Nicht im Handel

Sonderabdruck aus Vol. IV, 1958, Fasc. 1

ASTRONAUTICA ACTA

Springer-Verlag in Wien

Le problème du maximum de rayon d'action dans un champ de gravitation uniforme

Par

B. Fraeijs de Veubeke[1]

(*Reçu le 29 août 1957*)

Résumé — Zusammenfassung — Abstract

Le problème du maximum de rayon d'action dans un champ de gravitation uniforme. Le problème du maximum de rayon d'action dans un champ de gravitation uniforme est traité, suivant la voie indiquée par Cicala [1], comme un problème de Mayer du calcul des variations.

Cependant l'emploi du temps comme variable indépendante a été écarté au profit d'une représentation paramétrique qui facilite le choix du système différentiel assurant les calculs numériques les plus compacts [2].

Diverses approximations sont envisagées et une attention particulière a été portée à la prolongation balistique de la trajectoire et à son raccordement à la phase propulsive.

L'emploi des critères classiques, dont celui de Weierstrass, permet de décider si la solution stationnaire fournie par les équations d'Euler donne un maximum véritable. Cependant le critère quantitatif de Jacobi n'est guère susceptible que d'une vérification par calcul numérique.

Das Problem des maximalen Wirkungsbereiches in einem gleichförmigen Schwerefeld. Es wird das Problem der maximalen Reichweite in einem gleichförmigen Schwerefeld, dem von Cicala [1] angegebenen Weg folgend, als eine Aufgabe der Variationsrechnung nach Mayer behandelt.

Indessen wurde die Verwendung der Zeit als unabhängige Variable zugunsten einer Parameterdarstellung verlassen, welche die Wahl des Differentialsystems erleichtert, das die zweckmäßigsten numerischen Rechnungen gewährleistet.

Verschiedene Annäherungen wurden ins Auge gefaßt; besondere Aufmerksamkeit wurde der ballistischen Verlängerung der Bahn und ihrer Verbindung mit der Antriebsphase gewidmet.

Die Verwendung der klassischen Kriterien, darunter derjenigen von Weierstrass, gestattet die Entscheidung, ob die durch die Gleichungen von Euler gelieferte stationäre Lösung ein wirkliches Maximum gibt. Hingegen ist das quantitative Kriterium nach Jacobi nur für eine Verifizierung durch numerische Integration geeignet.

The Problem of Maximum Range in a Uniform Gravitational Field. The problem of maximum range in a uniform gravitational field is treated, after a method indicated by Cicala [1], as a Mayer problem of the calculus of variations.

However, the use of time as independent variable has been discarded in favour of a parametric representation which facilitates the selection of a differential system ensuring the most compact numerical calculations [2].

---

[1] Laboratoire d'aéronautique, 75, rue du Val-Benoit, Liége, Belgique.

Various approximations are examined and particular attention is given to the ballistic extension of the trajectory and its junction with the propulsive phase.

The use of classical criteria, such as that of WEIERSTRASS, makes it possible to decide if the stationary solution provided by the EULER equations gives a true maximum. However, the quantitative criterion of JACOBI cannot be verified otherwise than by numerical integration.

1. Introduction

Nous nous proposons d'analyser la trajectoire assurant un maximum de distance horizontale parcourue aux engins munis de surfaces portantes évoluant dans un champ de gravitation uniforme.

Dans une note remarquable mais très condensée CICALA [1] a exposé l'application de la technique de MAYER au problème général des performances optimales. Cette optimisation portait à la fois sur la distribution de la portance (ou de l'angle d'incidence aérodynamique) et sur la distribution de la force propulsive.

Nous avons montré par ailleurs comment la représentation paramétrique, outre sa souplesse, évite la nécessité d'un traitement séparé pour les problèmes brachistochrones et permet d'inclure rationnellement les impulsions dans les trajectoires décrites avec moteur fusée [2]. Nous avons aussi donné une synthèse de la trajectoire doublement optimale pour le problème du minimum de consommation avec rayon d'action prescrit [3]. Le maximum de rayon d'action sous consommation donnée est un problème équivalent et, quoique le traitement précédent soit restrictif, dans ce sens qu'il néglige par exemple la traînée induite, nous ne croyons pas utile d'y revenir. En effet la formulation générale de ce problème n'est qu'une petite extension de l'analyse présentée dans [2] et il y a peu d'éléments nouveaux à joindre à la discussion des résultats.

Nous nous placerons plutôt dans le cas où le réglage intentionnel de la force propulsive est abandonné. Plus précisément le débit de consommation et par voie de conséquence la masse totale de l'engin seront supposés être des fonctions connues du temps. Les problèmes brachistochrones de ce type, qui ne comporte donc que l'optimisation de la portance, ont fait l'objet d'une note intéressante de CICALA et MIELE [4].

Notre but est ici d'examiner spécialement les possibilités de prolongation balistique après épuisement du combustible et les conditions précises du raccordement de cette phase avec la phase propulsive.

Plusieurs types d'approximation sont examinés non seulement dans l'idée de dégager des propriétés intéressantes de la trajectoire, qui autrement sont masquées par la généralité de la formulation, mais aussi de jeter un pont entre la théorie variationnelle moderne des performances et les théories anciennes quasi-statiques.

2. Équations du mouvement

Le rayon d'action est mesuré suivant un axe horizontal Ox, l'axe Oz étant opposé à la direction de la pesanteur. Soit σ le paramètre à croissance monotone entre des limites fixes σ_1 et σ_2. La trajectoire est caractérisée par les fonctions suivantes:

$V(\sigma)$ la vitesse de vol,
$\theta(\sigma)$ l'angle du vecteur vitesse avec l'horizontale,
$z(\sigma)$ l'altitude,
$x(\sigma)$ la distance horizontale parcourue,
$t(\sigma)$ le temps de vol.

Les dérivées par rapport au paramètre seront dénotées par un exposant ^{0}; par exemple

$$dt/d\sigma = t^0 \geqslant 0.$$

Les équations intrinsèques du mouvement suivant la tangente et la normale à la trajectoire s'écrivent respectivement

$$[F]_\alpha = MV^0 - (T - D - Mg\sin\theta)\, t^0 = 0 \tag{1}$$

$$[F]_\lambda = MV\theta^0 - (L - Mg\cos\theta)\, t^0 = 0 \tag{2}$$

où M est la masse totale instantanée de l'engin; elle est liée au débit de consommation $m(t)$ par la relation

$$\frac{dM}{dt} = -\, m(t) \qquad \text{et donc} \qquad M(t) = M_1 - \int_0^t m(t)\, dt. \tag{3}$$

T est la poussée du propulseur, supposée dirigée suivant la tangente à la trajectoire; c'est une fonction déterminée du débit de consommation, de la vitesse et de l'altitude

$$T = T(m(t), V, z). \tag{4}$$

La traînée D est une fonction connue de la forme

$$D = D_0(z, V) + L^2 D_1(z, V), \tag{5}$$

L étant la portance.

L'altitude et la distance horizontale parcourue sont liées à la vitesse et à sa direction par les relations cinématiques

$$[F]_\beta = z^0 - Vt^0 \sin\theta = 0 \tag{6}$$

$$[F]_\xi = x^0 - Vt^0\cos\theta = 0. \tag{7}$$

La trajectoire peut être modifiée en agissant sur la variable L. Dès que celle-ci est connue en fonction du paramètre ou des autres variables la trajectoire est déterminée; on peut donc l'appeler une variable de guidage. Notre problème est de la déterminer de telle façon que la distance horizontale parcourue soit un maximum.

Si m n'était pas une fonction connue du temps on pourrait s'en servir comme d'une deuxième variable de guidage (problème de la double optimisation).

3. Les équations d'Euler, traînée induite négligée

L'approximation consistant à négliger l'effet de la traînée induite s'exprime en posant $D_1 = 0$. On observe alors que la portance n'intervient plus que dans la seule équation (2). Celle-ci n'intervient plus dans le problème variationnel de la trajectoire optimale mais nous sert a posteriori pour le calcul de la portance requise dans la description de cette trajectoire. En d'autres termes L devient une variable ignorable; son rôle de variable de guidage est repris par l'angle θ. En effet, l'équation (2) écartée, ce dernier n'intervient plus dans sa dérivée ce qui est une caractéristique essentielle d'une variable de guidage [2].

Formons alors avec des multiplicateurs de LAGRANGE variables $\alpha(\sigma)$, $\beta(\sigma)$ et $\xi(\sigma)$ la fonction

$$F = \alpha[F]_\alpha + \beta[F]_\beta + \xi[F]_\xi. \tag{8}$$

Si la trajectoire respecte les équations du mouvement cette fonction est toujours nulle ainsi que son intégrale

$$I = \int_1^2 F\, d\sigma$$

et il en sera de même de la variation première de I qui s'écrit

$$\delta I = [\alpha M\, \delta V + \beta\, \delta z + \xi\, \delta x - U\, \delta t]_1^2 + \\ + \int_1^2 ([F]_V\, \delta V + [F]_z\, \delta z + [F]_x\, \delta x + [F]_\theta\, \delta\theta + [F]_t\, \delta t)\, d\sigma = 0 \qquad (9)$$

où

$$[F]_V = -\,[\alpha M]^0 - \alpha\, t^0 \frac{\partial}{\partial V}(T - D_0) - \beta\, t^0 \sin\theta - \xi\, t^0 \cos\theta$$

$$[F]_z = -\,\alpha\, t^0 \frac{\partial}{\partial z}(T - D_0) - \beta^0$$

$$[F]_x = -\,\xi^0$$

$$[F]_\theta = t^0 (\alpha M g \cos\theta - \beta\, V \cos\theta + \xi\, V \sin\theta)$$

$$[F]_t = U^0 - \alpha\, m\, (V^0 + g\, t^0 \sin\theta) - \alpha\, t^0 \frac{dm}{dt}\frac{\partial T}{\partial m}$$

$$U = \alpha\,(T - D_0 - Mg\sin\theta) + \beta\, V\sin\theta + \xi\, V\cos\theta.$$

Les équations d'Euler d'une trajectoire stationnaire sont donc

$$[F]_V = 0, \qquad [F]_z = 0, \qquad [F]_x = 0, \qquad [F]_\theta = 0, \qquad [F]_t = 0.$$

En vertu de la représentation paramétrique on sait [5, 2] qu'elles ne sont pas indépendantes mais liées par l'identité

$$\alpha^0[F]_\alpha + \beta^0[F]_\beta + \xi^0[F]_\xi + V^0[F]_V + z^0[F]_z + x^0[F]_x + \theta^0[F]_\theta + t^0[F]_t \equiv 0. \qquad (10)$$

Ceci permet en général d'écarter comme superflue l'équation la plus difficile à manipuler.

La troisième équation d'Euler s'intègre directement en fournissant une constante (constante isopérimétrique)

$$\xi = X \text{ (constante)}$$

ce qui permet, supposant les équations d'Euler vérifiées, de mettre (9) sous la forme

$$X\,\delta[x(\sigma_2) - x(\sigma_1)] = -\,[\alpha M\,\delta V + \beta\,\delta z - U\,\delta t]_1^2. \qquad (11)$$

Pour donner au rayon d'action $x(\sigma_2) - x(\sigma_1)$ un caractère stationnaire (maximum) il est donc indispensable d'avoir $X \neq 0$ et d'annuler encore les termes aux limites figurant au second membre de (11). En fait, les relations entre multiplicateurs étant homogènes il est permis de choisir arbitrairement la valeur d'un des multiplicateurs en un point arbitraire de la trajectoire. Il n'y a donc pas de restriction à poser

$$\xi = X = 1. \qquad (12)$$

L'annulation du second membre de (11) doit préciser les conditions aux limites du problème. Nous annulons à priori les variations d'extrémité

$$\delta V(\sigma_1) = 0, \qquad \delta V(\sigma_2) = 0, \qquad \delta z(\sigma_1) = 0, \qquad \delta z(\sigma_2) = 0$$

en imposant l'altitude et la vitesse aux extrémités de la trajectoire

$$V(\sigma_1) = V_1, \qquad V(\sigma_2) = V_2, \qquad z(\sigma_1) = z_1, \qquad z(\sigma_2) = z_2. \qquad (13)$$

Il subsiste alors la condition

$$[U\,\delta t]_1^2 = 0$$

qui, en raison de notre exigence de prolongation balistique, demande un examen particulier.

Nous supposons que la durée de la phase propulsive est connue; elle s'étend depuis $t(\sigma_1) = 0$ jusqu'à $t(\sigma_3) = \Delta t$. A partir de cet instant la réserve de combustible est épuisée et la phase balistique se poursuit avec les conditions

$$m = 0 \qquad M = M_2 = M_1 - \int_0^{\Delta t} m(t)\, dt. \tag{14}$$

Il découle de (14) que pendant la phase balistique l'équation $[F]_t = 0$ est intégrable et donne

$$U = C \text{ (constante)} \qquad \sigma \geqslant \sigma_3.$$

La condition qui reste à vérifier devient alors la suivante

$$C\, \delta[t(\sigma_2) - t(\sigma_3)] + U(\sigma_3)\, \delta t(\sigma_3) - U(\sigma_1)\, \delta t(\sigma_1) = 0$$

et, puisque la durée de la phase propulsive est fixée,

$$\delta t(\sigma_1) = 0, \qquad \delta t(\sigma_3) = 0$$

et la condition se réduit à

$$C\, \delta t(\sigma_2) = 0.$$

Si la durée totale du vol était prescrite on aurait $\delta t(\sigma_2) = 0$ et on ne pourrait rien conclure quant à la valeur de la constante C. Cette inconnue du problème serait précisément à déterminer par la condition isopérimétrique que nous imposons sur la durée. Sans limitation de durée, cas qui sera le seul envisagé par la suite, la variation $\delta t(\sigma_2)$ est libre et exige

$$U = C = 0, \qquad \sigma \geqslant \sigma_3. \tag{15}$$

4. Intégration des équations d'Euler, traînée induite négligée

Pendant la phase propulsive nous utilisons (10) et le fait que $t^0 \neq 0$ pour écarter la nécessité de considérer l'équation d'EULER $[F]_t = 0$. L'élimination de β entre les autres équations d'EULER donne, eu égard à (12), les deux équations

$$M\, V\, \varepsilon^0 + \varepsilon\, t^0 \frac{\partial}{\partial V} [V(T - D_0)] + \frac{M\, t^0}{\cos\theta} = 0 \tag{16}$$

$$M\, [\tan\theta + \varepsilon\, g]^0 + \varepsilon\, t^0 \frac{\partial}{\partial z} [V(T - D_0)] = 0 \tag{17}$$

où l'on a posé $\varepsilon = \alpha\, M/V$.

Ces équations jointes à (1) et (6) déterminent la phase propulsive de la trajectoire. La distance horizontale parcourue s'obtient à partir de (7) par une quadrature. Le choix de la variable indépendante est dans une certaine mesure arbitraire. Le temps étant une variable à croissance monotone et la durée de la phase propulsive étant connue, le choix $\sigma = t$ est assez naturel. On peut alors poser

$$t^0 = 1 \qquad V^0 = dV/dt \quad \text{etc.}$$

Le système différentiel (1), (6), (16) et (17) détermine alors (z, V, ε et θ) comme fonctions du temps.

Un autre choix possible, mais qui n'est guère pratique que si m est une constante, est

$$\sigma = -\log_e \frac{M}{M_1} \qquad \text{ou} \qquad M = M_1\, e^{-\sigma} \qquad (\sigma_1 = 0)$$

avec alors $t^0 = M/m$.

Pour l'intégration de la phase balistique l'équation (15) sous la forme suivante obtenue en éliminant β par $[F]_\theta = 0$ et utilisant (12)

$$\varepsilon(T - D_0)\cos\theta = -M \qquad \sigma \geqslant \sigma_3 \tag{18}$$

remplace avantageusement une des équations (16) ou (17). Ce remplacement se justifie de nouveau en vertu de l'identité (10). Pendant la phase balistique la masse M reste égale à M_2 et la poussée $T(0, z, V)$ devient en général négative.

Tandis que dans la partie propulsive une élimination du multiplicateur ε n'offre aucun intérêt, cette élimination se fait au contraire ici sans difficulté. Le plus simple est d'éliminer ε^0 entre (16) et (17) puis ε dans l'équation résultante par (18); on trouve finalement

$$\frac{\theta^0}{\cos\theta} + \frac{g\,t^0}{T - D_0}\left[\frac{\partial}{\partial V}(T - D_0) - \frac{V}{g}\frac{\partial}{\partial z}(T - D_0)\right] = 0. \tag{19}$$

Jointe à (1) et (6) elle détermine entièrement la phase balistique. Dans une intégration pas à pas du problème complet il y a deux valeurs initiales $\varepsilon(\sigma_1)$ et $\theta(\sigma_1)$ qui ne sont pas connues à priori. Elles dépendent, comme nous allons le voir, de deux conditions à respecter l'une en début de phase balistique, l'autre en fin de trajectoire. Leur détermination ne pourra donc se faire que par corrections successives.

A la transition entre phases propulsive et balistique les variables M, z et V doivent, sous peine de perdre le sens physique de la solution, rester continues. Les conditions de transition de WEIERSTRASS et ERDMANN [5, 2] demandent alors que les multiplicateurs α et β (et donc aussi ε) restent aussi continus. Il en découle finalement par $[F]_\theta = 0$ et (12) que θ ne peut non plus subir de discontinuité. L'équation (18) doit donc se trouver vérifiée en début de phase balistique par les valeurs $m = 0$, $M = M_2$ et les valeurs $\varepsilon(\sigma_3)$, $V(\sigma_3)$, $z(\sigma_3)$ et $\theta(\sigma_3)$ obtenues en terminaison de phase propulsive.

C'est la première des conditions fixant le choix des inconnues $\varepsilon(\sigma_1)$ et $\theta(\sigma_1)$. La seconde est simplement qu'à l'instant où l'altitude prescrite z_2 est atteinte en fin de trajectoire, la vitesse atteigne aussi sa valeur demandée V_2.

Il n'est pas sans intérêt d'utiliser le résultat (19) pour examiner quelle loi suit la portance idéale en vol balistique alors que la traînée induite a été négligée. Substituant (19) dans (2) il vient en général

$$L = Mg\cos\theta\left[1 - \frac{V}{(T - D_0)}\left(\frac{\partial}{\partial V} - \frac{V}{g}\frac{\partial}{\partial z}\right)(T - D_0)\right].$$

Dans le cas particulier

$$T = 0 \qquad \text{et} \qquad D_0 = R\,\varrho(z)\,V^n$$

cela donne

$$L = -Mg\cos\theta\left[n - 1 + \left(\frac{V}{V_a}\right)^2\right] \qquad \text{où} \qquad V_a = \sqrt{-\varrho\, g\, dz/d\varrho} \tag{20}$$

est une vitesse caractérisant le gradient (négatif) de la densité atmosphérique, que nous avons déjà introduit antérieurement [3] et qui, pour une atmosphère type, est à toute altitude jusque 25 000 mètres légèrement inférieure à la célérité du son. Par conséquent en régime subsonique, où la loi de traînée admise est très approximativement réalisée avec $n = 2$, la portance est négative. Pour peu qu'on se rapproche de la célérité du son elle peut atteindre en valeur absolue deux fois la composante de la pesanteur. A première vue ce résultat est paradoxal; on s'attendrait plutôt à une portance positive tendant à réduire la chute d'énergie potentielle aux dépens de l'énergie cinétique. Ce paradoxe s'éclaire quand l'application des tests de maximum suggère que la solution obtenue n'est valable que pour une vitesse terminale imposée suffisamment élevée et que le fait d'avoir négligé la traînée induite entraîne l'existence possible de trajectoires plus ou moins arbitraires avec rayon d'action infini, quand la vitesse terminale imposée n'est pas trop grande (voir section 8).

On peut aussi obtenir une expression de la portance en phase propulsive. Eliminant ε_0 entre (16) et (17) et introduisant le résultat dans (2) il vient

$$L = Mg\cos\theta\left[2 + \frac{\varepsilon\cos\theta}{M}\left(\frac{\partial}{\partial V} - \frac{V}{g}\frac{\partial}{\partial z}\right)V(T - D_0)\right].$$

Au passage de la phase propulsive à la phase balistique la portance subit une discontinuité égale à

$$\varDelta L = \frac{M_2\, g\cos\theta(\sigma_3)}{T(0, z_3, V_3) - D_0(z_3, V_3)}\ [0(\sigma_3 - 0) - 0(\sigma_3 + 0)]$$

où

$$0(\sigma) = \left(\frac{\partial}{\partial V} - \frac{V}{g}\frac{\partial}{\partial z}\right)(VT).$$

Si, pour fixer les idées, la poussée T est une constante T_0 avant et est nulle après

$$\varDelta L = -\,M_2\, g\cos\theta(\sigma_3)\,\frac{T_0}{D_0(z_3, V_3)} < 0.$$

Il est donc très possible d'avoir une portance positive dans la partie propulsive.

Quand le problème est modifié par suppression de la phase balistique ($\sigma_3 = \sigma_2$), le maximum de rayon d'action ne dépend que de l'intégration de la première partie. Les inconnues initiales $\varepsilon(\sigma_1)$ et $\theta(\sigma_1)$ sont ici déterminées par la condition que lorsque $t = \varDelta t$ on ait à la fois $z(\sigma_2) = z_2$ et $V(\sigma_2) = V_2$.

On peut aussi s'abstenir de spécifier $V(\sigma_2)$; la variation de cette quantité étant libre (11) exige alors la condition terminale

$$\alpha(\sigma_2) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon(\sigma_2) = 0$$

qui remplace celle que l'on a supprimé. La vitesse terminale qui en résulte est alors celle qui assure le plus grand rayon d'action parmi toutes celles qui pourraient être prescrites. On notera que dans ce cas la portance terminale prend la valeur

$$L(\sigma_2) = 2\,M_2 g\cos\theta(\sigma_2).$$

Il est évident que certaines complications peuvent surgir par suite de limitations physiques qu'il est difficile d'introduire à priori dans la formulation analytique. Ainsi quand les coefficients de portance requis dépassent la capacité aérodynamique de la voilure. La trajectoire est alors à modifier par des segments décrits à portance maximum (positive ou négative).

D'autre part une analyse de ce genre dans le stade d'avant-projet est précisément utile pour délimiter l'importance de la voilure.

5. Le problème quasi-statique avec traînée induite

Avant d'accumuler toutes les difficultés provenant de l'introduction de la traînée induite il semble utile de rendre compte du domaine de validité de la théorie quasi-statique, ainsi appelée parce qu'elle suppose les termes d'inertie négligeables dans les équations (1) et (2) et les remplace par les équations d'équilibre

$$T - D = Mg\sin\theta \tag{1'}$$
$$L = Mg\cos\theta. \tag{2'}$$

La portance s'élimine facilement du problème en écrivant (5) comme

$$D = D_0(z, V) + D_1(z, V)\, M^2 g^2 \cos^2 \theta. \tag{21}$$

Les équations d'EULER deviennent alors les suivantes:

$$[F]_v = t^0 \left[-\alpha \frac{\partial}{\partial V}(T - D) - \beta \sin\theta - \cos\theta \right] = 0$$

$$[F]_z = -\alpha\, t^0 \frac{\partial}{\partial z}(T - D) - \beta^0 = 0$$

$$[F]_\theta = t^0 \left[(\alpha M g - \beta V) \cos\theta + V \sin\theta - 2\alpha D_1 M^2 g^2 \sin\theta \cos\theta \right] = 0$$

$$[F]_t = U^0 - \alpha\, t^0 \left[m g \sin\theta + \frac{dm}{dt} \frac{\partial T}{\partial m} + 2 m D_1 M g^2 \cos^2\theta \right] = 0$$

avec $U = \dot{V}(\beta \sin\theta + \cos\theta)$.

L'élimination des multiplicateurs ne donne guère de résultat simple à interpréter sauf pendant la phase balistique. Durant celle-ci on a toujours $U = 0$, c'est à dire le résultat simple

$$\beta = -\cot\theta$$

et par l'équation $[F]_v = 0$ la condition fondamentale

$$\frac{\partial}{\partial V}(T - D) = 0. \tag{22}$$

Celle-ci jointe à (1′) et (2′) détermine complètement L, θ, et V en fonction de l'altitude. Elle s'interprète aussi par le raisonnement classique du vol plané à meilleure finesse, c'est à dire à partir de la relation

$$dx = \cot\theta\, dz = \frac{L}{T - D}\, dz$$

en cherchant à rendre le rapport de la portance à la traînée complète aussi grand que possible. En effet on ne peut plus se servir que de l'énergie potentielle acquise pendant la phase propulsive. Dans la recherche du maximum l'angle θ doit être considéré comme une fonction de la vitesse à altitude constante. On a donc la condition

$$\frac{\partial \cot\theta}{\partial V} = -\frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial\theta}{\partial V} = 0$$

mais en différenciant (1′) à altitude constante, D étant donné par (21)

$$\frac{\partial}{\partial V}(T - D)\, dV + D_1 M^2 g^2 \sin\theta \cos\theta\, d\theta = M g \cos\theta\, d\theta$$

et comme le coefficient de $d\theta$ ne peut s'annuler ($\sin\theta$ est négatif) la condition (22) est bien celle qui assure $\partial\theta/\partial V = 0$.

L'intégration complète de la trajectoire se présente comme suit. Les grandeurs initiales M_1 et z_1 étant données, les quatre autres valeurs $V(\sigma_1)$, $\theta(\sigma_1)$ $\alpha(\sigma_1)$ et $\beta(\sigma_1)$ sont liées par trois relations algébriques à savoir (1′), $[F]_v = 0$ et $[F]_\theta = 0$. On ne dispose donc que d'une seule inconnue initiale pour modifier la forme de la trajectoire pendant la phase propulsive. Pendant la phase balistique toutes les grandeurs sont irrémédiablement fixées en fonction de l'altitude et par conséquent la valeur de β est connue en début de phase balistique par la relation

$$\beta(\sigma_3) = -\cot\theta(z_3).$$

Or les conditions de WEIERSTRASS et ERDMANN lient la continuité de z à celle de β. Par conséquent l'unique inconnue initiale est fixée par la condition que β

prenne la valeur précédente en fin de phase propulsive. Comme il fallait s'y attendre par suite de la disparition des variations d'extrémité sur la vitesse, on ne peut plus imposer les valeurs initiale et terminale de celle-ci; elle sera même généralement discontinue à la transition. Une fois la solution déterminée il est en principe possible de vérifier à posteriori la validité des hypothèses initiales. Pour la phase propulsive cette vérification n'est guère possible que par calcul numérique. Par contre en phase balistique une conclusion théorique est parfois possible.

Ainsi en régime subsonique pas trop élevé, où les effets du nombre de MACH sont encore négligeables, le rapport de la portance à la traînée totale ne dépend pratiquement que de l'angle d'attaque aérodynamique. La descente en vol plané se fait alors au meilleur angle d'attaque;

$$\cot\theta = \left(\frac{L}{T-D}\right)_{\text{op.}} = \text{constante}$$

$$q = \frac{1}{2}\varrho V^2 = \frac{M g \cos\theta}{c_L S} = \text{constante}$$

car, le coefficient de portance c_L reste constant avec l'angle d'attaque. Dérivons alors logarithmiquement la dernière relation par rapport à l'altitude

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dz} + \frac{2}{V}\frac{dV}{dz} = -\frac{g}{V_a^2} + \frac{2}{V^2}\frac{dV}{dt}\frac{1}{\sin\theta} = 0.$$

Le terme négligé dans (1) prend donc la valeur

$$M\frac{dV}{dt} = M g \sin\theta \frac{1}{2}\left(\frac{V}{V_a}\right)^2$$

et n'est réellement petit devant la composante de la pesanteur que si

$$\frac{1}{2}(V/V_a)^2 \ll 1.$$

Rappelons que la vitesse V_a définie par (20) est presque assimilable à la célérité du son. La condition trouvée s'accorde donc exactement avec celle qui postule l'absence d'effets du nombre de MACH. En conclusion générale on peut affirmer que le terme d'inertie tangentielle ne peut être négligé que pour les engins lents. De plus la descente planée sans effets du nombre de MACH se fait réellement sans force centrifuge.

De toute façon les discontinuités dans la vitesse et l'angle de montée à la transition sont en violation flagrante avec les approximations consenties et demandent une solution de raccord qui n'est pas prévue par le calcul des variations.

Avant de quitter cette section il nous parait utile d'examiner un cas très particulier sur lequel est basé l'ancienne formule du rayon d'action proposée par BRÉGUET. Il s'agit des systèmes propulsifs pour lesquels on peut admettre que dans le domaine des vitesses de vol réalisées sur la trajectoire

$$\frac{T V}{m g} = K \qquad \text{une constante.} \tag{23}$$

La puissance utile développée par unité de débit de combustible est indépendante de la vitesse et de l'altitude. (Cette constance de rendement n'est plus réalisée dans les propulseurs modernes et notamment dans le moteur-fusée où T est indépendant de la vitesse.) L'élimination du temps par (3) permet d'écrire

$$dx + \frac{L}{D}dz = -\frac{V\,dM}{m}\left[\cos\theta + \frac{L}{D}\sin\theta\right]$$

puis l'élimination du cosinus par (2′) et du sinus par (1′)

$$dx = -\frac{L}{D}\,dz - \frac{T\,V}{m\,g}\,\frac{L}{D}\,\frac{dM}{M}.$$

Enfin la constance du second membre de (23) permet de mettre cette relation sous la forme

$$dx = -\frac{L}{D}\,d\left(z + K\log_e\frac{M}{M_1}\right). \tag{24}$$

S'il faut tenir compte des effets de compressibilité la simplicité du résultat (24) n'est qu'apparente et il vaut mieux intégrer le problème à partir du système d'équations d'EULER précédemment décrit; mais si le rapport L/D ne dépend que de l'angle d'attaque il est évident que le plus grand rayon d'action s'obtient en volant à la meilleure finesse. Sans détailler la trajectoire la distance horizontale parcourue est immédiatement calculable

$$\Delta x = -\left(\frac{L}{D}\right)_{\mathrm{op}}\left(\Delta z + K\log_e\frac{M}{M_1}\right).$$

En fin de phase propulsive l'altitude atteinte est bien déterminée. Si l'on admet encore que dans la phase balistique $T = 0$ et donc $K = 0$ on obtient finalement pour le rayon d'action

$$x(\sigma_2) - x(\sigma_1) = +\left(\frac{L}{D}\right)_{\mathrm{op}}\left[K\log_e\frac{M_1}{M_2} - (z_2 - z_1)\right]. \tag{25}$$

Cette formule, qui généralise un peu celle de BRÉGUET, ne suppose donc nullement que le vol soit horizontal. Elle reste même vraie si le réglage intentionnel du débit (utilisation de la deuxième variable de guidage) ne modifie pas la propriété (23). On peut alors varier l'angle de montée en réglant la puissance de la propulsion et, pour autant qu'on revienne à la même altitude finale, ceci ne change en rien le rayon d'action.

6. Le problème avec traînée induite, force centrifuge négligée

Si on tient compte de l'accélération tangentielle mais que l'on continue à négliger l'accélération centripète il suffit de suivre l'analyse initiale en prenant (21) comme expression de la traînée. On trouve ainsi que les équations (16), (17) et (18) sont à remplacer par

$$M\,V\,\varepsilon^0 + \varepsilon\,t^0\left[\frac{\partial}{\partial V}\,V(T-D) - 2\,D_1\,M^2\,g^2\sin^2\theta\right] + \frac{M\,t_0}{\cos\theta} = 0 \tag{16''}$$

$$M\,[\tan\theta + \varepsilon\,g\,(1 - 2\,M_1\,g\sin\theta)]^0 + \varepsilon\,t^0\,\frac{\partial}{\partial z}\,V(T-D) = 0 \tag{17''}$$

$$\varepsilon\,[T - D - 2\,D_1\,M^2\,g^2\sin^2\theta]\cos\theta = -M. \tag{18''}$$

L'équation correspondant à (19) est trop compliquée pour être pratiquement utilisable, mais la transformation du dernier terme de (16″) par (18″) fournit toujours la relation simple

$$M\,\varepsilon^0 + \varepsilon\,t^0\,\frac{\partial}{\partial V}\,(T-D) = 0$$

qui, conjuguée à (18″), permet un calcul numérique plus facile de la partie balistique de la trajectoire.

Comme $\partial D_1/\partial V$ est négatif, la croissance de ε est moins rapide que sans traînée induite et la décroissance de θ avec le temps est aussi diminuée. Ceci tend à justifier l'approximation faite en négligeant la force centrifuge, quoique seul un calcul numérique permettrait une vérification quantitative.

Rien n'est à modifier dans la structure des valeurs initiales et des conditions qui les déterminent.

Pour les propulseurs vérifiant l'hypothèse (23) l'équation (24) se transforme en

$$dx = -\frac{L}{D}\, d\left[z + \frac{V^2}{2g} + K \log_e \frac{M}{M_1}\right] \tag{24'}$$

et la formule de Bréguet, sous la forme modifiée que lui a donné Rutowski [6] en découle

$$x(\sigma_2) - x(\sigma_1) = \left(\frac{L}{D}\right)_{\text{op}} \left[K \log_e \frac{M_1}{M_2} + z_1 + \frac{V_1^{\,2}}{2g} - z_2 - \frac{V_2^{\,2}}{2g}\right]. \tag{25'}$$

7. Le problème exact avec traînée induite

Pour traiter le problème exact la fonction F est complétée par l'addition du terme $\lambda[F]_\lambda$. La nouvelle équation d'Euler

$$[F]_L = t^0\,(2\,\alpha\, L\, D_1 - \lambda) = 0 \tag{26}$$

permet l'élimination du nouveau multiplicateur λ, le multiplicateur ξ restant assimilé à l'unité.

La phase propulsive s'obtient en intégrant les équations différentielles (1), (2) et (6) avec l'expression (5) de la traînée et les équations d'Euler suivantes, obtenues après élimination de λ

$$-\,[\alpha\, M]^0 - \alpha\, t^0 \frac{\partial}{\partial V}(T - D) - \beta\, t^0 \sin\theta - t^0 \cos\theta + 2\,\alpha\, L\, D_1\, M\, \theta^0 = 0$$

$$\beta^0 + \alpha\, t^0 \frac{\partial}{\partial z}(T - D) = 0 \tag{27}$$

$$(\alpha\, M\, g - \beta\, V)\, t^0 \cos\theta + V\, t^0 \sin\theta - [2\,\alpha\, L\, D_1\, M\, V]^0 - 2\,\alpha\, L\, D_1 t^0\, M\, g \sin\theta = 0.$$

L'équation $[F]_t = 0$ est écartée comme identiquement satisfaite par (10). L'apparition des nouveaux termes aux limites $[\lambda\, M\, V\, \delta\theta]_1^2$ indique qu'on peut soit imposer l'angle de montée initial $\theta(\sigma_1)$, soit laisser la variation $\delta\theta(\sigma_1)$ libre et dans ce cas on fait en principe choix de l'angle initial assurant le plus grand rayon d'action en prenant $\lambda(\sigma_1) = 0$. Eu égard à (26) ceci pose l'alternative $\alpha(\sigma_1) = 0$ ou $L(\sigma_1) = 0$. Cependant l'examen des équations d'Euler montre que la première alternative lie les valeurs initiales de θ et β si bien que l'ordre du système différentiel ne serait plus en correspondance avec le nombre de conditions aux limites imposables. De plus la variation $\delta V(\sigma_1)$ deviendrait libre alors que nous imposons la vitesse initiale. Il faut donc prendre $L(\sigma_1) = 0$. La même situation se présente en fin de trajection où on peut soit imposer l'angle d'arrivée soit choisir le meilleur en faisant $L(\sigma_2) = 0$.

Le système de valeurs initiales nécessaires à l'intégration numérique pas à pas comporte donc trois valeurs prescrites V_1, z_1, et θ_1 [ou $L(\sigma_1) = 0$] et trois inconnues (au lieu de deux précédemment) $\alpha(\sigma_1)$, $\beta(\sigma_1)$ et $L(\sigma_1)$ [ou $\theta(\sigma_1)$].

Pendant la phase balistique l'équation $[F]_t = 0$ est de nouveau intégrable sous la forme $U = 0$ qui est ici explicitement

$$\alpha(T - D - M\, g \sin\theta) + \beta\, V \sin\theta + V \cos\theta + 2\,\alpha\, L\, D_1 (L - M\, g \cos\theta) = 0 \tag{28}$$

et remplace avantageusement l'une des équations (27).

En fait tout le système (27) est réductible au suivant, plus simple

$$\left.\begin{aligned} M\,\beta^0 + \varepsilon\, t^0 \frac{\partial}{\partial z}(T-D) &= 0 \\ M\,\varepsilon^0 + \varepsilon\, t^0 \frac{\partial}{\partial V}(T-D) - 4\,M\,L\,D_1\,\varepsilon\,\theta^0 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

où, comme auparavant, $\varepsilon = \alpha\, M/V$.

L'équation (28) doit être vérifiée en début de phase balistique par les valeurs trouvées pour les variables et multiplicateurs en fin de phase propulsive. C'est la première des conditions déterminant les inconnues initiales. Les deux autres demandent que la vitesse atteigne sa valeur prescrite et que θ atteigne une valeur prescrite (ou que L s'annule) quand l'altitude finale est obtenue.

Observons enfin que (28) est une équation algébrique du second degré en L, qu'il est en fait logique d'utiliser comme telle pour le calcul de la portance au cours de l'intégration numérique par intervalles. Si on fait choix de la condition finale $L(\sigma_2) = 0$ la valeur de la racine appropriée de (28) montre que durant la phase balistique

$$L < M\,g\cos\theta$$

et que par conséquent la trajectoire tournera encore sa concavité vers le bas.

8. Les conditions pour un maximum véritable

Utilisant d'emblée $\xi = 1$, mettons l'expression du rayon d'action sous la forme de la fonctionnelle

$$x(\sigma_2) - x(\sigma_1) = \int_1^2 G(y, y^0)\, d\sigma$$

où

$$G(y, y^0) = V\cos\theta\, t^0 - \alpha[F]_\alpha - \beta[F]_\beta - \lambda[F]_\lambda$$

qui donne les mêmes équations d'EULER.

Le test de la variation forte de WEIERSTRASS [5] demande que pour un maximum

$$E = G(\overline{y}, \overline{y}^0) - G(y, y^0) - \sum (\overline{y}^0 - y^0)\, \frac{\partial}{\partial y^0} G(y, y^0) \leqslant 0.$$

Dans cette expression y^0 désigne successivement les dérivées V^0, z^0, θ^0 et t^0 intervenant dans l'expression de G; les valeurs surlignées sont celles provenant d'une discontinuité *finie et arbitraire* dans la valeur de la variable de guidage mais qui restent compatibles avec les équations de liaison (1), (2) et (6).

Nous devons distinguer les cas suivants

1^0) Le problème exact avec traînée induite.

Dans ce cas le changement fini de la valeur L à la valeur $\overline{L}$, laisse V, θ, z et t continus

$$\overline{V} = V \qquad \overline{\theta} = \theta \qquad \overline{z} = z \qquad \overline{t} = t$$

mais les dérivées prennent des nouvelles valeurs $\overline{V}^0$, $\overline{z}^0$, $\overline{\theta}^0$ et $\overline{t}^0$, compatibles avec les liaisons.

Le calcul de E fournit le résultat

$$E = \alpha\, D_1\, \overline{t}^0 (L^2 - \overline{L}^2) + \lambda\, \overline{t}^0 (\overline{L} - L).$$

Mais, le long de la trajectoire satisfaisant aux équations d'EULER on a (26)

$$\lambda = 2\,\alpha\, L\, D_1 \text{ et il vient finalement}$$

$$E = -\,\alpha\, D_1 \bar{t}^0 (\bar{L} - L)^2. \tag{30}$$

Comme $D_1 > 0$ et $\bar{t}^0 > 0$, le test de WEIERSTRASS est satisfait tant que $\alpha \geqslant 0$.

2°) Le problème avec traînée induite mais force centrifuge négligée.

Ici la disparition de θ^0 des équations entraîne la discontinuité de θ avec celle de L. En fait on peut faire $\lambda \equiv 0$, adopter l'expression (21) de la traînée et considérer θ comme la variable de guidage dont la discontinuité de la valeur de θ à $\bar{\theta}$ donne des discontinuités en V^0, z^0 et t^0 liées par (1) et (6). Le calcul de E donne dans ces conditions

$$E = \bar{t}^0\, [V\,(\cos\bar{\theta} - \cos\theta) - (\alpha\, M\, g - \beta\, V)\,(\sin\bar{\theta} - \sin\theta) - \alpha\, D_1\, M^2\, g^2\,(\cos^2\bar{\theta} - \cos^2\theta)].$$

Usant de l'équation d'EULER

$$[F]_\theta = t^0\, [(\alpha\, M\, g - \beta\, V)\cos\theta + V\sin\theta - 2\,\alpha\, D_1\, M^2\, g^2 \sin\theta\cos\theta] = 0$$

on peut modifier cette expression en

$$E = 2\,\bar{t}^0 \sin^2\frac{\bar{\theta} - \theta}{2}\left[-\,\frac{V}{\cos\theta} + 2\,\alpha\, D_1\, M^2\, g^2 \cos^2\frac{\theta + \bar{\theta}}{2}\right]. \tag{31}$$

Pour une valeur négative de α le critère est vérifié. Pour une valeur positive, l'inégalité

$$\frac{\alpha\cos\theta}{V} \leqslant [2\, D_1\, M^2\, g^2]^{-1}$$

doit être vérifiée.

Nous rapportant à (18″) cette condition demande en phase balistique que la traînée parasite soit supérieure à la traînée induite.

$$D_0 - T \geqslant D_1\, M^2\, g^2 \cos^2\theta = D_1\, L^2.$$

Rappelons que l'égalité correspond à la valeur optima du rapport portance à traînée effective quand celui-ci ne dépend que de l'angle d'attaque; il est donc assez naturel que l'inégalité précédente soit observée quand on tient compte de l'inertie tangentielle.

3°) Le problème avec traînée induite négligée.

Il suffit de faire $D_1 = 0$ dans le résultat (31) pour voir que le critère de WEIERSTRASS est satisfait.

4°) Le problème quasi-statique avec traînée induite.

La disparition de V^0 entraîne pour V même une discontinuité liée à celle de θ de telle façon que (1′) reste vérifiée

$$\bar{T} - \bar{D} = M\, g \sin\bar{\theta}$$

où $\bar{T}$ et $\bar{D}$ sont calculés à partir de $\bar{V}$ et $\bar{\theta}$. On trouve ici

$$E = \bar{t}^0\, [\bar{V}\cos\bar{\theta} - V\cos\theta + \beta\,(\bar{V}\sin\bar{\theta} - V\sin\theta)].$$

En principe les équations $[F]_V = 0$ et $[F]_\theta = 0$ de la section 5 permetten l'élimination de β dans cette expression, mais le résultat semble difficile à discuter En régime balistique on a plus simplement

$$\beta = -\cot\theta$$

et

$$E = \bar{t}^0\, \bar{V}\, \frac{\sin(\theta - \bar{\theta})}{\sin\theta}.$$

Le critère est alors vérifié du fait que l'angle de montée réel de la trajectoire est négatif tout en étant maximum, l'angle surligné ne pouvant alors que lui être encore inférieur. De l'ensemble de ces résultats il ressort que, moyennant d'éventuels contrôles numériques sur la valeur d'un multiplicateur, le critère de WEIERSTRASS est vérifié de façon forte pour une discontinuité non-nulle de la variable de guidage (exclusion de l'égalité). Il en est alors de même du critère renforcé de LEGENDRE, si bien qu'on est assuré d'un maximum véritable pour une certaine extension de la trajectoire. La limite d'extension est fournie éventuellement par le critère quantitatif de JACOBI, qui ne se prête guère ici à une discussion théorique. La seule remarque que nous voudrions faire à ce propos est d'établir l'existence possible de solutions non-eulériennes quand la traînée induite est négligée. Il suffit pour cela d'observer qu'en vol horizontal on peut évaluer la distance parcourue par

$$dx = \frac{V\,dV}{T - D}.$$

En régime balistique et traînée induite négligée, $T - D$ tend vers zéro avec la vitesse et il suffit qu'il y tende assez rapidement pour que $V = 0$ devienne une singularité non-intégrable. Ainsi si nous posons

$$T - D = - R\,\varrho(z)\,V^n$$

l'intégrale

$$\int^{2} dx = - \frac{1}{R\,\varrho(z)} \int^{2} \frac{dV}{V^{n-1}}$$

est divergente pour $V_2 \to 0$, quand $n \geqslant 2$ (bien entendu la solution théorique ignore toute limitation sur le coefficient de portance). Imaginons alors une trajectoire qui soit d'abord purement verticale et que l'on rende horizontale en phase balistique un peu avant d'atteindre l'altitude maximum $z_{\max}$ (où la vitesse s'annulerait). Aussi faible que soit la vitesse résiduelle, la divergence de l'intégrale précédente montre qu'on peut encore obtenir un rayon d'action aussi grand qu'on veut. Le retour à l'altitude prescrite z_2 permet de retrouver une vitesse terminale dont la limite supérieure est celle produite par une chute verticale de $z_{\max}$ à z_2.

Le problème sans traînée induite est alors sans maximum véritable si la vitesse terminale prescrite est inférieure à cette limite. Par contre, si elle lui est supérieure, il est plausible que le maximum véritable soit celui donné par la solution eulérienne.

Dès qu'on introduit la traînée induite le rayon d'action fourni par n'importe quelle trajectoire est borné et l'intuition physique suggère que le maximum existe et correspond à une trajectoire eulérienne. Le seul cas où l'on puisse imaginer que le critère quantitatif de JACOBI ne soit pas satisfait est celui où il existerait une deuxième solution eulérienne satisfaisant aux mêmes conditions aux limites. Il suffirait alors de choisir celle qui a le plus grand rayon d'action.

Bibliographie

1. P. CICALA, Le Evoluzioni Ottime di un Aereo. Atti Accad. Sci. Torino **89** (1954—55).
2. B. FRAEIJS DE VEUBEKE, Méthodes Variationnelles et Performances Optimales en Aéronautique. Bull. Soc. Math. Belgique **2**, 136 (1957).
3. B. FRAEIJS DE VEUBEKE, Balistique Externe. Trajectoires optimales. Chap. XII de "La Propulsion par Fusées", Sciences et Lettres, Liége 1957.
4. P. CICALA et A. MIELE, Brachistocronic Manoeuvres of a Variable Mass Aircraft in a Vertical Plane. J. Aeronaut. Sci. **22**, 577 (1955).
5. G. BLISS, Lectures on the Calculus of Variations. Chicago: University of Chicago Press, 1946.
6. E. S. RUTOWSKI, Energy Approach to the General Aircraft Performance Problem. J. Aeronaut. Sci. **21**, 187 (1954).

Printed in Austria