

# LA MÉTHODE DES FONCTIONS PROPRES DANS LES PROBLÈMES DE TRANSMISSION DE CHALEUR EN REGIME TRANSITOIRE

par B. FRAEIJIS DE VEUBEKE

*Membre de la Société*

Université  
Sciences Appliquées  
Chemin des Chevre  
S-4000 L

## INTRODUCTION

Comme les autres méthodes classiques de résolution de l'équation de la chaleur celle par fonctions propres requiert en principe la possibilité de superposer les solutions et postule par conséquent la linéarité de l'équation aux dérivées partielles et celle des conditions aux limites. Sa seule exigence théorique supplémentaire est la possibilité de définir le problème dans un domaine physique d'étendue limitée. Dans de telles conditions elle constitue un outil parfois remarquablement simple et efficace et il est surprenant de noter dans les ouvrages classiques l'absence d'un exposé systématique à son égard.

L'exposé est fait en analogie avec la méthode des modes normaux pour les vibrations excitées des systèmes continus. Il ramène finalement le problème à des équations « normales » qui gouvernent dans le temps l'intensité des distributions propres de la température. Les fonctions d'attaque de ces équations normales peuvent entièrement s'exprimer à partir du débit des sources de volume et des conditions aux limites, même variables.

L'application qui illustre le procédé a pu être poussée jusqu'au calcul numérique des principaux résultats à l'aide de l'ordinateur électronique IBM 650 de l'université.

### 1. ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET CONDITIONS AUX LIMITES

Considérons un milieu continu dont la conductibilité thermique  
 $K(x, y, z)$

et la capacité calorifique par unité de volume

$$c(x, y, z)$$

sont indépendantes de la température et de l'état de tension.

Cette hypothèse limite pour la plupart des matériaux les écarts de température qui peuvent être envisagés et le domaine dans lequel la méthode des fonctions propres est applicable. Dans le cas plus général où cette dépendance doit être envisagée il semble que les méthodes numériques doivent être préférées à tout traitement analytique. L'équation de conservation de l'énergie peut s'écrire

$$\int_A K \frac{\partial T}{\partial n} dA + \int_V Q_v dV = \frac{d}{dt} \int_V cT dV \quad (1)$$

Elle exprime que le taux d'accroissement d'enthalpie qui figure au second membre est constitué d'une part du flux de chaleur pénétrant par la surface A qui délimite le volume V, d'autre part du débit calorifique provenant de sources réparties dans ce volume.

L'intégrale de surface vaut aussi

$$\int_A K \frac{\partial T}{\partial n} dA = \int_V \text{div} (K \text{ grad } T) dV \quad (2)$$

Et l'application de la loi de conservation à un volume élémentaire fournit l'équation aux dérivées partielles

$$\text{div} (K \text{ grad } T) - c \frac{\partial T}{\partial t} = - Q_v(x, y, z, t) \quad (3)$$

Les conditions aux limites auxquelles la méthode des fonctions propres est adaptée sont du type

$$K \frac{\partial T}{\partial n} = h(T_a - T) + Q_a \quad (4)$$

sur A

Pour  $h = 0$  elles signifient qu'un flux de chaleur d'intensité  $Q_a$  est imposé à la paroi (sources de surface).

Pour  $Q_a \equiv 0$  la paroi à température locale T est en contact avec un milieu continu de nature différente dont la température locale  $T_a$  est supposée connue. Le flux de chaleur est proportionnel à la différence de ces températures et le coefficient de transfert

$$h(x, y, z)$$

doit de nouveau être supposé indépendant des températures.

Si on a simultanément  $h = 0$  et  $Q_a = 0$  la paroi est athermane.

Un troisième cas particulier s'obtient en divisant (4) par  $h$  puis faisant tendre ce coefficient vers l'infini. C'est alors la température à la paroi qui est imposée.

## 2. LE PROBLÈME HOMOGENÈ

Quand  $Q_v \equiv 0$ ,  $Q_a \equiv 0$  et  $T_a \equiv 0$ , l'équation aux dérivées partielles (3) et les conditions aux limites (4) sont homogènes en  $T$ . Ce cas se présente physiquement dans l'étude du processus d'évolution d'une distribution initiale de température, les parois étant soit athermanes, soit en contact avec un milieu à température uniforme et stationnaire. Le fait que  $T_a = 0$  signifie simplement que cette température est prise comme zéro de référence.

Une solution par séparation de la variable temps

$$T = u(t) U(x, y, z)$$

vérifie les équations (3) et (4) du problème homogène à condition que

$$\frac{u'}{u} = \frac{\text{div} (K \text{ grad } U)}{cU} = -p^2 \text{ une constante} \quad (5)$$

$$K \frac{\partial U}{\partial n} + h U = 0 \text{ sur } A \quad (6)$$

Si le volume est limité le problème possède un spectre discret de valeurs propres

$$p \equiv p_r \quad (r = 1 \dots \infty)$$

permettant de satisfaire à (5) et (6) avec des fonctions propres correspondantes

$$U = U_r(x, y, z)$$

définies à un facteur d'échelle près.

Des équations

$$\text{div} (K \text{ grad } U_r) + p_r^2 c U_r = 0 \quad (7)$$

$$K \frac{\partial U_r}{\partial n} + h U_r = 0 \quad (8)$$

satisfaites par une fonction propre on déduit

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\mathbf{V}} U_s \operatorname{div} (K \operatorname{grad} U_r) dV = \\
 & - \int_{\Lambda} K U_s \frac{\partial U_r}{\partial n} dA + \int_{\mathbf{V}} K (\operatorname{grad} U_r, \operatorname{grad} U_s) dV = \\
 & \int_{\Lambda} h U_r U_s dA + \int_{\mathbf{V}} K (\operatorname{grad} U_r, \operatorname{grad} U_s) dV = p_r^2 \int_{\mathbf{V}} c U_r U_s dV \quad (9)
 \end{aligned}$$

Pour  $U_s = U_r$  la dernière égalité montre que les constantes  $p_r^2$  sont bien positives.

Pour  $U_s \neq U_r$ , en soustrayant de la dernière égalité celle obtenue en échangeant les indices  $r$  et  $s$

$$(p_r^2 - p_s^2) \int_{\mathbf{V}} c U_r U_s dV = 0$$

on obtient les relations d'orthogonalité des fonctions propres

$$\int_{\mathbf{V}} c U_r U_s dV = 0 \quad p_r^2 \neq p_s^2 \quad (10)$$

Pour simplifier l'écriture nous introduirons aussi les modules carrés

$$q_r^2 = \int_{\mathbf{V}} c U_r^2 dV \quad (11)$$

Les fonctions du temps qui gouvernent l'amplitude de chacun des modes spatiaux de relaxation de température vérifient chacune l'équation différentielle ordinaire résultant de (5)

$$u_r' + p_r^2 u_r = 0 \quad (12)$$

dont la solution élémentaire peut s'écrire

$$u_r(t) = u_r(0) e^{-p_r^2 t} \quad (13)$$

La solution générale du problème homogène est alors

$$T(x, y, z, t) = \sum_1^{\infty} u_r(0) e^{-p_r^2 t} U_r(x, y, z) \quad (14)$$

Les inconnues  $u_r(0)$  sont déterminées par la condition initiale

$$T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z)$$

Faisant  $t = 0$  dans (14)

$$T_0(x, y, z) = \sum_1^{\infty} u_r(0)U_r(x, y, z) \quad (16)$$

d'où en utilisant les relations (10) et la notation (11)

$$q_r^2 u_r(0) = \int_v cT_0 U_r dV \quad (17)$$

On voit directement sur (14) que la température tend en général vers le zéro de référence, le mode dont la valeur propre  $p_1^2$  est la plus petite étant le plus lent à disparaître.

Une exception importante est le cas où l'entièreté de la paroi est athermane et alors (cfr. (6) avec  $h = 0$ ) pour toute fonction propre :

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \quad \text{partout sur A.}$$

Cette condition est compatible avec l'équation

$$\text{div} (K \text{ grad } U) = 0$$

à laquelle devrait obéir  $U$  pour le choix  $p^2 = 0$  ; elle possède en effet la solution évidente

$$U = 1$$

Par conséquent  $p_1 = 0$  est la première valeur propre et le terme qui lui correspond dans la solution (14) est la constante

$$T_{\infty} = \frac{\int_v cT_0 dV}{\int_v c dV} \quad (18)$$

La température tend alors avec le temps vers cette constante dont la signification est évidente sous la forme

$$\int_v cT_{\infty} dV = \int_v cT_0 dV$$

exprimant la conservation de l'enthalpie pour  $t = 0$  et  $t = \infty$ .

Quand la température  $T_a = 0$  est imposée sur une partie de la frontière les fonctions propres doivent y obéir à la condition

$$U_r = 0$$

En examinant le calcul (9) on observera que ceci entraîne la disparition d'une partie de l'intégrale de surface et ne modifie pas la conclusion (10). La solution (14), (17) reste valable, elle montre avec (19) que la température initiale  $T_0(x, y, z)$  est immédiatement annulée en ces endroits. Le flux de chaleur

$$\frac{d}{dt} \int_V cT dV = - \sum_1^{\infty} u_r(0) p_r^2 e^{-p_r^2 t} \int_V cU_r dV \quad (20)$$

qui pénètre par les parois est alors généralement infini à l'instant initial, c'est-à-dire que la série (20) diverge pour  $t = 0$ .

Cependant la quantité de chaleur qui pénètre

$$\int_V c(T - T_0) dV = \sum_1^{\infty} u_r(0) (e^{-p_r^2 t} - 1) \int_V cU_r dV \quad (21)$$

n'a pas un caractère impulsif, elle tend encore vers zéro avec  $t$ .

On sait par exemple que pour un milieu homogène semi-infini à température initiale uniforme, l'application soudaine d'une température uniforme différente au plan limite provoque par unité de surface la pénétration d'un flux proportionnel à  $t^{-1/2}$ .

### 3. LE PROBLÈME NON-HOMOGÈNE. LES ÉQUATIONS NORMALES

Pour résoudre le problème non-homogène posons

$$T(x, y, z, t) = T_q(x, y, z, t) + \sum_1^{\infty} u_s(t) U_s(x, y, z) \quad (22)$$

où les  $U_s$  sont les fonctions propres du problème homogène correspondant.

Demandons à  $T_q$  de vérifier l'équation de régime

$$\operatorname{div} (K \operatorname{grad} T_q) = 0 \quad (23)$$

La substitution de (22) dans (3) et (4) donne, eu égard aux équations (23), (7) et (8)

$$\sum_1^{\infty} (u_s' + p_s^2 u_s) c U_s + c \frac{\partial T_q}{\partial t} = Q_0 \quad (24)$$

$$K \frac{\partial T_q}{\partial n} + h T_q = h T_a + Q_a \quad \text{sur } A. \quad (25)$$

Le problème (23), (25) pour  $T_q$  est bien déterminé. Cette répartition de température doit vérifier à chaque instant l'équation d'un champ stabilisé avec des conditions frontières variables dans le temps. Cette partie de la solution peut être qualifiée de quasi-stationnaire. Il serait possible de la déterminer par des méthodes analogues, par exemple à la cuve rhéoelectrique, en pratiquant un nombre suffisant de sections temporelles. Il apparaîtra cependant qu'elle est elle-même représentable par une série de fonctions propres et ne joue que le rôle d'un auxiliaire de calcul temporeire.

En multipliant (24) par  $U_r$ , intégrant et utilisant les relations d'orthogonalité (10) il vient

$$q_r^2(u_r' + p_r^2 u_r) = \int_V Q_v U_r dV - \frac{d}{dt} \int_V c T_q U_r dV \quad (26)$$

A l'aide du système complet des fonctions  $U_r$ , introduisons la représentation

$$T_q = \sum_1^{\infty} v_s(t) U_s(x, y, z) \quad (27)$$

et déterminons les fonctions  $v_s(t)$  de la même façon

$$q_r^2 v_r = \int_V c T_q U_r dV \quad (28)$$

Combinant (22) et (27)

$$T = \sum_1^{\infty} w_r(t) U_r(x, y, z) \quad (29)$$

avec

$$w_r = u_r + v_r$$

Combinant enfin (26) et (28)

$$q_r^2(w_r' + p_r^2 w_r) = \int_V Q_v U_r dV + p_r^2 \int_V c T_q U_r dV \quad (30)$$

Il reste à montrer que le calcul explicite de  $T_q$  n'est pas nécessaire à l'évaluation des seconds membres de (30). Des équations (7) (23) (8) et (25) nous tirons

$$\begin{aligned}
& - \int_{\mathbf{V}} T_q \operatorname{div} (K \operatorname{grad} U_r) dV = \\
& - \int_{\Lambda} K T_q \frac{\partial U_r}{\partial n} dA + \int_{\mathbf{V}} K (\operatorname{grad} T_q, \operatorname{grad} U_r) dV = \\
& \int_{\Lambda} h T_q U_r dA + \int_{\mathbf{V}} K (\operatorname{grad} T_q, \operatorname{grad} U_r) dV = p_r^2 \int_{\mathbf{V}} c T_q U_r dV \quad (31)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& - \int_{\mathbf{V}} U_r \operatorname{div} (K \operatorname{grad} T_q) dV = \\
& - \int_{\Lambda} K U_r \frac{\partial T_q}{\partial n} dA + \int_{\mathbf{V}} K (\operatorname{grad} T_q, \operatorname{grad} U_r) dV = \\
& \int_{\Lambda} h T_q U_r dA - \int_{\Lambda} (h T_a + Q_a) U_r dA + \int_{\mathbf{V}} K (\operatorname{grad} T_q, \operatorname{grad} U_r) dV = 0
\end{aligned}$$

Des deux dernières égalités il vient par différence

$$p_r^2 \int_{\mathbf{V}} c T_q U_r dV = \int_{\Lambda} (h T_a + Q_a) U_r dA \quad (32)$$

Et les équations (30) deviennent les équations « normales »

$$w_r' + p_r^2 w_r = W_r(t) \quad (33)$$

avec pour les fonctions d'attaque au second membre

$$q_r^2 W_r(t) = \int_{\mathbf{V}} Q_v U_r dV + \int_{\Lambda} (h T_a + Q_a) U_r dA \quad (34)$$

Ces fonctions sont maintenant déterminées directement par les données non-homogènes du problème et la connaissance des fonctions propres.

Leur solution obtenue, par exemple, par variation des paramètres est

$$w_r(t) = w_r(0) e^{-p_r^2 t} + \int_0^t W_r(\tau) e^{-p_r^2(t-\tau)} d\tau \quad (35)$$

Les valeurs initiales sont à nouveau déterminées par la situation initiale

$$T_0(x, y, z) = \sum_1^{\infty} w_r(0) U_r(x, y, z) \quad (36)$$

$$q_r^2 w_r(0) = \int_{\mathbf{V}} c T_0 U_r dV \quad (37)$$

En cas de température imposée sur une portion  $A_1$  de la surface les calculs (31) et (32) doivent être révisés pour tenir compte des relations

$$U_r = 0 \text{ et } T_q = T_a$$

valables sur cette portion. Si  $A_2$  désigne la partie complémentaire à  $A_1$  le résultat qui généralise (32) est alors

$$p_r^2 \int_V c T_q U_r dV = \int_{A_1} (h T_a + Q_a) U_r dA - \int_{A_1} K T_a \frac{\partial U_r}{\partial n} dA \quad (32')$$

avec une généralisation correspondante des fonctions d'attaque (34).

#### 4. QUELQUES CAS PARTICULIERS

a) Paroi complètement athermane, sources à débit constant :

La dérivée normale des fonctions propres est nulle sur la paroi.

Il faut tenir compte de la première valeur propre  $p_1 = 0$  avec  $U_1 = 1$

$$T = \frac{1}{\int_V c dV} \left( \int_V c T_0 dV + t \int_V Q_v dV \right) + \sum_2^{\infty} \left[ w_r(0) e^{-p_r^2 t} + \frac{1 - e^{-p_r^2 t}}{p_r^2 q_r^2} \int_V Q_v U_r dV \right] U_r$$

Si la température initiale  $T_0$  est uniforme on a de plus par orthogonalité des fonctions propres pour  $r \geq 2$  avec  $U_1 = 1$

$$w_r(0) = 0 \quad (r = 2 \dots \infty)$$

et par conséquent

$$T = T_0 + t \frac{\int_V Q_v dV}{\int_V c dV} + \sum_2^{\infty} \left( \frac{1 - e^{-p_r^2 t}}{p_r^2 q_r^2} \int_V Q_v U_r dV \right) U_r$$

b) Pas de sources de volume mais débit de chaleur imposé  $Q_a(x, y, z, t)$  sur la surface. Comme  $h = 0$  les fonctions propres sont les mêmes que celles du cas précédent.

$$T = \frac{1}{\int_V c dV} \left[ \int_V c T_0 dV + \int_0^t \int_A Q_a(x, y, z, \tau) dA d\tau \right] \\ + \sum_2^{\infty} \left[ w_r(0) e^{-p_r^2 t} + \frac{1}{q_r^2} \int_0^t e^{-p_r^2(t-\tau)} \int_A Q_a(x, y, z, \tau) U_r dA d\tau \right] U_r$$

Si la température initiale est uniforme on a le cas plus simple utilisé par Broglie (\*) (2).

$$T = T_0 + \frac{1}{\int_V c dV} \int_0^t \int_A Q_a(x, y, z, \tau) dA d\tau \\ + \sum_2^{\infty} \left[ \frac{1}{q_r^2} \int_0^t e^{-p_r^2(t-\tau)} \int_A Q_a(x, y, z, \tau) U_r dA d\tau \right] U_r$$

c) Pas de sources de volume ni de surface. La paroi est en contact avec un milieu à température uniforme mais variable  $T_a(t)$ . Les fonctions propres sont déterminées par la condition générale (8).

$$T = \sum_1^{\infty} \left[ w_r(0) e^{-p_r^2 t} + \frac{1}{q_r^2} \int_A h U_r dA \int_0^t T_a(\tau) e^{-p_r^2(t-\tau)} d\tau \right] U_r$$

Pour une température initiale uniforme

$$w_r(0) = \frac{T_0}{q_r^2} \int_V c U_r dV$$

mais par (7) et (8)

$$p_r^2 \int_V c U_r dV = - \int_A K \frac{\partial U_r}{\partial n} dA = \int_A h U_r dA$$

et on peut écrire

$$T = \sum_1^{\infty} \left( \frac{1}{q_r^2} \int_A h U_r dA \right) \left( \frac{T_0}{p_r^2} e^{-p_r^2 t} + \int_0^t T_a(\tau) e^{-p_r^2(t-\tau)} d\tau \right) U_r$$

(\*) L'emploi de sources de surface équivalentes, déterminées à chaque pas d'intégration dans le temps, permet évidemment de traiter le cas de conditions frontière non-linéaires. Cette méthode imaginée par Broglie conduit cependant, comme le montrent des exemples simples, à une série qui diverge à la frontière.

d) Pas de sources de volume ni de surface, la température uniforme  $T_a(t)$  est imposée à la paroi. Les fonctions propres sont nulles à la paroi.

$$T = \sum_1^{\infty} \left[ w_r(0)e^{-p_r^2 t} - \frac{1}{q_r} \int_A K \frac{\partial U_r}{\partial n} dA \int_0^t T_a(\tau) e^{-p_r(t-\tau)} d\tau \right] U_r$$

Et si la température initiale est uniforme

$$T = - \sum_1^{\infty} \left( \frac{1}{q_r} \int_A K \frac{\partial U_r}{\partial n} dA \right) \left( \frac{T_0}{p_r} e^{-p_r^2 t} + \int T_a(\tau) e^{-p_r(t-\tau)} d\tau \right) U_r$$

## 5. UN EXEMPLE BI-DIMENSIONNEL.

### SOURCES DE CHALEUR FILIFORMES ÉQUIDISTANTES NOYÉES DANS UNE PLAQUE INFINIE

Ce problème idéalise celui de l'évacuation des calories produites par échauffement cinétique sur un revêtement d'engin à l'aide d'une circulation de réfrigérant dans des conduits minces noyés dans la masse. C'est aussi celui des plafonds chauffants.

L'épaisseur de la plaque de caractéristiques  $K$  et  $c$  homogènes est  $2b$ . Elle contient dans son feuillet moyen les conduits parallèles séparés par une distance  $2a$ . Si l'on admet que la température est sensiblement constante le long d'un conduit le problème peut être traité comme bi-dimensionnel pour une section transversale. Le débit de chaque source dans une section sera supposé suivre la même loi temporelle. Si de plus les faces  $y = \pm b$  sont en contact avec un milieu à même température et avec le même coefficient de transfert  $h$ , on peut se borner à la considération du rectangle  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  pour lequel les parois  $y = 0$ ,  $y = a$  et  $x = 0$  sont athermanes par raison de symétrie et qui contient un quart de source en  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Notons qu'il n'y aurait aucune difficulté à analyser le cas plus général de température et coefficients de transfert différents sur les faces avec sources localisées plus près d'une face que de l'autre.

Le domaine qui se répète par symétries serait alors  $0 < x < a$   
 $-b < y < b$  avec une demi-source en  $x = 0$   $y = e < b$ .

Les fonctions propres du problème obéissent à l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{c}{K} p^2 U = 0 \quad (38)$$

avec

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } x = a \quad (39)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \text{ pour } y = 0 \quad (40)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{h}{K} U = 0 \text{ pour } y = b \quad (41)$$

Les variables spatiales sont elles-même séparables

$$U = X(x) Y(y)$$

conduisant aux équations différentielles ordinaires

$$X'' + n^2 \frac{\pi^2}{a^2} X = 0 \quad (42)$$

$$Y'' + \frac{\mu^2}{b^2} Y = 0 \quad (43)$$

avec

$$\mu^2 = p^2 \frac{b^2 c}{K} - \pi^2 n^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \quad (44)$$

les fonctions propres

$$X_n = \cos n\pi \frac{x}{a} \quad (n = 0, 1, 2, \dots \infty)$$

répondent au problème (42) et (39). Les fonctions

$$Y_i = \cos \mu_i \frac{y}{b} \quad (i = 1, 2, \dots \infty)$$

au problème (43), (40) et (41) à condition de prendre pour les  $\mu_i$  les racines (positives) de l'équation transcendante

$$\cot \mu = \frac{K}{hb} \mu \quad (45)$$

La famille double de fonctions propres est donc

$$U_{ni} = \cos n\pi \frac{x}{a} \cos \mu_i \frac{y}{b} \quad (46)$$

avec, suivant (44) les valeurs propres

$$p_{ni}^2 = \frac{K}{b^2 c} \left( \mu_i^2 + \pi^2 n^2 \frac{b^2}{a^2} \right) \quad (47)$$

Le calcul des modules livre

$$q_{ni}^2 = c \int_0^a \int_0^b U_{ni}^2 dx dy = \begin{cases} \frac{abc}{2} \left( 1 + \frac{\sin 2\mu_i}{2\mu_i} \right) & \text{pour } n = 0 \\ \frac{abc}{4} \left( 1 + \frac{\sin 2\mu_i}{2\mu_i} \right) & \text{pour } n = 1 \dots \infty \end{cases} \quad (48)$$

Pour l'effet des sources on trouve ici si  $Q_o(t)$  est le débit d'une source

$$\int_V Q_v U_{ni} dV = \frac{1}{4} Q_o(t) U_{ni}(0, 0) = \frac{1}{4} Q_o(t) \quad (49)$$

Pour l'effet du transfert par la paroi  $y = b$

$$\int_A h T_a U_{ni} dA = h T_a \cos \mu_i \int_0^a \cos n\pi \frac{x}{a} dx = \begin{cases} ah T_a \cos \mu_i & \text{pour } n = 0 \\ 0 & \text{pour } n = 1 \dots \infty \end{cases} \quad (50)$$

Pour une température initiale uniforme  $T_o$

$$q_{ni}^2 w_{ni}(0) = T_o \int_V c U_{ni} dV = - \frac{T_o}{p_{ni}^2} \int_A K \frac{\partial U_{ni}}{\partial n} dA$$

soit encore par (39) (40) et (41)

$$q_{ni}^2 w_{ni}(0) = \frac{h T_o \cos \mu_i}{p_{ni}^2} \int_0^a \cos n\pi \frac{x}{a} dx = \begin{cases} \frac{ah T_o \cos \mu_i}{p_{ni}^2} & \text{pour } n = 0 \\ 0 & \text{pour } n = 1 \dots \infty \end{cases} \quad (51)$$

Posant pour la facilité de l'écriture

$$\beta_i = \frac{1}{1 + \frac{\sin 2\mu_i}{2\mu_i}} \quad \alpha_i = \frac{\sin \mu_i}{\mu_i} \beta_i \quad (52)$$

on trouve que la représentation de l'état initial uniforme de température est équivalent à la relation

$$1 = \sum_i 2\alpha_i \cos \mu_i \frac{y}{b} \quad (53)$$

Tandis que pour une température extérieure  $T_a$  constante et un

débit constant des sources, l'application des formules générales (34) (35) et (29) donne finalement

$$T(x, y, t) = T_a + (T_o - T_a) \sum_i 2\alpha_i e^{-\rho_i^2 t} \cos \mu_i \frac{y}{b} + \frac{bQ_o}{aK} \sum_i \beta_i \cos \mu_i \frac{y}{b} \left[ \frac{1 - e^{-\rho_i^2 t}}{2\mu_i^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi \frac{x}{a}}{\mu_i^2 + \pi^2 n^2 \frac{b^2}{a^2}} (1 - e^{-\rho_i^2 t}) \right] \quad (54)$$

La répartition finale de température est

$$T(x, y, \infty) = T_a + \frac{bQ_o}{aK} \sum_i \beta_i \cos \mu_i \frac{y}{b} \left( \frac{1}{2\mu_i^2} + \sum_1^{\infty} \frac{\cos n\pi \frac{x}{a}}{\mu_i^2 + \pi^2 n^2 \frac{b^2}{a^2}} \right) \quad (55)$$

Pour faciliter son calcul numérique, sommons la dernière série qui est du type

$$S = \sum_1^{\infty} \frac{\cos n\xi}{n^2 + q^2}$$

A cet effet observons que S obéit formellement à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 S}{d\xi^2} - q^2 S = - \sum_1^{\infty} \cos n\xi$$

La somme du second membre, interprétée comme limite d'une série convergente

$$- \lim_{\phi \rightarrow 0} \sum_1^{\infty} e^{-n\phi} \cos n\xi = \frac{1}{2}$$

fournit alors une solution de la forme

$$S = A \operatorname{ch} q\xi + B \operatorname{sh} q\xi - \frac{1}{2q^2}$$

La condition

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{pour } x = a$$

conduit à prendre

$$\left(\frac{dS}{d\xi}\right)_{\xi=\pi} = q(A \operatorname{sh}\pi q + B \operatorname{ch}\pi q) = 0$$

et la propriété évidente de la série proposée

$$\int_0^{\pi} S d\xi = 0$$

fournit, eu égard au résultat précédent,

$$B = -\frac{\pi}{2q}$$

De la sorte il vient

$$\sum_1^{\infty} \frac{\cos n\xi}{n^2 + q^2} = \frac{\pi}{2q \operatorname{sh}\pi q} \operatorname{ch} q (\pi - \xi) - \frac{1}{2q^2} \quad (56)$$

On vérifie sans difficulté que le premier membre est bien la série de Fourier du second dans l'intervalle  $(0, 2\pi)$ . Il peut sembler paradoxal que la somme ne vérifie pas la condition

$$\frac{dS}{d\xi} = 0 \text{ pour } \xi = 0$$

Ceci tient au fait que par suite du développement en série de fonctions propres dans la direction  $y$ , les sources concentrées à deux dimensions sont remplacées par une superposition de sources distribuées le long des verticales  $x = \pm 2na$ . Pour chacune de ces distributions, correspondant à une valeur de l'indice  $i$ , il en résulte un gradient thermique horizontal non nul et symétrique de part et d'autre de ces verticales.

Ce gradient doit bien entendu disparaître après sommation sur les valeurs de l'indice  $i$  (\*).

De fait, appliquant (56) aux parenthèses de l'expression (55), il vient

$$T(x, y, \infty) = T_a + \frac{Q_0}{2K} \sum_i \frac{\beta_i}{\mu_i \operatorname{sh} \mu_i \frac{a}{b}} \cos \mu_i \frac{y}{b} \operatorname{ch} \mu_i \frac{a-x}{b} \quad (57)$$

(\*) Je tiens à remercier le Professeur H. Garnir pour les discussions qui m'ont invité à vérifier ce dernier point.

On en déduit par dérivation

$$-K \left( \frac{\partial \Gamma(x, y, \infty)}{\partial x} \right)_{x=+0} = \frac{Q_0}{2b} \sum_i \beta_i \cos \mu_i \frac{y}{b} \quad (58)$$

Le membre de gauche représente le flux thermique émis vers la droite par la paroi  $x = 0$ . Ce flux doit aussi être représenté par l'opérateur de Dirac

$$\frac{1}{4} Q_0 \delta(y) \quad (59)$$

car il est nul partout sauf à l'endroit même de la source et l'intégrale du flux doit correspondre au quart du débit total de la source. Un développement formel de l'opérateur de Dirac en série de fonctions propres s'obtient sans difficulté à partir de sa propriété de filtration

si

$$\sum_i A_i \cos \mu_i \frac{y}{b} = \delta(y)$$

$$A_i \int_0^b \cos^2 \mu_i \frac{y}{b} dy = \frac{b A_i}{2 \beta_i} = \int_0^b \delta(y) \cos \mu_i \frac{y}{b} dy = 1$$

d'où

$$\delta(y) = \frac{2}{b} \sum_i \beta_i \cos \mu_i \frac{y}{b}$$

Ce développement correspond physiquement au remplacement de la source par une somme de distributions le long de  $x = 0$ . Substitué dans (59) il restitue exactement (58) et achève la justification de (57).

Tant que  $x \neq 0$  la série (57) converge fortement par la présence des facteurs

$$\frac{ch \mu_i \frac{a-x}{b}}{\mu_i sh \mu_i \frac{a}{b}} \xrightarrow{\mu_i \rightarrow \infty} \frac{e^{-\mu_i x}}{\mu_i}$$

Le long de  $x = 0$  les termes ne décroissent plus que comme

$$\frac{1}{\mu_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi(i-1)}$$

indiquant comme il fallait s'y attendre l'effet de la singularité

logarithmique due à la source. On peut isoler l'effet de la singularité par le développement

$$\ln \frac{y}{b} = \sum_i \frac{2\beta_i}{b} \beta_i B_i \cos \mu_i \frac{y}{b}$$

avec

$$B_i = \int_0^b \ln \frac{y}{b} \cos \mu_i \frac{y}{b} dy = -\frac{b}{\mu_i} \int_0^b \sin \mu_i \frac{y}{b} \frac{dy}{y}$$

$$= -\frac{b}{\mu_i} \int_0^{\mu_i} \sin z \frac{dz}{z} = -\frac{b}{\mu_i} \text{Si} (\mu_i)$$

On obtient ainsi l'expression

$$T(0, y, \infty) = T_a - \frac{Q_0}{2\pi K} \ln \frac{y}{b} + \frac{Q_0}{2K} \sum_i \frac{\beta_i}{\mu_i} \left( \coth \mu_i \frac{a}{b} - \frac{2}{\pi} \text{Si} (\mu_i) \right) \cos \mu_i \frac{y}{b}$$

La convergence de la série est maintenant meilleure. Elle peut encore être améliorée en tenant compte de l'expression asymptotique du sinus intégral :

$$\text{Si} (\mu_i) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\cos \mu_i}{\mu_i}$$

C'est le second terme qui gouverne le degré de convergence de la série. Cependant la série formée avec les seconds termes du développement asymptotique est directement sommable. Par la transformation

$$\frac{\cos \mu_i}{\mu_i} = \frac{K}{hb} \sin \mu_i$$

justifiée par (45), il vient eu égard à (53) :

$$\frac{Q_0}{2K} \sum_i \left( \frac{\beta_i}{\mu_i} \frac{2K}{\pi hb} \sin \mu_i \right) \cos \mu_i \frac{y}{b} = \frac{Q_0}{\pi hb} \sum_i \alpha_i \cos \mu_i \frac{y}{b} = \frac{Q_0}{2\pi hb}$$

Ceci justifie la formule finale

$$T(0, y, \infty) = T_a + \frac{Q_0}{2\pi hb} - \frac{Q_0}{2\pi K} \ln \frac{y}{b} + \frac{Q_0}{2K} \sum_i \gamma_i \cos \mu_i \frac{y}{b} \quad (60)$$

avec la suite fortement décroissante

$$\gamma_i = \frac{\beta_i}{\mu_i} \left[ \coth \mu_i \frac{a}{b} - \frac{2}{\pi} \left( \text{Si} (\mu_i) + \frac{\cos \mu_i}{\mu_i} \right) \right] \quad (61)$$

A partir de (54) on trouve pour le débit de chaleur à travers la paroi supérieure du rectangle fondamental

$$\int_0^a h(T - T_a) dx = \frac{1}{2} Q_0 \sum_i \frac{\sin \mu_i}{\mu_i + \sin \mu_i \cos \mu_i} (1 - e^{-\nu_i^2 t})$$

Il doit tendre asymptotiquement vers le quart du débit d'une source.

Le rapport du débit transitoire au débit asymptotique est donc

$$q(\tau) = \sum_i 2\alpha_i (1 - e^{-\mu_i^2 \tau}) \quad (62)$$

avec une mesure non-dimensionnelle du temps définie par

$$t = \frac{b^2 c}{K} \tau \quad (63)$$

### CALCULS NUMÉRIQUES

Les valeurs propres définies par (45) ont été calculées pour la valeur du paramètre.

$$\frac{K}{hb} = 0.5$$

par un processus rapidement convergent consistant à poser

$$\mu_r = (2r - 1) \frac{\pi}{2} - \epsilon \quad r = 1, 2, \dots$$

avec le schéma d'itération

$$0 < \epsilon_{p+1} = \arctan \frac{(2r - 1) \frac{\pi}{2} - \epsilon_p}{2} < \frac{\pi}{2}$$

La première estimation de  $\epsilon$  peut être standardisée à  $\frac{\pi}{2}$  pour le

calcul sur ordinateur électronique. Les approximations se faisant alternativement par excès et par défaut le contrôle de l'erreur est immédiat. Environ 17 cycles d'itération sont nécessaires pour obtenir  $\mu_1$ , avec 6 chiffres significatifs, 8 pour  $\mu_2$ , 6 pour  $\mu_3$ , 5 pour  $\mu_4$ , 4 à partir de  $\mu_5$ , 3 à partir de  $\mu_6$ .

Pour une telle précision la formule asymptotique

$$\mu_r \sim \pi(r-1) + \frac{1}{\pi(r-1)} \frac{hb}{K}$$

devient valable à partir d'environ  $r = 30$ .

Après calcul direct des valeurs correspondantes définies par (52) la série (62) a été calculée pour une suite de valeurs de l'argument  $\tau$ . La valeur exacte est située entre les sommes calculées respectivement pour 159 et 160 termes et figurant au tableau I.

Les coefficients  $\gamma_r$  ont été évalués à l'aide d'une table de sinus intégral dans le cas  $a = b$ . Les sept premières valeurs figurent au tableau II ; elles ont servi au calcul de la température finale dans la section  $x = 0$  par la formule (60). D'un point de vue technique il est évident que la précision est exagérée et que la série peut en fait être limitée à ses trois premiers termes.

Enfin la courbe finale de température dans les sections  $x = a/2$  et  $x = a$  a été obtenue en calculant (57), la série étant de nouveau limitée au sept premiers termes. Les résultats figurant au tableau III et correspondent aux courbes de la figure 2.

Je tiens à remercier mes assistants MM. L. Dawans et A. Genot qui ont assuré la programmation des calculs sur l'ordinateur IBM. 650 de l'Université.

UNIVERSITÉ DE LIÈGE  
*Laboratoire d'Aéronautique.*

#### BIBLIOGRAPHIE

- (1) A. SOMMERFELD, Partial Differential Equations in Physics, Chap. III. *Academic Press, New-York, 1949.*
- (2) L. BROGLIO. Some Contributions to the Heat Conduction and Thermal Stresses Analysis in Aircraft and Missile Structures.

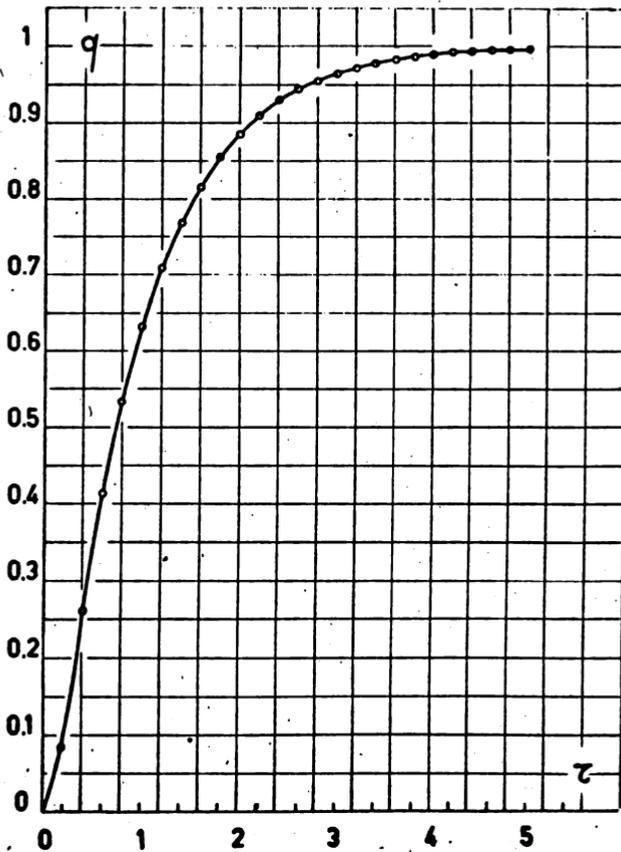


Fig. 1

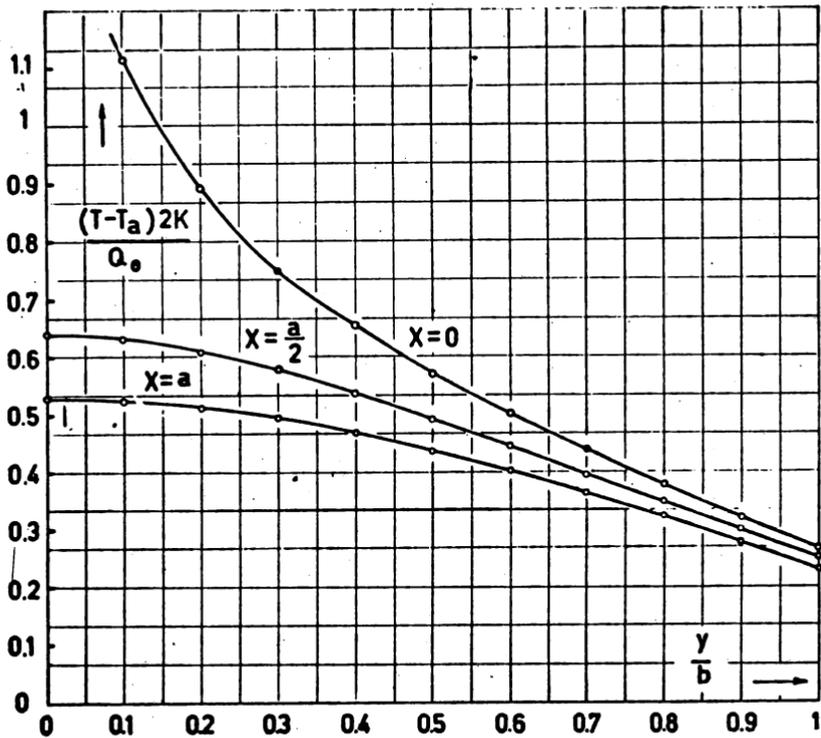


Fig. 2

TABLEAU I

$\tau$	$q(\tau)$	
	159 termes	160 termes
0	0	0
0.2	0.082116	0.082100
0.4	0.260106	0.260090
0.6	0.412420	0.412404
0.8	0.533991	0.533975
1.0	0.630452	0.630436
1.2	0.706950	0.706934
1.4	0.767613	0.767597
1.6	0.815718	0.815702
1.8	0.853866	0.853850
2.0	0.884118	0.884102
2.2	0.908107	0.908091
2.4	0.927130	0.927114
2.6	0.942216	0.942200
2.8	0.954179	0.954163
3.0	0.963666	0.963650
3.2	0.971188	0.971172
3.4	0.977154	0.977138
3.6	0.981885	0.981869
3.8	0.985636	0.985620
4.0	0.988611	0.988595
4.2	0.990970	0.990954
4.4	0.992841	0.992825
4.6	0.994325	0.994309
4.8	0.995501	0.995485
5.0	0.996434	0.996418
$\infty$	1	1

TABLEAU II

$r$	$\mu_r$	$\gamma_r 10^6$
1	1.0768741	227132.5
2	3.6435972	446.2
3	6.5783337	49.7
4	9.6295600	6.7
5	12.722299	1.4
6	15.833611	0.4
7	18.954681	0.1

TABLEAU III

$y/b$	$(T - T_a) \frac{2K}{Q_0}$		
	$x = 0$	$x = a/2$	$x = a$
0	$\infty$	0.639 697	0.529 100
0.1	1.117 526	0.631 954	0.525 177
0.2	0.893 021	0.610 138	0.513 591
0.3	0.748 157	0.577 500	0.494 868
0.4	0.657 115	0.537 601	0.469 780
0.5	0.574 849	0.493 260	0.439 226
0.6	0.503 322	0.446 360	0.404 127
0.7	0.438 645	0.398 032	0.365 341
0.8	0.378 574	0.348 915	0.323 609
0.9	0.321 736	0.299 361	0.279 544
1.0	0.267 282	0.249 550	0.233 621