

Méthodes variationnelles et performances optimales en aéronautique.

Par Baudouin FRAEYS de VEUBEKE (*).

1. ÉQUATIONS DE BASE DE LA THÉORIE DES PERFORMANCES.

Des problèmes^{var} variationnels sont posés chaque fois qu'il est possible d'exercer une action de pilotage sur les degrés de liberté dont dispose l'évolution d'un système et que l'on se propose d'en retirer les meilleures performances.

C'est en particulier le cas des avions ou des engins téléguidés où le terme « pilotage » s'applique dans son sens originel.

Dans le cadre d'une formulation générale de ces problèmes nous nous proposons d'examiner ici le cas d'un engin propulsé dans un champ^{grav} de gravitation uniforme et subissant des actions d'origine aérodynamique.

La trajectoire sera supposée contenue dans un plan défini par un axe horizontal Ox et un axe vertical Oz dirigé dans le sens opposé à l'accélération g de la pesanteur. L'atmosphère non-perturbée par le passage de l'engin sera supposée en équilibre ; ses caractéristiques et en particulier sa masse spécifique ρ seront donc uniquement fonction de l'altitude z .

Soient M la masse (variable) de l'engin, V la vitesse de son centre de gravité, inclinée d'un angle θ au-dessus de l'horizontale.

En dehors du poids Mg l'engin est soumis à une force portante L , perpendiculaire à la vitesse, à une force de traînée D , opposée à la vitesse et fonction connue de la vitesse, de l'altitude et du carré de la portance

$$D = D(V, z, L^2)$$

(*) Conférence faite le 24 novembre 1956.

enfin à une force de propulsion T agissant (par hypothèse) dans le sens de la vitesse. C'est une fonction connue de la vitesse, de l'altitude et du débit massique m de combustible :

$$T = T(V, z, m)$$

Les équations du mouvement du centre de gravité suivant la tangente et la normale à la trajectoire sont respectivement

$$M \frac{dV}{dt} = T - D - Mg \sin \theta \quad (1)$$

$$MV \frac{d\theta}{dt} = L - Mg \cos \theta \quad (2)$$

L'altitude est liée à la vitesse et à l'angle d'élévation par

$$dz/dt = V \sin \theta \quad (3)$$

tandis que la masse de l'engin varie en raison de la consommation du combustible

$$dM/dt = -m. \quad (4)$$

Au total les six fonctions du temps (M , V , θ , z , L , m) sont liées par les quatre équations différentielles (1) à (4) et par conséquent deux degrés de liberté subsistent pour le pilotage. Ce sont explicitement : le réglage de la poussée, obtenu par variations commandées du débit, et le réglage de la force transversale, obtenu par exemple par des modifications d'incidence aérodynamique résultant elles-mêmes du braquage approprié de certaines gouvernes.

On peut donc appeler L et m les variables de pilotage.

La recherche de certaines performances optimales peut être formulée comme la recherche du minimum d'une fonctionnelle obtenue par élimination de variables dans le système d'équations (1) à (4). Cette méthode conduit souvent aux calculs les plus simples mais peut se heurter à de sérieuses difficultés d'interprétation en raison de la nature généralement singulière du problème variationnel (VII).

L'emploi de multiplicateurs de Lagrange est avantageux pour formuler la recherche des meilleures performances dans son ensemble comme un problème de Mayer du calcul des variations.

GARFINKEL (I) semble avoir inauguré la théorie des performances optimales, dans un cadre plus restreint, à partir d'une formulation équivalente, celle de Bolza.

CICALA (II, III, IV, V) a développé la théorie du problème actuel dans la formulation de Mayer jusqu'à la discussion des conditions suffisantes pour un minimum véritable (Legendre, Jacobi, Weierstrass).

Issue du même point de vue et développée indépendamment la méthode qui sera présentée ici ne diffère de celle de CICALA que par l'adoption d'une représentation paramétrique, le temps n'étant plus considéré comme variable indépendante.

Ceci permet non seulement d'incorporer les problèmes brachistochrones à la théorie générale et d'assurer une grande flexibilité au choix final de la meilleure variable indépendante mais semble parfois indispensable à la justification complète des trajectoires minimales.

En effet comme montrera la discussion du problème à minimum de consommation pour la fusée-sonde, une partie de la solution peut comporter un débit impulsif, c'est-à-dire la consommation d'une quantité finie de combustible en un temps nul.

Garder le temps comme variable indépendante exige alors des raccords comportant des discontinuités liées dans les variables M et V . En fait c'est l'intuition physique qui a permis de les inclure dans les premières analyses (VI, VII).

En représentation paramétrique le débit impulsif se présente comme une extrémale ordinaire étalée sur un intervalle fini de variation du paramètre, et raccordée de façon continue aux autres extrémales composant la trajectoire minimale.

De plus les conditions de transition donnent sur la nature de la solution des renseignements qui n'apparaîtraient pas autrement.

Nous esquisserons d'abord la théorie du problème de Mayer en représentation paramétrique avant de l'appliquer à notre cas.

2. LE PROBLÈME DE MAYER EN REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE.

BLISS (VIII) a montré que les problèmes de Bolza, de Mayer et de Lagrange peuvent être ramenés l'un et l'autre et possèdent donc le même degré de généralité.

Soient donc n variables y_i dont dépend la configuration d'un système. Une évolution du système sera décrite par la représentation paramétrique :

$$y_i = y_i(\sigma) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

où le paramètre σ croît de façon monotone entre des limites fixes.

La nature du système est représentée par un certain nombre de contraintes différentielles entre les variables

$$f_j(y_i, y_i^0) = 0 \quad (j = 1, 2 \dots m < n - 1) \quad (5)$$

$$\text{où} \quad y_i^0 = dy_i/d\sigma$$

De plus des conditions aux limites au nombre de p

$$g_k[y_i(\sigma_1), y_i(\sigma_2)] = 0 \quad (k = 1, 2 \dots p) \quad (6)$$

lient les valeurs des variables aux extrémités de la trajectoire.

On se propose de rechercher dans ces conditions les trajectoires qui rendent minimum une certaine fonction

$$K[y_i(\sigma_1), y_i(\sigma_2)]$$

de ces valeurs terminales.

Pour rendre les variations δy_i indépendantes formons à l'aide de multiplicateurs de Lagrange variables $\beta_j(\sigma)$ l'expression

$$F = \Sigma \beta_j f_j \quad (7)$$

et cherchons les conditions qui rendent stationnaire l'expression

$$I = K + \int_1^2 F d\sigma \quad (8)$$

L'annulation de la variation de I livre les équations d'Euler

$$[F]_{y_i} = - \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i^0} \right) + \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n) \quad (9)$$

$$[F]_{\beta_j} = f_j = 0 \quad (j = 1, 2 \dots m) \quad (5)$$

et la condition naturelle entre les variations aux limites

$$\Sigma_i \left[\frac{\partial K}{\partial y_i(\sigma_2)} + \left(\frac{\partial F}{\partial y_i^0} \right)_2 \right] \delta y_i(\sigma_2) + \Sigma_i \left[\frac{\partial K}{\partial y_i(\sigma_1)} - \left(\frac{\partial F}{\partial y_i^0} \right)_1 \right] \delta y_i(\sigma_1) = 0 \quad (10)$$

Les variations aux limites sont encore liées par les p conditions

$$\sum_i \frac{\partial g_k}{\partial y_i(\sigma_2)} \delta y_i(\sigma_2) + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial y_i(\sigma_1)} \delta y_i(\sigma_1) = 0 \quad (k = 1, 2 \dots p) \quad (11)$$

provenant des variations sur les conditions imposées (6). Nous supposons que les conditions (11) sont réellement indépendantes, c'est-à-dire que la matrice des coefficients des variations aux limites est de rang p . Pour un choix convenable, p_1 parmi les variations $\delta y_i(\sigma_1)$ et p_2 parmi les variations $\delta y_i(\sigma_2)$ ($p_1 + p_2 = p$) peuvent alors être considérées comme des variations dépendantes exprimables linéairement en fonction des $2n - p$ variations restantes.

$$\delta K = \sum_i \frac{\partial K}{\partial y_i(\sigma_1)} \delta y_i(\sigma_1) + \sum_i \frac{\partial K}{\partial y_i(\sigma_2)} \delta y_i(\sigma_2)$$

se laisse alors aussi exprimer comme une fonction linéaire des $2n - p$ variations libres à coefficients non tous nuls (sinon le problème de rendre K minimum est dépourvu de sens).

L'élimination des variations dépendantes dans (10) sépare la condition naturelle aux limites en $2n - p$ autres

$$Y_r \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y_i^0} \right)_1, \left(\frac{\partial F}{\partial y_i^0} \right)_2 \right] = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, 2n - p) \quad (12)$$

exprimant l'annulation des coefficients des variations libres.

Les trajectoires stationnaires relativement à K sont ainsi déterminées par le système différentiel (9) et (5) avec les conditions aux limites (6) et (12). Ces équations sont nécessaires pour l'existence d'un minimum. L'examen de conditions suffisantes, basé sur la variation seconde de I , est presque toujours difficile. Dans un grand nombre d'applications il est possible de lever l'incertitude quant à la nature exacte de la trajectoire extrémale par des considérations d'ordre physique.

3. UNE IDENTITÉ ENTRE LES ÉQUATIONS D'EULER.

Une conséquence du choix d'une représentation paramétrique est l'existence d'une identité entre les équations d'Euler (5) et (9).

Les contraintes (5) entre les variables ne peuvent dépendre du choix, largement arbitraire, du paramètre. Dans un changement de paramètre

$$\tau = \tau(\sigma) \quad \text{où} \quad d\tau/d\sigma > 0$$

on aura

$$f_j \left(y_i, \frac{dy_i}{d\sigma} \right) = f_j \left(y_i, \frac{dy_i}{d\tau} \frac{d\tau}{d\sigma} \right) = \frac{d\tau}{d\sigma} f_j \left(y_i, \frac{dy_i}{d\tau} \right) = 0$$

exprimant que les contraintes peuvent être présentées sous une forme homogène du premier degré dans les dérivées par rapport au paramètre.

La fonction F définie par (7) est alors également homogène du premier degré dans ces dérivées et par le théorème d'Euler

$$F = \sum_i y_i^0 \frac{\partial F}{\partial y_i^0}$$

On en déduit en dérivant formellement le second membre :

$$\frac{dF}{d\sigma} = \sum_i y_i^{00} \frac{\partial F}{\partial y_i^0} + \sum_i y_i^0 \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i^0} \right)$$

D'autre part en dérivant le second membre de (7)

$$\frac{dF}{d\sigma} = \sum_j \beta_j^0 f_j + \sum_i y_i^0 \frac{\partial F}{\partial y_i} + \sum_i y_i^{00} \frac{\partial F}{\partial y_i^0}$$

d'où, en identifiant les deux expressions et utilisant les notations introduites en (5) et (8), l'identité

$$\sum_j \beta_j^0 [F]_{\beta_j} + \sum_i y_i^0 [F]_{y_i} \equiv 0 \tag{13}$$

Il en résulte que pour un système qui évolue en respectant les contraintes (5), une extrémale satisfait automatiquement à une des équations d'Euler $[F]_{y_r} = 0$ pour autant qu'elle satisfait à toutes les autres et que y_r^0 ne soit pas identiquement nul le long de cette extrémale.

Cette remarque permet souvent de simplifier l'analyse en écartant l'équation d'Euler la plus désagréable à manipuler.

4. CONDITIONS DE TRANSITION.

La trajectoire minimale peut être constituée de plusieurs arcs ou « extrémals » représentant des solutions distinctes des équations d'Euler. Pour des raisons physiques on est généralement conduit à imposer aux variables y_i de rester continues à la transition entre deux extrémals. Les dérivées y_i^0 elles, sont généralement discontinues mais le calcul des variations demande que les grandeurs $\partial F / \partial y_i^0$ soient continues (conditions de Weierstrass et Erdmann). Ceci résulte d'ailleurs de l'examen des termes aux limites qui doivent disparaître

$$\sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial y_i^0} \right)_{\sigma-0} \delta y_i(\sigma - 0) - \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial y_i^0} \right)_{\sigma+0} \delta y_i(\sigma + 0) = 0$$

à la rencontre au point σ de deux extrémals.

Le fait d'imposer la continuité des y_i exige

$$\delta y_i(\sigma - 0) = \delta y_i(\sigma + 0) = \delta y_i(\sigma)$$

et, les $\delta y_i(\sigma)$ étant indépendants il en résulte les conditions de Weierstrass et Erdmann

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y_i^0} \right)_{\sigma-0} = \left(\frac{\partial F}{\partial y_i^0} \right)_{\sigma+0} \quad (14)$$

Il peut arriver que la dérivée d'une variable soit absente dans les contraintes. Dans ce cas $\partial F / \partial y_i^0 \equiv 0$ et les variations d'extrémité de cette variable n'apparaissent pas dans les conditions aux limites. Il n'y a pas de sens à imposer des valeurs frontières à cette variable et elle subit normalement des discontinuités aux points de transition. Les conditions (14) entraînent généralement la continuité des multiplicateurs de Lagrange.

5. ALTÉRATION DES CONDITIONS AUX LIMITES.

PARAMÈTRES DE SENSIBILITÉ.

Pour comparer deux trajectoires minimales, correspondant à une légère altération des conditions aux limites imposées, nous supposons que ces dernières dépendent d'un paramètre ϕ :

$$g_h[y_i(\sigma_1), y_i(\sigma_2), \phi] = 0$$

Le changement de ϕ en $\phi + d\phi$ aura pour effet de modifier les valeurs $y_i(\sigma_1)$ et $y_i(\sigma_2)$ pour la trajectoire minimale en $y_i(\sigma_1) + \delta^*y_i(\sigma_1)$ et $y_i(\sigma_2) + \delta^*y_i(\sigma_2)$ avec

$$g_h[y_i(\sigma_1) + \delta^*y_i(\sigma_1), y_i(\sigma_2) + \delta^*y_i(\sigma_2), \phi + d\phi] = 0.$$

Par conséquent, au premier ordre

$$\sum_i \frac{\partial g_h}{\partial y_i(\sigma_1)} \delta^*y_i(\sigma_1) + \sum_i \frac{\partial g_h}{\partial y_i(\sigma_2)} \delta^*y_i(\sigma_2) = -\frac{\partial g_h}{\partial \phi} d\phi \quad (15)$$

D'autre part, tant que le système évolue en respectant les contraintes (5) la fonction F reste nulle et, par comparaison entre la trajectoire minimale et la minimale altérée

$$\delta^* \int_1^2 F d\sigma = 0$$

Développant cette variation, effectuant les intégrations par parties et notant que la trajectoire minimale obéit aux équations d'Euler et aux conditions de transition, il subsiste la relation

$$\sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial y_i^0} \right)_2 \delta^*y_i(\sigma_2) - \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial y_i^0} \right)_1 \delta^*y_i(\sigma_1) = 0 \quad (16)$$

entre les altérations des valeurs terminales des variables. Enfin l'altération subie par la fonction K est

$$\delta^*K = \sum_i \frac{\partial K}{\partial y_i(\sigma_1)} \delta^*y_i(\sigma_1) + \sum_i \frac{\partial K}{\partial y_i(\sigma_2)} \delta^*y_i(\sigma_2)$$

Combinant ce résultat avec (16) il vient la formule

$$\delta^*K = \sum_i \left[\frac{\partial K}{\partial y_i(\sigma_2)} + \left(\frac{\partial F}{\partial y_i^0} \right)_2 \right] \delta^*y_i(\sigma_2) + \sum_i \left[\frac{\partial K}{\partial y_i(\sigma_1)} - \left(\frac{\partial F}{\partial y_i^0} \right)_1 \right] \delta^*y_i(\sigma_1) \quad (17)$$

dont le second membre présente une analogie formelle avec le premier membre de (10). L'analogie formelle des premiers membre de (15) avec ceux de (11) permet alors d'éliminer dans (17) les variations $\delta^*y_i(\sigma_1)$ et $\delta^*y_i(\sigma_2)$ correspondant aux variations considérées comme dépendantes dans (11) ; δ^*K prend ainsi la forme

$$\delta^*K = \sum_{r=1}^{2n-p} Y_r \delta^*y_r(\sigma_1 \text{ ou } \sigma_2) + Z d\phi$$

où les Y_r sont les mêmes combinaisons linéaires des $(\partial F / \partial y_i^0)_{1,2}$ que les conditions naturelles (12) et, comme elles, s'annulent en vertu du caractère stationnaire de la trajectoire. En définitive la variation de K pour un changement infinitésimal du paramètre ϕ est donnée par

$$\partial K / \partial \phi = Z \quad (18)$$

Z est aussi une combinaison linéaire des $(\partial F / \partial y_i^0)_{1,2}$ et dépend des valeurs prises par les multiplicateurs de Lagrange aux extrémités de la trajectoire ; ceci souligne l'intérêt de conserver les multiplicateurs comme variables auxiliaires dans l'intégration de la trajectoire.

Le résultat (18) s'étend sans difficulté quand les conditions (6) dépendent de plusieurs paramètres.

6. CONSTANTES ISOPÉRIMÉTRIQUES.

Quand une variable n'intervient dans les liaisons (5) que par sa dérivée y_i^0

$$\partial F / \partial y_i \equiv 0$$

et l'intégration de l'équation d'Euler correspondante introduit une constante d'intégration C_i

$$\partial F / \partial y_i^0 = C_i.$$

Dans la condition aux limites naturelles apparaît alors le terme

$$C_i \delta[y_i(\sigma_2) - y_i(\sigma_1)].$$

Si les conditions imposées aux frontières sont telles que la variation $\delta[y_i(\sigma_2) - y_i(\sigma_1)]$ est libre, C_i est nulle. C_i est au contraire une constante isopérimétrique inconnue si les conditions aux frontières imposent la valeur de $y_i(\sigma_2) - y_i(\sigma_1)$ (condition isopérimétrique).

7. APPLICATION À LA THÉORIE DES PERFORMANCES.

Multiplions les équations (1) à (4) par $t^0 = dt/d\sigma$ pour les mettre sous la forme paramétrique homogène prévue par la théorie précédente

$$[F]_{\alpha} = MV^0 - (T - D - Mg \sin \theta)t^0 = 0$$

$$[F]_{\lambda} = MV\theta^0 - (L - Mg \cos \theta)t^0 = 0$$

$$[F]_{\beta} = z^0 - t^0V \sin \theta = 0$$

$$[F]_{\gamma} = M^0 + mt^0 = 0$$

et rappelons que

$$T = T(V, z, m)$$

$$D = D(V, z, L^2)$$

La fonction F, formée avec les multiplicateurs respectifs α , λ , β et γ fournit les autres équations d'Euler

$$[F]_M = -\gamma^0 + \alpha(V^0 + gt^0 \sin \theta) + \lambda(V\theta^0 + gt^0 \cos \theta) = 0$$

$$[F]_V = -[\alpha M]^0 + \alpha t^0(D_V - T_V) + \lambda M\theta^0 - \beta t^0 \sin \theta = 0$$

$$[F]_z = -\alpha t^0(T_z - D_z) - \beta^0 = 0$$

$$[F]_{\theta} = \alpha t^0 Mg \cos \theta - \lambda t^0 Mg \sin \theta - [\lambda MV]^0 - \beta t^0 V \cos \theta = 0$$

$$[F]_m = (\gamma - \alpha T_m)t^0 = 0$$

$$[F]_L = (\lambda - 2\alpha L D_{L^2})t^0 = 0$$

$$[F]_t = [\alpha(T - D - Mg \sin \theta) + \lambda(L - Mg \cos \theta) + \beta V \sin \theta - \gamma m]^0 = 0$$

entre lesquelles on a l'identité (13)

où $\beta_j = \alpha, \lambda, \beta$ et γ et $y_i = M, V, z, \theta, m, L$ et t .

Le temps n'intervenant que par sa dérivée, la dernière équation d'Euler s'intègre avec apparition d'une constante isopérimétrique A

$$\begin{aligned} & -\alpha(T - D - Mg \sin \theta) + \lambda(Mg \cos \theta - L) \\ & -\beta V \sin \theta + \gamma m = A \end{aligned} \quad (19)$$

Les variables de pilotage n'interviennent pas dans les dérivées, elles peuvent donc subir des discontinuités de transition et leurs variations aux limites sont absentes dans la condition naturelle

$$\delta K + [\gamma \delta M + \alpha M \delta V + \beta \delta z + \lambda MV \delta \theta + A \delta t]_1^2 = 0$$

Particularisons le problème en imposant les conditions aux limites

$$\begin{aligned} M(\sigma_1) - M_1 = 0 \quad V(\sigma_1) - V_1 = 0 \quad V(\sigma_2) - V_2 = 0 \\ z(\sigma_1) - z_1 = 0 \quad z(\sigma_2) - z_2 = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

où $(M_1, V_1, V_2, z_1, z_2)$ sont des valeurs prescrites. Les variations d'extrémité correspondantes sont donc nulles à priori.

Pour une trajectoire à consommation minimum on posera en outre $K = -M(\sigma_2)$ et les variations restées libres fournissent les conditions naturelles

$$\gamma(\sigma_2) = 1 \quad \lambda(\sigma_1) = 0 \quad \lambda(\sigma_2) = 0 \quad A = 0 \quad (21)$$

La deuxième de ces conditions serait à remplacer par $\theta(\sigma_1) = \theta_1$, si l'angle d'élévation au départ était imposé ; la dernière serait à remplacer par $t(\sigma_2) - t(\sigma_1) = \Delta t$, si l'intervalle de temps mis à décrire la trajectoire était prescrit.

Pour obtenir une trajectoire brachistochrone on poserait $K = t(\sigma_2) - t(\sigma_1)$; il faut alors limiter la consommation par la condition $M(\sigma_2) = M_2$ car autrement la condition brachistochrone entraînerait un débit infini et le problème serait dénué de sens. Les conditions naturelles de ce problème seraient :

$$A = -1 \quad \lambda(\sigma_1) = 0 \quad \lambda(\sigma_2) = 0$$

Ces quelques exemples suffisent à montrer que toute une catégorie de problèmes de performances optimales repose sur l'intégration du même système différentiel, chaque cas se distinguant par un jeu particulier de conditions aux limites.

Dans le problème défini par les conditions (20) et (21) on obtient en appliquant la théorie du paragraphe 5

$$\begin{aligned} -\delta^* M(\sigma_2) \\ = (\alpha M)_2 dV_2 + \beta(\sigma_2) dz_2 - (\alpha M)_1 dV_1 - \beta(\sigma_1) dz_1 - \gamma(\sigma_1) dM_1. \end{aligned}$$

Par conséquent les changements de masse terminale pour une petite altération sur la spécification de la vitesse terminale ou de l'altitude terminale, par exemple, sont calculables par les formules

$$\partial M(\sigma_2) / \partial V_2 = -\alpha(\sigma_2) M(\sigma_2) \quad \partial M(\sigma_2) / \partial z_2 = -\beta(\sigma_2) \quad (22)$$

Une condition naturelle telle que $\lambda(\sigma_2) = 0$ exprime que le choix naturel de $\theta(\sigma_2)$ correspond à une sensibilité partielle nulle de $M(\sigma_2)$ (un maximum).

De même, si la vitesse terminale n'est pas spécifiée, son choix naturel se fait par la condition $\alpha(\sigma_2) = 0$ qui rend nulle la sensibilité partielle de $M(\sigma_2)$ par rapport à V_2 .

8. ÉLIMINATION DES MULTIPLICATEURS.

Il est naturel de rechercher avant tout une extrémale au cours de laquelle le système évolue de façon continue dans le temps, c'est-à-dire par laquelle $t^0 > 0$. Les équations d'Euler $[F]_m = 0$ et $[F]_L = 0$ demandent alors que

$$\gamma = \alpha T_m \quad \lambda = 2 \alpha L D_{L_2}$$

et ces multiplicateurs peuvent être éliminés sans difficulté. En particulier $[F]_m = 0$ peut se mettre sous la forme

$$B_1 \alpha^0 + B_2 \alpha t^0 = 0 \tag{23}$$

avec

$$B_1 = -MT_m \quad B_2 = T - D + 2L^2 D_{L_2} - MdT_m/dt.$$

D'autre part l'équation obtenue en éliminant β entre $[F]_v = 0$ et $[F]_\theta = 0$ peut s'écrire

$$C_1 \alpha^0 + C_2 \alpha t^0 = 0 \tag{24}$$

avec

$$\begin{aligned} C_1 &= MV(1 - 2LD_{L_2} \tan \theta) \\ C_2 &= V(T_v - D_v) + Mg \sin \theta - mV - 2LD_{L_2}[L - Mg \cos \theta \\ &\quad + \tan \theta(T - D - mV)] - 2MV \tan \theta \frac{d}{dt}(LD_{L_2}) \end{aligned}$$

Enfin, éliminant β dans $[F]_v = 0$ par (19) il vient

$$D_1 \alpha^0 + D_2 \alpha t^0 = A t^0 \tag{25}$$

avec

$$\begin{aligned} D_1 &= MV \\ D_2 &= V(T_v - D_v) + Mg \sin \theta - mV - (T - D - mT_m) \\ &\quad - 4LD_{L_2}(L - Mg \cos \theta). \end{aligned}$$

Nous nous servons de l'identité entre les équations d'Euler et de l'hypothèse suivant laquelle z^0 n'est pas identiquement nul pour écarter l'équation $[F]_z = 0$. L'élimination de α entre les équations (23), (24) et (25) fournit une équation différentielle du premier ordre.

$$B_1 C_2 - B_2 C_1 = 0 \quad (26)$$

et (pour $A \neq 0$) une du second ordre

$$B_1 dQ/dt = [B_2 + dB_1/dt]Q \text{ avec } Q = B_1 D_2 - B_2 D_1. \quad (27)$$

Les équations (26) et (27) et le système de base forment un système différentiel du septième ordre dont les constantes d'intégration sont à ajuster pour satisfaire aux conditions aux limites qui sont précisément au nombre de sept. Par exemple pour le problème à minimum de consommation la condition $\gamma(\sigma_2) = 1$ et $T_m \neq 0$ demande $\alpha(\sigma_2) \neq 0$ et il en résulte par (23) que $\alpha(\sigma_1) \neq 0$. Il en résulte aussi que les conditions telles que $\lambda(\sigma_1) = 0$ et $\lambda(\sigma_2) = 0$ vont exiger $L(\sigma_1) = 0$ et $L(\sigma_2) = 0$. Ces dernières, éventuellement remplacées par $\theta(\sigma_1) = \theta_1$ et $\theta(\sigma_2) = \theta_2$, sont à joindre aux cinq autres conditions (20).

Si l'intervalle de temps n'est pas prescrit on dispose apparemment d'une constante supplémentaire dans l'intégration, mais alors $A = 0$ et l'équation (27) obtenue par élimination de α entre (23) et (25) se réduit à l'équation $Q = 0$ qui est du premier ordre seulement.

On peut donc présumer que la trajectoire est constituée par une seule extrémale. Notons encore que si θ est donné comme une fonction de z , l'équation $[F]_\theta = 0$ est à supprimer tandis que l'équation ignorable $[F]_z = 0$ est seule modifiée. De par sa formation l'équation (27) reste valable et fournit alors, associée au système de base, la solution du problème de la répartition optimale de la poussée *le long d'un profil de trajectoire imposé*.

9. CAS DU MOTEUR FUSÉE.

L'ordre précédemment reconnu au système différentiel repose essentiellement sur l'hypothèse implicite que dans l'expression

$$\frac{dT_m}{dt} = T_{mm} \frac{dm}{dt} + T_{mv} \frac{dV}{dt} + T_{mz} \frac{dz}{dt}$$

figurant en B_2 on a $T_{mm} \neq 0$ (*). Or pour un moteur fusée on peut admettre que

$$T = mu + A_s(p_s - p_a)$$

où u est la vitesse d'éjection des produits de combustion qui, pour une tuyère donnée, ne dépend que de la température dans la chambre de combustion ; A_s est la section de sortie de la tuyère ; p_s , la pression de sortie, est dans un rapport constant avec la pression de la chambre ; p_a , la pression atmosphérique, ne dépend que de l'altitude. En modifiant le débit m des ergols dans la chambre, sans modifier les rapports de mélange, la température de combustion ne varie pas ; u est une constante ; la pression dans la chambre et celle de sortie sont proportionnelles à m , si bien qu'on peut écrire $T = mc - A_s p_a(z)$ où c est une vitesse d'éjection fictive constante. Ici donc

$$T_m = c \quad T_v = 0 \quad T_z = -A_s dp_a/dz < 0 \quad dT_m/dt \equiv 0.$$

L'équation (26) reste du premier ordre par la présence du terme en dL/dt dans C_2 , mais on trouve

$$Q = M[-\cancel{r}gc \sin \theta + c(VD_v - D - A_s p_a) + V(D + A_s p_a) + 2L^2 D_{L_2}(2c - V) - 4cLD_{L_2}Mg \cos \theta] \quad (28)$$

L'équation $Q = 0$, valable pour $A = 0$, se réduit donc à une simple relation algébrique entre les variables. Pour $A \neq 0$ l'équation (27) est elle-même réductible à une relation algébrique moyennant l'utilisation des équations de base et de (26).

L'ordre du système différentiel étant abaissé, il n'est plus possible de satisfaire à toutes les conditions aux limites ce qui implique l'existence d'autres extrémales. Examinons rapidement la nature de celles-ci sur l'exemple particulier de la fusée-sonde.

10. LE PROBLÈME DE LA FUSÉE-SONDE.

Il s'agit d'établir le programme optimum de combustion du moteur-fusée pour une montée à la verticale entre deux altitudes et deux régimes de vitesse prescrits sans limitation de temps.

* Il est intéressant de noter que parmi les conditions suffisantes de Legendre pour l'existence d'un minimum véritable de la consommation figure la condition $\alpha T_{mm} < 0$ (CICALA II).

L'arc à poussée continue. ($t^0 > 0$).

Avec $\theta = \pi/2$ l'équation $[F]_\lambda = 0$ indique que $L \equiv 0$. Il suffit d'adjoindre aux trois autres équations de base la forme particulière de l'équation $Q = 0$ déduite de (28)

$$Mgc = c(VD_v - D - A_s p_a) + V(D + A_s p_a) \quad (29)$$

Le premier membre de (29) est positif. Pour une altitude donnée le second devient positif croissant à partir d'une limite inférieure de la vitesse. Les trois variables (M, V, z) étant liées de façon unique par (29) les valeurs initiales prescrites (M_1, V_1, z_1) ne la satisfont pas nécessairement. De plus les fonctions $M(z)$ et $V(z)$ de l'extrémale sont entièrement déterminées par (29) et par l'équation

$$cVM' + M(VV' + g) + D + A_s p_a = 0 \quad (30)$$

obtenue en éliminant t et m entre les équations de base et prenant l'altitude comme variable indépendante (dérivées indiquées par l'accent).

Ce système différentiel est du premier ordre seulement ; en l'intégrant à partir de valeurs initiales satisfaisant à (29), la valeur $V(z_2)$ trouvée ne coïncide pas nécessairement avec V_2 . L'arc à poussée continue ne suffit donc pas à construire une trajectoire minimale.

L'extrémale « impulsion ». ($t^0 = 0$)

L'équation $[F]_m = 0$ est aussi satisfaite par $t^0 = 0$. Pour obtenir une solution non triviale, faisons tendre m vers l'infini en même temps que t^0 vers zéro et interprétons l'équation $[F]_y = 0$ comme

$$\lim mt^0 = -M^0.$$

Dès lors

$$\lim Tt^0 = -cM^0$$

et les équations de base se réduisent à $\theta = \text{constante}$, $z = \text{constante}$, $t = \text{constante}$ et

$$MV^0 + cM^0 = 0 \quad (31)$$

Il s'agit d'une impulsion ; le changement total de vitesse étant

lié au changement de masse de la fusée par l'intégrale définie de (31)

$$V(\sigma + \Delta\sigma) - V(\sigma) = c \log_e \frac{M(\sigma)}{M(\sigma + \Delta\sigma)}$$

Les autres équations d'Euler se réduisent à

$$\gamma^0 = \alpha V^0 \quad [aM]^0 = 0 \quad \beta^0 = 0 \quad [\lambda MV]^0 = 0 \quad (32)$$

L'équation (19) avec $A = 0$ doit être interprétée comme suit

$$\lim m(\gamma - \alpha c) = -\alpha(D + A_s p_a + Mg \sin \theta) + \lambda(L - Mg \cos \theta) + \beta V \sin \theta$$

et exige par conséquent à la limite la relation

$$\gamma = \alpha c$$

qui, grâce à (31), est compatible avec les deux premières des équations (32).

En introduisant une impulsion à l'altitude initiale et une autre à l'altitude finale il devient théoriquement possible d'obtenir des vitesses V_1 et V_2 prescrites.

L'arc à poussée nulle. ($m = 0$).

Il subsiste la possibilité de voir la solution théorique précédente exiger un débit négatif sur un segment d'arc à poussée continue ou une impulsion négative ($M^0 > 0$). La restriction de nature physique $m \geq 0$ s'exprime analytiquement en posant par exemple $m = \mu^2$.

L'équation $[F]_m = 0$ est remplacée par $[F]_\mu = 2\mu t^0[\gamma - \alpha T_m] = 0$ et fait prévoir une nouvelle solution où μ (et donc m) serait nul.

Prenant de nouveau l'altitude comme variable indépendante, l'équation

$$M(VV' + g) + D + A_s p_a = 0$$

où M est maintenant une constante, caractérise entièrement cette extrémale.

Conditions de transition.

Les conditions de Weierstrass et Erdmann demandent ici que pour M , V , z et t continus α , β et γ le soient aussi. Dès lors

les relations entre multiplicateurs le long des différentes extrémales, apportent de nouvelles précisions concernant la structure de la trajectoire minimale. Ces relations sont résumées dans le tableau suivant :

Impulsion	$\gamma = ac$	$\beta^0 = 0$	$[\alpha M]^0 = 0$
Arc à poussée continue	id.	$\beta V = \alpha(Mg + D + A_s p_a)$	$\alpha^0 M c = \alpha^0 (\Gamma - D)$
Arc à poussée nulle	$M\gamma^0 = -\alpha(D + A_s p_a)t^0$	id.	$\alpha^0 M V = \alpha^0 (D + A_s p_a - Mg)$.

Il en résulte que

1° la connaissance d'un seul multiplicateur en un point d'un arc à poussée continue détermine tous les multiplicateurs le long de cet arc.

2° Il est possible de prolonger un arc à poussée continue par une impulsion en respectant la continuité des multiplicateurs.

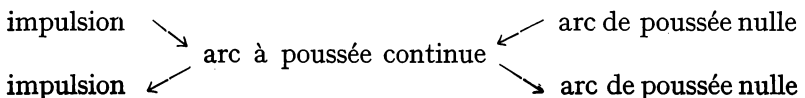
En effet les valeurs de α et β en fin de phase continue entrent comme données initiales dans des équations différentielles variables le long de l'impulsion et γ reste continu parce qu'il est lié à α par la même relation algébrique.

A condition d'échanger les rôles de β et γ le même raisonnement montre qu'un arc à poussée continue se laisse aussi toujours prolonger par un arc de poussée nulle.

3° Par le même raisonnement, mais cheminant à rebours, un arc à poussée continue peut être précédé par une impulsion ou par un arc à poussée nulle.

4° L'une ou l'autre condition de continuité des multiplicateurs est normalement violée par l'adjonction d'une transition supplémentaire. Ainsi, d'un arc de poussée nulle il n'est possible d'entrer dans un nouvel arc à poussée continue que là où la condition $\gamma = ac$ se trouve être vérifiée et cette circonstance est exceptionnelle.

On peut en inférer qu'une trajectoire minimale répond normalement à l'un des schémas suivants :



Les trois phases se succèdent suivant l'une des quatre combinaisons possibles ; une ou deux quelconques des phases peuvent d'ailleurs être absentes.

Pour les lois de traînée et de variation de densité atmosphérique rencontrées en pratique il se vérifie que pour chaque jeu de valeurs aux limites (V_1, z_1) , (V_2, z_2) il existe une trajectoire minimale unique appartenant à l'une de ces combinaisons. Le point de transition marquant le début de la phase continue est fixé par la nécessité de satisfaire à l'équation (29), tandis qu'une transition de phase continue à poussée nulle doit être localisée par tâtonnements, en vue de satisfaire à la condition de vitesse terminale.

Observons aussi que la condition $\gamma(\sigma_2) = 1$ peut être considérée comme satisfaite du moment que $\gamma(\sigma_2) \neq 0$. En effet les relations entre multiplicateurs sont homogènes et il suffirait d'effectuer un changement d'échelle approprié.

Or, il ressort du tableau précédent, que α ne peut s'annuler en un point sans être identiquement nul et il en est alors de même pour γ et β . Donc $\gamma(\sigma_2) \neq 0$ du moment qu'on assigne à γ une valeur non-nulle, et par ailleurs arbitraire, en un point quelconque.

Notons cependant que le changement d'échelle donnant $\gamma(\sigma_2) = 1$ est indispensable pour la validité des formules (22).

Signification pratique du résultat.

La nature du résultat reflète bien la nature du compromis en jeu dans le problème. Augmenter l'énergie potentielle du combustible dans le champ de gravitation peut être considéré comme une dépense inutile, que l'on réduit par une transformation rapide de l'énergie chimique en énergie cinétique ; par contre une trop grande énergie cinétique augmente la dissipation due à la traînée.

L'arc à poussée continue représente un équilibre idéal entre ces deux maux. Si au départ la vitesse est fort inférieure à cet idéal on y accède par une dépense brutale de combustible dans une impulsion ; trop élevée, par un ralentissement naturel sans dépense. Similairement pour quitter la situation d'équilibre en vue d'obtenir les conditions finales désirées.

Pour une intégration complète du problème moyennant certaines hypothèses sur la nature de l'atmosphère et de la traînée nous renvoyons aux articles originaux (VI) et (VII). Il est évident qu'en pratique les impulsions sont remplacées par une poussée maximum compatible avec la résistance de l'engin ou de son équipage aux accélérations. Une modification analytique du problème est alors la suivante

$$m = \frac{1}{2} m_0 (1 + \tanh \mu)$$

pour $\mu = -\infty$ on a une poussée nulle pour $\mu = +\infty$ une poussée maximum correspondant à $m = m_0$.

L'équation d'Euler :

$$[F]_{\mu} = t^0(\gamma - \alpha T_m) \frac{m_0}{2 \cosh^2 \mu}$$

indique l'existence des trois types d'extrémales, étant satisfaite par $\mu = \pm \infty$ et par la relation $\gamma = \alpha T_m$ de l'arc à poussée continue.

11. EXTENSIONS DU CHAMP DE L'ÉTUDE DES PERFORMANCES.

Il suffit d'adjoindre aux équations de base l'équation

$$[F]_{\xi} = x^0 - V t^0 \cos \theta = 0$$

pour étendre le champ d'étude aux problèmes comportant des restrictions ou des performances de rayon d'action. Un nouveau multiplicateur ξ est introduit pour compléter en conséquence la fonction F. La nouvelle variable n'intervient que par sa dérivée et l'équation d'Euler correspondante s'intègre avec apparition d'une nouvelle constante isopérimétrique qui s'identifie ici au multiplicateur :

$$\frac{\partial F}{\partial x^0} = \xi = X.$$

Dans la condition aux limites figure le nouveau terme

$$X \delta[x(\sigma_2) - x(\sigma_1)].$$

En l'absence de spécification sur le rayon d'action, la condition

naturelle $X = 0$ supprime l'intervention de la nouvelle équation. Si le rayon est spécifié X est à déterminer en même temps que les autres multiplicateurs.

Si le rayon est à rendre maximum on posera

$$K = x(\sigma_1) - x(\sigma_2) \quad \text{et par conséquent} \quad X = 1.$$

On trouvera dans la référence (VII) une analyse de la trajectoire de consommation minimum avec rayon d'action imposé, simplifiée en négligeant la traînée due à la portance ($D_{L_2} = 0$) et traitée comme un problème de Mayer non-paramétrique. Un grand nombre d'extensions semblables sont possibles. Citons aussi les problèmes de performance en Astronautique où il faut tenir compte de la courbure du champ de gravitation.

12. RÉDUCTION DU NOMBRE DE VARIABLES DE PILOTAGE ; SIMPLIFICATIONS.

Pour un appareil sans surfaces portantes ou naviguant dans l'espace interplanétaire on doit poser $L = 0$, ce qui implique la disparition d'une des variables de pilotage. Elle peut être remplacée par la possibilité d'une orientation de la poussée par rapport à la direction de la vitesse.

Par suite de difficultés techniques on peut renoncer au réglage intentionnel de la poussée. Le débit m disparaît alors comme variable de pilotage mais devient une fonction connue $m(t)$ ou $m(z, V)$ par exemple.

L'existence de conditions aux limites aux deux extrémités de l'intervalle complique sérieusement le problème de l'intégration numérique du système différentiel. En vue d'obtenir une première approximation il est loisible d'introduire des simplifications telles que celle qui consiste à négliger le terme $MV\theta^0$ dans $[F]_\lambda = 0$, c'est-à-dire la force centrifuge, pour ne conserver qu'une condition d'équilibre transversal quasi-statique

$$L = Mg \cos \theta.$$

La dérivée de l'angle θ disparaît ainsi du système ; cependant les discontinuités dont θ devient susceptible aux points de transition et qui violeraient complètement la nature de l'approximation, ne se produisent pas nécessairement.

Ainsi dans le problème à la fois brachistochrone et à consommation minimum où l'on utilise cette approximation avec une fonction $m(t)$ connue. Ici il n'est pas question d'impulsions et il est avantageux et licite d'utiliser l'identité entre les équations d'Euler pour éliminer la considération de $[F]_t = 0$. L'équation $[F]_m = 0$ ne gouverne que le multiplicateur γ . L'équation

$$[F]_\theta = t^0 \cos \theta [\alpha Mg - \beta V - 2\alpha D_{L_2} M^2 g^2 \sin \theta] = 0$$

indique l'existence d'extrémales $\cos \theta = 0$ (piqués et chandelles) et d'une autre extrémale obtenue en annulant le crochet et éliminant α et β avec $[F]_v = 0$ et $[F]_z = 0$ ce qui donne l'équation

$$\begin{aligned} MV \frac{du}{dt} - u[T - D + V(T_v - D_v)] - u(1 - u) Mg \sin \theta \\ = \frac{V^2}{g} (T_z - D_z) - [T - D + V(T_v - D_v)] \end{aligned} \quad (33)$$

où
$$u = 2 D_{L_2} Mg \sin \theta$$

un résultat en accord avec celui donné par CICALA et MIELE (IV).

L'examen des conditions de Weierstrass et Erdmann montre que la trajectoire minimale est constituée en général d'une chandelle (ou piqué) suivie d'un arc de montée satisfaisant à (33) puis d'une autre chandelle (ou piqué) et que la continuité de l'angle θ doit être respectée ce qui fixe d'ailleurs la position des points de transition.

Une simplification plus radicale encore consiste à négliger la traînée due à la portance ($D_{L_2} = 0$) ce qui entraîne $\lambda \equiv 0$ et supprime l'équation $[F]_\lambda = 0$ du système de base. La portance devient une variable de pilotage ignorée ; on peut considérer qu'elle est remplacée par θ .

Dans ce cas le premier membre de (33) disparaît et la trajectoire précédente est remplacée par deux segments verticaux (chandelle ou piqués) encadrant une courbe singulière dont l'équation peut s'écrire

$$\left(\frac{\partial}{\partial V} - \frac{V}{g} \frac{\partial}{\partial z} \right) [V(T - D)] = 0 \quad (34)$$

et constitue une relation algébrique entre la vitesse, l'altitude et le temps (à travers la fonction $m(t)$ dont dépend la poussée).

Cette fois les discontinuités de θ aux jonctions sont inévitables et d'ailleurs autorisées par conditions de Weierstrass et Erdmann.

Dans le problème de signification plus réelle où $m = m(z, V)$ (évolution naturelle de la consommation d'un turbo-réacteur avec manette bloquée) les résultats se présentent moins facilement. Nous nous bornerons à signaler que dans le problème à minimum de consommation (qui se distingue ici du problème brachistochrone) l'hypothèse $D_{L_2} = 0$ conduit à une trajectoire du même type. La courbe singulière répond maintenant à l'équation

$$\left(\frac{\partial}{\partial V} - \frac{V}{g} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{V(T - D)}{m} = 0 \quad (35)$$

et ne lie plus que l'altitude et la vitesse (VII).

Notons enfin que les principes (34) et (35) sont justifiables respectivement comme arc brachistochrone et arc à minimum de consommation avec $D_{L_2} \neq 0$ et $m = m(z, V)$ moyennant les approximations $M \cong$ constante et $L \cong$ constante et sont comme tels utilisés dans la théorie moderne des performances des avions.

BIBLIOGRAPHIE

- (I) GARFINKEL, B., Minimal problems in aircraft performance, *Qu. of Applied Math.*, IX, n° 2 (1951), 149-162.
 - (II) CICALA, P., Le evoluzioni ottime di un aereo. *Atti della Accademia delle Scienze di Torino*, 89 (1954-55), 1-9.
 - (III) CICALA, P. et MIELE, A., Evoluzioni brachistocrone di un aereo. *Atti Acc. di Torino* (Nov. 1954).
 - (IV) Brachistocronic manoeuvres of a variable mass aircraft in a vertical plane. *Journal of the Aer. Sc.*, 22, n° 8 (Aug. 1955), 577-578.
 - (V) Generalized theory of the optimum thrust programming for the level flight of a rocket-powered aircraft. *Journal of the Am. Rocket. Soc.*, 26 (1956), 443-455.
 - (VI) TSIEN, H. S. and EVANS, R. C. Optimum thrust programming for a sounding rocket. *Journal of the Am. Rocket Soc.*, 21 (1951), 99-104.
 - (VII) FRAEYS de VEUBEKE, B., Balistique externe. Trajectoires optimales. Chap. XII « La Propulsion par Fusées ». Sciences et Lettres, Liège, 1957.
 - (VIII) BLISS, G., Lectures on the Calculus of variations. Chap. VIII, p. 189. The University of Chicago Press, 1946.
-