

# Trajectoires optimales des fusées

par B. FRAEIJIS de VEUBEKE

Chargé de Cours à l'Université de Liège.  
Maître de Conférences à l'Université de Louvain.

Université de Liège  
Sciences Appliquées et Mathématique  
Chemin des Chevreuils, Bât B52/4  
S 4000 LIEGE

## I. — ETABLISSEMENT D'UN PRINCIPE VARIATIONNEL

La recherche des trajectoires de fusées jouissant de propriétés extrémales donne lieu à une variété de problèmes intéressants. Parmi ceux-ci, seuls ceux des trajectoires à minimum de consommation retiendront ici notre attention. Leurs caractéristiques résultent d'un compromis entre plusieurs exigences contradictoires. D'une part, si la trajectoire se termine par un gain d'altitude, l'intérêt d'une consommation rapide du propergol en vue d'éviter une dépense inutile d'énergie potentielle; d'autre part le bénéfice d'une réduction de vitesse dans les couches denses de l'atmosphère afin de minimiser l'énergie dissipée par la traînée.

La variation avec l'altitude  $z$  de la masse spécifique  $\rho$  de l'atmosphère jouera donc un rôle essentiel dans le profil des vitesses de cette trajectoire. Sur la figure 1, cette variation est représentée pour une atmosphère type jusqu'à l'altitude de 25 000 m.

Si  $M$  désigne la masse instantanée de la fusée,  $V$  sa vitesse,  $\theta$  son angle d'élévation,  $T$  la poussée et  $D$  la traînée, l'équation intrinsèque du mouvement selon la tangente à la trajectoire sera (fig. 2)

$$M \frac{dV}{dt} = T - D - Mg \sin \theta \quad (1)$$

Dans cette équation le facteur  $\cos \alpha$  qui affecte en réalité le terme dû à la poussée sera assimilé à l'unité, l'angle d'attaque aérodynamique étant suffisamment petit.

La masse  $M$  est variable et le débit massique de propergol lui est relié par l'équation

$$m = - \frac{dM}{dt} \quad (2)$$

La poussée a pour valeur

$$T = mc \quad (3)$$

où la vitesse effective  $c$  d'éjection des produits de la combustion tient compte des écarts d'adaptation de la tuyère aux conditions de pression à la sortie et est une fonction supposée connue de l'altitude.

La traînée est une fonction  $D(z, V, L)$  de la vitesse, de la portance  $L$  et de l'altitude. Sa dépendance de l'altitude intervient principalement à travers la fonction  $\rho(z)$ .

La portance intervient encore dans l'équation intrinsèque suivant la normale à la trajectoire

$$MV \frac{d\theta}{dt} = L - Mg \cos \theta + T \sin \alpha$$

La relation entre la portance et l'angle d'attaque peut généralement s'écrire sous la forme

$$L = L_\alpha(z, V) \sin \alpha$$

ce qui permet d'écrire la deuxième équation intrinsèque sous la forme

$$MV \frac{d\theta}{dt} = -Mg \cos \theta + L (1 + \frac{T}{L_\alpha(z, V)}) \quad (4)$$

L'élimination de la portance entre cette équation et l'expression de la traînée conduit à considérer cette dernière comme une fonction compliquée  $D(z, V, \theta, T, M)$ .

S'il est permis de réduire la traînée à une fonction  $D(z, V)$  indépendante de la portance les problèmes sont considérablement simplifiés. En fait, il est alors permis de se passer entièrement de l'équation (4) dont le rôle se réduit ultérieurement au calcul de la portance requise pour suivre les trajectoires idéales trouvées, ce qui permet d'établir le programme des braquages de gouvernes à réaliser.

La traînée due à la portance peut être réintroduite ultérieurement, soit par une perturbation de

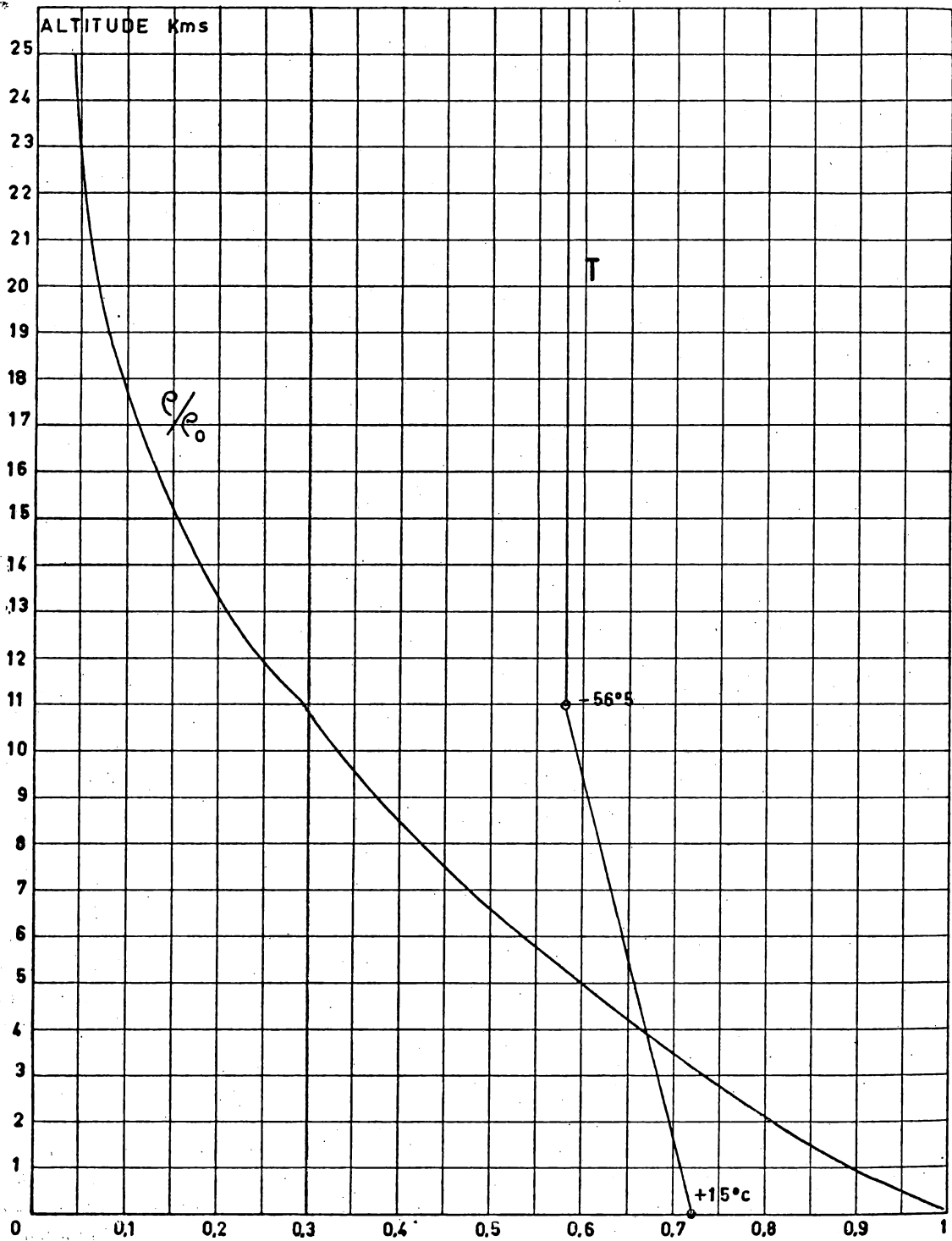


Fig. 1

Variation de la masse spécifique  $\rho$  et de la température  $T$  en fonction de l'altitude pour une atmosphère type.

la trajectoire obtenue en première approximation, soit, de façon plus grossière, en majorant le coefficient de traînée directe pour tenir compte d'une moyenne de la traînée induite. Il apparaîtra d'ailleurs que dans un certain nombre de cas des segments de trajectoire sont effectivement décrits sans portance et ne nécessitent pas de corrections.

Au système précédent, il faut enfin adjoindre l'équation du gain d'altitude

$$\frac{dz}{dt} = V \sin \theta \quad (5)$$

Après élimination de la poussée par l'équation (3), les équations (1), (2) et (5) constituent un système différentiel gouvernant les fonctions inconnues  $V(z)$ ,  $m(z)$ ,  $M(z)$ ,  $\theta(z)$  et  $t(z)$ .

En général, l'équation unique obtenue après élimination de deux des fonctions inconnues permet de poser un problème variationnel conduisant à certaines trajectoires optimales.

Éliminons par exemple  $dt$  entre (1) et (5), il vient

$$M(VV' + g) \sin \theta = mc - D \quad (6)$$

où l'accent indique la dérivation par rapport à l'altitude.

Éliminant de même  $dt$  entre (2) et (5)

$$m = -V \sin \theta M' \quad (7)$$

Éliminant enfin  $\sin \theta$  entre (6) et (7)

$$\frac{dM}{M} = -\frac{m(VV' + g)}{V(mc - D)} dz \quad (8)$$

Soient  $M_1$  et  $M_2$  les valeurs de la masse au point initial 1 et final 2 d'une trajectoire; par intégration de (8) il vient

$$\ln \frac{M_1}{M_2} = \int_1^2 (A + BV') dz \quad (9)$$

où

$$A(z, V) = \frac{mg}{V(mc - D)} \quad B(z, V) = \frac{m}{mc - D} \quad (10)$$

L'équation (9) montre que, la masse initiale étant supposée connue, la masse finale est une fonction-

nelle dépendant du profil des vitesses  $V(z)$  et du profil des débits  $m(z)$  le long de la trajectoire. Les profils qui rendent la masse maximum, c'est-à-dire la consommation minimum, correspondent au minimum de cette fonctionnelle et peuvent donc en principe être obtenues par le calcul des variations.

Dans le cas général les fonctions  $V(z)$  et  $m(z)$  sont variées indépendamment ce qui impose une solution où la poussée du jet doit finalement être réglée suivant une loi idéale résultant du calcul. Ce type de problème sera examiné dans une deuxième partie.

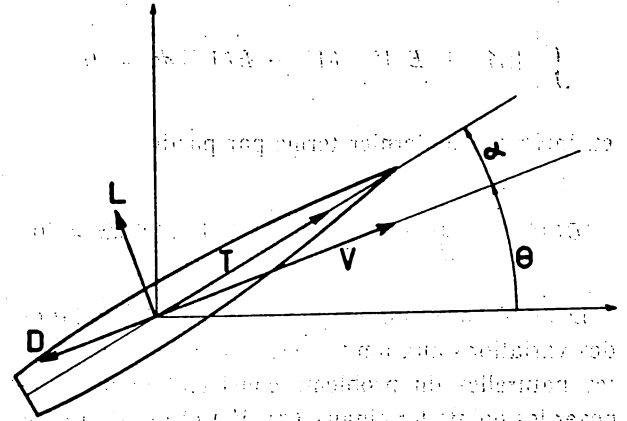


Fig. 2

Le réglage de la poussée dans un moteur fusée est d'une réalisation délicate et susceptible d'augmenter sensiblement le poids mort de l'engin. Aussi est-il intéressant d'examiner au préalable le cas particulier où la fonction  $m(z)$  est une donnée à priori résultant d'un fonctionnement naturel du moteur. La variation est alors appliquée uniquement à la fonction  $V(z)$ . Si le débit reste constant, la trajectoire à minimum de consommation est également décrite dans un temps minimum car à chaque instant

$$M = M_1 - mt$$

et une croissance monotone du temps entraîne une décroissance monotone de la masse. Ceci reste vrai si le débit est une fonction imposée du temps

$$M = M_1 - \int_0^t m(t) dt$$

Ce type de problème, où la trajectoire à consommation minimum est aussi brachistochrone, requiert

pour sa solution l'intervention d'un multiplicateur de Lagrange susceptible d'éliminer la liaison non holonome entre le temps et l'altitude; il ne sera pas abordé ici.

## 2. — TRAJECTOIRES A CONSUMMATION MINIMUM

### DEBIT CONNU EN FONCTION DE L'ALTITUDE

#### 2.1 La courbe singulière.

Etudions d'abord le cas particulier d'un débit connu en fonction de l'altitude. La variation de l'équation (9) livre

$$\int_1^2 [(A_v + B_v V') \delta V + B \delta V'] dz = 0$$

et, intégrant le dernier terme par parties

$$[B \delta V]_1^2 - \int_1^2 (B' - A_v - B_v V') \delta V dz = 0$$

Le terme aux limites disparaît avec l'annulation des variations aux limites. Des conditions aux limites naturelles du problème consistent donc à imposer les points terminaux  $(z_1, V_1)$  et  $(z_2, V_2)$  dans un diagramme représentatif  $(z, V)$  de la trajectoire.

Notant que la dérivée totale par rapport à l'altitude

$$B' = B_z + V' B_v$$

l'équation d'Euler du problème qui doit fournir la trajectoire extrémale est

$$B_z - A_v = 0 \quad (11)$$

Suivant les définitions (10), elle peut prendre la forme

$$\left( V \frac{\partial}{\partial z} - g \frac{\partial}{\partial V} \right) \phi(z, V) = 0 \quad (12)$$

où

$$\phi(z, V) = \frac{m}{V(mc - D)} \quad (13)$$

Au lieu d'une équation différentielle du second ordre qui permettrait par ses constantes d'intégration de satisfaire aux conditions aux limites

$$V = V_1, V_2 \text{ pour } z = z_1, z_2$$

on obtient seulement une relation implicite entre la vitesse et des fonctions connues de l'altitude.

Dans le plan  $(z, V)$  cette relation implicite peut se trouver satisfaite sur une ou plusieurs branches de courbe. Le cas où la loi de traînée est proportionnelle au carré de la vitesse est particulièrement simple car alors

$$D = R \rho V^2 \quad D_z = \frac{\rho}{\rho} D \quad V D_v = 2 D \quad (14)$$

et l'équation (12) devient équivalente à l'annulation d'un trinôme du second degré en  $V^2$  dont la solution peut s'écrire

$$2 \left( \frac{V_c}{V} \right)^2 = 1 + \frac{V_c^2}{g} \frac{c'}{c} \pm \left[ \left( 1 + \frac{V_c^2}{g} \frac{c'}{c} \right)^2 - \frac{4}{3} \frac{V_c^2}{g} \left( \frac{\rho'}{\rho} - \frac{m'}{m} \right) \right]^{1/2} \quad (15)$$

où l'on a posé

$$V_c^2 = T/(3 R \rho) \quad (16)$$

une vitesse de comparaison, variable avec l'altitude, dont la signification sera dégagée par la suite.

La solution (15) peut fournir deux branches de courbe. La branche supérieure, correspondant au signe  $-$ , est normalement imaginaire, car, en règle générale,

$$m'/m > \rho'/\rho$$

Ce dernier quotient est négatif dans une atmosphère type. Il varie par exemple de  $-0.096$  à  $-0.122$   $(\text{km})^{-1}$  entre 0 et 11 000 mètres et prend la valeur constante  $-0.1557$   $(\text{km})^{-1}$  jusqu'à 25 000 mètres. Une baisse relative de débit aussi importante constituerait un cas exceptionnel. Notons aussi qu'en général  $c'/c > 0$ , par suite de la diminution de la pression à la sortie de la tuyère.

La branche inférieure correspond au signe  $+$ , elle partage le plan  $(z, V)$  en une région inférieure pour laquelle  $B_z - A_v > 0$  et une région supérieure où le sens de cette inégalité est renversé. Nous appellerons cette branche la courbe singulière et désignerons la fonction qui lui correspond par  $V_s(z)$  (fig. 3).

Dans les conditions précitées  $V_s < V_e$  et par conséquent la courbe  $T = D$ , soit  $V = \sqrt{3} V_e$  est tout entière dans la région supérieure. Le long de  $V_s(z)$  on a donc  $T > D$ .

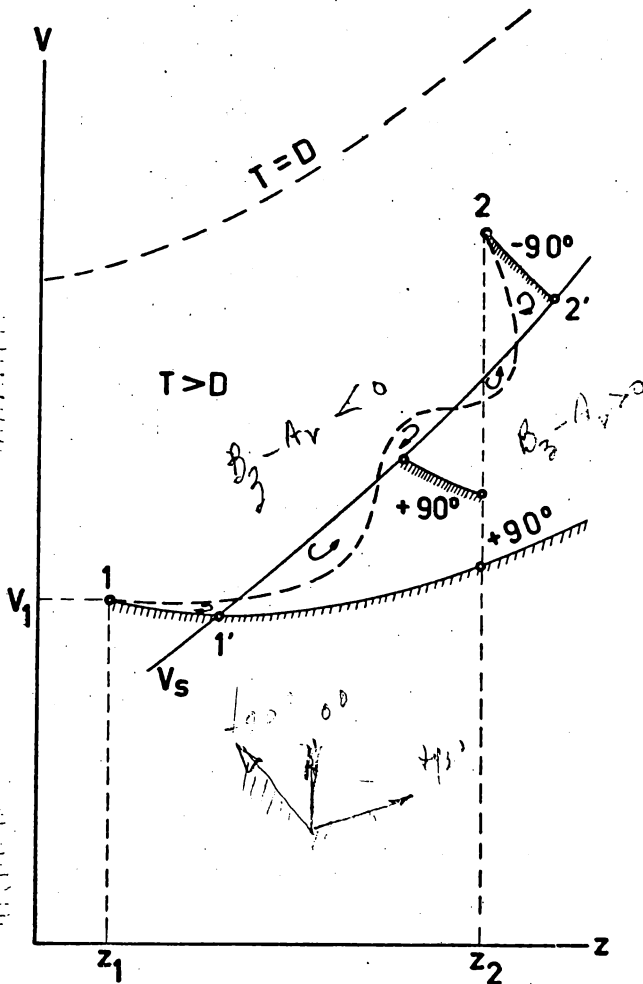


Fig. 3

On trouve aussi en prenant la dérivée logarithmique de (16)

$$2 \frac{V'_e}{V_e} = \frac{T'}{T} - \frac{\rho'}{\rho} = \frac{m'}{m} - \frac{\rho'}{\rho} + \frac{c'}{c} > 0 \quad (17)$$

et il en résulte que  $V'_s > 0$ .

Il résulte alors aussi de l'équation (6) que le long de  $V_s(z)$

$$\sin \theta = \frac{T - D}{M(V_s V'_s + g)} > 0$$

Pour que la courbe singulière corresponde à une trajectoire physiquement réalisable il faut encore

que le dernier quotient soit inférieur à l'unité. Il s'agit alors d'une trajectoire de montée, dont la représentation dans le plan  $(z, V)$  est nécessairement décrite dans le sens des altitudes croissantes. Si le poids de la fusée est faible comparé à la poussée, cette trajectoire peut devenir verticale puis perdre son sens physique. A ce moment on peut en inférer que la meilleure trajectoire reste une montée à la verticale. Si l'on tient compte de la variation du coefficient de traînée  $R$  avec le nombre de Mach  $V/a(z)$  (où  $a(z)$  est la célérité du son) et le nombre de Reynolds  $VI/\nu(z)$  (où  $I$  est une dimension caractéristique de l'engin et  $\nu(z)$  la viscosité cinématique) la courbe singulière doit être calculée à partir de la relation (13) par tâtonnements mais les conclusions sont qualitativement conservées.

## 2.2 Les trajectoires extrémales.

La trajectoire représentée par la courbe singulière ne passe qu'exceptionnellement par les points terminaux donnés. Le problème de la trajectoire extrémale joignant deux points quelconques du plan représentatif reste donc entier. On peut soupçonner que l'élimination de la variable  $\sin \theta$ , dont les valeurs réelles ne couvrent qu'un intervalle limité, conduit à masquer l'existence d'autres branches d'extrémales que la courbe singulière. Ces autres branches ne peuvent d'ailleurs correspondre qu'aux valeurs limites elles-mêmes  $\sin \theta = \pm 1$ , c'est-à-dire les trajectoires verticales ascendantes ou descendantes.

Une confirmation de cette intuition peut être obtenue en formulant un autre principe variationnel pour le minimum de consommation, où la variable  $\sin \theta$  est conservée et sa variation rendue indépendante à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange. Un tel principe a été construit par CICALA et MIELE<sup>1</sup> dans le cas d'une masse totale constante (effet de la consommation négligeable) et sa généralisation au cas d'une masse variable est aisée. On trouve effectivement qu'une autre famille d'extrémales est fournie par la condition  $\cos \theta = 0$ . On aboutit à la même conclusion par des considérations basées sur la variation seconde de l'équation (9)<sup>2</sup>.

Le principe de la démonstration qui suit est dû à MIELE<sup>3</sup>, qui l'avait déjà appliqué antérieurement au cas d'un aérodyne de masse constante<sup>4</sup>.

Considérons (fig. 3) un point initial 1 situé par exemple au-dessus de la courbe singulière. Partant

de ce point avec une masse initiale déterminée on peut rejoindre la courbe singulière en 1' au moyen d'un segment représentant une montée à la verticale. Parcourant ensuite un segment de la courbe singulière on peut, suivant la position du point 2, reprendre soit une montée à la verticale soit un piqué à la verticale. Par suite de la variation continue de la masse totale, l'endroit où il faut quitter la courbe singulière pour atteindre le point 2 est à déterminer par tâtonnements. Nous devons montrer que cette association de segments constitue la trajectoire extrémale.

Notons immédiatement que par la nature des choses il n'est pas possible d'atteindre un point 2 situé en-dessous du segment représentant une montée à la verticale issue de 1. Une telle trajectoire sera donc l'extrémale pour un gain d'altitude spécifié avec vitesse initiale donnée et vitesse terminale minimum. D'autre part si les points 1 et 2 sont très rapprochés la trajectoire extrémale peut ne pas comporter de segment intermédiaire de courbe singulière.

Soit (fig 3) une trajectoire de comparaison physiquement possible entre les points donnés. Soit  $M_2$  la masse terminale obtenue le long de l'extrémale 11'2'2

$$\ln \frac{M_1}{M_2} = \int_{11'}^{2'2} A dz + B dV$$

Soit  $M_2^*$  la masse terminale de la trajectoire de comparaison

$$\ln \frac{M_1}{M_2^*} = \int_C A dz + B dV$$

Soustrayant la première relation de la seconde

$$\ln \frac{M_2}{M_2^*} = \int A dz + B dV = \iint (B_z - A_v) dz dV$$

où l'intégrale curviligne est décrite sur le contour fermé obtenu en cheminant de 1 à 2 suivant le chemin de comparaison avec retour le long du chemin extrémal. La transformation en intégrale double par le théorème de Stokes permet de se rendre compte du caractère essentiellement positif du résultat. En effet les boucles décrites sous la courbe singulière, où la quantité intégrée est positive, le sont dans le sens positif. Celles décrites au-dessus de la courbe singulière le sont dans le sens négatif, mais comme la quantité intégrée y est aussi négative,

la contribution à l'intégrale double reste positive.

Par conséquent

$$\ln \frac{M_2}{M_2^*} > 0 \quad M_2^* < M_2$$

et la consommation le long du chemin de comparaison est toujours supérieure. Comme telle la démonstration de MIELE est incomplète. Elle n'établit pas que la nature des segments de raccord est précisément telle qu'une trajectoire de comparaison ne peut les traverser pour former des boucles à contribution négative. Ce fait, presque évident pour le cas d'une masse totale constante, devient d'une vérification plus délicate quand la masse est variable. En effet les limites d'orientation d'un élément de trajectoire ( $dz, dV$ ) physiquement réalisable ( $-1 \leq \sin \theta \leq +1, dt > 0$ ) dépendent de cette masse.

Cette démonstration complémentaire qui est facilitée par un changement, par ailleurs intéressant, du plan de représentation est présentée en Appendice.

### 2.3 Relation entre la courbe singulière et la théorie de la meilleure vitesse ascensionnelle.

La courbe singulière possède une interprétation énergétique intéressante qui la relie à la théorie classique quasi stationnaire de la meilleure vitesse de montée.

Des considérations énergétiques très parallèles ont d'ailleurs amené la découverte d'une courbe singulière analogue dans les problèmes brachistochrones ou à consommation minimum des avions de masse constante par plusieurs auteurs<sup>5,6</sup>. Formons une équation d'énergie en éliminant l'angle d'élévation entre les équations (1) et (5).

$$\frac{de}{dt} = \frac{V(T-D)}{M} \quad (18)$$

où

$$e = \frac{1}{2} V^2 + gz \quad (19)$$

est l'énergie spécifique totale.

A une altitude et pour une masse totale donnée la vitesse de vol pour laquelle l'accroissement instan-

tané de l'énergie spécifique totale est maximum s'obtient par la condition

$$\partial/\partial V [V(T-D)] = 0 \quad (20)$$

Si le coefficient de traînée de la formule (14) peut être considéré comme indépendant de la vitesse il vient

$$T = 3D$$

et cette vitesse de vol est alors celle donnée par la formule (16). Si les variations de  $R$  avec le nombre de Mach et le nombre de Reynolds sont prises en considération la condition (20) doit de nouveau être résolue par tâtonnements pour déterminer la valeur exacte de  $V_e$ .

Il importe de savoir dans quelles proportions l'accroissement d'énergie spécifique optimum se répartit entre la forme potentielle et la forme cinétique. La fraction dévolue à l'énergie potentielle

$$f = \frac{g dz}{V_e dV_e + g dz} = \left(1 + \frac{V_e V_e'}{g}\right)^{-1}$$

est facile à calculer dans l'hypothèse d'un coefficient  $R$  constant; il vient alors en utilisant (17)

$$f = \frac{1}{1 + 1/2 (V_e/V_a^*)^2} \quad (21)$$

où

$$V_a^* = \sqrt{\frac{g}{(T'/T) - (\rho'/\rho)}} \quad (22)$$

$V_a^*$  est une vitesse de référence qui ne dépend que de la loi de variation de la densité atmosphérique et de la loi de variation de la poussée en fonction de l'altitude. Par conséquent :

1°) Si  $V_e \ll V_a^*$  la presque totalité de l'excédent de puissance utile est convertie en énergie potentielle. La vitesse de vol  $V_e$  est alors réellement une meilleure vitesse de montée. Le principe (20) qui sert à la calculer est d'ailleurs classique dans la théorie des performances ascensionnelles des aérodynes. Dans cette théorie il a été jusque fort récemment d'usage de considérer ce vol de montée comme stabilisé. Ceci revient à poser d'emblée un problème quasi-stationnaire où l'on fait a priori  $dV/dt = 0$ , ou encore à considérer la montée dans une atmosphère à densité constante ce qui fait à

la fois  $T' = 0$  et  $\rho' = 0$  et rend la vitesse de référence  $V_a^*$  infinie.

Notons que dans cette théorie l'application du principe (20) est encore compliquée du fait que, contrairement au cas du moteur fusée, les groupes moto-propulseurs utilisant l'air atmosphérique pour la combustion et la réaction produisent une poussée qui peut dépendre de la vitesse de vol.

2°) Si  $V_e$  est du même ordre de grandeur que  $V_a^*$  une grande partie de la puissance est convertie en énergie cinétique et  $V_e$  n'est plus une meilleure vitesse de montée. Les limites de la théorie quasi-stationnaire sont alors clairement dépassées. Ceci explique pourquoi le problème de la montée optimale avec énergie cinétique terminale limitée fait intervenir une autre vitesse optimale  $V_s$ .

La différence entre les deux théories dépend quantitativement de la vitesse de référence  $V_a^*$ . Si la poussée se maintient constante cette vitesse ne dépend plus que du type d'atmosphère et sera alors notée simplement par  $V_a$ . Pour l'atmosphère type de la figure 1, par exemple, cette vitesse est légèrement inférieure à toute altitude à la célérité du son. La vitesse de référence  $V_a^*$  peut devenir beaucoup plus grande et les limites de la théorie quasi-stationnaire étendues d'autant quand la poussée décroît avec l'altitude. On peut s'attendre dans ce cas à ce que les vitesses  $V_e$  et  $V_s$  deviennent sensiblement égales. En effet il résulte de la formule (15) par exemple que

$$V_s = V_e \quad \text{si} \quad \frac{m'}{m} = \frac{\rho'}{\rho} - 3 \frac{c'}{c}$$

$$\text{ou} \quad \frac{T'}{T} = \frac{\rho'}{\rho} - 2 \frac{c'}{c}$$

La vitesse de référence est alors imaginaire si  $c'/c > 0$ .

Cependant dans les conditions normales indiquées lors de la discussion de la solution (15) elle est toujours réelle.

Dans le cas particulier où  $c' = 0$ , la formule (15) se met sous la forme particulièrement simple

$$V_s^2 = \frac{2V_e^2}{1 + \sqrt{1 + 4/3 (V_e/V_a^*)^2}} \quad (23)$$

qui montre bien que  $V_s$  tend vers  $V_e$  quand le rapport  $V_e/V_a^*$  tend vers zéro.

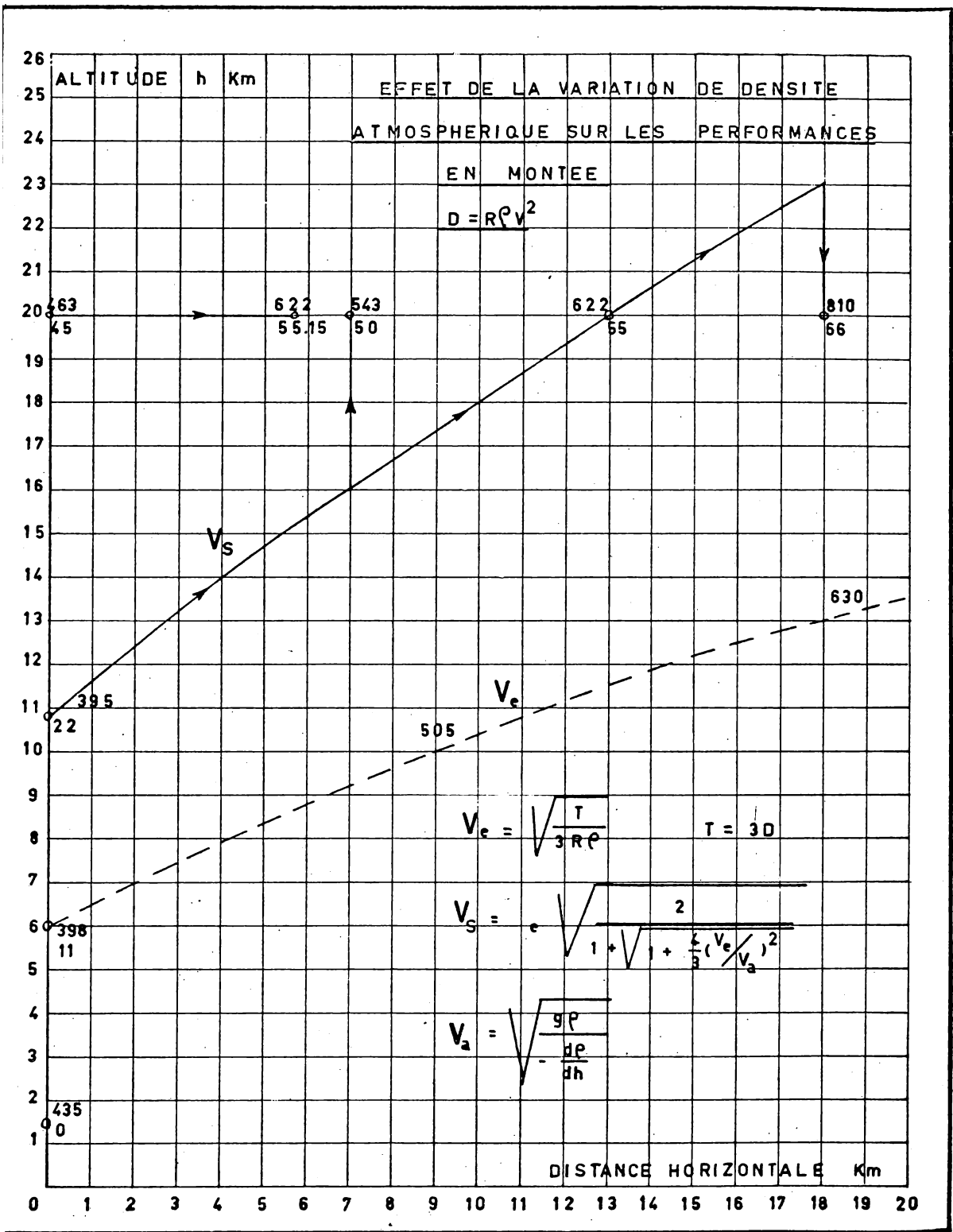


Fig. 4

Constantes :  $gM = \text{kg/sec.}$   
 $c = 1.962 \text{ m/sec.}$   
 $R = 0.025 \text{ m}^2$

Chiffres supérieurs : vitesse en m/sec.

Données initiales :  $gM = 680 \text{ kg}$   
 $z = 1.9 \text{ km}$   
 $V = 435 \text{ m/sec.}$

Chiffres inférieurs : temps écoulé en secondes.



Cependant la comparaison la plus révélatrice entre les conceptions conduisant aux deux espèces de vitesses optimales est obtenue comme suit. Mettons l'équation d'énergie (18) sous la forme

$$\frac{de}{m dt} = \frac{V(T-D)}{m M} = \frac{1}{M \phi} \quad (24)$$

où la fonction  $\phi$  est définie par (13). Elle exprime alors l'accroissement d'énergie spécifique par unité de consommation à l'altitude considérée et non plus par unité de temps. Ceci est dans un rapport plus logique avec nos considérations de minimum de consommation mais ne change pas le calcul d'une vitesse optimale  $V_e$  car le débit ne dépend que de l'altitude. Le principe

$$\begin{aligned} \partial/\partial V (1/\phi) &= 0 \\ \text{ou encore} \quad \frac{\partial \phi(z, V)}{\partial V} &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

est donc entièrement équivalent à l'équation (20).

Supposons maintenant qu'au moyen de la définition (19) l'altitude soit éliminée dans  $\phi$  qui devient ainsi une fonction  $\phi(V, e)$ . La dérivée partielle de cette nouvelle fonction par rapport à  $V$  ne donne plus le même résultat que (25). Mais, comme dans cette dérivée partielle  $e$  est maintenu constant

$$de = V dV + g dz = 0$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(V, e)}{\partial V} &= \frac{\partial \phi(z, V)}{\partial V} + \frac{\partial \phi(z, V)}{\partial z} \frac{dz}{dV} \\ &= \frac{\partial \phi(z, V)}{\partial V} - \frac{V}{g} \frac{\partial \phi(z, V)}{\partial z} \end{aligned}$$

Une comparaison avec l'équation (12) montre alors que le calcul de  $V_e$  répond au principe aussi simple que (25)

$$\frac{\partial \phi(V, e)}{\partial V} = 0 \quad (26)$$

En conclusion de cette analyse la figure 4 illustre numériquement quelques trajectoires extrémales et trajectoires de comparaison dans l'atmosphère type de la figure 1 pour un engin dont les caractéristiques sont indiquées.

### 3. — OPTIMISATION DU DEBIT

#### 3.1 Le problème variationnel.

Nous recherchons ici le meilleur programme de consommation du propergol et la meilleure trajectoire pour passer d'une altitude  $z_1$  et d'une vitesse  $V_1$  à une altitude  $z_2$  et une vitesse  $V_2$  avec un minimum de consommation totale.

La réalisation pratique du programme peut présenter des difficultés insurmontables mais les indications fournies n'en seront pas moins précieuses pour la conception d'un engin efficace.

En principe le problème est résolu en annulant la variation de la fonctionnelle (9) où les fonctions  $V(z)$  et  $m(z)$  seront variées indépendamment.

Une des équations d'Euler de ce problème est connue, c'est l'équation (11) du problème précédent. L'autre, résultant de la variation du débit et retransformée par l'équation (6) est

$$A_m + B_m V' = \frac{-D}{mc - D} \frac{1}{M V \sin \theta} = 0$$

Il est clair qu'elle ne peut être satisfaite à moins d'annuler la vitesse ou de rendre le débit infini. Ce résultat semble marquer une impossibilité à trancher par un compromis la contradiction entre l'exigence d'un allègement rapide (débit infini) et celle d'une dissipation minimum d'énergie par la traînée (vitesse nulle). La solution impliquant une vitesse nulle est évidemment à rejeter. D'autre part pour un débit croissant et une masse totale donnée on a vu que la trajectoire singulière de l'équation (11) se redresse progressivement pour devenir verticale puis imaginaire. Il est logique d'en inférer que la trajectoire physique correspondant à l'optimisation du débit est verticale. Mais alors l'angle d'élévation conservant sa valeur limite de  $90^\circ$  n'est plus une variable et introduit une liaison différentielle supplémentaire entre les fonctions  $m(z)$  et  $V(z)$ . Ainsi les équations d'Euler obtenues en considérant les variations de ces fonctions comme indépendantes sont à rejeter. En d'autres termes l'élimination de l'angle d'élévation dans l'expression de la fonctionnelle nous a de nouveau conduit à une situation physiquement imaginaire.

La conservation de l'angle d'élévation dans une fonctionnelle avec multiplicateur de Lagrange du type déjà signalé confirme cette argumentation. TSIEN et EVANS<sup>7</sup> ont abordé directement le calcul

pour une trajectoire verticale en conservant le temps comme variable indépendante ce qui alourdit considérablement le calcul. La méthode suivante conduit rapidement au résultat correct. Après l'élimination du temps conduisant aux équations (6) et (7), gardons  $\sin\theta$  comme variable mais éliminons plutôt  $m(z)$  ce qui livre l'équation différentielle du premier ordre en  $M$

$$cV \sin\theta M' + (VV' + g) \sin\theta M = -R\rho V^2 \quad (27)$$

En résolvant cette équation avec la condition aux limites  $M = M_1$  pour  $z = z_1$  nous pouvons obtenir  $M_2$  sous forme d'une fonctionnelle des deux variables  $V(z)$  et  $\theta(z)$  indépendantes. Cette fois les solutions extrémales obtenues en variant ces fonctions pourront toujours être interprétées, la fonction éliminée pouvant prendre toutes les valeurs réelles. Seules les solutions qui conduiraient à des valeurs négatives du débit seront à rejeter comme physiquement irréalisables. Il est plus simple d'inverser les opérations en prenant d'abord les variations sur (27) puis en intégrant l'équation différentielle en  $\delta M$  qui en résulte.

$$(\delta M)' + \frac{V' + g/V}{c} \delta M = \delta S \quad (28)$$

où, nous bornant au cas d'un coefficient  $R$  indépendant de  $V$

$$\begin{aligned} \delta S = & \left( \frac{gM}{cV^2} - \frac{R\rho}{c \sin\theta} \right) \delta V - \frac{M}{c} (\delta V)' \\ & + \frac{R\rho V}{c \sin^2\theta} \cos\theta \delta\theta \end{aligned} \quad (29)$$

L'intégration de (28) avec la condition  $\delta M = 0$  pour  $z = z_1$ , donne

$$\delta M_2 = \frac{1}{E(V, V', z_2)} \int_1^{z_2} E(V, V', z) \delta S dz$$

où

$$E(V, V', z) = \exp \int_1^z (V' + g/V) dz/c$$

Substituons (29) et effectuons l'intégration par parties requise par la présence de  $\delta V'$ . Le coefficient de  $\delta V$  qui retourne sous le signe intégral se laisse transformer comme suit au moyen de (27)

$$\begin{aligned} [E(V, V', z) M/c]' &= E [(V' + g/V) M/c^2 + (M/c)'] \\ &= -E \left[ \frac{R\rho V^2}{c^2 V \sin\theta} + M \frac{c'}{c^2} \right] \end{aligned}$$

Il en résulte que l'annulation de  $\delta M_2$ , exige l'annulation de termes aux limites

$$\left[ \frac{E(V, V', z)}{E(V, V', z_2)} \frac{M}{c} \delta V \right]_1^{z_2} = 0$$

et fournit aussi les deux équations d'Euler

$$(g/V^2 - c'/c) M = (R\rho/\sin\theta) (1 + V/c) \quad (30)$$

$$\frac{R\rho V}{c \sin^2\theta} \cos\theta = 0 \quad (31)$$

La première est obtenue par variation de  $V(z)$ , la deuxième par variation de  $\theta(z)$ . Le terme aux limites disparaît si, comme le problème a été posé, les vitesses initiale et terminale sont imposées. La deuxième équation d'Euler est vérifiée par la solution  $\cos\theta = 0$ ; il s'agit donc bien de trajectoires verticales. D'autre part l'équation (30) montre que dans le cas normal où

$$c'/c < g/V^2$$

il ne peut s'agir que d'une trajectoire verticale ascendante. Les équations (27) et (30) où l'on fait  $\sin\theta = 1$  forment alors le système différentiel qui gouverne les fonctions  $M(z)$  et  $V(z)$ .

$$cVM' + (VV' + g) M + R\rho V^2 = 0 \quad (27')$$

$$(g/V^2 - c'/c) M = R\rho (1 + V/c) \quad (30')$$

La loi du débit peut être déduite ultérieurement de l'équation (7). En éliminant  $M$  entre (27') et (30') il vient une équation différentielle pour le profil des vitesses. Cette équation est du premier ordre seulement. Observons alors que la masse initiale étant donnée à l'altitude initiale l'équation (30') impose une vitesse initiale. Intégrant l'équation différentielle du profil des vitesses avec cette valeur initiale nous trouvons une vitesse terminale déterminée. Il semble par conséquent que nous ne sommes maîtres ni de la vitesse initiale ni de la vitesse terminale ce qui contredit nos hypothèses. Le problème variationnel est de nouveau singulier.

### 3.2 Les impulsions terminales.

Un peu de réflexion conduit à la conclusion que la solution de la difficulté consiste à prévoir des débits impulsifs aux extrémités de la trajectoire. Ils correspondent à l'impératif d'un allègement rapide, limité pourtant quant à la vitesse impartie par

l'augmentation de traînée et donc de dissipation qui en résulte dans la phase continue.

Faisant  $dz = 0$  dans l'équation (27') on trouve une équation

$$dM/M + dV/c = 0$$

exprimant la conservation de la quantité de mouvement dans un système galiléen par rapport auquel la vitesse de la fusée est momentanément nulle. Il en résulte par intégration pour le changement fini de masse dans une impulsion qui fait passer la vitesse de  $V_0$  à  $V_1$

$$M_0 = M_1 \exp\left(\frac{V_1 - V_0}{c}\right) \quad (32)$$

Considérons maintenant  $M_0$  et  $V_0$  comme les données initiales du problème. L'intensité de l'impulsion initiale requise est obtenue en tirant  $M_1$  et  $V_1$  de (32) et de l'équation (30') supposée satisfaite immédiatement après l'impulsion (c'est-à-dire pour  $z = z_1, M = M_1$  et  $V = V_1$ ).

En particulier l'élimination de  $M_1$  conduit à une équation transcendante à résoudre pour le calcul de  $V_1$ .

Après l'impulsion initiale, la fusée prend un mouvement continu gouverné par les équation d'Euler (27') et (30').

Pour des variations compliquées de  $c$  et de  $g$  ces équations doivent être intégrées numériquement. Dans le cas particulier où la vitesse d'éjection est constante, l'équation du profil des vitesses obtenue par l'élimination de la masse est assez simple. Après l'introduction commode des variables réduites

$$\omega = V/c \quad \text{et} \quad \zeta = (g/c^2) z$$

elle prend la forme

$$(2 + 4\omega + \omega^2)\omega^0 + 2 + \omega + \omega(1 + \omega)\rho^0/\rho = 0 \quad (33)$$

où le nouveau symbole en exposant indique maintenant la dérivation par rapport à l'altitude réduite.

Dans une atmosphère exponentielle, comme l'atmosphère type au-dessus de 11 000 mètres

$$\rho_0/\rho = -1/\beta$$

et l'intégration complète est possible par séparation des variables

$$\begin{aligned} 1/\beta (\zeta - \zeta_1) &= \omega - \omega_1 \\ + \frac{\gamma}{2} \ln \frac{2\omega + 1 - \beta - \gamma}{2\omega + 1 - \beta + \gamma} \frac{2\omega_1 + 1 - \beta + \gamma}{2\omega_1 + 1 - \beta - \gamma} \\ + \frac{3 + \beta}{2} \ln \frac{\omega^2 + (1 - \beta)\omega - 2\beta}{\omega_1^2 + (1 - \beta)\omega_1 - 2\beta} \end{aligned} \quad (34)$$

où  $\gamma = \sqrt{(1 - \beta)^2 + 8\beta}$

Ce résultat concorde avec celui de Tsien et Evans<sup>(\*)</sup>. Pour le calcul de la poussée correspondante une relation intéressante s'obtient en partant de l'équation (6) soit ici

$$T - D = Mg(1 + \omega\omega^0)$$

et en éliminant la masse au moyen de la forme particulière

$$gM = D(1 + \omega) \quad (35)$$

que prend l'équation (30'); il vient

$$T/D = 2 + \omega + (1 + \omega)\omega\omega^0$$

Éliminant encore la dérivée de la vitesse réduite par (33) le rapport de la poussée à la traînée est exprimé uniquement comme une fonction de la vitesse et de la variation relative de densité

$$T/D = \frac{(2 + \omega)(2 + 3\omega) - \omega^2(1 + \omega)^2 \rho^0/\rho}{2 + 4\omega + \omega^2} \quad (36)$$

Une fois l'équation (33) intégrée le calcul de la poussée requise en fonction de l'altitude n'offre donc plus de difficulté; la masse de la fusée se déduit pour chaque altitude de (35).

Une nouvelle impulsion peut porter une vitesse terminale  $V_2$  trop faible à une valeur  $V_3$  désirée. Cette fois l'accroissement de vitesse étant connu le changement de masse se calcule sans tâtonnements par la formule

$$M_3 = M_2 \exp\left(-\frac{V_3 - V_2}{c}\right)$$

(\*) Loc. Cit. formule (31). Deux chiffres différents chez Tsien et Evans (1 où nous avons 3, et 4 où nous avons 8) sont vraisemblablement des erreurs d'impression.

Pour réduire au contraire une vitesse terminale trop élevée on ne peut songer à utiliser une impulsion négative qui comporterait une récupération de masse. La solution consiste à couper la propulsion à partir d'une certaine altitude, la décélération due à la pesanteur amenant la fusée dans les conditions terminales requises. La détermination de cette altitude se fait par tâtonnements. La masse étant constante après l'arrêt du propulseur l'équation du profil des vitesses pendant cette phase répond à l'équation

$$M_2(VV' + g) + R\rho V^2 = 0$$

et en se référant à une vitesse d'éjection déterminée

$$M_2 g (1 + \omega \omega^0) + (R\rho c^2) \omega^2 = 0$$

Il peut arriver que les performances terminales demandées soient si modestes qu'on puisse les réaliser avec une seule impulsion initiale inférieure ou égale à celle requise pour le début de la phase continue. Celle-ci est alors absente.

Terminons par une brève discussion des résultats obtenus dans le cas simplifié où la vitesse d'éjection est constante et l'atmosphère exponentielle.

L'équation (33) montre que, suivant sa valeur au début de la phase continue, la vitesse va croître ou décroître en fonction de l'altitude. Pour une valeur spéciale qu'il sera commode de distinguer sous le nom de « vitesse caractéristique » et qui est

$$\omega^* = \frac{1}{2}(-1 + \beta + \gamma) \quad (37)$$

elle se maintient constant. Le rapport de la poussée à la traînée, calculé par la formule (36), reste alors aussi constant et égal à

$$T/D = 2 + \omega^* \quad (37')$$

Dans ces conditions la poussée devrait diminuer comme la densité atmosphérique. En introduisant la vitesse de référence.

$$V_a = \sqrt{-g\rho/\rho'}$$

déjà utilisée dans le problème précédent et qui caractérise le gradient de la densité atmosphérique, on peut présenter le coefficient  $\beta$  sous une forme qui fait apparaître sa dépendance vis-à-vis de la vitesse d'éjection des produits de combustion

$$\beta = (V_a/c)^2 \quad (38)$$

Il prend en général une valeur si faible (rappelons que la vitesse de référence est voisine de la

célérité du son) qu'on peut avec une très bonne approximation remplacer (37) par

$$\omega^* = 2\beta$$

Par conséquent la vitesse caractéristique

$$V^* = c\omega^* = 2V_a(V_a/c)$$

est d'autant plus petite que le moteur fusée a des performances élevées. La combinaison de poids de l'engin, vitesse d'éjection, densité à l'altitude considérée et coefficient de traînée requise par l'équation (35) pour le vol à la vitesse caractéristique devient

$$\frac{g M_1}{4 R \rho_1 V_a^2} (c/V_a)^2 = 1 + 2 (V_a/c)^2 \cong 1 \quad (39)$$

Le premier membre représente ce qu'on peut appeler le « paramètre de performance » de l'engin. Il croît avec l'augmentation de la masse et de la vitesse d'éjection et avec la diminution du coefficient de traînée. Il est en général considérablement supérieur à l'unité si bien que la vitesse en début de phase continue est nettement supérieure à la vitesse caractéristique. Dans ces conditions l'équation (33) montre que cette vitesse va encore croître avec l'altitude. Il est même possible au moyen de (33) et de sa dérivée de voir que l'accélération sera croissante. La formule (36) montre que le rapport de la poussée à la traînée croît également; à partir d'une certaine vitesse la poussée optimale elle-même peut alors devenir croissante.

Pour des valeurs élevées du paramètre de performance l'impulsion initiale requise pour partir d'une vitesse nulle devient considérable. S'il est impossible de la réaliser en pratique on voit cependant l'intérêt de fusées d'appoint (boosters) capables de fournir pendant un certain temps une accélération aussi grande que la structure de l'engin ou son instrumentation puisse la supporter.

## Appendice.

*La représentation des trajectoires dans le plan des énergies spécifiques cinétique et totale.*

Dans un plan représentatif ( $e, \frac{1}{2}V^2$ ) recherchons les directions admissibles des trajectoires. Par l'équation (18)

$$de = V \frac{T-D}{M} dt$$

D'autre part, par la définition (9) de  $e$  et l'équation (5)

$$d \frac{1}{2} V^2 = V \left[ \frac{T - D}{M} - g \sin \theta \right] dt$$

Donnant aux seconds membres la même valeur positive à  $dt$  et faisant varier  $\sin \theta$  entre  $-1$  et  $+1$  on obtient les orientations admissibles représentées à la figure 5. Le vol horizontal est évidemment tou-

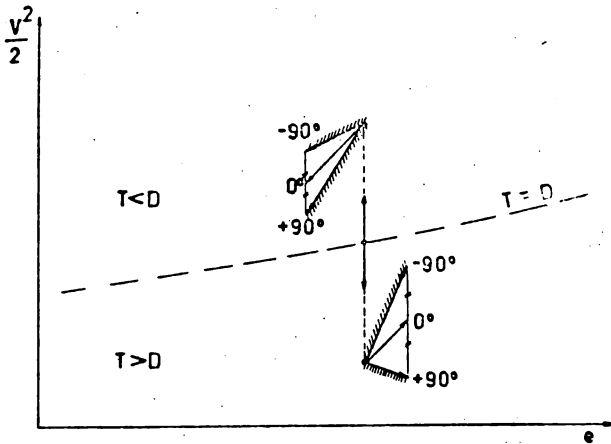


Fig. 5

jours représenté par un segment à  $45^\circ$ . Le point important à noter est qu'une diminution de la masse  $M$  en un point de la région  $T > D$  a pour effet de réduire l'ouverture du secteur admissible de part et d'autre de l'orientation correspondant au vol horizontal.

La trajectoire singulière étant une montée est représentée (fig. 6) par une courbe dont la tangente fait avec l'axe des  $e$  un angle toujours inférieur à  $45^\circ$ . Cette courbe est définie par l'équation (26) et partage le plan en une région inférieure, où le premier membre est négatif, et supérieure où il est positif. Or, dans le passage aux nouvelles variables la relation (9) devient

$$\ln \frac{M_1}{M_2} = \int_1^2 \phi(V, e) de$$

et, pour la comparaison d'un chemin quelconque avec le chemin extrémal

$$\ln \frac{M_2}{M_2^*} = - \iint_V \frac{1}{V} \frac{\partial \phi(V, e)}{\partial V} de V dV$$

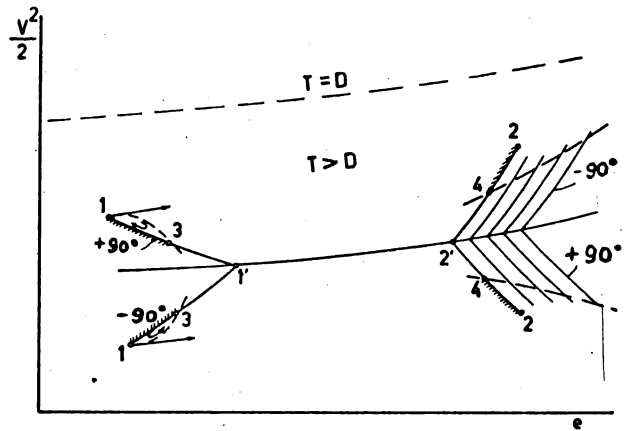


Fig. 6

La recherche de la trajectoire extrémale s'établit donc par une démonstration analogue à celle de la section 2.2. Pour l'achever il faut prouver qu'un chemin de comparaison ne peut former des boucles à contribution négative.

1°) En 1°) l'orientation de tout chemin débutant avec la même masse initiale doit appartenir au secteur admissible et ne peut donc s'écarter des orientations limites, constituées par les segments de verticales, que dans le sens indiqué à la figure 6. Un tel chemin ne peut traverser le segment 11' en un point 3 de celui-ci. En effet la boucle qui serait formée étant à contribution positive la masse de comparaison  $M_3^* < M_3$ . Dans ces conditions le secteur des orientations admissibles est refermé et la direction d'aboutissement en 3 est interdite;

2°) Il résulte du raisonnement précédent que sur tout chemin de comparaison aboutissant en un point 4 d'un segment 2'2 la masse  $M_4^* < M_4$ . Il est alors impossible à un tel chemin de rejoindre un point 2. En effet, comme le secteur des orientations est refermé, le chemin doit nécessairement traverser le segment 2'2. Considérons alors les segments de verticales, analogues à 2'2, obtenus en quittant la courbe singulière en différents points situés après 2'. En supposant que le chemin de comparaison puisse retourner vers un point 2, il sera situé entièrement à gauche d'un dernier de ces segments, issu de 4', avec lequel il a encore un point 5 commun. Mais alors il est visible que  $M_5^* > M_5$ , où  $M_5$  est la masse obtenue en cheminant par 11'2'4'5. Par conséquent toutes les orientations admissibles en 5 traversent le segment 4'5 de gauche à droite. Ceci est contraire à l'hypothèse suivant laquelle ce chemin pourrait être situé entièrement à sa gauche.

## REFERENCES

1. P. CICALA and A. MIELE, *Brachistochronic Manœuvres of a Constant Mass Aircraft in a Vertical Plane*. — Journal of the Aeronautical Sciences, vol. 22, April 1955, pp. 286-288.
2. B. FRAEIJIS de VEUBEKE, *Etude Préliminaire des Conditions d'Interception par un Engin Téléguidé*. — Rapport non-publié, janvier 1955.
3. A. MIELE, *Optimum Climbing Technique for a Rocket Powered Aircraft*. — Journal of the American Rocket Society, vol. 25, August 1955, pp. 385-391.
4. A. MIELE, *Soluzioni Generali di Problemi di Ottimo in Volo Non-Stazionario*. — L'Aerotecnica, vol. 32, n° 4, 1952, pp. 206-219.
5. K. L. LUSH, *A Review of the Problem of Choosing a Climb Technique with Proposals for a New Climb Technique for High Performance Aircraft*. — Aeronautical Research Council Rep. Mem. 2557, 1951.
6. E. S. RUTOWSKI, *Energy Approach to the General Aircraft Performance Problem*. — Journal of the Aeronautical Sciences, vol. 21, March 1954, pp. 187-195.
7. H. S. TSIEN and Robert C. EVANS, *Optimum Thrust Programming for a Sounding Rocket*. — Journal of the American Rocket Society, vol. 21, September 1951, pp. 99-104.

---

# Quelques remarques sur le phénomène de séparation dans les tuyères supersoniques surdétendues

par Jean VANDENKERCKHOVE

Ing. A.I.Br M.S. Cal Tech.

Assistant à l'Institut d'Aéronautique de l'Université

La présente note a pour but la mise en lumière de l'existence de certains phénomènes de séparation avec ondes de choc obliques dans les tuyères convergentes-divergentes surdétendues. Ces phénomènes ne sont pas prévisibles par la théorie unidimensionnelle classique. Du point de vue théorique ils doivent être abordés par l'étude de la stabilité de la couche limite. Il ne semble pas cependant qu'une théorie entièrement satisfaisante en ait déjà été fournie.

Nous nous sommes limité ici à l'étude des résultats expérimentaux qui ont été publiés sur cette question. Ces derniers ne couvrent pas, comme nous le verrons, l'entière de la gamme des désadaptations possibles mais ils suffisent amplement pour rendre possible, pour une tuyère donnée, la prédiction de la désadaptation maximum admissible si l'on veut éviter l'apparition de la séparation avec son effet défavorable sur le coefficient de poussée de la tuyère.

C'est d'ailleurs en vue de ce résultat pratique important pour l'étude des fusées que les travaux que nous allons passer en revue ont été entrepris.

\* \* \*

Il est depuis longtemps connu que lorsqu'une tuyère convergente-divergente est désadaptée il n'est plus possible d'appliquer en tous les points les lois qui régissent les écoulements isentropiques qui ne sont elles-mêmes que de bonnes approximations de l'évolution réelle.

Plus précisément si la pression ambiante à la sortie de la tuyère diffère de celle qui régnerait dans sa section terminale si celle-ci était parfaitement adaptée, le jet doit obligatoirement revenir à la pression ambiante et il le fait au travers d'un système d'ondes de choc pouvant prendre des configurations diverses. Certaines de ces configurations, qui font l'objet des présentes remarques, sont en-