

I. - Solution Générale du Problème des Tensions Planes par les Fonctions Analytiques d'une Variable Complexe

On dit qu'une pièce est dans un état plan de tensions, quand les conditions suivantes sont partout réalisées :

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (1)$$

On peut admettre que, dans une plaque mince, dont le plan médian serait celui des axes Ox et Oy , ces conditions sont très approximativement réalisées.

Désignons par u , v et w les déplacements élastiques et soient

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{la dilatation cubique locale}$$

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \text{la rotation locale perpendiculaire au plan médian,}$$

ν le coefficient de Poisson.

Quand les conditions (I) sont introduites dans les équations exprimant la loi de Hooke généralisée il vient

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\nu}{1 - 2\nu} e \quad (2)$$

ou, sous une autre forme

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} e \quad (2')$$

et

$$\frac{\partial w}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial z} \quad (4)$$

d'où nous tirons encore

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

Cette dernière relation montre déjà que la rotation locale perpendiculaire est constante à travers l'épaisseur de la plaque. Examinant alors ce que deviennent les équations de Navier sans forces de volume

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 u + \frac{1}{1 - 2\nu} \text{grad } e = 0 \\ \dots \dots \end{array} \right.$$

quand on y introduit les conditions (2), (3) et (4), il vient pour les deux premières

$$\frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$$

$$\frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$$

tandis que la dernière se trouve être identiquement satisfaite.

Ces deux premières équations aux dérivées partielles ont la même structure que des équations de Cauchy-Riemann, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{1 - 2\nu} e + i \omega = 4 f(\zeta, z) \quad (6)$$

f étant une fonction analytique de la variable complexe

$$\zeta = x + i y$$

où z entre encore comme un paramètre. Il est déjà possible d'expliciter partiellement la dépendance en z en remarquant que suivant (5) la partie imaginaire doit être indépendante de z , la solution ne peut alors être que de la forme

$$f = \frac{d F(\zeta)}{d \zeta} + a(z)$$

$F(\zeta)$ étant une fonction analytique de ζ indépendante de z et $a(z)$ une fonction réelle encore inconnue.

Considérant les parties réelle et imaginaire de F

$$F = \varphi + i \psi$$

et, eu égard à (2'), l'équation (6) se met sous la forme

$$\frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 4 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 4 a(z)$$

$$= 4 \frac{\partial \Psi}{\partial y} + 4 a(z)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 4 \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -4 \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

prête à l'intégration finale qui livrera u et v .

La solution comporte deux parties, une solution particulière des équations avec second membre et une solution générale des équations homogènes, qui sont elles-mêmes des Cauchy-Riemann, il vient

$$\frac{u - i v}{1 + \nu} = -\bar{\zeta} \frac{dF}{d\bar{\zeta}} + \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \bar{F}$$

$$+ 2 \frac{1 - \nu}{1 + \nu} a(z) \bar{\zeta} + G(\zeta, z) \quad (7)$$

(la barre surmontant un symbole dénote la quantité complexe conjuguée).

G est à nouveau une fonction analytique de ζ où z entre comme un paramètre, elle représente la solution des équations homogènes. Il reste à préciser la solution par la construction du déplacement w . Les conditions d'intégrabilité pour l'existence de w résultent de son élimination entre les équations (2), (3) et (4), ce sont

$\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$ déjà vérifiée par la solution (7) et deux autres équivalentes à l'unique relation complexe

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (u - i v) = \frac{\nu}{1 - 2\nu} \left(\frac{\partial e}{\partial x} - i \frac{\partial e}{\partial y} \right)$$

La solution (7) y introduit la transforme en

$$2 \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{d^2 a}{dz^2} \bar{\zeta} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \frac{4\nu}{1 + \nu} \frac{d^2 F}{d\bar{\zeta}^2}$$

Le second membre est analytique et indépendant de z , d'où $a(z) = az$ où a est une constante réelle

$$G(\zeta, z) = \frac{2\nu}{1 + \nu} z^2 \frac{d^2 F}{d\bar{\zeta}^2} + z \frac{dM}{d\bar{\zeta}} + N(\zeta)$$

M et N sont deux nouvelles fonctions analytiques de ζ .

Les équations (2), (3) et (4) permettent d'intégrer complètement w et il vient finalement la solution complète

$$\frac{u - i v}{1 + \nu} = m \bar{F} - \bar{\zeta} \frac{dF}{d\bar{\zeta}} + \frac{2\nu}{1 + \nu} z^2 \frac{d^2 F}{d\bar{\zeta}^2}$$

$$+ N + z \left[\frac{dM}{d\bar{\zeta}} + 2a \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \bar{\zeta} \right]$$

$$w = -4\nu z R \frac{dF}{d\bar{\zeta}}$$

$$- a(1 - \nu)(x^2 + y^2) + 2a\nu z^2 + (1 + \nu) R M$$

où $m = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$ et le symbole R signifie « partie réelle de... ».

Cette solution contient manifestement deux parties de type essentiellement distinct :

la première fait intervenir les deux fonctions analytiques F et N , les déplacements et les tensions qui en résultent sont symétriques par rapport au plan médian = 0 ;

la deuxième fait intervenir une constante a et une fonction analytique M . Elle correspond aux états de flexion de la plaque qui admettent les hypothèses de départ.

2. - Relation avec la Solution par la Fonction d'Airy

La méthode d'Airy consiste à satisfaire automatiquement aux équations d'équilibre du problème au moyen d'une fonction A telle que

(1) Love « Mathematical Theory of Elasticity », chap. IX.

$$\sigma_x = E \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \quad \sigma_y = E \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -E \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}$$

La fonction d'Airy correspondant à la solution précédente est

$$A = R \left[\bar{\zeta} F - \frac{2\nu}{1 + \nu} z^2 \frac{dF}{d\bar{\zeta}} - \int N d\bar{\zeta} \right]$$

$$+ z a (x^2 + y^2) - z \int M d\bar{\zeta}$$

On vérifie facilement qu'elle donne le même état de tension et qu'elle vérifie l'opérateur biharmonique.

On peut aussi la construire directement à partir des équations de compatibilité aux déformations exprimées en fonction des tensions (équations de Beltrami-Michell), puis s'en servir pour établir les déplacements (1).

3. - Tensions et Déplacements dans une Plaque sollicitée par des Forces agissant dans son plan.

La réponse à ce problème est fournie par la première partie de la solution générale, on laissera donc tomber la partie qui dépend de la fonction M et de la constante a .

Les tensions suivent par dérivation

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{E} + i \omega = 4 \frac{dF}{d\bar{\zeta}}$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{E} - i \frac{2 \tau_{xy}}{E} = -2 \bar{\zeta} \frac{d^2 F}{d\bar{\zeta}^2}$$

$$+ \frac{4\nu}{1 + \nu} z^2 \frac{d^3 F}{d\bar{\zeta}^3} + 2 \frac{dN}{d\bar{\zeta}}$$

Le terme en z^2 est souvent négligé quand il s'agit de plaques minces. Dans ce qui suit nous nous bornerons à examiner l'état de tension dans le plan médian pour lequel $z = 0$; mais il faudra prêter attention au terme en question lorsque par des mesures extensométriques de surface nous chercherons une confrontation expérimentale avec la théorie.

Pour les applications que nous avons en vue les coordonnées polaires fournissent les résultats les plus simples, les formules à utiliser sont

$$u_r - i u_\theta = (u - i v) e^{i\theta}$$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y$$

$$(\sigma_r - \sigma_\theta) - 2i \tau_{r\theta}$$

$$= [(\sigma_x - \sigma_y) - 2i \tau_{xy}] e^{2i\theta}$$

4. - Champ de Tension Primitif.

Le champ de tension primitif dans la plaque, ou champ régissant à l'infini dans le problème idéalisé, sera pris homogène, entendant par là que σ_x , σ_y et τ_{xy} sont des constantes

Tel est le cas pour :

1°) Un champ hydrostatique caractérisé par

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_\infty \quad \tau_{xy} = 0$$

2°) Un champ de cisaillement pur caractérisé par

$$\sigma_x = \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = \tau_\infty$$

Tout champ de tension homogène peut être obtenu par la superposition des deux champs précédents, le centre du cercle de Mohr fixant l'intensité du champ hydrostatique et son rayon l'intensité du champ de cisaillement. En particulier quand les deux composantes ont la même intensité on obtient le cas important du champ de traction simple.

D'après ce mécanisme de superposition les axes de référence Ox et Oy seront toujours bissectrices des directions de tension principales du champ primitif.

Puisque $\sigma_z = 0$ l'état de tension triple en un point sera représenté par le système de trois cercles de Mohr représenté sur la fig. 1.

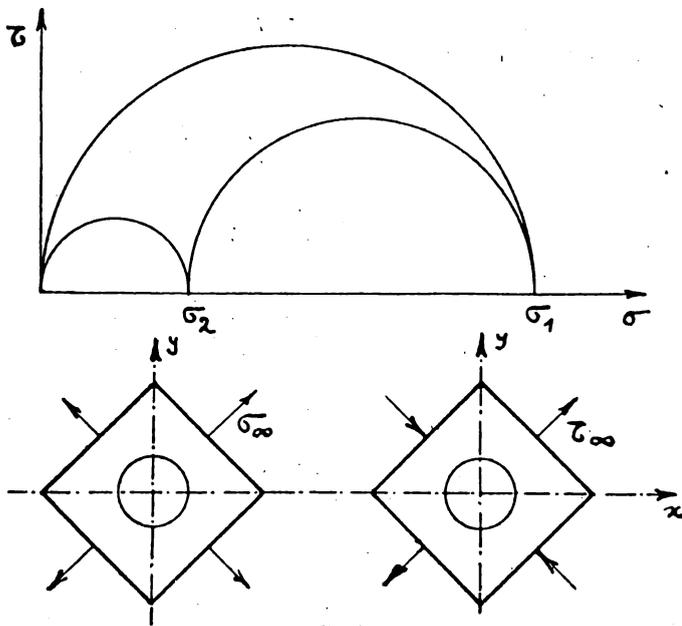


Fig. 1

La tension tangentielle extrême sera suivant les cas

$$\frac{1}{2} \sigma_1 \quad \frac{1}{2} \sigma_2 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)$$

C'est le rapport de sa valeur absolue à la valeur absolue de la tension tangentielle maxima régnant dans le champ primitif qui recevra l'appellation de facteur de concentration.

Cette dénomination implique l'usage du critère de résistance de Guest.

5. - Ouverture circulaire dans un champ hydrostatique.

L'origine des axes est prise au centre de l'ouverture.

Les deux fonctions analytiques qui gouvernent la solution sont

$$F = \frac{\sigma_\infty}{2E} \zeta \quad N = \frac{D}{\zeta}$$

La première représente le champ hydrostatique primitif. La seconde le champ de perturbation, qui s'évanouit à grande distance.

On trouve en appliquant les formules du par. 3

$$\frac{u - i v}{1 + \nu} = \zeta \left[(m - 1) \frac{\sigma_\infty}{2E} + \frac{D}{r^2} \right]$$

$$\sigma_r = \sigma_\infty - \frac{ED}{r^2} \quad \tau_{r\theta} = 0$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\infty + \frac{ED}{r^2}$$

La valeur de la constante D est fixée par les conditions aux limites.

La tension maxima de cisaillement du champ primitif, qui sert de référence pour le facteur de concentration est $\frac{1}{2} \sigma_\infty$.

5. 1. - Bord libre.

Exprimant que $\sigma_r = 0$ pour $r = b$

$$\frac{ED}{b^2} = \sigma_\infty$$

Tension maxima de cisaillement sur le bord $\frac{1}{2} \sigma_\theta = \sigma_\infty$

Le rapport à la tension maxima de cisaillement à l'infini ou facteur de concentration vaut 2.

5. 2. - Bord encastré.

Exprimant que les déplacements sont nuls pour $r = b$

$$\frac{ED}{b^2} = - \frac{m - 1}{2} \sigma_\infty$$

Le cisaillement est toujours maximum au bord

$$\frac{1}{2} \sigma_r = \frac{m + 1}{4} \sigma_\infty$$

Le facteur de concentration dépend du coefficient de Poisson. Pour les métaux on peut prendre $m = 2$ ($\nu = 1/3$) et le facteur serait de 1.5.

5. 3. - Bord renforcé par anneaux en surépaisseur.

L'anneau est soit du type interne, dont la forme idéalisée est représentée sur la fig. 2a (la réalisation pratique (fig. 2b) comporte un rivetage sur deux circonférences solidarissant complètement la surépaisseur avec l'anneau de plaque recouvert), soit du type externe, dont la forme idéalisée est représentée en 3a et la réalisation pratique (fig. 3b) ne comporte que le rivetage sur une circonférence intérieure.

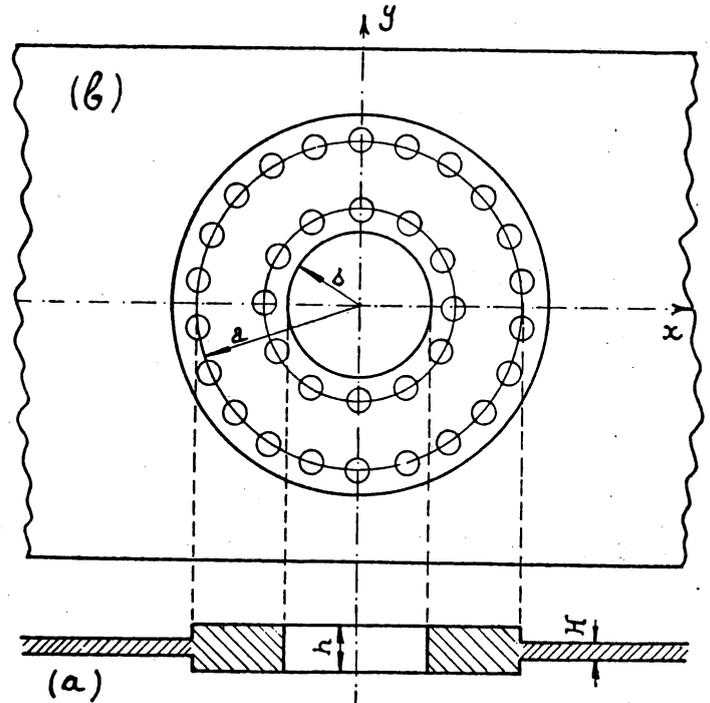


Fig. 2

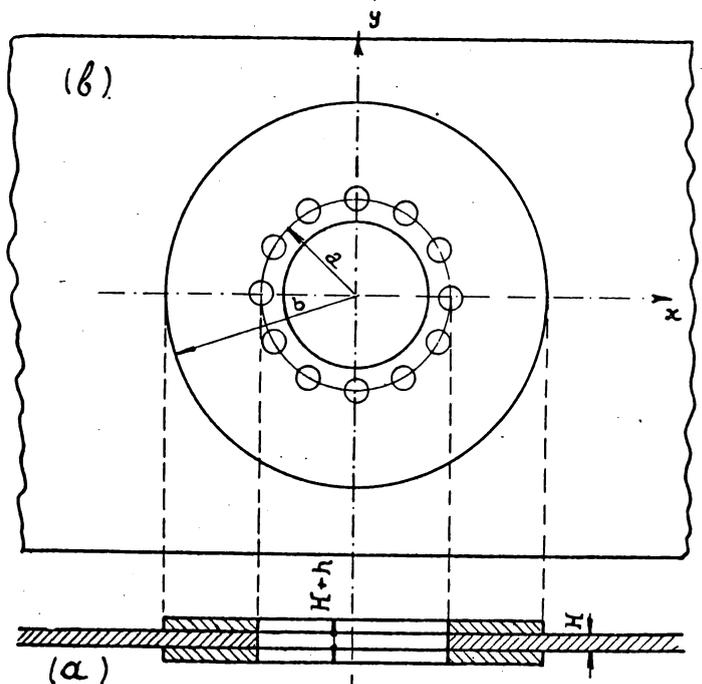


Fig. 3

$r = a$ désigne toujours le bord le long duquel s'opère une diffusion instantanée idéale des efforts,

$r = b$ le bord libre de tensions.

Les fonctions analytiques qui gouvernent l'état de tension dans l'anneau sont

$$F = g \zeta \quad N = \frac{d}{\zeta}$$

d'où

$$\frac{u - i v}{1 + \nu} = \bar{\zeta} \left[(m - 1) g + \frac{d}{r^2} \right]$$

$$\sigma_r / E = 2 g - d/r^2$$

$$\sigma_\theta / E = 2 g + d/r^2$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

5.3.1. Anneau externe infini.

Ce cas est d'intérêt purement asymptotique.

Pour que les tensions disparaissent à l'infini il faut $g = 0$.

Les autres conditions aux limites sont :

a) identité des déplacements de la plaque et de l'anneau pour $r = a$

b) équilibre des forces radiales pour $r = a$

$$\frac{m - 1}{2} \sigma_\infty / E + D/a^2 = d/a^2$$

$$\sigma_\infty / E - D/a^2 = k d/a^2$$

on a posé $k = h/H$ où h épaisseur de l'anneau
 H épaisseur de la plaque.

Il est possible d'annuler la perturbation plaque ($\Gamma = 0$) à condition de prendre une épaisseur d'anneau telle que

$$k = 2/(m - 1)$$

Il vient alors

$$d/a^2 = \frac{m - 1}{2} \sigma_\infty / E$$

donc une tension de cisaillement extrême dans l'anneau

$$\frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_\theta) = - \frac{1}{2} (m - 1) \sigma_\infty \quad \text{pour } r = a$$

et si $m = 2$ un facteur de concentration de 1. Ce cas est évidemment idéal.

5.3.2 Anneau interne fini ($b < a$)

Les constantes sont fixées par :

a) Condition au bord libre ($r = b$)

$$\sigma_r = 0 \quad \text{ou} \quad 2 g = d/b^2$$

b) Identité des déplacements ($r = a$)

$$\frac{1}{2} (m - 1) \sigma_\infty / E + D/a^2 = (m - 1) g + d/a^2$$

c) Equilibre des forces ($r = a$)

$$\sigma_\infty / E - D/a^2 = k (2 g - d/a^2)$$

(A l'inverse de l'anneau externe une tension positive dans la plaque en induit une positive dans l'anneau.)

La solution de ces équations s'exprime facilement au moyen du paramètre

$$\varphi = \frac{m + 1}{(k - 1)(1 - \lambda)}$$

qui avec le paramètre auxiliaire $\lambda = (b/a)^2 < 1$ résume les caractéristiques géométriques de l'anneau, il vient

$$2 g = d/b^2 = \frac{\varphi}{\varphi + 2} \frac{\sigma_\infty}{E}$$

$$D/a^2 = \frac{\lambda \varphi - m + 1}{\varphi + 2} \frac{\sigma_\infty}{E}$$

Il est encore possible de faire disparaître le champ de perturbation plaque en liant l'épaisseur de l'anneau, implicite dans φ , au rapport des rayons par la relation

$$\lambda \varphi = m - 1$$

dans ce cas on trouve

$$2 g = d/b^2 = \frac{m - 1}{m - 1 + 2 \lambda} \frac{\sigma_\infty}{E}$$

La tension maxima de cisaillement dans l'anneau se produit au bord libre $r = b$ par

$$\sigma_\theta \quad \text{et} \quad \sigma_\theta - \sigma_r$$

Le facteur de concentration dans l'anneau vaut

$$\frac{2(m - 1)}{m - 1 + 2 \lambda}$$

Dans le cas des métaux $m = 2$ et si on désire un facteur égal ou inférieur à l'unité il faut prendre $\lambda \geq 0.5$.

$\lambda = 0.5$ conduit à une valeur de φ égale à 2 c'est-à-dire un rapport d'épaisseur $k = 4$ tandis que le rapport de rayons serait légèrement inférieur à 0.7.

Ce cas ne présente aucune tension de cisaillement supérieure à celle du champ primitif.

5.3.3 Anneau externe fini ($b > a$)

Les formules obtenues pour l'anneau interne restent valables à condition de remarquer le renversement du sens de tensions à la transmission entraîne le remplacement de par $-k$; les valeurs de λ seront maintenant supérieures à l'unité.

Les tensions extrêmes de cisaillement dans l'anneau ont lieu au bord de transmission $r = a$

$$\frac{1}{2} \sigma_\theta = \frac{(1 + \lambda) \varphi}{2(\varphi + 2)} \sigma_\infty$$

$$\frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} = \frac{\lambda \varphi}{\varphi + 2} \sigma_\infty$$

Au cas où la condition de disparition de la perturbation dans la plaque serait satisfaite, ces valeurs deviendraient respectivement

$$\frac{(1 + \lambda)(m - 1)}{2(m - 1 + 2 \lambda)} \sigma_\infty < \frac{1}{2} \sigma_\infty$$

$$\text{et} \quad \frac{(m - 1) \lambda}{m - 1 + 2 \lambda} < \frac{1}{2} \sigma_\infty$$

En aucun cas il n'y a de concentration de tensions dangereuses. Par exemple pour le même rapport de rayons que celui envisagé dans le cas de l'anneau interne, se traduise ici par $\lambda = 2$, il vient

$$\begin{array}{l} \varphi = 0.5 \quad \text{et} \quad k = 5 \\ \text{mais pour } \lambda = 3 \quad 1/3 \quad \text{et} \quad k = 3.5 \\ \lambda = 4 \quad 1/4 \quad \text{et} \quad k = 3 \end{array}$$

Quand λ tend vers l'infini, k tend vers 2 en accord avec le cas limite envisagé en 5.3.1.

5.3.4 Cas frontière des anneaux externe et interne.

Quand on fait simultanément tendre λ vers l'unité et vers l'infini de façon à conserver à φ une valeur finie, on trouve une solution pratique au problème de la plaque bordée par une cornière de rigidité négligeable à la flexion mais capable de résister à des efforts normaux.

Au cours du passage à la limite le paramètre φ s'exprime directement en fonction de la section S de la cornière

$$\varphi = (m + 1) \frac{a H}{2 S}$$

Il vient aussi

$$2 g = d/a^2 = \frac{\varphi}{2 + \varphi} \frac{\sigma_\infty}{E}$$

$$D/a^2 = \frac{\varphi - m + 1}{2 + \varphi} \frac{\sigma_\infty}{E}$$

Pour annuler la perturbation dans la plaque il faut

prendre $\varphi = m - 1$, soit dans le cas des métaux $\varphi = 1$ et une section de cornière

$$S = \frac{3}{2} a H$$

Or, $2 \pi a H$ est la section cylindrique totale de l'ouverture. La tension normale dans la cornière

$$\sigma_{\theta} = \frac{2 \varphi}{2 + \varphi} \sigma_{\infty} = \frac{2}{3} \sigma_{\infty}$$

n'est pas dangereuse mais la section à réaliser est fort considérable.

Conclusion : il y a plusieurs façons de réaliser un cadre de renfort pour une ouverture circulaire pratiquée dans un champ primitif hydrostatique sans aucune pénalité de tension.

De plus, comme le champ de perturbation peut être éliminé dans la plaque, les autres conditions aux limites n'interfèrent pas et il n'y a pas de limitation de ce côté aux dimensions de l'ouverture. L'examen du cas suivant est loin de conduire à des conclusions aussi simples.

6. - Ouverture circulaire dans un champ de cisaillement pur.

Le champ des tensions et déformations dans la plaque est gouverné par les fonctions analytiques

$$F = i \frac{C}{\zeta} \quad N = i \left(-\frac{\tau_{\infty}}{E} \zeta + \frac{Q}{\zeta^3} \right)$$

conduisant aux déplacements et tensions suivantes

$$\frac{u_r}{1 + \nu} = \left[(1 + m) \frac{C}{r} + \frac{\tau_{\infty}}{E} r + \frac{Q}{r^3} \right] \sin 2 \theta$$

$$\frac{u_{\theta}}{1 + \nu} = \left[(m - 1) \frac{C}{r} + \frac{\tau_{\infty}}{E} r - \frac{Q}{r^3} \right] \cos 2 \theta$$

$$\frac{\sigma_r}{E} = \left(\frac{\tau_{\infty}}{E} - 4 \frac{C}{r^2} - 3 \frac{Q}{r^4} \right) \sin 2 \theta$$

$$\frac{\sigma_{\theta}}{E} = \left(-\frac{\tau_{\infty}}{E} + 3 \frac{Q}{r^4} \right) \sin 2 \theta$$

$$\frac{\tau_{r\theta}}{E} = \left(\frac{\tau_{\infty}}{E} + 2 \frac{C}{r^2} + 3 \frac{Q}{r^4} \right) \cos 2 \theta$$

A grande distance on trouve le champ primitif de cisaillement pur, caractérisé par τ_{∞} .

La symétrie permet de limiter l'investigation au secteur compris entre les azimuts $\theta = 0$ et $\theta = 45^\circ$.

Un calcul simple montre que les extrêmes des tensions principales se produisent précisément sur les droites limitant ce secteur. Il suffira donc de rechercher les variations avec r le long de ces droites.

Pour $\theta = 0$ il y a toujours un état de cisaillement pur et il suffit donc de considérer

$$\tau_{r\theta}(r)$$

Pour $\theta = 45^\circ$ σ_r et σ_{θ} sont les tensions principales et il faut rechercher les plus grandes des valeurs

$$\frac{1}{2} \sigma_r(r) \quad \frac{1}{2} \sigma_{\theta}(r) \quad \frac{1}{2} \left[\sigma_r(r) - \sigma_{\theta}(r) \right]$$

Les constantes caractéristiques du champ de perturbation C et Q sont déterminées par les conditions aux limites appartenant à un des cas suivants :

6.1. - Bord libre.

Ecrivant que σ_r et $\tau_{r\theta}$ sont nuls pour le rayon $r = b$ de l'ouverture

$$C/b^2 = -Q/b^4 = \tau_{\infty}/E$$

On retrouve une solution bien connue (*). La tension extrême de cisaillement est

$$\frac{1}{2} (\sigma_{\theta} - \sigma_r) = \frac{1}{2} \sigma_{\theta} = 2 \tau_{\infty} \quad r = b \quad \theta = 45^\circ$$

Facteur de concentration égal à 2.

6.2. - Bord encastré.

Les inconnues sont déterminées par les conditions d'annulation des déplacements pour $r = b$, il vient

$$C/b^2 = -Q/b^4 = -\frac{1}{m} \frac{\tau_{\infty}}{E}$$

Pour l'azimut de 0° le maximum de cisaillement se produit au bord :

$$\tau_{r\theta} = (1 + 1/m) \tau_{\infty} \text{ facteur de concentration : } 1 + 1/m$$

Pour l'azimut de 45° les extrêmes suivants apparaissent :

$$\frac{1}{2} \sigma_r \text{ pour } 2 r^2 = 3 b^2$$

$$\text{facteur de concentration : } \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4}{3m} \right)$$

$$\frac{1}{2} \sigma_{\theta} \text{ pour } r = \infty \text{ facteur de concentration : } \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_{\theta}) \text{ pour } r^2 = 3 b^2$$

$$\text{facteur de concentration : } 1 + \frac{1}{3m}$$

En définitive, c'est au bord et pour l'azimut de 0° que se produit la plus grande concentration de tensions.

6.3. - Bord renforcé par anneaux en surépaisseur.

Le champ de l'anneau est obtenu à partir des fonctions analytiques

$$F = i \left(\frac{c}{\zeta} + d \zeta^3 \right) \quad N = i \left(p \zeta + \frac{q}{\zeta^3} \right)$$

Leur structure est identique à celle des fonctions qui gouvernent le champ dans la plaque. Il suffit de faire les changements appropriés de coefficients dans les formules du par. 6 pour obtenir le champ des déplacements et des tensions.

6.3.1 Anneau externe infini.

Ce cas théorique est intéressant au point de vue des valeurs asymptotiques à attribuer aux cas pratiques des anneaux externes finis.

Les conditions pour voir le champ dans l'anneau disparaître à l'infini sont $p = d = 0$.

Ensuite, deux équations expriment l'identité des déplacements de la plaque et de l'anneau au bord de jonction $r = a$.

$$\frac{\tau_{\infty}}{E} + m \frac{C}{a^2} = m \frac{c}{a^2}$$

$$\frac{C}{a^2} + \frac{Q}{a^4} = \frac{c}{a^2} + \frac{q}{a^4}$$

Deux autres expriment la transmission des tensions radiales et de cisaillement

$$-\frac{\tau_{\infty}}{E} + 4 \frac{C}{a^2} + 3 \frac{Q}{a^4} = -k \left(4 \frac{c}{a^2} + 3 \frac{q}{a^4} \right)$$

$$\frac{\tau_{\infty}}{E} + 2 \frac{C}{a^2} + 3 \frac{Q}{a^4} = -k \left(2 \frac{c}{a^2} + 3 \frac{q}{a^4} \right)$$

Les six constantes des deux champs de perturbation sont ainsi déterminées.

Pour voir le champ de perturbation disparaître dans la plaque il suffit de prendre $k = m$, le champ dans l'anneau étant alors déterminé par les valeurs

(*) Timoshenko, « Theory of Elasticity », chap. 3.

$$\frac{c}{a^2} = -\frac{q}{a^4} = \frac{1}{m} \frac{\tau_\infty}{E}$$

Quand on retourne à la condition correspondante pour le champ primitif hydrostatique $k = 2/(m - 1)$, il est assez remarquable d'observer leur identité numérique pour $m = 2$, c'est-à-dire pour les métaux. L'anneau externe infini est en fait un idéal vers lequel on peut tendre pour abaisser le facteur de concentration asymptotiquement vers l'unité quel que soit le champ primitif uniforme.

TABLEAU I

		rayon r	azimut
plaque	1 $\tau_{r\theta}/3\tau_\infty$	a	0°
	2 <i>id</i>	du max.	0°
	3 $-\sigma_\theta/2\tau_\infty$	a	45°
	4 $\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2\tau_\infty}$	a	45°
	5 <i>id</i>	du max.	45°
anneau	6 $-\tau_{r\theta}/\tau_\infty$	a	0°
	7 $-\sigma_\theta/2\tau_\infty$	a	45°
	8 $\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2\tau_\infty}$	a	45°
	9 $\sigma_\theta/2\tau_\infty$	b	45°

Classification des courbes dans les fig. 4 à 7.

$$\frac{c}{a^2} = -\frac{q}{a^4} = \frac{1}{m} \frac{m+1}{k+1} \frac{\tau_\infty}{E}$$

$$\frac{C}{a^2} = -\frac{Q}{a^4} = \frac{1}{m} \frac{m-k}{k+1} \frac{\tau_\infty}{E}$$

Il existe encore une relation asymptotique entre les paramètres habituels λ et φ de l'anneau et son épaisseur relative k

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \varphi = \frac{m+1}{k+1}$$

La fig. 4 donne l'allure des tensions locales les plus caractéristiques. Les droites ont été numérotées suivant le schéma explicatif annexé, qui vaut aussi pour les courbes des figures suivantes.

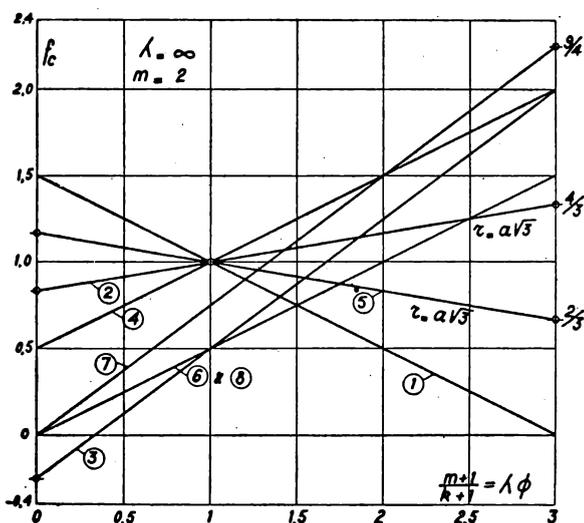


Fig. 4

6.3.2 Anneau interne fini.

Deux équations expriment que les tensions radiale et tangentielle sont nulles au rayon $r = b$.

$$p = -4 \frac{c}{b^2} - 3 \frac{q}{b^4} \quad d b^2 = -\frac{c}{b^2} - \frac{q}{b^4}$$

Les deux inconnues figurant au premier membre seront éliminées au profit des nouvelles inconnues

$$A = \frac{c}{b^2} + \frac{q}{b^4} \quad B = \frac{q}{b^4}$$

Le champ des tensions et déplacements dans l'anneau peut être mis sous la forme

$$\frac{1}{r \sin 2\theta} \frac{u_r}{1+\nu} = A \left[4 + (m+1) \frac{b^2}{r^2} - (3-m) \frac{r^2}{b^2} \right] - B \left[1 + (m+1) \frac{b^2}{r^2} - \frac{b^4}{r^4} \right]$$

$$\frac{1}{r \cos 2\theta} \frac{u_\theta}{1+\nu} = A \left[4 + (m-1) \frac{b^2}{r^2} - (3+m) \frac{r^2}{b^2} \right] - B \left[1 + (m-1) \frac{b^2}{r^2} + \frac{b^4}{r^4} \right]$$

$$\sigma_r/E = \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \left[4A + \left(3 \frac{b^2}{r^2} - 1 \right) B \right] \sin 2\theta$$

$$\sigma_\theta/E = \left[4 \left(3 \frac{r^2}{b^2} - 1 \right) A + \left(1 + 3 \frac{b^4}{r^4} \right) B \right] \sin 2\theta$$

$$\tau_{r\theta}/E = - \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \left[2 \left(1 + 3 \frac{r^2}{b^2} \right) A + \left(1 + 3 \frac{b^2}{r^2} \right) B \right] \cos 2\theta$$

Exprimant encore l'identité des déplacements et l'équilibre des forces radiales et tangentielles au rayon $r = a$, il vient les quatre équations nécessaires au calcul des coefficients A, B, C et Q. Voici une solution de ce système, exprimée entièrement à partir des paramètres λ et φ :

$$\frac{A}{\lambda^2} = \frac{-B}{1 + \lambda + \varphi} \frac{C/a^2}{C/a^2 + Q/a^4}$$

$$= \frac{3\lambda^2 + (\lambda - 1/\varphi) [(1 - \lambda)^2 + \varphi]}{C/a^2 + Q/a^4}$$

$$= \frac{\lambda [m + 1 + \varphi (1 - \lambda)]}{\varphi} \frac{\tau_\infty}{3\lambda^2 \varphi + (m + \varphi) [(1 - \lambda)^2 + \varphi] E}$$

La discussion des concentrations de tensions est plus complexe car il faut examiner l'influence des deux paramètres.

La fig. 5 montre les résultats obtenus pour $\lambda = 0.5$ et divers rapports d'épaisseurs; le tableau 2 en précise les valeurs numériques.

TABLEAU II $\lambda = 0.5$ $m = 2$

$\lambda \varphi$	k	Courbes					
		1	3	4	5	$(r/a)^2$	9
0	∞	1.5	- 0.25	+ 0.5	1.17	3	0
0.05	61	1.83	- 0.27	+ 0.12	1.07	4.8	0.27
0.25	13	2.17	- 0.16	- 0.17	1.005	16	0.67
0.5	7	2.14	- 0.04	- 0.4	1.	∞	0.89
1.0	4	2	+ 0.14	0			1.14
1.5	3	1.88	+ 0.27	+ 0.11			1.30
2.0	2.5	1.80	+ 0.35	+ 0.20			1.40
5.0	1.6	1.55					1.68
∞	1	1.25	+ 0.875	+ 0.75			2.00

contient l'abscisse unité pour laquelle la condition de non perturbation hydrostatique est vérifiée.

Pour des valeurs de λ plus élevées ces caractéristiques sont qualitativement conservées ; la zone se resserre progressivement autour de l'abscisse unité, tandis que le facteur de concentration diminue progressivement vers l'unité. Le cas limite est représenté à la fig. 4 précédente.

Par contre, pour des valeurs plus petites de λ la situation évolue rapidement vers un cas limite d'allure sensiblement différente.

6. 4. - Cas frontière des anneaux externe et interne.

Rappelons que pour ce cas le paramètre φ est à un facteur numérique près le rapport de la section cylindrique de l'ouverture à la section de la cornière qui la borde.

On trouve pour la tension dans la cornière

$$\sigma_{\theta} / 2 \tau_{\infty} = - \frac{2 \varphi}{3 + m + \varphi} \sin 2 \theta$$

et pour la perturbation dans la plaque les coefficients

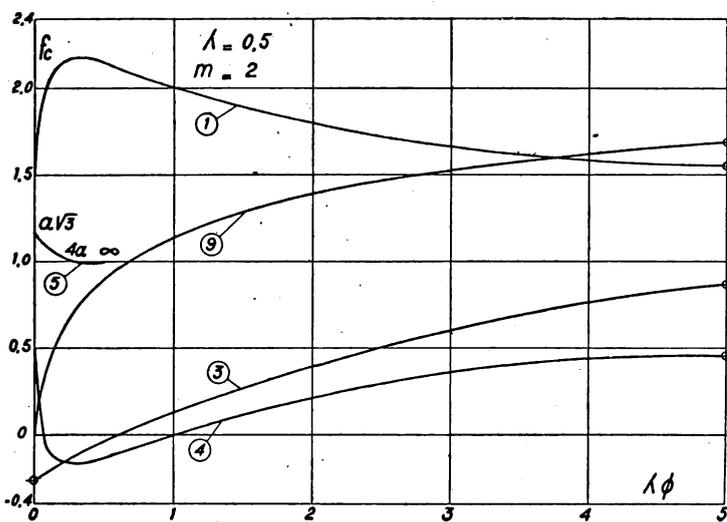


Fig. 5

Un optimum apparaît quand le facteur de concentration plaque, dû à la tension tangentielle et décroissant, devient égal à celui de l'anneau, dû à la tension circulaire et croissante. Cette rencontre a lieu aux environs de l'abscisse 3.75 avec un facteur commun d'approximativement 1.6 et un rapport d'épaisseurs de 1.8. Le renfort optimum est très léger mais la concentration de tension reste élevée. Le choix réalisant la condition de non-perturbation hydrostatique (ici $k = 4$) conduit au même facteur de concentration que celui du bord libre. Ce défaut est inhérent aux anneaux internes ou rivés doubles, tandis que le comportement des anneaux externes est beaucoup plus favorable.

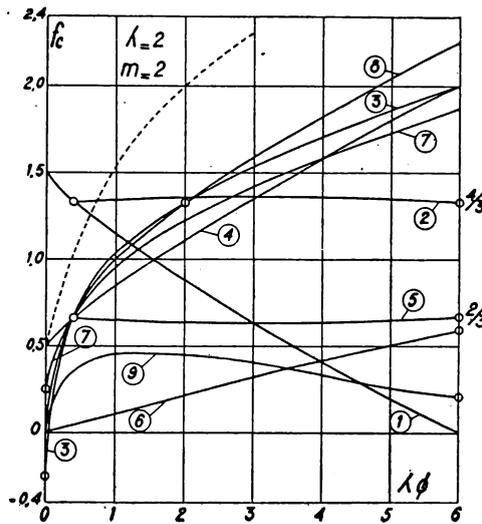


Fig. 6

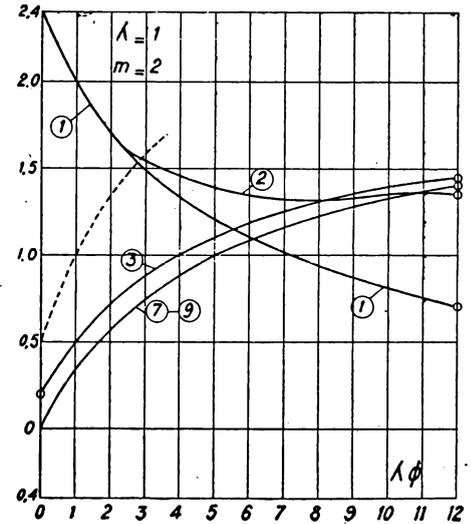


Fig. 7

$$C/a^2 = \frac{2 + \varphi}{3 + m + \varphi} \frac{\tau_{\infty}}{E}$$

$$Q/a^4 = \frac{m - 1 - \varphi}{3 + m + \varphi} \frac{\tau_{\infty}}{E}$$

La fig. 7 montre un optimum pour une abscisse de 8 avec un facteur de concentration de 1.3. Il est à remarquer que pour une valeur nulle de l'abscisse apparaissent des tensions différentes de celles obtenues sur les autres diagrammes. Ce fait provient de la disparition de la raideur en flexion du renfort, qui assurait l'encastrement parfait du bord. En particulier, par suite du relèvement résultant de la tension tangentielle, la valeur unité de l'abscisse ne correspond plus à une zone favorable en pur cisaillement.

7. - Superposition des solutions Champ homogène général.

A un champ de cisaillement pur τ_{∞} on peut ajouter un champ hydrostatique σ_{∞} jusqu'à concurrence de $\sigma_{\infty} = \tau_{\infty}$ sans que la tension de cisaillement maxima du champ résultant ne dépasse la valeur primitive τ_{∞}

Or, au cours de cette opération le maximum local pour la tension de cisaillement dans le champ perturbé par la présence d'une ouverture renforcée ne peut qu'augmenter.

6.3.3 Anneau externe fini.

Les mêmes formules sont valables à l'exception du changement de signe de k ; le rapport λ reçoit maintenant des valeurs supérieures à l'unité.

La fig. 6 a été établie pour illustrer le cas $\lambda = 2$, c'est-à-dire pour un anneau de même aspect géométrique que le précédent mais rivé uniquement sur son pourtour intérieur.

Le tableau 3 contient les valeurs calculées pour l'établissement des courbes.

TABLEAU III $\lambda = 2$ $m = 2$

$\lambda \varphi$	k	Courbes								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	∞	1.5		- 0.25	0.5	1.166	0	0	0	0
0.2	29	1.405		+ 0.389	0.595		0.024	0.460	0.453	0.279
0.4	14	1.333	1.333	0.667	0.667	0.667	0.048	0.667	0.367	0.381
1	5	1.154	1.351	1.039	0.849	0.648	0.115	0.962	1	0.462
2	2	0.889	1.362	1.333	1.111	0.638	0.222	1.222	1.333	0.444
3	1	0.645	1.356	1.537	1.355	0.644	0.322	1.416	1.598	0.392
4	0.5	0.417	1.348	1.708	1.583	0.652	0.417	1.583	1.833	0.333
6	0	0	1.333	2	2	0.666	0.589	1.875	2.25	0.214

Une zone favorable apparaît entre les intersections de la courbe 2 et des courbes 1 et 8 ; le facteur de concentration γ varie peu (de 1.33 à 1.36 environ). De plus, cette zone

Ceci résulte d'une part de la symétrie circulaire complète du champ hydrostatique de perturbation et d'autre part de l'oscillation quadrantale du champ de perturbation de cisaillement. Par suite il y a toujours un azimut pour lequel les deux contributions à une tension locale seront de même signe.

Par contre, dès que σ_∞ devient supérieur à τ_∞ le cisaillement de référence augmente à la valeur $\frac{1}{2}(\sigma_\infty + \tau_\infty)$ et les facteurs de concentration doivent redescendre progressivement vers leur valeur hydrostatique.

Le cas $\sigma_\infty = \tau_\infty$, ou champ de traction simple, conduit donc aux facteurs de concentration les plus élevés.

Il est apparu que, le cas frontière excepté, la condition $\lambda \varphi = m - 1$ constitue pratiquement un optimum individuel tant pour le champ hydrostatique que pour le champ de cisaillement pur. Il faut se garder d'en conclure sommairement qu'elle sera également satisfaisante pour tous les cas de champs primitifs uniformes obtenus par la superposition de ceux-ci.

En effet le long de l'azimut 45° ou 135° les tensions radiales et circonférentielles sont simplement à additionner et ces dernières conduisent à un facteur de concentration plus élevé pour les grandes valeurs de l'abscisse (courbes en traits interrompus des fig. 6 et 7 pour le cas « Traction pure »).

Pour les faibles valeurs de l'abscisse des combinaisons plus complexes interviennent le long d'azimuts intermédiaires pour relever mais plus faiblement le facteur de concentration.

La zone optima correspondante s'en trouve fortement réduite, la limite droite étant plus rapprochée. Quand un renfort est appelé à travailler dans des conditions variables, un optimum choisi dans la zone délimitée par le cas de traction constitue vraisemblablement le meilleur choix.

Dans la figure 8, on a reporté pour chaque valeur de λ la valeur de $\lambda \varphi$ correspondant à l'intersection des courbes 1 et des courbes en traits interrompus. Le facteur de concentration correspondant provoqué par τ max. y est aussi indiqué.

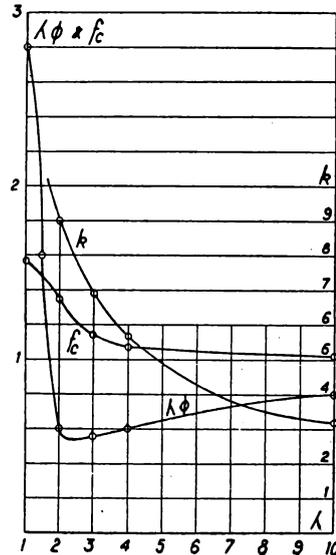


Fig. 8

Ces courbes pourraient constituer un guide satisfaisant pour le choix du meilleur anneau externe de renfort.

8. - Cadre de renfort formé d'un profilé quelconque.

Ce cas est fréquent mais sa solution exacte est trop complexe pour se prêter à une discussion fructueuse.

Tout au plus peut-on donner les équations qui permettent de résoudre numériquement un cas particulier.

Ce renfort peut être considéré comme un anneau, l'âme du profilé éventuellement augmentée de l'épaisseur de la plaque si le rivetage est double, bordé par deux sections concentriques S_a et S_b , les semelles du profilé.

Dans ces conditions le champ des tensions dans l'âme du profilé est toujours régi par les mêmes expressions générales dépendant de certaines constantes mais les conditions aux limites doivent être remplacées par les suivantes, valables pour un anneau externe :

$$\sigma_r = - \frac{E S_b}{h b^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \tau_{r\theta} = - \frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} \quad \text{pour } r = b$$

La tension normale dans la semelle sera $\sigma = E \frac{\partial u_\theta}{b \partial \theta}$

Au bord de diffusion $r = a$

$$\sigma_r' = (\sigma_r)_{\text{plaque}} + k (\sigma_r)_{\text{âme}} = + \frac{E S_a}{H a^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dots$$

$$(\tau_{r\theta})_{\text{plaque}} + k (\tau_{r\theta})_{\text{âme}} = - \frac{\partial \sigma_r'}{\partial \theta}$$

La tension normale dans la semelle sera

$$\sigma = E \left(\frac{\partial u_\theta}{a \partial \theta} + \dots \right)$$

Pour un anneau interne k et h devront être changés de signe.

Les conditions d'identité des déplacements sont évidemment maintenues. Au total on peut donc établir les équations nécessaires pour le calcul numérique des constantes du problème.

Il est aussi possible de construire une solution approchée, basée sur la théorie des pièces à forte courbure.

Le renfort est alors assimilé à une fibre neutre primitivement circulaire, les sections radiales restant planes et perpendiculaires à la déformée. Les méthodes de l'énergie interne de déformation permettent assez aisément de résoudre le problème triplement hyperstatique, mais le fait que les déformations de cisaillement sont négligées rend les résultats quelque peu sujets à caution. Comme il n'y a pas de difficulté de principe nous nous contenterons de signaler les formules finales auxquelles nous sommes arrivés.

Les notations suivantes ont été adoptées :

S section radiale du renfort

$$R = \frac{S}{\int \frac{d\Omega}{r}} \quad \text{rayon de courbure primitif de la fibre neutre en flexion pure, où } r \text{ est le rayon de courbure primitif de l'élément de section } d\Omega$$

I = S R ($r_g - R$) équivalent du moment d'inertie d'une pièce droite où r_g est le rayon de courbure primitif du centre de gravité de la section.

N effort normal sur la section, donnant lieu à une distribution de tensions normales

$$\sigma(r) = \frac{N}{S} \frac{R}{r}$$

et une énergie de déformation par unité de longueur de la fibre neutre de

$$\frac{1}{2} \frac{N^2}{E S}$$

M moment fléchissant donnant lieu à une distribution de tensions normales

$$\sigma(r) = \frac{M}{I} \frac{R}{r} (R - r)$$

et une énergie de déformation par unité de longueur

$$\frac{1}{2} \frac{M^2}{E I}$$

a représente toujours le rayon pour lequel la plaque et le profilé sont solidarités.

$$\mu = \frac{a}{2R} \quad \beta = \frac{H R^3}{I} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{H R}{S}$$

sont des paramètres sans dimensions.

8. 1. - Champ primitif hydrostatique.

On trouve pour le coefficient qui gouverne la perturbation dans la plaque

$$(\gamma + 1 + \nu) D/a^2 = (\gamma - 1 + \nu) \sigma_\infty / E$$

et pour l'effort normal dans une section radiale du renfort

$$(\gamma + 1 + \nu) N = 2 a H \sigma_\infty$$

8. 2. - Champ primitif de pur cisaillement.

Les coefficients qui gouvernent la perturbation dans la plaque sont donnés par

$$C/a^2 = \tau_\infty / E + \frac{1}{2} (B - 3A)$$

$$Q/a^4 = -\tau_\infty / E + A$$

Les sollicitations dans le renfort par

$$M = E \left(-RA + \frac{1}{2} a B \right) H a \sin 2\theta$$

$$N = -E a H A \sin 2\theta$$

et les constantes auxiliaires A et B résultent du système suivant

$$(6 + \beta\mu) A - (\beta\mu^2 + 3 + \nu) B = 4 \tau_\infty / E$$

$$[(3\mu - 1) \beta - \gamma + 3(1 + \nu)] A$$

$$- [(3\mu - 1) \mu\beta + 3(1 + \nu)] B = 0$$

Les conditions sous lesquelles il serait possible d'éliminer le champ de perturbation dans la plaque se traduisent par

$$\beta\mu(1 - \mu) = 1 + \nu$$

$$\gamma = (3\mu - 1)(1 - \mu)\beta$$

Elles conduisent à un profilé très encombrant.

De plus, il est possible de se convaincre sur un schéma simplifié de renfort, constitué de deux fibres extrêmes dont les sections seraient proportionnelles à leur rayon de courbure, qu'il est avantageux de fixer le renfort à hauteur de la fibre intérieure ($a < R$) pour éviter de surcharger cette dernière.

Ceci confirme donc qualitativement la supériorité des anneaux externes sur les anneaux internes.

B. FRAEIJIS DE VEUBEKE.

9. NOTES BIBLIOGRAPHIQUES

Etant donné son importance le problème du renforcement des ouvertures a été étudié par plusieurs auteurs. A notre connaissance aucun d'entre eux n'a opéré de distinction entre les deux modèles idéalisés de renforts annulaires. Seul le cas des anneaux internes semble avoir retenu leur attention.

I) S. TIMOSCHENKO (« On the Stress in a Flat Plate with a Circular Hole », Journal of the Franklin Institute, Vol. 197, 1924) a donné pour le cas de l'anneau interne dans un champ de traction simple une solution approchée suivant la théorie des pièges courbes.

II) C. GURNEY (« An Analysis of the Stresses in a Flat Plate with a Reinforced Circular Hole under Edge Forces », Aeronautical Research Committee. Reports and Memoranda, N° 1834, 1938), a utilisé le principe de superposition des deux solutions simples associées au champ hydrostatique et champ de cisaillement pur pour résoudre le cas d'un champ uniforme arbitraire.

Une solution exacte est basée sur l'emploi d'une fonction d'Airy en coordonnées polaires. La résolution formelle du système de conditions aux limites n'a pas été tentée, en particulier le rôle du paramètre φ n'a pas été dégagé.

De l'ensemble des résultats numériques qu'il a obtenus, l'auteur a montré la nécessité d'un compromis entre les tensions circonférentielles le long du bord libre et les tensions tangentielles au bord de jonction. Ces conclusions sont bien confirmées par les résultats numériques obtenus ici.

III) L. BESKIN (« Strengthening of Circular Holes in Plates under Edge Loads », Journal of Applied Mechanics, Vol 66 1944), a tenté d'abaisser le facteur de concentration en déplaçant le compromis par l'adjonction d'une semelle concentrée au bord libre. Cette extension de la théorie de Gurney se fait en appliquant les conditions aux limites modifiées comme au par. 8.

IV) S. LEVY, A. E. McPHERSON et F. C. SMITH (« Reinforcement of a Small Circular Hole in a Plane Sheet under Tension », Journal of Applied Mechanics, Vol. 15, N° 2, 1948).

Ces auteurs ont traité le cas d'un renfort d'épaisseur variable dans un champ hydrostatique.

Ils ont ensuite mis à l'épreuve la théorie de Gurney dans une suite d'expériences destinées à faire ressortir l'influence de diverses modalités de rivetage. Il était à prévoir que la concordance ne serait satisfaisante que pour les anneaux comportant un rivetage double. Les autres auraient dû être confrontés, soit avec la théorie des anneaux externes, soit parfois avec une théorie mixte (essais comportant un rivetage unique de rayon moyen).

L'Histoire de la Mécanique ⁽¹⁾

Les exposés d'histoire de la science en général, ou de telle ou telle branche de la science en particulier, présentent le plus souvent un caractère plus historique que scientifique ; parfois même superficiels, parsemés d'anecdotes, ils se proposent de distraire le lecteur autant que de l'instruire.

Tout autre est l'« Histoire de la Mécanique », que vient de publier M. René Dugas, Maître de conférences à l'École Polytechnique, écrit pour des lecteurs jouissant d'une culture mathématique étendue, cet ouvrage étudie d'une manière approfondie, par l'analyse et le commentaire des textes originaux le développement des principes de la Mécanique depuis ses origines, c'est-à-dire depuis Aristote, jusqu'à nos jours, c'est-à-dire jusqu'à la relativité, la mécanique ondulatoire et la mécanique quantique.

« Dresser un bilan de l'évolution de la Mécanique, dit Louis de Broglie dans sa préface, depuis ses origines jusqu'à l'époque actuelle constitue une entreprise difficile exigeant une somme considérable de travail et de réflexion. Une telle histoire de la Mécanique, peu d'hommes pouvaient tenter de l'écrire, car sa rédaction exigeait non seulement des connaissances variées et approfondies sur toutes les branches de la Mécanique ancienne ou contemporaine, mais aussi une grande patience, une érudition avérée, un esprit critique aiguisé. Ces qualités diverses, M. René Dugas, qui s'était déjà fait remarquer par de belles études sur certains points particuliers de l'histoire de la Dynamique et par des exposés critiques sur diverses questions de Mécanique classique, de Mécanique relativiste et de Mécanique quantique, les réunissait à un haut degré. Aussi a-t-il réussi à aborder cette tâche écrasante et, après plusieurs années de travail, à la mener à bien. Et l'important ouvrage qu'il publie aujourd'hui sur l'histoire de la Mécanique constitue une vue d'ensemble du plus grand intérêt et sera hautement apprécié par tous ceux qui étudient l'histoire des connaissances scientifiques.

« Plus impartial que Mach, M. Dugas, servi par le développement de la critique historique d'une part, par les progrès de la science d'autre part, a pu aussi être plus complet. En ce qui concerne l'Antiquité et surtout le Moyen Age, il nous apporte un tableau beaucoup plus détaillé des efforts tentés et des résultats obtenus. C'est surtout magistrale de Pierre Duhem que M. Dugas a dû de pouvoir tracer la contribution importante que des maîtres comme Jordan, Jean Buridan, Albert de Saxe, Nicole Oresme et un gr

à l'universelle curiosité comme Léonard de Vinci ont fournie au développement des principes de la Mécanique. Des magnifiques recherches de Duhem qui sont souvent un peu pénibles à étudier dans les textes originaux, ordinairement longs et parfois un peu diffus, de cet éminent et érudit physicien, M. Dugas a su faire en un petit nombre de pages un exposé résumé que le lecteur lira aisément et avec le plus grand profit.

« Averti des progrès les plus récents de la science, l'auteur, déjà habitué à réfléchir aux nouvelles formes contemporaines de la Mécanique a consacré la dernière partie de son livre à la mécanique relativiste et à la Mécanique ondulatoire et quantique. Cet exposé très exactement fait en suivant de près, selon les habitudes de l'auteur, la pensée des novateurs et le texte de leurs écrits, rend naturellement l'histoire de la Mécanique de M. Dugas beaucoup plus complète que toutes celles qui avaient été rédigées avant lui.

« La partie centrale du livre consacrée aux développements de la Mécanique aux XVII^e, XVIII^e et XIX^e siècles, a demandé à l'auteur une très grande somme de travail car la matière est immense. Ne pouvant suivre tous les détails du développement de la Mécanique au XVII^e et surtout au XIX^e siècle, M. Dugas a choisi pour les étudier à fond certaines questions particulièrement importantes soit en elles-mêmes, soit par les prolongements qu'elles ont eus dans la période contemporaine. Ce choix difficile me paraît avoir été fait très habilement et a permis à l'auteur, sans se perdre dans les détails, de tracer des grandes lignes marquant les routes principales suivies dans cette région par la pensée scientifique. »

L'ouvrage est divisé en cinq livres consacrés successivement : aux précurseurs, à la formation de la Mécanique classique (XVII^e siècle), à l'organisation et au développement des principes de la Mécanique classique (XVIII^e siècle) à l'évolution de la Mécanique classique après Lagrange, et, enfin, aux principes des Mécaniques physiques modernes.

La rédaction d'un tel livre représente un labeur considérable et nous ne saurions trop remercier l'auteur d'avoir, comme le dit encore M. Louis de Broglie, « mis au service de l'histoire de la Science des qualités d'esprit et des méthodes de travail rarement réunies chez un seul homme et de nous avoir ainsi donné un ouvrage remarquable qui restera un document de premier ordre pour les historiens de la Mécanique.

ULg - BST-Sc appl & Math



× 25, de XI1650 pages, 116 figures. Prix : relié toile, od, 92, rue Bonaparte, Paris, et Editions du Griffon,