Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Tome 74, nº III, p. 157-174

PRINCIPES VARIATIONNELS EN MECANIQUE DES FLUIDES COMPRESSIBLES

PAR

B. FRAEIJS de VEUBEKE
Professeur aux Universités de Liège et de Louvain

SOMMAIRE

Les principes variationnels qui gouvernent l'écoulement isentropique d'un fluide parfait compressible sont de deux types distincts. Le principe de Hamilton ([1,8]), par exemple, implique l'utilisation de variations lagrangiennes dans lesquelles l'attention reste fixée sur la même particule. Les principes énoncés par H. Bateman ([2]) et C.T. Wang ([3]) font au contraire usage de variations eulériennes qui se rapportent à un point fixe de l'espace. Nous nous sommes attachés ici à construire une chaîne logique de transformations qui permettent de passer d'un type de principe à un autre. Les étapes essentielles consistent à se libérer de la condition de conservation de la masse à l'aide d'un multiplicateur puis à opérer une transformation de contact, inspirée des méthodes d'énergie potentielle complémentaire ([9]). Le multiplicateur est interprété par un appel à la transformation de Weber ([4]) et l'extension aux écoulements tourbillonnaires se fait sur la base d'une formulation due à Clebsch ([5]).

Soient

$$x_i = X_i(a_k, t) + \varepsilon \Xi_i(a_k, t) \tag{1}$$

les équations définissant pour une particule de coordonnées lagrangiennes (a_1, a_2, a_3) une famille de trajectoires. La trajectoire réelle correspond à la valeur $\varepsilon = 0$ du paramètre; à d'autres valeurs du paramètre correspondent des trajectoires «variées». De façon plus précise la variation du vecteur déplacement d'une particule est définie par les composantes

$$\Delta x_i = d\varepsilon \Xi_i(a_k, t) \tag{2}$$

Elle est arbitraire au même titre que les fonctions $\Xi_i(a_k, t)$. Les équations de l'écoulement réel

$$x_i = X_i(a_k, t) \tag{3}$$

peuvent en principe être mises sous une forme

$$a_k = \alpha_k(x_i, t) \tag{4}$$

résolue par rapport aux coordonnées lagrangiennes. A une époque de référence t_0 arbitraire, les coordonnées cartésiennes d'une particule dans l'écoulement réel sont

$$\overset{0}{x_i} = X_i(a_k, t_0) \tag{5}$$

Ces équations et leurs inverses

$$a_k = \alpha_k(\overset{0}{x_i}, t_0) \tag{6}$$

définissent un changement de variables lagrangiennes. C'est dire que les coordonnées $\overset{0}{x_i}$ à une époque déterminée peuvent être choisies comme coordonnées lagrangiennes. Soit maintenant

$$f = F(a_k, t) + \varepsilon \Phi(a_k, t) \tag{7}$$

une grandeur physique intensive (pression, masse volumique, composante de vitesse...) appartenant à une particule. La variation lagrangienne de cette grandeur, ou «variation en suivant le fluide», peut être définie comme

$$\Delta f = d\varepsilon \Phi(a_k, t) \tag{8}$$

En substituant les fonctions (4) on construit pour l'écoulement réel la représentation eulérienne

$$f = F(\alpha_k(x_i, t), t) = f(x_i, t) \tag{9}$$

du champ de cette grandeur. Sa dérivée temporelle en suivant le fluide peut se calculer soit à partir de (7) en maintenant les coordonnées lagrangiennes constantes

$$\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \mathrm{F}(a_k, t)}{\partial t} \tag{10}$$

soit à partir de (9) en tenant compte du déplacement subi par la particule pendant l'intervalle de temps

$$\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial t} \tag{11}$$

De façon analogue la variation de f en suivant la particule est soit donnée par (8) soit, partant de (9), par

$$\Delta f = \delta_J + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \tag{12}$$

qui tient compte de la variation de déplacement subie par la particule. Nous allons montrer que cette dernière relation est en accord avec la définition directe que l'on peut donner de la variation locale ou variation eulérienne δf. Substituant (2) et (8) dans (12) il vient

$$\delta f = d\varepsilon \left[\Phi(a_k, t) - \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Xi_i(a_k, t) \right]$$

Or, d'une part

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_m \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a_m} \frac{\partial \alpha_m}{\partial x_i}$$

d'autre part, si on reste au même point de l'espace pour comparer l'écoulement réel à l'écoulement varié, les coordonnées lagrangiennes a_k subissent des variations da_k telles que

$$\mathrm{X}_i(a_k, t) = \mathrm{X}_i(a_k + da_k, t) + d\varepsilon\, \Xi_i(a_k + da_k, t)$$

D'où, en négligeant les différentielles d'ordre supérieur,

$$\Xi_i(a_k, t) = -\sum_k \frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial a_k} \left[\frac{da_k}{d\varepsilon} \right]_x$$

Le symbole $[da_k/d\varepsilon]_x$ indique qu'il s'agit des variations subies par les coordonnées lagrangiennes en un point fixe de l'espace. Substituant ces résultats

$$\delta f = d\varepsilon \left[\Phi(a_k, t) + \sum_m \sum_i \sum_k \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a_m} \frac{\partial \alpha_m}{\partial x_i} \frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial a_k} \left[\frac{da_k}{d\varepsilon} \right]_x \right]$$

Mais on a

$$\sum_i \frac{\partial \alpha_m}{\partial x_i} \frac{\partial X_i}{\partial a_k} = \delta_{mk}$$

le symbole de Kronecker, d'où finalement

$$\delta f = d\varepsilon \left[\Phi(a_k, t) + \sum_k \frac{\partial F}{\partial a_k} \left[\frac{da_k}{d\varepsilon} \right]_x \right]$$

On vérifie facilement que cette expression s'écrit aussi

$$\delta f = d\varepsilon \left[\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right]_{x,\ \varepsilon=0} \tag{13}$$

et constitue alors la définition naturelle de la variation locale de f. Les opérateurs Δ et D/Dt s'appliquant tous deux en suivant la particule, il en découle immédiatement qu'ils sont commutables

$$\frac{D}{Dt} \Delta f = \Delta \frac{Df}{Dt} = d\varepsilon \frac{\partial \Phi(a_k, t)}{\partial t} \tag{14}$$

Il est clair d'autre part que l'opérateur δ, qui laisse les coordonnées cartésiennes x_k constantes, commute avec $\partial/\partial t$ et les $\partial/\partial x_i$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta f = \delta \frac{\partial f}{\partial t} \tag{15}$$

$$\text{grad}\ \delta f = \delta\ \text{grad}\, f \tag{16}$$

Dans la suite nous supposerons que tous les champs sont décrits en coordonnées d'Euler (x_k, t). Ainsi, si $\mathbf{r}$ est le vecteur de composantes $X_i(a_k, t)$, nous supposerons les composantes (2) du vecteur $\mathbf{\Delta r}$ transformées à l'aide des relations (4) en

$$\Delta x_i = d\varepsilon\ \xi_i(x_k, t) \tag{17}$$

et de même pour les composantes du vecteur vitesse $\mathfrak{V}$ de l'écoulement réel

$$\frac{\partial X_i(a_k\ t)}{\partial t} = U_i(a_k, t) = u_i(x_k, t) \tag{18}$$

Alors, puisque

$$\mathfrak{V} = \frac{D\mathbf{r}}{Dt} \tag{19}$$

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{\Delta r} = \Delta \frac{Dr}{Dt} = \mathbf{\Delta \mathfrak{V}} \tag{20}$$

et les relations (11) et (12) peuvent s'écrire

$$\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\operatorname{grad} f, \mathfrak{V}) \tag{21}$$

$$\Delta f = \delta f + (\operatorname{grad} f, \mathbf{\Delta r}) \tag{22}$$

Ces règles opératoires, associées à (14), (15) et (16), suffisent à nos besoins. Elles permettent en particulier de reconnaître la signification d'opérations mixtes telles que

$$\delta \frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} \delta f + (\operatorname{grad} \delta f, \mathfrak{V}) + (\operatorname{grad} f, \boldsymbol{\delta}\mathfrak{V}) \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta f = \Delta \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{\Delta r}\right) \tag{24}$$

2. Variations d'une intégrale de volume

On peut se servir de coordonnées de Lagrange pour établir les principes variationnels de la Mécanique des milieux continus [7,8]. Dans ce cas l'élément de volume s'exprimera par exemple par $dx_1^0\, dx_2^0\, dx_3^0$ et sa variation lagrangienne sera nulle par définition.

Il est plus approprié au but que nous poursuivons d'utiliser les coordonnées d'Euler. Dans ce cas l'élément de volume est $d\tau = dx_1\, dx_2\, dx_3$. Quand on le suppose évoluer de façon à rester constitué des mêmes particules fluides, sa dérivée temporelle est, par calcul direct

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(d\tau) = d\tau \operatorname{div} \mathfrak{V} \tag{25}$$

Par un calcul formellement analogue on trouve pour sa variation lagrangienne

$$\Delta(d\tau) = \operatorname{div}(\mathbf{\Delta r})\, d\tau \tag{26}$$

Sa variation eulérienne est nulle par définition. Considérons maintenant une intégrale de volume

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{V}} f\, d\tau$$

Si les surfaces délimitant le volume sont entraînées avec le mouvement du fluide, nous aurons

$$\frac{\mathrm{DI}}{\mathrm{D}t} = \int_{\mathrm{V}} \frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t}\, d\tau + f\, \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(d\tau) = \int_{\mathrm{V}} \left[\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t} + f \operatorname{div} \mathfrak{V}\right] d\tau$$

Or, $(\mathfrak{V},\ \operatorname{grad} f) + f \operatorname{div} \mathfrak{V} = \operatorname{div}(f\,\mathfrak{V})$
et donc, appliquant le théorème de la divergence,

$$\frac{\mathrm{DI}}{\mathrm{D}t} = \int_{\mathrm{V}} \frac{\partial f}{\partial t}\, d\tau + \int_{\mathrm{S}} f(\mathfrak{V}, \mathfrak{n})\, d\mathrm{S} \tag{27}$$

où $\mathfrak{n}$ est la normale extérieure à l'élément de surface. Ce résultat est d'ailleurs facile à établir par raisonnement direct. Plus généralement, si les points des surfaces délimitant le volume se déplacent avec des vitesses $\mathfrak{W}$, indépendantes des vitesses des particules situées à cet instant sur ces surfaces

$$\frac{d\mathrm{I}}{dt} = \int_{\mathrm{V}} \frac{\partial f}{\partial t}\, d\tau + \int_{\mathrm{S}} f(\mathfrak{W}, \mathfrak{n})\, d\mathrm{S} \tag{28}$$

Ce cas se présente quand on se sert de surfaces théoriques, dites «de contrôle», qui peuvent être traversées par les particules. Un autre cas important pour la pratique est celui d'un écoulement limité par des parois matérielles qui se déforment dans le temps et sur lesquelles les particules peuvent glisser. Il existe alors une condition de tangence de l'écoulement le long des parois

$$(\mathfrak{W} - \mathfrak{V}, \mathfrak{n}) = 0 \qquad \text{sur S} \tag{29}$$

qui entraîne le résultat évident

$$\frac{d\mathrm{I}}{dt} = \frac{\mathrm{DI}}{\mathrm{D}t}$$

Nous nous servirons plus tard du résultat (28) sous la forme

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathrm{V}} \frac{\partial f}{\partial t}\, d\tau\, dt = \left[\int_{\mathrm{V}} f\, d\tau\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathrm{S}} f(\mathfrak{W}, \mathfrak{n})\, d\mathrm{S}\, dt \tag{30}$$

Des calculs analogues peuvent être menés pour évaluer la variation lagrangienne de l'intégrale, c'est-à-dire sa variation quand les surfaces limites accompagnent le déplacement des particules

$$\Delta \mathrm{I} = \int_{\mathrm{S}} (\Delta f\, d\tau + f\, \Delta(d\tau))$$

Nous servant alors des relations (22) et (26) et de

$$\Delta f + f \operatorname{div} \mathbf{\Delta} \mathrm{r} = \delta f + \operatorname{div} (f \mathbf{\Delta} \mathrm{r})$$

il vient (*)

$$\Delta \mathrm{I} = \delta \mathrm{I} + \int_{\mathrm{V}} f(\mathbf{\Delta} \mathrm{r}, \mathrm{n})\, dS \tag{31}$$

où

$$\delta \mathrm{I} = \int_{\mathrm{V}} \delta f d\tau \tag{32}$$

est la variation eulérienne de l'intégrale.

3. Le principe de Hamilton pour un fluide parfait compressible

Notre point de départ est le principe de Hamilton

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{T} - \mathrm{U})\, dt + \int_{t_1}^{t_2} (\Sigma \mathrm{Q}_i\, \delta q_i)\, dt = 0$$

(*) La validité de cette formule est facilement étendue au cas où f est une densité lagrangienne

$$f = \mathscr{L}\left(t, x_k, y_m, \frac{\partial y_m}{\partial t}, \frac{\partial y_m}{\partial x_k}, \ldots\right)$$

dépendant d'un certain nombre de fonctions $y_m(x_k, t)$ et de leurs dérivées partielles jusqu'à un certain ordre. Il suffit d'observer que la relation (12) reste vraie sous la forme

$$\Delta \mathscr{L} = \delta \mathscr{L} + \sum_i \frac{d\mathscr{L}}{dx^i} \Delta x^i$$

où apparaissent les dérivées totales

$$\frac{d\mathscr{L}}{dx^i} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^i} + \sum_m \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x^i} + \sum_m \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial y_m}{\partial t}\right)} \frac{\partial^2 y_m}{\partial t\, \partial x_i} + \ldots$$

Si alors on effectue encore sur le terme (32) les intégrations par parties requises pour ne laisser subsister dans l'intégrale de volume que des termes en δy_m, on obtient en fait un cas particulier de la formule générale (76) de Th. De Donder «Théorie invariantive du Calcul des Variations», Gauthier-Villars, 1935.

étendu à un système de points matériels. Pour l'application au milieu continu, l'énergie cinétique T est exprimée par

$$T = \int_V \frac{1}{2} \rho(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})\, d\tau$$

où ρ est la masse volumique; l'énergie potentielle U par

$$U = \int_V \rho e\, d\tau$$

où e est l'énergie interne spécifique (par unité de masse) du fluide. Négligeant la pesanteur, les échanges thermiques et les échanges de quantité de mouvement par viscosité, le premier principe de la thermodynamique fournit la relation

$$de = -p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

Dans ces conditions l'écoulement isentropique est barotrope. C'est-à-dire que la masse volumique est fonction seulement de la pression et réciproquement. L'énergie spécifique interne est alors fonction seulement de la masse volumique et

$$\frac{de}{d\rho} = \frac{p}{\rho^2} \tag{33}$$

Le travail virtuel des forces extérieures est représenté par le travail virtuel des pressions sur les surfaces limites

$$\Sigma Q_i\, \delta q_i = -\int_S p(\Delta \mathrm{r}, \mathrm{n})\, dS$$

Le principe de Hamilton s'appliquant à un système fermé, c'est-à-dire sans échanges de masse avec l'extérieur, c'est évidemment la variation lagrangienne des intégrales de volume qui doit être appliquée. Le principe s'écrit donc

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho[\tfrac{1}{2}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}) - e]\, d\tau\, dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_S p(\Delta \mathrm{r}, \mathrm{n})\, dS\, dt = 0 \tag{34}$$

Il faut de plus exprimer que la variation lagrangienne conserve la masse d'une particule, soit

$$\Delta(\rho\, d\tau) = 0 \tag{35}$$

ou encore, après développement et utilisation de (26)

$$\Delta\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{\Delta r} = 0 \tag{36}$$

Cette équation lie explicitement la variation lagrangienne de la masse volumique à la variation de déplacement. Cherchons maintenant les équations d'Euler fournies par le principe (34). En appliquant la variation lagrangienne sous le signe intégrale on peut faire usage immédiat de (35) et il vient

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho\Delta[\tfrac{1}{2}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}) - e]\, d\tau\, dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_S p(\mathbf{\Delta r}, \mathbf{n})\, dS\, dt = 0$$

cependant

$$\tfrac{1}{2}\Delta(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}) = \left(\mathfrak{V}, \frac{D}{Dt}\, \mathbf{\Delta r}\right) \tag{37}$$

et

$$\Delta e = \frac{de}{d\rho}\, \Delta\rho = \frac{p}{\rho^2}\, \Delta\rho \tag{38}$$

d'où, substituant à $\Delta\rho$ sa valeur tirée de (36)

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V \left(\boldsymbol{\rho}\mathfrak{V}\, d\tau, \frac{D}{Dt}\, \mathbf{\Delta r}\right) dt + p \operatorname{div}(\mathbf{\Delta r})\, d\tau\, dt$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \int_S p(\mathbf{\Delta r}, \mathbf{n})\, dS\, dt = 0 \tag{39}$$

Le premier terme s'intègre par parties dans la variable temps, pour le second utilisons la formule

$$p \operatorname{div} \mathbf{\Delta r} = \operatorname{div}(p\, \mathbf{\Delta r}) - (\operatorname{grad} p, \mathbf{\Delta r}) \tag{40}$$

De la sorte l'intégrale de volume sur le premier terme au second membre détruit l'intégrale de surface dans (39). Il reste

$$\int_V (\rho\mathfrak{V}, \mathbf{\Delta r})\, d\tau \Big]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left(\frac{D}{Dt}(\rho\mathfrak{V}\, d\tau) + d\tau \operatorname{grad} p, \mathbf{\Delta r}\right) dt = 0$$

L'équation d'Euler relative aux variations arbitraires $\mathbf{\Delta r}$ est donc

$$\frac{D}{Dt}(\boldsymbol{\rho}\mathfrak{V}\, d\tau) + d\tau \operatorname{grad} p = 0 \tag{41}$$

On reconnaît qu'elle exprime le théorème des quantités de mouvement. La conservation de la masse n'est pas contenue dans le principe. Elle peut s'écrire sous la forme

$$\frac{D}{Dt}(\rho\, d\tau) = 0 \tag{42}$$

ou encore, eu égard à (25), sous la forme équivalente

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathfrak{V} = 0 \tag{43}$$

Elle permet de ramener (41) à l'équation Newtonienne du mouvement

$$\rho\, \frac{D\mathfrak{V}}{Dt} + \operatorname{grad} p = 0 \tag{44}$$

Les termes aux limites disparaissent si, comme l'exige le principe de Hamilton, les variations du déplacement sont prises nulles pour $t = t$, et $t = t_2$.

4. La transformation de H. Weber

Nous serons amenés à modifier le principe (34) pour y inclure la conservation de la masse dans l'écoulement réel et le ramener ultérieurement à un principe eulérien. Pour interpréter le multiplicateur lagrangien impliqué dans cette transformation et reconnaître les résultats que fourniront les principes modifiés, il n'est pas inutile de retourner à l'intéressante transformation des équations du mouvement due à H. Weber. Rappelons d'abord la définition de l'enthalpie spécifique h du fluide

$$h = e + \frac{p}{\rho} \tag{45}$$

En vertu de (33) nous aurons

$$dh = \frac{dp}{\rho}$$

de sorte que les équations du mouvement s'écrivent aussi

$$\frac{D\mathfrak{V}}{Dt} + \operatorname{grad} h = 0 \tag{47}$$

Le principe de la transformation de Weber consiste à prendre

la description lagrangienne de ces équations. A cet effet notons par

$$\mathrm{H}(a_m, t) = h(\mathrm{X}_k(a_m, t), t)$$

la représentation lagrangienne de l'enthalpie. Comme

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial a_m} = \sum_i \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial a_m} \qquad (m = 1, 2, 3)$$

on obtient en se servant des équations (47)

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial a_m} = -\sum_i \frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t} \frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial a_m}$$

D'autre part, en vertu de (18)

$$\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial^2 \mathrm{X}_i}{\partial t^2}$$

d'où

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial a_m} = -\sum_i \frac{\partial^2 \mathrm{X}_i}{\partial t^2} \frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial a_m} \qquad (m = 1, 2, 3) \qquad (48)$$

C'est la forme lagrangienne des équations du mouvement. Nous la multiplions par dt et l'intégrons dans l'intervalle (t_1, t) en évaluant le second membre par parties

$$\frac{\partial}{\partial a_m} \int_{t_1}^{t} \mathrm{H}\, dt = -\left(\sum_i \frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial t} \frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial a_m}\right)_{t_1}^{t} + \int_{t_1}^{t} \sum_i \frac{\partial^2 \mathrm{X}_i}{\partial t\, \partial a_m} \frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial t}\, dt$$

Prenant pour variables lagrangiennes les coordonnées cartésiennes d'une particule à l'époque $t = t_1$, soit

$$a_i = \mathrm{X}_i \qquad \text{pour } t = t_1 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

le résultat précédent peut s'écrire

$$\sum_i \frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial a_m} \mathrm{U}_i = \mathrm{U}_m(a_k, t_1) + \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial a_m}$$

où

$$\mathrm{M}(a_k, t) = \int_{t_1}^{t} \left(\tfrac{1}{2} \Sigma \mathrm{U}_i^2(a_k, t') - \mathrm{H}(a_k, t')\right) dt' = m(x_k, t) \qquad (49)$$

Multipliant les équations par da_m et les additionnant

$$\sum_i U_i \, dX_i = \sum_m U_m (a_k, t_1) \, da_m + dM \tag{50}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\sum_i u_i \, dx_i = \sum_m U_m(a_k, t) \, da_m + dm \tag{51}$$

les différentielles, étant toutes prises à t constant. De par sa nature physique la fonction $M(a_k, t)$ est univalente et l'intégrale de sa différentielle est nulle sur tout contour fermé. Par conséquent

$$\oint \sum U_i \, dX_i = \oint \sum_m U_m(a_k, t_1) \, da_m$$

A gauche figure la circulation de la vitesse sur un contour fermé à l'époque t, à droite celle sur le contour constitué des mêmes particules fluides à l'époque t_1. C'est le théorème bien connu de la conservation de la circulation. En particulier si

$$\oint \sum_m U_m(a_k, t_1) \, da_m = 0$$

sur tout contour fermé, l'expression intégrée est la différentielle exacte d'une fonction univalente

$$\sum_m U_m(a_k, t_1) da_m = d\Gamma(a_k) = d\gamma(x_k, t)$$

Par (51) on en déduit que le champ des vitesses dérive d'un potentiel univalent

$$u_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (m + \gamma) \tag{52}$$

De plus comme Γ ne dépend que des coordonnées lagrangiennes et pas du temps

$$\frac{D\gamma}{Dt} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = 0 \tag{53}$$

Dans le cas général la forme de Pfaff dans les coordonnées lagrangiennes peut toujours être mise sous forme canonique

$$\begin{aligned} \Sigma U_m(a_k. t_1) \, da_m &= d\Gamma(a_k) + A(a_k) \, dB(a_k) \\ &= d\gamma(x_k, t) + \alpha(x_k, t) \, d\beta(x_k, t) \end{aligned}$$

Le champ des vitesses admet donc toujours la représentation de Clebsch

$$\mathfrak{V} = \operatorname{grad}(m + \gamma) + \alpha \operatorname{grad} \beta \tag{54}$$

avec

$$\frac{D\alpha}{Dt} = 0 \quad \frac{D\beta}{Dt} = 0 \quad \frac{D\gamma}{Dt} = 0 \tag{55}$$

Les tourbillons du champ sont donnés par le produit vectoriel

$$\operatorname{curl} \mathfrak{V} = [\operatorname{grad} \alpha, \operatorname{grad} \beta] \tag{56}$$

et les lignes tourbillon sont les intersections des surfaces α = constante et β = constante. Celles-ci sont entraînées avec le mouvement du fluide, comme le montrent les équations (55). Il en est donc de même des lignes tourbillon. De par sa définition (49) on a pour la fonction M

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \tfrac{1}{2}V^2 - H \qquad \text{avec } M = 0 \quad t = t_1$$

et par conséquent pour sa représentation eulérienne

$$\frac{Dm}{Dt} = \tfrac{1}{2}V^2 - h \text{ avec } m = 0 \quad t = t_1 \tag{57}$$

5. Modification du principe de Hamilton

En vue de rendre la variation $\Delta\rho$ indépendante de $\Delta\mathbf{r}$, nous incorporons au principe (34) l'équation (42) de conservation de la masse à l'aide d'un multiplicateur $\varphi(x_k, t)$

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left[\rho(\tfrac{1}{2}V^2 - e)\, d\tau + \varphi \frac{D}{Dt}(\rho\, d\tau)\right] dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_S p(\Delta\mathbf{r}, \mathbf{n})\, dS\, dt = 0 \tag{58}$$

Il est clair que la variation sur le multiplicateur restitue l'équation (43) équivalente à (42). Pour obtenir les autres équations d'Euler transformons (58) par une intégration préalable par parties en

$$\Delta\left[\int_V \rho\varphi\, d\tau\right]_{t_1}^{t_2} + \Delta \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho\left(\tfrac{1}{2}V^2 - e - \frac{D\varphi}{Dt}\right) d\tau\, dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_S p(\Delta\mathbf{r}, \mathbf{n})\, dS\, dt = 0 \tag{59}$$

Sous cette forme il est immédiat que la variation sur la masse volumique fournit l'équation d'Euler

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{V}^2 - e - \frac{p}{\rho} - \frac{\mathrm{D}\varphi}{\mathrm{D}t} = 0 \tag{60}$$

et les termes aux limites

$$\int_{\mathrm{S}} \varphi\,\Delta\rho\,d\tau \Big]_{t_1}^{t_2}$$

Ces derniers s'annulent par exemple en prenant

$$\varphi = 0 \text{ pour } t = t_1 \qquad \text{et } \Delta\rho = 0 \text{ pour } t = t_2$$

Dans ce cas il résulte de (57) et (60) que le multiplicateur s'identifie à la fonction m introduite par la transformation de Weber. On peut aussi prendre

$$\Delta\rho = 0 \text{ pour } t = t_1 \text{ et } t = t_2$$

auquel cas le multiplicateur ne diffère de m que par une fonction dont la dérivée en suivant le fluide est nulle :

$$\varphi = m + \gamma \quad \text{où} \quad \frac{\mathrm{D}\gamma}{\mathrm{D}t} = 0$$

Il suffit d'ailleurs que $\Delta\rho$ soit nul à une des limites, en même temps que $\boldsymbol{\Delta}\mathrm{r}$, pour que $\Delta(\rho\,d\tau)$ s'y annule et que (42) entraîne alors à chaque instant la vérification de (35).

Il reste à considérer dans (59) les termes dus aux variations sur les déplacements, provenant de (26) et (37). Compte tenu de la relation

$$\rho\left(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{V}^2 - e - \frac{\mathrm{D}\varphi}{\mathrm{D}t}\right) = p \tag{61}$$

qui dérive directement de (60), ils s'écrivent

$$\int_{\mathrm{V}} \rho\varphi\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\Delta}\mathrm{r})\,d\tau \Big]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathrm{V}} \left(\boldsymbol{\rho}\mathfrak{V}d\tau,\ \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\boldsymbol{\Delta}\mathrm{r})\right) dt$$

$$+\, p\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\Delta}\mathrm{r})\,d\tau\,dt - \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathrm{S}} p(\boldsymbol{\Delta}\mathrm{r},\,\mathrm{n})\,d\mathrm{S}\,dt = 0$$

A l'exception d'un terme additionnel aux limites on est donc ramené à la forme (39) et à l'équation d'Euler (41) ou (44).

Quittes à modifier les conditions aux limites t_1 et t_2, supprimons le premier terme de (59). Observons qu'en nous servant a priori du résultat (60) ou (61) le principe peut s'écrire formellement

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} \int_V p \, d\tau \, dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_S p(\Delta \mathrm{r}, \mathrm{n}) \, dS \, dt = 0$$

ou encore, eu égard à (31)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_V p \, d\tau \, dt = 0 \tag{62}$$

L'équation utilisée a priori étant l'équation d'Euler relative à la variation de la masse par unité de volume, il s'indique, pour interpréter (62), d'éliminer cette variable au profit de la variable conjuguée par rapport à l'énergie interne ρe par unité de volume. Cette variable conjuguée sera, par définition,

$$\frac{d(\rho e)}{d\rho} = e + \frac{p}{\rho} = h$$

Elle n'est autre que l'enthalpie spécifique. L'élimination se fait alors par les propriétés de la transformation de contact de Legendre. L'énergie complémentaire définie par cette transformation

$$\rho \frac{d(\rho e)}{d\rho} - \rho e = \rho(h - e) = p$$

n'est autre que la pression. Le principe (62) est donc un principe analogue au principe de l'énergie complémentaire en élasticité. Pour la pression, considérée comme une fonction de l'enthalpie, on a d'ailleurs en vertu des propriétés involutives de la transformation de Legendre

$$\frac{dp}{dh} = \rho \tag{63}$$

Ainsi, donc pour le calcul de (62)

$$\delta p = \frac{dp}{dh} \delta h = \rho \delta h$$

où la variation de l'enthalpie doit être calculée à partir de l'équation

$$h = \tfrac{1}{2} \mathrm{V}^2 - \frac{\mathrm{D}\varphi}{\mathrm{D}t} \tag{64}$$

équivalente à (60). Les variations sont à prendre indépendamment sur φ et sur $\mathfrak{V}$. Nous servant de (23) il vient

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_S \left[\rho\,(\mathfrak{V} - \operatorname{grad} \varphi, \delta\mathfrak{V}) - (\rho\mathfrak{V}, \operatorname{grad} \delta\varphi) - \rho \frac{\partial}{\partial t} \delta\varphi \right] d\tau\, dt = 0$$

L'équation d'Euler relative aux variations $\delta\mathfrak{V}$ est donc

$$\mathfrak{V} = \operatorname{grad} \varphi \tag{65}$$

Pour obtenir celle relative aux variations $\delta\varphi$ transformons

$$-(\rho\mathfrak{V}, \operatorname{grad} \delta\varphi) = -\operatorname{div}(\rho\mathfrak{V}\,\delta\varphi) + \delta\varphi \operatorname{div}(\rho\mathfrak{V})$$

$$-\rho \frac{\partial}{\partial t} \delta\varphi = -\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\delta\varphi) + \delta\varphi \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

et appliquons le théorème de la divergence et la formule (30) avec $f = \rho\,\delta\varphi$; il vient

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathfrak{V}) \right] \delta\varphi\, d\tau\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_S \rho\,\delta\varphi(\mathfrak{W} - \mathfrak{V}, \mathfrak{n})\, dS dt$$

$$- \int_V \rho\,\delta\varphi\, d\tau \Big]_{t_1}^{t_2} = 0$$

Par conséquent l'équation d'Euler cherchée est

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathfrak{V}) = 0 \tag{66}$$

une forme équivalente à (43) de la conservation de la masse. Pour annuler les termes aux limites il faut prendre

$$\delta\varphi = 0 \qquad t = t_1 \text{ et } t = t_2 \tag{67}$$

Enfin les termes de surface disparaissent aussi en prenant

$$\delta\varphi = 0 \quad \text{sur S} \tag{68}$$

Cependant, quand on rejette cette condition, les variations arbitraires $\delta\varphi$ sur S fournissent automatiquement la condition de tangence de l'écoulement aux parois

$$(\mathfrak{W} - \mathfrak{V}, \mathfrak{n}) = 0 \quad \text{sur S} \tag{69}$$

Ceci n'est pas étonnant puisque le principe lagrangien dont on est parti, et qui n'implique pas (68), suppose que les parois épousent le mouvement du fluide.

Le principe eulérien (62) ne livre plus les équations newtoniennes du mouvement mais bien leur intégrale d'énergie. En effet (64) peut s'écrire

$$h - \tfrac{1}{2} V^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\mathfrak{V}, \operatorname{grad} \varphi) = 0$$

et si l'on y substitue (65), on trouve l'intégrale d'énergie, parfois connue sous le nom d'équation de Kelvin

$$h + \tfrac{1}{2} V^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{70}$$

7. Généralisation du principe eulérien aux écoulements tourbillonnaires

Le principe précédent restreint le champ des vitesses au type irrotationnel dérivant d'un potentiel φ. On lève cette restriction en écrivant la relation (64) comme suit

$$h = \tfrac{1}{2} V^2 - \frac{D\varphi}{Dt} - \alpha \frac{D\beta}{Dt} \tag{64'}$$

ce qui ne la modifie pas en réalité du moment que

$$\frac{D\beta}{Dt} = 0 \tag{71}$$

Or ceci est précisément l'équation d'Euler que l'on trouve en prenant des variations arbitraires sur la fonction α. De plus les variations arbitraires prises sur β donnent

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \alpha) + \operatorname{div}(\rho \alpha \mathfrak{V}) = 0 \tag{72}$$

et comme la relation (66) reste celle fournie par les variations sur φ, il en découle par combinaison

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + (\mathfrak{V}, \operatorname{grad} \alpha) = \frac{D\alpha}{Dt} = 0 \tag{73}$$

Les variations sur le champ de vitesse donnent maintenant

$$\mathfrak{V} = \operatorname{grad} \varphi + \alpha \operatorname{grad} \beta \tag{74}$$

Le principe ainsi modifié conduit par conséquent à la formulation de Clebsch. Les termes aux limites disparaissent avec les

variations $\delta\varphi + \alpha\delta\beta$ à ces limites. Il en est de même pour les termes de surface qui, sinon, livrent encore la condition de tangence (69).

L'intégrale d'énergie généralisée

$$h + \tfrac{1}{2} V^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial t} = 0 \tag{75}$$

est encore une conséquence immédiate de (64′) et de (74).

Une variante du principe (62) consiste alors à définir h par l'équation d'énergie (75), la vitesse étant donnée *a priori* par la relation (74). Il n'y a plus de variations à prendre que sur φ, α et β. On retrouve comme équations d'Euler (66), (71) et (72), et rien n'est changé concernant les intégrales de surface et les termes aux limites.

RÉFÉRENCES

(1) L. Lichtenstein, Grundlagen der Hydrodynamik. Springer, Berlin, 1929, Chap. 9.

(2) H. Bateman, Partial Differential Equations. Dover Publ., New-York, 1944, pp. 164-66.

(3) C.T. Wang, *Journal of the Aeronautical Sciences*, 15 – N° 11, nov. 1948 et 17 – N° 6, juin 1950.

(4) H. Weber, *Crelle* LXVIII, 1868.

(5) A. Clebsch, *Crelle* LIV, 1857 et LVI, 1859.

(6) H. Lamb, Hydrodynamics. Cambridge Univ. Press, 1916, section 14, p. 13; section 167, p. 239.

(7) Th. De Donder et F.H. van den Dungen, *Acad. R. Belg. Bull. Cl. sci.* 35, 1949, pp. 841-46.

(8) J. Delval, *Acad. R. Belg. Bull. Cl. sci.* 37, 1951, pp. 986-89.

(9) B. Fraeijs de Veubeke, *Annales de la Soc. Sci. de Brux*, 73-N° 3, 1959, pp. 327-344.