

QUELQUES APPLICATIONS DE LA METHODE

DES DEPHASAGES CARACTERISTIQUES

par B.M. FRAEIJIS de VEUBEKE  
Ingénieur à l'Aéronautique  
Civile Belge

Communication présentée au deuxième Congrès National  
des Sciences, Bruxelles, juin 1950

②

## I.- Système oscillant à deux degrés de liberté.-

### 1. Modes et déphasages caractéristiques.

La théorie générale de la méthode des déphasages caractéristiques a été exposée par l'auteur dans une publication antérieure. (1)

L'usage de notations matricielles s'y était avéré indispensable par la concision de l'appareillage mathématique. Il a paru utile, par sa diffusion, de dégager à nouveau les principes de la méthode sur l'exemple simple d'un système à deux degrés de liberté (fig. 1).

L'oscillation angulaire des disques de moments d'inertie  $m_1$  et  $m_2$  montés sur des arbres de torsion de duretés  $k_1$  et  $k_2$  est gouvernée par les équations classiques

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\theta}_1 + k_1 \theta_1 - k_2 (\theta_2 - \theta_1) + r_1 \dot{\theta}_1 - r_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) = p_1 \sin \omega t \\ m_2 \ddot{\theta}_2 + k_2 (\theta_2 - \theta_1) + r_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) = p_2 \sin \omega t. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1 \theta_1 - k_2 (\theta_2 - \theta_1) + r_1 \dot{\theta}_1 - r_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) &= p_1 \sin \omega t \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + k_2 (\theta_2 - \theta_1) + r_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) &= p_2 \sin \omega t \end{aligned}$$

Dans ces équations,  $r_1$  et  $r_2$  représentent des coefficients de dissipation par amortissements visqueux.

Les fréquences naturelles du système non amorti et non excité sont racines de l'équation algébrique

$$\Delta = k_1 k_2 - \omega^2 [k_1 m_1 + (k_1 + k_2) m_2] + \omega^4 m_1 m_2 = 0 \quad (2)$$

Introduisons pour la commodité des notations les fréquences naturelles découplées définies par

$$\delta_1^2 = k_1 / (m_1 + m_2)$$

$$\delta_2^2 = k_2 / m_2$$

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = 0.9 = \frac{k_2 m_1 m_2}{m_2 k_1}$$

Les fréquences naturelles couplées sont reliées à celles-ci par

$$\begin{cases} \omega_1^2 + \omega_2^2 = (1+m)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \\ \omega_1^2 \omega_2^2 = (1+m)\gamma_1^2 \gamma_2^2 \end{cases} \quad \text{où } m = \frac{m_2}{m_1}$$

Le procédé classique pour établir la réponse forcée du système amorti sous l'effet des excitations d'amplitude  $p_1$  et  $p_2$  consiste à poser

$$\begin{aligned} \theta_1 &= A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t = C_1 \sin(\omega t - \phi_1) & \begin{aligned} A_1 &= C_1 \cos \phi_1 \\ B_1 &= -C_1 \sin \phi_1 \end{aligned} \\ \theta_2 &= A_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t = C_2 \sin(\omega t - \phi_2) & \tan \phi_2 = -\frac{B_2}{A_2} \end{aligned}$$

donc à rechercher la composante globale en phase et la composante globale en quadrature avec l'excitation. Les quatre amplitudes inconnues résultent alors d'un système de quatre équations linéaires à quatre inconnues. En général les déphasages globaux  $\phi_1$  et  $\phi_2$  de chaque coordonnée sont différents.

La méthode des déphasages caractéristiques consiste à retourner le problème en posant la question suivante :

Existe-t-il une sollicitation d'amplitude  $s_1$  et  $s_2$ , telles que la réponse forcée présente le même déphasage pour chaque coordonnée?

Posant donc

$$\theta_1 = C_1 \sin(\omega t - \phi)$$

$$\theta_2 = C_2 \sin(\omega t - \phi)$$

et introduisant dans les équations du mouvement il vient

$$\begin{aligned} & \left[ (k_1 + k_2) - \omega^2 m_1 \right] C_1 - k_2 C_2 \sin(\omega t - \phi) + \left[ \omega(r_1 + r_2) C_1 - \omega r_2 C_2 \right] \cos(\omega t - \phi) = s_1 \sin \omega t \\ & -k_2 C_1 + \left[ k_2 - \omega^2 m_2 \right] C_2 \sin(\omega t - \phi) + \omega r_2 (C_2 - C_1) \cos(\omega t - \phi) = s_2 \sin \omega t \end{aligned}$$

L'annulation générale du coefficient de  $\cos \omega t$  donne

$$\left[ (k_1 + k_2 - \omega^2 m_1) \sin \phi - \omega (r_1 + r_2) \cos \phi \right] C_1 - \left[ k_2 \sin \phi - \omega r_2 \cos \phi \right] C_2 = 0$$

$$-\left[ k_2 \sin \phi - \omega r_2 \cos \phi \right] C_1 + \left[ (k_2 - \omega^2 m_2) \sin \phi - \omega r_2 \cos \phi \right] C_2 = 0 \quad (3)$$

C'est une paire d'équations linéaires et homogènes dans les amplitudes. Une solution différente de zéro ne pourra donc exister que si le déterminant est nul. Cette condition, développée, s'écrit

$$\left( \frac{\tan \phi}{\omega} \right)^2 \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}{1 + m} - \left( \frac{\tan \phi}{\omega} \right) \left[ \varepsilon_2 \delta_2 (\delta_1^2 - \omega^2) + \varepsilon_1 \delta_1 (\delta_2^2 - \omega^2) \right] + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \delta_1 \delta_2 = 0 \quad (4)$$

moynnant l'introduction de coefficients d'amortissement non-dimensionnels

$$\varepsilon_1 = \frac{r_1}{\delta_1 (m_1 + m_2)} \quad \varepsilon_2 = \frac{r_2}{\delta_2 m_2}$$

c'est une équation du second degré en  $\tan \phi$ . Il existe par conséquent deux valeurs du déphasage constant  $\phi$  qui peuvent répondre au problème, ce sont les "déphasages caractéristiques".

L'annulation générale du coefficient de  $\sin \omega t$  donne

$$-\delta_1 = \left[ (k_1 + k_2 - \omega^2 m_1) \cos \phi + \omega (r_1 + r_2) \sin \phi \right] C_1 - \left[ k_2 \cos \phi + \omega r_2 \sin \phi \right] C_2$$

$$-\delta_2 = -\left[ k_2 \cos \phi + \omega r_2 \sin \phi \right] C_1 + \left[ (k_2 - \omega^2 m_2) \cos \phi + \omega r_2 \sin \phi \right] C_2 \quad (5)$$

Donnant successivement à  $\phi$  les valeurs caractéristiques trouvées, ces équations définissent les amplitudes des sollicitations capables d'entretenir les modes de réponse caractéristiques.

Les valeurs suivantes ont été considérées à titre d'exemple numérique

$$m=0,2 \quad \delta = \frac{\delta_2}{\delta_1} = 0,9 \quad \epsilon_1 = 0,01 \quad \epsilon_2 = 0,1$$

Il en résulte

$$\frac{\omega_1^2}{\delta_1^2} = 0,6306$$

$$\frac{\omega_2^2}{\delta_1^2} = 1,5414.$$

et le tableau suivant des déphasages caractéristiques en fonction de la fréquence d'excitation rapportée à la fréquence fondamentale découplée

$x = \frac{\omega}{\delta_1}$	$\tan \phi_1$	$\phi_1^\circ$	$\tan \phi_2$	$\phi_2^\circ$
0	0	0	0	0
0.1	0.01125	0.64	0.00101	0.06
0.5	0.08258	4.72	0.00645	0.37
0.6	0.13051	7.44	0.00936	0.54
0.7	0.26552	14.87	0.0135	0.77
0.8	-0.88	104.45	0.0208	1.19
1.0	-0.06800	176.11	0.0794	4.54
1.2	-0.02285	178.69	0.829	39.66
1.3	-0.01695	179.03	-0.685	145.59
1.5	-0.0113	179.35	-0.1878	169.36
2.0	-0.00643	179.63	-0.081	175.37

Chaque déphasage se comporte qualitativement comme celui d'un système à un degré de liberté, propriété démontrée de façon générale dans la référence (1).

Le rapport des amplitudes d'oscillation des deux disques est donné soit par

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{1}{m} \left[ -1 + \frac{1+m}{\gamma} \left( \frac{1}{\gamma} - \varepsilon_1 \cot \phi \right) \right]$$

soit par

$$\frac{c_2}{c_1} = 1 + \frac{x_2}{\delta^2 + x \delta \varepsilon_2 \cot \phi - x^2}$$

A très basse fréquence

$$\lim x \cot \phi_1 = \frac{1}{\delta \varepsilon_2} \quad \text{entraînant} \quad \lim \frac{c_{21}}{c_{11}} = \infty$$

$$\lim x \cot \phi_2 = \frac{1}{\varepsilon_1} \quad \text{entraînant} \quad \lim \frac{c_{22}}{c_{12}} = 1.$$

A très haute fréquence

$$\lim x \tan \phi = \frac{1+m}{2} \left[ -(\varepsilon_1 + \delta \varepsilon_2) \pm \sqrt{(\varepsilon_1 + \delta \varepsilon_2)^2 - 4 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\delta}{1+m}} \right]$$

soit ici

$$\lim x \tan \phi_1 = -0,0098 \quad \text{et} \quad \lim \frac{c_{11}}{c_{11}} = 1,122$$

$$\lim x \tan \phi_2 = -0,1102 \quad \text{et} \quad \lim \frac{c_{22}}{c_{12}} = -4,455.$$

La fig. 2 montre graphiquement l'allure des déphasages caractéristiques et des modes associés en fonction de la fréquence réduite.

## 2. Construction de la solution générale.

Il reste à montrer comment la réponse forcée sous l'effet de deux sollicitations arbitraires  $p_1$  et  $p_2$  peut être construite à partir des deux modes normaux à déphasages caractéristiques.

Pour cela soient

$C_{11}$  ,  $C_{21}$  ,  $S_{11}$  , et  $S_{21}$  les déplacements et sollicitations du mode de déphasage caractéristique  $\phi_1$  ,

$C_{12}$  ,  $C_{22}$  ,  $S_{12}$  , et  $S_{22}$  les mêmes grandeurs relatives au mode de déphasage caractéristique  $\phi_2$  .

On peut vérifier sur l'exemple donné et démontrer de façon générale (1) les relations d'orthogonalité suivantes

$$\begin{cases} S_{11} C_{12} + S_{21} C_{22} = 0 \\ S_{12} C_{11} + S_{22} C_{21} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Elles expriment le fait physique simple que " le travail effectué par les sollicitations d'un mode sur les déplacements appartenant à un mode de déphasage caractéristique distinct est nul".

Essayons de construire la solution générale au moyen d'une combinaison linéaire.

$$p_1 = \lambda_1 s_{11} + \lambda_2 s_{12}$$

$$p_2 = \lambda_1 s_{21} + \lambda_2 s_{22}$$

Les coefficients  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  avec lesquels les modes interviennent dans la solution sont déterminés " à la Fourier " .

Multipliant la première équation par  $C_{11}$ , la deuxième par  $C_{21}$  et additionnant il vient grâce à une des relations d'orthogonalité

$$\lambda_1 = \frac{p_1 C_{11} + p_2 C_{21}}{s_{11} C_{11} + s_{21} C_{21}}$$

et de façon analogue

$$\lambda_2 = \frac{p_1 C_{12} + p_2 C_{22}}{s_{12} C_{12} + s_{22} C_{22}}$$

La solution forcée générale sera donc

$$\theta_1 = \lambda_1 C_{11} \sin(\omega t - \phi_1) + \lambda_2 C_{12} \sin(\omega t - \phi_2)$$

$$\theta_2 = \lambda_1 C_{21} \sin(\omega t - \phi_1) + \lambda_2 C_{22} \sin(\omega t - \phi_2)$$

$\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ayant les valeurs calculées ci-dessus.

### 3. Cas d'une fonction de dissipation semi-définie positive

L'exemple précédent et la théorie générale développée en (') sont relatifs à une dissipation définie positive. Il faut entendre par là que, quelles que soient les vitesses non toutes nulles des coordonnées, les forces d'amortissement dissipent une puissance positive et non-nulle.

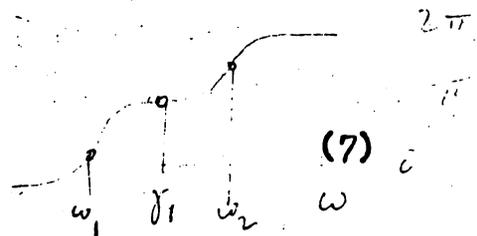
Quand on fait tendre  $\varepsilon_1$  vers zéro dans l'exemple précédent, on obtient un cas typique, où la puissance dissipée peut être nulle (ici quand une vitesse angulaire identique anime chaque disque) sans que chaque vitesse individuelle ne le soit simultanément.

Cette possibilité est à la base de certaines difficultés d'extension de la théorie, qui présentent un certain intérêt.

Le coefficient de  $\left( \frac{\tan \phi}{\omega} \right)$  dans l'éq. 4, change de signe au voisinage de  $\omega = \delta_1$  il s'en suit que, lorsque  $\varepsilon_1$  tend vers zéro, la branche  $\phi_2$  tend vers zéro dans la bande  $\frac{\omega}{\delta_1}$  de 0 à 1 la branche  $\phi_1$  tend vers  $\pi$  dans la bande  $\frac{\omega}{\delta_1}$  de 1 à l'infini.

Quand on fait brutalement  $\varepsilon_1 = 0$  dans l'éq. 4, on constate qu'une des racines est toujours nulle, l'autre

$$\frac{\tan \phi}{\omega} = \frac{(1+m) \varepsilon_2 \delta_2 (\delta_1^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}$$



(7)

En fait le passage graduel à la limite suggère que chacune de ces racines appartient en partie à  $\phi_1$ , en partie à  $\phi_2$ , la fonction s'opérant pour  $\omega = \omega_1$  où on a une racine double nulle. L'indétermination  $\pi$  de la tangente justifie d'ailleurs cette modification.

Les déphasages ont alors l'allure indiquée fig.3 elle reste qualitativement la même que pour un amortissement défini positif.

Il en va de même pour l'allure des modes de déplacements.

Les équations (3) peuvent s'écrire ici

$$\begin{cases} -\frac{\tan \phi}{\omega} [(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1) c_1 - k_2 c_2] + r_2 (c_1 - c_2) = 0 \\ -\frac{\tan \phi}{\omega} [-k_2 c_1 + (k_2 - \omega^2 m_2) c_2] - r_1 (c_1 - c_2) = 0 \end{cases} \quad (3')$$

dont par addition

$$\frac{\tan \phi}{\omega} [(k_1 - \omega^2 m_1) c_1 - \omega^2 m_2 c_2] = 0 \quad (3'')$$

La racine  $\phi = 0$  livre donc immédiatement par (3')

$$c_1 = c_2$$

tandis que la seconde racine ( $\tan \phi \neq 0$ ) par (3'')

$$\frac{c_1}{\omega^2 m_2} = \frac{c_2}{k_1 - \omega^2 m_1}$$

Encore une fois les deux branches des rapports  $c_2/c_1$  (fig.3) doivent s'entendre comme appartenant en partie à  $\phi_1$ , en partie à  $\phi_2$  ce que par ailleurs l'évolution du  $\cos$  (fig.2) fait clairement prévoir.

A part les raisons de continuité qu'on vient d'exposer, le traitement du problème peut être poursuivi sans qu'il soit nécessaire de procéder à l'échange des modes autour de  $x = 1$ .

Les équations (5) deviennent ici

$$\begin{cases} \Delta_1 = (k_1 - \omega^2 m_1) \cos \phi C_1 + (k_2 \cos \phi + \omega r_2 \sin \phi) (C_1 - C_2) \\ \Delta_2 = -(k_2 \cos \phi + \omega r_2 \sin \phi) (C_1 - C_2) - \omega^2 m_2 \cos \phi C_2 \end{cases}$$

ou encore en s'aidant de (3')

$$\begin{cases} \Delta_1 \cos \phi = (k_1 - \omega^2 m_1) C_1 + k_2 (C_1 - C_2) \\ \Delta_2 \cos \phi = -k_2 (C_1 - C_2) - \omega^2 m_2 C_2 \\ \Delta_1 \sin \phi = \omega r_2 (C_1 - C_2) \\ \Delta_2 \sin \phi = -\omega r_2 (C_1 - C_2) \end{cases} \quad (5'')$$

Les modes (sans échange) apparaissent alors comme suit:

mode I  $\phi_1 = 0 \quad C_{11} = C_{21}$

$$\Delta_{11} = (k_1 - \omega^2 m_1) C_{11}$$

$$\Delta_{21} = -\omega^2 m_2 C_{11}$$

mode II  $\phi = \phi_2$  sont tangente fournie par l'équation (7)

$$\frac{C_{12}}{C_{12} - C_{22}} = \frac{m}{1+m} \cdot \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

$$-\sin \phi_2 \Delta_{12} = \omega r_2 (C_{12} - C_{22})$$

$$\sin \phi_2 \Delta_{22} = -\omega r_2 (C_{12} - C_{22})$$

#### 4. Absorbeur dynamique de vibrations (2)

La théorie de l'absorbeur dynamique rentre dans le problème précédent. On supposera le premier disque seul excité ( $p_2 = 0$ ) le second disque jouant le rôle d'absorbeur.

La réponse forcée du premier disque s'établit comme suit

$$\lambda_1 = \frac{p_1}{s_{11} + s_{21}} = \frac{p_1}{c_{11}} \cdot \frac{1}{k_1 (1-x^2)}$$

$$\lambda_2 = \frac{p_1 c_{12}}{s_{12} (c_{12} - c_{22})} = \frac{p_1}{c_{12}} \cdot \frac{\sin \phi_2}{\omega z_c} \cdot \left( \frac{c_{12}}{c_{12} - c_{22}} \right)^2$$

et par conséquent

$$\frac{k_1}{p_1} \theta_1 = \frac{1}{1-x^2} \left[ \sin \omega t + a \sin \phi_2 \sin(\omega t - \phi_c) \right] \quad (8)$$

$$\text{ou} \quad a = \frac{m \omega^4}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \quad (9)$$

L'amplitude résultante A de la vibration ressort d'une relation trigonométrique dans le triangle de la fig. 4

$$A^2 = \frac{1 + a^2 \cos^2 \phi_c + 2a \cos \phi_c}{(1-x^2)^2} \quad (10)$$

Seul l'angle  $\phi_c$  dépend du coefficient d'amortissement  $\epsilon_c$ . Les fréquences pour lesquelles l'amplitude en est indépendante résultent donc de la condition dérivée,

$$\frac{a(a+z) \sin 2\phi_c}{(1-x^2)^2} = 0$$

dont les seules solutions sont

$$a = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \omega = 0$$

et (11)

$$a + z = 0 \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$(m+z)\omega^4 - z\omega^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0$$

Soient  $\mu_1^2$  et  $\mu_2^2$  les deux fréquences livrées par cette équation. Les amplitudes relatives de la vibration ressortent directement de (10) et (11)

$$A_1^2 = \frac{1}{(1-\mu_1^2)^2}$$

$$A_2^2 = \frac{1}{(1-\mu_2^2)^2}$$

Dans les meilleures conditions ces amplitudes sont égales; ceci exige

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 = \varepsilon$$

et donc

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = m + \varepsilon \quad \text{ou} \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \frac{\varepsilon + m}{1 + m}$$

C'est la condition de syntonisation de l'absorbeur.

On voit donc que la méthode des déphasages caractéristiques permet de retrouver sans difficultés les propriétés de l'absorbeur dynamique (2).

### 5. La fréquence singulière $x = 1$ .

La fréquence  $\omega = \gamma_1$  joue dans le problème semi-défini positif un rôle singulier. Dans ce cas en effet les deux modes deviennent identiques et la seule sollicitation admise est

$$d_1 = -d_2 = \gamma_1^2 m_2 C_1$$

Il n'est donc pas possible de satisfaire les équations comportant des sollicitations  $p_1$  et  $p_2$  arbitraires.

Travaillant la solution par la méthode classique, il vient

$$\begin{cases} A_1 - A_2 = \frac{p_1 + p_2}{\gamma_1^2 m_2} \\ A_1 = \frac{1}{\gamma_1^2 m_2} \left[ p_1 - \frac{k_2}{\gamma_1^2 m_2} (p_1 + p_2) \right] \\ B_1 = B_2 = -\frac{\varepsilon_2 \omega}{\gamma_1^2 m_2} (A_1 - A_2) \end{cases}$$

Dans l'esprit de la méthode des déphasages caractéristiques, cette solution doit être interprétée comme suit :

Définissons deux sollicitations  $q_1$  et  $q_2$  par les relations

$$p_1 = q_1 + q_2 \quad p_2 = -q_1 + q_2$$

donc

$$q_1 = \frac{p_1 - p_2}{2} \quad q_2 = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

1) Quand  $q_1$  agit seule on retrouve le mode double caractéristique

$$A_1 = A_2 = \frac{q_1}{\delta_1^2 m_1} \quad B_1 = B_2 = 0 \quad (\text{Somme } \phi = 0)$$

dont l'amplitude est indépendante de l'amortissement;

2) quand  $q_2$  agit seule on trouve

$$\begin{cases} A_1 = \frac{q_2}{\delta_1^2 m_1} \left( 1 - \frac{e k_2}{\delta_1^2 m_1} \right) = - \frac{2 q_2 k_2}{(\delta_1^2 m_1)^2} + \frac{q_2}{\delta_1^2 m_1} \\ A_2 = \frac{-q_2}{\delta_1^2 m_1} \left( 1 + \frac{e k_2}{\delta_1^2 m_1} \right) = - \dots - \dots \\ B_1 = B_2 = - \frac{2 \delta_1 q_2}{(\delta_1^2 m_1)^2} \end{cases} \quad \tan \phi = - \frac{B_2}{A_2} = - \frac{\delta_1 k_2}{k_2}$$

dont la composante en quadrature dépend seule de l'amortissement. De façon générale, la solution complémentaire, rendue nécessaire au droit d'une fréquence singulière par la confluence de deux modes, peut être obtenue par un procédé de dérivation, qui sort du cadre restreint de l'exposé.

## II.- Vibrations de torsion amorties dans les vilebrequins-filtres.

La méthode des déphasages caractéristiques peut rendre quelques services dans l'étude des vibrations forcées de systèmes à grand nombre de degrés de liberté.

Du point de vue purement théorique elle permet de justifier un procédé couramment utilisé dans le traitement au voisinage de la résonance d'un système faiblement amorti.

Ce procédé est basé sur les hypothèses suivantes :

- les coordonnées vibrent toutes en quadrature,
- leurs amplitudes sont proportionnelles à celles du mode de vibration, qui vient en résonance.

Le rapport des amplitudes étant fixé, le système se comporterait donc au voisinage de la résonance comme un système à un seul degré de liberté auquel Naycy (4) a donné le nom "d'oscillateur équivalent". Suivant Timoshenko (5) ce procédé est dû à Wydler (3).

La justification par la méthode des déphasages caractéristiques est directe (1).

La méthode des déphasages caractéristiques ramène la détermination de la solution forcée à la résolution d'une équation algébrique de degré égal au nombre  $n$  de degrés de liberté, suivie de celle d'un système linéaire homogène du même ordre.

Elle a donc une signification pratique chaque fois qu'un procédé numérique puissant rend le calcul des racines aisé, alors que la résolution du système habituel de  $2n$  équations linéaires avec second membre serait impraticable.

Cette circonstance se présente pour les vibrations de torsion des vilebrequins-filtres, où les extensions nécessaires peuvent être apportées à la méthode de Biot (6).

De plus, n'étant pas restreinte aux vitesses de résonance, la méthode permet une comparaison utile avec les mesures expérimentées par torsio-graphes (7) dans tout le domaine d'utilisation. Elle n'est pas davantage restreinte aux faibles amortissements.

### 1. Élimination des coordonnées non excitées. Impédance complexe.

La fig. 5 représente schématiquement un vilebrequin-filtre constitué de  $n$  disques identiques reliés par  $n-1$  arbres de torsion identiques. Seuls les  $n$  disques sont excités par des couples périodiques. Les degrés de liberté contenus dans les mécanismes attaqués par le premier et le dernier disque sont représentés par leurs impédances mécaniques.

L'impédance mécanique est le rapport entre l'amplitude du couple excitateur et l'amplitude de la vibration angulaire, mesurés dans le même sens au niveau de la section attaquée.

L'existence possible de forces d'amortissement dans ces mécanismes fait en sorte que les deux grandeurs en question ne sont pas nécessairement en phase.

La représentation la plus commode de ce phénomène consiste à opérer comme dans la théorie des circuits électriques au moyen de vecteurs tournants et d'impédances complexes.

Soit  $C \sin \omega t$  l'oscillation angulaire, le couple à appliquer pour le produire comporte une partie en phase et une partie en quadrature toutes deux proportionnelles à l'amplitude  $C$

$$(K \sin \omega t + H \cos \omega t) C$$

Considérons l'une et l'autre grandeur comme la projection sur l'axe des imaginaires des vecteurs tournants respectifs

$$C e^{i\omega t}$$

$$d \quad (K + iH) C e^{i\omega t}$$

Le quotient du vecteur sollicitation par le vecteur déplacement est alors par définition l'impédance soit ici

$$K + iH$$

2. Oscillations forcées d'un vilebrequin-filtre. Amortissement concentré dans les impédances d'extrémité.

Ce cas s'applique évidemment à l'étude de l'effet que pourrait avoir un absorbeur de vibrations. Les impédances d'extrémité  $(K_0 + iH_0)$  et  $(K_n + iH_n)$  sont complexes.

Considérant les équations du mouvement sous forme de relations entre vecteurs tournants, nous appliquons la théorie des déphasages caractéristiques en posant pour une coordonnée d'indice  $x$  d'un disque quelconque la loi

$$q_x = \theta_x e^{i(\omega t - \psi)}$$

où l'angle de déphasage  $\psi$  est indépendant de la coordonnée. Après l'élimination du facteur commun  $e^{i\omega t}$  égalant séparément les quantités réelles et les quantités imaginaires pures, il vient :

$$\begin{cases} \sin \psi [(k + k_0 - \omega^2 I)\theta_1 - k\theta_2] - \cos \psi H_0 \theta_1 = 0 \\ \sin \psi [-k\theta_{x-1} + (2k - \omega^2 I)\theta_x - k\theta_{x+1}] = 0 \quad x = [2, \dots, (n-1)] \\ \sin \psi [-k\theta_{n-1} + (k + K_n - \omega^2 I)\theta_n] - \cos \psi H_n \theta_n = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Le groupe homogène qui définira les déphasages caractéristiques et les modes associés.

$$\begin{cases} d_1 = \cos \psi [(k + K_0 - \omega^2 I)\theta_1 - k\theta_2] + \sin \psi H_0 \theta_1 \\ d_x = \cos \psi [-k\theta_{x-1} + (2k - \omega^2 I)\theta_x - k\theta_{x+1}] \\ d_n = \cos \psi [-k\theta_{n-1} + (k + K_n - \omega^2 I)\theta_n] + \sin \psi H_n \theta_n \end{cases} \quad (13)$$

Le groupe définissant les sollicitations capables d'entretenir les modes. Dans tout ce qui suit, nous supposons que  $H_0$  et  $H_n$  sont différents de zéro, c'est-à-dire que la fréquence d'excitation ne sera pas singulière.

A) Recherche des déphasages caractéristiques différents de zéro.

Comme  $\sin \Psi \neq 0$  l'équation homogène d'un disque non terminal sera satisfaite en posant

$$\theta_x = C \sin(\mu x + \phi) \quad (14)$$

Le paramètre  $\mu$  étant relié à la fréquence d'excitation par

$$\omega = 2 \sin \frac{\mu}{2} \sqrt{\frac{k}{I}} \quad (15)$$

Cette solution implique que la fréquence d'excitation soit inférieure à la fréquence de coupure du filtre constitué par le vilebrequin

$$\omega_2 = 2 \sqrt{\frac{k}{I}}$$

Introduite dans les équations terminales homogènes, elle donne

$$\tan \Psi [(k_0 - 1 + 2 \cos \mu) \sin(\mu + \phi) - \sin(2\mu + \phi)] = h_0 \sin(\mu + \phi)$$

$$\tan \Psi [(k_n - 1 + 2 \cos \mu) \sin(n\mu + \phi) - \sin[(n-1)\mu + \phi]] = h_n \sin(n\mu + \phi) \quad (16)$$

l'élimination de  $\phi$  entre ces équations livre

$$\begin{aligned} & \tan^2 \Psi \left[ \sin(n+1)\mu + (k_0 + k_n - 2) \sin n\mu + (k_0 - 1)(k_n - 1) \sin(n-1)\mu \right] \\ & - \tan \Psi \left[ \left\{ k_0(k_n - 1) + h_n(k_0 - 1) \right\} \sin(n-1)\mu + (h_0 + h_n) \sin n\mu \right] \\ & + h_0 h_n \sin(n-1)\mu = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

où

$$k_0 = \frac{K_0}{k} \quad k_n = \frac{K_n}{k} \quad h_0 = \frac{H_0}{k} \quad h_n = \frac{H_n}{k}$$

Il y a donc en général deux racines  $\Psi$  qui dépendent de la résolution d'une équation algébrique du second degré.

A chaque racine  $\Psi$  appartient un angle  $\phi$  déduit par exemple de l'équation

$$\cot \phi = \tan \frac{\mu}{2} + \frac{h_0 \tan \Psi - h_0}{(1 - h_0) \tan \Psi + h_0} \cdot \frac{1}{\sin \mu}$$

ainsi qu'un système de sollicitations particulièrement simple

$$\begin{cases} \delta_1 \sin \Psi = H_0 C \sin(\mu + \phi) \\ \delta_n = 0 \quad (n = 2, \dots, n-1) \\ \delta_n \sin \Psi = H_n C \sin(n\mu + \phi) \end{cases} \quad (18)$$

L'entretien des modes déphasés ne réclame donc que des couples sur les disques extrêmes.

Une propriété d'orthogonalité est importante à signaler car elle servira par la suite. Considérons (16) dans laquelle on a fait  $\Psi = \Psi_1$ ; multiplions alors la première équation par  $\sin(\mu + \phi_2)$  la deuxième par  $\sin(n\mu + \phi_2)$  et additionnons, il vient

$$A \tan \Psi_1 = B$$

D'autre part, écrivant (16) pour  $\Psi = \Psi_2$  et multipliant respectivement par  $\sin(\mu + \phi_1)$  et  $\sin(n\mu + \phi_1)$  il vient la même équation à l'exception du remplacement de  $\Psi_1$  par  $\Psi_2$

On en conclut <sup>notamment</sup> ~~en outre~~ que le second nombre est nul.

$$B = h_0 \sin(\mu + \phi_1) \sin(\mu + \phi_2) + h_n \sin(n\mu + \phi_1) \sin(n\mu + \phi_2) = 0 \quad (19)$$

B) Les  $(n-2)$  racines  $\Psi = 0$ .

Les <sup>(autres)</sup>  $(n-2)$  racines assurant la compatibilité du groupe homogène (12) sont nulles, quelle que soit la fréquence d'excitation.

Nous pouvons traiter cette partie de la solution en un seul bloc. Faire  $\Psi = 0$  dans le groupe (12) entraîne nécessairement

$$\theta_1 = 0 \quad \theta_n = 0, \text{ les autres } \theta_x \text{ arbitraires.}$$

Le groupe (13) des sollicitations devient alors

$$\begin{cases} \Delta_1 = -k_2 \theta_2 \\ \Delta_x = (2k - \omega^2 I) \theta_x - k(\theta_{x-1} + \theta_{x+1}) \\ \Delta_n = -k \theta_{n-1} \end{cases} \quad (20)$$

Dans ce groupe les  $n$  quantités du premier membre ne dépendent que de  $(n-2)$  quantités au second membre.

### C) Construction de la solution générale.

Nous basant sur les solutions particulières établies en A) et en B) la solution générale doit revêtir la forme

$$\theta_x = C_1 \sin(x\mu + \phi_1) \sin(\omega t - \psi_1) + C_2 \sin(x\mu + \phi_2) \sin(\omega t - \psi_2) + \theta_{x0} \sin \omega t$$

$$\theta_{10} = 0 \quad \theta_{n0} = 0$$

Cette solution contient encore  $n$  inconnues

$C_1, C_2$  et les  $\theta_{x0}$  ( $x = 2, \dots, n-1$ ) à déterminer en exprimant l'équilibre des sollicitations :

$$\begin{cases} \Delta_1 = C_1 H_0 \frac{\sin(u + \phi_1)}{\sin \psi_1} + C_2 H_0 \frac{\sin(u + \phi_2)}{\sin \psi_2} - k \theta_{20} \\ \Delta_x = (2k - \omega^2 I) \theta_{x0} - k(\theta_{x-1,0} + \theta_{x+1,0}) \\ \Delta_n = C_1 H_n \frac{\sin(n\mu + \phi_1)}{\sin \psi_1} + C_2 H_n \frac{\sin(n\mu + \phi_2)}{\sin \psi_2} - k \theta_{n-1,0} \end{cases} \quad (21)$$

Ce système admet une solution immédiate. En effet, multipliant chaque équation par  $\sin(x\mu + \phi_1)$  et additionnant, les  $\partial_x$  disparaissent ainsi que  $C_2$  en vertu de (19), il reste

$$[H_0 \sin^2(\mu + \phi_1) + H_n \sin^2(\mu + \phi_1)] C_1 = \sin \psi_1 \sum p_n \sin(x\mu + \phi_1)$$

Une équation analogue est obtenue pour le calcul direct de  $C_2$  en remplaçant  $\psi_1$  par  $\psi_2$  et  $\phi_1$  par  $\phi_2$ . (+)

$C_1$  et  $C_2$  étant remplacés par leurs valeurs dans (21) les inconnues restantes étant "échelonnées" se laissent calculer directement par substitutions successives. Les deux dernières équations peuvent servir de vérification.

#### D) Fréquences singulières.

Le cas où soit  $H_0$ , soit  $H_n$  s'annule pour une fréquence singulière, ne peut se présenter que si l'amortissement dans cette impédance est lui-même semi-défini positif. Une des solutions du groupe A passe dans le groupe B. Si c'est  $H_0$  qui s'annule,  $\theta_{10}$  existe, et il faudra dans (21) remonter l'échelle par le bas.

Dans le cas tout à fait extraordinaire où  $H_0$  et  $H_n$  sont nuls simultanément, le système n'est pas amorti pour cette fréquence;  $C_1$  et  $C_2$  sont nuls,  $\theta_{10}$  et  $\theta_{n0}$  existent, le système (121) n'a plus une structure en échelle.

$$\begin{cases} p_1 = (k - \omega^2 I) \theta_1 - k \theta_2 \\ p_2 = (2k - \omega^2 I) \theta_2 - k(\theta_{2-1} + \theta_{2+1}) \\ \dots \\ p_n = -k \theta_{n-1} + (k - \omega^2 I) \theta_n \end{cases}$$

Faisons  $\theta_1 = 0$ , et résolvons en échelle en appelant  $\theta'_n$  les valeurs ainsi trouvées. La dernière équation n'est en général pas vérifiée, le premier membre prenant une valeur  $p'_n$  différente de  $p_n$

---

(+) Ces équations auraient pu être écrites immédiatement en se basant sur l'orthogonalité des modes. Cependant la démonstration de l'orthogonalité nécessite une extension du fait que la théorie des déphasages caractéristiques pure n'est pas appliquée. Les coordonnées ignorées en effet ne vibrent pas en phase avec les autres. L'extension de la démonstration, quand il est fait usage de coordonnées ignorées, repose sur la théorie des matrices et sort du cadre de l'exposé.

Soustrayons ce deuxième système d'équations du premier et divisons tout par  $\theta_1$ ; introduisons la notation

$$\alpha_x = (\theta_x - \theta'_x) / \theta_1$$

il vient un nouveau système en échelle

$$\begin{cases} 0 = (k - \omega^2 I) - k \alpha_2 \\ 0 = (2k - \omega^2 I) \alpha_x - k(\alpha_{x+1} + \alpha_{x-1}) \\ \frac{(p_m - p'_m)}{\theta_1} = -k \alpha_{m-1} + (k - \omega^2 I) \alpha_m \end{cases}$$

Résolvant par substitutions successives, la dernière équation livre la valeur du premier membre est donc , les autres inconnues s'en déduisent par

$$\theta_x = \theta'_x + \alpha_x \theta_1$$

Une double substitution étagée fournit donc la solution.

### 3. Oscillations forcées d'un vilebrequin-filtre. - Amortissement homogène dans le vilebrequin.

En plus de l'amortissement dans les impédances terminales on prend en considération

a) un amortissement de structure  $i \omega h (\theta_x - \theta_{x+1}) e^{i(\omega t + \varphi)}$   
s'opposant à une vitesse relative entre deux disques consécutifs,

b) un amortissement global comprenant l'effet Shannon, le frottement des pistons, la modulation du moment d'inertie équivalent de l'embiellage, etc... qui s'oppose à la vitesse de vibration d'un disque, soit  $i \omega f \theta_x e^{i(\omega t + \varphi)}$

Les équations de la théorie des déphasages caractéristiques sont alors

$$\sin \psi [(k + K_0 - \omega^2 I) \theta_1 - k \theta_2] - \cos \varphi [(H_0 + \omega h + \omega f) \theta_1 - \omega h \theta_2] = 0$$

$$\sin \psi [(2k - \omega^2 I) \theta_x - k(\theta_{x+1} + \theta_{x-1})] - \cos \varphi [(2\omega h + \omega f) \theta_x - \omega h(\theta_{x+1} + \theta_{x-1})] = 0 \quad (22)$$

$$\sin \psi [(k + K_n - \omega^2 I) \theta_n - k \theta_{n-1}] - \cos \varphi [(H_n + \omega h + \omega f) \theta_n - \omega h \theta_{n-1}] = 0$$

pour le groupe homogène.

Pour les sollicitations capables d'entretenir les modes on a soit

$$\begin{aligned} \Delta_1 \sin \psi &= (H_0 + \omega h + \omega f) \theta_1 - \omega h \theta_2 \\ \Delta_x \sin \psi &= (2\omega h + \omega f) \theta_x - \omega h (\theta_{x-1} + \theta_{x+1}) \\ \Delta_n \sin \psi &= (H_n + \omega h + \omega f) \theta_n - \omega h \theta_{n-1} \end{aligned} \quad (23)$$

soit

$$\begin{aligned} \Delta_1 \cos \psi &= (k + K_0 - \omega^2 I) \theta_1 - k \theta_2 \\ \Delta_x \cos \psi &= (2k - \omega^2 I) \theta_x - k (\theta_{x-1} + \theta_{x+1}) \\ \Delta_n \cos \psi &= (k + K_n - \omega^2 I) \theta_n - k \theta_{n-1} \end{aligned} \quad (24)$$

La précision du calcul décide de l'emploi de l'un ou l'autre système. Le premier est avantageux pour un mode au voisinage de la résonance et dont les sollicitations sont gouvernées fondamentalement par l'amortissement.

Le second est au contraire avantageux, quand le déphasage caractéristique est petit, les forces d'inertie étant alors gouvernées par élasticité et inertie.

#### Résolution de l'équation aux déphasages caractéristiques.

Au lieu de construire l'équation de degré  $n$  en  $\tan \psi$  dont les racines rendent le système homogène compatible, nous recherchons celles-ci directement comme suit :

Les équations non terminales sont encore satisfaites par une loi de distribution des amplitudes

$$\theta_x = C \sin (x\beta + \phi)$$

Le paramètre  $\beta$  est cette fois lié à  $\psi$  et à  $\omega$  par la relation

$$2(1 - \cos \beta) = \frac{\omega f + \omega^2 I \tan \psi}{k \tan \psi - \omega h}$$

REFERENCES.  
-----

- (1) B. Fraeys de Veubeke  
Déphasages caractéristiques et vibrations forcés d'un système amorti. - Académie Royale de Belgique. Bul. de la Classe des Sciences 1948 p. 626-641.
- (2) J. Ormondroyd et J.P. den Hartog  
Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs. vol. 50, n°37 1928
- (3) H. Wydlor  
Drehschwingungen in Kolbenmaschinenanlagen, Berlin 1922
- (4) Mancy  
Oscillations de torsion des arbres. Bull. de l'Ass. Tech. Mar. et Aér. Vol. 36, 1932, p. 619
- (5) S. Timoschenko  
Théorie des vibrations. - Béranger 1939, chap. V 44
- (6) Von Karman et Biot " Mathematical Methods in Engineering "  
Mac Graw Hill, 1940, Chap. XI, Section 6.
- (7) W. Ker Wilson  
Torsional vibration amplitudes at non-resonant speeds, with special reference to the interpretation of torsicograph records. Proc. Inst. Mech. Engrs. War Emergency issue 3, 1945.
- (8) M. Biot.  
Vibration of Crankshaft - Propeller Systems. - New method of Calculation.  
Journal of the Aeronautical Sciences. Vol. 7, n° 3, 1940.
- (9) G. Lehr  
Leçons sur la théorie des machines motrices. Annexe V B.  
Béranger 1943.
- (10) B. Fraeys de Veubeke  
Crankshaft - Propeller vibration modes as influenced by the torsional flexibility of the Engine Suspension.  
Journal of the Aeronautical Sciences. Vol. 17 n° 5 mai 1950.

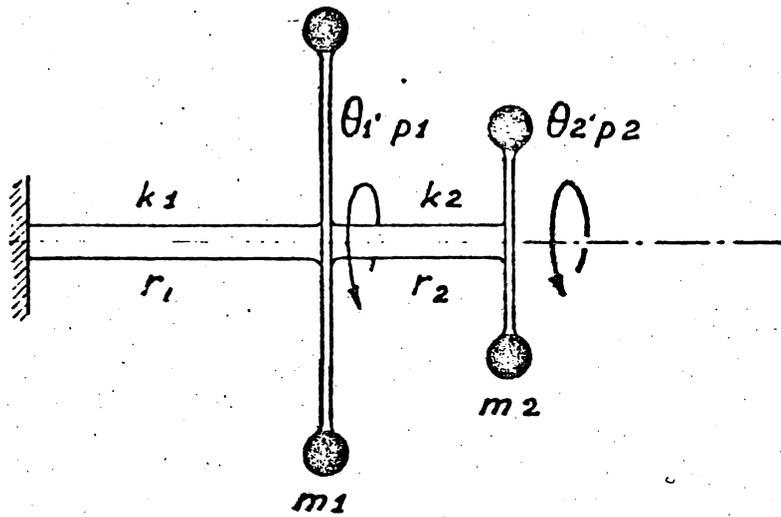


Fig. 1

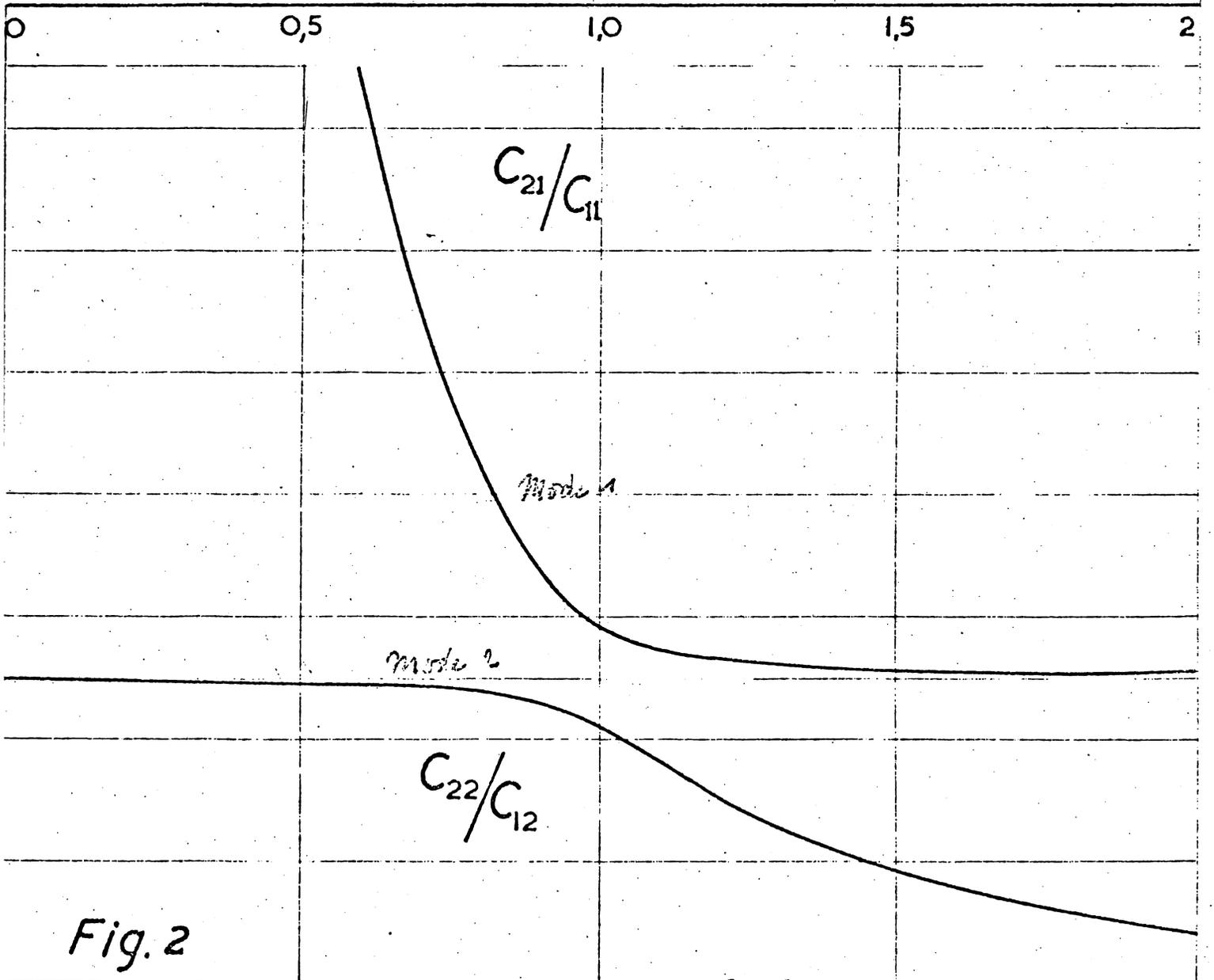
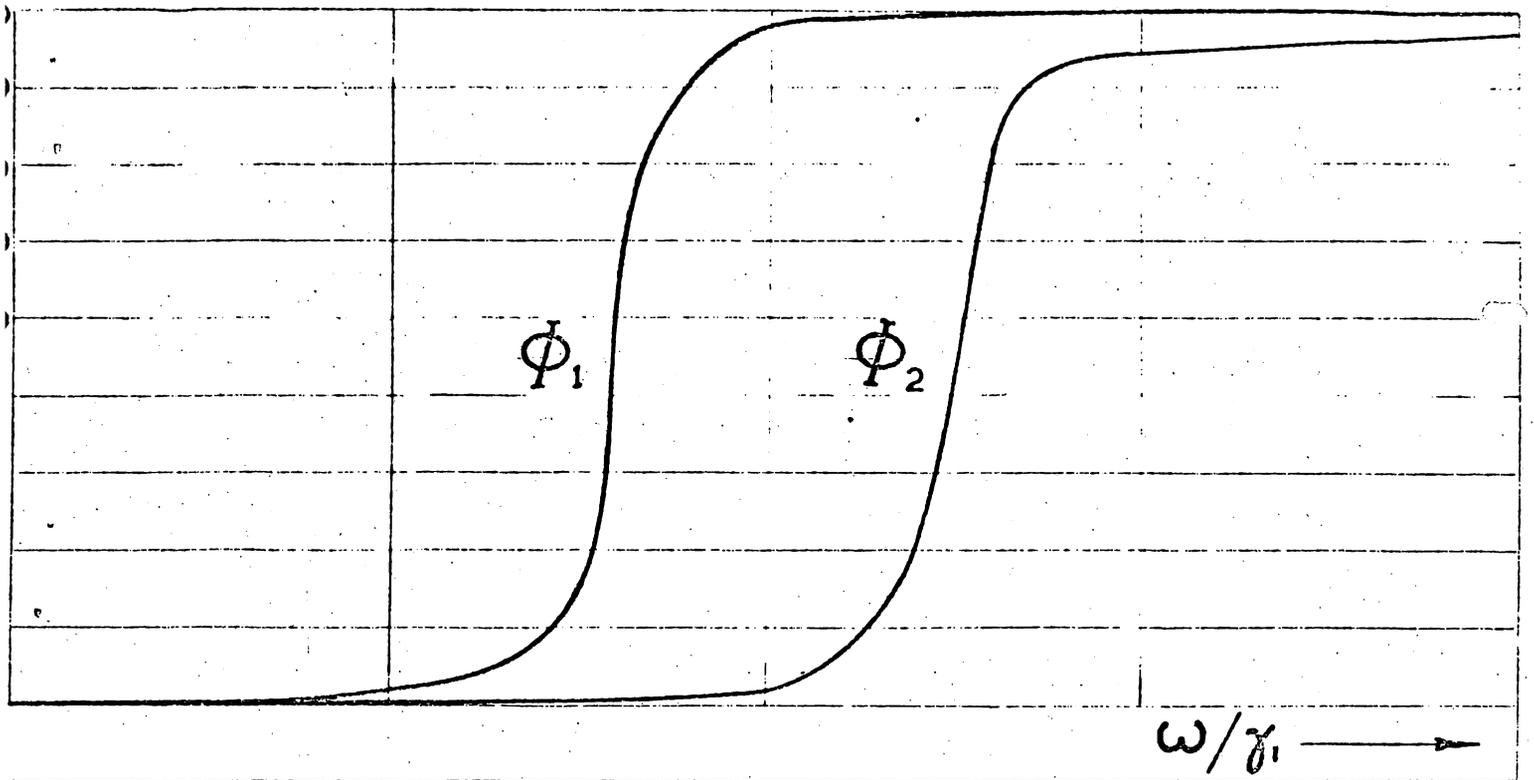


Fig. 2

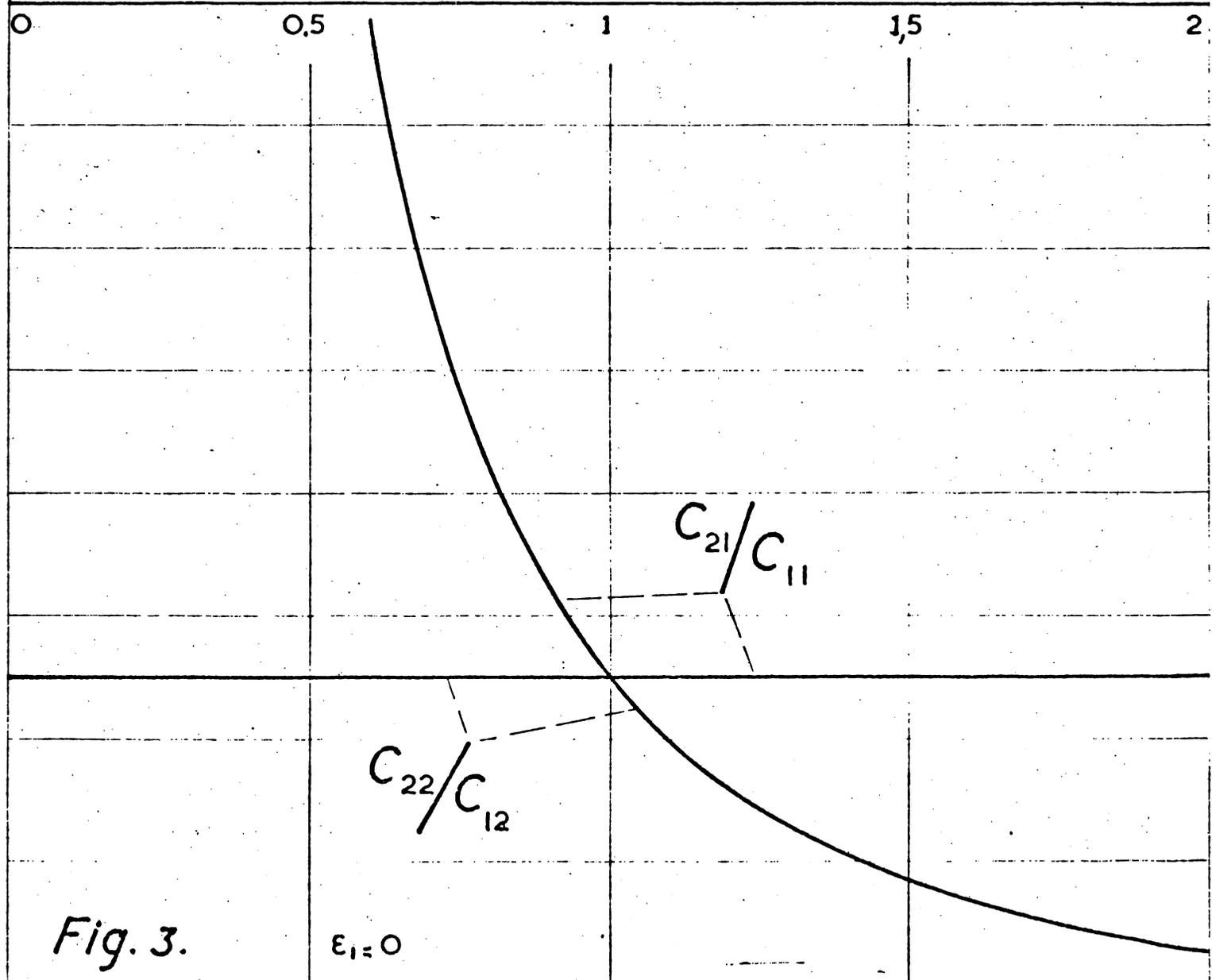
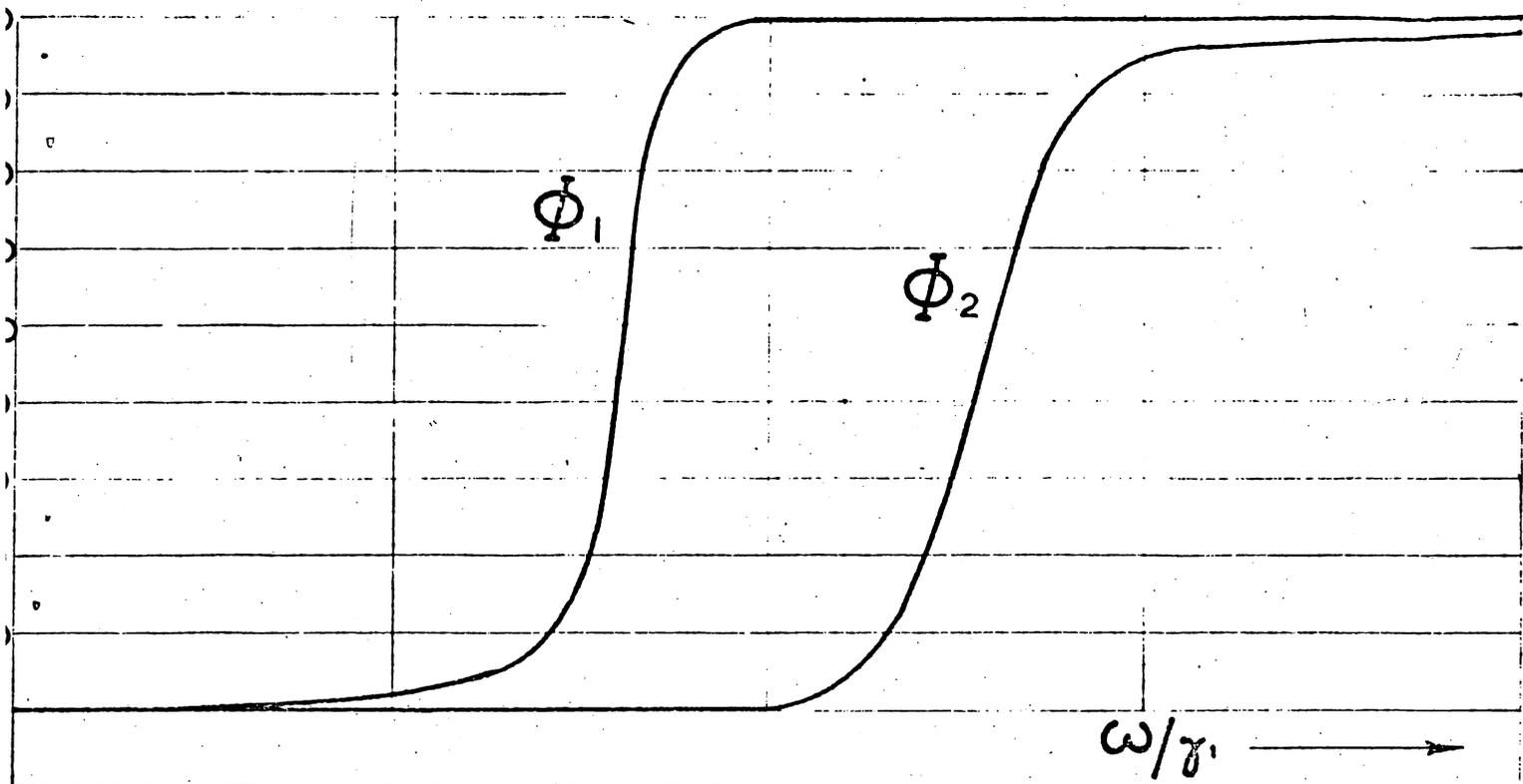


Fig. 3.

$\epsilon_1 = 0$

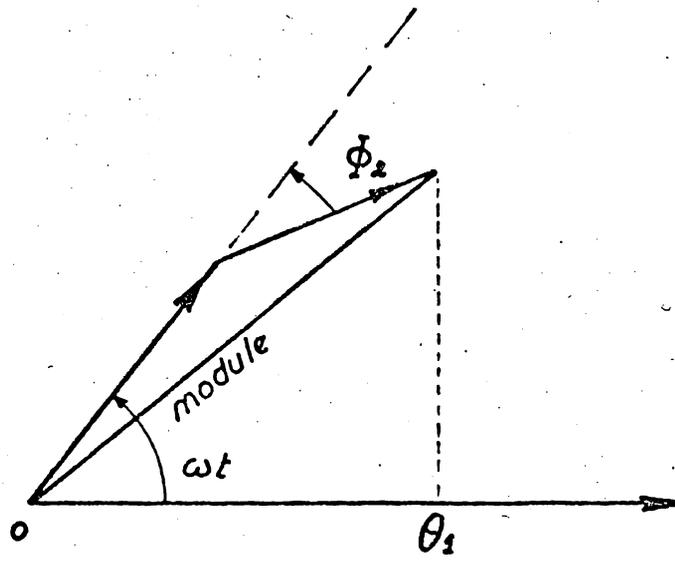


Fig. 4.

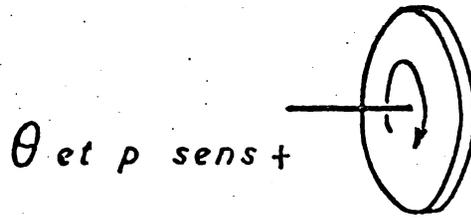
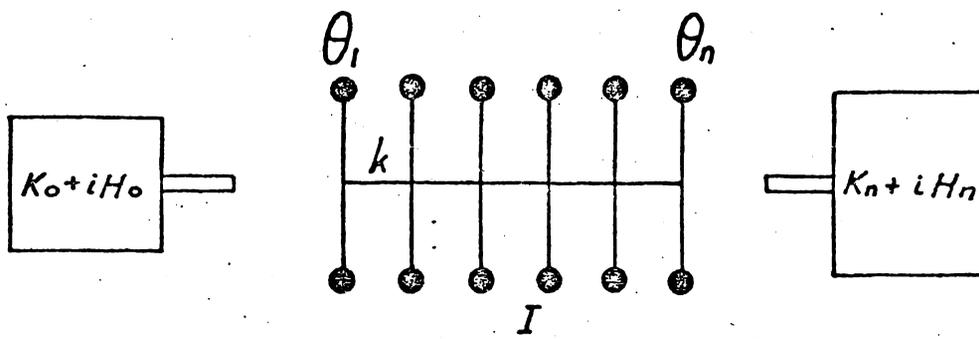


Fig. 5