

LA PROPULSION PAR FUSÉES

PAR

Marcel Barrère

*Chef du Groupe de Recherches
à l'ONERA (Paris).*

André Jaumotte

*Professeur à l'Université
de Bruxelles.*

Baudouin Fraeijs de Veubeke

*Professeur à l'Université de Liège.
Maître de Conférences
à l'Université de Louvain.*

Jean Vandekerckhove

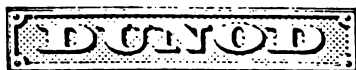
*Assistant à l'Institut d'Aéronautique
de l'Université de Bruxelles.*

PRÉFACE DE MAURICE ROY

*Ingénieur Général des Mines,
Membre de l'Académie des Sciences,
Directeur de l'Office National d'Etudes
et de Recherches Aéronautiques (France)*

Université de Liège
*Sciences Appliquées et Mathématiques
Emin des Chevreuils; Bât B52/4
B-4000 LIEGE*

PARIS



92, rue Bonaparte (VI^e)

1957

BALISTIQUE EXTERNE. PRINCIPES DE GUIDAGE.
ACCÉLÉRATIONS TRANSVERSALES

La phase finale de poursuite d'une cible par un engin téléguidé est surtout gouvernée par la considération des accélérations transversales. D'une part la résistance mécanique de la structure aux accélérations est limitée, d'autre part, aux altitudes où la masse spécifique de l'atmosphère devient faible, la production de forces transversales importantes requiert des angles d'attaque exagérés ou risque de provoquer le décrochage des surfaces portantes. Si le principe même du guidage ne limite pas la courbure des trajectoires le contrôle de l'engin devient précaire. Il nécessite alors en tout état de cause des dispositifs limitateurs d'accélérations et d'angles d'attaque.

Pour les faibles distances en jeu dans la phase finale les accélérations tangentielles que peuvent subir la cible et l'engin ne provoquent pas de variations importantes dans la grandeur de la vitesse de ces mobiles. En première approximation ces vitesses seront considérées comme constantes et le guidage final se présente comme un problème de cinématique pure.

11.1. *Guidages coplanaires*

Nous nous limiterons aux types de guidage dans lesquels le vecteur $\vec{h}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ ou vecteur de visée, le vecteur vitesse $\vec{U}(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)$ de l'engin et le vecteur vitesse $\vec{V}(\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2)$ de la cible sont assujettis à rester coplanaires. Cette condition se traduit mathématiquement par l'annulation du produit mixte :

$$([\vec{V}, \vec{U}], \vec{h}) = 0$$

ou encore :

$$(x_2 - x_1)(\dot{y}_1\dot{z}_2 - \dot{y}_2\dot{z}_1) + (y_2 - y_1)(\dot{z}_1\dot{x}_2 - \dot{z}_2\dot{x}_1) + (z_2 - z_1)(\dot{x}_1\dot{y}_2 - \dot{x}_2\dot{y}_1) = 0. \quad (1)$$

Cette relation ayant lieu quel que soit le temps peut être déri-

vée et conduit à une première liaison importante entre les accélérations de la cible et de l'engin ou tout au moins de leur composante normale au plan du guidage. Sans nuire à la généralité on peut supposer qu'à l'instant considéré le plan en question soit le plan $z = 0$ et par conséquent :

$$z_1 = 0 \quad z_2 = 0 \quad \dot{z}_1 = 0 \quad \dot{z}_2 = 0. \quad (2)$$

Dès lors, dérivant l'équation (1) par rapport au temps et introduisant par après les hypothèses (2) il vient :

$$\ddot{z}_1 [\dot{x}_2(y_2 - y_1) - \dot{y}_2(x_2 - x_1)] = \ddot{z}_2 [\dot{x}_1(y_2 - y_1) - \dot{y}_1(x_2 - x_1)]$$

ou, faisant intervenir les angles que font les vecteurs vitesse avec la ligne de visée (fig. 11-1) :

$$\ddot{z}_1 = \ddot{z}_2 \frac{U \sin \alpha}{V \sin \beta} \quad (3)$$

Il sera important de réaliser un guidage tel que la dernière fraction soit inférieure en module à un nombre voisin de l'unité. De cette façon toute manœuvre d'évasion de la cible mettant en jeu une composante d'accélération normale au plan du guidage n'entraînera pour l'engin qu'une composante d'accélération normale du même ordre de grandeur.

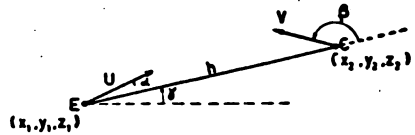


FIG. 11-1.

composante d'accélération normale du même ordre de grandeur.

11.2. Poursuite directe

Le principe de guidage sera entièrement défini par une loi fixant la valeur à donner à l'angle α , c'est-à-dire à l'orientation de la vitesse de l'engin par rapport à la ligne de visée.

Une première considération permettant de fixer ce choix consiste à surveiller la variation par rapport au temps de la distance h qui sépare les mobiles :

$$\dot{h} = V \cos \beta - U \cos \alpha. \quad (4)$$

Comme on ne peut agir que sur l'angle α pour modifier cette variation il semble à première vue que le choix $\alpha = 0$, produisant une diminution aussi rapide que possible de cette distance soit intéressant. C'est le principe de la poursuite simple ou poursuite directe pour laquelle :

$$\dot{h} = V \cos \beta - U. \quad (4')$$

Observons en même temps sur l'équation (3) que ce procédé neutralise entièrement l'effet d'une accélération de la cible normalement au plan du guidage. La poursuite directe aura cependant

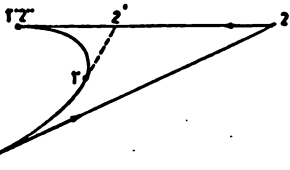
pour effet de produire une rotation de la ligne de visée, dont l'expression générale est :

$$\dot{\gamma} = \frac{V \sin \beta - U \sin \alpha}{h} \quad (5)$$

Elle se réduit dans le cas présent à :

$$h \dot{\gamma} = V \sin \beta. \quad (5')$$

Pour une attaque du côté frontal, dans laquelle la composante



de la vitesse de la cible contribue à la réduction de la distance, la rotation réduit progressivement cette contribution (fig. 11-2). Le principe n'est donc pas nécessairement judicieux à longue échéance d'autant plus qu'il entraîne, comme on le verra, des accélérations normales importantes dans le plan du gui-

FIG. 11-2. — Poursuite simple.

rage. Les expressions générales de ces accélérations sont pour la cible et l'engin respectivement :

$$a_2 = V(\ddot{\beta} + \dot{\gamma}) = V\left(\ddot{\beta} + \frac{V \sin \beta - U \sin \alpha}{h}\right) \quad (6)$$

$$a_1 = U(\ddot{\alpha} + \dot{\gamma}) = U\left(\ddot{\alpha} + \frac{V \sin \beta - U \sin \alpha}{h}\right). \quad (7)$$

Soit dans le cas actuel :

$$a_2 = V\left(\ddot{\beta} + \frac{V \sin \beta}{h}\right) \quad (6')$$

$$a_1 = U \frac{V \sin \beta}{h}. \quad (7')$$

Intégrons d'abord le problème de la poursuite directe dans le cas où la cible ne manœuvre pas. Ceci revient à poser $a_2 = 0$ et l'équation (6') devient :

$$h \ddot{\beta} = -V \sin \beta. \quad (8)$$

Dans l'intervalle $0 < \beta < 180^\circ$ l'angle β décroît avec le temps, dans l'intervalle $180^\circ < \beta < 360^\circ$ il est croissant. Suivant sa valeur initiale, il tendra donc vers 0 ou 360° . Nous verrons que cette valeur limite sera effectivement atteinte au moment où la distance s'annule ou, dans le cas d'une interception irréalisable, quand la distance tend vers l'infini. La solution particulière $\beta = 0$ ou 360° est stable tandis que la solution particulière $\beta = 180^\circ$ est manifestement instable. De façon générale une solution particulière $\beta = \beta_0$, d'une équation du type :

$$h \ddot{\beta} = f(\beta) \quad f(\beta_0) = 0$$

sera stable ou instable suivant que la dérivée partielle

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)_{\beta=\beta_0}$$

est négative ou positive.

Pour établir la relation entre l'angle β et la distance éliminons le temps par division membre à membre des équations (4') et (8); il vient :

$$\frac{dh}{d\beta} = -h \frac{\cos \beta - p}{\sin \beta} \quad (9)$$

où le rapport des vitesses est désigné par

$$p = \frac{U}{V}.$$

L'intégration de cette équation différentielle à variables séparées livre, h_0 et β_0 étant les valeurs initiales :

$$\frac{h \sin \beta}{h_0 \sin \beta_0} = \left(\frac{\tan \frac{\beta}{2}}{\tan \frac{\beta_0}{2}} \right)^p$$

ou encore, sous une forme de discussion plus aisée :

$$\frac{h}{h_0} = \left(\frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta_0}{2}} \right)^{p-1} \left(\frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\beta_0}{2}} \right)^{-(p+1)} \quad (10)$$

Le temps de vol peut être calculé en substituant cette expression de la distance dans l'équation (8) et en effectuant une quadrature :

$$t = -\frac{h_0 \sin \beta_0}{2V \left(\tan \frac{\beta_0}{2} \right)^p} \left[\frac{\left(\tan \frac{\beta}{2} \right)^{p-1}}{p-1} + \frac{\left(\tan \frac{\beta}{2} \right)^{p+1}}{p+1} \right]_{\beta_0}^{\beta}$$

Au prix de quelques manipulations trigonométriques on obtient le résultat plus simple :

$$t = \frac{h_0(p + \cos \beta_0) - h(p + \cos \beta)}{V(p^2 - 1)}.$$

La discussion du résultat (10) se présente comme suit :

1° La valeur initiale de l'angle n'est pas une solution particulière de (8).

Si $p > 1$, la distance tend vers zéro en même temps que l'angle

tend vers une de ses valeurs limites 0 ou 360°. On observe d'ailleurs sur (4') que la distance est toujours décroissante.

Si $p < 1$, la distance tend au contraire vers l'infini et ne peut jamais devenir nulle. L'examen de (4') montre que si les conditions initiales sont telles que $\cos \beta_0 < p$, la distance commence par décroître; elle passe par un minimum quand $\cos \beta = p$.

2° La valeur initiale de l'angle est nulle. L'angle reste nul et cette solution particulière est stable. C'est le cas élémentaire de la poursuite axiale par l'arrière :

$$\dot{h} = V(1 - p)$$

et l'engin ne rejoint la cible que si sa vitesse lui est supérieure.

3° La valeur initiale de l'angle est de 180°. En principe la distance reste décroissante quel que soit le rapport des vitesses. Nous avons vu cependant que cette solution particulière, correspondant à l'attaque frontale, est instable.

À la suite de la moindre perturbation l'écartant de la trajectoire de la cible l'engin manque l'interception. Plus exactement il décrit un coude de près de 180° au moment où la cible passe à proximité et cette manœuvre implique une accélération transversale, dont on verra qu'elle tend vers l'infini quand on fait tendre la perturbation vers zéro.

Pour exprimer l'accélération de l'engin sous une forme non dimensionnelle nous avons choisi la combinaison :

$$\tau_0 = \frac{a_1 h_0}{U^2}$$

qui a l'avantage d'inclure entièrement l'effet du paramètre « distance initiale ». Son calcul suivant (7') donne le résultat suivant :

$$\tau_0 = \frac{\sin \beta_0}{p} \left(\frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta_0}{2}} \right)^{2-p} \left(\frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\beta_0}{2}} \right)^{2+p} \quad (11)$$

La discussion de cette formule sera menée en distinguant les mêmes trois cas que pour la formule (10) :

1° La valeur initiale de l'angle n'est pas une solution particulière.

Calculons d'abord la valeur limite de l'accélération réduite au moment du contact :

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \tau_0 = \begin{cases} 0 & \text{pour } p < 2 \\ \infty & \text{pour } p > 2 \\ \frac{2 \sin \beta_0}{p(1 + \cos \beta_0)^2} & \text{pour } p = 2 \end{cases}$$

Il apparaît donc nécessaire de ne pas attaquer avec une vitesse supérieure au double de la vitesse de la cible.

Si la vitesse d'attaque est inférieure au double, l'accélération est nulle au moment du contact ; elle est donc maximum soit à l'instant initial, soit en un point intermédiaire. L'existence de ce point intermédiaire dépend de la solution de la condition d'extremum

$\frac{da_1}{d\beta} = 0$. Elle est particulièrement simple à calculer en partant de (7') :

$$\frac{\cos \beta}{h} - \frac{\sin \beta}{h^2} \frac{dh}{d\beta} = 0 .$$

Après substitution de (9) on obtient le résultat simple :

$$2 \cos \beta = p . \tag{12}$$

Désignons alors par β_m le plus petit angle positif qui satisfait à cette équation. Nous aidant de (8) nous aboutissons aux conclusions suivantes :

Si $\beta_m < \beta_0 < 180^\circ$, l'angle β décroissant avec le temps passe par la valeur β_m et produit une accélération extrême :

$$\tau_0 = \Phi(p) \frac{\left(\tan \frac{\beta_0}{2}\right)^{p-1}}{1 + \cos \beta_0} \tag{11'}$$

où

$$\Phi(p) = \frac{4 - p^2}{4p} \left(\frac{2 + p}{2 - p}\right)^{p/2}$$

Si $180^\circ < \beta_0 < 360^\circ - \beta_m$, l'angle croissant avec le temps passe par la valeur $360^\circ - \beta_m$ qui satisfait aussi à la condition (12) et pro-

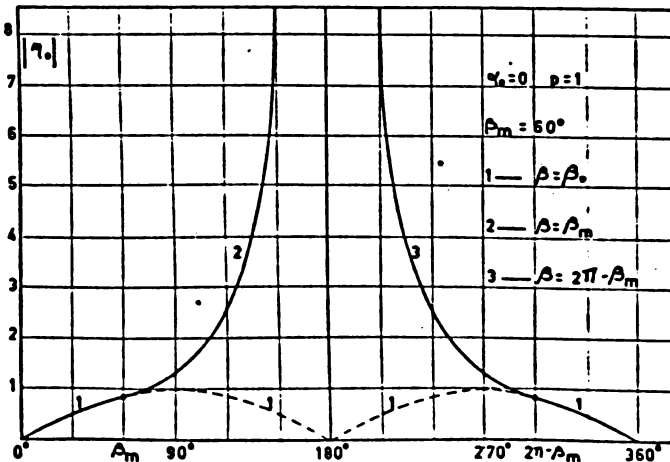


FIG. 11-3.

duit une accélération extrême dont l'expression est identique à la précédente.

Enfin dans l'intervalle restant des valeurs initiales

$$-\beta_m < \beta_0 < +\beta_m,$$

l'angle ne satisfait jamais à la condition (12) et le maximum d'accélération se produit dans les conditions initiales $\beta = \beta_0$; elle a pour valeur :

$$\eta_0 = \frac{1}{p} \sin \beta_0. \tag{11''}$$

Sur la figure 11-3 on a porté les valeurs absolues des maxima en fonction de l'angle initial pour le rapport de vitesses minimum $p = 1$ [$\Phi(p) = 1,299$].

Si $p = 2$, l'angle β_m est nul. Quelle que soit la valeur initiale de β_0 , la valeur extrême est atteinte au moment du contact :

$$\eta_0 = 2 \sin \beta_0 (1 + \cos \beta_0)^{-2}.$$

Elle constitue d'ailleurs la valeur limite de (11') pour $p = 2$.

La valeur $\frac{1}{2} \sin \beta_0$ correspondant aux conditions initiales est toujours inférieure. Ce cas est illustré à la figure 11-4. Notons que les graphiques des valeurs de l'accélération réduite maximum peuvent également servir à délimiter une distance de sécurité h_0 à partir de laquelle une attaque peut être déclenchée en poursuite directe sans dépasser une limite d'accélération que l'on se serait imposée.

2° Poursuite axiale par l'arrière.

L'accélération reste apparemment nulle quel que soit le rapport des vitesses. Ceci est pourtant illusoire car la moindre perturbation écartant l'engin de sa trajectoire rectiligne aura pour con-

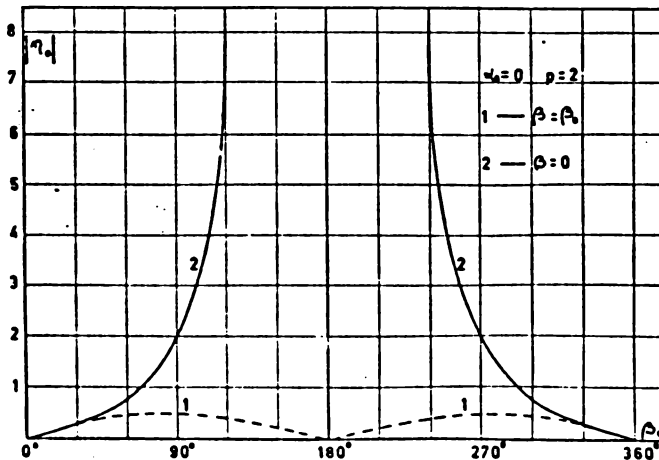


FIG. 11-4.

séquence une accélération infinie au moment du contact si le rapport des vitesses dépasse la valeur 2.

3° Attaque frontale.

L'instabilité de la trajectoire rectiligne aura toujours pour conséquence une accélération infinie. En effet nous pouvons sans restreindre la généralité faire coïncider les conditions initiales avec le moment où on introduit une petite perturbation. Ceci revient à considérer un angle initial très voisin mais non égal à 180° . L'engin passera alors par une accélération extrême soit infinie au contact si $p > 2$, soit donnée par la formule (11') si $p \leq 2$. Cette formule donne encore l'infini quand on fait tendre β_0 vers 180° , c'est-à-dire la perturbation vers zéro.

En résumé la poursuite directe présente les inconvénients suivants :

- a) Suppression de toute chance d'interception quand la vitesse de l'engin est inférieure à celle de la cible, quoiqu'il puisse se trouver dans une position tactique frontale favorable ;
- b) Large domaine d'interdiction pour la position tactique par suite des accélérations trop élevées auxquelles l'engin serait soumis ;
- c) Limitation supérieure de la vitesse d'interception au double de la vitesse de la cible pour la même raison.

Notons cependant que ces deux derniers inconvénients peuvent être éliminés dans une large mesure en équipant l'engin de dispositifs limitateurs d'accélération et d'angle d'attaque.

L'examen de la poursuite directe peut être complété par une analyse des trajectoires résultant d'une manœuvre d'évasion. On a déjà observé qu'une accélération de la cible normale au plan d'interception est sans effet. Si par contre a_2 n'est pas nul, l'élimination du temps conduit à une équation différentielle.

$$\frac{dh}{d\beta} = \frac{h(\cos \beta - p)}{\frac{h a_2}{V^2} - \sin \beta}$$

qui ne peut être intégrée que par voie numérique ou graphique (méthode des isoclines) ; il semble d'ailleurs difficile de tirer des conclusions intéressantes de ces intégrations. Il est suffisant d'observer que suivant (7') l'accélération subie par l'engin ne dépend que de la situation géométrique que la cible a réussi à créer. La tactique que cette dernière doit suivre quand la distance diminue est clairement de virer dans le sens convenable pour maintenir l'angle β aussi voisin que possible de $\pm 90^\circ$.

11.3. Poursuite déviée

Pour réduire la rotation de la ligne de visée on peut introduire un élément de prédiction consistant à décaler le vecteur vitesse de

l'engin d'un angle α dans le sens des positions futures de la cible. Si cet angle est maintenu à une valeur constante $\alpha = \alpha_0$ on a la « poursuite déviée ».

Par raison de symétrie on peut se borner à considérer des angles de déviation positifs et inférieurs à 180° . Nous leur associerons tous les angles initiaux β_0 possibles quoique *a priori* seuls ceux compris entre 0 et 180° semblent réellement intéressants comme correspondant à une poursuite avec angle d'avance.

Pour une cible qui ne manœuvre pas, l'équation (6) devient :

$$h\dot{\beta} = -V \sin \beta + U \sin \alpha_0. \quad (13)$$

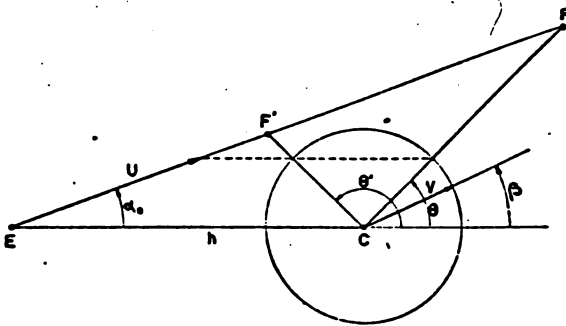


FIG. 11-5.

Choisissons (fig. 11-5) la définition positive inférieure à 90° d'un angle θ répondant à l'équation :

$$U \sin \alpha_0 = V \sin \theta \quad \text{ou} \quad \sin \theta = p \sin \alpha_0. \quad (14)$$

Cet angle n'existe que si $V > U \sin \alpha_0$. Pour un rapport de vitesses donné cette restriction implique que l'angle de déviation soit pris suffisamment petit ou suffisamment voisin de 180° . Si au contraire $U \sin \alpha_0 > V$, le second membre de (13) est positif quel que soit β ; ceci montre que l'angle β est constamment croissant. Effectivement la solution que l'on peut établir dans ces conditions montre que l'engin spirale une infinité de fois autour de la cible. Ceci justifie la restriction. Moyennant la définition (14) l'équation (13) devient :

$$h\dot{\beta} = V(\sin \theta - \sin \beta). \quad (15)$$

L'angle β est donc décroissant dans l'intervalle $\theta > \beta > 180^\circ - \theta$ et croissant dans l'intervalle complémentaire. Suivant sa valeur initiale il tendra donc vers θ ou $360^\circ + \theta$ et cette limite sera effectivement atteinte quand la distance tendra vers zéro ou vers l'infini. La solution particulière $\beta = \theta$ est stable, tandis que la solution par-

ticulière $\beta = 180^\circ - \theta$ est instable. Éliminant le temps par division membre à membre des équations (15) et

$$\dot{h} = V \cos \beta - U \cos \alpha_0 \quad (16)$$

qui est ici la forme appropriée de (4), il vient :

$$\frac{dh}{h} = \frac{\cos \beta - p \cos \alpha_0}{\sin \beta - \sin \theta} d\beta. \quad (17)$$

Cette équation différentielle s'intègre facilement en introduisant la variable $\tan \frac{\beta}{2}$:

$$\frac{h \cos^2 \frac{\beta}{2}}{h_0 \cos^2 \frac{\beta_0}{2}} = \left(\frac{\tan \frac{\beta}{2} - \tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\beta_0}{2} - \tan \frac{\theta}{2}} \right)^{k-1} \left(\frac{\tan \frac{\beta}{2} - \cot \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\beta_0}{2} - \cot \frac{\theta}{2}} \right)^{-k-1} \quad (18)$$

où l'on a posé :

$$k = p \frac{\cos \alpha_0}{\cos \theta}.$$

A partir de ce résultat le temps de vol peut s'obtenir par quadrature sous la forme :

$$t = \frac{h[p + \cos(\alpha_0 + \beta)] - h_0[p + \cos(\alpha_0 + \beta_0)]}{V(1 - p^2)\cos \alpha_0}.$$

La discussion se présente alors comme suit :

1° L'angle initial β_0 n'est égal ni à θ ni à $180^\circ - \theta$.

a) $\cos \alpha_0 > 0$; comme par définition $\cos \theta > 0$ on a alors $k > 0$.

Si $k > 1$, la distance tend vers zéro en même temps que β tend vers sa limite stable θ . Cette condition pour que l'engin atteigne la cible ne diffère qu'en apparence du cas de la poursuite directe car, en l'explicitant au moyen de (14) :

$$p^2 \cos^2 \alpha_0 > \cos^2 \theta = 1 - p^2 \sin^2 \alpha_0$$

et la condition est équivalente à $p > 1$. Cette situation est celle représentée à la figure 11-5.

Si $k < 1$, la distance ne peut devenir nulle. Elle tend au contraire vers l'infini en même temps que l'angle tend vers sa valeur limite.

b) $\cos \alpha_0 < 0$ et par conséquent $k < 0$.

Pour ces grands angles d'avance la distance ne peut de nouveau que tendre vers l'infini.

2° L'angle initial est égal à θ , solution stable de (15).

La rotation de la ligne de visée s'annule et l'engin décrit une trajectoire rectiligne. Comme

$$\dot{h} = V \cos \theta - U \cos \alpha_0$$

il faut pour que la distance s'annule que $\cos \theta - p \cos \alpha_0 < 0$.

Si $\cos \alpha_0 > 0$, ceci demande à nouveau que $p > 1$ et correspond à la trajectoire stable EF' de la figure 11-5.

Si $\cos \alpha_0 < 0$, il n'y a pas de rencontre possible.

3° La rotation de la ligne de visée s'annule encore pour la valeur initiale $\beta_0 = \theta' = 180^\circ - \theta$, qui est l'autre détermination possible de l'équation (14):

$$\dot{h} = -V \cos \theta - U \cos \alpha_0$$

et la condition de rencontre est :

$$\cos \theta + p \cos \alpha_0 > 0.$$

Si $\cos \alpha_0 > 0$, p peut prendre n'importe quelle valeur. Ce cas dégénère pour $\alpha_0 = 0$ en celui de l'attaque axée frontalement. Il est représenté pour $p > 1$ par la trajectoire rectiligne EF' de la figure 11-5.

Si $\cos \alpha_0 < 0$ la condition de rencontre est équivalente à $p < 1$. Ce cas est représenté à la figure 11-6. Pour la limite de 180° de

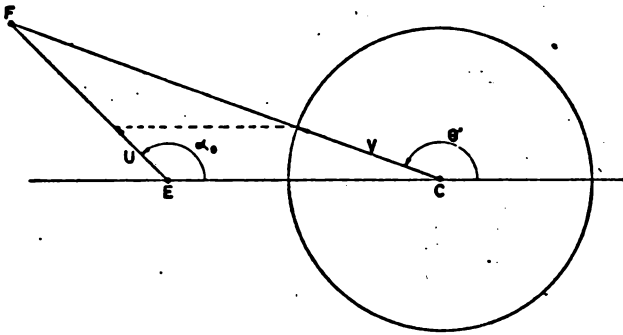


FIG. 11-6.

l'angle de déviation il signifie que l'engin se trouve sur la trajectoire parcourue par la cible et se laisse rejoindre par elle.

En vertu de la discussion des solutions particulières de (15) ces trajectoires rectilignes sont instables. Elles correspondront à nouveau à des accélérations infinies si, introduisant une petite perturbation sur l'angle, on la fait tendre vers zéro.

Il résulte de cette discussion que les seuls cas intéressants sont ceux pour lesquels le rapport de vitesse est supérieur à l'unité et l'angle d'avance inférieur à 90° . Nous allons voir que la condition

d'existence d'un angle θ , qui limite encore supérieurement les angles d'avance à la valeur :

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{p} \tag{19}$$

est elle-même surpassée par une condition plus restrictive provenant d'un examen des accélérations transversales. Celles-ci répondent ici à la formule :

$$a_1 = UV \frac{\sin \beta - \sin \theta}{h}$$

Après substitution du résultat (18) et quelques manipulations trigonométriques l'accélération réduite devient :

$$\eta_0 = \frac{2}{p} \left(\sin \frac{\beta - \theta}{2} \right)^{2-k} \left(\cos \frac{\beta + \theta}{2} \right)^{2+k} \left(\sin \frac{\beta_0 - \theta}{2} \right)^{-1+k} \left(\cos \frac{\beta_0 + \theta}{2} \right)^{-1-k} \tag{20}$$

1° La valeur initiale de l'angle n'est pas une solution particulière. La valeur limite de l'accélération réduite, au contact, est alors :

$$\lim_{\beta \rightarrow \theta} \eta_0 = \begin{cases} 0 & \text{pour } k < 2 \\ \infty & \text{pour } k > 2 \\ \frac{2(\sin \beta_0 - \sin \theta) \cos^3 \theta \cos \alpha_0}{p[1 + \cos(\beta_0 + \theta)]^2} & \text{pour } k = 2 \end{cases}$$

La valeur $k = 2$ ne peut donc être dépassée. Cette condition explicitée pour $\cos \alpha_0 > 0$, correspond à la limite supérieure :

$$p = \frac{2}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha_0}} \tag{21}$$

La figure 11-7 sur laquelle sont tracées les limites données par

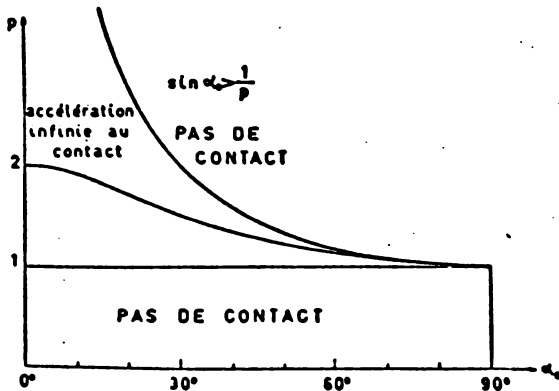


FIG. 11-7.

les équations (19) et (21) montre la diminution de l'intervalle utilisable des rapports de vitesses en fonction de l'angle d'avance.

Pour un rapport de vitesses intérieur à ce domaine il est intéressant de rechercher le maximum de l'accélération le long de la trajectoire. La condition d'extremum :

$$\frac{1}{UV} \frac{da_1}{d\beta} = \frac{\cos \beta}{h} - \frac{\sin \beta - \sin \theta}{h^2} \frac{dh}{d\beta} = 0$$

donne après substitution de (17) la condition :

$$\cos \beta = \frac{1}{2} p \cos \alpha_0. \tag{22}$$

Soit à nouveau β_m le plus petit angle positif satisfaisant cette équation ; comme on a :

$$\cos \beta_m = \frac{1}{2} k \cos \theta < \cos \theta$$

cet angle est supérieur à l'angle θ . Dès lors :

a) Si $180^\circ - \theta > \beta_0 > \beta_m$, l'angle β décroissant passe par la valeur β_m et il se produit une accélération extrême obtenue en faisant $\beta = \beta_m$ dans (20).

b) Si $360^\circ - \beta_m > \beta_0 > 180^\circ - \theta$, l'angle β croissant passe par la valeur $360^\circ - \beta_m$ qui satisfait également à la condition (22). L'accélération extrême s'obtient dans ce cas en faisant $\beta = 360^\circ - \beta_m$ dans (20).

c) Dans l'intervalle restant, l'angle β tend vers θ sans jamais

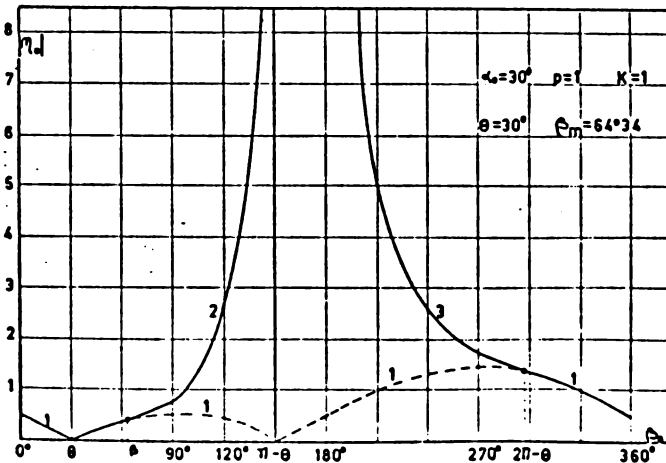


FIG. 11-8.

satisfaire à (22). L'accélération extrême est alors celle de la condition initiale $\beta = \beta_0$, soit :

$$\tau_0 = \frac{1}{p}(\sin \beta_0 - \sin \theta).$$

Les maxima absolus des accélérations réduites sont reproduits à la figure 11-8 en fonction de l'angle β_0 pour la valeur $\alpha_0 = 30^\circ$ et le rapport $p = 1$ ($k = 1$).

Dans le cas limite $k = 2$ on a $\beta_m = \theta$.

L'accélération réduite correspondant aux conditions initiales est :

$$\tau_0 = \frac{\cos \alpha_0}{2 \cos \theta} (\sin \beta_0 - \sin \theta) = I(\beta_0). \quad (23)$$

Une valeur extrême correspondant à β_m est toujours atteinte au contact et répond à la formule simple :

$$\tau_0 = I(\beta_0) \left[\frac{1 + \cos \theta}{1 + \cos(\beta_0 + \theta)} \right]^2. \quad (23')$$

Elle est supérieure en valeur absolue à la précédente dans l'intervalle $360^\circ - 3\theta > \beta_0 > \theta$.

Enfin dans l'intervalle $180^\circ - \theta < \beta_0 < 360^\circ - \theta$ il y a passage par la valeur extrême correspondant à $360^\circ - \theta$ qui peut s'écrire :

$$\tau_0 = I(\beta_0) \left[\frac{2}{1 + \cos(\beta_0 + \theta)} \right]^2 \quad (23'')$$

et possède manifestement la plus grande valeur absolue.

Ces résultats sont illustrés pour $\alpha_0 = 30^\circ$ à la figure 11-9.

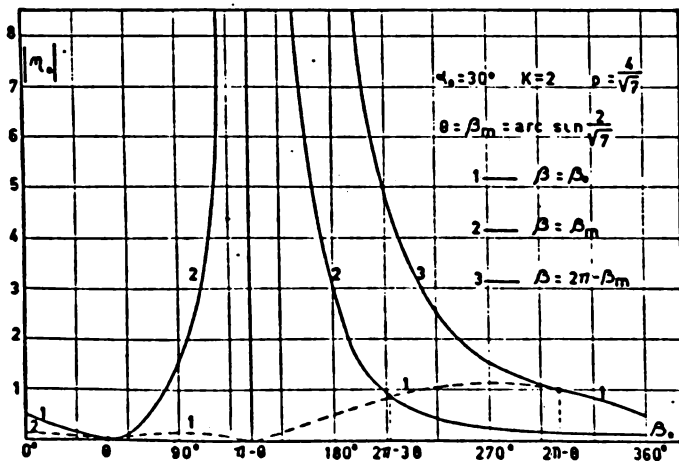


FIG. 11-9.

2° L'angle initial est celui de la solution particulière $\beta = \theta$.

La trajectoire rectiligne est stable et les accélérations tendent vers zéro avec les perturbations sauf si $k > 2$.

3° L'angle initial est celui de la solution particulière :

$$\beta = \theta' = 180^\circ - \theta.$$

Il suffit d'observer que même pour $k \leq 2$ les maxima d'accélération tendent vers l'infini quand on fait tendre β_0 vers cette valeur particulière pour confirmer le caractère instable en toutes circonstances de cette trajectoire rectiligne.

En résumé la meilleure utilisation de la poursuite déviée à partir d'une situation géométrique initiale donnée se présente de la façon suivante. A partir du rapport des vitesses supposé compris entre un et deux on calcule l'angle de déviation maximum utilisable, qui correspond à $k = 2$, soit :

$$\sin \alpha_0 = \sqrt{\frac{4 - p^2}{3 p^2}}.$$

Il lui correspond un angle caractéristique maximum :

$$\sin \theta_{\max} = \sqrt{\frac{4 - p^2}{3}}.$$

Tant que l'attaque a lieu par l'arrière avec un angle initial β_0 inférieur en valeur absolue à θ , il est possible de réaliser une trajectoire de collision rectiligne stable avec un angle de déviation inférieur au maximum. Dès que l'angle initial devient plus grand et donc certainement pour une attaque du côté frontal, il faut prendre l'angle de déviation maximum, soit sous forme d'un angle d'avance avec une accélération maximum donnée par la formule (23') où $\theta = \theta_{\max}$, soit sous forme d'un angle de retard avec une accélération maximum donnée par (23'') où β_0 sera remplacé par $-\beta_0$ et θ par θ_{\max} .

Au fur et à mesure que l'on se rapproche d'une attaque axée frontalement la distance de sécurité devient importante. Notons aussi sur la formule (3) l'apparition d'un nouveau danger quand l'angle est proche de 0 ou de 180° et que la cible tente une manœuvre d'évasion hors du plan de poursuite.

11.4. Poursuite sous cap constant

Il résulte de l'étude précédente que les trajectoires de collision obtenues par un décalage approprié de la poursuite ne sont pas toujours stables si l'angle de déviation est maintenu constant. Retrouvées en fonction de l'angle β_0 les conditions de stabilité sont :

$$1 < p \leq \sqrt{1 + 3 \cos^2 \beta_0}, \quad \cos \beta_0 > 0.$$

On peut envisager une utilisation plus systématique des trajectoires de collision en supposant réalisé un asservissement à zéro de la rotation de la ligne de visée. La droite joignant la cible à l'engin est alors assujettie à se déplacer dans l'espace parallèlement à elle-même. Cette solution n'est qu'un cas particulier du guidage par faisceau (*beam-rider*) dans lequel le foyer de rotation du faisceau serait rejeté à l'infini. Il est alors intéressant d'examiner à nouveau les conditions d'existence de ces trajectoires en fonction des données initiales.

Etablissons par rapport à la trajectoire de la cible le lieu des positions de l'engin qui donnent lieu à rencontre après un même délai Δt . Ces lieux présentent une analogie complète avec les fronts

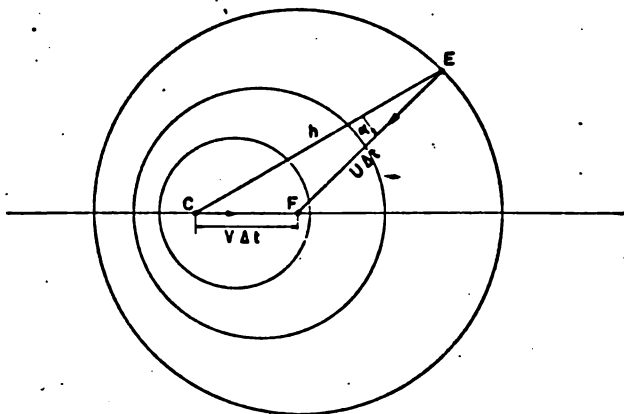


FIG. 11-10.

de perturbations émises par la cible et qui seraient propagées avec la vitesse de l'engin.

Pour obtenir une interception après un délai Δt donné il faut amener l'engin sur une sphère de rayon $U\Delta t$ centrée au point futur F , dont la distance à la cible est $V\Delta t$.

1° Soit $U > V$ (fig. 11-10).

Les sphères sont intérieures l'une à l'autre. Par chaque point de l'espace il passe une et une seule de ces sphères. Quelle que soit la position relative des mobiles il existe une trajectoire de collision et elle est unique. Par l'analogie acoustique on pourrait appeler ce cas le cas subsonique.

2° Soit $U < V$ (fig. 11-11).

Il est encore possible d'intercepter une cible plus rapide que l'engin à condition de pouvoir amener ce dernier à l'intérieur d'un cône d'interception axé sur la trajectoire de la cible et dont le demi-

angle d'ouverture vers l'avant μ est une fonction du rapport des vitesses :

$$\sin \mu = p.$$

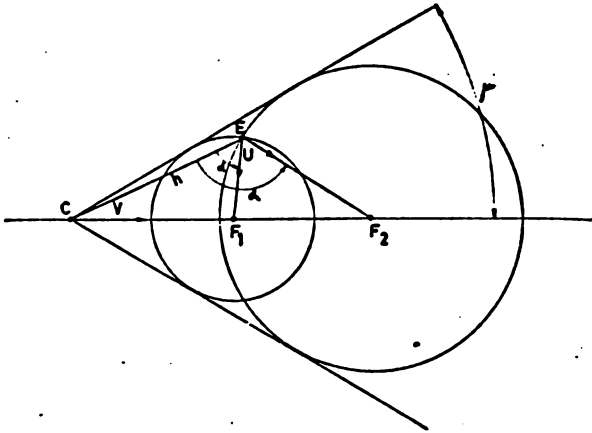


FIG. 11-11.

Ce cône est l'enveloppe des sphères d'égal Δt . Par toute position de l'engin à l'intérieur du cône d'interception passent deux sphères qui correspondent à deux trajectoires de collision possibles. Si l'engin est situé sur le cône d'interception les deux solutions sont confondues ; quand il est en dehors il n'y a plus d'interception possible. On peut appeler ce cas le cas supersonique où s'applique la règle analogue des signaux interdits.

Une interception à délai inférieur à Δt implique un point futur F' antérieur à F_1 , or on a géométriquement :

$$\frac{EF'}{CF'} = \frac{|\sin \beta|}{\sin \alpha'} > \frac{EF_1}{CF_1} = \frac{|\sin \beta|}{\sin \alpha} \quad \text{car } \alpha' < \alpha < 90^\circ.$$

Par conséquent même en se dirigeant en ligne droite vers F' l'engin est en retard sur la cible ; *a fortiori* quand il rejoint ce point par une trajectoire courbe. EF_1 représente donc la trajectoire d'interception brachistochrone. La même démonstration est applicable à la trajectoire EF de la figure 11-10.

Par contre dans le cas $U < V$ la trajectoire EF_2 est celle du délai maximum car, pour un point F'' à droite de F_2 on aurait encore :

$$\frac{EF''}{CF''} > \frac{EF_2}{CF_2} \quad \text{car ici } \alpha'' > \alpha > 90^\circ.$$

Par contre pour un point futur situé entre F_1 et F_2 l'engin peut effectuer une interception suivant une trajectoire incurvée.

L'hypothèse de l'asservissement $\dot{\gamma} = 0$ ou

$$U \sin \alpha = V \sin \beta \quad (24)$$

permet un calcul facile des relations entre accélérations des mobiles en cas de manœuvres d'évasion. L'équation (3) devient :

$$\ddot{z}_1 = \ddot{z}_2 \quad (25)$$

et les équations (6) et (7) :

$$a_2 = V \dot{\beta} \quad a_1 = U \dot{\alpha} \quad (26)$$

Dérivant (24) par rapport au temps et substituant (26) il vient :

$$a_1 = a_2 \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \quad (27)$$

relation qu'une nouvelle utilisation de (24) transforme en :

$$a_1 = a_2 \sqrt{\frac{1 - p^2 \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}} = a_2 \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \beta}{1 - \frac{\sin^2 \beta}{p^2}}}$$

Si le rapport des vitesses est supérieur à l'unité l'accélération que doit prendre l'engin en réponse à celle de la cible lui est donc inférieure. Dans ce cas la manœuvre d'évasion la plus gênante est l'accélération normale au plan d'interception qui n'entraîne malgré tout qu'une accélération égale pour l'engin [équation (25)] :

Si le rapport des vitesses est inférieur à l'unité fixons-nous une limite supérieure r au rapport des accélérations :

$$\frac{a_1}{a_2} = r \quad (28)$$

il faut alors que :

$$\sin^2 \beta \leq \frac{p^2(r^2 - 1)}{r^2 - p^2} \quad (29)$$

Quand on fait tendre r vers l'infini il vient :

$$\sin^2 \beta \leq p^2,$$

c'est-à-dire l'intérieur du cône d'interception. En effet sur le cône même $\alpha = 90^\circ$ et, suivant (27), l'accélération de l'engin devient bien infinie. Pour une valeur finie de r , nécessairement supérieure à l'unité, l'équation :

$$\sin^2 \beta_1 = \frac{p^2(r^2 - 1)}{r^2 - p^2} \quad (30)$$

représente la surface d'un cône intérieur au cône d'interception que nous appellerons le « cône limite d'accélération ».

Par exemple pour $p = 0,6$ et $r = 2$ la demi-ouverture de ce

cône est de 33° , celle du cône d'interception même étant de $36^\circ 52'$. Il est cependant insuffisant de considérer l'interception comme assurée du moment où l'engin se trouve à l'intérieur du cône limite d'accélération. Il faut tenir compte d'une manœuvre soutenue d'évasion de la cible entraînant avec elle son cône limite et qui risque d'en faire sortir l'engin. Le domaine de sécurité est alors un fuseau tangent à l'une de ses extrémités au cône limite. Son calcul peut être abordé comme suit.

Transformons l'équation (4) par (24) :

$$\dot{h} = V \cos \beta \pm U \frac{1}{p} \sqrt{p^2 - \sin^2 \beta}$$

où le signe + correspond à l'interception à long délai ($\alpha > 90^\circ$) et l'autre signe au délai minimum ($\alpha < 90^\circ$). Supposant une manœuvre soutenue de la cible à accélération constante,

$$\dot{\beta} = \frac{a_2}{V},$$

une constante, et l'intégrale de l'équation précédente s'écrit :

$$h - h_0 = \frac{V^2}{a_2} (\sin \beta - \sin \beta_0) \pm \frac{UV}{pa_2} \int_{\beta_0}^{\beta} \sqrt{p^2 - \sin^2 \beta} \, d\beta.$$

Pour une accélération positive, correspondant à des angles croissants, la position la plus défavorable de l'engin se produit pour les angles β_0 supérieurs à 180° . Par raison de symétrie il est suffisant de considérer ce seul cas. Posons alors :

$$\beta = 180^\circ + \varphi.$$

Ce nouvel angle est mesuré en faisant tourner le vecteur CE dans le sens positif vers le vecteur vitesse de la cible. La limite du domaine de sécurité est obtenue quand l'engin atteint le bord du cône limite au moment où la distance devient nulle. Faisant par conséquent $h = 0$ et $\varphi = \varphi_1$ dans l'équation précédente où,

$$\sin \varphi_1 = \sqrt{\frac{p^2(r^2 - 1)}{r^2 - p^2}}$$

il vient en coordonnées polaires (h_0, φ_0) l'équation de la courbe méridienne du fuseau de sécurité :

$$-\frac{h_0 a_2}{V^2} = -\zeta_0 = \sin \varphi_0 - \sin \varphi_1 \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{p^2 - \sin^2 \varphi} \, d\varphi.$$

Pour ramener l'intégrale aux intégrales elliptiques tabulées, effectuons encore le changement de variable :

$$\sin \varphi = p \sin \omega.$$

Il vient en définitive :

$$\zeta_0 = \sin \varphi_1 - \sin \varphi_0 \pm [E(p, \omega_0) - E(p, \omega_1)] \pm (1 - p^2) [F(p, \omega_1) - F(p, \omega_0)]$$

où

$$F(p, \omega) = \int_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \omega}}$$

$$E(p, \omega) = \int_0^\omega \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \omega} \, d\omega$$

sont les intégrales elliptiques de première et de seconde espèce de module p ; tandis que ω_0 et ω_1 sont les plus petites définitions positives de :

$$\sin \omega_0 = \frac{1}{p} \sin \varphi_0 \quad \sin \omega_1 = \sqrt{\frac{r^2 - 1}{r^2 - p^2}}$$

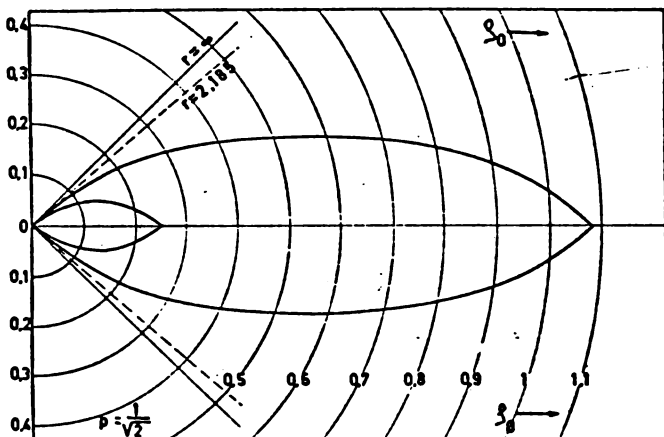


FIG. 11-12.

La figure 11-12 montre les fuseaux correspondants aux valeurs $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $r = 2,185$. Le grand fuseau est celui du délai d'interception minimum.

Dans le cas limite $U = V$ la famille des sphères d'égal délai est tangente en C au plan perpendiculaire à la vitesse de la cible. Ce plan remplace le cône d'interception. Une des possibilités d'interception à cap constant dégénère en $\alpha = \beta$ et son délai devient infini. L'engin suit dans ce cas une trajectoire parallèle à la cible et reste à la même distance. Autrement dit le point futur F_2 est rejeté à l'infini.

Dans l'autre possibilité $\alpha = 180^\circ - \beta$ et il en résulte qu'en

valeur absolue le rapport des accélérations est toujours égal à l'unité. Lors d'une manœuvre d'évasion soutenue il subsiste le danger de voir l'engin traverser le plan qui limite ses possibilités d'interception. Ici l'équation (4) devient :

$$\dot{h} = 2 V \cos \beta$$

et son intégrale pour une accélération constante de la cible :

$$h - h_0 = 2 \frac{V^2}{a_2} (\sin \beta - \sin \beta_0) = 2 \frac{V^2}{a_2} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi).$$

Le domaine de sécurité sera délimité par la condition qu'au moment du contact l'angle φ soit égal à 90° . L'équation de la courbe méridienne devient :

$$\zeta_0 = 2(1 - \sin \varphi_0).$$

Il s'agit donc d'une sphère faisant partie de la famille des sphères d'égal délai. C'est la forme limite prise par le fuseau associé au délai minimum ; le fuseau associé au délai maximum disparaît progressivement quand on fait tendre le rapport des vitesses vers l'unité.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE XI

- [1] S. F. GEORGE, C. E. CORUM, JOHN P. BARRY, *The Analysis of Flight Path*, chap. XII du livre *Guidance*, edit. Grayson Merrill, Captain USN, Van Nostrand, 1955.
- [2] B. FRAEIJIS DE VEUBEKE, *Etude préliminaire des conditions d'interception par un engin téléguidé*, Rapport non publié, janvier 1955.

12.1. *Etablissement d'un principe variationnel*

La recherche des trajectoires de fusées jouissant de propriétés extrémales donne lieu à une variété de problèmes intéressants. Parmi ceux-ci, seuls ceux des trajectoires à minimum de consommation retiendront ici notre attention. Leurs caractéristiques résultent d'un compromis entre plusieurs exigences contradictoires. D'une part, si la trajectoire se termine par un gain d'altitude, l'intérêt d'une consommation rapide du propergol en vue d'éviter une dépense inutile d'énergie potentielle ; d'autre part le bénéfice d'une réduction de vitesse dans les couches denses de l'atmosphère afin de minimiser l'énergie dissipée par la traînée.

La variation avec l'altitude z de la masse spécifique ρ de l'atmosphère jouera donc un rôle essentiel dans le profil des vitesses de cette trajectoire. Sur la figure 12-1 (v. ci-après, p. 356), cette variation est représentée pour une atmosphère type jusqu'à l'altitude de 25 000 mètres.

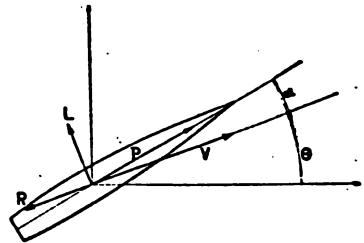


FIG. 12-2.

Si M désigne la masse instantanée de la fusée, V sa vitesse, θ son angle d'élévation, P la poussée et R la traînée, l'équation intrinsèque du mouvement selon la tangente à la trajectoire sera (fig. 12-2) :

$$M \frac{dV}{dt} = P - R - Mg \sin \theta . \quad (1)$$

Dans cette équation le facteur $\cos \alpha$ qui affecte en réalité le terme dû à la poussée sera assimilé à l'unité, l'angle d'attaque aérodynamique étant suffisamment petit.

La masse M est variable et le débit massique de propergol lui est relié par l'équation :

$$q = - \frac{dM}{dt} . \quad (2)$$

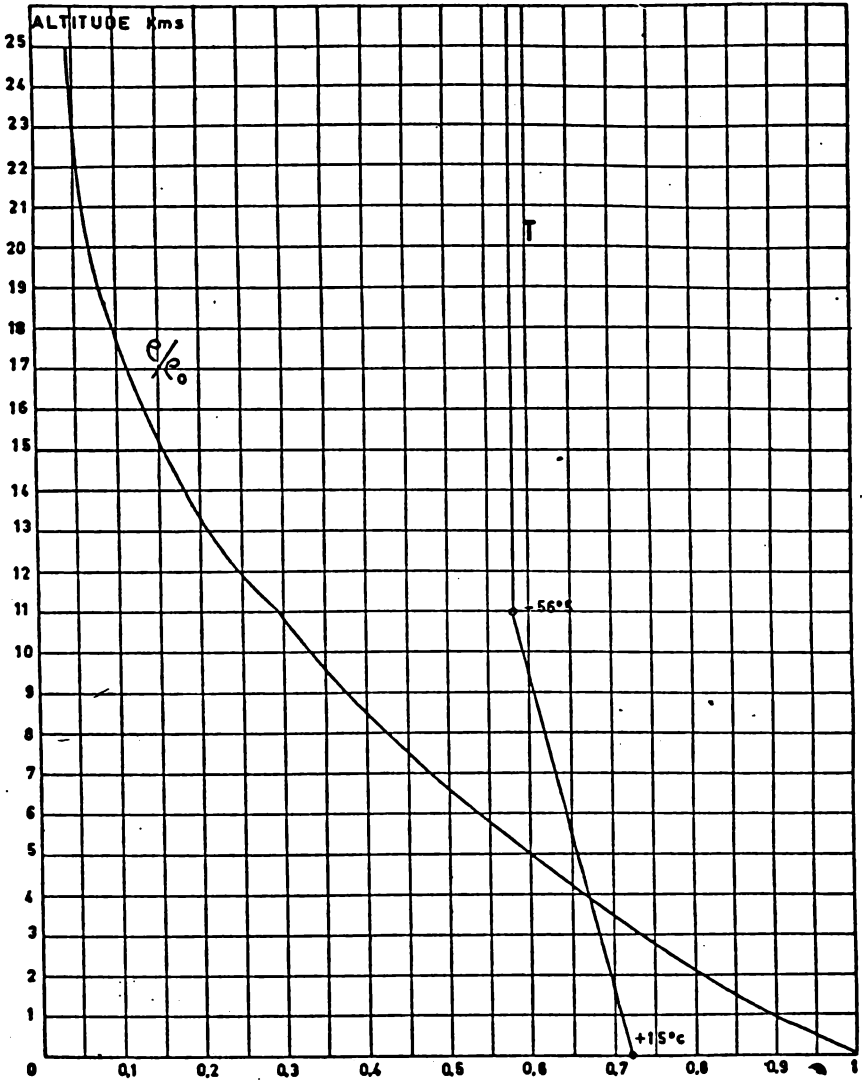


FIG. 12-1.

La poussée a pour valeur :

$$P = qc \quad (3)$$

où la vitesse effective c d'éjection ⁽¹⁾ des produits de la combustion tient compte des écarts d'adaptation de la tuyère aux conditions de

⁽¹⁾ La vitesse effective d'éjection est notée V_e dans les chapitres précédents.

pression à la sortie et est une fonction supposée connue de l'altitude.

La traînée est une fonction $R(z, V, L)$ de la vitesse, de la portance L et de l'altitude. Sa dépendance de l'altitude intervient principalement à travers la fonction $\varphi(z)$.

La portance intervient encore dans l'équation intrinsèque suivant la normale à la trajectoire :

$$MV \frac{d\theta}{dt} = L - Mg \cos \theta + P \sin \alpha.$$

La relation entre la portance et l'angle d'attaque peut généralement s'écrire sous la forme :

$$L = L_a(z, V) \sin \alpha$$

ce qui permet d'écrire la deuxième équation intrinsèque sous la forme :

$$MV \frac{d\theta}{dt} = -Mg \cos \theta + L \left(1 + \frac{P}{L_a(z, V)} \right). \quad (4)$$

L'élimination de la portance entre cette équation et l'expression de la traînée conduit à considérer cette dernière comme une fonction compliquée $R(z, V, \theta, \theta, P, M)$.

S'il est permis de réduire la traînée à une fonction $R(z, V)$ indépendante de la portance les problèmes sont considérablement simplifiés. En fait, il est alors permis de se passer entièrement de l'équation (4) dont le rôle se réduit ultérieurement au calcul de la portance requise pour suivre les trajectoires idéales trouvées, ce qui permet d'établir le programme des braquages de gouvernes à réaliser.

La traînée due à la portance peut être réintroduite ultérieurement, soit par une perturbation de la trajectoire obtenue en première approximation, soit, de façon plus grossière, en majorant le coefficient de traînée directe pour tenir compte d'une moyenne de la traînée induite. Il apparaîtra d'ailleurs que dans un certain nombre de cas des segments de trajectoire sont effectivement décrits sans portance et ne nécessitent pas de corrections.

Au système précédent, il faut enfin adjoindre l'équation du gain d'altitude :

$$\frac{dz}{dt} = V \sin \theta. \quad (5)$$

Après élimination de la poussée par l'équation (3), les équations (1), (2) et (5) constituent un système différentiel gouvernant les fonctions inconnues $V(z)$, $q(z)$, $M(z)$, $\theta(z)$ et $t(z)$.

En général, l'équation unique obtenue après élimination de deux des fonctions inconnues permet de poser un problème variationnel conduisant à certaines trajectoires optimales.

Eliminons par exemple dt entre (1) et (5), il vient :

$$M(VV' + g)\sin\theta = qc - R \quad (6)$$

où l'accent indique la dérivation par rapport à l'altitude.

Eliminant de même dt entre (2) et (5) :

$$q = -V \sin\theta M' \quad (7)$$

Eliminant enfin $\sin\theta$ entre (6) et (7) :

$$\frac{dM}{M} = -\frac{q(VV' + g)}{V(qc - R)} dz \quad (8)$$

Soient M_1 et M_2 les valeurs de la masse au point initial 1 et final 2 d'une trajectoire ; par intégration de (8) il vient :

$$\log_e \frac{M_1}{M_2} = \int_1^2 (A + BV') dz \quad (9)$$

où

$$A(z, V) = \frac{qg}{V(qc - R)} \quad B(z, V) = \frac{q}{qc - R} \quad (10)$$

L'équation (9) montre que, la masse initiale étant supposée connue, la masse finale est une fonctionnelle dépendant du profil des vitesses $V(z)$ et du profil des débits $q(z)$ le long de la trajectoire. Les profils qui rendent la masse maximum, c'est-à-dire la consommation minimum, correspondent au minimum de cette fonctionnelle et peuvent donc en principe être obtenus par le calcul des variations.

Dans le cas général les fonctions $V(z)$ et $q(z)$ sont variées indépendamment ce qui impose une solution où la poussée du jet doit finalement être réglée suivant une loi idéale résultant du calcul. Ce type de problème sera examiné dans une deuxième partie.

Le réglage de la poussée dans un moteur-fusée est d'une réalisation délicate et susceptible d'augmenter sensiblement le poids mort de l'engin. Aussi est-il intéressant d'examiner au préalable le cas particulier où la fonction $q(z)$ est une donnée *a priori* résultant d'un fonctionnement naturel du moteur. La variation est alors appliquée uniquement à la fonction $V(z)$. Si le débit reste constant, la trajectoire à minimum de consommation est également décrite dans un temps minimum car à chaque instant :

$$M = M_1 - qt$$

et une croissance monotone du temps entraîne une décroissance monotone de la masse. Ceci reste vrai si le débit est une fonction imposée du temps :

$$M = M_1 - \int_0^t q(t) dt.$$

Ce type de problème, où la trajectoire à consommation mini-

mum est aussi brachistochrone, requiert pour sa solution l'intervention d'un multiplicateur de Lagrange susceptible d'éliminer la liaison non holonome entre le temps et l'altitude ; il ne sera pas abordé ici.

12.2. Trajectoires à consommation minimum. Débit connu en fonction de l'altitude

12.21. La courbe singulière

Étudions d'abord le cas particulier d'un débit connu en fonction de l'altitude. La variation de l'équation (9) livre :

$$\int_1^2 [(A_V + B_V V') \delta V + B \delta V'] dz = 0$$

et, intégrant le dernier terme par parties :

$$[B \delta V]_1^2 - \int_1^2 (B' - A_V - B_V V') \delta V dz = 0.$$

Le terme aux limites disparaît avec l'annulation des variations aux limites. Des conditions aux limites naturelles du problème consistent donc à imposer les points terminaux (z_1, V_1) et (z_2, V_2) dans un diagramme représentatif (z, V) de la trajectoire.

Notant que la dérivée par rapport à l'altitude est :

$$B' = B_z + V' B_V$$

l'équation d'Euler du problème qui doit fournir la trajectoire extrême est :

$$B_z - A_V = 0. \quad (11)$$

Suivant les définitions (10), elle peut prendre la forme :

$$\left(V \frac{\partial}{\partial z} - g \frac{\partial}{\partial V} \right) \Phi(z, V) = 0 \quad (12)$$

où

$$\Phi(z, V) = \frac{q}{V(qc - R)}. \quad (13)$$

Au lieu d'une équation différentielle du second ordre qui permettrait par ses constantes d'intégration de satisfaire aux conditions aux limites $V = V_1, V_2$ pour $z = z_1, z_2$, on obtient seulement une relation implicite entre la vitesse et des fonctions connues de l'altitude.

Dans le plan (z, V) cette relation implicite peut se trouver satisfaite sur une ou plusieurs branches de courbe. Le cas où la loi de

traînée est proportionnelle au carré de la vitesse est particulièrement simple car alors :

$$R = K\rho V^2 \quad R_r = \frac{\rho'}{\rho} R \quad VR_v = 2R \quad (14)$$

et l'équation (12) devient équivalente à l'annulation d'un trinôme du second degré en V^2 dont la solution peut s'écrire :

$$2\left(\frac{V_c}{V}\right)^2 = 1 + \frac{V_c^2}{g} \frac{c'}{c} \pm \left[\left(1 + \frac{V_c^2}{g} \frac{c'}{c}\right)^2 - \frac{4}{3} \frac{V_c^2}{g} \left(\frac{\rho'}{\rho} - \frac{q'}{q}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

où l'on a posé :

$$V_c^2 = \frac{P}{3K\rho} \quad (16)$$

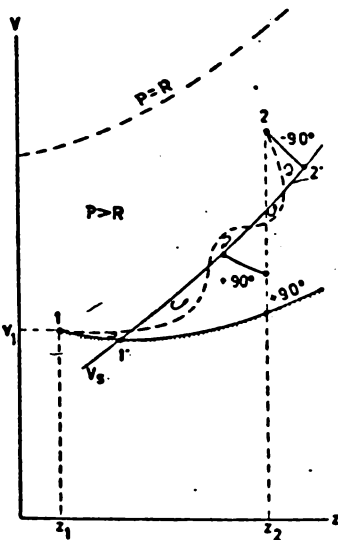


FIG. 12-3.

une vitesse de comparaison, variable avec l'altitude, dont la signification sera dégagée par la suite.

La solution (15) peut fournir deux branches de courbe. La branche supérieure, correspondant au signe $-$, est normalement imaginaire, car, en règle générale,

$$\frac{q'}{q} > \frac{\rho'}{\rho}.$$

Ce dernier quotient est négatif dans une atmosphère type. Il varie par exemple de $-0,096$ à $-0,122$ $(\text{km})^{-1}$ entre 0 et 11 000 m et prend la valeur constante $-0,1557$ $(\text{km})^{-1}$ jusqu'à 25 000 m. Une baisse relative de débit aussi importante constituerait un cas exceptionnel. Notons aussi qu'en général $\frac{c'}{c} > 0$, par suite de la diminution

de la pression à la sortie de la tuyère.

La branche inférieure correspond au signe $+$, elle partage le plan (z, V) en une région inférieure pour laquelle $B_z - A_v > 0$ et une région supérieure où le sens de cette inégalité est renversé. Nous appellerons cette branche la courbe singulière et désignerons la fonction qui lui correspond par $V_s(z)$ (fig. 12-3).

Dans les conditions précitées $V_s < V_c$ et par conséquent la courbe $P = R$, soit $V = \sqrt{3} V_c$ est tout entière dans la région supérieure. Le long de $V_s(z)$ on a donc $P > R$.

On trouve aussi en prenant la dérivée logarithmique de (16) :

$$2 \frac{V_s'}{V_s} = \frac{P'}{P} - \frac{\rho'}{\rho} = \frac{q'}{q} - \frac{\rho'}{\rho} + \frac{c'}{c} > 0 \quad (17)$$

et il en résulte que $V_s' > 0$.

Il résulte alors aussi de l'équation (6) que le long de $V_s(z)$:

$$\sin \theta_s = \frac{P - R}{M(V_s V_s' + g)} > 0.$$

Pour que la courbe singulière corresponde à une trajectoire physiquement réalisable il faut encore que le dernier quotient soit inférieur à l'unité. Il s'agit alors d'une trajectoire de montée, dont la représentation dans le plan (z, V) est nécessairement décrite dans le sens des altitudes croissantes. Si le poids de la fusée est faible, comparé à la poussée, cette trajectoire peut devenir verticale puis perdre son sens physique. A ce moment on peut en inférer que la meilleure trajectoire reste une montée à la verticale. Si l'on tient compte de la variation du coefficient de traînée K avec le nombre de Mach $\frac{V}{a(z)}$ [où $a(z)$ est la célérité du son] et le nombre de Reynolds $\frac{Vl}{\nu(z)}$ [où l est une dimension caractéristique de l'engin et $\nu(z)$ la viscosité cinématique] la courbe singulière doit être calculée à partir de la relation (13) par tâtonnements mais les conclusions sont qualitativement conservées.

12.22. Les trajectoires minimales

La trajectoire représentée par la courbe singulière ne passe qu'exceptionnellement par les points terminaux donnés. Le problème de la trajectoire extrémale joignant deux points quelconques du plan représentatif reste donc entier. On peut soupçonner que l'élimination de la variable $\sin \theta$, dont les valeurs réelles ne couvrent qu'un intervalle limité, conduit à masquer l'existence d'autres branches d'extrémales que la courbe singulière. Ces autres branches ne peuvent d'ailleurs correspondre qu'aux valeurs limites elles-mêmes $\sin \theta = \pm 1$, c'est-à-dire les trajectoires verticales ascendantes ou descendantes.

Une confirmation de cette intuition peut être obtenue en formulant un autre principe variationnel pour le minimum de consommation, où la variable $\sin \theta$ est conservée et sa variation rendue indépendante à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange. Un tel principe a été construit par Cicala et Miele [1] dans le cas d'une masse totale constante (effet de la consommation négligeable) et sa généralisation au cas d'une masse variable est aisée. On trouve effectivement qu'une autre famille d'extrémales est fournie par la condition $\cos \theta = 0$.

On aboutit à la même conclusion par des considérations basées sur la variation seconde de l'équation (9) [2].

Le principe de la démonstration qui suit est dû à Miele [3], qui l'avait déjà appliqué antérieurement au cas d'un aérodyne de masse constante [4].

Considérons (fig. 12-3) un point initial 1 situé par exemple au-dessus de la courbe singulière. Partant de ce point avec une masse initiale déterminée on peut rejoindre la courbe singulière en 1' au moyen d'un segment représentant une montée à la verticale. Parcourant ensuite un segment de la courbe singulière on peut, suivant la position du point 2, reprendre soit une montée à la verticale soit un piqué à la verticale. Par suite de la variation continue de la masse totale, l'endroit où il faut quitter la courbe singulière pour atteindre le point 2 est à déterminer par tâtonnements. Nous devons montrer que cette association de segments constitue la trajectoire minimale.

Notons immédiatement que par la nature des choses il n'est pas possible d'atteindre un point 2 situé en dessous du segment représentant une montée à la verticale issue de 1. Une telle trajectoire sera donc minimale pour un gain d'altitude spécifié avec une vitesse initiale donnée et une vitesse terminale minimum. D'autre part si les points 1 et 2 sont très rapprochés, la trajectoire extrémale peut ne pas comporter de segment intermédiaire de courbe singulière.

Soit (fig. 12-3) une trajectoire de comparaison physiquement possible entre les points donnés. Soit M_2 la masse terminale obtenue le long de l'extrémale 11'2'2 :

$$\log_e \frac{M_1}{M_2} = \int_{11'}^{2'2} A dz + B dV.$$

Soit M_2^* la masse terminale de la trajectoire de comparaison :

$$\log_e \frac{M_1}{M_2^*} = \int_C A dz + B dV.$$

Soustrayant la première relation de la seconde :

$$\log_e \frac{M_2}{M_2^*} = \oint A dz + B dV = \iint (B_2 - A_1) dz dV$$

où l'intégrale curviligne est décrite sur le contour fermé obtenu en cheminant de 1 à 2 suivant le chemin de comparaison avec retour le long du chemin extrémal. La transformation en intégrale double par le théorème de Stokes permet de se rendre compte du caractère essentiellement positif du résultat. En effet les boucles décrites sous la courbe singulière, où la quantité intégrée est positive, le sont dans le sens positif. Celles décrites au-dessus de la courbe singulière le sont dans le sens négatif, mais comme la quantité intégrée y est aussi négative, la contribution à l'intégrale double reste positive. Par conséquent :

$$\log_e \frac{M_2}{M_2^*} > 0 \quad M_2^* < M_2$$

et la consommation le long du chemin de comparaison est tou-

jours supérieure. Comme telle la démonstration de Miele est incomplète. Elle n'établit pas que la nature des segments de raccord est précisément telle qu'une trajectoire de comparaison ne peut les traverser pour former des boucles à contribution négative. Ce fait, presque évident pour le cas d'une masse totale constante, devient d'une vérification plus délicate quand la masse est variable. En effet les limites d'orientation d'un élément de trajectoire (dz , dV) physiquement réalisable ($-1 \leq \sin \theta \leq +1$, $dt > 0$) dépendent de cette masse.

Cette démonstration complémentaire qui est facilitée par un changement, par ailleurs intéressant, du plan de représentation est présentée en appendice.

12.23. Relation entre la courbe singulière et la théorie de la meilleure vitesse ascensionnelle

La courbe singulière possède une interprétation énergétique intéressante qui la relie à la théorie classique quasi stationnaire de la meilleure vitesse de montée.

Des considérations énergétiques très parallèles ont d'ailleurs amené la découverte d'une courbe singulière analogue dans les problèmes brachistochrones ou à consommation minimum des avions de masse constante par plusieurs auteurs [5], [6].

Formons une équation d'énergie en éliminant l'angle d'élévation entre les équations (1) et (5):

$$\frac{de}{dt} = \frac{V(P - R)}{M} \quad (18)$$

où

$$e = \frac{1}{2} V^2 + gz \quad (19)$$

est l'énergie spécifique totale.

A une altitude et pour une masse totale donnée la vitesse de vol pour laquelle l'accroissement instantané de l'énergie spécifique totale est maximum s'obtient par la condition :

$$\frac{\partial}{\partial V} [V(P - R)] = 0. \quad (20)$$

Si le coefficient de traînée de la formule (14) peut être considéré comme indépendant de la vitesse il vient :

$$P = 3 R$$

et cette vitesse de vol est alors celle donnée par la formule (16). Si les variations de K avec le nombre de Mach et le nombre de Reynolds sont prises en considération la condition (20) doit de nouveau être résolue par tâtonnements pour déterminer la valeur exacte de V_* .

Il importe de savoir dans quelles proportions l'accroissement d'énergie spécifique optimum se répartit entre la forme potentielle et la forme cinétique. La fraction dévolue à l'énergie potentielle :

$$f_e = \frac{g dz}{V_e dV_e + g dz} = \left(1 + \frac{V_e V_e'}{g}\right)^{-1}$$

est facile à calculer dans l'hypothèse d'un coefficient K constant ; il vient alors en utilisant (17) :

$$f_e = \frac{2}{2 + \mu^2} \quad (21)$$

où

$$\mu = \frac{V_e}{V_e^*} \quad V_e^* = \sqrt{\frac{g}{\left(\frac{P'}{P}\right) - \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)}} \quad (22)$$

V_e^* est une vitesse de référence qui ne dépend que de la loi de variation de la densité atmosphérique et de la loi de variation de la poussée en fonction de l'altitude. Par conséquent :

1° Si $V_e \ll V_e^*$, la presque totalité de l'excédent de puissance utile est convertie en énergie potentielle. La vitesse de vol V_e est alors réellement une meilleure vitesse de montée. Le principe (20) qui sert à la calculer est d'ailleurs classique dans la théorie des performances ascensionnelles des aérodynes. Dans cette théorie il a été, jusque fort récemment, d'usage de considérer ce vol de montée comme stabilisé. Ceci revient à poser d'emblée un problème quasi

stationnaire où l'on fait *a priori* $\frac{dV}{dt} = 0$, ou encore à considérer la montée dans une atmosphère à densité constante ce qui fait à la fois $P' = 0$ et $\rho' = 0$ et rend la vitesse de référence V_e^* infinie. Notons que dans cette théorie l'application du principe (20) est encore compliquée du fait que, contrairement au cas du moteur-fusée, les groupes motopropulseurs utilisant l'air atmosphérique pour la combustion et la réaction produisent une poussée qui peut dépendre de la vitesse de vol.

2° Si V_e est du même ordre de grandeur que V_e^* une grande partie de la puissance est convertie en énergie cinétique et V_e n'est plus une meilleure vitesse de montée. Les limites de la théorie quasi stationnaire sont alors clairement dépassées. Ceci explique pourquoi le problème de la montée optimale avec énergie cinétique terminale limitée fait intervenir une autre vitesse optimale V_s .

La différence entre les deux théories dépend quantitativement de la vitesse de référence V_e^* . Si la poussée se maintient constante cette vitesse ne dépend plus que du type d'atmosphère et sera alors notée simplement par V_e . Pour l'atmosphère type de la figure 12-1, par exemple, cette vitesse est légèrement inférieure à toute altitude à

la célérité du son. La vitesse de référence V_*^* peut devenir beaucoup plus grande et les limites de la théorie quasi stationnaire étendues d'autant quand la poussée décroît avec l'altitude. On peut s'attendre dans ce cas à ce que les vitesses V_c et V_s deviennent sensiblement égales. En effet il résulte de la formule (15) par exemple que

$$V_s = V_c$$

si

$$\frac{q'}{q} = \frac{\rho'}{\rho} - 3 \frac{c'}{c}$$

ou

$$\frac{P'}{P} = \frac{\rho'}{\rho} - 2 \frac{c'}{c}$$

La vitesse de référence est alors imaginaire si $\frac{c'}{c} > 0$.

Cependant dans les conditions normales indiquées lors de la discussion de la solution (15) elle est toujours réelle.

Dans le cas particulier où $c' = 0$, la formule (15) se met sous la forme particulièrement simple :

$$V_s^2 = \frac{2V_*^2}{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3} \left(\frac{V_c}{V_*^*} \right)^2}} \quad (23)$$

qui montre bien que V_s tend vers V_c quand le rapport $\frac{V_c}{V_*^*}$ tend vers zéro.

Le fractionnement de l'accroissement d'énergie dans une montée optimale à vitesse V_s :

$$f_s = \left(1 + \frac{V_s V_s'}{g} \right)^{-1}$$

est d'un calcul assez laborieux dans le cas général. Simplifiant d'abord le problème en supposant la vitesse effective d'éjection constante on peut écrire :

$$\left(\frac{V_s}{V_*^*} \right)^2 = \frac{3}{2} (-1 + k) \quad (23)$$

où

$$k = \sqrt{1 + \frac{4}{3} \mu^2} > 1.$$

Admettant ensuite que V_*^* reste constante, ce qui revient à supposer une variation exponentielle du quotient $\frac{P}{\rho}$, on trouve :

$$f_s = \frac{2k}{\mu^2 + 2k} > f_c. \quad (21a)$$

Dans ces conditions le rapport de la traînée à la poussée devient :

$$\frac{K\rho V_s^2}{qc} = \frac{K\rho V_c^2}{qc} \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{V_s}{V_c}\right)^2 = \frac{k-1}{2\mu^2}$$

et par l'équation (6) le rapport poussée/poids :

$$\frac{qc}{Mg} = \frac{\sin \theta_s}{f_s} \frac{1}{1 - \left(\frac{R}{qc}\right)} = \sin \theta_s \frac{\mu^2(\mu^2 + 2k)}{k(2\mu^2 + 1 - k)}$$

Pour $\sin \theta_s = 1$ cette formule donne la limite supérieure du rapport poussée/poids pour lequel la trajectoire singulière devient verticale avant de perdre son sens physique.

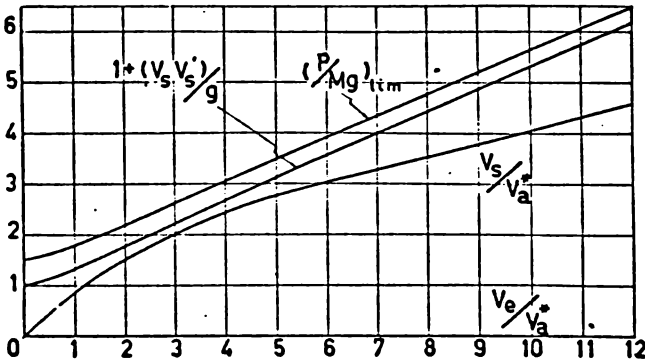


FIG. 12-4.

La formule (23), l'inverse de f_s , tel qu'il résulte de (21a), et cette valeur limite sont illustrées à la figure 12-4.

La comparaison la plus révélatrice entre les conceptions conduisant aux deux espèces de vitesses optimales est obtenue comme suit. Mettons l'équation d'énergie (18) sous la forme :

$$\frac{de}{qdt} = \frac{V(P-R)}{qM} = \frac{1}{M\Phi} \quad (24)$$

où la fonction Φ est définie par (13). Elle exprime alors l'accroissement d'énergie spécifique par unité de consommation à l'altitude considérée et non plus par unité de temps. Ceci est dans un rapport plus logique avec nos considérations de minimum de consommation mais ne change pas le calcul d'une vitesse optimale V_c car le débit ne dépend que de l'altitude. Le principe :

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{\Phi} \right) = 0$$

ou encore :

$$\left. \frac{\partial \Phi(z, V)}{\partial V} \right| = 0 \quad (25)$$

est donc entièrement équivalent à l'équation (20).

Supposons maintenant qu'au moyen de la définition (19) l'altitude soit éliminée dans Φ qui devient ainsi une fonction $\Phi(V, c)$. La dérivée partielle de cette nouvelle fonction par rapport à V ne donne plus le même résultat que (25). Mais, comme dans cette dérivée partielle c est maintenu constant :

$$dc = V dV + g dz = 0$$

et donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(V, c)}{\partial V} &= \frac{\partial \Phi(z, V)}{\partial V} + \frac{\partial \Phi(z, V)}{\partial z} \frac{dz}{dV} \\ &= \frac{\partial \Phi(z, V)}{\partial V} - \frac{V}{g} \frac{\partial \Phi(z, V)}{\partial z} \end{aligned}$$

Une comparaison avec l'équation (12) montre alors que le calcul de V , répond au principe aussi simple que (25) :

$$\frac{\partial \Phi(V, c)}{\partial V} = 0. \quad (26)$$

Il consiste à rendre maximum l'accroissement instantané d'énergie spécifique par unité de consommation, l'énergie même étant maintenue constante.

12.3. Optimisation du débit

12.31. Le problème variationnel

Nous recherchons ici le meilleur programme de consommation du propergol et la meilleure trajectoire pour passer d'une altitude z_1 et d'une vitesse V_1 à une altitude z_2 et une vitesse V_2 avec un minimum de consommation totale.

La réalisation pratique du programme peut présenter des difficultés insurmontables mais les indications fournies n'en seront pas moins précieuses pour la conception d'un engin efficace.

En principe le problème est résolu en annulant la variation de la fonctionnelle (9) où les fonctions $V(z)$ et $q(z)$ seront variées indépendamment.

Une des équations d'Euler de ce problème est connue, c'est l'équation (11) du problème précédent. L'autre, résultant de la variation du débit et retransformée par l'équation (6) est :

$$A_c + B_c V' = \frac{-R}{qc - R} \frac{1}{MV \sin \theta} = 0.$$

Il est clair qu'elle ne peut être satisfaite à moins d'annuler la vitesse ou de rendre le débit infini. Ce résultat semble marquer une impossibilité à trancher par un compromis la contradiction entre l'exigence d'un allègement rapide (débit infini) et celle d'une dissipation minimum d'énergie par la traînée (vitesse nulle). La solution impliquant une vitesse nulle est évidemment à rejeter. D'autre part pour un débit croissant et une masse totale donnée on a vu que la trajectoire singulière de l'équation (26) se redresse progressivement pour devenir verticale puis horizontale. Il est logique d'en inférer que la trajectoire physique optimale tendant à l'optimisation du débit est verticale. Mais alors l'angle d'élevation conservant sa valeur limite de 90° n'est plus une variable et introduit une liaison différentielle supplémentaire entre les fonctions $q(z)$ et $V(z)$. Ainsi les équations d'Euler obtenues en considérant les variations de ces fonctions comme indépendantes sont à rejeter. En d'autres termes l'élimination de l'angle d'élevation dans l'expression de la fonctionnelle nous a de nouveau conduit à une situation physiquement imaginaire.

La conservation de l'angle d'élevation dans une fonctionnelle avec multiplicateur de Lagrange du type déjà signalé confirme cette argumentation. Tsien et Li [7] ont abordé directement le calcul pour une trajectoire verticale en conservant le temps comme variable indépendante ce qui alourdit considérablement le calcul. La méthode suivante conduit rapidement au résultat correct. Après l'élimination du temps conduisant aux équations (6) et (7), gardons $\sin \theta$ comme variable mais éliminons plutôt $q(z)$ ce qui livre l'équation différentielle du premier ordre en M :

$$cV \sin \theta M' + (VV' + g) \sin \theta M = -K\rho V^2. \quad (27)$$

En résolvant cette équation avec la condition aux limites $M = M_1$ pour $z = z_1$ nous pouvons obtenir M_2 sous forme d'une fonctionnelle des deux variables $V(z)$ et $\theta(z)$ indépendantes. Cette fois les solutions extrémales obtenues en variant ces fonctions pourront toujours être interprétées, la fonction éliminée pouvant prendre toutes les valeurs réelles. Seules les solutions qui conduiraient à des valeurs négatives du débit seront à rejeter comme physiquement irréalisables. Il est plus simple d'inverser les opérations en prenant d'abord les variations sur (27) puis en intégrant l'équation différentielle en δM qui en résulte:

$$(\delta M)' + \frac{V' + \frac{g}{V}}{c} \delta M = \delta S \quad (28)$$

où, nous bornant au cas d'un coefficient K indépendant de V :

$$\delta S = \left(\frac{gM}{cV} - \frac{K\rho}{c \sin \theta} \right) \delta V - \frac{M}{c} (\delta V)' + \frac{K\rho V}{c \sin^2 \theta} \cos \theta \delta \theta. \quad (29)$$

L'intégration de (28) donne :

$$E(V, V', z_2) \delta M_2 = \delta M_1 + \int_1^2 E(V, V', z) \delta S dz$$

où

$$E(V, V', z) = \exp \int_1^z \left(V' + \frac{g}{V} \right) \frac{dz}{c}$$

Que M_2 soit donné ($\delta M_2 = 0$) et que nous cherchions le maximum de M_1 ou que M_1 soit donné et que nous cherchions le minimum de M_2 , il faut annuler la variation première :

$$\int_1^2 E \delta S dz = 0.$$

Substituons (29) et effectuons l'intégration par parties requise par la présence de $\delta V'$. Le coefficient de δV qui retourne sous le signe intégral se laisse transformer comme suit au moyen de (27) :

$$\begin{aligned} \left[E \frac{M}{c} \right]' &= E \left[\left(V' + \frac{g}{V} \right) \frac{M}{c^2} + \left(\frac{M}{c} \right)' \right] \\ &= -E \left[\frac{K \rho V^2}{c^2 V \sin \theta} + M \frac{c'}{c^2} \right]. \end{aligned}$$

Il en résulte que l'annulation de la variation première exige l'annulation de termes aux limites :

$$\left[E \frac{M}{c} \delta V \right]_1 = 0$$

et fournit aussi les deux équations d'Euler :

$$\left(\frac{g}{V^2} - \frac{c'}{c} \right) M = \frac{K \rho}{\sin \theta} \left(1 + \frac{V}{c} \right) \quad (30)$$

$$\frac{K \rho V}{c \sin^2 \theta} \cos \theta = 0. \quad (31)$$

La première est obtenue par variation de $V(z)$, la deuxième par variation de $\theta(z)$. Le terme aux limites disparaît si, comme le problème a été posé, les vitesses initiale et terminale sont imposées. La deuxième équation d'Euler est vérifiée par la solution $\cos \theta = 0$; il s'agit donc bien de trajectoires verticales. D'autre part l'équation (30) montre que dans le cas normal où

$$\frac{c'}{c} < \frac{g}{V^2}$$

il ne peut s'agir que d'une trajectoire verticale ascendante.

Les équations (27) et (30) où l'on fait $\sin \theta = 1$ forment alors le système différentiel qui gouverne les fonctions $M(z)$ et $V(z)$.

$$cVM' + (VV' + g)M + K\rho V^2 = 0 \quad (27')$$

$$\left(\frac{g}{V^2} - \frac{c'}{c} \right) M = K\rho \left(1 + \frac{V}{c} \right). \quad (30')$$

mathématiques

La loi du débit peut être déduite ultérieurement de l'équation (7). En éliminant M entre (27') et (30') il vient une équation différentielle pour le profil des vitesses. Cette équation est du premier ordre seulement. Observons alors que si la masse initiale est donnée à l'altitude initiale l'équation (30') impose une vitesse initiale. Intégrant l'équation différentielle du profil des vitesses avec cette valeur initiale nous trouvons une vitesse terminale déterminée. Il semble par conséquent que nous ne soyons maîtres ni de la vitesse initiale ni de la vitesse terminale ce qui contredit nos hypothèses. Le problème variationnel est de nouveau singulier.

12.32. Les impulsions terminales

Un peu de réflexion conduit à la conclusion que la solution de la difficulté consiste à prévoir des débits impulsifs aux extrémités de la trajectoire. Ils correspondent à l'impératif d'un allègement rapide, limité pourtant quant à la vitesse impartie par l'augmentation de traînée et donc de dissipation qui en résulte dans la phase continue

Faisant $dz = 0$ dans l'équation (27') on trouve une équation :

$$\frac{dM}{M} + \frac{dV}{c} = 0$$

exprimant la conservation de la quantité de mouvement dans un système galiléen par rapport auquel la vitesse de la fusée est momentanément nulle. Il en résulte par intégration pour le changement fini de masse dans une impulsion qui fait passer la vitesse de V_0 à V_1 :

$$M_0 = M_1 \exp\left(\frac{V_1 - V_0}{c}\right). \quad (32)$$

Considérons maintenant M_0 et V_0 comme les données initiales d'un problème. L'intensité de l'impulsion initiale requise est obtenue en tirant M_1 et V_1 de (32) et de l'équation (30') supposée satisfaite immédiatement après l'impulsion (c'est-à-dire pour $z = z_1$, $M = M_1$ et $V = V_1$).

En particulier l'élimination de M_1 conduit à une équation transcendante à résoudre pour le calcul de V_1 .

Après l'impulsion initiale la fusée prend un mouvement continu gouverné par les équations d'Euler (27') et (30').

Pour des variations compliquées de c et de ρ ces équations doivent être intégrées numériquement. Dans le cas particulier où la vitesse d'éjection est constante, l'équation du profil des vitesses obtenue par élimination de la masse est assez simple. Après l'introduction commode des variables réduites :

$$\omega = \frac{V}{c} \quad \text{et} \quad \zeta = \left(\frac{g}{c^2}\right) z$$

elle prend la forme :

$$(2 + 4\omega + \omega^2)\omega^0 + 2 + \omega + \omega(1 + \omega)\frac{\rho^0}{\rho} = 0 \quad (33)$$

où le nouveau symbole en exposant indique maintenant la dérivation par rapport à l'altitude réduite.

Dans une atmosphère exponentielle, comme l'atmosphère type au-dessus de 11 000 mètres :

$$\frac{\rho^0}{\rho} = -\frac{1}{\beta}$$

et l'intégration complète est possible par séparation des variables :

$$\frac{1}{\beta}(\zeta - \zeta_1) = \omega - \omega_1 + \frac{\gamma}{2} \log_e \left(\frac{2\omega + 1 - \beta - \gamma}{2\omega + 1 - \beta + \gamma} \cdot \frac{2\omega_1 + 1 - \beta + \gamma}{2\omega_1 + 1 - \beta - \gamma} \right) + \frac{3 + \beta}{2} \log_e \frac{\omega^2 + (1 - \beta)\omega - 2\beta}{\omega_1^2 + (1 - \beta)\omega_1 - 2\beta} \quad (34)$$

où

$$\gamma = \sqrt{(1 - \beta)^2 + 8\beta}$$

Ce résultat concorde avec celui de Tsien et Evans [7] (*).

Pour le calcul de la poussée correspondante, une relation intéressante s'obtient en partant de l'équation (6), soit ici :

$$P - R = Mg(1 + \omega\omega^0)$$

et en éliminant la masse au moyen de la forme particulière :

$$gM = R(1 + \omega) \quad (35)$$

que prend l'équation (30'); il vient :

$$\frac{P}{R} = 2 + \omega + (1 + \omega)\omega\omega^0$$

Éliminant encore la dérivée de la vitesse réduite par (33) le rapport de la poussée à la traînée est exprimé uniquement comme une fonction de la vitesse et de la variation relative de densité :

$$\frac{P}{R} = \frac{(2 + \omega)(2 + 3\omega) - \omega^2(1 + \omega)^2 \frac{\rho^0}{\rho}}{2 + 4\omega + \omega^2} \quad (36)$$

Une fois l'équation (33) intégrée le calcul de la poussée requise en fonction de l'altitude n'offre donc plus de difficulté ; la masse de la fusée se déduit pour chaque altitude de (35).

Une nouvelle impulsion peut porter une vitesse terminale V_2 trop faible à une valeur V_1 désirée. Cette fois l'accroissement de

(* *Loc. cit.*, formule (31). Deux chiffres différents chez Tsien et Evans (1 où nous avons 3 et 4 où nous avons 8) sont vraisemblablement des erreurs d'impression.

vitesse étant connu le changement de masse se calcule sans tâtonnements par la formule :

$$M_3 = M_2 \exp\left(-\frac{V_3 - V_2}{c}\right).$$

Pour réduire au contraire une vitesse terminale trop élevée on ne peut songer à utiliser une impulsion négative qui comporterait une récupération de masse. La solution consiste à couper la propulsion à partir d'une certaine altitude, la décélération due à la pesanteur amenant la fusée dans les conditions terminales requises. La détermination de cette altitude se fait par tâtonnements. La masse étant constante après l'arrêt du propulseur l'équation du profil des vitesses pendant cette phase répond à l'équation :

$$M_2(VV' + g) + K\rho V^3 = 0$$

et en se référant à une vitesse d'éjection déterminée :

$$M_2g(1 + \omega\omega') + (K\rho c^2)\omega^3 = 0.$$

Il peut arriver que les performances terminales demandées soient si modestes qu'on puisse les réaliser avec une seule impulsion initiale inférieure ou égale à celle requise pour le début de la phase continue. Celle-ci est alors absente.

Terminons par une brève discussion des résultats obtenus dans le cas simplifié où la vitesse d'éjection est constante et l'atmosphère exponentielle.

L'équation (33) montre que, suivant sa valeur au début de la phase continue, la vitesse va croître ou décroître en fonction de l'altitude. Pour une valeur spéciale qu'il sera commode de distinguer sous le nom de « vitesse caractéristique » et qui est :

$$\omega^* = \frac{1}{2}(-1 + \beta + \gamma) \quad (37)$$

elle se maintient constante. Le rapport de la poussée à la traînée, calculé par la formule (36), reste alors aussi constant et égal à :

$$\frac{P}{R} = 2 + \omega^*. \quad (37')$$

Dans ces conditions la poussée devrait diminuer comme la densité atmosphérique. En introduisant la vitesse de référence :

$$v_* = \sqrt{\frac{-g^2}{\rho'}}$$

déjà utilisée dans le problème précédent et qui caractérise le gradient de la densité atmosphérique, on peut présenter le coefficient β sous une forme qui fait apparaître sa dépendance vis-à-vis de la vitesse d'éjection des produits de combustion :

$$\beta = \left(\frac{V_e}{c}\right)^2. \quad (38)$$

Il prend en général une valeur si faible (rappelons que la vitesse de référence est voisine de la célérité du son) qu'on peut avec une très bonne approximation remplacer (37) par :

$$\omega^* = 2\beta.$$

Par conséquent la vitesse caractéristique :

$$V^* = c\omega^* = 2V_* \left(\frac{V_*}{c} \right)$$

est d'autant plus petite que le moteur-fusée a des performances élevées. La combinaison de poids de l'engin, vitesse d'éjection, densité à l'altitude considérée et coefficient de traînée requise par l'équation (35) pour le vol à la vitesse caractéristique devient :

$$\frac{gM_1}{4K\rho_1 V_*^2} \left(\frac{c}{V_*} \right)^2 = 1 + 2 \left(\frac{V_*}{c} \right)^2 \cong 1. \quad (39)$$

Le premier membre représente ce qu'on peut appeler le « paramètre de performance » de l'engin. Il croît avec l'augmentation de la masse et de la vitesse d'éjection et avec la diminution du coefficient de traînée. Il est en général considérablement supérieur à l'unité si bien que la vitesse en début de phase continue est nettement supérieure à la vitesse caractéristique. Dans ces conditions l'équation (33) montre que cette vitesse va encore croître avec l'altitude. Il est même possible au moyen de (33) et de sa dérivée de voir que l'accélération sera croissante. La formule (36) montre que le rapport de la poussée à la traînée croît également ; à partir d'une certaine vitesse la poussée optimale elle-même peut alors devenir croissante.

Pour des valeurs élevées du paramètre de performance l'impulsion initiale requise pour partir d'une vitesse nulle devient considérable. S'il est impossible de la réaliser en pratique on voit cependant l'intérêt de fusées d'appoint (boosters) capables de fournir pendant un certain temps une accélération aussi grande que la structure de l'engin où son instrumentation puisse la supporter.

12.33. Exemple numérique

On se donne un poids terminal $gM_1 = 100$ kg, un coefficient de résistance aérodynamique $R = 0,025$ m², une vitesse effective d'éjection constante $c = 2800$ m/sec. On demande le poids initial à l'altitude zéro qui permette d'atteindre à vitesse nulle une altitude terminale de 100 km dans les conditions de fonctionnement idéales. Il vient :

$$\frac{g}{c^2} = 1,25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1}.$$

Par conséquent pour z compris entre zéro et 10⁵ m, l'altitude réduite variera dans l'intervalle :

$$0 \leq \zeta \leq 0,125.$$

L'atmosphère sera considérée comme simplement exponentielle :

$$u = \frac{\rho}{\rho_0} = \exp\left(\frac{-\zeta}{\beta}\right) \quad \text{avec } \beta = 0,02$$

$$\rho_0 g = 1,225 \text{ kg/m}^3.$$

Le poids final étant donné il est indiqué d'intégrer le problème à rebours. Le long du segment à poussée nulle qui termine la trajectoire, l'équation du profil des vitesses se ramène à une forme commode pour un calcul numérique en adoptant la nouvelle variable u , définie plus haut. Notant que :

$$\frac{du}{d\zeta} = -\frac{u}{\beta}$$

et désignant par a la constante :

$$a = \frac{K\rho_0 c^2}{gM_f}$$

$$\frac{d\omega^2}{du} - 2a\omega^2 = \frac{2\beta}{u}$$

L'intégration se ramène à une quadrature :

$$\omega^2 - \omega_f^2 = 2\beta e^{2a\beta u} \int_{u_f}^u e^{-2a\beta u} \frac{du}{u}$$

Au moyen de la fonction :

$$F(x) = \int_0^x (1 - e^{-x}) \frac{dx}{x}$$

qui doit être tabulée une fois pour toutes, la solution s'écrit : *

$$\omega^2 = \omega_f^2 + 2\beta e^{2a\beta u} \left[\log_e \frac{u}{u_f} - F(2a\beta u) + F(2a\beta u_f) \right]. \quad (40)$$

Substituant les valeurs numériques du problème :

$$\omega_f = 0 \quad a = 244,75 \quad u_f = 0,00193$$

on peut ainsi établir le profil des vitesses en dessous de 100 km.

Le raccord avec l'arc à poussée continue se fait au moment où l'équation (35) est vérifiée. Moyennant le même changement de variable celle-ci s'écrit :

$$\frac{1}{u} = a\omega^2(1 + \omega). \quad (41)$$

L'intersection des courbes (40) et (41) dans un diagramme (u, ω) fournit le point de transition :

$$u_t = 0,025 \quad \omega_t = 0,348$$

dont on déduit :

$$\zeta_i = 0,073\,778 \quad z_i = 59,022 \text{ km} \quad V_i = 974,4 \text{ m/sec.}$$

Dans la phase à poussée continue il suffit d'évaluer numériquement la formule (34) où (ω_i, ζ_i) peuvent être remplacés par n'importe quelle paire connue de valeurs le long de l'arc, en particulier par (ω_i, ζ_i) qui viennent d'être calculés. A l'altitude zéro on trouve ainsi :

$$\omega_1 = 0,103\,25 \quad V_1 = 289,1 \text{ m/sec.}$$

Par (35) le poids de la fusée est à ce moment :

$$gM_1 = agM_f\omega_1^2(1 + \omega_1) = 287,85 \text{ kg.}$$

La phase continue a donc requis 187,85 kg de propergol. L'impulsion nécessaire à communiquer la vitesse V_1 porte ce poids à la valeur initiale :

$$gM_0 = gM_1 e^{\omega_1} = 318,15 \text{ kg.}$$

En chiffrant la formule (36) on constate que le rapport de la poussée à la traînée varie de 2,272 à 5,166 en passant du sol à l'altitude de transition. La traînée même varie de 260,9 à 74,18 kg et par conséquent la poussée diminue de 593 à 383 kg.

Il est intéressant d'évaluer la perte que représente l'existence de la traînée aérodynamique. Sans traînée le programme optimum comporte uniquement une impulsion initiale d'intensité suffisante. Comme il y a conservation de l'énergie, l'énergie potentielle finale représente une vitesse initiale à communiquer :

$$V = \sqrt{2gz_f} = \sqrt{1\,962\,000} = 1\,400 \text{ m/sec} \quad (\omega = 0,5).$$

La masse initiale serait alors :

$$100 e^{0,5} = 164,87 \text{ kg.}$$

La perte énorme de $318,15 - 164,87 = 153,28$ kg de propergol provient non seulement de l'énergie qu'il a fallu dépenser effectivement pour vaincre la traînée mais aussi de la modification du programme de combustion qu'elle a nécessité.

12.4. Optimisation du débit avec rayon d'action imposé

C'est une généralisation du problème de Hibbs [8]. Une des façons les plus élégantes de le traiter consiste à en faire un problème du type de Mayer du calcul des variations [9].

A cet effet nous reprendrons l'équation fondamentale (27) en lui adjoignant la relation entre la distance horizontale parcourue x , l'altitude et l'angle d'élévation :

$$A = cVM' \sin \theta + M(VV' + g)\sin \theta + K\rho V^2 = 0 \quad (27)$$

$$B = x' - \cot \theta = 0. \quad (42)$$

Formons alors au moyen de deux multiplicateurs de Lagrange α et β l'expression :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} (\alpha A + \beta B) dz.$$

L'emploi de l'altitude comme variable indépendante nous force à imposer ses valeurs initiale et finale. Annulons la variation première de I résultant de variations indépendantes sur M , V , θ , α et β . Il vient à la suite des intégrations par parties nécessaires :

$$\begin{aligned} \delta I &= [\alpha c V \sin \theta \delta M + \alpha M V \sin \theta \delta V + \beta \delta x]_1^2 \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \{ [I]_M \delta M + [I]_V \delta V + [I]_\theta \delta \theta + A \delta \alpha + B \delta \beta - \beta' \delta x \} dz = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

où

$$\begin{aligned} [I]_M &= -(\alpha c V \sin \theta)' + \alpha (V V' + g) \sin \theta \\ [I]_V &= -(\alpha M V \sin \theta)' + \alpha (c M' \sin \theta + M V' \sin \theta + 2 K \rho V) \\ [I]_\theta &= \alpha M' c V \cos \theta + \alpha M (V V' + g) \cos \theta + \frac{\beta}{\sin^2 \theta}. \end{aligned}$$

Outre $A = 0$ et $B = 0$ les équations d'Euler sont donc :

$$[I]_M = 0 \quad (44)$$

$$[I]_V = 0 \quad (45)$$

$$[I]_\theta = 0 \quad (46)$$

et

$$\beta' = 0.$$

Cette dernière a pour solution générale $\beta = C$, une constante. Le terme correspondant dans les variations aux limites :

$$C(\delta x_2 - \delta x_1)$$

disparaît si le rayon d'action est imposé $\delta(x_2 - x_1) = 0$.

La constante C est donc une constante isopérimétrique du problème. On notera que si le rayon d'action n'était pas imposé, il faudrait faire $C = 0$ et l'on vérifierait aisément que, par élimination de α on retrouve les résultats du problème de Tsien et Evans.

L'examen des termes restants dans les variations aux limites permet de formuler divers problèmes équivalents. Parmi ceux-ci :

1° M_1 donné et M_2 à rendre maximum avec V_1 et V_2 imposés.

C'est le problème du minimum de consommation avec rayon d'action et vitesses terminales imposées. Une alternative consiste à se donner M_2 et à chercher le minimum de M_1 .

2° M_1 et M_2 donnés ainsi que V_1 , rendre V_2 maximum.

Dans tous les cas l'ensemble des termes provenant des variations aux limites est annulé.

Ces problèmes ne diffèrent que par les conditions frontières à imposer au système des équations d'Euler. Celles-ci étant homogènes dans les multiplicateurs, posons :

$$\alpha = CQ$$

et remplaçons (44), (45) et (46) par les équations suivantes, obtenues après suppression du facteur commun C :

$$-(QcV \sin \theta)' + Q(VV' + g)\sin \theta = 0 \quad (44')$$

$$-(QM \sin \theta)' + Q(cM' \sin \theta + 2K\rho V) = 0 \quad (45')$$

$$Q \sin \theta = (K\rho V^2 \cos \theta)^{-1}. \quad (46')$$

La dernière a de plus été simplifiée par usage de (27). Elle permet l'élimination de $Q \sin \theta$ dans les autres ce qui se fait aisément par différentiation logarithmique :

$$\frac{c'}{c} - \frac{V'}{V} - \frac{(\rho \cos \theta)'}{\rho \cos \theta} = \frac{VV' + g}{cV} \quad (47)$$

$$\frac{M'}{M} - 2 \frac{V'}{V} - \frac{(\rho \cos \theta)'}{\rho \cos \theta} = \frac{cM' \sin \theta + 2K\rho V}{MV \sin \theta}. \quad (48)$$

La relation qui en découle par soustraction ne contient plus la dérivée de l'angle d'élévation ; une nouvelle utilisation de (27) permet alors de l'identifier avec (30). Il en résulte que normalement $\sin \theta > 0$ et que la trajectoire à poussée continue, si elle n'est plus verticale, reste montante.

Aux équations (27) et (30) nous associerons donc une des deux équations (47) ou (48), par exemple la première, que nous mettrons sous la forme :

$$\theta' \tan \theta = \frac{\rho'}{\rho} + \frac{g}{cV} + \frac{V'}{V} \left(1 + \frac{V}{c}\right) - \frac{c'}{c}. \quad (47')$$

Nous avons ainsi un système différentiel dont l'intégration livre les fonctions inconnues M , V et θ en fonction de l'altitude. Il est nécessaire de lui adjoindre (42) pour déterminer à chaque étape la distance horizontale parcourue et cesser éventuellement l'intégration quand le rayon d'action prévu est atteint. Comme l'altitude peut devenir très lentement variable, l'utilisation de z comme variable indépendante présente des inconvénients qui rendent préférable l'emploi de la distance x elle-même. Notant que :

$$\frac{d}{dz} = \left(\frac{dx}{dz}\right) \frac{d}{dx} = \cot \theta \frac{d}{dx}$$

le système finalement adopté est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} cV \cos \theta \frac{dM}{dx} + VM \cos \theta \frac{dV}{dx} + gM \sin \theta + K\rho V^2 = 0 \\ \left(\frac{g}{V^2} - \frac{c'}{c} \right) M = \left(\frac{K\rho}{\sin \theta} \right) \left(1 + \frac{V}{c} \right) \\ \frac{d\theta}{dx} = \frac{\rho'}{\rho} + \frac{g}{cV} - \frac{c'}{c} + \left(1 + \frac{V}{c} \right) \frac{\cot \theta}{V} \frac{dV}{dx} \\ \frac{dz}{dx} = \tan \theta . \end{array} \right.$$

Le fait que (30) reste valable fait prévoir que l'arc à poussée continue ne suffit pas à satisfaire aux données frontières. Si par exemple M_1 est donné il est possible d'ajuster θ_1 de telle façon que l'altitude finale imposée soit atteinte pour le rayon d'action prévu. L'équation (30) impose alors la vitesse initiale et la vitesse terminale est déterminée par l'intégration. Encore une fois il s'avère nécessaire de faire appel aux impulsions ou aux arcs de poussée nulle pour compléter la solution.

La théorie des impulsions terminales n'est pas différente de la précédente. Pour établir les équations qui gouvernent un segment à poussée nulle on peut procéder comme suit. Pour faciliter les notations supposons, c'est d'habitude le cas, que l'arc de poussée nulle se présente en fin de trajectoire.

On posera, la masse étant constante,

$$M = M_2 \quad M' = 0$$

et on supprimera l'équation $[I]_x = 0$ provenant des variations sur M .

De l'équation (45') on tire ainsi :

$$-M_2(Q \sin \theta)'V + 2QK\rho V = 0 \quad (45'')$$

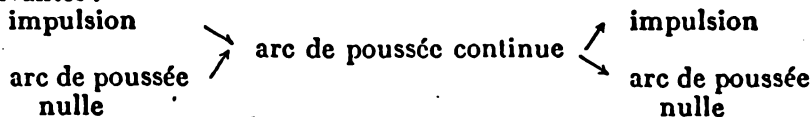
tandis que (46') reste valable. Finalement, éliminant le multiplicateur de Lagrange entre ces deux, puis V' par (27) il vient :

$$\theta' \tan \theta = \frac{\rho'}{\rho} - 2 \frac{g}{V^2} .$$

Encore une fois il est indiqué de se servir de x comme variable indépendante et le système différentiel devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} VM_2 \cos \theta \frac{dV}{dx} + gM_2 \sin \theta + K\rho V^2 = 0 \\ \frac{d\theta}{dx} = \frac{\rho'}{\rho} - 2 \frac{g}{V^2} \\ \frac{dz}{dx} = \tan \theta . \end{array} \right.$$

L'ensemble d'une trajectoire minimale se compose comme dans le cas précédent de l'une ou l'autre des combinaisons d'arcs suivantes :



Un ou deux de ces segments peuvent être absents.

Ces combinaisons contiennent le nombre de paramètres voulu pour satisfaire à l'ensemble des conditions frontières.

D'un examen des conditions de transition, implicitement contenues dans les variations aux limites, il ressort que l'angle d'élévation ne peut subir de discontinuités au passage d'un arc de poussée nulle à un arc de poussée continue et réciproquement.

Il est évident que l'intégration pratique de la trajectoire requiert un grand nombre d'essais et d'interpolations avant de satisfaire aux conditions existant aux deux extrémités de l'intervalle.

L'astronautique pose des problèmes semblables qui demandent de rendre compte de la courbure et de la variation d'intensité du champ de gravitation. Leur examen sort du cadre fixé à cet exposé. Nous devons nous borner à renvoyer le lecteur aux intéressants travaux de Lawden [10] sur ces questions.

APPENDICE

LA REPRÉSENTATION DES TRAJECTOIRES DANS LE PLAN DES ÉNERGIES SPÉCIFIQUES CINÉTIQUE ET TOTALE

Dans un plan représentatif $\left(c, \frac{1}{2} V^2\right)$ recherchons les directions admissibles des trajectoires. Par l'équation (18):

$$dc = V \frac{P - R}{M} dt.$$

D'autre part, par la définition (19) de c et l'équation (5):

$$d \frac{1}{2} V^2 = V \left[\frac{P - R}{M} - g \sin \theta \right] dt.$$

Donnant aux seconds membres la même valeur positive à dt et faisant varier $\sin \theta$ entre -1 et $+1$ on obtient les orientations

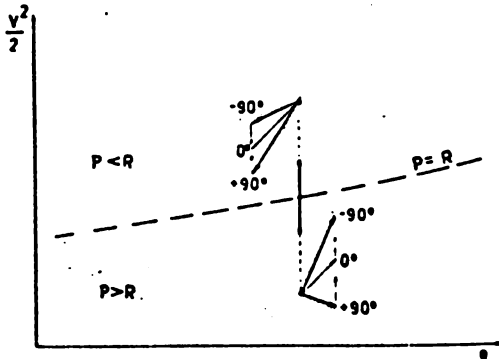


FIG. 12-5.

admissibles représentées à la figure 12-5. Le vol horizontal est évidemment toujours représenté par un segment à 45° . Le point important à noter est qu'une diminution de la masse M en un point de la région $P > R$ a pour effet de réduire l'ouverture du secteur

admissible de part et d'autre de l'orientation correspondant au vol horizontal.

La trajectoire singulière étant une montée est représentée (fig. 12-6) par une courbe dont la tangente fait avec l'axe des e

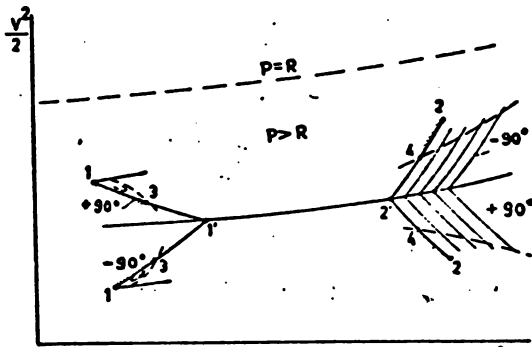


FIG. 12-6.

un angle toujours inférieur à 45° . Cette courbe est définie par l'équation (26) et partage le plan en une région inférieure, où le premier membre est négatif, et supérieure où il est positif. Or, dans le passage aux nouvelles variables la relation (9) devient :

$$\log_e \frac{M_1}{M_2} = \int_1^2 \Phi(V, e) de$$

et, pour la comparaison d'un chemin quelconque avec le chemin extrémal :

$$\log_e \frac{M_2}{M_2^*} = - \iint \frac{1}{V} \frac{\partial \Phi(V, e)}{\partial V} de VdV.$$

La recherche de la trajectoire extrémale s'établit donc par une démonstration analogue à celle de la section 12.22. Pour l'achever il faut prouver qu'un chemin de comparaison ne peut former des boucles à contribution négative.

1° En 1 l'orientation de tout chemin débutant avec la même masse initiale doit appartenir au secteur admissible et ne peut donc s'écarter des orientations limites, constituées par les segments de verticales, que dans le sens indiqué à la figure 12-6. Un tel chemin ne peut traverser le segment 11' en un point 3 de celui-ci. En effet la boucle qui serait formée étant à contribution positive la masse de comparaison $M_3^* < M_3$. Dans ces conditions le secteur des orientations admissibles est refermé et la direction d'aboutissement en 3 est interdite.

2° Il résulte du raisonnement précédent que sur tout chemin de comparaison aboutissant en un point 4 d'un segment 2'2 la

masse $M_4^* < M_4$. Il est alors impossible à un tel chemin de rejoindre un point 2. En effet, comme le secteur des orientations est refermé, le chemin doit nécessairement traverser le segment 2'2. Considérons alors les segments de verticales, analogues à 2'2, obtenus en quittant la courbe singulière en différents points situés après 2'. En supposant que le chemin de comparaison puisse retourner vers un point 2, il sera situé entièrement à gauche d'un dernier de ces segments, issu de 4', avec lequel il y a encore un point 5 commun. Mais alors il est visible que $M_5^* < M_5$, où M_5 est la masse obtenue en cheminant par 11'2'4'5. Par conséquent toutes les orientations admissibles en 5 traversent le segment 4'5 de gauche à droite. Ceci est contraire à l'hypothèse suivant laquelle ce chemin pourrait être situé entièrement à sa gauche.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE XII

- [1] P. CICALA, E. MIELE, *J. A. S.*, 22, April 1955, pp. 286-298.
 - [2] B. FRAEIJIS DE VEUREKE, Rapport non publié, janvier 1955.
 - [3] A. MIELE, *J. A. R. S.*, 25, Aug. 1955, pp. 385-391.
 - [4] A. MIELE, *L'Aerotecnica*, 32, No. 4, 1952, pp. 206-219.
 - [5] K. L. LUSH, *A. R. C. Rep. & Mem.*, 2557, 1951.
 - [6] E. S. RUTOWSKI, *J. A. S.*, 21, March 1954, pp. 187-195.
 - [7] H. S. TSIEN, R. C. EVANS, *J. A. R. S.*, 21, Sept. 1951, pp. 99-104.
 - [8] A. R. HIBBS, *J. A. R. S.*, 22, 1952, pp. 204-212.
 - [9] G. A. BLISS, *Lectures on the Calculus of Variations*, chapter VII, The University of Chicago Press (1947).
 - [10] D. F. LAWDEX, *J. B. I. S.*, 9, 1950, pp. 179-186; — *J. B. I. S.*, 11, 1952, pp. 216-224 and 278-289; — *Annual Report of the B. I. S.*, 1951-1952, pp. 321-333; — *J. A. R. S.*, 23, No. 6, 1953, pp. 360-367; — *Quart. J. of Mech. and Appl. Math.*, VII-4, 1954; — *Astronautica Acta*, I-1, 1955, pp. 41-56; — *Astronautica Acta*, I-4, 1955, pp. 185-190.
- (*J. A. S.* = *Journal of the Aeronautical Sciences*; *J. A. R. S.* = *Journal of the American Rocket Society*; *J. B. I. S.* = *Journal of the British Interplanetary Society*.)

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE	VII
NOTATIONS GÉNÉRALES	1

CHAPITRE PREMIER

Propriétés énergétiques de la propulsion par fusées (A. JAUMOTTE)

1.1 <i>Généralités</i>	3
1.11 Classification des systèmes propulsifs à réaction	3
1.12 Classification des propulseurs fusées	3
1.13 Réalisations récentes de fusées à propergols solides	4
1.131 Propulseurs d'avion	4
1.132 Engins spéciaux	7
1.133 Fusées d'altitude	10
1.134 Projectiles-fusées	10
1.135 Autres applications	10
1.14 Réalisations récentes de fusées à propergols liquides	10
1.141 Propulseurs d'avions	10
1.142 Engins spéciaux	15
1.143 Fusées d'altitude	18
1.144 Projectiles-fusées	20
1.145 Autres applications	20
1.15 But de l'étude énergétique de la propulsion par fusées	20
1.2 <i>Puissance utile et poussée d'une fusée</i>	21
1.21 Poussée	21
1.22 Puissance utile	23
1.23 Bilan énergétique	23
1.231 Mouvement relatif	23
1.232 Bilans de l'énergie cinétique	24
1.233 Puissance utile	24
1.3 <i>Puissance disponible et rendement de propulsion</i>	25
1.31 Puissance disponible	25
1.32 Rendement de propulsion	26
1.4 <i>Grandeurs spécifiques et groupements sans dimensions</i>	28

1.5	<i>Puissance maximum d'un système ouvert mobile et rendement énergétique</i>	29
1.51	Cas des systèmes immobiles	29
1.52	Cas des systèmes ouverts mobiles	31
BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE I		33

CHAPITRE II

Tuyères propulsives et paramètres caractéristiques des moteurs-fusées
(A. JAUMOTTE et J. VANDENKERCKHOVE)

2.1	<i>Généralités</i>	34
2.2	<i>Théorie des tuyères convergentes-divergentes isentropiques</i>	34
2.21	Hypothèses et équations fondamentales	34
2.22	Rappel de la propriété de saturation aérodynamique	36
2.23	Débit massique de la tuyère	37
2.24	Vitesse d'échappement de la tuyère	39
2.25	Rapport des sections A_1/A_0 en fonction du rapport de détente	41
2.26	Forme des tuyères convergentes-divergentes	42
2.27	Fonctionnement désadapté des tuyères convergentes-divergentes. Critère de Summerfield	44
2.28	Équations diverses de la théorie des tuyères	48
2.29	Remarques	48
2.3	<i>Blocage ou saturation thermique</i>	49
2.31	Écoulement à section constante et à composition invariable	49
2.32	Tuyères diabatiques	51
2.4	<i>Poussée et facteur de poussée</i>	52
2.41	Poussée	52
2.42	Facteur de poussée	54
2.43	Poussée maximum	54
2.44	Poussée en altitude	57
2.5	<i>Paramètres caractéristiques et indices de qualité</i>	58
2.51	Introduction	58
2.52	Vitesse caractéristique	58
2.53	Coefficient de débit	59
2.54	Consommation spécifique	59
2.55	Impulsion spécifique	60
2.56	Impulsion totale	60
2.57	Vitesse efficace ou effective	60
2.58	Relations entre les paramètres caractéristiques	61
2.59	Indices de qualité	61
2.6	<i>Représentation graphique</i>	62
2.61	Généralités	62
2.62	Rapport des sections A_0/A	64
2.63	Débit de la tuyère	64
2.64	Poussée et coefficient de poussée	64
2.65	Paramètres caractéristiques	65
2.7	Application : Calcul d'un moteur-fusée	65
2.8	Application : Fusée à poussée variable	68
2.9	Application : Etude d'une tuyère	70
BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE II		72

CHAPITRE III.

Généralités sur les fusées à propergol solide

(J. VANDENKERCKHOVE)

3.1	<i>Caractéristiques générales</i>	74
3.2	<i>Géométrie de la charge propulsive</i>	76
3.3	<i>Combustion</i>	79
3.31	Généralités	79
3.32	Combustion érosive	82
3.33	Note sur l'aspect physico-chimique de la combustion	83
3.4	<i>Propergols solides</i>	86
3.5	<i>Allumage</i>	88
3.6	<i>Fusées à surface de combustion transversale</i>	90
3.7	<i>Application : étude d'une fusée à surface de combustion transversale</i>	93
3.8	<i>Mise sous pression d'un réservoir à l'aide d'une fusée à poudre</i>	98
3.81	Etude du système de mise sous pression	98
3.82	Application	100

CHAPITRE IV

Les fusées à propergol solide avec surface de combustion quelconque

(J. VANDENKERCKHOVE)

4.1	INTRODUCTION	103
4.2	<i>Fusées à surface de combustion cylindrique</i>	104
4.21	Géométrie	104
4.22	Hypothèse	105
4.23	Relations entre les pressions	106
4.24	Relation d'équilibre dans la chambre	109
4.25	Remarques	110
4.26	Calcul d'une fusée à surface de combustion cylindrique	111
4.27	Calcul de la loi de poussée	114
4.3	<i>Application : étude d'une fusée à grain tubulaire. Dimensionnement. Loi de poussée. Evaluation de l'érosion. Influence de perforations radiales</i>	115
4.4	<i>Instabilités des fusées à propergols solides</i>	122
4.5	<i>Résistance mécanique du pain</i>	124
4.51	Influence de la déformation du pain	124
4.52	Fragmentation du pain	127
4.53	Influence de la nature de la poudre sur la configuration du pain	127
4.6	<i>Inhibiteurs</i>	128
4.7	<i>Couplage de fusées à propergol solide</i>	129
	BIBLIOGRAPHIE DES CHAPITRES III ET IV	131

CHAPITRE V

Etude générale des fusées à propergols liquides

(M. BARRÈRE)

5.1	<i>Le système d'injection</i>	133
5.11	Le distributeur	134
5.12	La tête d'injection	134
5.121	Écoulement à travers un orifice	134
5.122	Résolution d'un jet	136
5.123	Répartition des injecteurs élémentaires	141
5.124	Calcul d'une tête d'injection	142
5.125	Application	144
5.2	<i>Le foyer ou chambre de combustion</i>	146
5.21	Temps caractéristiques	147
5.22	Volume du foyer	147
5.23	Application	152
5.24	Similitude dans les chambres de combustion de moteurs-fusées	153
5.3	<i>La tuyère</i>	158
5.4	<i>Le système de refroidissement</i>	159
5.41	Echanges thermiques	159
5.411	Transfert de chaleur par convection	159
5.412	Transfert de chaleur par rayonnement	161
5.42	Chambres non refroidies	163
5.43	Chambres non refroidies à paroi isolante (Deriaz)	165
5.44	Chambres refroidies avec circulation de fluide	167
5.441	Détermination de la température de paroi	163
5.442	Pertes de charge dans le circuit de refroidissement	170
5.45	Système de refroidissement par film liquide ou par suage (film cooling-sweat cooling)	170
5.5	<i>Le système d'alimentation</i>	171
5.51	Système d'alimentation à pression de gaz	171
5.52	Système d'alimentation par pompe (Florio)	177
5.521	Formules générales des pompes. Courbes caractéristiques	177
5.522	Remarques	181
5.523	Entraînement des pompes (turbines)	182
5.524	Couplage turbine-pompe	184
5.53	Comparaison entre le système d'alimentation à gaz sous pression et celui à turbo-pompes	186
	BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE V	187

CHAPITRE VI

Les propergols liquides

(M. BARRÈRE)

6.1	<i>Généralités</i>	189
6.2	<i>Qualités énergétiques d'un propergol liquide</i>	190
6.21	Détermination des caractéristiques des gaz de combustion	191
6.211	Température de fin de combustion	193
6.212	Rapport γ moyen des chaleurs spécifiques	196
6.22	Comparaison des propergols : point de vue énergétique	197

6.3	Qualités cinétiques d'un propergol	203
6.31	Allumage des propergols au départ	203
6.311	Dispositifs de mesure du délai d'allumage	205
6.312	Influence de la nature du propergol sur le délai d'allumage	206
6.313	Allumage des propergols	207
6.32	Qualités cinétiques du propergol durant le régime établi	203
6.321	Détermination du délai τ et du temps de séjour t_{se} au moyen d'une injection modulée (L. Crocco)	208
6.322	Méthode de l'échelon unité	210
6.4	Qualités d'utilisation	212
6.41	Agent de refroidissement	212
6.42	Tension de vapeur	212
6.43	Viscosité	212
6.44	Corrosion	213
6.45	Dépôts	213
6.46	Stabilité	213
6.47	Toxicité	213
6.48	Prix de revient	213
6.5	CONCLUSION	213
	BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE VI	214

CHAPITRE VII

La technique expérimentale dans la propulsion par fusée
(M. BARRÈRE)

7.1	Le banc d'essais	216
7.11	Le banc de poussée	218
7.12	L'Abri des réservoirs	218
7.13	Le blockhaus	218
7.14	Servitudes	219
7.15	Sécurité	220
7.2	Dispositifs de mesure	220
7.21	Mesure de la poussée	222
7.22	Mesure des pressions	225
7.23	Mesure des débits	223
7.24	Mesure des températures	231
7.25	Détermination des vitesses	236
7.3	Organisation des essais et dépouillement	237
7.31	Coordination des différents ordres pour le fonctionnement de l'essai	237
7.32	Dépouillement et fiches d'essais	239
	BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE VII	243

CHAPITRE VIII

Les instabilités de combustion dans les moteurs.
Fusées à propergols liquides. Instabilités de basse fréquence
(M. BARRÈRE)

8.1	Généralités	249
8.2	Instabilités de basse fréquence	251
8.21	Description des phénomènes observés	251

8.22	Résultats expérimentaux	255
8.221	Influence de la longueur caractéristique	256
8.222	Influence de la pression de chambre	256
8.223	Influence des surpressions d'injection	256
8.224	Influence de la nature du propergol	257
8.225	Influence du rapport de mélange	258
8.226	Influence des longueurs des canalisations	259
8.227	Rendement de combustion	259
8.23	Etude théorique des instabilités de basse fréquence	259
8.231	Délai constant	260
8.232	Délai variable	264
8.233	Influence du système d'alimentation	269
8.234	Fusées à deux liquides	274
8.235	Discussion de la stabilité	277
BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE VIII		278

CHAPITRE IX

Etude des instabilités de haute fréquence

(M. BARRÈRE)

9.1	Description des phénomènes observés	230
9.2	Résultats expérimentaux	284
9.21	Influence de certains paramètres sur les instabilités de haute fréquence	284
9.211	Paramètres de fonctionnement	284
9.2111	Influence de la pression de la chambre et de la surpression d'injection	284
9.2112	Influence de la nature du propergol et du rapport de mélange	285
9.212	Paramètres géométriques	285
9.2121	Influence de la longueur de la chambre	285
9.2122	Influence du diamètre de la chambre	290
9.2123	Influence du convergent	292
9.2124	Influence du système d'injection	293
9.22	Rendement de combustion	294
9.3	Etude théorique des instabilités de haute fréquence	295
9.31	Etude acoustique de la chambre de combustion	295
9.32	Oscillations longitudinales	298
9.33	Oscillations transversales	306
9.4	L'effet d'échelle sur les instabilités de combustion	308
9.41	Instabilités de basse fréquence	309
9.42	Instabilités de haute fréquence	310
BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE IX		311

CHAPITRE X

Balistique externe. Engins non guidés

(M. BARRÈRE)

10.1	Equations du mouvement	312
10.2	Trajectoires verticales	314
10.21	Trajectoire verticale à traînée nulle	314
10.211	Projectiles-fusées	315
10.212	Méthode de comparaison des engins en vol vertical	318

10.3	<i>Calcul de la trajectoire oblique</i>	320
10.4	<i>Influence de la pression d'inertie et du rapport de mélange</i>	322
	10.41 <i>Pression d'inertie</i>	322
	10.42 <i>Rapport de mélange global</i>	324
10.5	<i>Avant-projet de fusée à liquides</i>	325
10.6	<i>Calcul des étages multiples</i>	329
	BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE X	332

CHAPITRE XI

Balistique externe. Principes de guidage. Accélération transversales

(B. FRAEIJIS DE VEUBEKE)

11.1	<i>Guidages coplanaires</i>	334
11.2	<i>Poursuite directe</i>	335
11.3	<i>Poursuite déviée</i>	341
11.4	<i>Poursuite sous cap constant</i>	348
	BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE XI	354

CHAPITRE XII

Balistique externe. Trajectoires optimales

(B. FRAEIJIS DE VEUBEKE)

12.1	<i>Etablissement d'un principe variationnel</i>	355
12.2	<i>Trajectoires à consommation minimum. Débit connu en fonction de l'altitude</i>	359
	12.21 <i>La courbe singulière</i>	359
	12.22 <i>Les trajectoires minimales</i>	361
	12.23 <i>Relation entre la courbe singulière et la théorie de la meilleure vitesse ascensionnelle</i>	363
12.3	<i>Optimisation du débit</i>	367
	12.31 <i>Le problème variationnel</i>	367
	12.32 <i>Les impulsions terminales</i>	370
	12.33 <i>Exemple numérique</i>	373
12.4	<i>Optimisation du débit avec rayon d'action imposé</i>	375
	APPENDICE. La représentation des trajectoires dans le plan des énergies spécifiques cinétique et totale	380
	BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE XII	383



388506464