

## ASTRONAUTICA ACTA

Rédacteur en chef: THEODORE VON KÁRMÁN

Rédacteurs adjoints: F. J. MALINA, I. SÄNGER-BREDDT, L. I. SEDOV, R. SIESTRUNCK

Springer-Verlag in Wien

### L'étagement optimum des groupes de fusées en fonctionnement parallèle

Université de Liège  
BST - Sciences Appliquées et Mathématiques  
1, Chemin des Chevreuils; Bât B52/4  
Sart Tilman, Belgique  
B. M. Fraeijs de Veubeke

(Avec 4 Figures)

#### Résumé — Zusammenfassung — Abstract

**L'étagement optimum des groupes de fusées en fonctionnement parallèle.** Etude théorique du cas limite où les moteurs et les réservoirs, indéfiniment fractionnés, sont largables de façon continue. Il est établi que dans un champ de gravitation uniforme les trajectoires optimales sont composées d'arcs à poussée constante, d'arcs à poussée monotone décroissante et éventuellement de discontinuités de poussée séparant deux arcs à poussée constante.

Pour une charge utile donnée ainsi qu'une vitesse terminale fixée en module et en inclinaison, on établit la synthèse des trajectoires minimales par rapport à la masse initiale ou à la poussée initiale. Les modifications dues à la présence d'un second étage sont discutées.

**Bahn- und Stufenoptimierung mit gekoppelten Boostern.** Es wird der Grenzfall untersucht, wo bei gekoppelten Boostern Tanks und Maschinen kontinuierlich abgeworfen werden können. Es zeigt sich, daß bei einem uniformen Gravitationsfeld die Bahnen aus mit konstantem Schub sowie mit abnehmendem Schub durchlaufenden Bögen bestehen, wobei einliche Unstetigkeiten zwischen den konstanten Schubabschnitten auftreten können.

Optimale Bahnen werden für gegebene Nutzlast sowie gegebene Größe und Richtung der Endgeschwindigkeit unter Berücksichtigung der Anfangsmasse oder des Anfangschubes für ein- oder zweistufige Systeme angegeben.

**Trajectory and Staging Optimization with Clustered Boosters.** Theoretical analysis of the limiting case where engines and tanks in a clustered booster system can be jettisoned continuously. For a uniform gravitational field the trajectories are shown to consist of constant thrust and decreasing thrust arcs with possible finite thrust discontinuities between constant thrust segments.

Under given payload and given intensity and inclination of the terminal velocity vector, the minimal trajectories are determined with respect to initial mass or initial thrust, with or without second stage.

#### I. Introduction

Pour la mise en orbite de charges importantes ou la réalisation de trajectoires très énergétiques, la considération des pertes de gravitation domine celle de la traînée aérodynamique et la poussée requise au départ est très élevée.

Cette poussée peut s'obtenir en groupant un certain nombre de fusées en parallèle (*Saturne*). Une telle solution a l'avantage de se prêter en principe au largage successif de moteurs (*Atlas*) aussi bien que de réservoirs suivant les nécessités d'une optimisation de type donné.

<sup>1</sup> Professeur aux Universités de Liège et de Louvain, Belgique.

L'étude théorique entreprise ici considère le cas limite de l'étagement parallèle continu, c'est-à-dire le fractionnement de la poussée en une infinité de moteurs infinitésimaux alimentés par des réservoirs infinitésimaux largués au rythme de la consommation des ergols.

Les programmes de réduction de la poussée sont analysés pour les trajectoires naturellement incurvées dans un champ de gravitation uniforme, la vitesse et l'angle terminal d'injection sur orbite étant imposés.

De grandes différences dans les caractéristiques de la programmation optimale apparaissent suivant que l'on cherche à rendre la masse initiale ou la poussée initiale minimum, la charge utile étant fixe. Les modifications apportées par la présence d'un second étage sont aussi examinées.

Un grand nombre de considérations techniques et technologiques interviennent pour déterminer la mesure dans laquelle ces solutions idéales sont transposables en pratique. Elles sortent du cadre de cette étude mais l'importance des gains en jeu indique dans certains cas qu'elles méritent un examen approfondi.

## II. Hypothèses et notations

- a) Le champ de gravitation est uniforme;
- b) la poussée est constamment tangente à la trajectoire;
- c) la traînée aérodynamique est négligée;
- d) le poids des moteurs à ergols liquides est à chaque instant proportionnel à la poussée  $F$  réalisée:

$$g M_e = \frac{F}{K} \quad (1)$$

Cette relation implique une correspondance entre la réduction de la poussée et une réduction du poids des moteurs. Ceux-ci sont donc fractionnés au point de pouvoir être largués de façon continue.

- e) Le poids des réservoirs est à chaque instant proportionnel au poids d'ergols  $g M_p$  restant à consommer

$$g M_s = \zeta g M_p \quad (2)$$

Cette relation implique également un fractionnement indéfini des réservoirs qui sont largués au rythme de la consommation en ergols.

- f) Toutes les variables physiques sont considérées comme des fonctions d'une variable descriptive indépendante à croissance monotone entre une valeur initiale fixe  $\sigma_1$  et une valeur fixe  $\sigma_3$  correspondant à la consommation complète des ergols du premier étage. Les dérivées par rapport au paramètre descriptif sont notées

$$\frac{df(\sigma)}{d\sigma} = f^0$$

Le temps étant également à croissance monotone on aura en particulier

$$t^0 \geq 0$$

L'égalité à zéro sur un intervalle fini de variation de  $\sigma$  peut se produire. Elle correspond aux discontinuités dans le temps que peuvent subir certaines variables lors de la séparation d'une masse finie du système propulsif.

## III. Equations fondamentales

$M^*$  désignant la masse propulsée par le groupement en parallèle des fusées du premier étage, la masse totale à un instant quelconque est

$$M(\sigma) = M^* + M_p(\sigma) + M_s + M_e$$

soit, en vertu de (1) et (2).

$$M(\sigma) = M^* + (1 + \zeta) M_p(\sigma) + \frac{F(\sigma)}{K g} \quad (3)$$

Différentions cette relation par rapport à  $\sigma$  et éliminons le débit massique d'ergols par l'équation de la poussée

$$F = -c \frac{dM_p}{dt} = -c \frac{M^0}{t^0}$$

où  $c$  est la vitesse effective d'éjection, que nous supposons constante; il vient

$$M^0 = -\frac{(I + \zeta) F}{c} t^0 + \frac{F^0}{K g} \quad (4)$$

Il est essentiel d'exprimer analytiquement le fait que la poussée ne peut que décroître. L'équation

$$F^0 = -a^2 \frac{g}{c} M t^0 \quad (5)$$

convient à cet effet. La variable  $a$ , dont la connaissance fixe la programmation de réduction de la poussée et qui n'interviendra pas dans sa dérivée, est notre variable de guidage, au sens général que nous avons donné à ce terme.

L'équation du mouvement le long de la tangente à la trajectoire est, suivant les hypothèses admises

$$M \frac{dV}{dt} = F - M g \sin \gamma \quad (6)$$

où  $\gamma$  est l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale. L'équation correspondante suivant la normale est

$$V \frac{d\gamma}{dt} = -g \cos \gamma \quad (7)$$

Les quatre équations fondamentales du problème sont représentées par les équations (4) à (7). Elles gouvernent quatre fonctions inconnues du temps  $M$ ,  $V$ ,  $\gamma$  et  $F$  et forment un système qui requiert pour être intégré la connaissance de la fonction  $a$ , c'est-à-dire du programme de guidage. Celui-ci sera déterminé par le calcul des variations de façon à retirer certaines performances optimales du système. Auparavant il est avantageux pour la simplicité de l'écriture et pour le calcul numérique d'introduire des variables sans dimensions

$$\omega = \frac{V}{c} \quad \tau = \frac{g}{c} t \quad \beta = \frac{F}{M g} \quad \mu = \frac{M}{M_u} \quad (8)$$

L'unité de masse  $M_u$  est la masse dite "utile" qui sera à définir dans chaque cas particulier.

Notant que, suivant la définition du facteur d'accélération instantanée  $\beta$ , on a

$$\frac{\beta^0}{\beta} = \frac{F^0}{F} - \frac{M^0}{M} = \frac{F^0}{F} - \frac{\mu^0}{\mu} \quad (9)$$

le système fondamental peut s'écrire

$$[G]_1 = \omega^0 + (\sin \gamma - \beta) \tau^0 = 0 \quad (10)$$

$$[G]_2 = \gamma^0 + \frac{\cos \gamma}{\omega} \tau^0 = 0 \quad (11)$$

$$[G]_3 = \frac{\mu^0}{\mu} - \frac{\beta^0}{K - \beta} + (1 + \zeta) \frac{K\beta}{K - \beta} \tau^0 = 0 \quad (12)$$

$$[G]_4 = -\beta^0 - a^2 \tau^0 + \frac{a^2}{K} \beta \tau^0 + \beta^2 (1 + \zeta) \tau^0 = 0 \quad (13)$$

L'avant dernière équation a été obtenue en éliminant  $a$ , la dernière en éliminant  $\mu^0$  entre les équations primitives.

#### IV. Equations d'Euler et conditions de transversalité

Désignons par  $G(q, q^0, a)$  la fonction

$$G = \sum_1^4 \lambda_i [G]_i$$

construite à l'aide de quatre multiplicateurs lagrangiens  $\lambda_i$ ;  $q$  désignant l'une des cinq fonctions ( $\omega, \gamma, \mu, \beta, \tau$ ). Les équations d'EULER du problème variationnel

$$\delta \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} G d\sigma = 0$$

sont

$$[G]_q = -\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial G}{\partial q^0} \right) + \frac{\partial G}{\partial q} = 0$$

et

$$[G]_a = \frac{\partial G}{\partial a} = 0$$

c'est-à-dire explicitement

$$[G]_\omega = -\lambda_1^0 - \lambda_2 \frac{\cos \gamma}{\omega^2} \tau^0 = 0 \quad (14)$$

$$[G]_\gamma = -\lambda_2^0 + \lambda_1 \tau^0 \cos \gamma - \lambda_2 \frac{\sin \gamma}{\omega} \tau^0 = 0 \quad (15)$$

$$[G]_\mu = -\frac{1}{\mu} \lambda_3^0 = 0 \quad (16)$$

$$[G]_\beta = \lambda_4^0 + (1 + \zeta) \left( \frac{K}{K - \beta} \right)^2 \lambda_3 \tau^0 - \lambda_1 \tau^0 + \lambda_4 \frac{a^2}{K} \tau^0 + 2\beta \lambda_4 (1 + \zeta) \tau^0 = 0 \quad (17)$$

$$[G]_\tau = U^0 = 0 \quad (18)$$

où

$$U = \lambda_1 (\sin \gamma - \beta) + \lambda_2 \frac{\cos \gamma}{\omega} + \lambda_3 (1 + \zeta) \frac{K\beta}{K - \beta} - \quad (19)$$

$$- \lambda_4 a^2 + \lambda_4 \frac{a^2}{K} \beta + \lambda_4 \beta^2 (1 + \zeta)$$

et

$$[G]_a = 2 \lambda_4 a \tau^0 \left( \frac{\beta}{K} - 1 \right) = 0 \quad (20)$$

La condition de transversalité est

$$\left[ \lambda_1 \delta\omega + \lambda_2 \delta\gamma + \lambda_3 \frac{\delta\mu}{\mu} - \left( \lambda_4 + \frac{\lambda_3}{K - \beta} \right) \delta\beta + U \delta\tau \right]_{\sigma_1}^{\sigma_2} = 0 \quad (21)$$

On sait par la théorie générale du problème de MAYER sous forme paramétrique [2] que les équations d'EULER sont liées par une identité qui est ici

$$\omega^0[G]_{\omega} + \gamma^0[G]_{\gamma} + \mu^0[G]_{\mu} + \beta^0[G]_{\beta} + \tau^0[G]_{\tau} + \sum_1^4 \lambda_i^0[G]_i \equiv 0$$

Ceci montre que pour toute extrémale le long de laquelle une des variables  $q$  ne serait pas constante, l'équation d'EULER correspondante  $[G]_q = 0$  est automatiquement vérifiée quand on satisfait aux autres et aux équations fondamentales (10) à (13).

### V. Nature des extrémales

Les équations (16) et (18) montrent déjà que  $\lambda_3$  et  $U$  sont des constantes le long de toute extrémale. De plus comme les conditions de raccord des extrémales (conditions de WEIERSTRASS et ERDMANN) demandent que les grandeurs  $\partial G / \partial q^0$  soient continues, les multiplicateurs et la grandeur  $U$  sont des fonctions continues. Par conséquent  $\lambda_3$  et  $U$  assument une valeur constante tout le long d'une trajectoire optimale.

Nous n'envisagerons que des problèmes d'optimum sans imposition de contraintes sur la durée de description de la trajectoire. Alors, comme la condition de transversalité comporte le terme  $U \delta(\tau_3 - \tau_1)$  avec variation arbitraire sur la durée (on peut comparer des trajectoires de durées différentes), elle ne peut être satisfaite que par

$$U = 0. \quad (22)$$

La valeur de la constante  $U$  sera donc nulle tout le long de la trajectoire ce qui, par (19), fournit une relation algébrique homogène entre les multiplicateurs. Ces derniers n'étant définis qu'à un facteur d'échelle près, la valeur effective de la constante  $\lambda_3$  est sans importance; pour le calcul numérique il sera commode de lui assigner la valeur 1.

Les différentes extrémales possibles résultent des différentes façons de remplir la condition d'EULER (20) relative à la variable de guidage. La solution  $\beta = K$  est à rejeter car cette valeur du facteur d'accélération ne peut être atteinte que par un moteur se propulsant lui-même à l'exclusion de toute autre masse, même du propergol qui lui est nécessaire. En fait on a toujours  $K - \beta > 0$ . Par contre trois autres possibilités conduisent à des solutions valables.

#### a) L'arc à poussée constante

Solution correspondant à

$$a \equiv 0 \quad (23)$$

ce qui, eu égard à (5), revient à maintenir la poussée constante. Dans ces conditions (12) et (13) s'intègrent facilement en

$$\frac{1}{\beta} + (1 + \zeta) \tau = cte \quad (24)$$

$$\beta \mu = cte \quad (25)$$

Les équations (10) et (11) doivent être intégrées numériquement ainsi que (14) et (15) pour le calcul des multiplicateurs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Pour le calcul de  $\lambda_4$  on

peut, en vertu de l'identité entre équations d'EULER et du fait que  $\beta$  n'est pas constant, négliger (17) et se servir de (22) qui se réduit ici à

$$\lambda_1(\sin \gamma - \beta) + \lambda_2 \frac{\cos \gamma}{\omega} + \lambda_3(1 + \zeta) \frac{K \beta}{K - \beta} + \lambda_4(1 + \zeta) \beta^2 = 0. \tag{26}$$

b) L'arc à poussée décroissante

Solution de (20) correspondant à

$$\lambda_4 \equiv 0. \tag{27}$$

Dans ces conditions (17) se réduit à

$$(1 + \zeta) K^2 \lambda_3 = (K - \beta)^2 \lambda_1 \tag{28}$$

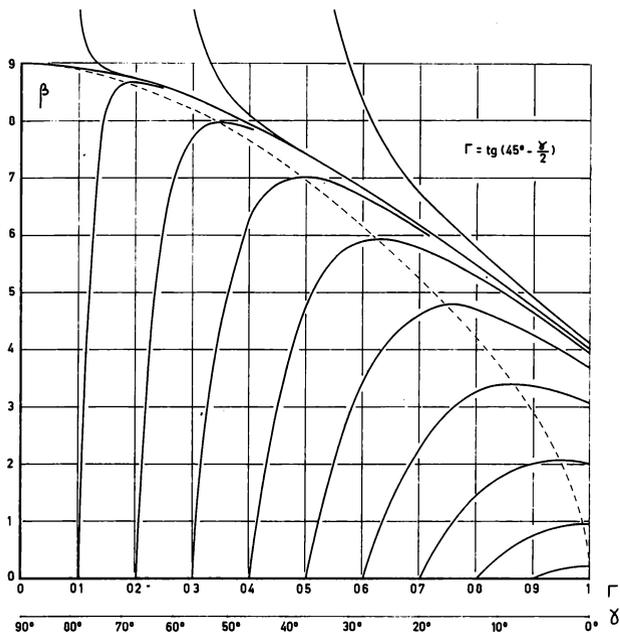


Fig. 1. Arcs à poussée décroissante. Famille de relations optimales entre le facteur d'accélération  $\beta$  et l'angle d'inclinaison  $\gamma$  de la trajectoire avec l'horizontale

Différentions cette relation en tenant compte de (16) et remplaçons  $\lambda_1^0$  par sa valeur tirée de (14), il vient

$$2 \lambda_1 \beta^0 + \lambda_2 \cdot \frac{(K - \beta) \cos \gamma}{\omega^2} \tau^0 = 0. \tag{29}$$

Les équations (28) et (29) ainsi que (22) qui se réduit à

$$\lambda_1(\sin \gamma - \beta) + \lambda_2 \frac{\cos \gamma}{\omega} + \lambda_3(1 + \zeta) \frac{K \beta}{K - \beta} = 0 \tag{30}$$

forment un système linéaire et homogène dans les multiplicateurs  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$ . En annulant le déterminant du système on trouve pour condition de compatibilité

$$\beta^0 = - \frac{K - \beta}{2 \omega} \left( \frac{\beta^2}{K} - \sin \gamma \right) \tau^0.$$

En y substituant  $\beta^0$  par sa valeur tirée de (13) on trouve la loi de guidage explicite

$$a^2 = (1 + \zeta) \frac{K \beta^2}{K - \beta} + \frac{\beta^2 - K \sin \gamma}{2 \omega} \tag{31}$$

La condition de compatibilité prend une forme remarquable quand on y élimine encore  $\omega$  à l'aide de (11) et que l'on prend  $\gamma$  comme variable indépendante:

$$\frac{d\beta}{d\gamma} = \frac{K - \beta}{2 \cos \gamma} \left( \frac{\beta^2}{K} - \sin \gamma \right). \tag{32}$$

Ainsi le facteur d'accélération  $\beta$  ne dépend que de l'inclinaison de la trajectoire sur l'horizontale et des conditions initiales de description de l'arc. Une famille de courbes intégrales de (32) a été calculée pour la valeur  $K = 81$  à l'ordinateur électronique. Le point ( $\beta = \sqrt{K}$ ,  $\gamma = \pi/2$ ) (ou encore  $\Gamma = \tan(\pi/4 - \gamma/2) = 0$ ) est un point singulier (Fig. 1) d'où part une des courbes de la famille et au voisinage duquel les autres courbes sont violemment incurvées et tendent à rejoindre la première pour  $\gamma = 0$  (ou  $\Gamma = 1$ ).

Le long d'un tel arc de courbe on peut intégrer l'équation différentielle

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{\sin \gamma - \beta}{\cos \gamma} d\gamma \quad (33)$$

déduite de (10) et (11) et l'on obtient alors le rapport entre les vitesses atteintes aux deux extrémités de l'arc. Par exemple

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \exp \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{\beta - \sin \gamma}{\cos \gamma} d\gamma \quad (34)$$

Au facteur d'échelle  $\lambda_3$  près, les multiplicateurs sont complètement déterminés par les relations (27), (28) et (29).

c) *L'arc à temps constant*

Posons

$$a = \frac{A}{\sqrt{\tau^0}} \quad (35)$$

et faisons tendre maintenant  $\tau^0$  vers zéro. Comme

$$\lim a \tau^0 = 0$$

l'équation (20) est encore satisfaite. Comme d'autre part

$$\lim a^2 \tau^0 = A^2$$

le système ne reste pas statique; on trouve

$$\beta^0 = A^2 \left( \frac{\beta}{K} - 1 \right) < 0$$

ce qui correspond, dans le temps, à une discontinuité possible du facteur d'accélération. D'autre part (12) s'intègre ici en

$$\mu (K - \beta) = cte. \quad (36)$$

Rapprochant ce résultat de (3) qui peut s'écrire

$$\mu (K - \beta) = \frac{K}{M_u} [M^* + (1 + \zeta) M_p(\sigma)]$$

on en déduit qu'il n'y a pas de consommation d'ergols. Cette solution doit donc bien être interprétée comme une séparation à un instant donné d'une partie finie du système propulsif. Enfin les équations (10) et (11) se réduisent à

$$\omega = cte \quad \gamma = cte. \quad (37)$$

En ce qui concerne les multiplicateurs on observera que  $a^2$  devenant infini, l'équation (22) ne peut être satisfaite que pour

$$\lambda_4 \equiv 0. \quad (38)$$

Comme  $\tau^0 = 0$ , ce résultat est bien compatible avec (17) tandis que (14) et (15) donnent

$$\lambda_1 = cte \quad \lambda_2 = cte. \quad (39)$$

VI. L'arc à temps constant comme arc intermédiaire

Sur la base des résultats précédents des conclusions importantes peuvent être tirées concernant l'existence possible d'un arc à temps constant comme arc intermédiaire. Soient

$$\beta = \alpha_1 \quad \text{et} \quad \beta = \alpha_2$$

les valeurs du facteur d'accélération aux extrémités d'un tel arc. En ces extrémités (38) impose la nullité de  $\lambda_4$ ; il en découle l'identité des équations (26) et (30) qui demandent toutes deux de satisfaire aux extrémités les conditions

$$\lambda_1 (\sin \gamma - \alpha_1) + \lambda_2 \frac{\cos \gamma}{\omega} + \lambda_3 (1 + \zeta) \frac{K \alpha_1}{K - \alpha_1} = 0 \tag{40}$$

$$\lambda_1 (\sin \gamma - \alpha_2) + \lambda_2 \frac{\cos \gamma}{\omega} + \lambda_3 (1 + \zeta) \frac{K \alpha_2}{K - \alpha_2} = 0. \tag{41}$$

D'autre part il découle de (37) et (39) que les valeurs de  $\omega$ ,  $\gamma$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les mêmes dans ces deux conditions. Dès lors, après soustraction et simplification par  $(\alpha_1 - \alpha_2)$  il vient

$$\lambda_1 = (1 + \zeta) \frac{K^2}{(K - \alpha_1)(K - \alpha_2)} \lambda_3 \tag{42}$$

pour valeur constante du premier multiplicateur le long de l'arc intermédiaire à temps constant. Cette expression est valable en principe quelle que soit la nature de l'arc auquel on se raccorde (poussée constante ou décroissante) de part et d'autre. On constate cependant qu'elle est incompatible avec les valeurs

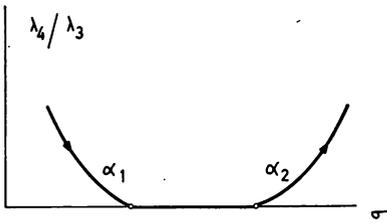


Fig. 2. Raccord d'un arc à temps constant avec deux arcs à poussée constante

$$(1 + \zeta) \frac{K^2}{(K - \alpha_1)^2} \lambda_3 \quad (1 + \zeta) \frac{K^2}{(K - \alpha_2)^2} \lambda_3$$

qui devraient être réalisées en vertu de (28) pour un raccord à gauche ou à droite avec un arc à poussée décroissante. On en déduit que "un arc à temps constant ne peut constituer une transition qu'entre deux arcs à poussée constante".

Par contre un arc à temps constant peut terminer une trajectoire en faisant suite aussi bien à une poussée décroissante qu'à une poussée constante. En effet s'il n'est plus suivi d'un autre arc il n'y a plus lieu de satisfaire à la condition (41).

Une autre indication importante concerne le signe de  $\lambda_4$  immédiatement avant et après l'arc intermédiaire. Suivant (17) on aura

$$\lambda_4^0 = \left( \lambda_1 - (1 + \zeta) \frac{K^2}{(K - \alpha_1)^2} \right) \tau^0$$

pour valeur terminale de la dérivée le long de l'arc venant se raccorder à gauche à l'arc à temps constant. Remplaçant  $\lambda_1$  par sa valeur (42) il vient

$$\lambda_4^0 = - (1 + \zeta) \frac{K^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{(K - \alpha_1)^2 (K - \alpha_2)} \lambda_3 \tau^0. \tag{43}$$

On trouve de même pour valeur initiale de la dérivée le long de l'arc à poussée constante quittant à droite l'arc intermédiaire

$$\lambda_4^0 = + (1 + \zeta) \frac{K^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{(K - \alpha_1)(K - \alpha_2)^2} \lambda_3 \tau^0. \tag{44}$$

Comme  $(\alpha_1 - \alpha_2) > 0$  et que  $\lambda_4$  est nul le long de l'arc intermédiaire on en déduit que le rapport  $\lambda_4/\lambda_3$  conserve immédiatement après l'arc intermédiaire la valeur positive qu'il avait immédiatement avant de l'aborder (Fig. 2).

## VII. Raccord entre un arc à poussée constante et un arc à poussée décroissante

Par (17) nous avons le long d'un arc à poussée constante ( $a = 0$ )

$$\frac{d\lambda_4}{d\tau} = - (1 + \zeta) \frac{K^2}{(K - \beta)^2} \lambda_3 + \lambda_1 - 2 (1 + \zeta) \beta \lambda_4. \quad (45)$$

A hauteur du raccord avec l'arc à poussée décroissante  $\lambda_4$  doit s'annuler et d'après (28)  $\lambda_1$  a exactement la valeur requise pour que

$$\frac{d\lambda_4}{d\tau} = 0 \quad \text{au raccord.} \quad (46)$$

Pour décider du signe de  $\lambda_4$  au voisinage du raccord nous différencions (45), remplaçons  $\lambda_1^0$ ,  $\lambda_3^0$  et  $\beta^0$  par leurs valeurs générales tirées de (14), (16) et (13) (avec  $a = 0$ ), puis évaluons l'expression au niveau du raccord à l'aide des résultats (27), (28), (29) et (46), il vient

$$\frac{d^2\lambda_4}{d\tau^2} = - (1 + \zeta) \frac{2K}{(K - \beta)^2} \left[ (1 + \zeta) \frac{K\beta^2}{K - \beta} + \frac{\beta^2 - K \sin \gamma}{2\omega} \right] \lambda_3.$$

Le crochet est positif car, en vertu de (31), il correspond exactement à la valeur prise par  $a^2$  à l'extrémité de l'arc à poussée décroissante (soulignons ici que, contrairement aux autres variables, la variable de guidage a subit des discontinuités). Par conséquent

$$\frac{1}{\lambda_3} \frac{d^2\lambda_4}{d\tau^2} < 0 \quad \text{au raccord.}$$

Il en résulte que le rapport  $\lambda_4/\lambda_3$  est négatif au voisinage immédiat du raccord comme l'indique la Fig. 3.

## VIII. Le critère de variation forte

Une discontinuité de la variable de guidage, faisant sauter sa valeur de  $a$  à  $\bar{a}$ , reste compatible avec la continuité des variables  $q$  du système fondamental. Comme le montrent les équations (7) à (10), seules les dérivées  $q^0$  subissent des discontinuités qui font passer leur valeur à  $\bar{q}^0$ .

Comme la fonction  $G$  est homogène dans les dérivées  $q^0$ , la fonction excès  $E$  de WEIERSTRASS peut être calculée par l'expression simplifiée

$$E = G(q, \bar{q}^0, \bar{a}) - G(q, \bar{q}^0, a).$$

Dans le cas présent on trouve

$$E = \lambda_4 \bar{\tau}^0 (\bar{a}^2 - a^2) \left( \frac{\beta}{K} - 1 \right). \quad (47)$$

Si une grandeur, dont la variation figure dans la condition de transversalité, est à rendre minimum,  $E$  doit être nul ou d'un signe opposé au coefficient de

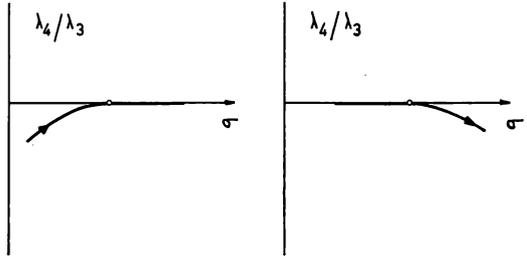


Fig. 3. Raccord entre un arc à poussée constante et un arc à poussée décroissante

cette variation; nul ou de même signe pour le cas d'un maximum. C'est la forme prise ici par le critère de variation forte.

### IX. Fusée de poids initial minimum

Cherchons à rendre  $M_1 = M(\sigma_1)$  minimum pour une masse utile  $M_u$  donnée, c'est-à-dire  $\mu(\sigma_1)$  minimum, dans les conditions suivantes

$$\omega(\sigma_1) = \omega_1 \quad \omega(\sigma_3) = \omega_3 \quad \gamma(\sigma_3) = \gamma_3$$

toutes valeurs imposées. Les variations de ces grandeurs sont donc nulles a priori et, eu égard à (22), la condition (20) de transversalité se réduit à

$$-\lambda_2(\sigma_1) \delta\gamma_1 + \lambda_3 \frac{\delta\mu_3}{\mu_3} - \lambda_3 \frac{\delta\mu_1}{\mu_1} - \left( \lambda_4(\sigma_3) + \frac{\lambda_3}{K - \beta_3} \right) \delta\beta_3 + \left( \lambda_4(\sigma_1) + \frac{\lambda_3}{K - \beta_1} \right) \delta\beta_1 = 0$$

Les variations qui subsistent aux limites ne sont pas indépendantes car l'équation (3), appliquée en  $\sigma_3$  quand les ergols sont épuisés, fournit

$$M(\sigma_3) = M^* + \frac{F(\sigma_3)}{Kg}. \quad (48)$$

Nous commencerons par supposer qu'en  $\sigma_3$  la trajectoire ne se prolonge pas en réalité par la mise à feu d'un second étage. Dans ces conditions nous pouvons assimiler  $M^*$  à  $M_u$ . D'où, divisant (48) par  $M(\sigma_3)$  et résolvant pour  $\mu_3$

$$\mu_3 = \frac{K}{K - \beta_3}. \quad (49)$$

Cette relation permet d'exprimer la variation de  $\beta_3$  en fonction de celle de  $\mu_3$ . Après substitution dans la condition de transversalité, nous pouvons annuler les coefficients des variations arbitraires sur  $\gamma_1$ ,  $\mu_3$  et  $\beta_1$  et obtenons les conditions aux limites naturelles du problème, qui sont

$$\lambda_2(\sigma_1) = 0 \quad (50)$$

$$\lambda_4(\sigma_3) = 0 \quad (51)$$

$$\lambda_4(\sigma_1) = -\frac{\lambda_3}{K - \beta_1}. \quad (52)$$

Il ne subsiste de la condition de transversalité que le terme

$$-\lambda_3 \frac{\delta\mu_1}{\mu_1}.$$

Si le coefficient de la variation est différent de zéro, c'est bien la condition nécessaire pour que  $\mu_1$  soit minimum. En fixant l'échelle des multiplicateurs par le choix

$$\lambda_3 = 1 \quad (53)$$

le coefficient en question est négatif et le critère de variation forte s'écrit

$$E \geq 0 \quad (54)$$

Il reste à déterminer la synthèse des arcs constituant une trajectoire minimale. Elle doit respecter la continuité des variables physiques et des multiplicateurs.

Puisque l'on a toujours  $K - \beta > 0$ , la condition (52) demande une valeur initiale négative de  $\lambda_4$ . Par conséquent le premier arc est à poussée constante ( $a = 0$ ) et, par (48), on constate que le critère (54) est bien vérifié. D'autre part la condition terminale (51) doit être satisfaite et ceci peut avoir lieu de deux façons distinctes:

a)  $\lambda_4$  s'annule pour la première fois en fin de trajectoire ( $\sigma_3$ ). Celle-ci est alors simplement constituée de l'arc à poussée constante.

b)  $\lambda_4$  s'annule en un point intermédiaire  $\sigma = \sigma_2$ . On ne pourra remplir la condition terminale (51) qu'en maintenant  $\lambda_4$  nul. Car, en prolongeant encore l'arc initial, ou  $\lambda_4$  deviendra positif et le critère de variation forte sera violé, ou il deviendra négatif, supprimant toute possibilité ultérieure de raccorder un nouvel arc et de remplir la condition (51).

On peut écarter le cas  $\tau_2 = \tau_3$ , car alors l'arc initial à poussée constante est simplement prolongé par un arc à temps constant. Ceci veut dire qu'en fin de propulsion, une fois la vitesse et l'angle d'injection atteints, on sépare la masse utile de la totalité ou d'une partie du système propulsif restant. Ce n'est qu'une variante technique secondaire du cas a).

Pour  $\tau_2 < \tau_3$ , il n'est pas question de prolonger l'arc initial par un arc à temps constant qui serait nécessairement de caractère intermédiaire car, suivant l'analyse faite à la section VI, ceci exigerait une valeur positive de  $\lambda_4$  antérieure au raccord. Il ne subsiste en définitive que la possibilité de raccorder directement un arc à poussée décroissante et ceci apparaît compatible avec les conclusions tirées à la section VII. Encore une fois une variante technique secondaire consiste à terminer la trajectoire par un arc à temps constant.

Ce qui décide en pratique de l'occurrence du cas a) de celle du cas b) est l'importance du gain de vitesse  $\omega_3 - \omega_1$  requis. Ceci apparaîtra clairement sur l'exemple de la fusée sonde, traité à la section suivante.

Quelle que soit la procédure suivie, le problème de l'intégration complète d'une trajectoire comporte un double jeu d'approximations successives. La procédure que nous allons décrire et qui s'applique au cas b), est simplement destinée à montrer le caractère cohérent du problème. Supposons que nous disposions en  $\sigma_2$  d'une première approximation aux valeurs prises par  $\beta$  et  $\gamma$ . Par intégration de (32) jusqu'à la valeur  $\gamma_3$  imposée, nous sommes en mesure de calculer (34) et, comme  $\omega_3$  est connu, nous en déduisons la valeur de  $\omega_2$ . Les valeurs prises en  $\sigma_2$  par les multiplicateurs découlent alors de (27), (28), (30) et (53). Nous disposons alors des valeurs initiales nous permettant d'intégrer à rebours le long de l'arc à poussée constante jusqu'à ce que, par exemple, la condition initiale (50) soit remplie. En général la vitesse initiale n'aura pas la valeur  $\omega_1$  requise et la condition (52) ne sera pas remplie. Il faudra procéder par perturbation des deux estimations de  $\beta_2$  et  $\gamma_2$  pour arriver à remplir ces deux dernières conditions.

L'intégration de (12) peut être différée jusqu'à établissement de la trajectoire exacte. Elle fournira le rapport  $\mu_1/\mu_3$  et le minimum  $\mu_1$  sera connu par utilisation de (49).

Une procédure analogue mais évidemment simplifiée, s'applique au cas a).

## X. Fusée de poids initial minimum en vol vertical (fusée-sonde)

Pour  $\gamma = \pi/2$ ,  $\cos \gamma = 0$ ,  $\sin \gamma = 1$ , le problème précédent s'intègre sous forme finie, fournissant un guide précieux pour le cas des trajectoires incurvées.

On peut éliminer l'équation (11) du système fondamental et faire  $\lambda_2 \equiv 0$ , supprimant de ce fait la nécessité de se préoccuper de la condition (50). Il en découle de plus que (28) et (30) forment déjà un système homogène aux inconnues  $\lambda_1$  et  $\lambda_3$ , dont la condition de compatibilité fournit

$$\beta^2 = K \quad \text{ou} \quad \beta = \sqrt{K} \quad (55)$$

Ici l'arc à poussée décroissante est aussi un arc à accélération constante. Le point représentatif dans le diagramme de la Fig. 1 se maintient au point singulier.

a) Le long de l'arc à poussée constante les équations fondamentales ont les intégrales suivantes

$$\mu \beta = \mu_1 \beta_1 \quad (56)$$

$$(1 + \zeta) (\omega - \omega_1) = \ln \frac{\beta}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta} \quad (57)$$

$$(1 + \zeta) \tau = \frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta} \quad (\text{avec } \tau_1 = 0). \quad (58)$$

Il découle de (14) que  $\lambda_1$  reste constant, sa valeur étant fixée par le raccord à l'arc à accélération constante. Celle-ci se déduit de (28) et (55)

$$\lambda_1 = (1 + \zeta) \frac{K}{(\sqrt{K} - 1)^2} \quad (\text{avec } \lambda_3 = 1) \quad (59)$$

On en déduit par (26) la valeur initiale de  $\lambda_4$

$$\lambda_4(\sigma_1) = \frac{K}{\beta_1^2} \left[ \frac{\beta_1 - 1}{(\sqrt{K} - 1)^2} - \frac{\beta_1}{K - \beta_1} \right]. \quad (60)$$

Dès lors la condition aux limites (52) fournit la valeur initiale du facteur d'accélération qui, fait remarquable, ne dépend pas de la performance demandée mais uniquement de la constante  $K$

$$\beta_1 = \frac{K}{2\sqrt{K} - 1}. \quad (61)$$

Notons que cette valeur est relativement élevée; pour  $K = 81$ , par exemple, on trouve  $\beta_1 = 4.765$ .

b) A l'aide de (56), (57) et (58) on obtient les valeurs suivantes au début de la phase d'accélération constante

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \mu_1 \frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{K} - 1} \\ (1 + \zeta) (\omega_2 - \omega_1) &= \ln \frac{2\sqrt{K} - 1}{\sqrt{K}} - \frac{\sqrt{K} - 1}{K} \\ (1 + \zeta) \tau_2 &= \frac{\sqrt{K} - 1}{K} \end{aligned}$$

Pour la même valeur de  $K$  les seconds membres valent respectivement 0.529, 0.537 et 0.0988.

Le gain de vitesse est à ce moment de l'ordre de la moitié de la vitesse effective d'éjection. Ce n'est que pour des gains plus faibles qu'il y a lieu d'étudier les trajectoires qui sont simplement à poussée constante et la valeur initiale du facteur d'accélération dépend alors du gain demandé.

La durée de la phase à poussée constante est relativement courte; de l'ordre du dixième de l'impulsion spécifique  $c/g$ .

c) Le long du segment à accélération constante  $\lambda_4$  reste nul; le facteur d'accélération conserve sa valeur (55) et les équations fondamentales s'intègrent sans difficultés

$$\mu_2 = \mu_3 \exp \left\{ (1 + \zeta) \frac{K}{\sqrt{K} - 1} (\tau_3 - \tau_2) \right\} \quad (62)$$

$$\omega_3 - \omega_2 = (\sqrt{K} - 1) (\tau_3 - \tau_2) \quad (63)$$

Tandis que (49) devient

$$\mu_3 = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{K}-1} \quad (64)$$

et permet de remonter jusqu'à la valeur de  $\mu_1$ .

### XI. Fusée de poussée initiale minimum

Le problème de rendre minimum

$$\frac{F(\sigma_1)}{g M_u} = \mu_1 \beta_1$$

est probablement plus significatif du point de vue technique. En effet la conception et la mise au point de moteurs-fusée entre pour une part très importante dans le coût total et dans les délais de réalisation d'un projet.

On substituera alors

$$\delta\beta_1 = \frac{1}{\mu_1} \delta(\beta_1 \mu_1) - \frac{\beta_1}{\mu_1} \delta\mu_1$$

dans la condition de transversalité (20) en même temps que l'on continue à se servir de (49) pour éliminer la variation de  $\beta_3$ . L'annulation des variations arbitraires sur  $\gamma_1$ ,  $\mu_3$  et  $\mu_1$  fournit le nouveau jeu de conditions naturelles (50), (51) et

$$\lambda_4(\sigma_1) = -\frac{K}{\beta_1(K-\beta_1)} \quad (52')$$

qui remplace maintenant (52). La condition de transversalité exprime maintenant la condition de minimum nécessaire

$$\delta(\beta_1 \mu_1) = 0$$

pour autant que le coefficient de cette variation qui est  $-\lambda_3/(\beta_1 \mu_1)$  soit réellement différent de zéro.

Le choix  $\lambda_3 = 1$  donne à nouveau une valeur négative à ce coefficient et conserve la validité du critère (54). La nouvelle condition (52') exige encore une valeur initiale négative de  $\lambda_4$ . Par conséquent rien n'est à changer qualitativement aux discussions de la section IX. La section suivante montrera l'étendue des modifications quantitatives en jeu.

### XII. Fusée de poussée initiale minimum en vol vertical

Les résultats (55), (56), (57), (58), (59) et (60) restent valables. La nouvelle condition (52') fournit maintenant

$$\beta_1 = 1 \quad (61')$$

si bien que l'accélération nette de la fusée au départ est maintenant nulle. Les valeurs en début de phase d'accélération constante deviennent

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \mu_1 \frac{1}{\sqrt{K}} \\ (1 + \zeta)(\omega_2 - \omega_1) &= \ln \sqrt{K} - \frac{\sqrt{K}-1}{\sqrt{K}} \\ (1 + \zeta)\tau_2 &= \frac{\sqrt{K}-1}{\sqrt{K}} \end{aligned}$$

soit respectivement 0.111, 1.308 et 0.889 pour  $K = 81$ . La phase de poussée constante est donc beaucoup plus longue, étant de l'ordre de 85% de l'impulsion spécifique et à ce moment le gain de vitesse dépasse d'environ 30% la vitesse effective d'éjection. Les résultats (62), (63) et (64) restent valables.

### XIII. Modifications introduites par l'addition d'un second étage

La masse  $M^*$  devient celle d'un second étage

$$M^* = M_u + M_s^* + M_e^* + M_p^*$$

Pour simplifier le calcul nous adoptons des indices constructifs

$$\sigma = \frac{M_s^*}{M^*} \quad \varepsilon = \frac{M_e^*}{M^*}.$$

Autrement dit nous maintenons la masse structure (y compris les réservoirs) et la masse du moteur proportionnelles à la masse totale de l'étage. Dans ces conditions

$$M^*(1 - \varepsilon - \sigma) = M_u + M_p^*.$$

L'accroissement de vitesse donné par le dernier étage est évalué sans tenir compte des pertes de gravitation, ceci étant d'autant plus exact que l'angle  $\gamma_3$  se rapproche de zéro:

$$\Delta\omega = \frac{c^*}{c} \ln \frac{M^*}{M^* - M_p^*} = \frac{c^*}{c} \ln \frac{\mu^*}{1 + (\varepsilon + \sigma)\mu^*}$$

où

$$\mu^* = M^*/M_u.$$

L'équation (49) est maintenant à remplacer par la suivante

$$\mu^* = \mu_3 \frac{K - \beta_3}{K}$$

toujours déduite de (48). Par conséquent

$$\Delta\omega = \frac{c^*}{c} \ln \frac{\mu_3(K - \beta_3)}{K + (\varepsilon + \sigma)\mu_3(K - \beta_3)}. \quad (65)$$

Pour une vitesse terminale  $\omega_3$  imposée on aura maintenant pour valeur de la vitesse en fin de combustion du premier étage

$$\omega(\sigma_3) = \omega_3 - \Delta\omega.$$

Nous en prenons la variation que nous substituons dans la condition de transversalité

$$\delta\omega(\sigma_3) = K \frac{c^*}{c} \frac{1}{K + (\varepsilon + \sigma)\mu_3(K - \beta_3)} \left[ \frac{\delta\beta_3}{K - \beta_3} - \frac{\delta\mu_3}{\mu_3} \right]$$

a) Dans le problème du minimum de  $\mu_1$

Les conditions (50) à (52) sont conservées. La condition supplémentaire

$$K \frac{c^*}{c} \lambda_1(\sigma_3) = \lambda_3 [K + (\varepsilon + \sigma)\mu_3(K - \beta_3)] \quad (66)$$

remplace (49) pour le calcul de  $\mu_3$  et par conséquent de  $\mu_1$ . Dans le cas de la fusée-sonde par exemple

$$\mu_3 = \frac{1}{\varepsilon + \sigma} \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{K} - 1} \left[ \frac{c^*}{c} (1 + \zeta) \frac{K}{(\sqrt{K} - 1)^2} - 1 \right] \quad (64')$$

remplace (64) avec dès lors

$$\Delta\omega = \frac{c^*}{c} \left[ \ln \frac{1}{\varepsilon + \sigma} - \ln \left( 1 + \frac{1}{\frac{c^*}{c} (1 + \zeta) \frac{K}{(\sqrt{K} - 1)^2} - 1} \right) \right].$$

Pour qu'un second étage améliore les performances ( $\Delta\omega > 0$ ) il faut que

$$\varepsilon + \sigma < 1 - \frac{c(\sqrt{K} - 1)^2}{c^* K (1 + \zeta)}.$$

Cette condition devient difficile à tenir pour les valeurs élevées de  $K$  et faibles de  $\zeta$ , à moins que la vitesse effective d'éjection du second étage ne soit nettement supérieure à  $c$ .

*b) Dans le problème du minimum de  $\beta_1\mu_1$*

Les conditions (50), (51) et (52') de la section XI sont conservées et la condition additionnelle (66) s'applique également. Nous pouvons en tirer les mêmes conclusions quant à l'efficacité d'un second étage.

#### XIV. Conclusions et remarques finales

Les exemples illustrés à la Fig. 4 et relatifs au cas d'une fusée-sonde, permettent peut être de tirer certaines conclusions ayant une valeur générale. Pour les caractéristiques

$$K = 81 \quad \zeta = 0.05 \quad \omega_1 = 0 \quad \text{et} \quad \omega_3 = 4.7$$

la courbe 1 représente en fonction du temps réduit la poussée  $\beta\mu$  par unité de poids utile, dans le cas où le minimum cherché est celui ( $\mu_1$ ) de la masse initiale par unité de masse utile. La courbe 2 représente la masse réduite  $\mu$  en fonction du temps dans les mêmes conditions.

Les courbes 3 et 4 correspondent respectivement à 1 et 2 quand le minimum cherché est  $\beta_1\mu_1$ , la poussée initiale par unité de poids utile.

Les courbes 5, 6, 7 et 8 correspondent respectivement à 1, 2, 3 et 4 lorsqu'on ajoute un second étage ayant les caractéristiques

$$\varepsilon + \sigma = 0.1 \quad c^* = 1.5c$$

(environ le rapport entre vitesses effectives d'éjection pour la combinaison Lox-Hydrogène liquide contre Lox-Kérosène) donnant un accroissement de vitesse réduite

$$\Delta\omega = 2.414$$

(soit environ la moitié de la performance totale requise).

On observera combien dans le cas 7, la présence d'un second étage noble réduit aussi bien la durée que l'importance de la phase de réduction de poussée du premier étage. On observera aussi l'écart considérable qui se manifeste entre les poussées initiales, les masses initiales et par conséquent les consommations d'ergols, suivant que l'on adopte l'un ou l'autre type de minimum. Ceci suffit à souligner l'importance des études conduisant à une définition correcte du type de minimum à adopter.

Enfin il faut bien reconnaître que dans la solution idéale pour une trajectoire incurvée, telle qu'elle a été exposée, on n'est pas maître de l'altitude terminale. Pour certaines applications il suffit que cette altitude soit supérieure à un minimum. Cette condition a plus de chances d'être réalisée pour un minimum de poussée initiale que pour un minimum de masse initiale. Si elle n'était pas réalisée, le traitement du problème devrait être élargi en incorporant l'équation du

gain d'altitude avec un cinquième multiplicateur, ce qui compliquerait fort la nature de l'arc à poussée décroissante. La distance couverte horizontalement peut aussi devenir telle qu'il faille tenir compte de la courbure du champ de gravitation.

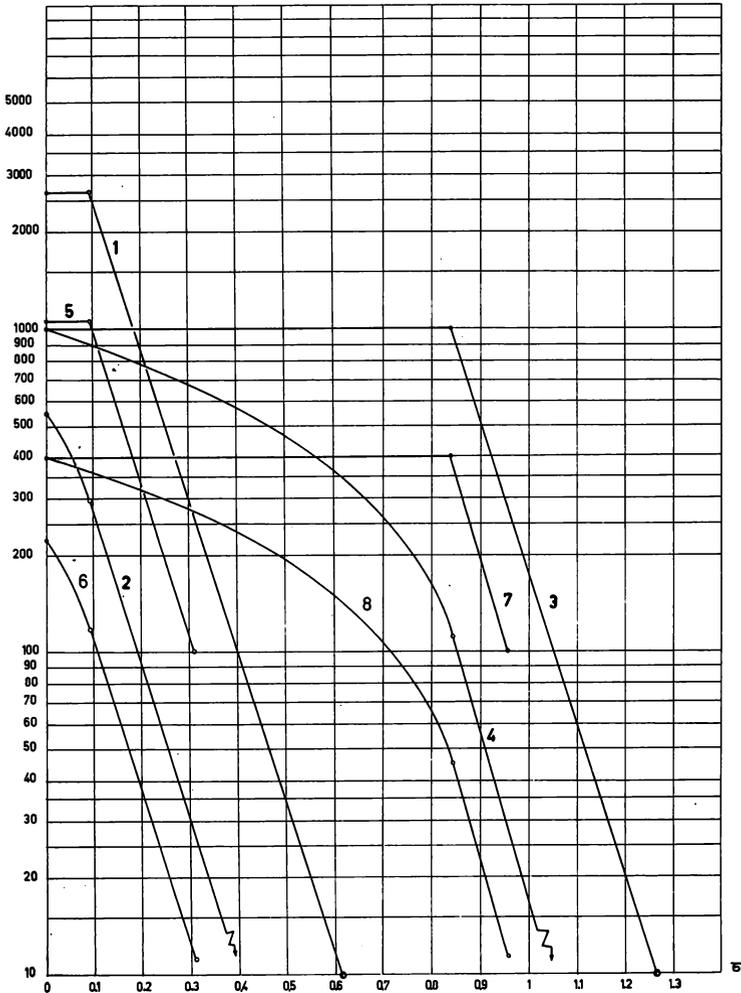


Fig. 4. Programmes optimaux pour une fusée-sonde en fonction du temps réduit  $\tau = tg/c$ . 1. Le rapport poussée/charge utile pour une fusée de poids minimum à l'envol. 3. Pour une fusée de poussée minimum à l'envol. 5. Comme sub 7, mais avec second étage. 7. Comme sub 3, mais avec second étage. Les courbes 2, 4, 6 et 8 donnent dans les mêmes conditions le rapport de la masse instantanée à la masse utile

#### Références

1. M. BARRÈRE, A. JAUMOTTE, B. FRAEIJIS DE VEUBEKE et J. VANDENKERCKHOVE, Rocket Propulsion, Chapter 12. Amsterdam: Elsevier, 1960.
2. B. FRAEIJIS DE VEUBEKE, Méthodes variationnelles et performances optimales en aéronautique. Bull. soc. math. Belg. 2 (1957).

### Discussion

M. ROY: Je vous remercie pour cette présentation volontairement raccourcie et qui me paraît parfaitement claire. Je voudrais vous poser une petite question. Vous avez dit qu'on détermine les deux termes fondamentaux par intégration en remontant à l'origine et à l'aide de deux conditions, dont l'une est une inégalité.

M. FRAEIJIS DE VEUBEKE: Non, l'inégalité était là pour montrer que la valeur demandée au multiplicateur est négative, ce qui explique la constitution qualitative de la trajectoire, mais la valeur demandée au multiplicateur est de plus déterminée.

M. CROCCO: Je voudrais demander ceci: vous avez, si je ne me trompe pas, employé la poussée dans la direction tangentielle. Evidemment, ceci constitue une limitation, peut-être pas pour le cas de fusée-sonde mais bien pour les autres cas.

M. FRAEIJIS DE VEUBEKE: Le Professeur LAW DEN a étudié le problème de l'optimisation de l'orientation d'une poussée constante pour obtenir le maximum de rayon d'action d'un engin balistique. Je crois qu'il confirmera l'affirmation que par rapport à une poussée tangentielle les gains sont faibles. Je pense que ce sera le même cas ici.

(s'adressant à M. LAW DEN) You optimized the range with respect to thrust orientation for a ballistic missile and you found gains which are small compared to the case of tangential thrust.

M. LAW DEN: That is true. The gain in range was about 7%.

M. FRAEIJIS DE VEUBEKE: If my memory is correct, you find that the thrust must be held constant in orientation in space, but the velocity vector's inclination changes with respect to the thrust orientation and at the end of the flight both are coincident. The gain on range is very small. Presumably this will also be true in the present case.

M. LAW DEN: No. The two vectors are coincident at the termination of the powered flight only when the final energy of the vehicle is being maximized, not the total range.