

Aspects Cinématique et Énergétique de la Flexion sans Torsion

PAR

B. FRAEIJIS DE VEUBEKE,

Chargé de Cours à l'Université de Liège,
Maître de Conférences à l'Université de Louvain.

Impression décidée le 10 janvier 1955.

Aspects Cinématique et Énergétique de la Flexion sans Torsion.

INTRODUCTION.

Les exposés classiques de la torsion et de la flexion des pièces prismatiques, selon Barré de Saint-Venant, se limitent le plus souvent au problème de la détermination des tensions. Le problème des déformations soulève plusieurs difficultés apparentes dans la recherche du centre de torsion, des déformations dues aux efforts tranchants, du centre de flexion. Ce dernier en particulier dépend du concept de flexion isolée, ou flexion sans torsion, qui a reçu au moins deux définitions consacrées par l'usage.

On sait que pour un matériau isotrope l'existence d'un coefficient de Poisson ne permet pas l'annulation simultanée de la torsion de toutes les fibres. L'état de flexion sans torsion ne peut donc correspondre qu'à la disparition d'une torsion moyenne. Une fois le type de moyenne choisi, ce point de vue purement cinématique suffit à produire une définition.

C'est ainsi que les exposés de TIMOSHENKO ont contribué à diffuser une définition basée sur l'annulation de la moyenne au sens ordinaire. En 1935 TREFFTZ a proposé une autre définition basée sur l'annulation de l'énergie d'interférence entre torsion pure et flexion isolée. Dans ce cas l'énergie de déformation d'une pièce fléchie par des efforts tranchants d'intensité donnée passe par un minimum pour l'état de flexion isolée et le centre de flexion correspondant est indépendant du coefficient de Poisson. Ce n'est que lorsque ce dernier s'annule que les deux définitions sont coïncidentes.

Le mémoire reprend la théorie de TREFFTZ pour en étendre le bénéfice aux sections multiples connexes. Par une transformation de Green il établit qu'elle implique également une annulation

de la torsion moyenne des fibres. Il s'agit cependant d'une moyenne différente ; d'une part elle doit être pondérée par la fonction de torsion de PRANDTL, d'autre part elle doit être étendue aux fibres virtuelles dans les cavités des pièces à connexion multiple.

Cette différence peut être importante pour les caissons à parois minces dont la section droite ne serait pas maintenue indéformable par un jeu serré de diaphragmes transversaux.

Ainsi, par son accord avec le point de vue cinématique, il semble qu'il n'y ait plus d'objection valable à opposer à une définition, dont TREFFTZ a par ailleurs souligné les avantages considérables découlant de ses propriétés énergétiques.

Mettant à profit la nécessité de développer la théorie de BARRÉ de Saint-Venant, deux autres contributions ont été jointes.

D'une part les idées de KAPPUS et de WEINSTEIN sur le centre de torsion approximatif ont été transposées au problème de la déformation due aux efforts tranchants. D'autre part une solution est apportée à une difficulté signalée par MINDLIN et SALVADORI et propre aux tensions tangentielles de flexion dans les pièces multiplement connexes. Elle apparaît quand on se propose de ramener leur détermination qui dépend d'un problème de NEUMANN à un problème de DIRICHLET pour bénéficier de plusieurs méthodes de résolution pratiques, dont la plus connue est l'analogie de la membrane.

I. FORMULATION GÉNÉRALE DU PROBLÈME DE BARRÉ DE SAINT-VENANT.

L'axe oz du repère cartésien droitier est pris parallèle aux génératrices de la surface cylindrique extérieure.

La directrice extérieure C_0 est parcourue dans le sens positif de la rotation autour de oz , l'aire qu'elle enferme sera dénotée par Ω_0 .

Si la poutre est creuse, les directrices C_i des cavités, enfermant chacune une aire Ω_i , seront parcourues positivement dans le sens opposé à C_0 . Les normales unitaires \vec{n} sont orientées positivement vers l'extérieur du domaine D occupé par le milieu résistant (fig. 1).

Le contour peut être rendu simplement connexe en reliant chaque contour intérieur au contour extérieur par une paire de barrières infiniment rapprochées. Le contour extérieur complet Σ peut alors être décrit dans le sens positif de rotation autour de oz en respectant les sens précédemment définis sur C_0 et les C_i .

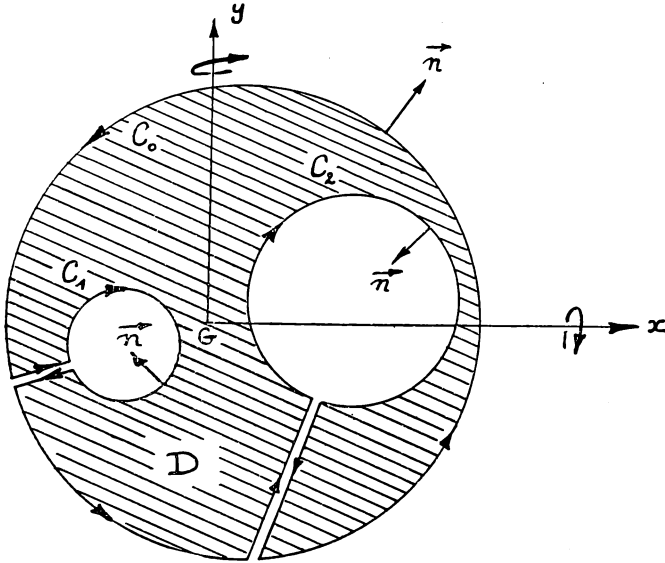


FIG. 1.

Le long de chaque contour C_0 ou C_i existent les relations

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial y}{\partial s} \quad \frac{\partial y}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial s} \quad (1)$$

1. Formules de Green et de Stokes.

Soit \vec{V} un champ de vecteurs défini dans D ; le théorème de Gauss

$$\oint_{\Sigma} (\vec{V}, \vec{n}) ds = \iint_D \operatorname{div} \vec{V} \, dx dy$$

exprime l'identité entre le flux sortant et l'intégrale de la divergence du champ. Si ce dernier est continu, les flux se détruisent

sur chaque paire de barrières et celles-ci peuvent être retranchées du contour frontière Σ . Prenant comme vecteur

$$\vec{V} = \phi(x, y) \text{ grad } \psi(x, y)$$

il vient la première formule de Green

$$\oint_{\Sigma} \phi \psi_n ds = \iint_{\text{D}} (\phi \nabla^2 \psi + \phi_x \psi_x + \phi_y \psi_y) dx dy. \quad (2)$$

Quand on soustrait de cette relation celle qui résulte d'un échange entre les rôles de ϕ et ψ il vient la deuxième formule de Green

$$\oint_{\Sigma} (\phi \psi_n - \psi \phi_n) ds = \iint_{\text{D}} (\nabla^2 \phi - \psi \nabla^2 \phi) dx dy. \quad (3)$$

Dans ces formules il est à noter que, en vertu des relations (1) on peut écrire

$$\oint \phi \psi_n ds = \oint \phi (\psi_x dy - \psi_y dx).$$

La formule de Stokes dérive de la relation

$$\oint_{\Sigma} (\vec{V}, \vec{ds}) = \iint_{\text{D}} \text{curl}_z \vec{V} dx dy \quad (4)$$

suivant laquelle la circulation du vecteur sur le contour est égale au flux du rotationnel à travers une surface d'appui. Encore une fois, étant parcourues en sens inverse, les barrières peuvent être retranchées du contour Σ .

Appliquant (4) au champs

$$\phi \text{ grad } \psi \text{ et } \psi \text{ grad } \phi$$

il vient

$$\iint_{\text{D}} (\phi_x \psi_y - \phi_y \psi_x) dx dy = \oint_{\Sigma} \phi d\psi = - \oint_{\Sigma} \psi d\phi. \quad (5)$$

2. Choix de l'origine des axes.

Les équations

$$\iint_{\mathbf{D}} x dx dy = 0 \quad \iint_{\mathbf{D}} y dx dy = 0 \quad (6)$$

expriment un choix particulier pour le point de percée de oz dans une section droite, celui du centre de gravité du domaine \mathbf{D} . Plus généralement, comme le montre une application de (2) l'aire Ω et le centre de gravité (\bar{x}, \bar{y}) du domaine enfermé par une courbe \mathbf{C} quelconque peuvent être évalués comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = \iint dx dy = \oint_{\mathbf{c}} x dy = - \oint_{\mathbf{c}} y dx \\ \Omega \bar{x} = \iint x dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\mathbf{c}} x^2 dy = - \oint_{\mathbf{c}} x y dx \\ \Omega \bar{y} = \iint y dx dy = - \frac{1}{2} \oint_{\mathbf{c}} y^2 dx = \oint_{\mathbf{c}} x y dy \end{array} \right. \quad (7)$$

à condition de parcourir la courbe dans le sens positif de rotation autour de oz .

Les moments et produit d'inertie de \mathbf{D} autour des axes ox et oy seront dénotés par

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{xx} = \iint_{\mathbf{D}} y^2 dx dy = - \frac{1}{3} \oint_{\Sigma} y^3 dx \\ I_{xy} = \iint_{\mathbf{D}} xy dx dy = - \frac{1}{2} \oint_{\Sigma} xy^2 dx = \frac{1}{2} \oint_{\Sigma} x^2 y dy \\ I_{yy} = \iint_{\mathbf{D}} x^2 dx dy = \frac{1}{3} \oint_{\Sigma} x^3 dy \end{array} \right. \quad (8)$$

3. Hypothèses de la méthode « semi-inverse ».

Les hypothèses

$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 0 \quad (9)$$

caractérisent le problème de Barré de Saint-Venant qui consiste

à rechercher dans leur cadre une solution exacte des équations de l'élasticité linéaire dans un milieu isotrope.

Si la poutre est décomposée par la pensée en fibres longitudinales, il résulte des hypothèses que les actions de contact entre fibres voisines se font uniquement par le jeu des tensions tangentielles longitudinales.

4. Équations d'équilibre.

Avec (9) et en l'absence de forces de volume les équations d'équilibre sont réduites à

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

qui expriment que ces tensions ne dépendent que des variables (x, y) et

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \quad (11)$$

De cette dernière et (10) découle déjà le résultat simple

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0. \quad (12)$$

5. Relations entre tensions et déformations.

Elles se réduisent ici à

$$E \frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \sigma_z \quad E \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \sigma_z \quad (13)$$

$$E \frac{\partial w}{\partial z} = \sigma_z \quad (14)$$

$$G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \tau_{xz} \quad G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \tau_{yz} \quad (15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (16)$$

6. Conditions de compatibilité pour le déplacement axial.

Éliminant w par dérivations partielles entre les équations précédentes il vient pour conditions d'intégrabilité de cette composante du déplacement

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial x} = -E \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial y} = -E \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (17)$$

pour lesquelles on a tenu compte du résultat (10) et

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (18)$$

7. Distribution des tensions normales.

Éliminant u et v entre les équations (13) et (17), il vient, eu égard à (12)

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = 0.$$

Procédant à la même élimination entre (16) et (17), il vient aussi

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} = 0.$$

Ces résultats associés à (12) montrent que la forme la plus générale de la tension normale se réduit à

$$\sigma_z = E[(ax + by + n)z + a_0x + b_0y + n_0]. \quad (19)$$

La valeur des coefficients sera maintenant reliée aux efforts résultants sur une section droite.

Eu égard à la position de l'axe oz exprimée par (6) l'effort normal total est

$$T_z = \iint_D \sigma_z dx dy = ES(nz + n_0)$$

où S est la surface totale de la section droite. Pour les moments

fléchissants il vient

$$M_x = \iint_D \sigma_z y dx dy = EI_{xx}(bz + b_0) + EI_{xy}(az + a_0) \quad (20)$$

$$M_y = - \iint_D \sigma_z x dx dy = -EI_{xy}(bz + b_0) - EI_{yy}(az + a_0).$$

Introduisons maintenant une hypothèse supplémentaire qui concerne les conditions aux limites du problème. Nous supposons que les surfaces cylindriques de directrices C_0 et C_i qui limitent la pièce sont libres de toute sollicitation. Soient (p_x, p_y, p_z) les composantes éventuelles de cette dernière. Les hypothèses primitives (9) entraînent déjà nécessairement $p_x = p_y = 0$ mais nullement $p_z = 0$.

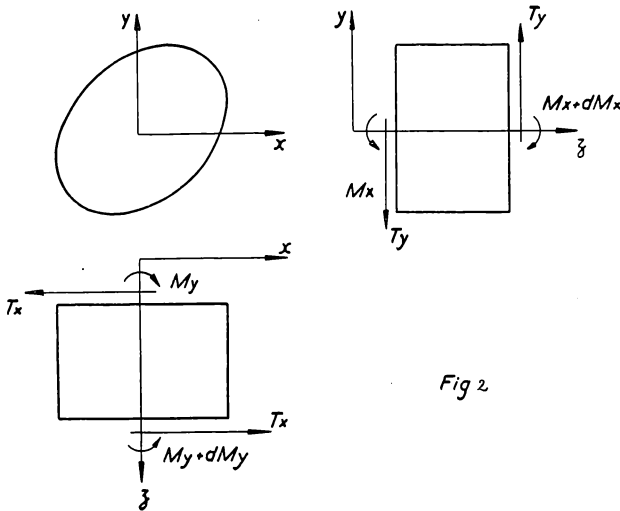


FIG. 2.

Avec la nouvelle hypothèse $p_z = 0$ les équations d'équilibre de translation d'un élément compris entre deux sections droites distantes de dz sont (fig. 2) :

$$\frac{dT_x}{dz} = 0 \quad \frac{dT_y}{dz} = 0 \quad \frac{dT_z}{dz} = 0.$$

Les deux premières sont une conséquence directe de (10), la

dernière exige maintenant

$$n = 0. \quad (21)$$

Les équations d'équilibre de rotation autour d'axes transversaux fournissent de plus les relations

$$T_x = -\frac{dM_y}{dz} \quad T_y = \frac{dM_x}{dz} \quad (22)$$

quand on y substitue les expressions (20) il vient

$$\begin{aligned} T_x &= E(aI_{yy} + bI_{xy}) \\ T_y &= E(aI_{xy} + bI_{xx}). \end{aligned} \quad (23)$$

Les paramètres a et b de la solution s'expriment donc en fonction des efforts tranchants constants

$$a = \frac{T_x I_{xx} - T_y I_{xy}}{E(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \quad b = \frac{T_y I_{yy} - T_x I_{xy}}{E(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)}. \quad (24)$$

Tandis que les paramètres a_0 et b_0 sont des fonctions analogues des moments fléchissants $M_x(0)$ et $M_y(0)$ régnant dans la section $z = 0$, et le paramètre n_0 est lié à un effort normal constant

$$n_0 = T_z / ES. \quad (25)$$

8. Recherche des déplacements transversaux.

Des équations (13) et (16) il ressort que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ces équations de Cauchy-Riemann expriment que $(u + iv)$ est une fonction analytique de la variable complexe $(x + iy)$. De plus (13) et (19) montrent que ce sera un polynôme du second degré.

$$u + iv = (A_0 + iB_0) + (x + iy)(A_1 + iB_1) + (x + iy)^2(A_2 + iB_2)$$

où (A_0, B_0) , (A_1, B_1) et (A_2, B_2) sont des fonctions de z seulement.

Substituant cette solution dans (13) où la tension normale

a été prise en accord avec (19) et (21) on trouve les valeurs de (A_1 , A_2 et B_2) et

$$\begin{cases} u = A_0 - B_1 y - \nu \left[n_0 x + (az + a_0) \frac{x^2 - y^2}{2} + (bz + b_0) xy \right] \\ v = B_0 + B_1 x - \nu \left[n_0 y + (az + a_0) xy - (bz + b_0) \frac{x^2 - y^2}{2} \right] \end{cases} \quad (26)$$

Cette solution introduite dans les équations (17) fournit encore

$$\frac{d^2 A_0}{dz^2} = -(az + a_0) \quad \frac{d^2 B_0}{dz^2} = -(bz + b_0) \quad \frac{d^2 B_1}{dz^2} = 0.$$

Il en résulte par intégration

$$\begin{cases} A_0 = -\frac{1}{6} az^3 - \frac{1}{2} a_0 z^2 + Qz + u_0 \\ B_0 = -\frac{1}{6} bz^3 - \frac{1}{2} b_0 z^2 - Pz + v_0 \\ B_1 = \theta z + R \end{cases} \quad (27)$$

Dans ces expressions (P , Q , R) représentent trois déplacements cinématiques de rotation autour des axes du repère ; $u_0 = u(0, 0, 0)$ et $v_0 = v(0, 0, 0)$ deux translations. Ce sont cinq des six degrés de libertés qui apparaissent toujours lors de l'intégration des déplacements.

Le paramètre θ de la solution est un paramètre essentiel lié au moment

$$M_z = \iint_D (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) dx dy. \quad (28)$$

Son interprétation cinématique résulte de la considération de la rotation matérielle, dont la composante suivant oz

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = z\theta + R + \nu [(bx - ay)z + b_0 x - a_0 y]$$

donne lieu à une « torsion » des fibres

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \theta + \nu (bx - ay) \quad (29)$$

Le paramètre θ représente donc la torsion constante des fibres qui peut subsister en l'absence d'efforts tranchants ($a = 0$, $b = 0$) et qui provient alors d'un couple de torsion.

9. Recherche des tensions tangentiellles.

Le champ des tensions tangentiellles est caractérisé par un vecteur $\vec{\tau}$ dont on sait déjà que les composantes (τ_{xz}, τ_{yz}) sont indépendantes de z (équations (10)).

Par (11) dans laquelle σ_z sera remplacé par sa valeur trouvée en (19) et n pris égal à zéro en accord avec (21) il vient

$$\operatorname{div} \vec{\tau} = \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} = -E(ax + by) \quad (30)$$

Tandis que les équations (18) et (29) livrent

$$\operatorname{curl}_z \vec{\tau} = \frac{\partial}{\partial x} \tau_{yz} - \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xz} = 2G \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 2G[\theta + \nu(bx - ay)] \quad (31)$$

Ces deux équations déterminent entièrement le champ $\vec{\tau}$ si on leur adjoint les conditions aux limites. Celles-ci exigent que la composante de $\vec{\tau}$ suivant la normale \vec{n} aux contours C_0 et C_i soit nulle. S'il en était autrement il apparaîtrait en vertu du principe de réciprocité des actions tangentiellles une sollicitation sur la surface limite en contradiction avec une hypothèse antérieure.

La condition de tangence de $\vec{\tau}$ aux contours s'exprime par exemple par

$$\tau_{xz} dy - \tau_{yz} dx = 0 \quad \text{sur} \quad C_0 \text{ et } C_i \quad (32)$$

où (dx, dy) sont les composantes de l'élément de contour \vec{ds} .

10. Recherche du déplacement axial.

Celle-ci achève la solution de principe du problème.

Tout d'abord l'intégration de l'équation (14) permet d'écrire

$$w = \frac{1}{2} z^2(ax + by) + z(a_0x + b_0y + n_0) + Py - Qx + w_0 + g(x, y) \quad (33)$$

où $g(x, y)$ est une fonction encore indéterminée à laquelle on peut réserver la dénomination de gauchissement étant donné que les autres termes conservent aux sections droites leur caractère plan.

Le terme w_0 a le caractère de la translation cinématique analogue à u_0 et v_0 .

$$w_0 = w(0, 0, 0) \text{ si on prend } g(0, 0) = 0.$$

Pour déterminer $g(x, y)$, introduisons (33) dans les équations (15), il vient compte tenu de (26) et (27)

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= Gg_x - G \left[\theta y + \nu \left(a \frac{x^2 - y^2}{2} + bxy \right) \right] \\ \tau_{yz} &= Gg_y - G \left[-\theta x + \nu \left(axy - b \frac{x^2 - y^2}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (34)$$

La condition d'intégrabilité, obtenue par élimination de g entre ces équations restitue évidemment l'équation (18) déjà obtenue et transformée en (31).

Les autres conditions (17) pour l'intégrabilité de w ont été satisfaites par les expressions obtenues pour la tension normale et les déplacements transversaux.

Introduisant encore (34) dans (30) il vient

$$\nabla^2 g = -2(ax + by) \text{ dans } D. \quad (35)$$

Les conditions aux limites encore nécessaires pour la détermination de g indépendamment du champ $\vec{\tau}$ peuvent être obtenues par la considération de (34) et (32). Elles conduisent à fixer sur les contours limites les valeurs de la dérivée normale g_n . Par la suite on obtiendra plutôt le gauchissement en passant par la solution du champ $\vec{\tau}$.

Tandis que les équations (26) et (27) fournissent pour les déplacements transversaux (u, v) des fonctions uniformes définies même en dehors du domaine D (en particulier même à l'intérieur des cavités), les possibilités de dislocations dues à la connexion multiple se présentent uniquement lors de l'intégration du déplacement axial w .

Suivant (33) il faut et il suffit que le gauchissement $g(x, y)$ soit une fonction uniforme pour assurer que w le soit.

Dès lors, pour un contour C quelconque de D, formons l'intégrale

$$\oint_C dg = \oint_C g_x dx + g_y dy$$

et, remplaçant les dérivées partielles du gauchissement par leurs valeurs tirées de (34), exprimons que le résultat doit être nul :

$$\begin{aligned} \frac{1}{G} \oint_C \tau_{xz} dx + \tau_{yz} dy = \theta \oint_C (x dy - y dx) + \nu b \oint_C \frac{x^2}{2} dy - xy dx \\ - \nu a \oint_C xy dy - \frac{y^2}{2} dx \end{aligned} \quad (36)$$

car il est évident que

$$\oint_C x^2 dx = 0 \quad \oint_C y^2 dy = 0.$$

Cette condition d'uniformité peut encore être transformée au moyen des formules (7) et devient alors :

$$\oint_C (\vec{\tau}, \vec{ds}) = 2G\Omega[\theta + \nu(b\bar{x} - a\bar{y})] \quad (37)$$

à condition que le contour C soit parcouru dans le sens positif de rotation autour de oz .

Cette condition se retrouve aussi par une application directe de la condition d'uniformité.

$$\oint_C dw = \oint_C w_x dx + w_y dy = 0$$

en utilisant les équations (15). Elle est alors sous la forme

$$\oint_C (\vec{\tau}, \vec{ds}) = G \frac{\partial}{\partial z} \oint_C (u dx + v dy).$$

Les fonctions u et v étant définies dans tout le plan, on a par une transformation de Stokes du second membre

$$\oint_C (\vec{\tau}, \vec{ds}) = 2G \iint_{\Omega} \frac{\partial \omega_z}{\partial z} dx dy = 2G \iint_{\Omega} [\theta + \nu(bx - ay)] dx dy$$

ce qui est manifestement équivalent à (37).

Quand tous les points de l'aire Ω appartiennent à D, le premier membre peut aussi être transformé par une formule de Stokes et dans ce cas la condition

$$\iint_{\Omega} \text{curl}_z \vec{\tau} dx dy = 2G \iint_{\Omega} [\theta + \nu(bx - ay)] dx dy$$

est automatiquement satisfaite par (31).

Les seuls cas à examiner sont ceux pour lesquels le contour C entoure une cavité dont l'aire n'appartient évidemment pas à D.

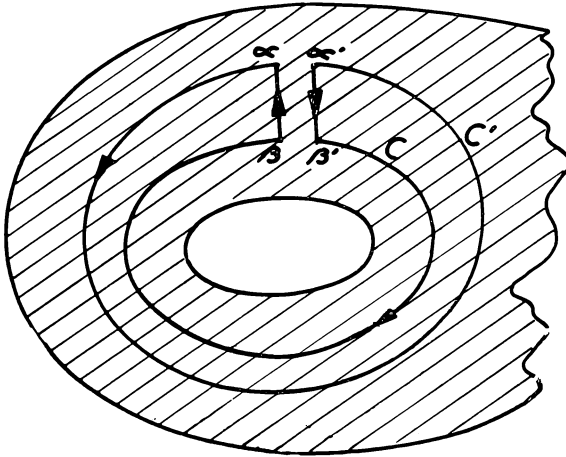


FIG. 3.

Considérons maintenant deux contours simples C et C' entourant chacun la même cavité (fig. 3).

Avec les barrières $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ et parcourant C' dans le sens direct, C dans le sens rétrograde, nous formons un contour unique qui borde une aire annulaire dont tous les points appartiennent à D. Par conséquent la condition d'uniformité relative à ce contour est automatiquement satisfaite. De plus, par suite

de la continuité du champ $\vec{\tau}$, la condition examinée sous la forme (36) montre que les contributions des barrières, parcourues en sens opposés, se détruisent. On aura par conséquent

$$\oint_{C'} dw - \oint_C dw = 0.$$

Si donc la condition d'uniformité est satisfaite pour C elle le sera aussi automatiquement pour C'.

Il suffira donc de vérifier les conditions d'uniformité une fois pour chaque contour entourant une des cavités. Ce contour peut d'ailleurs être constitué du bord même de la cavité. Par la suite nous appliquerons les conditions sous la forme standard

$$\oint_{C_i} (\vec{\tau}, \vec{ds}) = 2G\Omega_i[\theta + \nu(b\bar{x}_i - a\bar{y}_i)] \quad (38)$$

où nous rappelons que le contour C_i , doit être parcouru dans le sens direct.

Ces conditions doivent être ajoutées aux équations (30) (31) et (32) pour achever l'unicité du champ résultant $\vec{\tau}$.

11. Séparation des solutions.

Les paramètres dont dépendent les tensions sont en définitive (a, b, θ) et (a_0, b_0, n_0) .

a) Traction pure et flexion pure.

Faisant $a = 0, b = 0, \theta = 0$ toutes les équations gouvernant le champ $\vec{\tau}$ deviennent homogènes et admettent la solution unique $\vec{\tau} = 0$.

Il en est de même pour les équations gouvernant la fonction de gauchissement $g(x, y)$ qui devient identiquement nulle.

La solution de ce cas particulier est alors entièrement achevée et se résume dans les formules suivantes :

$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 0 \quad \tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0$$

$$\sigma_z = E(a_0x + b_0y + n_0)$$

$$u = -\frac{1}{2} a_0 z^2 + Qz - Ry - \nu \left[n_0 x + a_0 \frac{x^2 - y^2}{2} + b_0 xy \right]$$

$$v = -\frac{1}{2} b_0 z^2 - Pz + Rx - \nu \left[n_0 y + a_0 xy - b_0 \frac{x^2 - y^2}{2} \right]$$

$$w = (a_0 x + b_0 y + n_0)z - Qx + Py + w_0.$$

Les sollicitations résultantes sont constituées d'un effort normal constant T_z lié au paramètre n_0 par la formule (25) et de deux moments fléchissants constants $M_x(0)$ et $M_y(0)$ liés aux paramètres a_0 et b_0 par les formules

$$M_x(0) = E(I_{xx}b_0 + I_{xy}a_0)$$

$$M_y(0) = -E(I_{xy}b_0 + I_{yy}a_0).$$

On a donc un état de traction pure et de flexion pure. La forme de w montre clairement que les sections droites restent planes (hypothèse de Bernoulli). Les déplacements de l'axe élastique

$$u(0, 0, z) = -\frac{1}{2} a_0 z^2 + Qz + u_0$$

$$v(0, 0, z) = -\frac{1}{2} b_0 z^2 - Pz + v_0$$

montrent par leurs pentes

$$\frac{\partial}{\partial z} u(0, 0, z) = -a_0 z + Q = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} v(0, 0, z) = -b_0 z - P = -\frac{\partial w}{\partial y}$$

que les sections droites restent perpendiculaires à l'axe élastique. Tandis que les courbures

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} u(0, 0, z) = -a_0 \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} v(0, 0, z) = -b_0$$

fournissent une autre interprétation des paramètres a_0 et b_0 .

La condition d'encastrement parfait $w = 0$ dans la section de support $z = 0$ est réalisable en prenant

$$P = 0 \quad Q = 0 \quad w_0 = 0;$$

mais il n'est pas possible en général de réaliser en plus $u = 0$ $v = 0$ dans cette section à cause de la contraction transversale des fibres induite par le coefficient de Poisson. Il faudrait pour cela une distribution de tensions additionnelles qui sort du cadre de la théorie de de Saint-Venant.

b) *Torsion et Flexion.*

Poursuivons l'étude du problème de de Saint-Venant en faisant $a_0 = 0$ $b_0 = 0$ $n_0 = 0$. Ceci revient à supposer qu'il n'y a pas d'effort normal T_z et que les moments fléchissants s'annulent dans la section $z = 0$. S'il n'en était pas ainsi il suffirait pour rétablir la généralité de superposer la solution du sous-paragraphe précédent. Les équations sont alors réduites à

$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 0$$

$$\sigma_z = E(ax + by)z \quad (39)$$

$$\operatorname{div} \vec{\tau} = -E(ax + by) \quad (30)$$

$$\operatorname{curl}_z \vec{\tau} = 2G[\theta + \nu(bx - ay)] \quad (31)$$

$$\vec{(\tau, n)} = 0 \quad \text{sur } C_0 \text{ et les } C_i. \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{6}az^3 + Qz - \theta zy - \nu z \left[a \frac{x^2 - y^2}{2} + bxy \right] \\ v &= -\frac{1}{6}bz^3 - Pz + \theta xy - \nu z \left[axy - b \frac{x^2 - y^2}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$$w = \frac{1}{2}(ax + by)z^2 + Py - Qx + w_0 + g(x, y) \quad (41)$$

où l'on a pris

$$u_0 = 0 \quad v_0 = 0 \quad R = 0,$$

ces paramètres de déplacement cinématique ne présentant pas d'intérêt dans la discussion.

Il faut encore y joindre les équations (34) pour la détermination du gauchissement et (38) pour les conditions d'uniformité.

II. TORSION PURE.

Faisant $a = 0$ $b = 0$ on sait par les équations (23) que les efforts tranchants disparaissent. Le champ $\vec{\tau}$ distribué sur une section droite est alors équivalent à un couple pur de torsion. Par ailleurs l'équation (29) montre que dans ces conditions la torsion de chaque fibre est la même.

Ainsi le cas particulier de la torsion pure peut-il être défini sans ambiguïté.

Tandis que $\sigma_z = 0$ partout, il vient

$$\operatorname{div} \vec{\tau} = 0. \quad (42)$$

Cette équation suggère l'analogie avec le champ des vitesses d'un fluide incompressible et l'introduction, initiée par Prandtl (1), d'une fonction de courant $\Theta(x, y)$:

$$\tau_{xz} = G\theta\Theta_y \quad \tau_{yz} = -G\theta\Theta_x \quad (43)$$

permettant de satisfaire automatiquement à (42).

La condition (31) devient alors l'équation de Poisson

$$\Theta_{xx} + \Theta_{yy} = \nabla^2\Theta = -2 \quad (44)$$

que la fonction doit satisfaire dans le domaine D.

Les conditions aux limites (32) exigent que

$$\Theta_x dx + \Theta_y dy = d\Theta = 0 \quad (45)$$

le long de chaque contour.

La fonction Θ n'étant définie qu'à une constante près il est loisible de prendre

$$\begin{aligned} \Theta &= 0 && \text{sur } C_0, \\ \Theta &= \alpha_i && \text{une constante le long de } C_i. \end{aligned} \quad (46)$$

Ce sont les conditions d'uniformité du gauchissement qui fixent les valeurs des constantes α_i . Si nous renversons dans (38) le sens de description du contour C_i de façon à le parcourir dans

le sens naturel à Σ en vue d'appliquer les équations (1) il vient :

$$-G\theta \oint_{C_i} (\Theta_y dx - \Theta_x dy) = G\theta \oint_{C_i} \left(\Theta_y \frac{\partial y}{\partial n} + \Theta_x \frac{\partial x}{\partial n} \right) ds = 2G\theta \Omega_i$$

soit simplement

$$\oint_{C_i} \Theta_n ds = 2\Omega_i. \quad (47)$$

Les équations (44), (46) et (47) achèvent la définition de la fonction de torsion.

1. Analogie de la membrane.

Parmi les méthodes pratiques de calcul de la fonction de torsion il faut mentionner l'analogie de la membrane tendue sans pression. A cet effet on peut au lieu de la fonction Θ utiliser la fonction

$$Z = \Theta + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (48)$$

qui doit obéir aux conditions

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 Z &= 0 && \text{dans D} \\ Z &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) && \text{le long de } C_0 \\ Z &= \alpha_i + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) && \text{le long des } C_i \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

$$\oint_{C_i} Z_n ds = 0. \quad (50)$$

Cette fonction peut alors être considérée comme l'ordonnée verticale d'une membrane élastique tendue (sans pression) sur les contours C_0 et C_i dont la hauteur variable est donnée.

Rappelons à ce sujet que les conditions d'uniformité (50) expriment que la translation verticale α_i d'un contour intérieur doit être telle que la somme algébrique des composantes verticales des tensions appliquées par la membrane sur le contour soit nulle.

Ceci peut être mis à profit expérimentalement par une suspension verticale équilibrée de chaque contour intérieur permettant aux α_i d'être réalisés automatiquement par le jeu des tensions dans la membrane.

Une autre méthode utilisant $(n + 1)$ essais est due à Griffith et Taylor (12). Pour une description complète et une bibliographie de l'analogie de la membrane on peut se référer à (13).

D'autres méthodes de résolution analogiques (cuve rhéologique) ou numériques (relaxation) ont été développées pour la solution du problème de Dirichlet dont relève le calcul de Z .

2. Calcul des résultantes.

On sait déjà que les efforts tranchants sont nuls. Le couple des tensions tangentielles peut être calculé en prenant le moment par rapport à un point quelconque, par exemple l'origine

$$C = \iint_D (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) dx dy = -G\theta \iint_D (x\Theta_x + y\Theta_y) dx dy.$$

Cette expression peut être transformée par la formule de Green (2) en prenant

$$\phi = \Theta \quad \psi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

$$C = G\theta \left\{ 2 \iint_D \Theta dx dy - \oint_{\Sigma} \Theta (x dy - y dx) \right\}.$$

En notant que sur Σ les contours C_i sont parcourus dans le sens rétrograde les équations (7) et (46) donnent

$$C = GJ\theta \tag{51}$$

où

$$J = 2 \iint_D \Theta dx dy + 2 \sum \alpha_i \Omega_i \tag{52}$$

est la rigidité de torsion de de Saint-Venant.

Sil'on convient d'attribuer à la fonction Θ une valeur constante à l'intérieur de chaque cavité, égale à celle qu'elle prend sur

le bord de celle-ci, on définit une fonction de torsion étendue $\tilde{\Theta}$

$$\tilde{\Theta} = \Theta \quad \text{dans } D$$

$$\tilde{\Theta} = \alpha_i \quad \text{dans chaque aire } \Omega_i.$$

La rigidité de torsion est alors plus simplement

$$J = 2 \iint_{\Omega_0} \tilde{\Theta} dx dy. \quad (53)$$

3. Déplacements et centre de torsion.

En torsion pure les formules (40) se réduisent à

$$u = -\theta zy + Qz$$

$$v = +\theta zx - Pz.$$

Définissons des coordonnées (x_0, y_0) par les relations

$$P = \theta x_0 \quad Q = \theta y_0.$$

Les déplacements transversaux prennent la forme

$$u = -\theta z(y - y_0) \quad v = \theta z(x - x_0) \quad (54)$$

caractéristique d'une petite rotation solide de chaque section droite autour d'un « centre de torsion » (x_0, y_0) . La position de ce dernier dépend donc essentiellement des valeurs adoptées pour les rotations P et Q.

D'autre part (41) se réduit à

$$w = Py - Qx + w_0 + g(x, y)$$

Posons

$$g(x, y) = \theta W(x, y).$$

De sorte que W est le gauchissement unitaire (pour une torsion unité) de la section droite, quand le centre de torsion est pris au centre de gravité $(x_0 = 0, y_0 = 0)$.

Ce gauchissement unitaire peut être obtenu au moyen des équations (34) qui livrent

$$\Theta_y = W_x - y$$

$$-\Theta_x = W_y + x$$

ou plus simplement, s'il est fait usage de la fonction Z définie par (48) :

$$W_x = Z_y \quad W_y = -Z_x, \quad (55)$$

équations de Cauchy-Riemann qui montrent que W est la fonction harmonique conjuguée à Z :

$$W + iZ = f(x + iy).$$

Le déplacement axial général aura pour expression

$$w = \theta(x_0y - y_0x + W) + w_0. \quad (56)$$

Remarque :

1. La fonction $(x_0y - y_0x + W)$, gauchissement unitaire quand le centre de torsion est en (x_0, y_0) , est harmonique conjuguée de

$$Z = \Theta + \frac{1}{2} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$$

2. De (55) résulte encore $\frac{\partial W}{\partial s} = \frac{\partial Z}{\partial n}$ pour \vec{ds} dans le sens direct sur C_i . Il en résulte une démonstration directe

$$\oint_{C_i} W_s ds = \oint_{C_i} Z_n ds = 0$$

des conditions d'uniformité.

4. Centre de torsion en cas d'encastrement parfait.

Les conditions de support dans la section $z = 0$ devraient permettre de lever l'indétermination qui subsiste sur le choix des valeurs P et Q et par conséquent sur la position effective du centre de torsion.

En général les conditions réelles sont telles qu'aucun élément de la famille des gauchissements ne peut convenir exactement. On dit dans ce cas qu'il y a « contrainte au gauchissement ».

Un exemple est celui de l'encastrement parfait qui exige $w = 0$ pour $z = 0$ et est incompatible avec toute forme de section massive excepté la section circulaire.

Des tensions additionnelles, en particulier des tensions axiales, sont alors induites par la contrainte au gauchissement. Suivant

un principe, également dû à de Saint-Venant, ces tensions additionnelles statiquement équivalentes à zéro, auront pratiquement disparu à une distance de l'encastrement du même ordre de grandeur que les dimensions transversales de la section. La solution du problème actuel y devient valable et un centre de torsion bien défini doit se manifester.

Sa position se confond naturellement avec celle d'un centre de symétrie s'il existe, sinon elle dépend de la solution difficile du problème des tensions additionnelles.

On peut cependant avancer les arguments suivants pour un calcul direct du centre de torsion.

Si, en première approximation, les tensions axiales induites sont distribuées proportionnellement au gauchissement à éliminer

$$\sigma'_z = k\theta[x_0y - y_0x + W] + kw_0$$

les relations

$$\iint_D \sigma'_z dx dy = 0 \quad \iint_D \sigma'_z x dx dy = 0 \quad \iint_D \sigma'_z y dx dy = 0$$

qui expriment leur équivalence statique (nécessaire) à zéro, fournissent, eu égard aux équations (6) les formules

$$w_0 S = -\theta \iint_D W dx dy \quad (57)$$

$$\left. \begin{aligned} -x_0 I_{xy} + y_0 I_{yy} &= \iint_D W x dx dy \\ -x_0 I_{xx} + y_0 I_{xy} &= \iint_D W y dx dy \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

qui permettent le calcul de w_0 et du centre de torsion.

WEINSTEIN (3) et avant lui KAPPUS (4) ont obtenu le même centre de torsion en cherchant les valeurs de P et Q réalisant un encastrement approximatif dans le sens des moindres carrés. Dans ce cas la condition rigoureuse et irréalisable $w = 0$ est remplacée par

$$\iint_D w^2 dx dy \text{ minimum.}$$

Les conditions de minimum

$$\iint_D w \frac{\partial w}{\partial w_0} dx dy = 0 \quad \iint_D w \frac{\partial w}{\partial x_0} dx dy = 0 \quad \iint_D w \frac{\partial w}{\partial y_0} dx dy = 0$$

sont identiques aux équations (57) et (58).

5. Énergie de déformation par torsion pure.

Elle pourrait être calculée à partir de la formule générale qui se réduit ici à

$$U = \frac{1}{2G} \iint_D (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) dx dy$$

par unité de longueur.

Pendant comme la section droite tourne en bloc et que la résultante est un couple pur, une application immédiate du théorème de Clapeyron fournit les expressions

$$U = \frac{1}{2} C \theta = \frac{1}{2} G J \theta^2 = C^2 / (2GJ). \quad (59)$$

6. Principe variationnel pour la fonction de torsion.

Si l'on se donne à priori $\Theta = 0$ sur le contour C_0 et $\Theta = \alpha_i$, constantes arbitraires sur les C_i , les valeurs effectivement prises par Θ résultent du principe variationnel.

$$\delta \iint_D \frac{1}{2} (\Theta_x^2 + \Theta_y^2 - 4\Theta) dx dy - \delta (\Sigma 2\alpha_i \Omega_i) = 0. \quad (60)$$

En effet, transformant par une formule de Green la partie

$$\begin{aligned} \iint_D (\Theta_x \delta \Theta_x + \Theta_y \delta \Theta_y) dx dy &= - \iint_D (\nabla^2 \Theta \delta \Theta) dx dy \\ &+ \oint_{\Sigma} \Theta_n \delta \Theta ds \end{aligned}$$

et remarquant que sur C_0 : $\delta \Theta = 0$ à priori et sur C_i : $\delta \Theta = \delta \alpha_i$, il vient

$$- \iint_D (\nabla^2 \Theta + 2) \delta \Theta dx dy + \Sigma \left(\oint_{C_i} \Theta_n ds - 2\Omega_i \right) \delta \alpha_i = 0.$$

L'équation (44) est alors l'équation d'Euler de ce principe variationnel, tandis que les conditions (47) en sont des conditions aux limites naturelles.

Ce principe peut rendre de grands services pour des solutions analytiques approchées. En général ces solutions ne permettent pas de rendre le champ $\vec{\tau}$ avec la précision requise mais peuvent souvent fournir une bonne estimation de la rigidité de torsion.

III. FLEXION ISOLÉE.

Une définition de la flexion isolée ou flexion sans torsion est d'un caractère plus conventionnel que celui de la torsion pure.

En effet, si a ou b ou encore les deux paramètres simultanément sont différents de zéro, l'équation (19) montre que l'annulation de θ ne suffit pas à supprimer la torsion de toutes les fibres il faudrait encore que $\nu = 0$. Cette disparition de la contraction transversale due au coefficient de Poisson peut être réalisée dans certains cas (caissons à parois minces raidis par diaphragmes transversaux infiniment rigides dans leur plan et infiniment rapprochés) mais en général il faut en tenir compte.

Faisant simplement $\theta = 0$ pour obtenir une dualité avec le cas $a = 0$ $b = 0$ de la torsion pure, il subsiste une torsion

$$\partial\omega_z/\partial z = \nu(bx - ay)$$

dont la loi de répartition offre comme particularité que seule la fibre (réelle ou fictive) passant par le centre de gravité d'une section droite est dénuée de torsion. Plus significative du point de vue cinématique est sa propriété d'assurer en vertu des équations (6) une torsion nulle en moyenne.

$$\iint_D (\partial\omega_z/\partial z) dx dy = 0. \quad (61)$$

Il s'agit de la moyenne au sens ordinaire étendue aux seules fibres réelles (du domaine D).

Cette définition de la flexion sans torsion est suivie par un certain nombre d'auteurs, TIMOSHENKO et GOODIER (6), SOKOLNIKOFF (7), MINDLIN et SALVADORI (13).

En 1935 TREFFTZ (2) a proposé de séparer la torsion de la flexion par la condition de disparition de l'énergie d'interférence entre ces deux états. Il en résulterait que pour un état combiné de flexion et de torsion les énergies de déformation dues à chaque état composant seraient simplement additives. L'état de flexion isolé de cette manière jouit de propriétés particulièrement simples et qui lui sont propres. Elle sera adoptée ici d'autant plus volontiers qu'il est possible de la réconcilier avec le point de vue cinématique d'une torsion nulle en moyenne à condition de pondérer cette dernière d'une façon appropriée.

Il faut encore observer que si la séparation entre torsion et flexion n'est pas indispensable pour le calcul de l'état de tension dans une poutre soumise à un effort tranchant de ligne d'action donnée comme l'ont traité LOVE (5) et SOUTHWELL (8) par exemple, ce calcul suppose malgré tout implicitement l'utilisation d'un état de flexion de référence. Il est alors logique de choisir ce dernier de façon à le douer des propriétés les plus avantageuses ce qui est le cas pour le choix de TREFFTZ.

1. Répartition des tensions tangentielles.

Au lieu de faire $\theta = 0$ nous posons donc pour la flexion

$$\theta = \nu c \quad (62)$$

et la valeur de c sera obtenue ultérieurement par la condition de séparation des énergies de flexion et de torsion.

Les lois qui gouvernent le champ des tensions tangentielles sont maintenant

$$\operatorname{div} \vec{\tau} = -E(ax + by) \quad (30)$$

$$\operatorname{curl}_z \vec{\tau} = 2\nu G(bx - ay + c) \quad (63)$$

Nous pouvons les satisfaire en posant

$$\tau_{xz} = E\Phi_x + 2\nu G\Psi_y \quad \tau_{yz} = E\Phi_y - 2\nu G\Psi_x \quad (64)$$

Le champ est ainsi décomposé en deux autres.

Un champ principal dérivant du potentiel Φ et qui tient compte des sources réparties représentées par le second membre de (30).

Un champ dit « secondaire » parce qu'il disparaît avec l'annulation du coefficient de Poisson. Ce champ dérive de la fonction de courant Ψ et tient compte des tourbillons présents au second membre de (63).

Cette distinction utile a été introduite par WEBER (9) et reprise plus tard par BIOT (10) en insistant sur l'analogie hydrodynamique du problème.

Quand la solution (64) est introduite dans les équations (30) et (63) il vient les équations de Poisson qui gouvernent les fonctions de tension dans le domaine D :

$$\nabla^2 \Phi = - (ax + by) \quad (65)$$

$$\nabla^2 \Psi = - (bx - ay + c). \quad (66)$$

Nous astreignons chaque champ à satisfaire les conditions aux limites (32) du problème, ce qui livre

$$\left. \begin{array}{l} \partial \Phi / \partial n = \Phi_n = 0 \\ d\Psi = 0 \end{array} \right\} \text{ sur } C_0 \text{ et les } C_i, \quad (67)$$

$$(68)$$

Ψ n'étant défini qu'à une constante près il est encore loisible de satisfaire aux conditions (68) en prenant

$$\Psi = 0 \quad \text{sur } C_0 \quad (69)$$

$$\Psi = \beta_i, \text{ une constante sur chaque } C_i.$$

Enfin il reste à examiner les conditions d'uniformité (38) qui deviennent

$$E \oint_{C_i} d\Phi + 2\nu G \oint_{C_i} \Psi_n ds = 2\nu G \Omega_i (b\bar{x}_i - a\bar{y}_i + c).$$

La première intégrale disparaît si la fonction Φ est uniforme, les conditions se résument alors en

$$\oint_{C_i} \Psi_n ds = \Omega_i (b\bar{x}_i - a\bar{y}_i + c), \quad (70)$$

qui fixent les constantes β_i auxquelles Ψ doit se réduire sur chaque contour de cavité.

2. Réduction du calcul du champ principal à un problème de Dirichlet.

Le problème posé par le calcul du potentiel Φ est rendu difficile par le fait que les données aux limites de cette fonction uniforme sont du type de Neumann. En vue de ramener ce problème à un problème de Dirichlet, introduisons par exemple la fonction

$$h(x, y) = \frac{1}{6} (ax^3 + by^3) \quad (71)$$

qui en vertu de (65) formera avec Φ une fonction harmonique :

$$\nabla^2(\Phi + h) = 0.$$

Considérons alors la fonction harmonique conjuguée $K(x, y)$

$$(\Phi + h) + iK = f(x + iy),$$

Les équations de Cauchy-Riemann

$$\Phi_x + h_x = K_y \quad \Phi_y + h_y = -K_x$$

permettent alors de calculer le champ principal à partir de la fonction K comme suit :

$$(\tau_{xz})_{\text{principal}} = E \left(K_y - \frac{1}{2} ax^2 \right)$$

$$(\tau_{yz})_{\text{principal}} = -E \left(K_x + \frac{1}{2} by^2 \right).$$

L'avantage résultant de l'emploi de la fonction K est la possibilité de calculer les valeurs qu'elle prend sur les contours limites.

Si ceux-ci sont parcourus dans le sens qu'on leur assigne comme parties de Σ , on a comme conséquence des équations de Cauchy-Riemann et des conditions aux limites (67)

$$\frac{\partial}{\partial n} (\Phi + h) = h_n = K_s \quad \frac{\partial}{\partial s} (\Phi + h) = -K_n. \quad (72)$$

Intégrons la première de ces relations

$$K = \int h_n ds = \int h_x dy - h_y dx = \frac{a}{2} \int x^2 dy - \frac{b}{2} \int y^2 dx. \quad (73)$$

Partant d'une valeur arbitraire de K en un point du contour, il est donc possible en cheminant sur C_0 dans le sens direct, sur les C_i dans le sens rétrograde, de déterminer ses valeurs de proche en proche au moyen de (73).

Une difficulté signalée par MINDLIN et SALVADORI (13) subsiste : la possibilité que les valeurs prises par K sur les contours ne soient pas uniformes. Autrement dit on ne retrouverait pas la valeur initiale après avoir parcouru une fois le contour. Pour le savoir il suffit, soit d'interpréter les intégrales du dernier membre de (73) à la lumière des formules (7), soit d'appliquer la première formule de Green avec

$$\phi = 1 \quad \psi = h$$

$$\oint_{C_0} dK = \oint_{C_0} h_n ds = \iint_{\Omega_0} \nabla^2 h dx dy = \iint_{\Omega_0} (ax + by) dx dy, \quad (74)$$

et pour un contour C_i par suite du sens rétrograde

$$\oint_{C_i} dK = - \iint_{\Omega_i} (ax + by) dx dy = - (a\bar{x}_i + b\bar{y}_i) \Omega_i. \quad (75)$$

Pour une section pleine (sans cavité) le domaine D est identique à Ω_0 et le second membre de (74) est nul en vertu des équations (6) résultant du choix des axes. Dans ce cas la difficulté ne se pose donc pas.

Au contraire, sauf dans le cas exceptionnel où l'on aurait $\bar{x}_i = 0$ $\bar{y}_i = 0$, les valeurs de K ne sont pas uniformes sur un contour de cavité, ni d'ailleurs sur le contour C_0 . Une des solutions possibles à cette difficulté consiste à placer dans chaque cavité une source d'intensité convenable ; par exemple, quoique ce ne soit pas nécessaire, au centre de gravité de l'aire.

Explicitement prenons

$$K = \frac{1}{2\pi} \Sigma (a\bar{x}_i + b\bar{y}_i) \Omega_i \theta_i(x, y) + K^* \quad (76)$$

où

$$\theta_i(x, y) = \text{arc tan} \frac{y - \bar{y}_i}{x - \bar{x}_i} \quad (77)$$

est une fonction harmonique dans D représentant la fonction de courant d'une source filiforme. C'est aussi l'angle que fait avec ox le rayon vecteur issu du point (\bar{x}_i, \bar{y}_i) . Dès lors on a

$$\oint_{c_i} d\theta_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k = i \\ -2\pi & \text{si } k \neq i \end{cases}$$

pour l'intégrale prise dans le sens rétrograde.

Il en résulte

$$\oint_{c_i} dK^* = \oint_{c_i} dK + (a\bar{x}_i + b\bar{y}_i)\Omega_i = 0$$

en vertu de (75). Les valeurs de la fonction résiduelle K^* sont donc uniformes sur les bords de chaque cavité. Elles le sont alors aussi sur le contour extérieur C_0 . En effet, parcourant celui-ci dans le sens direct

$$\oint_{c_0} d\theta_i = 2\pi$$

et par suite

$$\oint_{c_0} dK^* = \oint_{c_0} dK - \Sigma(a\bar{x}_i + b\bar{y}_i)\Omega_i$$

utilisant alors (75)

$$\oint_{c_0} dK^* = \oint_{c_0} dK + \Sigma_i \oint_{c_i} dK = \oint_{\Sigma} h_n ds = \iint_D (ax + by) dx dy = 0.$$

Pour obtenir l'uniformité requise de la fonction Φ il faut encore, suivant la seconde des équations (72) de Cauchy-Riemann

$$\oint_{c_i} K_n ds = 0.$$

Comme le potentiel dû aux sources placées dans les cavités est uniforme, ces conditions se ramènent aussi à

$$\oint_{c_i} K_n^* ds = 0.$$

Elles servent à déterminer les constantes restées arbitraires pour les valeurs initiales de K^* sur chacun des contours intérieurs. En résumé le problème est ramené à la recherche d'une fonction harmonique K^* prenant des valeurs uniformes et spécifiées sur les contours dans des conditions exactement pareilles à celles de la fonction Z de torsion pure et justiciable des mêmes méthodes de résolution pratiques.

3. *Réduction du calcul du champ secondaire à un problème de Dirichlet.*

Introduisant la fonction

$$k(x, y) = \frac{1}{12}[-a(y^3 + 3x^2y) + b(x^3 + 3y^2x) + 3c(x^2 + y^2)]. \quad (78)$$

on peut former avec Ψ une fonction harmonique $\Psi + k$ qui prend sur les contours les valeurs uniformes

$$\begin{aligned} k(x, y) & \text{ le long de } C_0 \\ \beta_i + k(x, y) & \text{ le long de } C_i. \end{aligned}$$

Comme on a, parcourant C_i dans le sens rétrograde

$$\begin{aligned} \oint_{C_i} k_n ds &= - \iint_{\Omega_i} \nabla^2 k dx dy = - \iint_{\Omega_i} (bx - ay + c) dx dy \\ &= - \Omega_i (b\bar{x}_i - a\bar{y}_i + c), \end{aligned}$$

on voit que les conditions d'uniformité (70) se réduisent pour la fonction harmonique à

$$\oint_{C_i} (\Psi + k)_n ds = 0. \quad (79)$$

Ce problème est donc encore une fois d'un type identique à celui qui gouvernait Z et K^* .

Dans les applications pratiques il peut d'ailleurs être avantageux de calculer en une fois la fonction de courant

$$K^* + \frac{\nu}{1 + \nu} (\Psi + k)$$

dont dépend le champ, quand le coefficient de Poisson du matériau est connu.

4. *Expression des déplacements.*

Compte tenu de (62) et des définitions (71) et (78) les équations (40) peuvent être mises sous la forme

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{6} az^3 + Qz - 2\nu z(h_x + k_y) \\ v &= -\frac{1}{6} bz^3 - Pz - 2\nu z(h_y - k_x) \end{aligned} \quad (80)$$

D'autre part la solution (64) introduite dans les équations (34) pour le calcul du gauchissement livre

$$\begin{aligned} g_x &= 2(1 + \nu)\Phi_x + 2\nu h_x + 2\nu(\Psi + k)_y \\ g_y &= 2(1 + \nu)\Phi_y + 2\nu h_y - 2\nu(\Psi + k)_x. \end{aligned}$$

Considérant la fonction H harmonique conjuguée à $(\Psi + k)$

$$\begin{aligned} H + i(\Psi + k) &= f(x + iy) \\ H_x &= (\Psi + k)_y \quad H_y = -(\Psi + k)_x, \end{aligned}$$

le gauchissement est immédiatement intégrable sous la forme

$$g = 2\Phi + 2\nu(\Phi + h + H)$$

et le déplacement axial équation (41) devient

$$w = \frac{1}{2} z^2(ax + by) + Py - Qx + w_0 + 2\Phi + 2\nu(\Phi + h + H) \quad (81)$$

Le premier terme de chaque déplacement appartient à une déformation concordant avec l'hypothèse de Bernoulli, une section droite primitive restant plane et perpendiculaire à la fibre neutre ($x = 0$ $y = 0$) dont les courbures sont liées aux moments fléchissants par les relations classiques :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} u(0, 0, z) &= -az = \frac{M_y I_{xx} + M_x I_{xy}}{E(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \\ \frac{d^2}{dz^2} v(0, 0, z) &= -bz = -\frac{M_x I_{yy} + M_y I_{xy}}{E(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \end{aligned}$$

Les termes en P et Q sont ici liés à ce qu'on est convenu d'appeler la déformation due aux efforts tranchants.

La détermination de P et Q soulève les mêmes difficultés que dans le problème du centre de torsion. Les termes restants sont les déformations dues au coefficient de Poisson à l'exception d'un gauchissement principal égal au double du potentiel du champ principal.

5. Séparation de la torsion et de la flexion.

Définition de la flexion isolée.

La tension normale étant nulle en torsion pure il ne peut y avoir d'énergie d'interférence que dans le champ des tensions tangentielles.

Cette énergie est proportionnelle à

$$\iint_{\text{D}} (\tau_{xz}\tau'_{xz} + \tau_{yz}\tau'_{yz}) dx dy$$

par unité de longueur, expression dans laquelle les composantes accentuées sont relatives au champ de torsion pure (43), les autres étant relatives au champ de flexion (64). Tout d'abord l'énergie d'interférence entre champ de torsion pure et champ principal de flexion est proportionnelle à l'intégrale

$$I_{\theta\phi} = \iint_{\text{D}} (\Phi_x\Theta_y - \Phi_y\Theta_x) dx dy$$

que la transformation de Stokes (5) réduit à

$$I_{\theta\phi} = \oint_{\Sigma} \Phi d\Theta = 0$$

en vertu des conditions aux limites (45) vérifiées par la fonction de torsion. Ces deux champs sont donc toujours orthogonaux.

L'énergie d'interférence entre champ de torsion pure et champ de flexion secondaire est proportionnelle à l'intégrale

$$I_{\theta\psi} = \iint_{\text{D}} (\Psi_x\Theta_x + \Psi_y\Theta_y) dx dy.$$

Appliquons-lui la première formule de Green avec $\phi = \Theta$ et $\psi = \Psi$, il vient

$$I_{\theta\psi} = - \iint_D \Theta \nabla^2 \Psi \, dx dy + \oint_{\Sigma} \Theta \Psi_n \, ds. \quad (82)$$

Le Laplacien peut être remplacé par sa valeur tirée de (66) tandis que l'intégrale curviligne se laisse évaluer en utilisant les conditions aux limites (46) vérifiées par la fonction de torsion et les conditions d'uniformité (70) de la fonction de courant du champ secondaire :

$$I_{\theta\psi} = \iint_D \Theta (bx - ay + c) \, dx dy + \Sigma a_i \Omega_i (b\bar{x}_i - a\bar{y}_i + c).$$

La condition pour que l'énergie d'interférence disparaisse est alors

$$\iint_{\Omega_0} \tilde{\Theta} (bx - ay + c) \, dx dy = 0. \quad (83)$$

Elle peut être réalisée en prenant pour c la valeur

$$c = \frac{2}{J} \iint_{\Omega_0} \tilde{\Theta} (ay - bx) \, dx dy.$$

L'interprétation cinématique de la condition de flexion isolée est immédiatement apparente en faisant usage de l'expression

$$\partial \omega_z / \partial z = \nu (bx - ay + c)$$

pour la torsion des fibres résultant de (29) et de (62). La condition devient

$$\iint_{\Omega_0} \tilde{\Theta} \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \, dx dy = 0 \quad (84)$$

elle exprime encore que la torsion moyenne des fibres est nulle. Comparée à la condition (61) elle présente deux différences essentielles :

1° La moyenne est pondérée par la fonction de torsion pure.

2° Elle fait intervenir les fibres virtuelles situées à l'intérieur des cavités.

La forme de la condition de séparation donnée par TREFFTZ est moins explicite en ce qui concerne le calcul de c . Elle résulte d'une transformation de Green de (82) à partir de $\phi = \Psi$ et $\psi = \Theta$.

$$I_{\theta\psi} = - \iint_D \Psi \nabla^2 \Theta \, dx dy + \oint_{\Sigma} \Psi \Theta_n ds = 0.$$

Tenant compte de (44), (47) et (69) elle devient

$$2 \iint_D \Psi dx dy + 2 \Sigma \beta_i \Omega_i = 0. \quad (85)$$

6. Équivalence statique à zéro du champ secondaire.

Les composantes de la somme vectorielle des tensions du champ secondaire ont les valeurs

$$\begin{aligned} 2\nu G \iint_D \Psi_y dx dy &= - 2\nu G \oint_{\Sigma} \Psi dx = 0 \\ - 2\nu G \iint_D \Psi_x dx dy &= - 2\nu G \oint_{\Sigma} \Psi dy = 0 \end{aligned}$$

en vertu de la constance de Ψ sur chacun des contours fermés constituant Σ . Ce résultat est valable quelle que soit la valeur attribuée à c . Une variation de celle-ci ne ferait d'ailleurs que superposer un champ caractéristique de torsion pure dont on sait qu'il est équivalent à un couple pur.

Le champ des tensions secondaires étant au plus équivalent à un couple pur on aura par exemple pour calculer ce dernier

$$C_\psi = - 2\nu G \iint_D (x\Psi_x + y\Psi_y) dx dy.$$

Appliquant la première formule de Green avec $\phi = \Psi$ et $\psi = \frac{x^2 + y^2}{2}$

$$C_\psi = 4\nu G \iint_D \Psi dx dy - 2\nu G \oint_{\Sigma} \Psi (x dy - y dx).$$

L'intégrale curviligne peut être évaluée en appliquant (69) et notant que les contours intérieurs étant parcourus dans le sens rétrograde on a par (7)

$$\oint_{c_i} (x dy - y dx) = -2\Omega_i.$$

Il vient ainsi

$$C_\psi = 4\nu G \left(\iint_D \Psi dx dy + \sum \beta_i \Omega_i \right) = 0$$

en vertu de (85). La séparation des énergies entraîne donc comme conséquence intéressante que le champ des tensions secondaires induites par le coefficient de Poisson est statiquement équivalent à zéro.

7. Centre de flexion. Identité avec le centre de torsion.

Il résulte du paragraphe précédent que la somme vectorielle des tensions tangentielles ne peut provenir que du champ principal. On doit avoir

$$T_x = E \iint_D \Phi_x dx dy \quad T_y = E \iint_D \Phi_y dx dy.$$

Ces résultats se retrouvent d'ailleurs en transformant les intégrales par la formule de Green et les relations (65) et (67) en

$$T_x = -E \iint_D x \nabla^2 \Phi dx dy + \oint_{\Sigma} x \Phi_n ds = E \iint_D x(ax + by) dx dy$$

$$T_y = -E \iint_D y \nabla^2 \Phi dx dy + \oint_{\Sigma} y \Phi_n ds = E \iint_D y(ax + by) dx dy$$

ce qui restitue les relations déjà connues (23).

Le moment résultant par rapport à l'origine se réduit aussi à celui des tensions du champ principal en vertu de la propriété $C_\psi = 0$ démontrée ci-dessus.

$$M_z = E \iint_D (x \Phi_y - y \Phi_x) dx dy.$$

Par la transformation de Stokes (5) il vient plus simplement

$$M_z = -E \oint_{\Sigma} \Phi(xdx + ydy). \quad (86)$$

Le centre de flexion (x_F, y_F) est par définition le point de la section où il faut appliquer les efforts tranchants pour obtenir le même moment résultant. Par conséquent

$$M_z = -y_F T_x + x_F T_y. \quad (87)$$

L'égalité de moment doit avoir lieu quelles que soient les valeurs de T_x et T_y c'est-à-dire de a et de b . Posons par conséquent

$$\Phi = a\Phi_a + b\Phi_b \quad (88)$$

où, suivant (65) et (67)

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi_a &= -x & \nabla^2 \Phi_b &= -y & \text{dans } D \\ \frac{\partial}{\partial n} \Phi_a &= 0 & \frac{\partial}{\partial n} \Phi_b &= 0 & \text{sur } C_0 \text{ et les } C_i. \end{aligned}$$

Ces fonctions ne dépendent alors plus que de la géométrie de la section droite.

Substituant (88) dans (86), (23) dans (87) et égalant séparément les coefficients de a et de b il vient :

$$\left. \begin{aligned} -x_F I_{xy} + y_F I_{yy} &= \oint_{\Sigma} \Phi_a(xdx + ydy) \\ -x_F I_{xx} + y_F I_{xy} &= \oint_{\Sigma} \Phi_b(xdx + ydy) \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Un système de deux équations permettant le calcul des coordonnées du centre de flexion. On remarquera que ce point est une caractéristique exclusivement géométrique de la section droite. Dans la définition (61) de la flexion isolée, le centre de flexion comporte au contraire une partie secondaire dans les coordonnées proportionnelles au coefficient de Poisson.

CICALA (11) a montré que la partie principale des coordonnées peut être calculée à partir de la fonction W , gauchissement unitaire pour une torsion pure autour de l'axe oz .

WEINSTEIN (3) a tiré l'attention sur l'identité qui en résulte avec le centre de torsion obtenu par la méthode de l'encastrement approximatif.

L'identité entre (x_0, y_0) donnés par (58) et (x_F, y_F) donnés par (89) résulte d'une application de la deuxième formule de Green

$$\iint_D (\Phi_a \nabla^2 W - W \nabla^2 \Phi_a) dx dy = \oint_{\Sigma} (\Phi_a W_n - W \Phi_{an}) ds$$

qui, eu égard aux propriétés des fonctions utilisées devient

$$\iint_D W x dx dy = \oint_{\Sigma} \Phi_a W_n ds.$$

Par les relations (55) de Cauchy-Riemann et les propriétés (49) de Z

$$\iint_D W x dx dy = \oint_{\Sigma} \Phi_a dZ = \oint_{\Sigma} \Phi_a (x dx + y dy).$$

On démontrerait de même l'identité

$$\iint_D W y dx dy = \oint_{\Sigma} \Phi_b (x dx + y dy).$$

L'identité des centres de flexion et de torsion résulte alors de celle entre les seconds membres de (58) et (89).

8. Énergie de déformation en flexion isolée.

Par unité de longueur cette énergie a pour valeur

$$U = \frac{1}{2E} \iint_D \sigma_z^2 dx dy + \frac{1}{2G} \iint_D (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) dx dy = U_0 + U_1 + U_2.$$

Elle peut être décomposée en trois parties. L'énergie due aux seules tensions normales vaut

$$U_0 = \frac{1}{2} E \iint_D (ax + by)^2 z^2 dx dy = \frac{M_x^2 I_{yy} + 2M_x M_y I_{xy} + M_y^2 I_{xx}}{2E(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \quad (90)$$

L'énergie due aux tensions tangentielles elle-même se laisse décomposer en

$$U_1 = (1 + \nu)E \int\int_D (\Phi_x^2 + \Phi_y^2) dx dy$$

due aux seules tensions du champ principal, qui se laisse encore mettre sous la forme

$$U_1 = (1 + \nu)E \int\int_D \Phi \nabla^2 \Phi dx dy + (1 + \nu)E \oint_{\Sigma} \Phi \Phi_n ds$$

soit

$$U_1 = (1 + \nu)E \int\int_D \Phi(ax + by) dx dy \quad (91)$$

puis

$$U_2 = 2\nu^2 G \int\int_D (\Psi_x^2 + \Psi_y^2) dx dy,$$

énergie due aux seules tensions du champ secondaire, qu'une transformation de Green permet de mettre sous la forme

$$U_2 = -2\nu^2 G \int\int_D \Psi \nabla^2 \Psi dx dy + 2\nu^2 G \oint_{\Sigma} \Psi \Psi_n ds$$

soit encore

$$U_2 = 2\nu^2 G \left\{ \int\int_D \Psi (bx - ay + c) dx dy + \Sigma \beta_i \Omega_i (b\bar{x}_i - a\bar{y}_i + c) \right\}$$

Enfin il reste à montrer que l'énergie d'interférence entre champ principal et champ secondaire est nulle. En effet elle est proportionnelle à

$$I_{\phi\psi} = \int\int_D (\Phi_x \Psi_y - \Phi_y \Psi_x) dx dy = \oint_{\Sigma} \Phi d\Psi = 0.$$

La partie U_2 de l'énergie est la seule à dépendre du choix de c . Il est facile de voir que la définition de Trefftz lui donne une valeur minima comme fonction de c . En effet, comme il est im-

médiatement apparent sur les équations de définition de Θ et de Ψ que

$$\frac{\partial}{\partial c} \Psi = \frac{1}{2} \Theta$$

la condition pour le minimum de U_2

$$2 \iint_D (\Psi_x \Psi_{xc} + \Psi_y \Psi_{yc}) dx dy = \iint_D (\Psi_x \Theta_x + \Psi_y \Theta_y) dx dy = 0.$$

coïncide avec la condition de séparation des énergies de torsion et de flexion. Notant que dans ce cas la relation (85) est réalisée il vient encore pour le minimum de U_2 l'expression plus simple

$$U_2 = 2\nu^2 G \left\{ \iint_D \Psi (bx - ay) dx dy + \Sigma \beta_i \Omega_i (b\bar{x}_i - a\bar{y}_i) \right\} \quad (92)$$

Enfin il résulte des considérations qui précèdent que dans le cas où les efforts tranchants sont imposés le minimum absolu de l'énergie de déformation a lieu quand les résultantes passent par le centre de flexion défini au paragraphe 7.

9. Principes variationnels pour les fonctions de tension en flexion.

Pour la fonction Φ du champ principal on a le principe variationnel

$$\delta \iint_D (\Phi_x^2 + \Phi_y^2 - 2(ax + by)\Phi) dx dy = 0$$

associé aux conditions à priori.

$$\Phi_n = 0 \text{ sur } C_0 \text{ et les } C_i.$$

En effet par la transformation de Green

$$\iint_D (\Phi_x \delta \Phi_x + \Phi_y \delta \Phi_y) dx dy = - \iint_D \nabla^2 \Phi \delta \Phi dx dy + \oint_{\Sigma} \Phi_n \delta \Phi ds$$

le principe est aussi

$$\iint_D (\nabla^2 \Phi + ax + by) \delta \Phi dx dy = 0$$

conduisant à (65) comme équation d'Euler.

Le principe variationnel gouvernant Ψ est

$$\delta \iint_D (\Psi_x^2 + \Psi_y^2 - 2(bx - ay + c)\Psi) dx dy - 2\delta(\Sigma \Omega_i \beta_i (b\bar{x}_i - a\bar{y}_i + c)) = 0$$

avec les conditions à priori

$$\Psi = 0 \text{ sur } C_0$$

$$\Psi = \beta_i, \text{ constantes indéterminées sur } C_i.$$

Par une transformation de Green il se met sous la forme

$$\begin{aligned} & -2 \iint_D (\nabla^2 \Psi + bx - ay + c) \delta \Psi dx dy + 2\Sigma \left[\oint_{C_i} \Psi_n ds \right. \\ & \left. - \Omega_i (b\bar{x}_i - a\bar{y}_i + c) \right] \delta \beta_i - 2 \left(\iint_D \Psi dx dy + \Sigma \Omega_i \beta_i \right) \delta c = 0 \end{aligned}$$

dont il résulte que l'équation d'Euler du problème restitue bien la condition de champ (66), tandis que les conditions naturelles relatives aux variations des constantes indéterminées fournissent les conditions d'uniformité (70) et la condition naturelle relative à la variation de c fournit la condition de séparation de l'énergie sous la forme (85).

10. Déformation due aux efforts tranchants.

Les termes P et Q figurant aux déplacements (80) et (81) ne sont déterminés que par les conditions de support.

En cas d'encastrement parfait on les appelle les déformations dues aux efforts tranchants. Tout comme dans le cas de la torsion leur calcul se heurte à l'incompatibilité entre le gauchissement prévu par la théorie de Barré de Saint-Venant et la condition d'encastrement parfait.

Utilisant la méthode de l'encastrement approximatif les conditions de minimum

$$\iint_D w dx dy = 0 \quad \iint_D wx dx dy = 0 \quad \iint_D wy dx dy = 0,$$

appliquées dans la section d'encastrement $z = 0$, fournissent outre la valeur de w_0 les relations

$$\begin{aligned} - \text{PI}_{xy} + \text{QI}_{yy} &= 2(1 + \nu) \iint_{\text{D}} \Phi x dx dy + 2\nu \iint_{\text{D}} (\text{H} + h) x dx dy \\ - \text{PI}_{xx} + \text{QI}_{xy} &= 2(1 + \nu) \iint_{\text{D}} \Phi y dx dy + 2\nu \iint_{\text{D}} (\text{H} + h) y dx dy \end{aligned} \quad (93)$$

permettant un calcul de P et de Q.

Multiplions la première par a , la seconde par b , additionnons en faisant usage de (23) et de (91), il vient :

$$\frac{1}{2} (\text{QT}_x - \text{PT}_y) = \text{U}_1 + \nu \text{E} \iint_{\text{D}} (\text{H} + h)(ax + by) dx dy. \quad (94)$$

Cette relation énergétique suggère naturellement en interprétant le premier membre suivant le théorème de Clapeyron de considérer Q et $-\text{P}$ comme des glissements moyens associés aux efforts tranchants. Elle s'obtient d'ailleurs de plusieurs autres façons qui chacune met en évidence une propriété de ce choix des paramètres P et Q.

Partant par exemple du théorème de Clapeyron sous la forme

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{\text{D}} (w\sigma_z + u\tau_{xz} + v\tau_{yz}) dx dy = \text{U}_0 + \text{U}_1 + \text{U}_2,$$

appropriée en calcul de l'énergie par unité de longueur, et notant que

$$\frac{1}{2} \iint_{\text{D}} \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} dx dy = \text{U}_0$$

et que τ_{xz} et τ_{yz} sont indépendants de z :

$$\frac{1}{2} \iint_{\text{D}} \left(w \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \tau_{xz} + \frac{\partial v}{\partial z} \tau_{yz} \right) dx dy = \text{U}_1 + \text{U}_2.$$

Subdivisons maintenant les déplacements en distinguant les

termes compatibles avec l'hypothèse de Bernoulli et l'encastrement parfait

$$u = -\frac{1}{6}az^3 + u^* \quad v = -\frac{1}{6}bz^3 + v^* \quad w = \frac{1}{2}z^2(ax + by) + w^*$$

où w^* est indépendant de z .

Après substitution et usage de (23) il vient

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \iint_D (\sigma_z w^* + \tau_{xz} u^* + \tau_{yz} v^*) dx dy = U_1 + U_2.$$

Comme il faut s'y attendre, les termes en P et Q se détruisent au premier membre, mais si on choisit ces paramètres de façon telle que les tensions normales ne fournissent aucun travail sur le gauchissement :

$$\iint_D \sigma_z w^* dx dy = 0 \quad (95)$$

on obtient la relation énergétique

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \iint_D (\tau_{xz} u^* + \tau_{yz} v^*) dx dy = U_1 + U_2. \quad (96)$$

Cette dernière s'obtient encore en partant de la relation

$$\frac{1}{2} \iint_D \left[\tau_{xz} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial v^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) \right] dx dy = U_1 + U_2$$

et imposant la condition

$$\iint_D \left(\tau_{xz} \frac{\partial w^*}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) dx dy = 0. \quad (97)$$

Elle exprime que les pentes de la section droite gauchie sont annulées en moyenne pondérée à défaut d'être identiquement nulles comme l'exige un encastrement parfait.

Or l'équation (95) est une conséquence des conditions de minimum dans la méthode de l'encastrement approximatif.

Il suffit pour cela de remarquer que dans la section $z = 0$ le déplacement axial se réduit à la partie affectée d'un astérisque

et que la tension normale est répartie linéairement. Par suite les relations énergétiques (96) et (97) sont équivalentes à (94) et fournissent les mêmes valeurs de P et Q.

Les vérifications qui suivent sont purement formelles. Partant de (96) :

$$\frac{1}{2}(QT_x - PT_y) - \nu \iint_D [\tau_{xz}(h_x + k_y) + \tau_{yz}(h_y - k_x)] dx dy = U_1 + U_2.$$

Dans l'intégrale double la partie secondaire du champ des tensions associée aux déplacements induits par le coefficient de Poisson fournit l'énergie U_2 , de sorte qu'il reste

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(QT_x - PT_y) &= U_1 + \nu E \iint_D (\Phi_x h_x + \Phi_y h_y) dx dy \\ &\quad + \nu E \iint_D (\Phi_x k_y - \Phi_y k_x) dx dy \\ &= U_1 - \nu E \iint_D h \nabla^2 \Phi dx dy + \oint_{\Sigma} h \Phi_n ds + \nu E \oint_{\Sigma} \Phi dk \\ &= U_1 + \nu E \iint_D h(ax + by) dx dy + \nu E \oint_{\Sigma} \Phi dk. \end{aligned}$$

Enfin comme on a successivement

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} \Phi dk &= \oint_{\Sigma} \Phi d(\Psi + k) = \oint_{\Sigma} \Phi H_n ds = \oint_{\Sigma} (\Phi H_n - H \Phi_n) ds \\ &= \iint_D (\Phi \nabla^2 H - H \nabla^2 \Phi) dx dy = \iint_D H(ax + by) dx dy \end{aligned}$$

l'équivalence de (96) et (94) est vérifiée.

Pour vérifier celle entre (97) et (94) il suffit d'utiliser les relations

$$\iint_{\mathbf{D}} [\Phi_x(h + \mathbf{H})_x + \Phi_y(h + \mathbf{H})_y] dx dy = - \iint_{\mathbf{D}} (\mathbf{H} + h) \nabla^2 \Phi dx dy$$

$$+ \oint_{\Sigma} (\mathbf{H} + h) \Phi_n ds = \iint_{\mathbf{D}} (\mathbf{H} + h)(ax + by) dx dy.$$

$$\iint_{\mathbf{D}} (\Psi_y \Phi_x - \Psi_x \Phi_y) dx dy = \oint_{\Sigma} \Phi d\Psi = 0.$$

$$\iint_{\mathbf{D}} \Psi_y (\mathbf{H} + h)_x - \Psi_x (\mathbf{H} + h)_y dx dy = \oint_{\Sigma} (\mathbf{H} + h) d\Psi = 0.$$

RÉFÉRENCES

1. L. PRANDTL, *Physikalische Zeitschrift* 4 (1903), pp. 758-69.
 2. E. TREFFTZ, *Z. A. M. M.*, 15 (1935), pp. 220-225.
 3. A. WEINSTEIN, *Quat. App. Math.*, V (1947), p. 97.
 4. R. KAPPUS, *Z. A. M. M.*, 6 (1939), p. 347.
 5. A. E. H. LOVE, *Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, chap. XV, 4 th. ed.
 6. S. TIMOSHENKO and J. N. GOODIER, *Theory of Elasticity*, MC. Graw-Hill, 1951.
 7. I. S. SOKOLNIKOFF, *Mathematical Theory of Elasticity*, New-York, 1946.
 8. R. V. SOUTHWELL, *Introduction to the Theory of Elasticity*, Oxford University Press, 1941.
 9. WEBER, C., *Z. A. M. M.* 4, (1924), pp. 334-348.
 0. M. A. BIOT, *Journal of Applied Ph.*, 9 (1938), pp. 39-43.
 1. P. CICALA, *Atti d. R. Accad. di Torino*, 70 (1935), T. I.
 2. AA. GRIFFITH and G. I. TAYLOR., *A. R. C. Rep. and. Mem. n° 392* (1918).
 3. R. D. MINDLIN and M. G. SALVADORI, chap. 16 du *Handbook of Experimental Stress Analysis*, Éd. M. HETENYI, 1950.
-