

QUELQUES PROPRIETES DES SYSTEMES AYANT DEUX OU PLUSIEURS FREQUENCES PROPRES CONFONDUES

B. FRAEYS DE VEUBEKE

Professeur aux Universités de Liège et de Louvain

L'existence de formes propres distinctes de même fréquence dans un système vibrant ne semble pas avoir éveillé la curiosité des théoriciens. En dehors de cas élémentaires (pendule sphérique, plaque carrée vibrant transversalement) où l'existence de modes distincts de même fréquence est liée aux propriétés de symétrie, une étude systématique des possibilités de confusion de fréquence dans les systèmes généraux semble faire défaut. Ces possibilités existent pourtant et quand les modes ne peuvent être séparés à priori par des considérations de symétrie leur détermination par calcul ou essais de résonance se heurte à certaines difficultés.

Nous n'examinons ici que les structures « en chaîne », dont l'analogie électrique est une chaîne simple de $2n$ -pôles. Il est assez facile de montrer que le nombre de modes qui peuvent être confondus est lié à l'ordre n de la chaîne. On sait que les vibrations de torsion pure, de flexion simple ou de flexion-torsion d'ailes ou fuselages d'allongement suffisant peuvent être traitées sur des modèles de ce genre (¹, ²). L'article se termine par une démonstration simple et générale de propriétés d'invariance de forme propre et de fréquences par addition d'une élasticité ou d'une inertie élémentaire dans un système à modes confondus. Ces propriétés ont été établies antérieurement par GAUZY et PIRONNEAU (5).

1. CHAINE SIMPLE

Considérons (fig. 1) une chaîne simple discrète, constituée de disques rigides et d'arbres de torsion sans masse. Dans un mode de vibration propre les amplitudes angulaires θ_n et les amplitudes des couples de torsion internes entre deux disques consécutifs sont liées par les équations

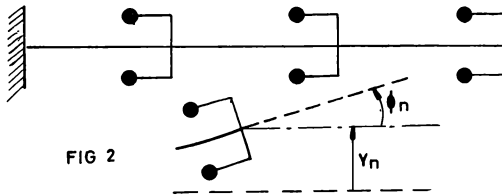
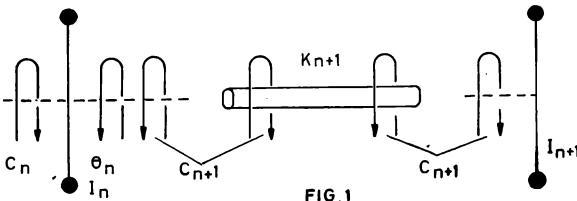
$$\begin{aligned}c_{n+1} &= k_{n+1} (\theta_{n+1} - \theta_n) \\ - \omega^2 I_n \theta_n &= c_{n+1} - c_n\end{aligned}$$

L'équation du premier type montre qu'en l'absence de torsion entre deux disques ($c_{n+1} = 0$) les amplitudes angulaires θ_n et θ_{n+1} sont égales. Cette amplitude commune, qui est aussi celle de toute section intermédiaire, ne peut alors être nulle aussi.

On voit en effet que l'introduction simultanée des conditions $c_{n+1} = 0$, $\theta_{n+1} = 0$ et $\theta_n = 0$ dans les équations entraînerait de proche en proche la nullité de toutes les amplitudes angulaires et l'absence de tout mouvement. Par conséquent on a la propriété importante suivante :

« Dans une même section entre deux disques les amplitudes de rotation et de torsion ne peuvent s'annuler simultanément. En particulier la torsion ne peut s'annuler au droit d'un nœud d'une forme propre de vibration ».

Supposons maintenant que cette chaîne simple possède deux formes propres linéairement indépendantes et de même fréquence. Toute combinaison linéaire de ces deux formes propres est elle-même une forme propre de telle fréquence et la combinaison peut être choisie de façon à créer un nœud dans une section quelconque (sinon les deux formes primitives ne seraient pas indépendantes).



On en déduit que la fixation d'un nœud dans une section quelconque devrait rester compatible avec l'existence d'une forme propre de fréquence invariable. L'absurdité de cette conclusion devient apparente quand il n'y a plus qu'un disque à gauche ou à droite du nœud. Dans le mode combiné ce disque doit osciller car sinon l'amplitude de torsion au niveau du nœud serait nulle en

contradiction avec la propriété établie plus haut. Or la fréquence de cette oscillation est déterminée; c'est celle d'un système à un seul degré de liberté, encasté à hauteur du nœud. Quelles que soient les conditions aux limites de la chaîne, cette fréquence tend vers l'infini quand on déplace graduellement le nœud vers le dernier disque. Par conséquent, la propriété d'invariance de la fréquence résultant de l'existence de deux formes propres indépendantes ne saurait être satisfaite.

Il est donc établi que : « *Dans une chaîne simple, le phénomène de confluence de deux fréquences propres ne peut se produire* ».

Cette conclusion s'étend aux vibrations de torsion des poutres continues par un passage à la limite. Dans ce cas elle résulte aussi des propriétés de l'équation caractéristique d'un système de *Sturm-Liouville* (3).

2. CHAÎNE D'ORDRE DEUX

Un exemple de chaîne discrète d'ordre deux est fourni par une suite de tiges élastiques sans masse supportant des éléments rigides, l'ensemble étant susceptible de vibrations de flexion dans un même plan (fig. 2).

L'inertie introduite par les éléments rigides est d'un caractère général si à l'amplitude y_n de la flèche et à l'amplitude φ_n de la pente au droit de l'attache correspondent respectivement une amplitude de force d'inertie transversale

$$\omega^2 m_n y_n + \omega^2 p_n \varphi_n$$

une amplitude de moment

$$\omega^2 p_n y_n + \omega^2 h_n \varphi_n$$

Aux deux coordonnées y et φ dans une section quelconque correspondent énergétiquement un effort tranchant T et un moment fléchissant M . Dans une vibration libre ces quatre amplitudes ne peuvent s'annuler simultanément dans une même section. En effet si T et M s'annulent dans une section, ils sont nuls dans les autres sections de la même tige, car ils ne sont pas alimentés par des forces d'inertie réparties.

La tige en question n'est donc pas déformée et si la flèche et la pente sont aussi nulles dans la section considérée, les éléments

rigides qui la terminent n'ont pas de déplacement et n'exercent pas de forces d'inertie. Dès lors les efforts tranchants et moment fléchissants des tiges adjacentes sont aussi nuls. De proche en proche on conclut à l'absence de mouvement de tout le système.

Supposons maintenant que la chaîne possède trois formes propres, linéairement indépendantes, de même fréquence. Par combinaison linéaire, on peut en déduire une forme propre de même fréquence ayant dans une section arbitrairement choisie des amplitudes nulles pour la flèche et la pente. Plaçons cette section vers une extrémité ne laissant qu'un élément rigide à sa droite ou à sa gauche. Dans la forme propre combinée, cette extrémité doit osciller, sinon l'effort tranchant et le moment fléchissant s'annuleraient aussi, possibilité qui vient d'être exclue. Or tout se passe pour cette extrémité comme si la section considérée était un encastrement et, quelles que soient les conditions aux limites, les fréquences possibles tendent vers l'infini quand on rapproche l'encastrement du point d'attache à l'élément rigide. La forme propre combinée de fréquence invariable ne peut donc exister. En conclusion :

« Une chaîne d'ordre deux ne peut avoir trois formes propres, linéairement indépendantes, de même fréquence ».

Par contre on établit facilement par des exemples que deux formes propres indépendantes peuvent correspondre à une même fréquence.

Le cas le plus élémentaire (fig. 3) est celui d'une masse unique dont le centre de gravité est attaché à une extrémité d'une tige élastique par un bras rigide, l'origine étant encastrée. Désignons par u et v la flèche et la pente à l'extrémité de la tige élastique sous l'effet d'une force transversale unitaire ; par ν et w les mêmes grandeurs sous l'effet d'un couple unitaire. Dès lors, m et H étant la masse et le moment d'inertie autour du centre de gravité et a la longueur du bras rigide, les équations du mouvement vibratoire sont :

$$y = \omega^2 m (y - a\varphi) u + \omega^2 (H\varphi - may + ma^2\varphi) \nu$$

$$\varphi = \omega^2 m (y - a\varphi) v + \omega^2 (H\varphi - may + ma^2\varphi) w$$

En introduisant la flèche

$$z = y - a\varphi$$

au niveau du centre de gravité et les coefficients d'influence

$$\begin{aligned} U &= u - av - a(v - aw) \\ V &= v - aw \\ W &= w \end{aligned}$$

relatifs aux efforts appliqués au centre de gravité, elles s'écrivent plus simplement

$$\begin{aligned} z &= \omega^2 m z U + \omega^2 H \phi V \\ \phi &= \omega^2 m z V + \omega^2 H \phi W \end{aligned}$$

L'équation aux fréquences

$$\omega^4 m H (UW - V^2) - \omega^2 (mU + HW) + 1 = 0$$

possède une racine double si

$$(mU + HW)^2 - 4mH(UW - V^2) = (mU - HW)^2 + 4mHV^2 = 0$$

Ceci ne peut se produire que si, simultanément

$$V = 0 \quad \text{et} \quad mU = HW$$

et la fréquence double est alors donnée par

$$\omega^2 = \frac{1}{HW} = \frac{1}{mU}$$

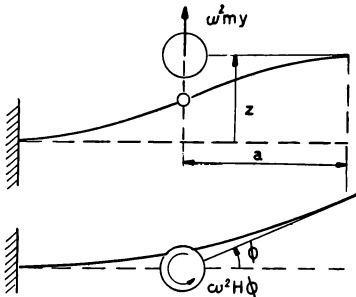


FIG 4

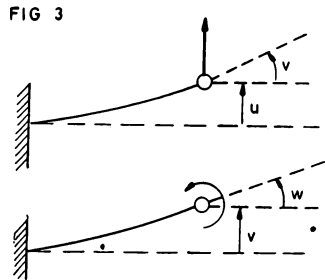
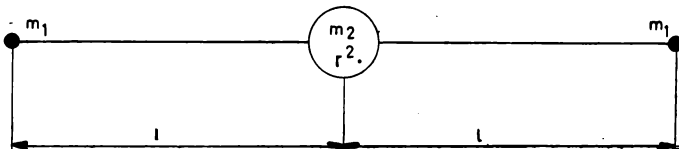


FIG 3



La première condition exprime que sous l'effet d'une force statique transversale appliquée au centre de gravité la rotation du bras est nulle et, par réciprocity, que l'application d'un couple au bras ne modifie pas la position du centre de gravité. Cette condition est parfaitement réalisable ; pour une tige de section uniforme elle a lieu pour

$$a = \frac{v}{w} = \frac{1}{2} l$$

où l est la longueur de la tige.

La dernière condition porte en fait sur le rayon de giration de la masse

$$r^2 = \frac{U}{W}$$

soit, quand la première condition est réalisée

$$r^2 = \frac{u}{w} - a^2$$

Pour la tige de section uniforme on trouve

$$r^2 = \frac{1}{12} l^2$$

Deux modes simples de vibration du système sont alors constitués par une oscillation de pompage du bras d'une part et une rotation du bras autour du centre de masse d'autre part. L'existence de ces modes ne dépend que de la première condition. Si la seconde est en outre satisfaite ils ont la même fréquence. Cet exemple indique l'importance des porte-à-faux et des rayons de giration nécessaires pour provoquer une confluence.

3. CHAINES D'ORDRE DEUX DEGENERÉES

Nous dirons qu'une chaîne est dégénérée quand le rang de la matrice des coefficients d'inertie est pour chaque élément rigide inférieur à l'ordre de la chaîne. Pour l'ordre deux cette matrice est

$$\begin{pmatrix} m_n & p_n \\ p_n & h_n \end{pmatrix}$$

L'énergie cinétique ne pouvant être négative on a

$$m_n \geq 0 \quad h_n \geq 0 \quad m_n h_n - p_n^2 \geq 0$$

Si la dernière relation est une inégalité stricte, la matrice est de rang deux (elle est en fait définie positive) et la chaîne n'est pas dégénérée. Par contre, il suffit que le déterminant soit nul pour qu'il y ait dégénérescence. Ceci a lieu en particulier si l'un des termes diagonaux est nul, le terme de couplage p_n l'étant alors nécessairement aussi.

On peut se demander si les possibilités de confusion de fréquence sont liées au caractère de dégénérescence aussi bien qu'à l'ordre de la chaîne. Les exemples qui suivent montrent qu'une telle liaison existe, quoique d'autres éléments interviennent également.

Prenons d'abord le cas où les porte-à-faux sont supprimés, ce qui annule les coefficients de couplage p_n mais ne rend pas la chaîne dégénérée. Ce cas est intéressant parce qu'il correspond au problème usuel de la flexion avec prise en considération de l'inertie rotatoire. La construction d'un exemple simple montre que les possibilités de confusion de fréquence sont conservées.

Considérons le modèle de chaîne de flexion (fig. 4) libre aux extrémités et symétrique par rapport à la masse centrale, la seule douée d'inertie de rotation. Désignons respectivement par u et w la flèche de la masse centrale sous l'effet d'une charge transversale unitaire et sa rotation sous l'effet d'un couple unitaire quand on maintient les extrémités par des appuis simples. Les fréquences du mode symétrique et du mode antisymétrique de la chaîne libre sont alors

$$\omega_s^2 = \frac{2m_1 + m_2}{2um_1m_2} \quad \omega_a^2 = \frac{2m_1l^2 + m_2r^2}{2wm_1m_2r^2l^2} e$$

où r désigne le rayon de giration de la masse centrale. Pour des tiges de section uniforme

$$u = l^2w$$

et la confluence a lieu seulement pour

$$r = l$$

On peut inférer de ce résultat que si l'inertie rotatoire est susceptible de provoquer une confluence dans les modes de flexion

ceci ne se produira vraisemblablement qu'à des fréquences élevées où la distance entre nœuds est de l'ordre de grandeur du rayon de giration d'une section transversale. Observons toutefois qu'à de telles fréquences le modèle de la chaîne d'ordre deux devient une idéalisation douteuse.

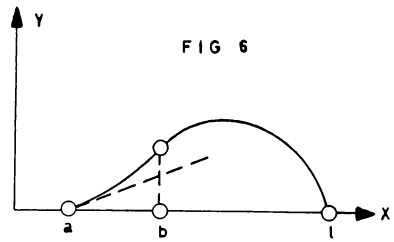
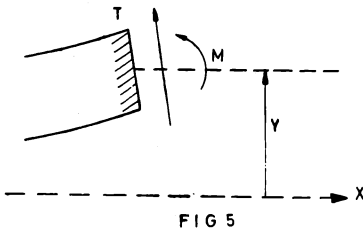
Examinons maintenant le cas réellement dégénéré où l'inertie rotatoire est elle-même négligée $p_n = 0$ et $h_n = 0$. Il est cette fois possible de prouver sur le modèle continu que les confusions de fréquence ne se produisent jamais.

Les relations suivantes (fig. 5) lient les amplitudes de vibration des moments fléchissants, efforts tranchants et flèches :

$$M = EIy''$$

$$T = -M'$$

$$\omega^2 m y = -T'$$



L'accent désigne la dérivation par rapport à x et m est la masse répartie. On en déduit l'équation différentielle

$$(EIy'')'' = \omega^2 m y \quad (1)$$

Cas où une extrémité est libre :

Soit $x = l$ cette extrémité où dès lors $EIy'' = 0$ et $(EIy'')' = 0$. Intégrant l'équation différentielle deux fois d'une abscisse quelconque jusqu'à cette extrémité

$$EIy'' = \omega^2 \int_x^l (\xi - x) m(\xi) y(\xi) d\xi \quad (2)$$

Supposons maintenant qu'il existe deux modes linéairement indépendants correspondant à la fréquence ω et considérons le

mode combiné pour lequel $y(l) = 0$. Si l'autre extrémité en $x = 0$ est simplement appuyée ou encastrée $y(0) = 0$. Si elle est aussi libre on doit avoir

$$\int_0^l m(\xi) y(\xi) d\xi = 0$$

Cette condition exprime que le centre de masse ne se déplace pas ; on l'obtient aussi par orthogonalité avec le mode de déplacement rigide $y = 1$. Dans tous les cas on voit que $y(\xi)$ s'annule au moins une fois en un autre point que $\xi = l$. Soit $\xi = a$ le zéro de y le plus proche de $\xi = l$, de sorte que y peut être pris positif dans l'intervalle $a \leq \xi \leq l$, alors

$$(EIy'')_{x=a} = \omega^2 \int_a^l (\xi - a) m(\xi) y(\xi) d\xi > 0$$

Cette conclusion implique (fig. 6) que la courbure doit changer de signe dans l'intervalle considéré. Mais alors, puisque y reste positif dans l'intervalle compris entre le point d'inflexion en $\xi = b$ et l'extrémité on aboutit en appliquant l'équation (2) en $x = b$ à la contradiction

$$0 = \omega^2 \int_b^l (\xi - b) m(\xi) y(\xi) d\xi > 0$$

Cas où une extrémité est simplement appuyée :

Soit de nouveau $x = l$ cette extrémité où maintenant $EIy'' = 0$ et $y = 0$. On est ramené au raisonnement précédent en choisissant la combinaison de modes qui annule l'effort tranchant en $x = l$, de sorte que de nouveau $(EIy'')' = 0$ à cette extrémité. Les seuls cas qui ne rentrent pas dans un des cas précédents sont ceux où l'extrémité en $x = 0$ est simplement appuyée ou encastrée. On est donc encore certain que $y(\xi)$ s'annule ailleurs qu'en $x = l$.

Cas où les deux extrémités sont encastrées :

C'est le seul cas de conditions aux limites qui échappe au traite-

ment précédent. Multiplions maintenant l'équation différentielle (1) par x et intégrons de 0 à a :

$$\int_0^a (EIy''')' x dx = [EIy''']'_{x=a} a - [EIy''']_{x=a} + [EIy''']_{x=0} \\ = \omega^2 \int_0^a m x y dx \quad (3)$$

De plus, du fait que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ on peut écrire

$$y(x) = \int_0^x (x - \xi) y''(\xi) d\xi \quad (4)$$

Soit $x = a$ la plus petite abscisse où la courbure s'annule, elle garde donc le même signe, positif par exemple, dans l'intervalle $0 \leq x \leq a$ et par (4) on en déduit que y est positif dans le même intervalle. Dès lors, par (3)

$$[EIy''']'_{x=a} a + [EIy''']_{x=0} = \omega^2 \int_0^a m x y dx > 0 \quad (5)$$

Postulant à nouveau l'existence de deux modes linéairement indépendants, considérons la combinaison qui annule la courbure à l'origine. Il vient alors par (5)

$$[EIy''']'_{x=a} > 0$$

Ce résultat est encore une fois contradictoire, car si la courbure est positive et s'annule aux extrémités de l'intervalle $0 \leq x \leq a$, il en est de même pour le moment fléchissant $[EIy'']$ et sa dérivée en $x = a$ doit être négative.

En conclusion : « *Les chaînes d'ordre deux dégénérées, pour lesquelles les effets d'inertie ne sont liés qu'à un seul des deux types de déplacement, ne peuvent présenter le phénomène de confluence de fréquences propres* ».

Un dernier exemple nous empêchera de généraliser cette conclusion pour tous les types de dégénérescence.

Considérons le cas où les éléments rigides sont constitués de

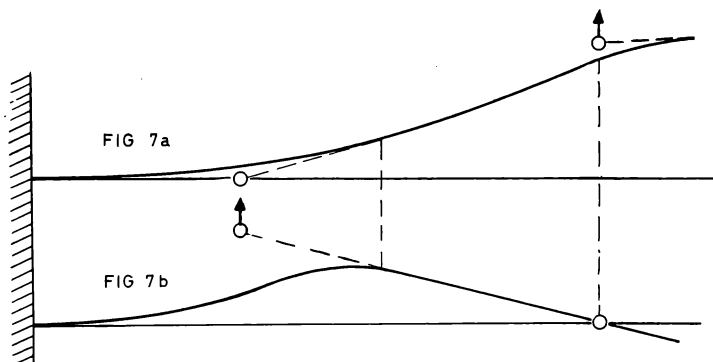
masses ponctuelles portées par des bras rigides sans masse de longueurs a_n (ce cas est donc d'intérêt purement théorique). On a ici :

$$p_n = a_n^2 m_n \quad h_n = a_n m_n$$

et la condition de dégénérescence

$$m_n h_n - p_n^2 = 0$$

est bien satisfaite.



Nous pouvons établir sans calculs sur un modèle à deux masses, l'existence possible de deux modes distincts de même fréquence. La figure 7a montre la déformée élastique sous l'effet d'une force d'inertie sur la seconde masse. La longueur du bras rigide supportant la première masse est ajustée de façon à annuler son déplacement transversal. Par conséquent cette déformée représente une forme propre dont la fréquence est ajustable arbitrairement par la valeur de la seconde masse.

Par réciprocité élastique une force transversale d'inertie sur la première masse (fig. 7b) laisse la seconde masse en place. La déformée correspondante est l'autre forme propre de vibration de ce système et sa fréquence peut être rendue égale à la première en ajustant la valeur de la première masse.

4. CHAINES D'ORDRE PLUS ELEVE

Par extension des raisonnements précédents, on peut établir le résultat suivant :

« Une chaîne d'ordre n ne peut avoir plus de n formes propres linéairement indépendantes en confusion de fréquence ».

Ainsi dans le cas des vibrations couplées de flexion-torsion d'une aile d'avion, supposée encastree au fuselage, trois formes propres au plus peuvent confluer. De plus, par suite de la faible importance de l'inertie rotatoire, la possibilité de confluence de trois modes est reculée dans le spectre des hautes fréquences. Si dans le calcul cette inertie est complètement négligée, deux modes seulement peuvent confluer.

Pour les ailes de faible allongement, la théorie classique de la flexion et torsion des poutres n'est plus adéquate et l'incorporation de déformations additionnelles, tel un mode de flexion dans le sens de la corde, conduit à une théorie basée sur une chaîne d'ordre plus élevé et augmente le nombre de modes qui peuvent confluer.

Un avion complet peut être considéré comme constitué d'un assemblage de chaînes, représentant les ailes, le fuselage, les empennages. Il est évident que le couplage de ces chaînes n'augmente pas les possibilités de confluence de sorte que le nombre de modes de l'avion complet qui peuvent avoir la même fréquence est fixé par l'ordre de la chaîne la plus complexe.

5. ADDITION D'UNE RAIDEUR OU D'UNE INERTIE ELEMENTAIRE

Le problème de la modification des propriétés vibratoires d'un système par addition d'une raideur ou d'une inertie élémentaire a été considéré par Lord RAYLEIGH (4). Dans le but d'étendre son analyse au cas des systèmes ayant des fréquences propres confondues et d'obtenir une preuve simple et générale des résultats de GAUZY et PIRONNEAU (5), nous utiliserons les notations matricielles.

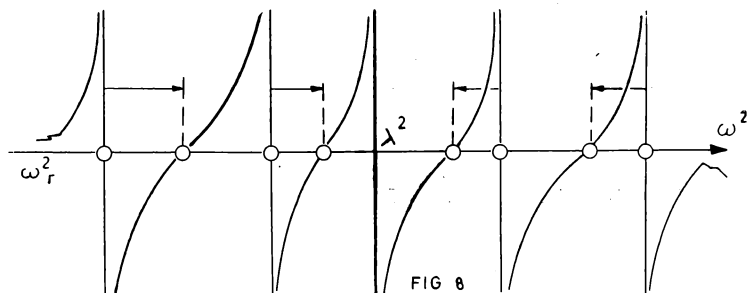


FIG 8

Soit q la matrice colonne des coordonnées généralisées q_i décrivant la configuration du système. Nous désignerons par C la matrice carrée des coefficients d'élasticité (c_{ij}) et par M celle des coefficients d'inertie (m_{ij}). Ces matrices sont symétriques

$$C' = C \quad M' = M$$

L'accent désignant l'opération de transposition ou échange des lignes et colonnes. L'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système peuvent alors s'écrire

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}' M \dot{q} \quad V = \frac{1}{2} q' C q$$

où \dot{q} désigne la matrice colonne des dérivées temporelles

Dans un mode normal de vibration

$$q = (\cos \omega t) x$$

où x est une matrice colonne de constantes définissant la forme propre du mode. Dès lors dans un mode

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \omega^2 x' M x \quad V_{\max} = \frac{1}{2} x' C x$$

L'équation matricielle à laquelle la forme propre doit obéir peut être obtenue en appliquant la forme suivante du principe de Hamilton.

$$\delta T_{\max} = \delta V_{\max}$$

pour des variations arbitraires et indépendantes des éléments de x .

Comme $\delta T_{\max} = \omega^2 \delta x' M x$

et de même $\delta V_{\max} = \delta x' C x$

l'application du principe fournit

$$\delta x' (\omega^2 M x - C x) = 0$$

ce qui ne peut avoir lieu pour des variations indépendantes que si

$$\omega^2 M x = C x \tag{6}$$

Nous appelons inertie élémentaire toute inertie *associée à une combinaison linéaire des coordonnées*. Ainsi pour une inertie élémentaire additionnelle, μ , l'énergie cinétique additionnelle sera de la forme

$$\frac{1}{2} \mu (h_1 \dot{q}_1 + h_2 \dot{q}_2 + \dots + h_n \dot{q}_n)^2$$

Désignant par h la matrice colonne des coefficients h_i de la combinaison linéaire, ceci peut s'écrire sous forme matricielle

$$\frac{1}{2} \mu (\dot{q}' h) (h' \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}' (\mu h h') \dot{q}$$

Sous cette dernière forme on voit que l'addition de cette inertie élémentaire revient à modifier comme suit la matrice des coefficients d'inertie (*)

$$M + \mu h h'$$

De même l'addition d'une raideur élémentaire κ consiste à additionner une énergie potentielle de la forme

$$\frac{1}{2} \kappa (h_1 q_1 + \dots + h_n q_n)^2 = \frac{1}{2} \kappa q' h h' q$$

et à modifier comme suit la matrice des coefficients d'élasticité

$$C + \kappa h h'$$

Examinons maintenant les modifications survenant dans les modes de vibration à la suite de cette double addition (noter que la même colonne de coefficients h_i est utilisée dans les deux additions). L'équation aux formes propres modifiées est

$$\omega^2 (M + \mu h h') y = (C + \kappa h h') y \quad (7)$$

Soient $x_{(i)}$ les formes propres du système primitif pour lesquelles, d'après (6)

$$\omega_i^2 M x_{(i)} = C x_{(i)} \quad (8)$$

et développons une forme propre modifiée en combinaison linéaire de formes propres primitives

$$y = \alpha_1 x_{(1)} + \dots + \alpha_n x_{(n)} \quad (9)$$

Substituant ce développement dans (7) et compte tenu de (8) il vient

$$\sum_{i=1}^n (\omega_i^2 - \omega^2) \alpha_i M x_{(i)} + \mu (\lambda^2 - \omega^2) \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right) h = 0 \quad (10)$$

(*) Le produit $h h'$ qui constitue une matrice carrée ($n \times n$) est ce qu'on appelle parfois le produit tensoriel de deux vecteurs ou une dyade.

où on a posé

$$\lambda^2 = x/\mu \quad \text{et} \quad \beta_i = h'x_{(i)} = x'_{(i)}h$$

Multiplions maintenant (10) à gauche par $x'_{(r)}$ et utilisons les relations d'orthogonalité des formes propres

$$x'_{(r)} Mx_{(i)} = 0 \quad r \neq i$$

en outre normées par la condition

$$x'_{(r)} Mx_{(r)} = \gamma_r > 0$$

nous obtenons

$$\gamma(\omega_r^2 - \omega^2)\alpha_r + \mu(\lambda^2 - \omega^2)\beta_r(\sum \alpha_i \beta_i) = 0 \quad (r = 1 \dots n) \quad (11)$$

Ce système linéaire et homogène dans les coefficients α_r pose un problème aux valeurs propres (de ω^2) équivalent au problème (7) dont on est parti. Il est cependant intéressant à deux points de vues. Tout d'abord par la forme remarquable de l'équation aux fréquences modifiées qu'on peut en déduire. Elle s'obtient en mettant tout d'abord les équations (11) sous la forme équivalente

$$\frac{\alpha_r}{\mu(\lambda^2 - \omega^2)} + \frac{\beta_r}{\gamma(\omega_r^2 - \omega^2)}(\sum \alpha_i \beta_i) = 0 \quad (12)$$

puis en multipliant chacune d'elles par son coefficient β_r et en les additionnant. Il vient, après suppression du facteur commun $\sum \alpha_i \beta_i = \sum \alpha_r \beta_r$

$$\Phi = \frac{1}{\mu(\lambda^2 - \omega^2)} + \sum_{r=1}^n \frac{\beta_r^2}{\gamma(\omega_r^2 - \omega^2)} = 0$$

La fonction Φ de ω^2 est essentiellement croissante car sa dérivée est partout positive

$$\frac{d\Phi}{d(\omega^2)} = \frac{1}{\mu(\lambda^2 - \omega^2)^2} + \sum_{r=1}^n \frac{\beta_r^2}{\gamma(\omega_r^2 - \omega^2)^2} > 0$$

Elle saute de moins à plus l'infini pour chacune des fréquences propres du système primitif et aussi pour la « fréquence d'addition λ ». Ses zéros sont les fréquences propres du système modifié et par conséquent (fig. 8) toutes les fréquences du système primitif ont tendance à glisser vers la fréquence d'addition. En particulier, si $x = 0$ ($\lambda = 0$) du fait de l'addition d'une seule inertie, toutes

les fréquences sont abaissées, si $\mu = 0$ ($\lambda = \infty$) du fait de l'addition d'une seule raideur, toutes les fréquences sont augmentées.

Si les coefficients h_i sont tels que pour un des modes primitifs

$$\beta_m = h'x_{(m)} = 0 \quad (13)$$

on ne peut conclure à partir de (12) ce qu'il advient de la fréquence primitive ω_m . Cependant l'examen direct de (7) montre que, du fait de (13), $x_{(m)}$ reste une solution du problème modifié avec la fréquence ω_m . Par conséquent la modification du système n'affecte dans ce cas ni la fréquence ω_m ni la forme propre associée $x_{(m)}$. L'exemple le plus simple d'une telle occurrence est l'addition d'une masse ou d'un ressort ou des deux à hauteur d'un nœud de forme propre de flexion.

Un autre cas particulier remarquable est celui où la fréquence d'addition est égale à une fréquence propre du système primitif. Soit

$$\lambda = \omega_m \quad \text{ou encore} \quad \mu\omega_m^2 = \kappa$$

On voit dès lors directement sur (7) que pour $\omega = \omega_m$ les termes additifs se détruisent et que $x_{(m)}$ reste solution du système modifié *quels que soient les coefficients h_i* .

La même conclusion ressort d'un examen des équations (11). Car si on y fait $\omega = \omega_m = \lambda$ on a, quels que soient les coefficients β_r , la solution évidente

$$\alpha_r = 0 \text{ pour } r \neq m$$

$$\alpha_m \text{ arbitraire}$$

6. LE THÉORÈME D'INVARIANCE EN CAS DE FRÉQUENCES PROPRES CONFONDUES

L'invariance d'une forme propre et de sa fréquence nécessite en général un choix particulier de l'addition d'inertie et de raideur de façon à satisfaire à (13). Cependant comme l'ont montré GAUZY et PIRONNEAU une telle invariance a lieu pour une modification élémentaire *de type arbitraire* si le système a deux fréquences propres égales.

La démonstration générale de cette propriété sur l'équation

(7) est d'un caractère élémentaire. Si

$$x_{(m_1)} \quad \text{et} \quad x_{(m_2)}$$

sont deux formes propres linéairement indépendantes appartenant à la fréquence ω_m , on peut toujours trouver une combinaison linéaire des deux satisfaisant à (13) pour une colonne h arbitraire.

En effet, l'équation linéaire et homogène aux deux inconnues ε_1 et ε_2

$$h'(\varepsilon_1 x_{(m_1)} + \varepsilon_2 x_{(m_2)}) = (h' x_{(m_1)}) \varepsilon_1 + (h' x_{(m_2)}) \varepsilon_2 = 0$$

a toujours une solution non triviale. Cette combinaison, elle-même forme propre, est alors conservée en forme et fréquence après la modification.

La généralisation est évidente. Si le système primitif possède p formes propres indépendantes associées à la fréquence ω_m

$$x_{(m_1)} \dots x_{(m_p)}$$

q additions élémentaires d'inertie et de raideur ($q < p$) laissent au moins $p - q$ combinaisons invariantes. En effet le système linéaire et homogène en $(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p)$

$$[h'_{(t)} x_{(m_1)}] \varepsilon_1 + \dots + [h'_{(t)} x_{(m_p)}] \varepsilon_p = 0 \quad (t = 1 \dots q)$$

est en général de rang q et possède alors $p - q$ solutions indépendantes. Une condition nécessaire, mais non suffisante, pour avoir le rang q est que les $h_{(t)}$ soient linéairement indépendants.

7. PERTURBATION DES AUTRES FORMES PROPRES

Comme Lord Rayleigh l'a montré, sous une forme différente, les équations (11) résolvent aussi le problème de la modification des formes propres et de leur fréquence quand l'addition se réduit à une petite perturbation. Dans ce cas il faut supposer que les éléments de $\mu h h'$ sont petits devant ceux de M et les éléments de $\kappa h h'$ petits devant ceux de C . Alors la forme propre modifiée $y_{(s)}$ ne diffère que peu de $x_{(s)}$ et si nous nous abstenons provisoirement de la normer, on peut prendre $\alpha_s = 1$ et

$$\alpha_i \ll \alpha_s \quad \text{pour} \quad i \neq s$$

On peut alors poser dans (11)

$$\sum \alpha_i \beta_i \cong \beta_s$$

dans l'hypothèse additionnelle où β_s n'est pas d'un ordre de grandeur inférieur aux autres β_i . Les équations (11) se réduisent alors à

$$\gamma(\omega_r^2 - \omega^2)\alpha_r + \mu(\lambda^2 - \omega^2)\beta_r\beta_s = 0 \quad (r = 1 \dots n)$$

Pour $r = s$ on obtient directement la fréquence modifiée

$$\omega^2 = \frac{\gamma\omega_s^2 + \mu\lambda^2\beta_s^2}{\gamma + \mu\beta_s^2} = \frac{\gamma\omega_s^2 + \kappa\beta_s^2}{\gamma + \mu\beta_s^2} \quad (14)$$

et les autres équations fournissent alors chacune un des coefficients de l'expansion

$$y_{(s)} = x_{(s)} + \sum_{r \neq s} \alpha_r x_{(r)} \quad (15)$$

$$\alpha_r = - \frac{\mu(\lambda^2 - \omega^2)\beta_r\beta_s}{\gamma(\omega^2 - \omega_s^2)}$$

RÉFÉRENCES

- (1) N.O. MYKLESTADT, A new method of calculating natural modes of uncoupled bending vibrations of airplane wings and other types of beams. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 11-2, April 1944, pp. 153-163.
- (2) W.P. TARGOFF, The associated matrices of bending and coupled bending-torsion vibrations. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 14-10 Oct. 1947, pp. 579-583.
- (3) INCE, Ordinary differential equations. Dover Publ. N.-Y., 1944, p. 241.
- (4) LORD RAYLEIGH, Theory of Sound. Dover Publ. N.-Y., Section 92a.
- (5) H. GAUZY et Y. PIRONNEAU, Un avion peut-il avoir deux fréquences propres égales?, *La Recherche Aéronautique*, 64, mai-juin 1958, pp. 43-49.