

ANALYSE DE LA RÉPONSE FORCÉE DES SYSTÈMES AMORTIS PAR LA MÉTHODE DES DÉPHASAGES CARACTÉRISTIQUES

par

B.M. FRAEIJIS de VEUBEKE
Professeur aux Universités de Liège et de Louvain.

*Université de Liège
Sciences Appliquées et Mathématiques
1, Chemin des Chevreuils, Bat B52/
B-4000 LIEGE*

SUMMARY

The characteristic phase-lag method, evolved in 1948, provides an orthogonal mode analysis of harmonic response in damped systems. Since then it has been used to evolve principles for optimal multipoint excitation in resonance testing.

The paper reviews these results and gives indications for extensions to the cases where the elasticity and damping matrices are not positive definite but only non-negative.

I. — COEFFICIENTS D'INFLUENCE DYNAMIQUE

L'excitation harmonique d'un système linéaire avec amortissement visqueux conduit à l'équation matricielle

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = f e^{i\omega t} \quad (1)$$

On peut se borner au cas où la matrice unicolonne f des amplitudes d'excitation est réelle, ce qui revient à supposer les forces excitatrices en phase. Le cas d'excitation générale résulterait alors d'une simple superposition de deux systèmes d'excitation déphasés de 90° l'un par rapport à l'autre.

Dans la réponse harmonique (solution forcée du système), la matrice unicolonne q des coordonnées suit une loi

$$q = e^{i\omega t} z$$

et la matrice unicolonne z , dont les éléments sont généralement des constantes complexes, est l'amplitude complexe de la réponse. Elle vérifie la relation algébrique fondamentale

$$(-\omega^2 A + i\omega B + C)z = f \quad (2)$$

En principe la réponse à une excitation arbitraire

$$z = Y(\omega)f \quad (3)$$

est fournie par la matrice $Y(\omega)$ des coefficients d'influence dynamique

$$Y(\omega) = (-\omega^2 A + i\omega B + C)^{-1} \quad (4)$$

et revient à une opération d'inversion matricielle.

Elle peut se faire par voie numérique à condition de connaître parfaitement les caractéristiques du système : les matrices A de ses coefficients d'inertie, B de ses coefficients d'amortissement, C de ses coefficients d'élasticité. Or, il se fait que les amortissements de structure et leur répartition sont difficiles à prédire; la matrice B doit être considérée comme une inconnue. Un des buts de l'excitation harmonique peut être précisément d'en fournir une détermination expérimentale.

Plus généralement, l'excitation harmonique est une technique expérimentale de détermination de toutes les caractéristiques du système. Le plus souvent, ce sont les formes propres et les fréquences propres du système conservatif associé qui sont visées. Dans ce cas, l'amortissement est un phénomène parasite qui peut introduire des couplages inconnus à neutraliser par une excitation appropriée.

Ainsi la forme (4) des coefficients d'influence dynamique n'a pas de signification utile directe.

Une structure analytique des coefficients d'influence dynamique, mettant en évidence l'effet des caractéristiques du système sur les relations de phase entre

(1) Mémoire présenté, le 13 avril 1965, au Symposium IUTAM sur les « Récents Progrès de la Mécanique des Vibrations Linéaires » de Paris.

excitations et réponses, serait plus féconde. Une telle structure est précisément obtenue par l'introduction du concept de déphasage caractéristique.

II. — LES SYSTÈMES AMORTIS DÉCOUPLÉS

Soient

$$x_m \quad m = 1, 2 \dots n$$

les formes propres du système conservatif associé et ω_m les pulsations propres correspondantes, de sorte que

$$Cx_m = \omega_m^2 A x_m \quad (5)$$

Les relations d'orthogonalité

$$x'_p A x_m = 0 \quad p \neq m \quad (6)$$

$$x'_p C x_m = 0 \quad p \neq m \quad (7)$$

expriment le découplage inertiel et le découplage élastique de ces formes propres.

Considérons alors les répartitions $A x_m$ des forces d'inertie associées aux formes propres x_m . Comme la matrice A est nécessairement définie positive, les $A x_m$ forment toujours une base pour le développement d'une répartition de forces arbitraires :

$$f = \sum_1^n \alpha_m A x_m \quad (8. a)$$

Les coordonnées α_m de f dans la base des $A x_m$ sont obtenues à la Fourier en vertu des relations (6)

$$x'_p f = \alpha_p (x'_p A x_p)$$

de sorte que

$$f = \sum_1^n \frac{x'_p f}{x'_p A x_p} A x_p \quad (8. b)$$

Les dénominateurs de cette expansion sont, par définition, les masses généralisées des formes propres x_p .

Appliquant cette expression à la répartition des forces d'amortissement associée à la forme propre x_m

$$B x_m = \sum_1^n \frac{x'_p B x_m}{x'_p A x_p} A x_p \quad (9)$$

Une simplification considérable du comportement dynamique du système s'obtient en faisant l'hypothèse [3]

$$x'_p B x_m = 0 \quad p \neq m \quad (10)$$

Elle exprime le découplage des formes propres x_m vis-à-vis des forces d'amortissement. Il vient alors, selon (9)

$$B x_m = 2 \epsilon_m \omega_m A x_m \quad (11)$$

en définissant un coefficient d'amortissement ϵ_m de la forme propre x_m par la formule

$$2 \epsilon_m \omega_m = \frac{x'_m B x_m}{x'_m A x_m} \quad (12)$$

La simplicité du comportement dynamique peut maintenant être illustrée de la façon suivante, qui ouvre la voie à la méthode plus générale des déphasages caractéristiques.

Appelons

$$z = e^{-i\varphi_m} x_m \quad (13)$$

un *mode de réponse* harmonique du système et montrons que le retard de phase φ_m peut être déterminé de telle façon que le *mode de sollicitation* harmonique correspondant soit réel. Insérant (13) dans (2) et utilisant (5) et (11), il vient, pour le mode de sollicitation :

$$f = (\omega_m^2 - \omega^2 + 2 i \epsilon_m \omega_m \omega) e^{-i\varphi_m} A x_m \quad (14)$$

La condition pour que les éléments de f soient réels est

$$(\omega_m^2 - \omega^2) \sin \varphi_m - 2 \epsilon_m \omega_m \omega \cos \varphi_m = 0$$

soit encore

$$\tan \varphi_m = 2 \epsilon_m \frac{\omega/\omega_m}{1 - (\omega/\omega_m)^2} \quad 0 \leq \varphi_m \leq \pi \quad (15)$$

formule classique du retard de la réponse sur l'excitation dans un système à un seul degré de liberté. Le mode de sollicitation réelle peut alors s'écrire sous l'une ou l'autre des formes suivantes

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega_m^2 - \omega^2}{\cos \varphi_m} A x_m = \frac{2 \epsilon_m \omega_m \omega}{\sin \varphi_m} A x_m \\ &= \{ (\omega_m^2 - \omega^2)^2 + (2 \epsilon_m \omega_m \omega)^2 \}^{1/2} A x_m \quad (16) \end{aligned}$$

Les équations (13), (15) et (16) décrivent n solutions particulières du problème (2). Leur superposition fournit la solution générale. Il ressort clairement de (16) que cette superposition revient, en fait, à décomposer la sollicitation générale f dans la base des $A x_m$.

A une sollicitation $f = A x_m$ correspond une réponse

$$z = \frac{\sin \varphi_m}{2 \epsilon_m \omega_m \omega} e^{-i\varphi_m} x_m$$

Par conséquent, en vertu de (8. b), la réponse générale peut s'écrire

$$z = \left\{ \sum_1^n \frac{\sin \varphi_p e^{-i\varphi_p}}{2 \epsilon_p \omega_p \omega (x'_p A x_p)} x_p x'_p \right\} f \quad (17)'$$

Nous avons ainsi obtenu une structure spectrale de la matrice des coefficients d'influence dynamique. L'influence de la pulsation forcée ω se manifeste uniquement dans le facteur $1/\omega$, commun à tous les termes, et dans les déphasages $\varphi_p(\omega)$ obéissant aux lois explicites (15).

La vérification de l'hypothèse (10) requiert la connaissance des formes propres du système conservatif associé sauf dans le cas simple où B est une combinaison linéaire de C et de A . Cette remarque remonte à Lord Rayleigh [1]. En pratique, il y a lieu de s'affranchir de cette hypothèse et d'admettre pour B une matrice non négative quelconque.

Nous commençons par la prendre définie positive; c'est le cas le plus normal où tous les mouvements du système sont accompagnés d'une dissipation d'énergie.

III. — LES DÉPHASAGES CARACTÉRISTIQUES POUR UNE MATRICE B QUELCONQUE

Nous cherchons encore une solution particulière de (2) qui aurait la propriété essentielle

$$z = e^{-i\varphi} y \quad y \text{ réelle} \quad (18)$$

En d'autres termes, les éléments de z auraient tous le même déphasage par rapport aux éléments (réels) de f . Selon (2), ceci demande

$$(C - \omega^2 A + i\omega B) y = e^{i\varphi} f$$

ou, séparant les parties réelles et imaginaires,

$$(C - \omega^2 A) y = \cos \varphi f \quad \omega B y = \sin \varphi f$$

et, par élimination de f , le problème homogène pour y

$$\sin \varphi (C - \omega^2 A) y = \omega \cos \varphi B y \quad (19)$$

On peut le considérer comme un problème aux valeurs propres pour le paramètre

$$\lambda = \omega \cot \varphi \quad (20)$$

avec la condition d'existence d'une solution non triviale en y

$$|C - \omega^2 A - \lambda B| = 0 \quad (21)$$

Les valeurs propres λ_m sont les racines de cette équation de degré n dans le paramètre. Les matrices B et $(C - \omega^2 A)$ étant hermitiennes, ces valeurs sont réelles et nous appelons « déphasages caractéristiques » les angles φ_m définis par

$$0 \leq \varphi_m = \cot^{-1} \left(\frac{\lambda_m}{\omega} \right) \leq \pi \quad (22)$$

Les modes de réponse caractéristiques correspondants vérifient

$$(C - \omega^2 A) y_m = \lambda_m B y_m \quad (23)$$

Enfin les modes de sollicitation correspondants sont donnés par l'une ou l'autre des formules

$$f_m = \frac{1}{\cos \varphi_m} (C - \omega^2 A) y_m = \frac{\omega}{\sin \varphi_m} B y_m \quad (24)$$

Enfin, il est clair, selon (23), que l'on a

$$y_p' B y_m = 0$$

$$\text{pour } \lambda_p \neq \lambda_m \quad (25)$$

$$y_p' (C - \omega^2 A) y_m = 0$$

Ceci suffit à constituer un ensemble complet de n modes de réponse harmonique orthogonaux selon (25), pour autant que les n valeurs propres λ_m soient distinctes. Les cas de dégénérescence n'offrent aucune difficulté si la matrice B est définie positive; à toute valeur propre de multiplicité r correspondent alors exactement r modes de réponse linéairement indépendants.

En effet, toute matrice définie positive peut être écrite sous la forme d'un produit TT' où T est non singulière.

En particulier, si T est une matrice triangulaire inférieure, ses éléments sont calculables par récurrence. Dès lors, le problème est ramené à celui des valeurs

et vecteurs caractéristiques (au sens ordinaire) de la matrice $T^{-1} (C - \omega^2 A) (T')^{-1}$.

Celle-ci, étant hermitienne, possède la propriété de dégénérescence énoncée plus haut. Moyennant une orthogonalisation éventuelle par combinaisons linéaires au sein de chaque groupe de modes appartenant à une racine multiple, on peut ainsi poser que les relations d'orthogonalité (25) sont valables du moment que les indices p et m sont distincts. Elles entraînent, en particulier, que

$$y_p' f_m = 0 \quad \text{pour } p \neq m, \quad (26)$$

propriétés dont la signification physique est claire : le travail virtuel d'un mode de sollicitation sur un mode de réponse d'indice différent est nul.

D'autre part, selon (24)

$$y_m' f_m = \frac{\omega}{\sin \varphi_m} y_m' B y_m \geq 0 \quad (27)$$

Sous la forme

$$\pi \sin \varphi_m y_m' f_m = \pi \omega y_m' B y_m$$

cette relation exprime la conservation de l'énergie impliquée dans une solution modale du problème (2). A gauche figure le travail fourni sur un cycle par la sollicitation, à droite l'énergie dissipée par cycle par amortissement.

Les coordonnées α_m de la sollicitation arbitraire f dans la base des f_m

$$f = \sum_1^n \alpha_m f_m$$

se calculent par les propriétés (26) et (27)

$$y_p' f = \alpha_p (y_p' f_p) = \alpha_p \frac{\omega}{\sin \varphi_p} y_p' B y_p \quad (p = 1, 2 \dots n) \quad (28)$$

La réponse correspondante sera

$$y = \sum_1^n \alpha_m e^{-i\varphi_m} y_m$$

c'est-à-dire, substituant aux coordonnées leur valeur tirée de (28),

$$z = \left\{ \sum_1^n \frac{\sin \varphi_p}{\omega y_p' B y_p} e^{-i\varphi_p} y_p y_p' \right\} f \quad (29)$$

Cette formule est très semblable à (17). La différence principale réside dans le fait que les formes propres fixes x_p du système conservatif associé sont remplacées par des modes y_p variables avec la pulsation forcée ω .

D'autre part, on n'obtient plus de loi explicite pour la variation des déphasages φ_p avec la pulsation forcée.

Il est pourtant possible d'établir que cette variation reste qualitativement la même que celle fixée par la loi (15).

IV. — VARIATION
DES DÉPHASAGES CARACTÉRISTIQUES AVEC ω

Différentions les deux membres de (23) par rapport à ω^2 . Il faut, pour cela, imaginer qu'une norme du mode y_m ait été définie et soit une fonction continument différentiable de la fréquence. Pour fixer les idées, on peut prendre une masse généralisée constante

$$y'_m \Lambda y_m = \text{constante}$$

Ensuite, notant pour plus de concision par v_m la matrice dont les éléments sont les dérivées par rapport à ω^2 des éléments de y_m :

$$(C - \omega^2 A) v_m - \Lambda y_m = \lambda_m B v_m + \frac{d \lambda_m}{d(\omega^2)} B y_m \quad (30)$$

Prémultiplions ceci par y'_m

$$y'_m (C - \omega^2 A) v_m - y'_m \Lambda y_m = \lambda_m y'_m B v_m + \frac{d \lambda_m}{d(\omega^2)} y'_m B y_m$$

D'autre part, en prémultipliant (23) par v'_m et transposant :

$$v'_m (C - \omega^2 A) v_m = \lambda_m y'_m B v_m$$

et l'équation précédente se réduit à

$$\frac{d \lambda_m}{d(\omega^2)} = - \frac{y'_m \Lambda y_m}{y'_m B y_m} < 0 \quad (31)$$

puisque Λ et B sont définies positives. Ceci démontre que $\omega_m \cot \varphi_m$ est une fonction décroissante de ω^2 , son inverse $\frac{\tan \varphi_m}{\omega}$ une fonction croissante et finalement $\tan \varphi_m$ une fonction croissante de ω . Ceci est qualitativement conforme à la loi (15) pour laquelle on aurait

$$\frac{d}{d(\omega^2)} (\omega \cot \varphi_m) = - \frac{1}{2 \varepsilon_m \omega_m}$$

Examinons maintenant le comportement des déphasages caractéristiques à très basse fréquence.

Quand la fréquence tend vers zéro, le problème aux valeurs propres tend vers la forme limite

$$C y_{(0)} = \lambda_{(0)} B y_{(0)} \quad (32)$$

et, en règle générale, une limite

$$\lambda_m(0) = \frac{y'_m(0) C y_m(0)}{y'_m(0) B y_m(0)}$$

est positive. Il en résulte que $\tan \varphi_m$ tend vers zéro comme ω et que l'on peut convenir de prendre les déphasages caractéristiques φ_m nuls à fréquence nulle.

Ce résultat ne fait aucun doute si la matrice C est définie positive, les vibrations ayant alors lieu autour d'une position d'équilibre stable.

Si la matrice C est seulement non négative, le système possède des modes rigides u_j vérifiant les équations

$$C u_j = 0 \quad (j = 1, 2 \dots r < n)$$

et ces modes sont des solutions du problème (32) avec une valeur propre nulle. Deux questions se posent : quelles sont les valeurs limites des déphasages caractéristiques correspondants et, dans une base quelconque u_j , des modes rigides, quelles sont les combi-

naisons linéaires qui forment des modes de réponse caractéristiques à basse fréquence? Formons avec les colonnes u_j la matrice ($n \times r$)

$$U = (u_1 u_2 \dots u_r),$$

notons par a une matrice unicolonne arbitraire à r éléments et Ua devient un mode rigide quelconque du système.

Faisons tendre ω vers zéro dans l'équation (30) en y supposant que y_m tende vers un mode rigide Ua_i , auquel cas λ_m tend vers zéro comme on l'a vu et soit v_i la limite de v_m et $-\beta_i$ la limite de la dérivée de λ_m . Il vient

$$C v_i = (\Lambda - \beta_i B) U a_i$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que ce système d'équations linéaires admette une solution v_i correspondant au second membre à un a_i donné sont

$$u'_j (\Lambda - \beta_i B) U a_i = 0 \quad j = 1, 2 \dots r$$

et peuvent donc être rassemblées dans l'unique équation matricielle

$$U' (\Lambda - \beta_i B) U a_i = 0$$

Sous la forme équivalente

$$(U'AU - \beta_i U'BU) a_i = 0$$

on obtient un problème aux valeurs propres à r dimensions.

Les matrices ($r \times r$) $U'AU$ et $U'BU$ sont définies positives, les valeurs propres β_i sont toutes réelles et positives et on est assuré de l'existence de r modes a_i linéairement indépendants.

Ce sont les combinaisons cherchées des modes u_j .

On voit, de plus, qu'à basse fréquence les déphasages de ces modes de réponse rigides se comportent comme

$$\cot \varphi_i \cong -\omega \beta_i$$

On doit prendre $\varphi_i = \pi/2$ à fréquence nulle.

Le comportement à haute fréquence s'obtient en posant $\omega \tan \varphi = -\gamma$ et divisant (19) par $\omega \cos \varphi$. Le problème aux valeurs propres tend vers celui

$$B y(\infty) = \gamma(\infty) \Lambda y(\infty)$$

Les limites

$$\gamma_m(\infty) = \frac{y'_m(\infty) B y_m(\infty)}{y'_m(\infty) \Lambda y_m(\infty)}$$

sont positives et $\tan \varphi_m$ tend vers zéro comme ω^{-1} .

En supposant que chaque déphasage caractéristique tende vers π à haute fréquence, venant à basse fréquence soit de zéro soit de $\frac{\pi}{2}$, on suppose implicitement que chaque déphasage caractéristique passe une seule fois par la valeur $\frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, il n'y aurait, dans toute la gamme des fréquences d'excitation, que n valeurs $\frac{\pi}{2}$ possibles.

Or ceci est bien vérifié car, pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, le problème (19) exige que $(C - \omega^2 A) y = 0$.

Par conséquent, la fréquence d'excitation doit être une des n fréquences propres ω_m du système conservatif associé et le mode de réponse devient alors identique à la forme propre x_m correspondante. Il est alors logique de faire correspondre l'indice d'un mode de réponse avec l'indice de la forme propre du système conservatif associé avec laquelle le mode vient en coïncidence à la résonance de phase :

$$y_m \rightarrow x_m \text{ et } \varphi_m \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ quand } \omega \rightarrow \omega_m$$

Cette règle reste valable en présence de modes rigides qui peuvent être considérés comme des formes propres de fréquence naturelle nulle.

En résumé, à chaque fréquence d'excitation, existent :

- n modes de sollicitation f_m ,
- n modes correspondants de réponse y_m caractérisés par les déphasages d'ensemble φ_m .

Ces modes sont énergétiquement découplés selon (26).

Chaque déphasage caractéristique varie selon la fréquence d'une façon qualitativement similaire à celle d'un système à un seul degré de liberté. Au passage par une résonance de phase ($\varphi_m = \frac{\pi}{2}$) le mode de réponse correspondant s'identifie à cette forme propre du système conservatif associé dont la fréquence naturelle coïncide alors avec la fréquence d'excitation.

V. — STATIONNARITÉ DE L'ÉNERGIE RÉACTIVE ET RÉSONANCE DE PHASE

L'amplitude complexe z associée à une excitation arbitraire mais réelle f comporte une partie p en phase et une partie l en retard de phase de 90° :

$$z = p - il \quad (33)$$

Suivant le résultat général (29)

$$p = Pf \quad (34)$$

avec

$$P = \sum_i^n \frac{\sin \varphi_m \cos \varphi_m}{\omega y'_m B y_m} y_m y'_m \quad (37)$$

et

$$l = Lf \quad (36)$$

avec

$$L = \sum_i^n \frac{\sin^2 \varphi_m}{\omega y'_m B y_m} y_m y'_m \quad (37)$$

L'énergie dissipée par cycle a pour valeur

$$E_a = \pi f' l = \pi f' L f$$

Par définition l'énergie réactive par cycle est

$$E_r = \pi f' p = \pi f' P f \quad (38)$$

Examinons dans quelles circonstances cette énergie réactive devient insensible à des faibles variations arbitraires δf de l'excitation :

$$\delta E_r = 2 \pi \delta f' P f = 0$$

avec $\delta f'$ arbitraire exige

$$P f = p = 0$$

La partie de la réponse en phase avec l'excitation doit disparaître

$$\sum_i^n \frac{\sin \varphi_m \cos \varphi_m}{\omega y'_m B y_m} y_m (y'_m f) = 0$$

Cette expression est une combinaison linéaire des modes de réponse y_m qui sont linéairement indépendants. Elle ne peut donc être nulle que si tous les coefficients de la forme linéaire sont nuls. Comme un seul des facteurs $\cos \varphi_m$ s'annule pour une résonance de phase (sauf dans le cas particulier de confusion dans les fréquences naturelles du conservatif associé), les circonstances dans lesquelles l'énergie réactive est stationnaire sont les suivantes :

- 1) $y'_m f = 0$ sauf pour un mode $m = p$
- 2) $\cos \varphi_p = 0$ c'est-à-dire $\varphi_p = \pi/2$
et alors $y_p = x_p$

Dans ces conditions, la réponse en quadrature qui, seule, subsiste est :

$$l = \frac{1}{\omega_p x'_p B x_p} x_p (x'_p f)$$

c'est-à-dire un mode naturel du conservatif associé. A ce moment là, d'ailleurs, f est proportionnel à $B x_p$, si bien qu'il apparaît que le problème

$$P(\omega) f = 0 \quad (39)$$

admet pour valeurs propres les fréquences naturelles du conservatif associé avec les modes $f = B x_p$.

Il apparaît aussi, puisque la réponse en phase est nulle, que la stationnarité de l'énergie réactive est équivalente à la résonance de phase au niveau de tous les excitateurs. Ce sont les conditions théoriquement idéales pour l'obtention expérimentale d'un mode naturel pur du système conservatif associé.

Cette solution n'est évidemment pas pratique puisqu'elle exige l'excitation de tous les degrés de liberté du système; si elle est encore concevable pour un système à nombre fini de degrés de liberté, elle est inapplicable à un système continu.

Cependant, le fait même que ces conditions idéales ont été ramenées à un principe variationnel donne à penser que ce principe s'applique, à titre de meilleure approximation, au cas d'un nombre limité de points d'excitation.

Examinons, par exemple, le cas d'un seul point d'excitation, celui de la coordonnée d'indice i . Notant par $p_{ii}(\omega)$ les éléments de la matrice P , par θ_i les éléments de f , le principe de la stationnarité de l'énergie réactive réduit le problème (39) à la condition

$$p_{ii}(\omega) \theta_i = 0 \quad (40)$$

Les fréquences de résonance de phase au niveau de l'unique exciteur sont les racines de $p_{ii}(\omega) = 0$ qui permettent de remplir la condition (40) avec une excitation non nulle.

Pour simplifier la discussion, on supposera les modes de réponse normés par la condition

$y'_m B y_m = \beta$ une constante ($m = 1, 2 \dots n$)
Alors, $\eta_i(m)$ dénotant les éléments de y_m ,

$$\mu(\omega) = 2\omega\beta p_{ii}(\omega) = \sum_i^n \sin 2\varphi_m \eta_i^2(m)$$

Si la fréquence d'excitation est proche d'une fréquence naturelle, soit ω_p , et suffisamment écartée des autres ω_m pour lesquels les facteurs $\sin 2\varphi_m$ sont alors petits (φ_m voisins de 0 ou de π), l'approximation d'ordre zéro à la condition (40) est $\sin 2\varphi_p \eta_i^2(p) = 0$. Elle conduit à prendre $\varphi_p = \pi/2$, c'est-à-dire $\omega = \omega_p$ exactement. Au voisinage de cette situation, la variation de $p_{ii}(\omega)$ est violente et permet de trouver la correction de fréquence avec laquelle (40) se trouve satisfaite avec une meilleure approximation. Par développement en série de Taylor limité aux deux premiers termes nous remplaçons (40) par

$$\mu(\omega) = \mu(\omega_p) + \mu'(\omega_p) \Delta\omega = 0$$

Le système étant, par hypothèse, faiblement amorti, on ne retient de la dérivée de μ que son terme dominant, provenant de la rapide variation de la phase φ_p

$$\mu'(\omega_p) \simeq 2\cos 2\varphi_p \varphi'_p(\omega_p) \eta_i^2(p)(\omega_p)$$

La variation de la phase s'obtient à titre de cas particulier de la formule (31)

$$\varphi'_p(\omega_p) = \frac{2}{\beta} x'_p \Lambda x_p$$

La première approximation à la correction de fréquence par rapport à ω_p est donc

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_p} = \frac{1}{2} \varepsilon_p \sum_{m \neq p} \sin 2\varphi_m(\omega_p) \frac{\eta_i^2(m)(\omega_p)}{\eta_i^2(p)(\omega_p)}$$

où le coefficient d'amortissement ε_p est défini selon la formule (12). Cette correction est donc petite, non seulement par suite de la petitesse de ε_p lui-même, mais aussi de celle des facteurs $\sin 2\varphi_m$.

La réponse en phase de la structure à l'excitation unique comporte des termes qui sont petits avec les mêmes facteurs $\sin \varphi_m$.

La réponse en quadrature comporte un terme dominant proportionnel au mode naturel x_p et des termes parasites qui, relativement au dominant, sont petits comme les $\sin^2 \varphi_m$.

Ceci montre l'intérêt, pour une mesure précise du mode x_p , d'utiliser des capteurs capables de discriminer la réponse en quadrature.

La précision dépend, en définitive, des valeurs des facteurs $\sin^2 \varphi_m(\omega_p)$. Une évaluation basée sur la formule (15) montre, par exemple, que pour être inférieurs aux coefficients d'amortissement ε_m , ces facteurs doivent correspondre à un rapport entre les fréquences naturelles ω_m et la fréquence de mesure ω_p , donné par

$$1 + \sqrt{\varepsilon_m} < \omega_p / \omega_m < 1 - \sqrt{\varepsilon_m}$$

Dans ce cas, les erreurs de mesure ont l'ordre de grandeur des coefficients d'amortissement. Ces conditions d'écart entre fréquences naturelles sont sévères. Elles montrent l'intérêt de l'excitation multiple.

L'excitation en deux points permet déjà, en principe, la séparation de deux modes naturels voisins.

Le principe variationnel appliqué aux cas de deux coordonnées excitées d'indices i et j conduit à la condition de résonance de phase au droit des deux excitateurs

$$\begin{aligned} p_{ii}(\omega) 0_i + p_{ij}(\omega) 0_j &= 0 \\ p_{ji}(\omega) 0_i + p_{jj}(\omega) 0_j &= 0 \end{aligned} \quad (41)$$

Les fréquences pour lesquelles ceci est possible sont données par l'équation

$$\begin{vmatrix} p_{ii}(\omega) & p_{ij}(\omega) \\ p_{ji}(\omega) & p_{jj}(\omega) \end{vmatrix} = 0 \quad (42)$$

En isolant deux fréquences naturelles voisines ω_p et ω_q et supposant les autres suffisamment écartées, on vérifie qu'à une approximation d'ordre zéro

$$\begin{aligned} 2\omega\beta p_{ii}(\omega) &= \sin 2\varphi_p \eta_{ii}^2(p) + \sin 2\varphi_q \eta_{ii}^2(q) \\ 2\omega\beta p_{ij}(\omega) &= \sin 2\varphi_p \eta_{i(i)p} \eta_{j(j)p} + \sin 2\varphi_q \eta_{i(i)q} \eta_{j(j)q} = 2\omega\beta p_{ji}(\omega) \\ 2\omega\beta p_{jj}(\omega) &= \sin 2\varphi_p \eta_{jj}^2(p) + \sin 2\varphi_q \eta_{jj}^2(q) \end{aligned}$$

et que la condition (42) est alors satisfaite, soit par

$$\omega = \omega_p \quad \text{avec} \quad \sin 2\varphi_p = 0,$$

soit par

$$\omega = \omega_q \quad \text{avec} \quad \sin 2\varphi_q = 0.$$

Ceci est, par ailleurs, évident puisque l'approximation d'ordre zéro revient à considérer un système qui n'a plus que deux degrés de liberté, de fréquences naturelles ω_p et ω_q , dans la plage de fréquences d'excitation envisagée,

Dans le premier cas, (41) demande aussi que

$$\eta_{i(i)q} 0_i + \eta_{j(j)q} 0_j = 0$$

c'est la pseudo-résonance (absence de travail virtuel de l'excitation) sur le mode y_q .

Dans le second cas, il faut une pseudo-résonance sur le mode y_p

$$\eta_{i(i)p} 0_i + \eta_{j(j)p} 0_j = 0$$

La correction de fréquence, qui tient compte au premier ordre des termes négligés, peut être calculée d'une façon analogue au cas de l'excitateur unique.

Elle est de nouveau petite et altère de façon négligeable les conclusions de l'approximation d'ordre zéro :

A la résonance de phase sur les deux excitateurs il y a pratiquement pseudo-résonance sur un des deux modes voisins et, soit le mode naturel x_p , soit x_q sont dominants dans la réponse en quadrature.

Ces considérations peuvent être étendues au cas d'un nombre quelconque d'excitateurs [6].

Une variante intéressante du principe de stationnarité de l'énergie réactive consiste à introduire la contrainte d'une énergie active E_a maintenue à un niveau constant [4]. Elle revient alors au principe du maximum de l'énergie dissipée pour une énergie réactive constante [10]. Ce principe exige l'appropriation de l'excitation sans avoir nécessairement la résonance.

Signalons enfin que la méthode des déphasages caractéristiques a été étendue à d'autres types d'amortissement, tel que l'amortissement héréditaire [4] et l'amortissement de structure [4], [7] (boucle d'hystérésis indépendante de la fréquence). Ce dernier viole le principe de causalité comme le montre l'analyse du régime transitoire par la méthode de l'intégrale de Fourier [6].

La notion de déphasage caractéristique a été redécouverte par Y. Pironneau et S. Dubigeon [11].

VII. — SYSTÈMES PARTIELLEMENT AMORTIS

Jusqu'ici la matrice B a été prise définie positive. Quand elle est seulement non négative nous dirons que le système n'est que partiellement amorti. Une étude de tels systèmes est intéressante en présence de dispositifs dissipateurs d'énergie localisés.

En effet, l'amortissement de structure peut alors être négligé devant celui ramené par ces dispositifs (dampers de vilebrequin, par exemple). La méthode des déphasages caractéristiques se prête bien à ces analyses du fait qu'elle n'est pas restreinte au cas d'un amortissement faible. Une matrice B non négative donne lieu à des *modes non amortis* b_i , solutions linéairement indépendantes du problème homogène

$$Bb = 0 \quad b = b_i \quad (i = 1, 2 \dots p) \quad (43)$$

Selon (19), les modes non amortis apparaissent comme des modes caractéristiques de réponse avec déphasage caractéristique nul à toutes les fréquences d'excitation.

Les modes de sollicitation correspondants résultent de la première des égalités (24); nous les dénoterons par

$$c_i = (C - \omega^2 A) b_i \quad (44)$$

Avec les modes non amortis comme colonnes, construisons la matrice ($n \times p$)

$$B_1 = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p)$$

qui jouit, en vertu de (43), des propriétés

$$BB_1 = 0 \quad B_1^t B = 0 \quad (45)$$

De plus, si a est une matrice unicolonne à p éléments réels α_i ,

$B_1 a$ est un mode non amorti arbitraire, $(C - \omega^2 A) B_1 a$ le mode de sollicitation correspondant.

Examinons d'abord quels sont les autres modes caractéristiques de réponse et de sollicitation. À cet effet, construisons une matrice $n \times (n - p)$

$$B_2 = (b_{p+1} \ \dots \ b_n)$$

dont les colonnes forment avec les modes non amortis une base de l'espace vectoriel des modes de réponse et notons, par m , une matrice unicolonne à $n - p$ éléments réels.

Avec le changement de coordonnées

$$y = B_1 a + B_2 m \quad (46)$$

le problème aux valeurs propres (19) devient, avec

$$\zeta = \frac{1}{\omega} \tan \varphi \quad (47)$$

$$\zeta (C - \omega^2 A) (B_1 a + B_2 m) = BB_2 m$$

Ou encore, prémultipliant par B_1^t , puis par B_2^t

$$\begin{aligned} \zeta H a + \zeta J m &= 0 \\ \zeta J' a + \zeta K m &= R m \end{aligned} \quad (48)$$

où

$$\begin{aligned} H &= B_1^t (C - \omega^2 A) B_1 \\ J &= B_1^t (C - \omega^2 A) B_2 \\ K &= B_2^t (C - \omega^2 A) B_2 \end{aligned}$$

et

$R = B_2^t B B_2$ une matrice $(n - p) \times (n - p)$ définie positive.

La solution ($\zeta = 0$, $m = 0$, a arbitraire) du système (48) correspond aux modes non amortis. Les autres modes caractéristiques de réponse avec leur valeur propre ζ sont obtenus en supprimant le facteur ζ de la première équation (48), ce qui diminue automatiquement de p unités le degré de multiplicité possible de la valeur propre $\zeta = 0$. Deux cas sont alors à distinguer selon que la matrice H est singulière ou non.

Si H est non singulière, $a = -H^{-1} J m$ peut être substituée dans la seconde des équations (48) qui devient

$$(K - J'H^{-1} J) m = R m$$

La matrice R étant définie positive, les $(n - p)$ valeurs propres restantes sont non nulles. S'il y en a de multiples, il leur correspond le nombre voulu de modes m linéairement indépendants. Ils vérifient notamment les conditions d'orthogonalité

$$m_j^t R m_k = 0 \quad j \neq k \quad (49)$$

Dans ce cas, le développement de la solution générale en modes est facile :

$$f = (C - \omega^2 A) B_1 a + \sum_{p+1}^n \mu_k \frac{\omega}{\sin \varphi_k} B B_2 m_k \quad (50)$$

$$z = B_1 a + \sum_{p+1}^n \mu_k e^{-i \varphi_k} B_2 m_k \quad (51)$$

Les n constantes à déterminer sont les μ_k et les éléments de a . Prémultipliant (50) par B_1^t

$$B_1^t f = H a \quad a = H^{-1} B_1^t f \quad (52)$$

Prémultipliant par B_2^t

$$B_2^t f = J' a + \sum_{p+1}^n \mu_k \frac{\omega}{\sin \varphi_k} R m_k$$

Prémultiplions encore par m_j^t en utilisant (49) et notant que, à tout mode m_j correspond, en vertu de la première des équations (48), un a_j tel que

$$J m_j = -H a_j \quad (53)$$

de sorte que, eu égard à (52)

$$m_j^t J' a = -a_j^t H a = -a_j^t B_1^t f \quad (54)$$

il vient pour déterminer chaque μ_j

$$(m_j^t B_2^t + a_j^t B_1^t) f = \mu_j \frac{\omega}{\sin \varphi_j} (m_j^t R m_j) \quad (55)$$

VIII. — FRÉQUENCES SINGULIÈRES ET QUASI-RÉSONANCE

Les fréquences dites « singulières » sont celles qui rendent la matrice H singulière; elles sont donc les p racines algébriques de

$$|H(\omega)| = 0 \quad (56)$$

A chaque fréquence singulière ω_0 correspond une matrice a_0 telle que

$$H a_0 = 0 \quad (57)$$

Dans ces conditions

$$b_0 = B_1 a_0 \quad (58)$$

est un mode non amorti critique, associé à une sollicitation

$$c_0 = (C - \omega_0^2 A) b_0 \quad (59)$$

Le caractère critique du mode est mis en évidence par la propriété

$$B_1' c_0 = B_1' (C - \omega_0^2 A) b_0 = 0 \quad (60)$$

qui n'est qu'une autre forme de (57) et signifie

$$b_i' c_0 = b_i' (C - \omega_0^2 A) b_0 = 0 \quad (i = 1, 2 \dots p) \quad (61)$$

En d'autres termes, la sollicitation c_0 , sans être nulle (ce serait seulement le cas si un mode naturel du conservatif associé était non amorti et devenait ainsi le mode critique à une fréquence singulière correspondant à sa fréquence naturelle), n'excite pendant aucun des modes non amortis.

Dans ces conditions, on voit également que, après suppression de p valeurs propres $\zeta = 0$, le problème aux valeurs propres restantes

$$H a + J m = 0 \quad \zeta (J' a + K m) = R m$$

admet encore une fois une solution $\zeta = 0$ avec $m = 0$ et $a = a_0$. La multiplicité de $\zeta = 0$ est $p + 1$ et pourtant le système n'admet que p modes b_i linéairement indépendants pour cette valeur propre.

Nous sommes donc dans un de ces cas difficiles où le nombre de modes est déficient et où il faut rechercher une solution complémentaire n'appartenant pas à la classe des modes à déphasage caractéristique. Soit

$$z_0 = r_0 - i t_0 \quad (62)$$

ce mode complémentaire. Il doit correspondre à un mode de sollicitation réel. Par conséquent, substituant dans (2) et annulant la partie imaginaire pure

$$(C - \omega_0^2 A) t_0 = \omega_0 B r_0 \quad (63)$$

et

$$f_0 = (C - \omega_0^2 A) r_0 + \omega_0 B t_0 \quad (64)$$

Or, la condition (63) et les relations (43) entraînent

$$b' (C - \omega_0^2 A) t_0 = \omega_0 b' B r_0 = 0 \quad (i = 1, 2 \dots p)$$

ce qui, eu égard à (61), nous amène à prendre

$$t_0 = b_0 \quad \text{le mode critique,}$$

et à prendre pour r_0 une solution particulière de

$$B r_0 = \frac{1}{\omega_0} (C - \omega_0^2 A) b_0 \quad (65)$$

Ce système linéaire pour la détermination des élé-

ments de r_0 est précisément possible car le second membre est, en vertu de (61), orthogonal aux solutions du système homogène adjoint.

On voit, de plus, que, pour ce choix de t_0 , la sollicitation correspondante se réduit à

$$f_0 = (C - \omega_0^2 A) r_0 \quad (66)$$

Il est maintenant possible de trouver les coefficients μ_k ($k = p + 2, \dots n$) et les éléments de a dans les développements associés

$$z = \alpha_0 (r_0 - i b_0) + B_1 a + \sum_{p+2}^n \mu_k e^{-i\varphi_k} B_2 m_k$$

$$f = \alpha_0 (C - \omega_0^2 A) r_0 + (C - \omega_0^2 A) B_1 a + \sum_{p+2}^n \mu_k \frac{\omega_0}{\sin \varphi_k} B B_2$$

En fait, prémultipliant par b_0' le dernier développement, il vient directement

$$\alpha_0 = \frac{b_0' f}{b_0' (C - \omega_0^2 A) r_0} = \frac{b_0' f}{\omega_0 r_0' B r_0} \quad (67)$$

D'autre part, pour déterminer a , il vient

$$H a = B_1' f - \alpha_0 B_1 (C - \omega_0^2 A) r_0$$

Ce système est précisément possible du fait que, selon (58) et (67), le second membre est orthogonal à la solution a_0 du système homogène adjoint. On voit que, puisque seul $B_1 a$ intervient dans les développements, il suffit de trouver une solution particulière.

Les coefficients μ_k se déterminent comme plus haut.

La réponse complémentaire peut être qualifiée quasi-résonance car, selon (67), son amplitude est typique d'une résonance et le mode critique b_0 se présente en quadrature.

IX. — UN EXEMPLE DE FRÉQUENCE SINGULIÈRE

La figure 1 montre un exemple de système à deux degrés de liberté constitué par deux disques et deux arbres de torsion. Les matrices du problème sont ici

$$A = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} r_1 + r_2 & -r_2 \\ -r_2 & r_2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} K_1 - k_2 & - \\ -k_2 & \end{bmatrix}$$

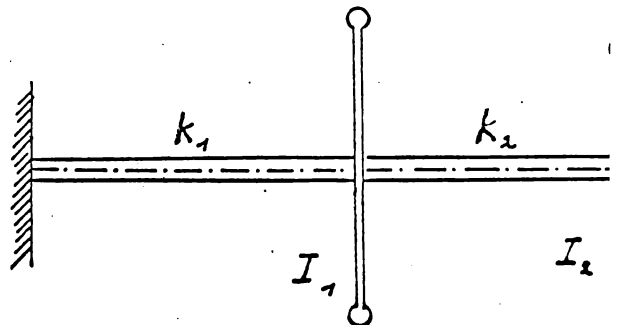


Fig. 1.

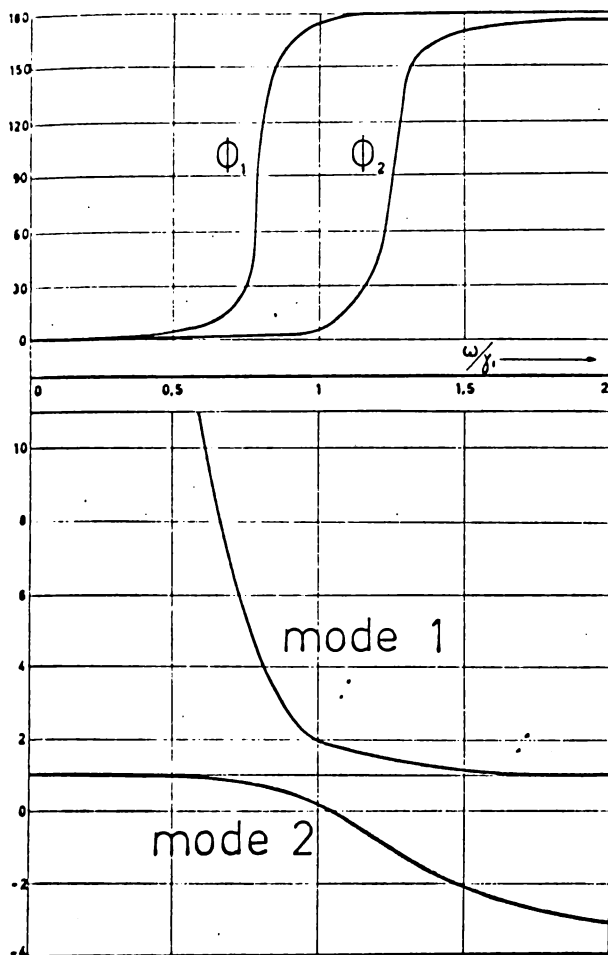


Fig. 2.

où r_1 et r_2 sont les coefficients d'amortissement des rotations relatives des deux arbres.

La figure 2 montre l'allure des déphasages caractéristiques et des modes de réponse dans le cas

$$I_2 = 0,2 I_1 \quad \gamma_2 = 0,9 \gamma_1 \quad \varepsilon_1 = 0,01 \quad \varepsilon_2 = 0,1$$

où les fréquences de référence γ_1 et γ_2 sont définies par

$$\gamma_1^2 = k_1 / (I_1 + I_2) \quad \gamma_2^2 = k_2 / I_2$$

et les coefficients d'amortissement par

$$r_1 = \varepsilon_1 \gamma_1 (I_1 + I_2) \quad r_2 = \varepsilon_2 \gamma_2 I_2.$$

Les fréquences naturelles du conservatif associé sont données par

$$\omega_1^2 = 0,6306 \gamma_1^2 \quad \omega_2^2 = 1,5414 \gamma_1^2$$

Les modes sont représentés par les rapports de l'amplitude d'oscillation du second disque à l'amplitude du premier.

On remarquera la tendance à la confluence des deux modes de réponse au voisinage de $\omega = \gamma_1$.

Faisant maintenant tendre vers zéro le coefficient ε_1 (ou r_1), on obtient le cas d'un amortissement partiel provenant uniquement de la rotation relative des deux disques.

Le mode non amorti consiste donc en une amplitude égale d'oscillation des deux disques; c'est la ligne horizontale de la figure 3. La fréquence singulière est en $\omega = \gamma_1$ où le second mode devient identique au mode non amorti et les deux valeurs de $\tan \varphi$ sont nulles.

On se rend compte qu'une évolution graduelle du cas de la figure 2 au cas de la figure 3 conduit à considérer une partie du mode non amorti comme mode 1, une autre partie comme mode 2. Corrélativement, la valeur $\tan \varphi = 0$ du mode non amorti doit être interprétée comme donnant $\varphi = 0$ dans une partie et $\varphi = \pi$ dans l'autre. De cette façon, chaque déphasage caractéristique conserve son caractère d'évolution continu de 0 à π .

B. M. FRAEIJIS DE VEUBEKE.

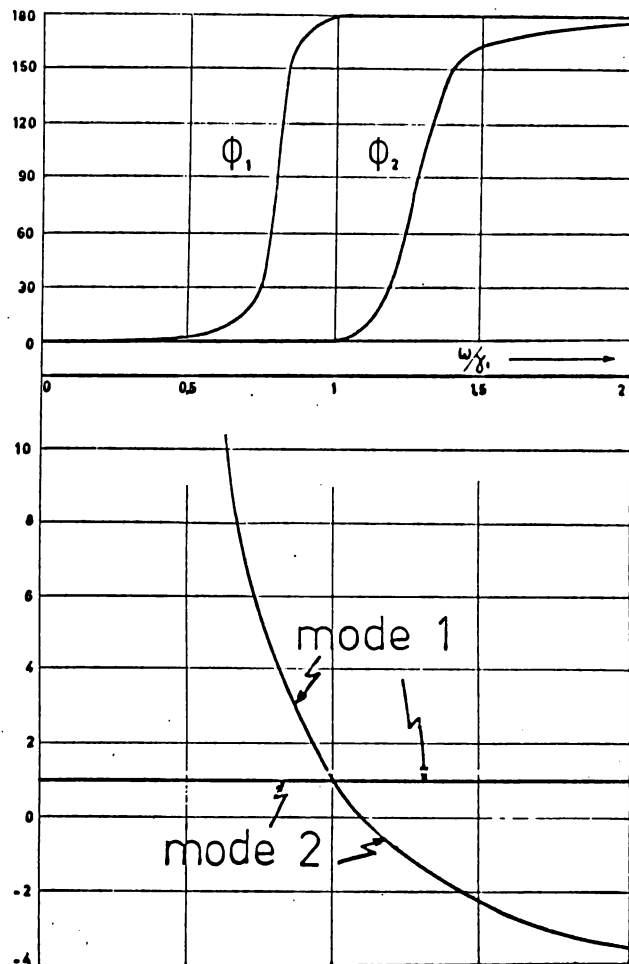


Fig. 3.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Lord RAYLEIGH, *The theory of sound*. Dover N. Y. 1950. Vol. I, chap. V, Sect. 97.
- [2] B. M. FRAEIJIS DE VEUBEKE, "Déphasages caractéristiques de vibrations forcées d'un système amorti," *Acad. R. de Belgique, Bull. de la Classe des Sc.* 5-XXXIV, 1948, pp. 626-641.
- [3] B. BASILE, "Recherche des caractéristiques dynamiques des systèmes continus." *Actes du Colloque international de Mécanique*, Poitiers, 1950. Publ. du Serv. Techn. N° 261.
- [4] B. M. FRAEIJIS DE VEUBEKE, *A variational approach to pure mode excitation based on characteristic phase lag theory*, AGARD Report N° 39, April 1956.
- [5] R. W. TRAILL-NASH, "On the excitation of pure natural modes in aircraft resonance testing", *Aeronautical Research Laboratories of Australia*, Report ARL/SM 254, July 1957.
- [6] B. M. FRAEIJIS DE VEUBEKE, "Influence of damping on aircraft resonance testing", *AGARD Manual of Aeroelasticity*, Part I, Chap. III, 1958.
- [7] G. M. L. GLADWELL and R. E. D. BISHOP, "An investigation into the theory of resonance testing". *Aeronautical Research Council*, A-I. Report ARC 22, 381, 0.1596, September 1960.
- [8] R. W. TRAILL-NASH, "Some theoretical aspects of resonance testing and proposals for a technique combining experiment and computation", *Aeronautical Research Laboratories of Australia*, Report ARL/SM 280, April 1961.
- [9] R. E. D. BISHOP and G. M. L. GLADWELL, *Phil. Trans.* A255, 241, 1963.
- [10] J. P. Mathieu, "On damped vibration theory", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 7, pp. 173-182, 1965.
- [11] Y. PIRONNEAU et S. DUBIGEON, "Détermination des matrices des systèmes quasi linéaires par excitation harmonique équiphasé : Méthode de la réponse équiphasé", *Annales de l'École Nationale Supérieure de Mécanique*, Nantes 1964, p. 1-36.

(à suivre)