

COURS DE MECANIQUE DES FLUIDES

B. FRAEIJIS de VEUBEKE

I. Cinématique d'un milieu continu.

I. Description eulérienne du champ des vitesses.

Soient (x_1, x_2, x_3) les coordonnées cartésiennes d'une particule. Ce sont des fonctions du temps t , dont les dérivées

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i(x_j, t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (I.1)$$

sont les composantes cartésiennes du vecteur vitesse \vec{u} de cette particule. Le champ des vitesses de l'écoulement est connu quand on en possède les valeurs des composantes en tout point et pour toute valeur du temps. Cette connaissance des fonctions $u_i(x_j, t)$ constitue une "description eulérienne" du champ des vitesses.

2. Trajectoires et coordonnées de Lagrange.

L'équation de la trajectoire décrite par une particule s'obtient en intégrant le système d'équations différentielles

$$\frac{dx_1}{u_1(x_j, t)} = \frac{dx_2}{u_2(x_j, t)} = \frac{dx_3}{u_3(x_j, t)} = dt \quad (I.2)$$

L'intégration fait apparaître trois constantes arbitraires (a_1, a_2, a_3) . Un système complet d'intégrales, résolu par rapport à ces constantes, sera de la forme

$$A_i = A_i(x_j, t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (I.3)$$

Comme les a_i sont des constantes pour une particule déterminée, les équations (I.3) représentent trois surfaces qui se déplacent et se déforment avec le temps la particule est constamment située à leur intersection. Les trois valeurs (a_1, a_2, a_3) qui caractérisent ainsi une particule donnée et permettent de déterminer sa trajectoire à l'aide des intégrales (I.3) sont ses "coordonnées de Lagrange". Pour former un système complet, les intégrales (I.3) ne peuvent être liées par une identité

$$F(A_1, A_2, A_3) = 0$$

Par conséquent pour toute valeur du temps le jacobien

$$\frac{D(A_1, A_2, A_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} \neq 0 \quad (I.4)$$

Dans le voisinage d'une intersection les trois surfaces n'ont alors pas d'autre point commun correspondant aux mêmes valeurs des coordonnées de Lagrange et on peut en principe résoudre les relations (I.3) par rapport aux coordonnées cartésiennes

$$x_j = X_j(a_i, t) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (I.5)$$

Ce sont, pour une particule (a_1, a_2, a_3) donnée, les équations paramétriques en t de sa trajectoire. Les composantes cartésiennes de sa vitesse s'en dédui-

sont par

$$\frac{\partial X_j}{\partial t} = U_j (a_i, t) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (I.6)$$

Elles sont ici exprimées comme fonctions des variables (a_i, t) et constituent la "description lagrangienne" du champ des vitesses.

De même, le champ des accélérations est fourni en description de Lagrange par les composantes $\partial^2 X_j / \partial t^2$.

Soient (x_1^0, x_2^0, x_3^0) les coordonnées cartésiennes d'une particule à une époque conventionnelle que nous pouvons toujours, sans nuire à la généralité, caractériser par $t = 0$. Nous tirons de (I.3) ses coordonnées de Lagrange

$$a_i = A_i (x_j^0, 0) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (I.7)$$

Comme d'autre part la propriété (I.4) est valable pour $t = 0$, nous voyons que les équations (I.7) constituent un changement de variables lagrangiennes. Les formules de transformation inverse sont, selon (I.5)

$$x_j^0 = X_j (a_i, 0) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (I.8)$$

En d'autres termes, les coordonnées cartésiennes d'une particule à une époque repère conventionnelle sont des coordonnées de Lagrange particulières auxquelles il est toujours possible de se ramener en principe. Un tel choix n'est cependant pas nécessairement le plus commode.

3. Lignes de courant.

Contrairement au cas d'une trajectoire, une ligne de courant est définie à une époque $t = \xi$ déterminée et est constituée de particules différentes. Un élément d'arc $(\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$ d'une ligne de courant est orienté suivant la vitesse de la particule occupant l'origine de l'élément à l'époque considérée. Les équations différentielles d'une ligne de courant seront donc

$$\frac{\delta x_1}{u_1(x_j, \xi)} = \frac{\delta x_2}{u_2(x_j, \xi)} = \frac{\delta x_3}{u_3(x_j, \xi)} \quad (I.9)$$

Deux intégrales distinctes de ces équations

$$G_1(x_j, \xi) = c_1 \quad (I.10)$$

$$G_2(x_j, \xi) = c_2$$

représentent deux familles de surfaces dont les intersections sont les lignes recherchées. Ces surfaces et les lignes de courant se modifient en général quand on change le paramètre ξ .

4. Lignes d'émission.

Une ligne d'émission est, à une époque t déterminée, le lieu formé des particules qui ont passé (et qui vont passer) par un point donné $E(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ de l'espace. Cherchons d'abord les coordonnées de Lagrange de la particule passant par E à l'instant t ; par (I.3)

$$\bar{a}_i = A_i(\bar{x}_j, t) \quad (i = 1, 2, 3)$$

et substituons ces données dans (I.5) pour l'époque t , Il vient

$$x_j = X_j(A_i(\bar{x}_k, t), t) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (I.II)$$

Ce sont les équations paramétriques en t de la ligne d'émission du point E à l'époque t . Cette ligne se modifie en général suivant l'époque considérée.

5. Cas du mouvement permanent.

Le champ des vitesses est dit "permanent" si sa représentation eulérienne est indépendante du temps. Suivant cette définition on a par (I.I)

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i(x_j) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (I.I2)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (I.I3)$$

cherchons la structure particulière qui lui correspond pour la description lagrangienne de mouvement. Observons à cet effet que les deux premières équations différentielles du système (I.2) des trajectoires deviennent en vertu de (I.I2-13) identiques aux équations différentielles (I.9) des lignes de courant et fournissent deux intégrales indépendantes du temps

$$a_i = A_i(x_j) \quad (i = 1, 2) \quad (I.I4)$$

Elles représentent deux familles à un paramètre de surfaces fixes, dont les intersections, également fixes, définissent aussi bien les trajectoires que les lignes de courant. En tant que trajectoires ces lignes peuvent être, pour une particule donnée, graduées dans le temps à l'aide d'une troisième intégrale de (I.2). Le temps étant maintenant une variable séparée, cette troisième intégrale est de la forme

$$a_3 + t = A_3(x_j) \quad (I.I5)$$

Résolues par rapport aux coordonnées cartésiennes, les intégrales (I.I4) et (I.I5) fournissent finalement du mouvement permanent la représentation lagrangienne particulière

$$x_j = X_j(a_1, a_2, a_3 + t) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (I.I6)$$

Toutes les particules dont les deux premières coordonnées lagrangiennes sont les mêmes suivent donc la même trajectoire ou sont situées sur la même ligne de courant. Il est également intuitif qu'une trajectoire devient ligne d'émission pour chacun de ses points. En effet, exprimant dans (I.I4) et (I.I5) que les coordonnées d'une particule sont celles (\bar{x}_j) d'un point d'émission à l'époque t

$$A_1(\hat{x}_1) = a_1 \quad A_2(\hat{x}_1) = a_2 \quad A_3(\hat{x}_1) = a_3 + t$$

et substituant ceci dans (I.16) pour $t = \xi$

$$x_j = X_j (A_1(\hat{x}_1), A_2(\hat{x}_1), A_3(\hat{x}_1) - t + \xi) \quad (\text{I.17})$$

Ce sont des équations paramétriques en t pour la ligne d'émission de $E(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ à l'époque ξ . Elles ne diffèrent des équations paramétriques (I.16) d'une trajectoire que par une transformation linéaire du paramètre. Trajectoires, lignes de courant et lignes d'émission peuvent être relevées par des techniques expérimentales variées. Si le champ des vitesses est permanent ces courbes doivent s'identifier l'une à l'autre.

6. Analyse locale du champ des vitesses.

Analysons le champ des vitesses dans le voisinage d'un point P à une époque donnée. Pour faciliter l'écriture nous pouvons toujours, à l'aide de translations appropriées, ramener l'époque considérée à $t = 0$ et les coordonnées de P à $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Si le champ des vitesses est différentiable en P , on peut écrire pour sa partie principale

$$u_i(x_j, 0) = u_i(0, 0) + \sum_j x_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{I.18})$$

Les termes négligés peuvent, par définition de la différentiabilité, être rendus arbitrairement petits par rapport aux termes conservés en limitant le voisinage du point P , c'est-à-dire les écarts x_j . Dénotons par

$$A = \left\{ \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_0 \right\} \quad (\text{I.19})$$

la matrice des gradients du champ au point P . Sa partie symétrique sera notée

$$\frac{1}{2} (A + A') = \theta = \{ \theta_{ij} \} \quad (\text{I.20})$$

et ses éléments auront donc pour valeur

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_0 = \theta_{ji} \quad (\text{I.21})$$

La partie symétrique gauche sera notée

$$\frac{1}{2} (A - A') = \Omega = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{I.22})$$

Elle ne contient que trois éléments distincts : les composantes $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ d'un pseudo-vecteur ω . Si la suite d'indices (i, j, k) est une permutation cyclique de la suite $(1, 2, 3)$, on trouve pour composantes du pseudo-vecteur les valeurs

$$\omega_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \quad (I.23)$$

Dès lors, comme

$$\Lambda = \theta + \Omega \quad (I.24)$$

les relations (I.18) se laissent mettre sous la forme

$$u_k(x_j, 0) = u_k(0, 0) + (\omega_i x_j - \omega_j x_i) + \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \quad (I.25)$$

avec

$$\psi = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \theta_{ij} x_i x_j \quad (I.26)$$

Sous forme vectorielle, les trois relations (I.25) s'écrivent

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} + \text{grad } \psi \quad (I.27)$$

Cette décomposition du champ des vitesses, due à Helmholtz (I), fait apparaître :

- 1) un champ de translation d'ensemble avec la vitesse \vec{u}_0 du point P,
- 2) un champ de rotation d'ensemble autour d'un axe passant par P, caractérisé par le pseudo-vecteur rotation $\vec{\omega}$. On sait en effet par la mécanique analytique que \vec{r} étant le vecteur de position d'un point Q (de coordonnées x_i) par rapport à un point de l'axe de rotation (ici le point P), le produit vectoriel $\vec{\omega} \times \vec{r}$ fournit la vitesse en Q due à la rotation. L'axe de la rotation est le support du pseudo-vecteur et le module de ce dernier est égal à la vitesse angulaire. En mécanique des fluides le pseudo-vecteur $\vec{\omega}$ a reçu le nom de "vecteur tourbillon".
- 3) un champ de vitesses de déformation pure, gouverné par un potentiel ψ .

Dans un changement de repère cartésien

$$x_{p'} = \sum_p x_p \cos(p, p') \quad x_p = \sum_{p'} x_{p'} \cos(p, p') \quad (I.28)$$

les cosinus directeurs entre anciens et nouveaux axes obéissent aux relations d'orthogonalité

$$\begin{aligned} \sum_p \cos(p, p') \cos(p, r') &= \delta_{p'r'} \\ \sum_{p'} \cos(p, p') \cos(r, p') &= \delta_{pr} \end{aligned} \quad (I.29)$$

(I) Ueber integrale der hydrodynamischen gleichungen, welche der wirbelbewegung entsprechen. Crelles J. 55, 25 (1858).

$$\begin{aligned}\Omega_{p'q'} &= \Omega_{12} (\cos(1, p') \cos(2, q') - \cos(2, p') \cos(1, q')) \\ &+ \Omega_{23} (\cos(2, p') \cos(3, q') - \cos(3, p') \cos(2, q')) \\ &+ \Omega_{31} (\cos(3, p') \cos(1, q') - \cos(1, p') \cos(3, q'))\end{aligned}$$

L'échange des indices p' et q' montre que le caractère de symétrie gauche est conservé dans le nouveau repère. Dès lors, si (p', q', r') est une permutation cyclique de $(1, 2, 3)$, la formule précédente peut mettre en évidence la loi de transformation des composantes strictes ω_p de Ω :

$$\Omega_{p'q'} = \omega_{r'} = \sum_p \omega_p m_{pr'} \quad (I.34)$$

où $m_{pr'}$ désigne le mineur de l'élément $\cos(p, r')$ dans le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos(1, 1') & \cos(1, 2') & \cos(1, 3') \\ \cos(2, 1') & \cos(2, 2') & \cos(2, 3') \\ \cos(3, 1') & \cos(3, 2') & \cos(3, 3') \end{vmatrix}$$

Les formules bien connues de la théorie des déterminants

$$\sum_{r'} \cos(r, r') m_{pr'} = \Delta \delta_{rp}$$

permettent finalement de mettre la loi de transformation (I.34) sous une forme

$$\sum_{r'} \omega_{r'} \cos(r, r') = \omega_p \Delta \quad (I.35)$$

qui rappelle celle des coordonnées d'un vecteur. Elle n'en diffère que par la présence du facteur Δ et celui-ci est égal à $+1$ si le nouveau repère conserve le sens (dextrogyre ou levogyre) de l'ancien. S'il y a changement de sens, Δ est égal à -1 . Le vecteur $\vec{\omega}$, formé des composantes strictes d'un tenseur symétrique gauche, est donc sensible aux changements de sens du repère : c'est un pseudo-vecteur.

De même, le produit vectoriel de deux vecteurs polaires \vec{a} et \vec{b} est un pseudo vecteur. Il suffit pour le voir de considérer le tenseur cartésien du second ordre : produit tensoriel de \vec{a} et de \vec{b} , dont les coordonnées sont les éléments de la matrice

$$C = \begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{vmatrix}$$

Le tenseur symétrique gauche correspondant $C - C'$ a précisément pour composantes strictes les coordonnées du produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{b}$. Par contre, comme l'exige le sens physique de la décomposition (I.27), le produit vectoriel $\vec{\omega} \times \vec{r}$ est un vecteur polaire. La sensibilité au changement de sens du repère a disparu du fait qu'un des deux facteurs est lui-même un pseudo-vecteur.

Quant au potentiel ψ , c'est un invariant. En effet, appliquant successivement les formules (I.33) et (I.28)

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2} \sum_p \sum_q \theta_{pq} x_p x_q = \frac{1}{2} \sum_{p'} \sum_{q'} \theta_{p'q'} \left(\sum_p x_p \cos(p, p') \right) \left(\sum_q x_q \cos(q, q') \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p'} \sum_{q'} \theta_{p'q'} x_{p'} x_{q'} \end{aligned}$$

7. Vitesses de dilatation et de glissement. Directions principales et invariants de la déformation pure.

Le champ des vitesses correspondant aux deux premières parties de la décomposition de Helmholtz est compatible avec celui d'une particule rigide. Pour étudier la signification physique des coordonnées du tenseur des vitesses de déformation nous portons uniquement l'attention sur le terme $\text{grad } \psi$; ceci revient à analyser le champ dans un repère local dont l'origine serait entraînée avec le point P et les axes orientés par la rotation $\vec{\omega}$.

Au point Q ($x_1, 0, 0$) à l'époque $t = 0$, les composantes de $\text{grad } \psi$ sont ($x_1 \theta_{11}, x_1 \theta_{12}, x_1 \theta_{13}$). Par conséquent, après un intervalle de temps élémentaire dt , les nouvelles coordonnées de Q seront devenues ($x_1(1 + \theta_{11} dt)$, $x_1 \theta_{12} dt$, $x_1 \theta_{13} dt$) et sa distance à l'origine P

$$|x_1| \sqrt{1 + 2 \epsilon_1}$$

avec
$$\epsilon_1 = \theta_{11} dt + \frac{1}{2} (\theta_{11}^2 + \theta_{12}^2 + \theta_{13}^2) dt^2$$

Négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, cette distance vaut

$$|x_1| (1 + \epsilon_1) \approx |x_1| (1 + \theta_{11} dt)$$

La vitesse avec laquelle s'accroît la distance PQ est donc $|x_1| \theta_{11}$ et, divisant ceci par la distance primitive $|x_1|$, on voit qu'on peut reconnaître à θ_{11} la nature d'un accroissement spécifique de longueur par unité de temps, ou vitesse de dilatation linéaire dans la direction 1 au point P. De même, θ_{22} et θ_{33} sont respectivement les vitesses de dilatation linéaire en P dans les directions 2 et 3.

Considérons maintenant, en même temps que celles de Q, les nouvelles coordonnées ($x_2 \theta_{21} dt$, $x_2(1 + \theta_{22} dt)$, $x_2 \theta_{23} dt$) du point R, primitivement situé en ($0, x_2, 0$). Le produit scalaire des nouveaux vecteurs de position est

$$x_1 x_2 \left\{ (1 + \theta_{11} dt) \theta_{21} dt + \theta_{12} dt (1 + \theta_{22} dt) + \theta_{13} dt \theta_{23} dt \right\} = 2 x_1 x_2 \theta_{12} dt$$

en négligeant les infiniments petits d'ordre supérieur. Le même produit scalaire peut s'écrire

$$|x_1| \sqrt{1 + 2 \epsilon_1} |x_2| \sqrt{1 + 2 \epsilon_2} \cos \left(\frac{\pi}{2} - d \alpha_{12} \right)$$

où $d\alpha_{12}$ représente la diminution subie par l'angle, primitivement droit, entre les directions \overrightarrow{PQ} et \overrightarrow{PR} . Prenant x_1 et x_2 positifs, pour que ces directions soient celles coïncidant primitivement avec les axes 1 et 2 du repère, réduisant au même ordre d'approximation et égalant au résultat précédent :

$$x_1 x_2 d\alpha_{12} = 2 x_1 x_2 \theta_{12} dt \quad \text{soit} \quad 2 \theta_{12} = \frac{d\alpha_{12}}{dt}$$

On trouverait de même que $2 \theta_{23}$ et $2 \theta_{31}$ sont respectivement les vitesses de diminution des angles entre des directions primitivement alignées sur les axes 2 et 3 d'une part, 3 et 1 d'autre part.

Revenant aux formules (I.2I) nous dirons que

$$\gamma_{ij} = 2 \theta_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad i \neq j$$

sont les vitesses de glissement associées aux paires de directions indicées.

Nous dirons qu'un point Q est situé sur une direction principale de la déformation si les coordonnées x_i de son vecteur de position \vec{r} relativement à P obéissent aux relations de proportionnalité

$$\frac{\partial \psi / \partial x_1}{x_1} = \frac{\partial \psi / \partial x_2}{x_2} = \frac{\partial \psi / \partial x_3}{x_3} = \theta$$

Cette définition, vectoriellement équivalente à

$$\text{grad } \psi = \theta \vec{r}$$

est justifiée par le caractère homogène du système linéaire qui en résulte pour la recherche de ces coordonnées :

$$\sum_j \theta_{ij} x_j = \theta x_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{I.36})$$

Du moment que (x_i) est une solution non triviale de ce système, (αx_i) où α est un scalaire arbitraire en est une autre.

Tous les points d'une droite PQ vérifient le système (I.36) du moment qu'un seul de ses points, autre que P, le fait.

En notation matricielle, le système (I.36) pour la recherche d'une direction principale s'écrit

$$\theta \mathbf{r} = \theta \mathbf{r} \quad (\text{I.37})$$

où \mathbf{r} est la matrice unicolonne $\{ x_i \}$ représentant le vecteur \vec{r} dans le repère utilisé. Le problème posé est donc celui de la recherche des vecteurs propres \mathbf{r}_α et valeurs propres θ_α de la matrice symétrique θ . Les valeurs propres sont les racines de l'équation algébrique du troisième degré en θ

$$\begin{vmatrix} \theta_{11} - \theta & \theta_{12} & \theta_{13} \\ \theta_{21} & \theta_{22} - \theta & \theta_{23} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} - \theta \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{I.38})$$

qui rendent compatibles les équations (I.36). La théorie des valeurs propres nous apprend que ces racines sont réelles ainsi que les vecteurs propres, définis à un facteur scalaire près, qui leur sont associés. Ainsi la déformation

possède au moins trois directions principales réelles. Si les trois racines, qui seront notées θ_α , θ_β et θ_γ sont distinctes, les trois directions associées sont orthogonales. Si une racine est double, la déformation possède un plan dans lequel toutes les directions sont principales et, associée à l'autre racine, une direction principale perpendiculaire à ce plan. Enfin pour une racine triple, toutes les directions sont principales.

Dans un repère orienté suivant des directions principales, la matrice du tenseur des vitesses de déformation se ramène à la forme diagonale

$$\theta = \begin{vmatrix} \theta_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \theta_\beta & 0 \\ 0 & 0 & \theta_\gamma \end{vmatrix}$$

Les valeurs propres sont donc les vitesses de dilatation linéaire suivant les directions principales et les vitesses de glissement associées aux directions principales sont nulles. Le potentiel prend la forme

$$\psi = \frac{1}{2} (x_\alpha^2 \theta_\alpha + x_\beta^2 \theta_\beta + x_\gamma^2 \theta_\gamma)$$

Dans le langage de la géométrie analytique on dira que la famille des quadriques $\psi = \text{constante}$ a été ramenée à ses axes principaux.

A partir du système (I.36) il est facile de montrer que les vecteurs propres sont des vecteurs polaires et les valeurs propres des invariants. Ceci est par ailleurs évident si l'on observe que, le potentiel ψ étant invariant, les axes principaux des quadriques $\psi = \text{constante}$ ont une orientation indépendante du repère et que les valeurs propres sont les vitesses de dilatation linéaire suivant ces axes. Développons alors l'équation (I.38) aux valeurs propres et ordonnons-la selon les puissances de θ

$$-\theta^3 + \theta_1 \theta^2 - \theta_2 \theta + \theta_3 = (\theta_\alpha - \theta)(\theta_\beta - \theta)(\theta_\gamma - \theta) = 0 \quad (\text{I.39})$$

Les racines étant des invariants, il en est de même des coefficients : ce sont les invariants fondamentaux du tenseur des vitesses de déformation

$$\theta_1 = \theta_{11} + \theta_{22} + \theta_{33} = \theta_\alpha + \theta_\beta + \theta_\gamma \quad (\text{I.40})$$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \theta_{11} \theta_{22} + \theta_{22} \theta_{33} + \theta_{33} \theta_{11} - (\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2) \\ &= \theta_\alpha \theta_\beta + \theta_\beta \theta_\gamma + \theta_\gamma \theta_\alpha \end{aligned} \quad (\text{I.41})$$

$$\theta_3 = \begin{vmatrix} \theta_{ij} \end{vmatrix} = \theta_\alpha \theta_\beta \theta_\gamma \quad (\text{I.42})$$

La signification du premier invariant fondamental est liée au changement de volume d'une particule. Les vitesses de glissement étant nulles dans un repère de directions principales, un petit parallépipède rectangle de volume primitif $dx_\alpha dx_\beta dx_\gamma$ reste rectangle à l'époque dt , où son volume est devenu

$dx_\alpha(1 + \theta_\alpha dt) dx_\beta(1 + \theta_\beta dt) dx_\gamma(1 + \theta_\gamma dt)$ par suite de la dilatation des arêtes. Négligeant les infiniments petits d'ordre supérieur, nous trouvons pour l'accroissement de volume l'expression

$$\frac{dx_\alpha}{dt} \frac{dx_\beta}{dt} \frac{dx_\gamma}{dt} (\theta_\alpha + \theta_\beta + \theta_\gamma)$$

Par conséquent l'invariant $\theta_1 = \theta_\alpha + \theta_\beta + \theta_\gamma$ est la vitesse d'accroissement spécifique du volume ou vitesse de dilatation cubique au point P considéré. Suivant (I.40) et les définitions (I.2I) on trouve aussi pour la vitesse de dilatation cubique

$$\theta_1 = \sum_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \text{div } \vec{u} \quad (\text{I.43})$$

donnant ainsi le même sens physique au scalaire "divergence du vecteur vitesse" et établissant son caractère d'invariance.

Le second invariant fondamental θ_2 est plus avantageusement interprété en relation avec le premier. Il y a en effet intérêt à imaginer une décomposition de la déformation pure en deux parties :

- la première est un changement de volume respectant l'homothétie par rapport à P de la particule,
- la seconde est un changement de forme de la particule sans changement de volume ou "distortion".

Cette décomposition revient à considérer la matrice θ comme une somme

$$\theta = \begin{vmatrix} 1/3 \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \theta_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \theta_{11} - 1/3 \theta_1 & \theta_{12} & \theta_{13} \\ \theta_{21} & \theta_{22} - 1/3 \theta_1 & \theta_{23} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} - 1/3 \theta_1 \end{vmatrix} \quad (\text{I.44})$$

Le premier terme représente un tenseur isotrope avec vitesse de dilatation linéaire égale dans toutes les directions, ce qui respecte l'homothétie de la particule tout en rendant compte de la totalité de la vitesse de dilatation cubique. Le second terme représente le tenseur "déviateur" dont le premier invariant fondamental est nul par construction. Le second invariant $\hat{\theta}_2$ du déviateur s'obtient à partir de (I.4I) en remplaçant les vitesses de dilatation linéaire θ_{ij} par les mêmes quantités diminuées de $1/3 \theta_1$. On trouve

$$\hat{\theta}_2 = \theta_2 - \frac{1}{3} \theta_1^2 \quad (\text{I.45})$$

On trouve aussi en remplaçant θ_1 et θ_2 par leurs expressions en fonction des θ_{ij} l'expression remarquable

$$\hat{\theta}_2 = \frac{1}{6} \left((\theta_{11} - \theta_{22})^2 + (\theta_{22} - \theta_{33})^2 + (\theta_{33} - \theta_{11})^2 \right) + \theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2 \quad (\text{I.46})$$

Elle montre que, tout comme l'annulation de θ_1 fait disparaître intégralement la partie isotrope de la déformation, l'annulation de $\hat{\theta}_2$ exige

$$\theta_{11} = \theta_{22} = \theta_{33} = 1/3 \theta_1 \quad \theta_{12} = \theta_{23} = \theta_{31} = 0$$

et entraîne la disparition intégrale du déviateur.

Au cours de l'analyse locale du champ des vitesses, les opérations $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u}$ grad ψ et $\text{div } \vec{u}$ sont apparues en succession et ont reçu des expressions mathématiques définies pour un repère cartésien. Leur sens physique permet de leur donner des définitions intrinsèques et d'en déduire leur expression mathématique dans des repères curvilignes parfois mieux adaptés à la nature de chaque problème.

En examinant ces définitions dans les sections suivantes, nous aurons en même temps l'occasion de faire un rappel succinct des théorèmes de Gauss-Green et de Stokes.

8. L'opérateur divergence et le Théorème de Gauss-Green.

Nous avons déjà reconnu à l'expression $\text{div } \vec{u}$ la nature d'une vitesse de dilatation cubique. Considérons un volume fini D , simplement connexe, limité par une surface fermée S et un point O de référence à l'intérieur. Soit \vec{n} la normale unitaire extérieure en un point P de la surface, où la vitesse a pour valeur \vec{u} , et \vec{r} le vecteur de position du point P par rapport à O . Considérant la surface comme entraînée avec le fluide, le changement de volume du cône élémentaire issu de O et découpant une aire dS autour de P est mesuré par

$$(\vec{u} \cdot \vec{n}) dS dt$$

Supposant le produit scalaire $(\vec{u} \cdot \vec{n})$ positif, cette mesure est celle de l'accroissement du volume si $(\vec{r} \cdot \vec{n})$ est positif, de la diminution du volume si $(\vec{r} \cdot \vec{n})$ est négatif. Par conséquent, si le même angle solide élémentaire découpait plusieurs éléments dS sur la surface limite, la somme des mesures correspondantes serait égale à l'accroissement du volume appartenant à D .

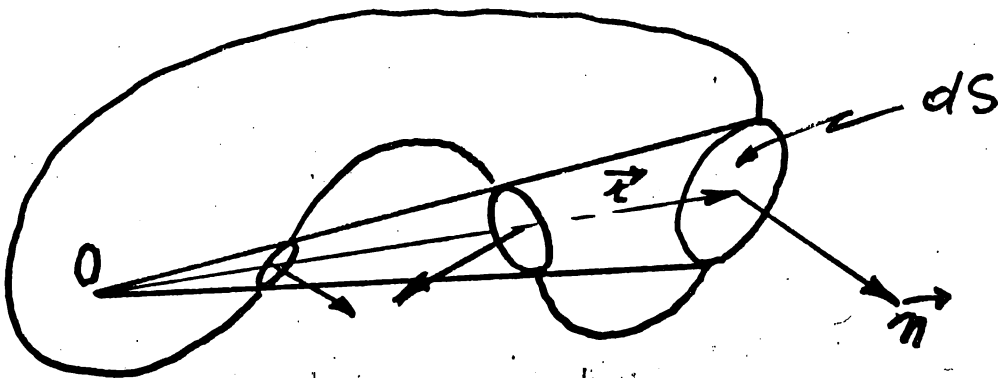


Fig. I.1.

La vitesse d'accroissement du volume total de D est donc mesurée par l'intégrale de surface $\iint_S (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS$.

La divergence du champ des vitesses en O peut alors être définie en tant que vitesse de dilatation cubique par la limite

$$\text{div } \vec{u} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS \quad (\text{I.47})$$

obtenue en faisant tendre vers zéro le volume τ contenant le point O . Cette formule peut servir de définition intrinsèque à la divergence de tout autre champ de vecteurs.

Pour un volume élémentaire $\Delta\tau$, la définition précédente revient à la forme différentielle du théorème de Gauss-Green

$$\operatorname{div} \vec{u} \Delta\tau = \Sigma (\vec{u} \cdot \vec{n}) \Delta S \quad (\text{I.48})$$

où la somme est étendue aux facettes élémentaires limitant le volume élémentaire. Le théorème s'étend à un volume fini en divisant ce dernier par des cloisons intérieures en une juxtaposition de volumes élémentaires. Comme sur une cloison intérieure le flux du vecteur \vec{u} ne fait que sortir d'un volume élémentaire pour entrer dans un autre, la somme des flux ne doit s'étendre qu'à la surface extérieure S . On obtient ainsi le théorème de Gauss

$$\iiint_D \operatorname{div} \vec{u} \, d\tau = \iint_S (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, dS \quad (\text{I.49})$$

La définition intrinsèque (I.47) ou la forme différentielle équivalente (I.48) sont particulièrement commodes pour obtenir l'expression mathématique de la divergence en coordonnées curvilignes.

Soient

$$x_i = x_i(q_j) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{I.50})$$

$$(j = 1, 2, 3)$$

les formules de transformation des coordonnées cartésiennes en coordonnées curvilignes (q_j) . En chaque point de l'espace existe un repère naturel local constitué de trois vecteurs de base \vec{g}_j , définis par leurs composantes cartésiennes

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_j}, \frac{\partial x_2}{\partial q_j}, \frac{\partial x_3}{\partial q_j} \right) \quad j = 1, 2, 3$$

Ils sont tangents en ce point aux courbes suivant lesquelles se coupent les surfaces $q_j = \text{constante}$. Le carré de la distance entre le point $P(q_j)$ et le point voisin $Q(q_j + dq_j)$ vaut

$$ds^2 = \Sigma_i dx_i^2 = \Sigma_i \left(\Sigma_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j \right)^2 = \Sigma_j \Sigma_k \left(\Sigma_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) dq_j dq_k$$

Nous nous limitons au cas où les surfaces se coupent toujours à angle droit, c'est-à-dire aux coordonnées curvilignes orthogonales. Les vecteurs de base du repère local sont orthogonaux :

$$\Sigma_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = 0 \quad j \neq k \quad (\text{I.51})$$

et le carré de la distance élémentaire se réduit à

$$ds^2 = \Sigma_j g_j^2 dq_j^2 \quad (\text{I.52})$$

avec la notation

$$g_j^2 = \Sigma_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right)^2 \quad (\text{I.53})$$

pour les modules carré des vecteurs de base.

Nous appellerons u_j ($j = 1, 2, 3$) les projections orthogonales du champ \vec{u} sur les directions du repère local.

Pour le calcul de la divergence du champ \vec{u} au point $O(q_j)$ nous considérons le volume élémentaire formé des points

$$q_j + \xi_j \Delta q_j \quad 0 \leq \xi_j \leq 1 \quad (j = 1, 2, 3)$$

Le flux sortant de la facette $\xi_1 = 0$ a pour valeur

$$-\Delta q_2 \Delta q_3 \int_0^1 \int_0^1 (u_1 g_2 g_3)_{\xi_1=0} d\xi_2 d\xi_3$$

Le flux sortant de la facette opposée $\xi_1 = 1$

$$+\Delta q_2 \Delta q_3 \int_0^1 \int_0^1 (u_1 g_2 g_3)_{\xi_1=1} d\xi_2 d\xi_3$$

Pour évaluer ces contributions avec la précision nécessaire pour effectuer par la suite le passage à la limite $\Delta q_j \rightarrow 0$, supposons le champ \vec{u} différentiable au point O et calculons la partie principale de $u_1 g_2 g_3$ dans le volume :

$$u_1 g_2 g_3 = (u_1 g_2 g_3)_0 + \sum_j \xi_j \Delta q_j \frac{\partial}{\partial q_j} (u_1 g_2 g_3)$$

Les dérivées partielles sont évaluées au point O ($\xi_j = 0$).

On en déduit

$$((u_1 g_2 g_3)_{\xi_1=1} - (u_1 g_2 g_3)_{\xi_1=0}) = \Delta q_1 \frac{\partial}{\partial q_1} (u_1 g_2 g_3)$$

et la contribution des deux facettes au flux sortant est

$$\Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 \frac{\partial}{\partial q_1} (u_1 g_2 g_3)$$

Par un calcul similaire pour les deux autres paires de facettes il vient au total

$$\Gamma(\vec{u}, \vec{n}) \Delta S = \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (u_1 g_2 g_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (u_2 g_3 g_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (u_3 g_1 g_2) \right)$$

Au même ordre d'approximation le volume élémentaire vaut

$$\Delta \tau = (g_1 g_2 g_3)_0 \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3$$

et, par application de (I.48), on trouve finalement

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (u_1 g_2 g_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (u_2 g_3 g_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (u_3 g_1 g_2) \right) \quad (\text{I.54})$$

En coordonnées sphériques (r, θ, ψ) par exemple, où

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\psi^2$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta u_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta u_\theta) + \frac{\partial}{\partial \psi} (r u_\psi) \right) \quad (\text{I.55})$$

9. L'opérateur rotationnel et le Théorème de Stokes.

On peut établir une première définition intrinsèque du rotationnel en suivant une voie semblable.

Le second membre de (I.48) est remplacé par l'expression analogue

$$\int (\vec{n} \times \vec{u}) \Delta S$$

comportant un produit vectoriel au lieu du produit scalaire et représentant par conséquent un vecteur. Etendons d'abord la sommation en coordonnées cartésiennes aux six facettes du parallélépipède rectangle élémentaire

$$x_1 + \xi_1 \Delta x_1 \quad 0 \leq \xi_1 \leq 1 \quad (i = 1, 2, 3)$$

Pour la facette $\xi_1 = 0$ les composantes cartésiennes de $(\vec{n} \times \vec{u}) \Delta S$ sont

$$0, \quad +\Delta x_2 \Delta x_3 \int_0^1 \int_0^1 (u_3)_{\xi_1=0} d\xi_2 d\xi_3, \quad -\Delta x_2 \Delta x_3 \int_0^1 \int_0^1 (u_2)_{\xi_1=0} d\xi_2 d\xi_3$$

Pour la facette opposée $\xi_1 = 1$

$$0, \quad -\Delta x_2 \Delta x_3 \int_0^1 \int_0^1 (u_3)_{\xi_1=1} d\xi_2 d\xi_3, \quad +\Delta x_2 \Delta x_3 \int_0^1 \int_0^1 (u_2)_{\xi_1=1} d\xi_2 d\xi_3$$

Par des développements limités aux termes du premier ordre, comme pour le calcul de la divergence, on trouve

$$(u_i)_{\xi_1=1} - (u_i)_{\xi_1=0} = \Delta x_1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \quad (i = 2, 3)$$

les dérivées partielles étant évaluées au point $(\xi_1 = 0)$. La contribution de la première paire de facettes à $\int (\vec{n} \times \vec{u}) \Delta S$ est alors

$$0, \quad -\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad +\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

Ajoutant par des calculs similaires la contribution des deux autres paires de facettes et définissant en coordonnées cartésiennes $\operatorname{rot} \vec{u}$ par ses composantes

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

le résultat final peut s'écrire

$$\operatorname{rot} \vec{u} \Delta \tau = \int (\vec{n} \times \vec{u}) \Delta S \quad (\text{I.56})$$

Cette forme différentielle, ou la définition intrinsèque qui lui correspond, montre bien que l'opérateur rotationnel se comporte comme un produit vectoriel, c'est-à-dire engendre un pseudo-vecteur à partir d'un vecteur polaire. Pour un volume fini, considéré comme la juxtaposition de parallélépipèdes élémentaires (I.56) devient

$$\iiint_D \operatorname{rot} \vec{u} \, d\tau = \iint_S (\vec{n} \times \vec{u}) \, dS \quad (\text{I.57})$$

Les intégrales sur les cloisons intérieures se détruisent du fait que la normale \vec{n} change de sens suivant qu'elle appartient à la surface d'un parallélépipède ou de celui qui lui est adjacent.

Appliquons maintenant (I.57) au volume limité par deux surfaces planes parallèles S_1 et S_2 et une bande cylindrique perpendiculaire B .

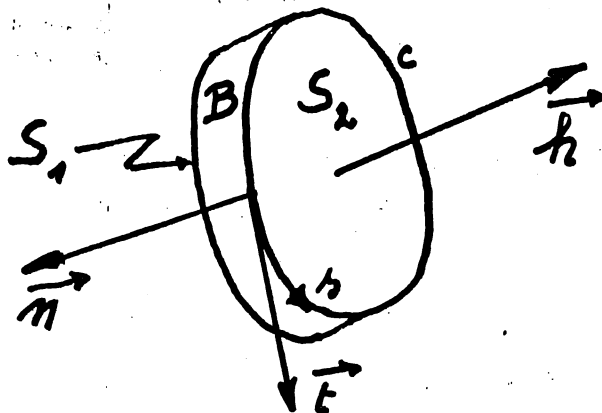


Fig. I.2.

Les normales unitaires extérieures aux faces S_1 et S_2 sont liées par $-\vec{n}_1 = \vec{n}_2 = \vec{h}$, d'où

$$\iiint_D \operatorname{rot} \vec{u} \, d\tau = - \iint_{S_1} \vec{h} \times \vec{u} \, dS + \iint_{S_2} \vec{h} \times \vec{u} \, dS + \iint_B \vec{n} \times \vec{u} \, dB$$

Cette relation vectorielle est maintenant projetée sur la direction \vec{h} ; comme $\vec{h} \cdot (\vec{h} \times \vec{u}) = 0$, il reste

$$\iiint_D \vec{h} \cdot \operatorname{rot} \vec{u} \, d\tau = \iint_B \vec{h} \cdot (\vec{n} \times \vec{u}) \, dB$$

Prenons maintenant pour la bande cylindrique une largeur élémentaire dh , de sorte que l'élément de volume puisse s'écrire

$$d\tau = dh \, dS$$

et l'élément de surface de la bande

$$dB = dh \, ds$$

où ds est l'élément d'arc du contour c limitant $S_2 = S$.
Alors

$$\iint_S \vec{h} \cdot \operatorname{rot} \vec{u} \, dS = \oint_c \vec{h} \cdot (\vec{n} \times \vec{u}) \, ds$$

Mais $\vec{h} \cdot (\vec{n} \times \vec{u}) = \vec{u} \cdot (\vec{h} \times \vec{n}) = \vec{u} \cdot \vec{t}$

où \vec{t} est un vecteur unitaire tangent au contour et orienté de telle façon que le trièdre $(\vec{h}, \vec{n}, \vec{t})$ soit superposable au trièdre de référence. Le résultat final

$$\iint_S \vec{h} \cdot \text{rot } \vec{u} \, dS = \oint_C \vec{u} \cdot \vec{t} \, ds \quad (\text{I.58})$$

est un cas particulier du théorème de Stokes. Il exprime que le flux du rotationnel du champ \vec{u} à travers une surface plane est égal à la circulation de \vec{u} sur le contour fermé limitant cette surface.

La correspondance entre sens positif du flux et sens positif de la circulation dépend évidemment du sens du trièdre de référence, puisque le rotationnel est un pseudo-opérateur vectoriel. Elle se décide par la règle de superposabilité du trièdre $(\vec{h}, \vec{n}, \vec{t})$.

Le théorème de Stokes s'étend à une surface gauche arbitraire limitée par un contour fermé simple en la considérant comme la limite d'un réseau de mailles planes élémentaires. Le flux total est composé de la somme des flux à travers les mailles individuelles et fournit à la limite le premier membre de (I.58) étendu à la surface considérée. Dans la sommation des circulations autour de chaque maille, la contribution de chaque segment du contour réseau intérieur est nulle car il est parcouru une fois dans chaque sens. Il ne subsiste que la circulation sur le contour limitant la surface, c'est-à-dire le second membre de (I.58) dont la validité est maintenant généralisée.

Appliqué à une maille infinitésimale, le théorème de Stokes fournit lui aussi une définition intrinsèque du rotationnel. Nous l'utilisons pour établir son expression mathématique en coordonnées curvilignes orthogonales. Prenons une maille élémentaire dans la surface $q_1 = \text{constante}$, caractérisée par l'ensemble des points

$$q_2 + \xi_2 \Delta q_2 \quad q_3 + \xi_3 \Delta q_3 \quad 0 \leq \xi_2 \leq 1 \quad 0 \leq \xi_3 \leq 1$$

Si \vec{h} est orienté selon \vec{g}_1 , il faut que \vec{n} et \vec{t} soient, dans l'ordre, superposables à \vec{g}_2 et \vec{g}_3 et ceci impose comme sens de parcours de la maille celui ABCD correspondant à la rotation de \vec{g}_2 vers \vec{g}_3

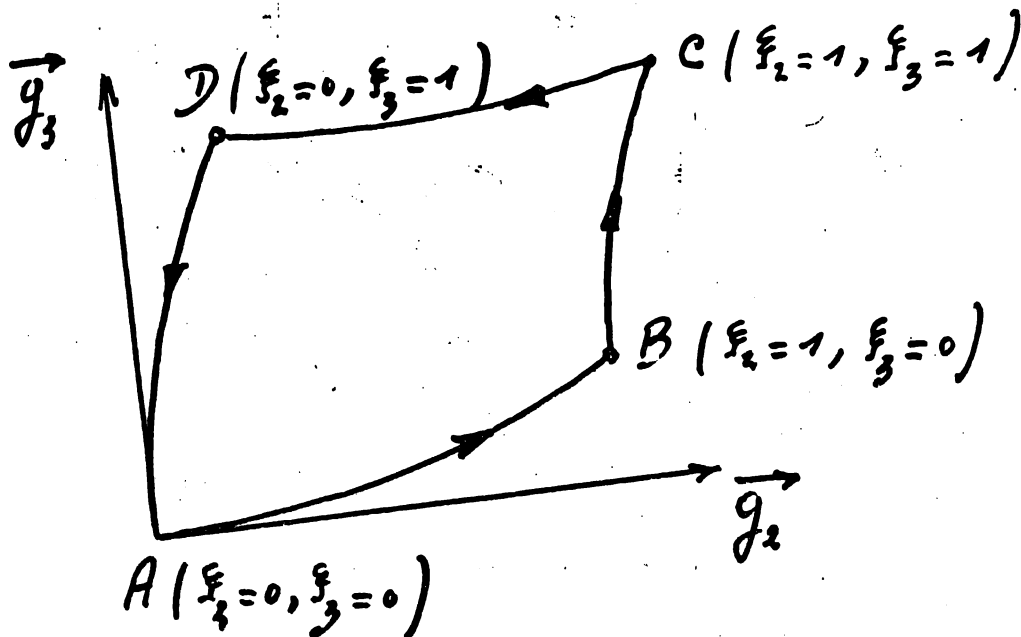


Fig. I.3.

La circulation sur la maille a pour valeur

$$\begin{aligned} \Delta q_2 \int_0^1 (u_2 g_2)_{\xi_3=0} d\xi_2 + \Delta q_3 \int_0^1 (u_3 g_3)_{\xi_2=1} d\xi_3 - \Delta q_2 \int_0^1 (u_2 g_2)_{\xi_3=1} d\xi_2 \\ \approx \Delta q_3 \int_0^1 (u_3 g_3)_{\xi_2=0} d\xi_3 \end{aligned}$$

Mais, supposant la différentiabilité du champ au point A, on trouve les parties principales

$$(u_2 g_2)_{\xi_3=1} - (u_2 g_2)_{\xi_3=0} = \Delta q_3 \frac{\partial}{\partial q_3} (u_2 g_2)$$

$$(u_3 g_3)_{\xi_2=1} - (u_3 g_3)_{\xi_2=0} = \Delta q_2 \frac{\partial}{\partial q_2} (u_3 g_3)$$

D'où pour la circulation l'estimation

$$\Delta q_2 \Delta q_3 \left(\frac{\partial}{\partial q_2} (u_3 g_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (u_2 g_2) \right)$$

Au même ordre d'approximation le flux de $\text{rot } \vec{u}$ à travers la maille est

$$\Delta q_2 \Delta q_3 (g_2 g_3 \text{ rot}_1 \vec{u})$$

D'où l'expression de la composante du rotationnel dans la direction \vec{g}_1

$$\text{rot}_1 \vec{u} = \frac{1}{g_2 g_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_2} (u_3 g_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (u_2 g_2) \right) \quad (\text{I.59})$$

Les deux autres composantes s'en déduisent par permutation cyclique des indices. Ainsi en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \text{rot}_r \vec{u} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta u_\psi) - \frac{\partial}{\partial \psi} (r u_\theta) \right) \\ \text{rot}_\theta \vec{u} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \psi} u_r - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta u_\psi) \right) \\ \text{rot}_\psi \vec{u} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} u_r \right) \end{aligned} \quad (\text{I.60})$$

10. Propriétés géométriques du rotationnel.

$$\text{La propriété} \quad \text{div rot } \vec{u} = 0 \quad (\text{I.61})$$

se vérifie immédiatement par calcul en coordonnées cartésiennes. Une démonstration plus instructive peut être basée sur les définitions intrinsèques des opérateurs.

Par le théorème d'Ostrogradski appliqué à une région simplement connexe :

$$\iiint_D \text{div rot } \vec{u} \, d\tau = \iint_S \text{rot } \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS$$

Divisons la surface fermée simple S en deux parties S_1 et S_2 par un contour fermé simple c , tracé sur cette surface et définissons un sens de parcours sur c tel que la normale extérieure \vec{n} sur S_1 corresponde au sens positif du flux dans le théorème de Stokes. Alors

$$\iint_{S_1} \text{rot } \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS = \oint_c \vec{u} \cdot \vec{t} \, ds$$

Sur la partie S_2 le sens positif du flux est opposé à la normale extérieure et donc

$$\iint_{S_2} \text{rot } \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS = - \oint_c \vec{u} \cdot \vec{t} \, ds$$

Par addition des deux derniers résultats il vient

$$\iiint_D \text{div rot } \vec{u} \, d\tau = 0$$

et la propriété (I.61) en découle par un passage à la limite. Cette propriété s'applique en particulier au vecteur tourbillon

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u} \quad \text{div } \vec{\omega} = 0 \quad (\text{I.62})$$

où \vec{u} est le champ des vitesses. Définissons une ligne tourbillon comme une courbe partout tangente au vecteur tourbillon à une époque spécifiée. En coordonnées cartésiennes les équations différentielles de cette ligne seront donc

$$\frac{\delta x_1}{\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}} = \frac{\delta x_2}{\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}} = \frac{\delta x_3}{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}} \quad (\text{I.63})$$

Un tube tourbillon sera défini à la même époque comme l'ensemble des lignes tourbillon s'appuyant sur un contour fermé c_1 . Appliquons à un segment de ce tube la propriété (I.62) ou plus exactement sa forme intégrale

$$\iint_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

La surface fermée S est constituée des sections transversales limites S_1 et S_2 qui s'appuient sur les bords c_1 et c_2 et de la surface enveloppe engendrée par les lignes tourbillons à travers laquelle le flux est nul par construction. Par conséquent

$$\iint_{S_1} \vec{\omega} \cdot \vec{n}_1 \, dS + \iint_{S_2} \vec{\omega} \cdot \vec{n}_2 \, dS = 0$$

ou encore, prenant une normale unitaire \vec{h}_1 opposée à \vec{n}_1 de façon à définir un seul sens de parcours le long du tube

$$2 \iint_{S_1} \vec{\omega} \cdot \vec{h}_1 \, dS = 2 \iint_{S_2} \vec{\omega} \cdot \vec{h}_2 \, dS = I \quad (\text{I.64})$$

Cette propriété peut s'énoncer comme suit : le flux du rotationnel de la vitesse à travers une section d'un tube tourbillon est indépendant de la position de la section; c'est, par définition, l'intensité I du tube.

Il en découle que la section d'un tube tourbillon ne peut s'annuler au sein du fluide sans que le module du rotationnel ne tende vers l'infini. Un tube tourbillon ne peut que s'étendre à l'infini, se fermer sur lui-même en anneau ou se terminer sur une paroi limitant l'écoulement.

Une application du théorème de Stokes transforme également le résultat (I.64) dans celui, équivalent,

$$\oint_c \vec{u} \cdot \vec{t} \, ds = I \quad (\text{I.65})$$

L'intensité du tube est égale à la circulation de la vitesse autour d'un contour fermé entourant une fois le tube.

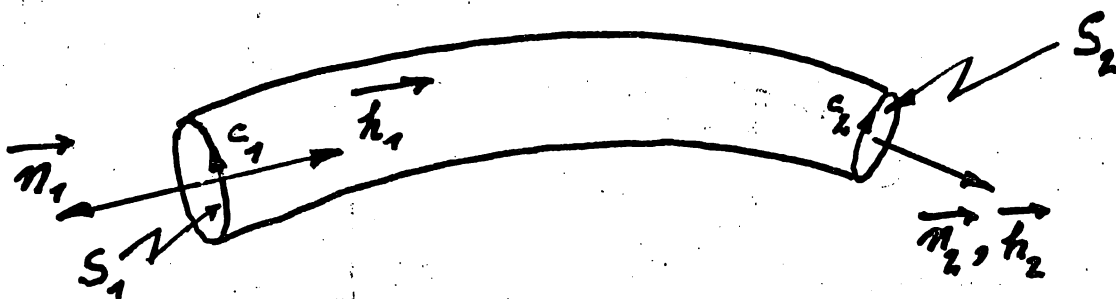


Fig. I.4.

Dans certains écoulements contournant un obstacle il peut arriver que des lignes de courant se rejoignent derrière l'obstacle pour former une surface de discontinuité dans la vitesse tangentielle. On peut montrer qu'une telle surface est équivalente à une nappe portant une densité superficielle de tourbillons.

Rapportons la surface à des coordonnées curvilignes orthogonales q_1 et q_2 et soit $g_3 \, dq_3$ le déplacement élémentaire perpendiculairement à la surface. Au cours de ce déplacement on passe du côté $q_3 = -0$ de la surface au côté $q_3 = +0$. Par la formule (I.59)

$$g_2 \left(\text{rot}_1 \vec{u} \cdot g_3 \, dq_3 \right) = \frac{\partial}{\partial q_2} (u_3 g_3) \, dq_3 - \frac{\partial}{\partial q_3} (u_2 g_2) \, dq_3$$

Passant à la limite $dq_3 \rightarrow 0$ avec continuité de la composante normale u_3 de la vitesse, il vient pour la discontinuité de la composante tangentielle u_2

$$\lim (\text{rot}_1 \vec{u} \cdot \vec{g}_3 dq_3) = 2 \Omega_1 = u_2(q_1, q_2, -0) - u_2(q_1, q_2, +0) \quad (\text{I.66})$$

De même par la formule correspondante pour la seconde composante du rotationnel

$$\lim (\text{rot}_2 \vec{u} \cdot \vec{g}_3 dq_3) = 2 \Omega_2 = u_1(q_1, q_2, +0) - u_1(q_1, q_2, -0)$$

Ω_1 et Ω_2 sont les composantes de la densité superficielle du tourbillon.

II. L'opérateur gradient.

Cherchons encore une définition intrinsèque de $\text{grad} \psi$.
Considérons à cet effet l'expression vectorielle $\sum \psi \vec{n} \Delta S$ étendue aux facettes d'un parallélépipède élémentaire en coordonnées cartésiennes. Pour la facette $\xi_1 = 0$, les contributions à l'expression sont

$$-\Delta q_2 \Delta q_3 \int_0^1 \int_0^1 (\psi)_{\xi_1=0} d\xi_2 d\xi_3 \quad , \quad 0 \quad , \quad 0$$

Pour la facette $\xi_1 = 1$

$$+\Delta q_2 \Delta q_3 \int_0^1 \int_0^1 (\psi)_{\xi_1=1} d\xi_2 d\xi_3 \quad , \quad 0 \quad , \quad 0$$

Pour un potentiel ψ différentiable au point $(\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0)$ on trouve la partie principale

$$(\psi)_{\xi_1=1} - (\psi)_{\xi_1=0} = \Delta q_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)$$

et la contribution des deux facettes a pour partie principale

$$\Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad , \quad 0 \quad , \quad 0$$

Ajoutant les contributions des deux autres paires de facettes il vient, eu égard à la définition de $\text{grad} \psi$ en coordonnées cartésiennes

$$\sum \psi \vec{n} \Delta S = \text{grad} \psi \Delta \tau \quad (\text{I.67})$$

Par un passage à la limite $\Delta \tau \rightarrow 0$ ceci constitue une définition intrinsèque du gradient.

Le résultat s'étend de nouveau à un volume fini en le considérant comme un assemblage de parallélépipèdes élémentaires. Il y a destruction des contributions sur les cloisons intérieures par suite du changement de sens de la normale suivant qu'elle est extérieure pour un des parallélépipèdes ou pour celui qui lui est

adjacent; il ne subsiste que l'intégrale sur la surface S délimitant le volume.

$$\iint_S \psi \vec{n} \, dS = \iiint_D \text{grad } \psi \, d\tau \quad (I.68)$$

Appliquons cette formule au volume délimité par deux facettes planes parallèles $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S$ et un manteau cylindrique ΔB d'épaisseur Δh qui leur est perpendiculaire. Avec

$$\vec{n}_1 = \vec{n}_2 = \vec{h}$$

pour les normales unitaires extérieures aux facettes planes, il vient

$$\vec{h} (\psi_2 - \psi_1) \Delta S + \iint_{\Delta B} \psi \vec{n} \, dS = \Delta S \Delta h \text{ grad } \psi$$

Projetant cette relation sur la direction \vec{h} et observant que $\vec{h} \cdot \vec{n} = 0$ sur le manteau :

$$(\psi_2 - \psi_1) = \Delta h \vec{h} \cdot \text{grad } \psi$$

Passant finalement à la limite :

$$\vec{h} \cdot \text{grad } \psi = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\psi_2 - \psi_1}{\Delta h} = \frac{d\psi}{dh} \quad (I.69)$$

La projection du gradient de ψ dans une direction donnée est égale à la dérivée de ψ dans cette direction. Si celle-ci était située dans un plan tangent à une surface équipotentielle $\psi = \text{constante}$ passant par ce point, on aurait $d\psi/dh = 0$: la projection du gradient sur le plan tangent est nulle. En un point où la surface équipotentielle possède un plan tangent, le gradient de ψ est donc perpendiculaire à cette surface.

L'application de la définition intrinsèque à un volume élémentaire en coordonnées curvilignes orthogonales conduit aux expressions

$$\frac{1}{g_j} \frac{\partial \psi}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (I.70)$$

pour les projections de $\text{grad } \psi$ dans le trièdre local. On a en particulier pour les coordonnées sphériques

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad (I.71)$$

12. L'opérateur "dérivation particulière".

Appelons grandeur intensive toute grandeur qui peut être définie en un point du milieu continu (composante de vitesse, d'accélération, pression, température, masse volumique, entropie spécifique, ...).

En description lagrangienne le champ d'une telle grandeur

$$F(a_1, t)$$

permet un calcul facile de sa variation dans le temps quand on la considère comme liée aux particules. Dans ce cas les coordonnées (a_1) sont maintenues fixes et la variation dans le temps ou "dérivée particulaire" s'exprime par

$$\frac{\partial F(a_1, t)}{\partial t}$$

Quand le même champ est utilisé en description eulérienne

$$F(A_1(x_j, t), t) = f(x_j, t)$$

la dérivation particulaire doit tenir compte des variations temporelles dans les coordonnées cartésiennes de la particule :

$$\begin{aligned} \frac{Df}{Dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad } f \end{aligned} \quad (\text{I.72})$$

Le second terme représente l'effet de la convection de la grandeur par l'écoulement. De plus la forme vectorielle

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad}$$

de l'opérateur dérivation particulaire permet, grâce à la définition intrinsèque du gradient, de l'utiliser en coordonnées curvilignes. L'identité

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{Df}{Dt} \quad (\text{I.73})$$

est utile à retenir pour la transformation des lois exprimées en représentation lagrangienne aux mêmes lois en description eulérienne et réciproquement.

L'opération de dérivation particulaire peut aussi être appliquée à la grandeur extensive fondamentale : l'élément de volume. Si l'élément de volume $d\tau$ est considéré comme lié à l'ensemble de particules qui le constitue à une époque donnée on a, par la définition même de la vitesse de dilatation cubique

$$\frac{1}{d\tau} \frac{D}{Dt} (d\tau) = \text{div } \vec{u} \quad (\text{I.74})$$

Le même résultat se retrouve en considérant l'élément de volume en coordonnées de Lagrange. Le volume occupé à une époque déterminée par l'ensemble des particules dont les coordonnées de Lagrange sont comprises entre les valeurs a_1 et $a_1 + da_1$ a pour valeur

$$d\tau = J da_1 da_2 da_3 \quad (\text{I.75})$$

où J est le (déterminant) jacobien

$$J = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial a_1} & \frac{\partial X_1}{\partial a_2} & \frac{\partial X_1}{\partial a_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial a_1} & \frac{\partial X_2}{\partial a_2} & \frac{\partial X_2}{\partial a_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial a_1} & \frac{\partial X_3}{\partial a_2} & \frac{\partial X_3}{\partial a_3} \end{vmatrix} \quad (I.76)$$

construit à partir des expressions (I.5). On aura pour la variation temporelle du volume de cet ensemble de particules

$$\frac{D}{Dt} (d\tau) = \frac{\partial J}{\partial t} da_1 da_2 da_3 \quad (I.77)$$

Le développement de la dérivée du déterminant fournit l'expression

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial^2 X_1}{\partial t \partial a_1} \frac{D(x_2, x_3)}{D(a_2, a_3)} + \dots$$

dont les 9 termes comportent les combinaisons des permutations cycliques des indices au numérateur et au dénominateur. Transformons alors le premier facteur de chaque terme suivant le modèle

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial t \partial a_1} = \frac{\partial U_1}{\partial a_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial X_1}{\partial a_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial X_2}{\partial a_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial X_3}{\partial a_1}$$

et regroupons les 27 termes trois par trois en mettant les dérivées du type $\partial u_i / \partial x_m$ en évidence :

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \sum_i \sum_m \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \left\{ \sum_p \frac{\partial X_m}{\partial a_p} \frac{D(x_j, x_k)}{D(a_q, a_r)} \right\}$$

Dans cette expression (i, j, k) et (p, q, r) sont des permutations cycliques des indices $(1, 2, 3)$. Or

$$\sum_p \frac{\partial X_m}{\partial a_p} \frac{D(x_j, x_k)}{D(a_q, a_r)} = J \quad \text{si } m = i$$

$$= 0 \quad \text{si } m \neq i$$

car dans le premier cas il s'agit du produit des éléments d'une ligne de J par ses mineurs, dans le second du produit des éléments d'une ligne par les mineurs d'une autre ligne.

Dès lors

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = J \operatorname{div} \vec{u} \quad (I.78)$$

et, substitué dans (I.77), le résultat est identique à (I.74).

Appliquons finalement l'opérateur "dérivation particulaire" à une grandeur intensive générale.

$$I = \iiint_D f d\tau$$

Il faut donc imaginer que la surface S délimitant le volume est entraînée avec le mouvement des particules. Formellement

$$\frac{DI}{Dt} = \iiint_D \frac{D}{Dt} (f d\tau) = \iiint_D \frac{Df}{Dt} d\tau + f \frac{D}{Dt} (d\tau)$$

Utilisant les formules (I.72) et (I.74)

$$\frac{DI}{Dt} = \iiint_D \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad} f + f \text{div} \vec{u} \right) d\tau \quad \text{ou}$$

$$\frac{DI}{Dt} = \iiint_D \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \text{div} (f \vec{u}) \right\} d\tau \quad (I.79)$$

Finalement, par application de la formule d'Ostrogradski,

$$\frac{DI}{Dt} = \iiint_D \frac{\partial f}{\partial t} d\tau + \iint_S f (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS \quad (I.80)$$

Ce dernier résultat peut d'ailleurs être établi par un raisonnement direct. Les grands théorèmes de la mécanique sont énoncés pour les systèmes fermés, c'est-à-dire constitués toujours des mêmes particules. Il n'est donc pas étonnant que pour leur expression dans un milieu fluide la dérivation particulaire joue un rôle primordial. La forme (I.79) est alors bien adaptée à la formulation locale de ces lois, c'est-à-dire à une formulation relative à l'unité de volume. Par contre la forme (I.80) est intéressante pour obtenir une formulation intégrale, particulièrement lorsque le champ des grandeurs en jeu est permanent. Les lois relatives aux systèmes "ouverts", qui échangent des particules avec l'environnement, peuvent s'obtenir en considérant la vitesse \vec{w} des points de la surface S qui définit à chaque instant la collection des particules qui font partie du système. Si I appartient à un système ouvert, sa dérivée temporelle sera

$$\frac{dI}{dt} = \iiint_D \frac{\partial f}{\partial t} d\tau + \iint_S f (\vec{w} \cdot \vec{n}) dS$$

et la relation entre cette dérivée et la dérivée particulaire du système fermé coïncidant à cette époque avec le système ouvert est, par différence

$$\frac{DI}{Dt} = \frac{dI}{dt} + \iint_S f (\vec{u} - \vec{w}) \cdot \vec{n} dS \quad (I.81)$$

13. La formule de Lagrange pour l'accélération d'une particule.

Si le champ des vitesses est donné en représentation eulérienne l'expression de l'accélération

$$\vec{j} = \frac{D\vec{u}}{Dt} \quad (I.82)$$

n'offre pas de difficultés en coordonnées cartésiennes. Chaque composante est justiciable de la formule (I.72)

$$j_i = \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad } u_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (I.83)$$

En coordonnées curvilignes l'opération

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u}$$

prête à confusion car l'opérateur gradient n'a reçu de définition intrinsèque que dans son application à un scalaire. Par contre la formule de Lagrange

$$\vec{j} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \text{grad } \frac{v^2}{2} + \text{rot } \vec{u} \times \vec{u} \quad (I.84)$$

où $v^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$ (I.85)

dont l'identité en coordonnées cartésiennes avec les formules (I.83) est facile à vérifier, s'applique aussi sans ambiguïté en coordonnées curvilignes. En coordonnées sphériques par exemple

$$j_r = \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (u_r^2 + u_\theta^2 + u_\psi^2) + \frac{u_\psi}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \psi} - \frac{\partial (r \sin \theta u_\psi)}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r} \left(\frac{\partial (ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)$$

$$j_\theta = \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r^2 + u_\theta^2 + u_\psi^2) + \frac{u_r}{r} \left(\frac{\partial (ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) - \frac{u_\psi}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (\sin \theta u_\psi)}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \psi} \right)$$

$$j_\psi = \frac{\partial u_\psi}{\partial t} + \frac{1}{2r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} (u_r^2 + u_\theta^2 + u_\psi^2) + \frac{u_\theta}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (\sin \theta u_\psi)}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \psi} \right) - \frac{u_r}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \psi} - \frac{\partial (r \sin \theta u_\psi)}{\partial r} \right)$$

Soit, après simplification,

$$\begin{aligned}
 j_r &= \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_\theta^2 + u_\psi^2}{r} + \frac{u_\psi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \psi} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \\
 j_\theta &= \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \frac{\partial (ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\cot \theta}{r} u_\psi^2 + \frac{u_\psi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \psi} \\
 j_\psi &= \frac{\partial u_\psi}{\partial t} + \frac{u_\psi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\psi}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} u_\theta u_\psi + \frac{u_r}{r} \frac{\partial (ru_\psi)}{\partial r}
 \end{aligned} \tag{I.86}$$

14. La circulation de l'accélération; formule de Beltrami.

$$\text{Soit} \quad C = \oint_c \vec{u} \cdot \vec{t} \, ds$$

la circulation de la vitesse sur un contour fermé c à une époque déterminée. Cherchons à évaluer la dérivée particulière de cette grandeur, ce qui suppose le contour lié aux particules et entraîné avec leur mouvement

$$\frac{DC}{Dt} = \oint_c \frac{D\vec{u}}{Dt} \cdot \vec{t} \, ds + \vec{u} \cdot \frac{D}{Dt} (\vec{t} \, ds)$$

Soient \vec{r}_1 et \vec{r}_2 les vecteurs de position par rapport à un point fixe de deux points voisins P_1 et P_2 sur le contour, de sorte que

$$\vec{t} \, ds = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\text{Alors} \quad \frac{D}{Dt} (\vec{t} \, ds) = \frac{D\vec{r}_2}{Dt} - \frac{D\vec{r}_1}{Dt} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1 = d\vec{u}$$

l'accroissement de vitesse quand on passe de P_1 à P_2 .

$$\oint_c \vec{u} \cdot d\vec{u} = \oint_c d \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} = \oint_c d \frac{v^2}{2}$$

et cette contribution est nulle si le contour ne traverse pas une nappe de discontinuité de la vitesse. On trouve la formule de Beltrami

$$\frac{DC}{Dt} = \oint_c \vec{j} \cdot \vec{t} \, ds \tag{I.87}$$

où le second membre représente la circulation de l'accélération. Comme C est aussi l'intensité du tube tourbillon qui s'appuierait sur le contour c la formule est importante pour l'évaluation des changements d'intensité du tube. Les équations de la dynamique des fluides permettront plus tard de fixer les conditions dans lesquelles cette intensité demeure constante.

II. Lois de Conservation.

I. Conservation de la masse.

Soit ρ la masse volumique, grandeur intensive définie en tout point du milieu continu. La masse d'une particule est alors donnée par le produit $\rho d\tau$. En représentation lagrangienne cette masse sera $\rho(a_i, t) J da_1 da_2 da_3$ et la conservation de la masse pourra s'exprimer par la relation

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \rho(a_i, t) J \} = 0 \quad (2.1)$$

En représentation eulérienne cette loi de conservation sera

$$\frac{D}{Dt} (\rho d\tau) = 0 \quad (2.2)$$

Soit, en développant et faisant usage de (I.74)

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (2.3)$$

Encore, en développant la dérivée particulaire selon (I.72)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.4)$$

Quand on peut négliger, comme on le fait en hydrodynamique, la compressibilité du fluide et considérer ρ comme une constante, la conservation de la masse se réduit à la conservation du volume :

$$\frac{\partial J}{\partial t} = 0 \quad (2.5)$$

pour la représentation lagrangienne

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (2.6)$$

pour le cas de la représentation eulérienne.

Les formes précédentes exprimant la conservation de la masse sont du type local; pour certaines applications, particulièrement pour les champs de masse volumique permanents, la forme intégrale est plus intéressante. Appliquant la formule générale (I.80) à la conservation de la masse totale d'une collectivité enfermée à l'époque considérée dans un volume D limité par une surface S

$$\frac{D}{Dt} \iiint_D \rho d\tau = \iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \iint_S \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = 0 \quad (2.7)$$

Ainsi pour un écoulement permanent dans une conduite ou dans un tube de courant

$$\iint_S \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = 0$$

Par définition $(\vec{u} \cdot \vec{n}) = 0$ sur la surface latérale du tube et il ne faut tenir compte des flux qu'à travers les sections terminales A_1 de normale extérieure $\vec{n} = -\vec{h}_1$ et A_2 de normale extérieure $\vec{n} = \vec{h}_2$, de sorte que

$$\iint_{A_1} \rho (\vec{u} \cdot \vec{h}_1) dS = \iint_{A_2} \rho (\vec{u} \cdot \vec{h}_2) dS \quad (2.8)$$

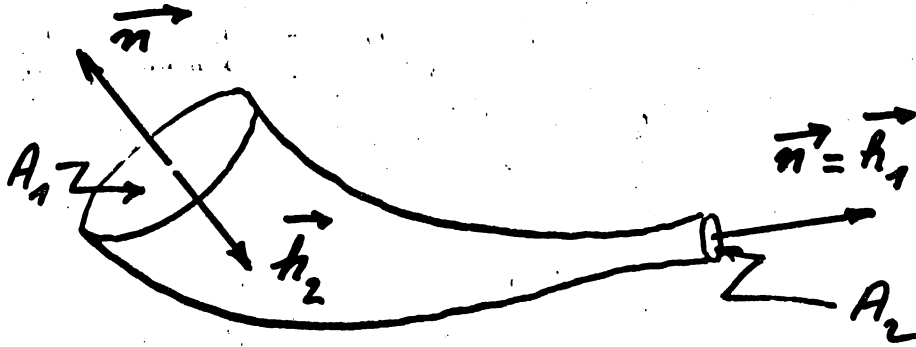


Fig. 2.I.

Ceci revient à évaluer les débits massiques dans un même sens de parcours à travers deux sections du tube. Pour un filet fluide dont les sections infinitésimales dA_1 et dA_2 sont perpendiculaires au vecteur vitesse local, cette loi de conservation en mouvement permanent devient

$$\rho_1 V_1 dA_1 = \rho_2 V_2 dA_2 \quad (2.9)$$

où V désigne le module du vecteur vitesse.

2. Conservation de la quantité de mouvement.

La quantité de mouvement d'une particule est le vecteur

$$d\vec{Q} = \rho \vec{u} d\tau$$

Le théorème fondamental de la mécanique, appliqué à une collectivité de particules, peut s'écrire

$$\frac{D}{Dt} \iiint_D \rho \vec{u} d\tau = \iint_S \vec{\tau}_n dS + \iiint_D \rho \vec{g} d\tau \quad (2.10)$$

Au second membre, le premier terme est la somme vectorielle des forces $\vec{\tau}_n dS$ exercées sur chaque élément de la surface, limitant la collectivité à l'époque considérée, par les particules extérieures. Le second terme est la somme vectorielle des forces de masse éventuellement exercées sur les particules de la collectivité. Le vecteur \vec{g} est homogène à une accélération; c'est généralement l'accélération d'un champ de gravitation.

Pour déduire de (2.10) une forme locale des équations du mouvement, il y a lieu de mettre tous les termes, comme le dernier, sous la forme d'une intégrale de volume ce qui permettrait d'écrire le théorème pour l'unité de volume. La transformation du premier membre est directe, il suffit d'observer que

$$\frac{D}{Dt} \iiint_D \rho \vec{u} d\tau = \iiint_D \frac{D}{Dt} (\vec{u} \rho d\tau) = \iiint_D \frac{D\vec{u}}{Dt} \rho d\tau \quad (2.11)$$

puisque, en vertu du principe de conservation de la masse sous sa forme (2.2) la plus élémentaire, $\rho d\tau$ se comporte comme une constante vis-à-vis de la dérivation particulaire. En vue de transformer le premier terme au second membre, exprimons la tension $\vec{\tau}_n$ sur l'élément de surface en fonction des tensions τ_{ij} sur des facettes parallèles à un trièdre de référence.

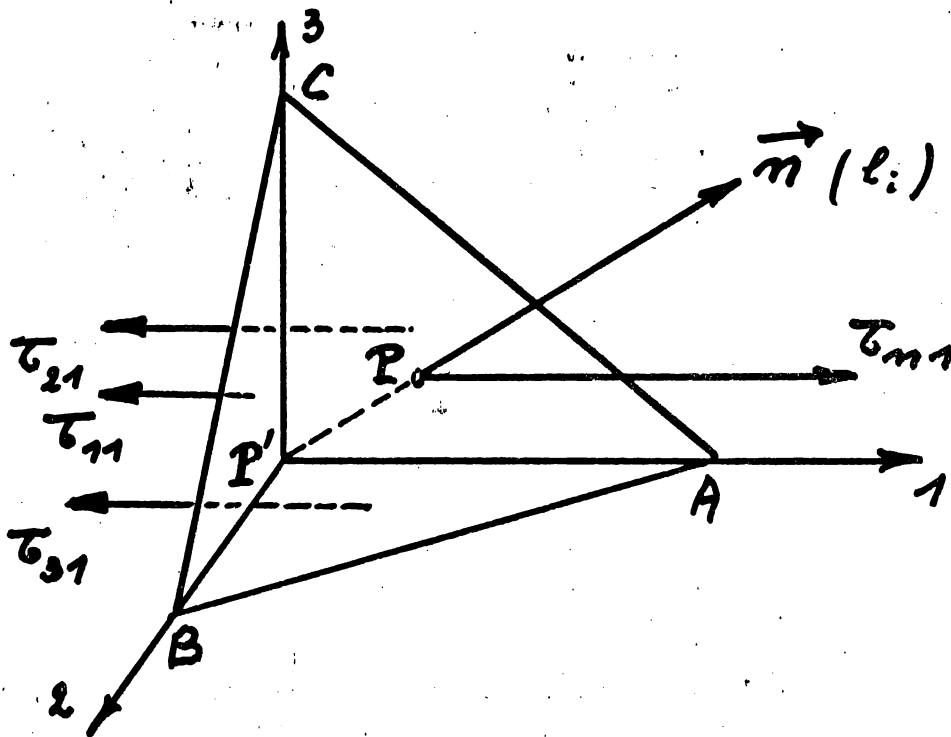


Fig. 2.2.

Il suffit pour cela d'exprimer en un point P de la surface S l'équilibre d'un tétraèdre élémentaire constitué d'un élément triangulaire dS de la surface et de trois facettes élémentaires dS_1 , dS_2 , dS_3 respectivement perpendiculaires aux directions de référence 1, 2 et 3. Si dh désigne la distance de P' à la facette oblique et (l_j) les cosinus directeurs de la normale extérieure à celle-ci :

$$dS = \frac{1}{2} \frac{(dh)^2}{l_1 l_2 l_3}$$

$$dS_j = l_j dS \quad j = (1, 2, 3) \quad (2.12)$$

et le volume du tétraèdre

$$d\tau = \frac{1}{6} \frac{(dh)^3}{l_1 l_2 l_3}$$

Par conséquent les forces proportionnelles au volume du tétraèdre, comme les forces de gravitation et les forces d'inertie, sont des infiniments petits d'un ordre supérieur en dh aux forces proportionnelles aux surfaces; on peut se contenter de l'équilibre statique de l'élément sous l'effet des tensions. Désignant par τ_{ni} la composante selon la direction i de la tension $\vec{\tau}_n$ et par τ_{ji} cette même composante pour la tension $\vec{\tau}_j$ sur une facette de normale extérieure orientée selon la direction j , l'équilibre statique implique

$$\tau_{ni} dS = \sum_j \tau_{ji} dS_j \quad i = 1, 2, 3$$

soit, eu égard à (2.12)

$$\tau_{ni} = \sum_j l_j \tau_{ji} \quad (2.13)$$

Ces formules définissent aussi sans ambiguïté les cas limites où certains des cosinus directeurs de l'élément de surface seraient nuls. Prenons maintenant le cas le plus simple où l'écoulement est analysé en coordonnées cartésiennes; le trièdre de référence local est parallèle au trièdre de référence général. Le théorème (2.10) est équivalent aux trois relations scalaires

$$\iiint_D \rho \frac{Du_i}{Dt} d\tau = \iint_S \tau_{ni} dS + \iiint_D \rho g_i d\tau \quad (i = 1, 2, 3)$$

On a fait usage de (2.11), introduisons encore (2.13) au second membre et appliquons le théorème de Gauss-Green

$$\iint_S \left(\sum_j l_j \tau_{ji} \right) dS = \iiint_D \left(\sum_j \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \right) d\tau$$

Tous les termes sont ramenés à des intégrales de volume. Le théorème de la quantité de mouvement pour l'unité de volume s'écrit

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \sum_j \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (i = 1, 2, 3) \text{ (cartésiennes)} \quad (2.14)$$

L'ensemble des éléments τ_{ji} forme un tenseur cartésien du second ordre

$$T = \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix} \quad (2.15)$$

Une forme équivalente à (2.14) s'obtient en développant les dérivées particulières au premier membre

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, 3)$$

et en combinant ces formules avec les expressions déduites de la conservation de la masse selon (2.4)

$$0 = u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j)$$

Il vient ainsi par addition

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) \quad (2.16)$$

et la forme équivalente du théorème local de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j - \tau_{ji}) = \rho g_i \quad (i = 1, 2, 3) \text{ (cartésiennes)} \quad (2.17)$$

Elle fait apparaître un nouveau tenseur cartésien du second ordre, le tenseur impulsion-énergie

$$Q = \begin{vmatrix} \rho u_1^2 & \rho u_1 u_2 & \rho u_1 u_3 \\ \rho u_2 u_1 & \rho u_2^2 & \rho u_2 u_3 \\ \rho u_3 u_1 & \rho u_3 u_2 & \rho u_3^2 \end{vmatrix} \quad (2.18)$$

Il est visiblement symétrique et nous reconnâtrons bientôt la même qualité au tenseur des tensions. Son premier invariant est égal au double de l'énergie cinétique par unité de volume, second et troisième invariants sont nuls. La forme (2.17) apparaît immédiatement quand les composantes cartésiennes du premier membre de (2.11) sont transformées par la formule générale (1.80)

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \iiint_D \rho u_i d\tau &= \iiint_D \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) d\tau + \iint_S \rho u_i (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS \\ &= \iiint_D \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) d\tau + \iint_S \left(\sum_j \rho_j u_i u_j \right) dS \end{aligned}$$

Il suffit de ramener le dernier terme à une intégrale de volume par le théorème de Gauss-Green. Si au contraire nous conservons les intégrales de surface pour ce terme et pour l'effet des tensions, nous obtenons la forme intégrale du théorème

$$\iiint_D \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) - \rho g_i \right) d\tau + \iint_S \sum_j l_j (\rho u_i u_j - \tau_{ji}) dS = 0$$

$$(i = 1, 2, 3) \text{ (cartésiennes)} \quad (2.19)$$

Elle est particulièrement intéressante quand le mouvement est permanent et les forces de masse négligeables car elle se réduit à un calcul de flux de quantité de mouvement et de somme vectorielle de tensions sur la surface limite. Dans ces conditions, appliquée à un tube de courant, elle donne

$$-F_i + \iint_{A_1+A_2} \sum_j l_j (\rho u_i u_j - \tau_{ji}) dS = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

Les F_i sont les composantes de la force totale exercées par les tensions sur la paroi latérale du tube, qui n'est pas traversée par un flux de quantité de mouvement; A_1 et A_2 sont les sections terminales (fig. 2.1.). Si le tube est matérialisé par une conduite on a ainsi le moyen de calculer la réaction ($-F_i$) exercée par l'écoulement permanent sur la conduite. Pour un tube de courant élémentaire, dont les sections terminales sont perpendiculaires au vecteur vitesse, on trouve en assimilant le tenseur des tensions à une pression isotrope ($\tau_{ij} = -p$)

$$d\vec{F} = (p_2 + \rho_2 v_2^2) \vec{h}_2 dA_2 - (p_1 + \rho_1 v_1^2) \vec{h}_1 dA_1 \quad (2.20)$$

L'expression du théorème de la quantité de mouvement en coordonnées curvilignes orthogonales est rejetée en Appendice.

3. Conservation du moment de la quantité de mouvement.

Si \vec{r} est le vecteur de position d'une particule par rapport à une origine fixe, le théorème du moment de la quantité de mouvement appliqué à une collectivité s'écrit

$$\frac{D}{Dt} \iiint_D \rho \vec{u} \times \vec{r} d\tau = \iint_S \vec{r}_n \times \vec{T} dS + \iiint_D \rho \vec{g} \times \vec{r} d\tau \quad (2.21)$$

Eu égard à (2.2) le premier membre se laisse transformer comme suit

$$\iiint_D \rho \frac{D\vec{r}}{Dt} (\vec{u} \times \vec{r}) d\tau = \iiint_D \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} \times \vec{r} d\tau + \iiint_D \rho \vec{u} \times \frac{D\vec{r}}{Dt} d\tau$$

et le dernier terme est nul du fait que

$$\vec{u} \times \frac{D\vec{r}}{Dt} = \vec{u} \times \vec{u} = 0$$

On a donc pour la première composante cartésienne de (2.21)

$$\iiint_D \rho \left(x_3 \frac{Du_2}{Dt} - x_2 \frac{Du_3}{Dt} \right) d\tau = \iint_S (\tau_{n2} x_3 - \tau_{n3} x_2) dS + \iiint_D \rho (x_3 g_2 - x_2 g_3) d\tau$$

L'intégrale de surface se transforme à l'aide de (2.13) et du théorème de Gauss en

$$\iint_S \sum_j \tau_j (x_3 \tau_{j2} - x_2 \tau_{j3}) dS = \iiint_D \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (x_3 \tau_{j2} - x_2 \tau_{j3}) d\tau$$

livrant une forme locale valable en coordonnées cartésiennes

$$\rho x_3 \left(\frac{Du_2}{Dt} - g_2 \right) - \rho x_2 \left(\frac{Du_3}{Dt} - g_3 \right) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (x_3 \tau_{j2} - x_2 \tau_{j3})$$

Si nous développons encore le dernier membre et regroupons les termes

$$\begin{aligned} x_3 \left(\rho \frac{Du_2}{Dt} - \rho g_2 - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{j2} \right) - x_2 \left(\rho \frac{Du_3}{Dt} - \rho g_3 - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{j3} \right) \\ = \tau_{32} - \tau_{23} \end{aligned}$$

Chaque parenthèse du premier membre est nulle en vertu du théorème de la quantité de mouvement, si bien que la forme locale du théorème du moment se ramène, compte tenu du calcul similaire pour les deux autres composantes, à l'expression

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (2.22)$$

de la symétrie du tenseur des tensions. Ce résultat s'obtiendrait bien entendu de façon plus directe en exprimant l'équilibre de rotation d'un parallélépipède élémentaire sous l'effet des couples dûs aux tensions.

La forme intégrale du théorème est plus intéressante. Elle s'obtient en modifiant chaque composante du premier membre de (2.21) telle que

$$\frac{D}{Dt} \iiint_D \rho (u_2 x_3 - u_3 x_2) d\tau$$

à l'aide de la formule générale (I.80).

L'ensemble peut être mis sous une forme vectorielle facile à interpréter en coordonnées cartésiennes

$$\iiint_D \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{r} \times \vec{u}) d\tau + \iint_S \rho (\vec{r} \times \vec{u}) (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS =$$

$$\iint_S \vec{r} \times \vec{\tau}_n dS + \iiint_D \rho \vec{r} \times \vec{g} d\tau \quad (2.23)$$

Dans le cas où les intégrales de volume disparaissent ce théorème peut être commode pour le calcul du moment des forces exercées par le fluide sur des parois.

4. Bilan énergétique déduit de la quantité de mouvement.

Formons le produit scalaire avec le vecteur vitesse des équations du mouvement (2.14), il vient

$$\rho \sum_i u_i \frac{Du_i}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} \frac{v^2}{2} = P_m + \rho \sum_i u_i g_i \quad (2.24)$$

$$\text{où } P_m = \sum_i \sum_j u_i \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \quad (2.25)$$

C'est un bilan des puissances développées par les différentes forces. En particulier P_m est la puissance mécanique développée par les tensions sur l'unité de volume.

Quand on lui ajoute la puissance développée par les forces massiques on peut calculer le taux d'accroissement de l'énergie cinétique. Si, comme c'est usuellement le cas, l'accélération \vec{g} dépend d'un potentiel Ω

$$\vec{g} = - \text{grad } \Omega \quad (2.26)$$

$$\sum_i u_i g_i = \vec{u} \cdot \vec{g} = - \vec{u} \cdot \text{grad } \Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial t} - \frac{D\Omega}{Dt}$$

et le bilan énergétique prend la forme

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} + \Omega \right) = P_m + \rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} \quad (2.27)$$

Le potentiel ne dépend généralement pas explicitement du temps. La puissance mécanique développée par les tensions sur l'unité de masse (P_m/ρ) est alors retrouvée sous forme d'un taux d'accroissement de l'énergie mécanique totale, cinétique et potentielle, de cette unité de masse.

5. Conservation de l'énergie.

P_m n'est qu'une partie de la puissance développée par les tensions sur l'unité de volume. La puissance totale développée peut être évaluée en examinant d'abord son expression P_S pour une collectivité contenue dans une surface fermée S :

$$P_S = \iint_S \sum_j \rho_j \left(\sum_i u_i \tau_{ji} \right) dS \quad (2.28)$$

Appliquant le théorème de Green à cette expression valable en coordonnées cartésiennes :

$$P_S = \iiint_D \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i u_i \tau_{ji} \right) d\tau$$

on obtient pour l'unité de volume la puissance totale

$$P_t = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i u_i \tau_{ji} \right) \quad (2.29)$$

Elle se scinde en deux parties, l'une correspondant à la puissance mécanique comme si les vitesses restaient constantes (2.25), l'autre tenant compte de la variabilité du champ des vitesses et que nous appelons la puissance thermodynamique P_θ pour une raison qui apparaîtra par la suite

$$P_t = P_m + P_\theta \quad (2.30)$$

$$P_\theta = \sum_i \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tau_{ji} = \sum_i \sum_j \tau_{ji} \theta_{ji} \quad (2.31)$$

Dans sa dernière expression qui fait intervenir les éléments (I.21) il est clair que P_θ est associée à la vitesse de déformation des particules.

Le théorème de conservation de l'énergie exprime que le taux d'accroissement temporel de l'énergie cinétique d'une collectivité de particules est égal à la puissance développée par les forces intérieures et extérieures. Le taux d'accroissement de l'énergie cinétique peut s'écrire

$$\frac{D}{Dt} \iiint_D \rho \frac{v^2}{2} d\tau$$

La puissance développée par les forces intérieures est, par définition, ramenée à un taux de décroissance d'une énergie interne. Si U désigne l'énergie interne par unité de masse, cette puissance sera

$$- \frac{D}{Dt} \iiint_D \rho U d\tau$$

La puissance développée par les forces extérieures comporte non seulement P_S , dont la valeur vient d'être exprimée en (2.28), mais aussi la puissance due aux forces massiques

$$\iiint_D \rho \vec{u} \cdot \vec{g} \, d\tau$$

et enfin la quantité de chaleur pénétrant par unité de temps

$$- \iint_S \vec{q} \cdot \vec{n} \, dS$$

Le vecteur d'action calorifique \vec{q} a donc les dimensions d'un travail par unité de temps et de surface (ergs par cm^2sec par exemple), son flux est considéré comme positif si la chaleur est cédée par la collectivité vers l'extérieur. Le théorème de conservation de l'énergie s'écrit donc

$$\frac{D}{Dt} \iiint_D \rho \frac{v^2}{2} \, d\tau = - \frac{D}{Dt} \iiint_D \rho U \, d\tau + P_S + \iiint_D \rho \vec{u} \cdot \vec{g} \, d\tau - \iint_S (\vec{q} \cdot \vec{n}) \, dS \quad (2.32)$$

Tenant compte par (2.2) de la conservation de la masse et ramenant tous les termes à des intégrales de volume, il vient la forme locale

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(U + \frac{v^2}{2} \right) = P_t + \rho \sum_1 u_1 g_1 - \text{div } \vec{q}$$

Elle se simplifie notablement par soustraction du bilan mécanique (2.24); au égard à (2.30) il reste

$$\rho \frac{DU}{Dt} = P_\theta - \text{div } \vec{q} \quad (2.33)$$

C'est l'expression du premier principe de la thermodynamique pour une particule en mouvement.

6. Equilibre thermodynamique local. Taux d'accroissement d'entropie d'une particule.

Pour poursuivre l'étude nous admettrons qu'à l'échelle microscopique, à tout endroit et à toute époque, l'équilibre thermodynamique est réalisé. Dans la fiction du milieu continu ce postulat signifie qu'en chaque point, à chaque époque, l'énergie interne spécifique U est une fonction d'état de deux autres grandeurs spécifiques (par unité de masse) : le volume spécifique, ou son inverse ρ , et l'entropie spécifique S . A partir de cette fonction d'état on peut alors définir au même point et à la même époque : une température absolue

$$T = \frac{\partial}{\partial S} U(\rho, S) \quad (2.34)$$

et une pression thermodynamique

$$p = \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} U(\rho, S) \quad (2.35)$$

Notons que si l'entropie spécifique est éliminée entre les deux fonctions $T(\rho, S)$ et $p(\rho, S)$ qui en résultent, on obtient l'équation d'état du fluide $f(p, \rho, T) = 0$.

Comme les grandeurs qui viennent d'être introduites peuvent être différentes d'un point à l'autre et d'une époque à l'autre, il n'y a pas d'équilibre thermodynamique à l'échelle macroscopique. En fait le postulat permet une étude des phénomènes thermodynamiques irréversibles à cette échelle macroscopique. Nous ne considérons que des fluides homogènes, c'est-à-dire tels que la fonction d'état $U(\rho, S)$ soit identique pour chaque particule. Ceci élimine de nos considérations les phénomènes de diffusion mais permet, en vertu des définitions (2.34) et (2.35), d'écrire pour tout type d'accroissement des variables

$$dU = \frac{p}{\rho^2} d\rho + T dS \quad (2.36)$$

En particulier

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + T \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$\text{grad } U = \frac{p}{\rho^2} \text{grad } \rho + T \text{grad } S$$

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} + T \frac{DS}{Dt}$$

Cette dernière relation permet d'éliminer l'énergie interne dans le premier principe (2.33) qui prend la forme

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = P_\theta = \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} - \text{div } \vec{q}$$

On peut encore grouper les deux premiers termes au second membre en se servant de l'équation (2.3) de conservation de la masse et de (I.43)

$$P_\theta - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = P_\theta + p \text{div } \vec{u} = P_\theta + p \sum_i \theta_{ij}$$

Ceci suggère en se rapportant à (2.31) de définir de nouvelles tensions

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} + p \delta_{ij} \quad (2.37)$$

Ce sont les tensions de viscosité. Il vient alors pour la nouvelle forme de l'équation de l'énergie

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = 2F - \text{div } \vec{q} \quad (2.38)$$

$$\text{avec} \quad 2F = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \theta_{ij} \quad (2.39)$$

Par analogie avec le second terme, $2F$ peut être considéré comme une quantité de chaleur produite par unité de volume et de temps par frottement interne.

7. Taux de production locale d'entropie. Loi de Fourier.

Transformons la formule (2.38) comme suit :

$$\rho \frac{DS}{Dt} = \frac{2F}{T} - \frac{\text{div } \vec{q}}{T} = \frac{2F}{T} - \text{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) + \vec{q} \cdot \text{grad} \frac{1}{T}$$

et intégrons sur une collectivité; il vient

$$\frac{D}{Dt} \iiint_D \rho S d\tau = - \iint_S \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} dS + \iiint_D r d\tau \quad (2.40)$$

$$\text{où} \quad r = \frac{2F}{T} + \vec{q} \cdot \text{grad} \frac{1}{T} \quad (2.41)$$

Si r était nul, la formule (2.40) représenterait la variation d'entropie de la collectivité selon le calcul applicable à une succession d'états d'équilibre, où chaque quantité de chaleur est divisée par la température à laquelle elle est reçue. Le second terme de (2.40) représente par conséquent la variation d'entropie provenant du déséquilibre thermodynamique à l'échelle macroscopique. La grandeur r , définie par (2.41), est un taux de production locale d'entropie par unité de volume. Pour satisfaire au second principe de la thermodynamique il faut que $r \geq 0$, l'égalité à zéro ne pouvant avoir lieu que si l'équilibre global est réalisé soit : température uniforme ($\text{grad } T = 0$) et disparition des vitesses de déformation des particules (champ des vitesses correspondant à celui d'un corps rigide). La loi de Fourier

$$\vec{q} = -k \text{ grad } T \quad (2.42)$$

où k est le coefficient de conductibilité thermique (ergs par cm sec et degré) qui est généralement lui-même une fonction d'état, par exemple une fonction de la température et de la pression, nous donne déjà

$$r = \frac{2F}{T} + \frac{k}{T^2} (\text{grad } T \cdot \text{grad } T)$$

et le second terme est positif et ne s'annule que par disparition du gradient de température.

Si le premier terme devient une forme définie positive dans les éléments du tenseur des vitesses de déformation, nulle quand et seulement quand ce tenseur s'annule, le second principe sera satisfait. L'hypothèse la plus simple à cet effet est celle du fluide Newtonien.

8. Relations entre tensions de viscosité et vitesses de déformation.

Fluide Newtonien.

Des tensions de viscosité, fonctions linéaires et homogènes des vitesses de déformation, ont la propriété requise par l'intuition de changer de sens avec les vitesses de déformation et de s'annuler avec elles. Il est possible cependant, qu'en postulant cette propriété de linéarité qui caractérise un fluide Newtonien, on obtienne seulement une approximation satisfaisante pour les vitesses de déformation faibles.

La fonction F devient alors quadratique homogène dans les éléments du tenseur θ . Pour un fluide dont les propriétés sont isotropes, la structure de F doit être indépendante de l'orientation particulière du repère local. F doit donc pouvoir s'exprimer à partir des invariants fondamentaux de θ . La fonction quadratique homogène (et entière) la plus générale qui réponde à ces préoccupations est

$$F = \frac{1}{2} \lambda \theta_1^2 - 2 \mu \hat{\theta}_2 \quad (2.43)$$

Si λ et μ sont positifs elle est bien définie positive puisque, selon (I.46), $-\hat{\theta}_2$ a cette propriété. En vertu du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes on peut alors écrire

$$2F = \sum_i \theta_{ii} \frac{\partial F}{\partial \theta_{ii}} + \sum_{i \neq j} \theta_{ij} \frac{\partial F}{\partial \theta_{ij}}$$

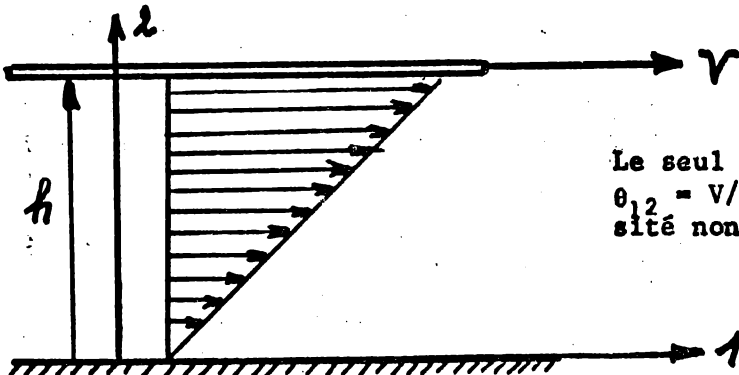
Cette expression utilise la symétrie du tenseur θ en vertu de laquelle la fonction F ne dépend en réalité que de six arguments. Son identification avec la forme (2.38) fournit alors pour les tensions de viscosité, les expressions

$$\sigma_{ii} = \frac{\partial F}{\partial \theta_{ii}} \quad 2 \sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \theta_{ij}} \quad (2.44)$$

Le calcul effectué à partir de (2.43), (I.40) et (I.46) donne finalement

$$\sigma_{ij} = 2 \mu \theta_{ij} + \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \theta_1 \delta_{ij} \quad (2.45)$$

Si le fluide est incompressible ($\theta_1 = 0$), le seul coefficient de viscosité qui se manifeste est le coefficient de viscosité tangentielle μ (gr par cm sec). Sa définition usuelle est introduite dans le cas particulier simple d'un écoulement en couches parallèles : $u_1 = V x_2/h$ $u_2 = u_3 = 0$.



Le seul élément non nul du tenseur θ est $\theta_{12} = V/(2h)$ et la seule tension de viscosité non nulle est alors $\sigma_{12} = \mu V/h$.

On peut imaginer cet écoulement réalisé entre une paroi plane inférieure fixe et une paroi supérieure en translation avec la vitesse V . Celle-ci subira par unité de surface une résistance à l'avancement σ_{12} proportionnelle au gradient transversal de vitesse, le coefficient de proportionnalité étant le coefficient de viscosité tangentielle. Il peut théoriquement dépendre de la pression et de la température. L'expérience montre qu'il est surtout sensible à la température; il augmente avec elle pour un gaz, diminue avec elle pour un liquide.

Le coefficient de viscosité en volume λ est une mesure de l'écart qui peut exister entre la pression thermodynamique et la pression hydrostatique

$$p_h = -\frac{1}{3} (\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) \text{ quand la particule change de volume.}$$

En effet, par (2.37) et (2.45)

$$p - p_h = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \lambda \theta_1 = \lambda \operatorname{div} \vec{u} \quad (2.46)$$

C'est un effet des forces de liaison intermoléculaires. L'hypothèse du fluide Newtonien est justifiée pour un gaz suffisamment éloigné de ses conditions de liquéfaction par la théorie cinétique. En toute première approximation, pour un modèle moléculaire idéalisé consistant en une sphère rigide-élastique de rayon r_0 et masse m , la théorie cinétique des gaz prévoit les valeurs

$$\mu = \frac{5}{16} \frac{m}{r_0^2} \left(\frac{RT}{\pi}\right)^{1/2} \quad \lambda = 0 \quad k = \frac{15}{4} R \mu$$

où R est la constante de l'équation d'état $p = R \rho T$.

Pour les gaz polyatomiques la relation entre coefficient de conductibilité thermique et viscosité tangentielle est meilleure quand on y incorpore la correction de EUCKEN qui tient compte en première approximation de l'excitation des degrés de liberté de rotation et de vibration de la molécule :

$$k = \left(c_v + \frac{9}{4} R\right) \mu \quad c_v \text{ chaleur spécifique à volume constant} \quad (2.47)$$

Observons finalement que l'hypothèse (2.43) peut, après manipulations, être mise sous la forme

$$2F = \left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right) (\operatorname{div} \vec{u})^2 + \mu (\operatorname{div} \operatorname{grad}(\vec{u} \cdot \vec{u}) + 2 \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} - \operatorname{rot} \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{u} - 2 \vec{u} \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u}) \quad (2.48)$$

qui permet son calcul en coordonnées curvilignes orthogonales. Elle met bien en évidence que, même pour un écoulement irrotationnel de fluide incompressible, il subsiste une dissipation due au gradient de l'énergie cinétique spécifique.

9. Forme intégrale de la conservation de l'énergie.

La forme intégrale de l'équation d'énergie est intimement liée au transport de l'énergie totale spécifique, parfois aussi appelée l'enthalpie spécifique totale

$$H = I + \frac{1}{2} v^2 + \Omega \quad (2.49)$$

où I dénote l'enthalpie spécifique thermodynamique

$$I = U + p/\rho \quad (2.50)$$

les forces massiques sont donc supposées dériver d'un potentiel Ω , selon (2.26) et le terme correspondant de (2.32) peut s'écrire

$$\iiint_D \rho \vec{u} \cdot \vec{g} \, d\tau = - \frac{D}{Dt} \iiint_D \rho \Omega \, d\tau + \iiint_D \rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} \, d\tau$$

Appliquons maintenant la formule générale (1.80), (2.32) se transforme en

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho U + \rho \Omega \right) d\tau + \iint_S \left\{ \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho U + \rho \Omega \right) (\vec{u} \cdot \vec{n}) + (\vec{q} \cdot \vec{n}) \right\} dS \\ = P_S + \iiint_D \rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} \, d\tau \end{aligned}$$

L'intégrale de surface donnée par (2.28) est encore transformée par (2.37) pour y faire apparaître les tensions de viscosité

$$P_S = P_\sigma - \iint_S p (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, dS \quad (2.51)$$

avec

$$P_\sigma = \iint_S \sum_j \ell_j \left(\sum_i u_i \sigma_{ji} \right) \, dS$$

Substituons dans cette expression de la puissance totale développée par les tensions de viscosité, ces dernières par leurs expressions (2.45)

$$\begin{aligned} \sum_j \ell_j \left(\sum_i u_i \sigma_{ji} \right) &= \mu \sum_j \ell_j \left\{ \sum_i u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} \\ &\quad + \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \theta_1 \sum_j \sum_i \ell_j u_i \delta_{ij} \\ &= \mu \sum_j \ell_j \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i u_i^2 \right) + \vec{u} \cdot \text{grad } u_j \right\} \\ &\quad + \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \theta_1 (\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{aligned}$$

Mais, par la formule de Lagrange pour l'accélération,

$$\ddot{u}_j = \text{grad } u_j = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} v^2 + (\text{rot } \vec{u} \times \vec{u})_j$$

et on trouve finalement, après ce calcul en coordonnées cartésiennes, une expression calculable plus généralement en coordonnées curvilignes

$$P_{\vec{\sigma}} = \iint_S \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \, dS \quad \text{avec}$$

$$\vec{\sigma} = \mu \text{ grad } v^2 + \mu \text{ rot } \vec{u} \times \vec{u} + \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu\right) \vec{u} \text{ div } \vec{u} \quad (2.52)$$

La substitution de (2.51), suivie d'un regroupement des termes, donne finalement la forme intégrale suivante pour la conservation de l'énergie

$$\iint_S (\rho H \vec{u} + \vec{q} - \vec{\sigma}) \cdot \vec{n} \, dS = - \iiint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho U \right) + \rho \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\} d\tau \quad (2.53)$$

Encore une fois, l'intégrale de volume au second membre disparaît dans le cas de champs stationnaires et la conservation de l'énergie se laisse contrôler uniquement par un flux à travers la surface instantanée limitant la collectivité. Le taux de fuite de l'enthalpie totale et de la chaleur est alors équilibré par la puissance totale développée par les tensions de viscosité. Dans le cas d'un fluide parfait, pour lequel on néglige la viscosité et la conductibilité thermique, on obtient alors un principe de conservation de l'enthalpie totale. Pour un tube de courant élémentaire en régime stationnaire, l'application de (2.53) entre deux sections droites fournit

$$\rho_2 H_2 V_2 \, dS_2 - \rho_1 H_1 V_1 \, dS_1 = \iint_S (\vec{\sigma} - \vec{q}) \cdot \vec{n} \, dS$$

(et aux sections terminales)

Les intégrales du second membre sont étendues à la paroi latérale du tube. Il peut arriver que, même pour un fluide visqueux et conducteur de la chaleur, les termes du second membre s'équilibrent ou s'annulent individuellement. Dans ce cas, en vertu de la relation

$$\rho_2 V_2 \, dS_2 = \rho_1 V_1 \, dS_1$$

de conservation de la masse, on obtient la conservation de l'enthalpie spécifique totale $H_2 = H_1$. Un cas d'application important sera rencontré à propos de la théorie des ondes de choc.

Remarquons enfin qu'en revenant par la formule de Green à des intégrales de volume, (2.53) livre une nouvelle forme locale du principe de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho U \right) + \rho \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho H \vec{u} + \vec{q} - \vec{\sigma}) = 0 \quad (2.54)$$

Soit encore, si l'on désire faire apparaître l'enthalpie totale dans le terme non stationnaire

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho H - p) - \rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho H \vec{u} + \vec{q} - \vec{\sigma}) = 0 \quad (2.55)$$

10. Equations de Navier-Stokes.

Tout comme les tensions de viscosité ont pu être éliminées dans l'équation d'énergie, on peut procéder à cette élimination dans les équations du mouvement. Celles-ci prennent alors la forme dite de Navier-Stokes. Dans le cas général elles sont compliquées du fait que les coefficients de viscosité, qui dépendent de la pression et de la température, sont essentiellement variables dans le champ.

Après substitution de (2.37) et (2.45) dans (2.14) on peut établir la forme générale

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} &= \rho \vec{g} - \operatorname{grad} p - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} \\ &+ \operatorname{grad} \left(\left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) \operatorname{div} \vec{u} \right) - (\operatorname{div} \vec{u}) \operatorname{grad} \mu \\ &+ \operatorname{grad} (\vec{u} \cdot \operatorname{grad} \mu) + \operatorname{rot} (\vec{u} \times \operatorname{grad} \mu) - \vec{u} \operatorname{div} \operatorname{grad} \mu \end{aligned} \quad (2.56)$$

On a vu en cinématique comment interpréter l'accélération en coordonnées curvilignes à l'aide de la formule de Lagrange. Tous les termes du second membre de (2.56) s'interprètent également par les opérateurs gradient, divergence et rotationnel.

Il se produit évidemment une simplification notable quand on peut négliger les variations des coefficients de viscosité

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{g} - \operatorname{grad} p - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} + \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u}$$

Les équations originales données par Navier et Stokes étaient en outre basées sur l'hypothèse d'un fluide incompressible ce qui les réduit encore aux termes

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{g} - \operatorname{grad} p - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u}$$

On observera que si l'écoulement est irrotationnel, la viscosité ne contribue pas à l'accélération d'une particule sans que ceci entraîne nécessairement la disparition de la dissipation.

Il est d'usage en coordonnées cartésiennes de mettre ces équations sous la forme

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.57)$$

$$\nabla^2 u_i = \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u_i$$

Ceci se justifie par la formule du laplacien vectoriel

$$\nabla^2 \vec{u} = \text{grad div } \vec{u} - \text{rot rot } \vec{u}$$

facile à vérifier en coordonnées cartésiennes.

II. Élimination de l'entropie dans l'équation de l'énergie.

L'équation de conservation de la masse (2.2), les équations de Navier-Stokes et l'équation de conservation de l'énergie

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = 2 F + \text{div} (k \text{ grad } T) \quad (2.58)$$

telle que découlant de (2.38) et (2.42) avec $2 F$ donné par (2.48), forment un système de cinq équations aux dérivées partielles pour les cinq inconnues (ρ, u_i, S) . La nature physique du fluide y est représentée par les coefficients de transport (λ, μ, k) et aussi par la structure de l'énergie interne $U(\rho, S)$ dont découlent par les définitions (2.34) et (2.35) les inconnues auxiliaires $p = p(\rho, S)$ et $T = T(\rho, S)$. Ces inconnues n'interviennent d'ailleurs que par leur gradient et on pourrait aussi bien les éliminer par les relations

$$\text{grad } p = \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho \text{ grad } S + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \text{ grad } \rho \quad (2.59)$$

$$\text{grad } T = \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_\rho \text{ grad } S + \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_S \text{ grad } \rho \quad (2.60)$$

Ce procédé introduit en fait trois nouvelles caractéristiques indépendantes du fluide

$$\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_S = \frac{\partial^2 U}{\partial S^2}$$

$$\text{et} \quad \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho = \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_S = \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial S} \quad (2.61)$$

La dernière relation, liant deux des caractéristiques introduites par (2.59) et (2.60), est une relation de réciprocity thermodynamique. Une procédure plus directe consiste à éliminer complètement l'entropie en exprimant ses dérivées partielles en fonction de caractéristiques accessibles aux mesures.

Considérons par exemple l'énergie libre $F = U - T S$, dont la différentielle totale est, en vertu de (2.36)

$$dF = \frac{p}{\rho^2} d\rho - S dT \quad (2.62)$$

Éliminant F entre les relations

$$\frac{p}{\rho^2} = \frac{\partial F}{\partial \rho} \quad \text{et} \quad S = - \frac{\partial F}{\partial T}$$

il vient

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)_T = - \frac{1}{\rho^2} \beta \quad (2.63)$$

$$\text{où} \quad \beta = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \quad (2.64)$$

est une caractéristique accessible aux mesures. Considérons ensuite le potentiel thermodynamique de Gibbs $G = I - T S$; sa différentielle totale est

$$dG = dI - T dS - S dT$$

où, en vertu de (2.50) et (2.36)

$$dI = T dS + \frac{1}{\rho} d p \quad (2.65)$$

Par conséquent

$$dG = \frac{1}{\rho} d p - S dT \quad (2.66)$$

et on trouve en éliminant G entre les relations

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial G}{\partial p} \quad \text{et} \quad -S = \frac{\partial G}{\partial T}$$

la dérivée partielle

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = - \alpha \quad (2.67)$$

$$\text{où} \quad \alpha = \left(\frac{\partial \rho^{-1}}{\partial T}\right)_p \quad (2.68)$$

est le coefficient de dilatation thermique du fluide.

Enfin, puisque $T dS$ est l'apport différentiel de chaleur dans les conditions d'équilibre, on a, par définition des chaleurs spécifiques à volume et à pression constantes :

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_\rho = c_v \quad T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p = c_p \quad (2.69)$$

La dernière de ces définitions et (2.63) fournissent entre les différentielles de S , ρ et T la relation

$$dS = c_v \frac{dT}{T} - \frac{\beta}{\rho^2} d\rho \quad (2.70)$$

qui explicite en fait (2.60). La deuxième définition associée à (2.67) fournit

$$dS = c_p \frac{dT}{T} - \alpha d\rho \quad (2.71)$$

L'élimination de dT entre (2.70) et (2.71) conduit à une forme explicite de (2.59)

$$(c_p - c_v) dS = - \frac{\beta c_p}{\rho^2} d\rho + \alpha c_v d\rho \quad (2.72)$$

Enfin, l'élimination de dS livre une forme différentielle explicite de l'équation d'état du fluide

$$\frac{c_p - c_v}{T} dT + \frac{\beta}{\rho^2} d\rho - \alpha d\rho = 0 \quad (2.73)$$

Les quatre caractéristiques physiques (c_p , c_v , α , β) sont liées par la relation de réciprocité (2.61) qui devient

$$c_p - c_v = \alpha \beta T \quad (2.74)$$

D'autres caractéristiques physiques, liées aux précédentes, jouent un rôle important dans le comportement qualitatif de l'écoulement. Ce sont en particulier les vitesses de propagation adiabatique a et isotherme b des faibles perturbations de pression.

La première est liée au module de compression adiabatique $(\partial \rho^{-1} / \partial p)_S$, son carré est défini par

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S = \frac{1}{\rho^2} \frac{\beta c_p}{\alpha c_v} \quad (2.75)$$

La seconde est liée de la même manière au module de compression isotherme $(\partial \rho^{-1} / \partial p)_T$, son carré est défini par

$$b^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T = \frac{1}{\rho^2} \frac{\beta}{\alpha} \quad (2.76)$$

Il existe donc entre les deux la relation simple

$$a^2/b^2 = c_p/c_v \quad (2.77)$$

Une des éliminations possibles de l'entropie consiste à transformer l'équation d'énergie (2.58) par (2.70) :

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = 2 F + \text{div}(k \text{ grad } T) - \beta T \text{ div } \vec{u} \quad (2.78)$$

où la dérivée particulaire de la masse volumique a encore été éliminée par (2.2). Cette équation, associée à la conservation de la masse et aux équations de Navier-Stokes, constitue un système aux cinq inconnues (ρ , u_i , T) où la pression doit être considérée comme fournie par l'équation d'état. Alternative-ment on peut éliminer la pression dans les équations de Navier-Stokes par la relation

$$\text{grad } p = b^2 \text{ grad } \rho + \beta \text{ grad } T \quad (2.79)$$

découlant de la forme différentielle de l'équation d'état. Les caractéristiques physiques du fluide sont maintenant en principe des fonctions connues de (ρ , T).

I2. Cas d'un liquide.

Les liquides réels ont un comportement très proche du liquide idéal caracté- risé par une énergie interne séparable

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial S} = 0 \quad \text{ou} \quad U = U_1(\rho) + U_2(S) \quad (2.80)$$

Par conséquent il existe une relation biunivoque entre la pression et la masse volumique :

$$p = \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} = \rho^2 U'_1(\rho) = p(\rho) \quad (2.81)$$

ainsi qu'une relation biunivoque entre l'entropie et la température :

$$T = \frac{\partial U}{\partial S} = U'_2(S) = T(S) \quad (2.82)$$

Les deux chaleurs spécifiques sont confondues $c_p = c_v = c$, les coefficients α et β sont nuls, les équations (2.70) et (2.71) se réduisent à

$$T dS = c dT$$

et l'équation d'énergie à

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = 2F + \text{div}(k \text{ grad } T) \quad (2.83)$$

Les deux vitesses de propagation des perturbations de pression sont égales ($b^2 = a^2$) et

$$\text{grad } p = a^2 \text{ grad } \rho \quad (2.84)$$

Le seul couplage qui subsiste entre l'équation d'énergie qui gouverne le champ des températures et les équations de Navier-Stokes est dû à la dépendance des coefficients de viscosité par rapport à la température.

13. Cas d'un gaz parfait.

Un autre cas simple important est celui des gaz parfaits. Ils obéissent à l'équation d'état

$$p = R \rho T \quad (2.85)$$

résumant les lois de Boyle-Mariotte et Gay-Lussac. On en déduit immédiatement par leur définition, les caractéristiques

$$\alpha = \frac{R}{p} = \frac{1}{\rho T} \quad \beta = R \rho = \frac{p}{T} \quad (2.86)$$

et donc, d'après (2.74), (2.75) et (2.77)

$$c_p - c_v = R \quad (2.87)$$

$$b^2 = R T \quad a^2 = \frac{c_p}{c_v} R T \quad (2.88)$$

De plus

$$dU = T dS + \frac{p}{\rho^2} d\rho = T \left(dS + R \frac{d\rho}{\rho} \right) = T dC$$

avec

$$C = S - S_0 + R \ln \frac{\rho}{\rho_0}$$

L'énergie interne ne dépend donc que de la variable C et

$$T = \frac{dU}{dC}$$

montre qu'il existe entre C et T une relation biunivoque.
En définitive l'énergie interne ne dépend que de la température.
A volume constant

$$dC = dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT = c_v \frac{dT}{T}$$

et c_v comme dès lors c_p ne dépendent que de la température. D'ailleurs

$$dU = T dC = c_v dT \quad (2.89)$$

et

$$S - S_0 + R \ln \frac{p}{p_0} = \int_{T_0}^T c_v \frac{dT}{T} \quad (2.90)$$

Enfin

$$I = U + \frac{p}{\rho} = U + RT$$

ne dépend aussi que de la température et

$$dI = c_p dT \quad (2.91)$$

L'équation d'énergie peut s'écrire

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = 2F + \text{div}(k \text{ grad } T) - p \text{ div } \vec{u} \quad (2.92)$$

et la pression est directement fournie par l'équation d'état.

I4. Variables réduites, Nombres caractéristiques et Similitude.

Le choix de références : L pour les longueurs, W pour les vitesses, permet déjà d'exprimer toutes les grandeurs cinématiques en variables sans dimensions :

x_1/L pour les coordonnées

u_1/W pour les vitesses

tW/L pour le temps.

Au lieu d'utiliser des notations spéciales nous conviendrons de conserver les symboles (x_1, u_1, t) en spécifiant qu'il s'agit des variables réduites. Pour ramener les autres variables à une forme non-dimensionnelle, introduisons une température de référence \bar{T} et une masse volumique de référence $\bar{\rho}$.

De ce fait la pression reçoit une valeur de référence $\bar{\rho}W^2$ (dans certaines applications cette valeur est encore divisée par 2) et les caractéristiques du fluide des références notées

$$\bar{\mu} = \mu(\bar{T}, \bar{\rho}) \quad , \quad \bar{c}_v = c_v(\bar{T}, \bar{\rho}) \quad \text{etc ...}$$

Nous conviendrons alors de continuer à nous servir des symboles $T, \rho, \mu, c_v \dots$ etc. pour désigner les rapports des caractéristiques locales à leur référence.

Examinons maintenant la forme que prennent les équations de conservation en variables réduites. Celle de conservation de la masse (2.2) voit tous ses termes multipliés par la même grandeur dimensionnelle $\bar{\rho}W/L$. Après suppression de ce facteur commun, elle conserve donc sa forme

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0$$

Les équations de Navier-Stokes (2.56) voient leurs termes affectés, dans l'ordre, par les grandeurs dimensionnelles suivantes :

$$\frac{\bar{\rho}W^2}{L} \quad , \quad \bar{\rho} \bar{g} \quad , \quad \frac{\bar{\rho}W^2}{L} \quad , \quad \frac{\bar{\lambda}W}{L^2} \quad , \quad \frac{\bar{\mu}W}{L^2}$$

En les divisant par la première, apparaissent des grandeurs de référence non-dimensionnelles : les nombre caractéristiques.

$$\frac{W^2}{gL} = Fr \quad \text{le nombre de Froude, où } \bar{g} \text{ est une valeur de référence de l'accélération du champ de gravitation}$$

$$\frac{\bar{\rho}WL}{\mu} = Re \quad \text{le nombre de Reynolds}$$

$$\frac{\bar{\rho}WL}{\bar{\lambda}} = Le \quad \text{un nombre de Reynolds similaire associé à la viscosité en volume.}$$

En variables réduites, les équations de Navier-Stokes se présentent comme suit

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{1}{Fr} \bar{\rho} \vec{g} - \operatorname{grad} p + \frac{1}{Le} \operatorname{grad}(\bar{\lambda} \operatorname{div} \vec{u})$$

$$+ \frac{1}{Re} \left\{ \frac{4}{3} \operatorname{grad}(\bar{\mu} \operatorname{div} \vec{u}) - \bar{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} - 2 \operatorname{div} \vec{u} \operatorname{grad} \bar{\mu} \right.$$

$$\left. + \operatorname{grad} \bar{\mu} \times \operatorname{rot} \vec{u} + 2(\operatorname{grad} \bar{\mu} \operatorname{grad} \vec{u}) \right\}$$

Les grandeurs dimensionnelles affectant les termes de l'équation d'énergie (2.78) sont

$$\frac{\bar{\rho} \bar{c}_v \bar{T} W}{L}, \quad \frac{\bar{\lambda} W^2}{L^2}, \quad \frac{\bar{\mu} W^2}{L^2}, \quad \frac{\bar{k} T}{L^2}, \quad \frac{\bar{\beta} T W}{L}$$

En les divisant par la première on obtient de nouveaux nombres caractéristiques

$$\frac{W^2}{\bar{c}_v \bar{T}} = \bar{\zeta}^2$$

$$\frac{\bar{\mu} \bar{c}_p}{\bar{k}} = Pr \quad \text{le nombre de Prandtl}$$

$$\bar{c}_p / \bar{c}_v = \bar{\gamma} \quad \text{rapport de référence des chaleurs spécifiques}$$

$$\frac{\bar{\beta}}{\bar{\rho} \bar{c}_v} = \bar{\eta}$$

En variables réduites l'équation d'énergie s'écrit

$$\bar{\rho} \bar{c}_v \frac{DT}{Dt} = \frac{\bar{\zeta}^2}{Le} \lambda (\text{div } \vec{u})^2 + \frac{\bar{\zeta}^2}{Re} \mu \phi + \frac{\bar{\gamma}}{Pr \cdot Re} \text{div}(k \text{ grad } T) - \bar{\eta} \beta T \text{div } \vec{u}$$

avec

$$\begin{aligned} \phi = & -\frac{2}{3} (\text{div } \vec{u})^2 + \text{div grad}(\vec{u} \cdot \vec{u}) + 2 \vec{u} \cdot \text{rot rot } \vec{u} \\ & - \text{rot } \vec{u} \cdot \text{rot } \vec{u} - 2 \vec{u} \cdot \text{grad div } \vec{u} \end{aligned}$$

Enfin l'équation (2.79) prend la forme réduite

$$\text{grad } p = \frac{1}{\bar{\gamma} \bar{M}^2} \text{grad } \rho + \frac{\bar{q}}{\bar{\zeta}^2} \text{grad } T$$

où intervient le nombre caractéristique

$$\bar{M} = \frac{W}{a} \quad \text{le nombre de Mach de référence.}$$

Entre ces nombres caractéristiques existe en général une relation découlant de (2.74) et (2.75) par élimination de α

$$(\bar{\gamma}-1)\bar{\zeta}^2 = \bar{\gamma} \bar{\eta}^2 \bar{M}^2$$

Pour un liquide on a les simplifications

$$\bar{\eta} = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\gamma} = 1$$

et les nombres $\bar{\zeta}$ et \bar{M} sont indépendants.

Pour un gaz parfait on a la simplification

$$\bar{\eta} = \bar{\gamma} - 1$$

et le nombre $\bar{\zeta}$ peut être éliminé au profit du nombre de Mach par la relation

$$\bar{\zeta} = \bar{M} \sqrt{\bar{\gamma}(\bar{\gamma} - 1)}$$

On observera que le rapport des chaleurs spécifiques, le nombre de Prandtl et $\bar{\eta}$ ne dépendent que de la nature du fluide et des références de température et de masse volumique. Le nombre de Mach et $\bar{\zeta}$ sont de plus associés à la référence de vitesse, les nombres de Reynolds et de Froude aux références de vitesse et de longueur.

Deux écoulements sont semblables si on peut assigner à chacun d'eux des références de longueur, vitesse, masse volumique et températures telles qu'en tous les points homologues (de mêmes coordonnées et temps réduits) il y ait identité des variables réduites et par conséquent aussi de leurs dérivées partielles réduites. Les équations de conservation sont alors vérifiées si les nombres caractéristiques des deux écoulements sont identiques. La similitude implique encore le respect des conditions aux limites pour les deux écoulements, ce qui, comme on verra plus loin, peut introduire des conditions d'identité entre nouveaux nombres caractéristiques.

Réciproquement, si la nature des fluides permet de respecter l'identité de tous les nombres caractéristiques par des choix de valeurs de référence appropriés, toute solution en variables réduites du premier problème d'écoulement est une solution du second.

Dans certains cas la notion de similitude peut être élargie en admettant une distortion affine de l'espace. On en verra des exemples pour les écoulements subsoniques et supersoniques linéarisés.

Le choix des valeurs de référence pour un problème d'écoulement est généralement guidé par le souci d'avoir des variables réduites et des dérivées partielles de celles-ci de l'ordre de l'unité. Dans ce cas les nombres caractéristiques sont des mesures de l'importance relative des phénomènes en interférence.

Ainsi les nombres de Reynolds mesurent l'importance relative des forces d'inertie par rapport aux forces de viscosité. Le nombre de Froude, l'importance relative des forces d'inertie par rapport aux forces de gravitation.

Pour l'équation d'énergie, les combinaisons de nombres caractéristiques qui figurent dans sa forme réduite sont d'interprétation plus difficile dans un contexte général. La signification des nombres de Mach, de Prandtl et de $\bar{\zeta}$ ressort plus clairement de l'étude des cas particuliers.

15. Conditions aux limites.

Soit $f(x_i, t) = 0$ l'équation d'une surface avec laquelle le fluide est en contact. Si l'on néglige la viscosité, les équations de Navier-Stokes perdent les termes contenant les dérivées partielles d'ordre le plus élevé dans les vitesses et l'on ne peut qu'imposer la condition de tangence :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad } f = 0 \quad \text{sur } f = 0 \quad (2.93)$$

exprimant que la surface reste formée des mêmes particules fluides, celles-ci pouvant glisser sur celle-la.

Au contraire, si l'on tient compte de la viscosité, une condition nécessaire pour que la solution soit déterminée est que la vitesse relative d'une particule en contact avec la paroi soit nulle :

$$\vec{u} - \vec{w} = 0 \quad \text{où } \vec{w} \text{ est le champ des vitesses instantanées sur la paroi.}$$

En particulier si la paroi est fixe, le fluide visqueux y satisfait aux conditions $u_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$).

Vérifions en les conséquences sur le bilan global d'énergie (2.32) en supposant la collectivité enfermée dans une enceinte dont les parois sont non seulement fixes mais aussi athermanes ($\vec{q} \cdot \vec{n} = 0$) et en supposant en outre le champ de forces massiques conservatif ($\vec{g} = -\text{grad } \Omega$ avec $\partial\Omega/\partial t = 0$).

Dans ces conditions l'énergie totale

$$E = \iiint_D \rho \left(\frac{v^2}{2} + \Omega + U \right) d\tau$$

de la collectivité doit demeurer constante ce qui, selon (2.32), implique $P_S = 0$, condition respectée par $\vec{u} = 0$ sur S . Pour un fluide non visqueux P_S se réduit à

$$P_S = - \iint_S p(\vec{u} \cdot \vec{n}) dS$$

et son annulation est satisfaite en exigeant seulement $(\vec{u} \cdot \vec{n}) = 0$ sur S , cas particulier de (2.93).

Sur une surface libre séparant deux fluides, les tensions τ_{ni} doivent être réciproques, ce qui peut se traduire par la continuité des grandeurs

$$\left(\left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \text{div } \vec{u} - p \right) \ell_i + 2 \mu \sum \ell_j \theta_{ij} \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.94)$$

quand on traverse la surface en un point de normale $\vec{n}(\ell_i)$.

En particulier si les fluides ne sont pas visqueux, les conditions se ramènent à une seule : la continuité de la pression.
Le phénomène de tension superficielle vient éventuellement compliquer ces conditions de transition. En statique des fluides il est décrit par l'équation de Laplace

$$\Delta p = \epsilon \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.95)$$

où ϵ est un coefficient de tension superficielle (ergs/cm²) caractéristique des fluides en présence, R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux de la surface de séparation. Si Δp dénote l'accroissement de pression observé en traversant la surface dans le sens indiqué par la normale \vec{n} choisie, un rayon de courbure est positif si le centre de courbure correspondant est du côté indiqué par la normale. Les conditions (2.94) peuvent alors être complétées par (2.95) sous la forme

$$\epsilon_1 \Delta p = \epsilon_1 \Delta \left\{ \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \text{div } \vec{u} \right\} + \Delta \left\{ 2 \mu \epsilon_{ij} \theta_{ij} \right\} + \epsilon_1 \epsilon \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.96)$$

Dans plusieurs cas d'application, la surface de séparation est quasi-plane. Elle s'écarte peu par exemple de $x_3 = 0$ et peut être décrite par une équation de la forme $x_3 = f(x_1, x_2, t)$. Comme ses pentes sont, par hypothèses, très petites, les cosinus directeurs de la normale (ici orientée vers les x_3 croissants) sont en première approximation :

$$-\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad -\frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad 1$$

et

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$$

Enfin la condition d'entraînement de la surface de séparation avec les particules fluides

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

se réduit à

$$\frac{dx_3}{dt} = u_3 = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.97)$$

Au même ordre d'approximation les conditions générales (2.96) deviennent

$$\Delta \left\{ \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \right\} = 0 \quad \Delta \left\{ \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \right\} = 0 \quad (2.98)$$

$$\Delta p = \Delta \left\{ \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \text{div } \vec{u} \right\} + \Delta \left\{ 2 \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right\} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right) \quad (2.99)$$

Finalement ces conditions, au lieu d'être appliquées sur la surface de séparation même, peuvent sans modifier l'ordre de l'approximation, être appliquées sur le plan $x_3 = 0$. On peut alors remplacer dans (2.98)

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial t} \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial t} \quad (2.100)$$

On observera que, sous une forme non-dimensionnelle, les conditions (2.94) ne font intervenir que les nombres de Reynolds.

Quand on y ajoute les effets de tension superficielle il apparaît un nouveau nombre caractéristique

$$\frac{\bar{\rho} W^2 L}{\epsilon}$$

Dans les problèmes où interviennent de façon sensible les transferts d'énergie sous forme calorifique il y a lieu de compléter les conditions aux limites par celles de transfert de chaleur entre fluide et paroi. On admet l'existence d'une différence finie de température ΔT entre les deux milieux. Alors si ΔT mesuré en cheminant suivant la normale \vec{n}

$$(\vec{q} \cdot \vec{n}) = -h \Delta T$$

où h est le coefficient de transfert de chaleur (ergs par $\text{cm}^2 \text{sec}$ et $^\circ \text{C}$).
Combinant cette loi avec celle de Fourier

$$k (\text{grad } T \cdot \vec{n}) = h \Delta T \quad (2.101)$$

Cette équation s'applique en réalité aussi bien à la paroi qu'au fluide, chacun avec son coefficient de conductibilité propre.

En général on suppose la température de la paroi connue, et la relation est appliquée au fluide où elle lie la température du fluide à la paroi et la composante normale de son gradient dans le fluide.

La mise sous forme non-dimensionnelle de cette relation fait apparaître le nombre caractéristique

$$\frac{\bar{h} L}{k} = \text{Nu} \quad \text{nombre de Nusselt}$$

Un autre nombre caractéristique fréquemment utilisé pour les transferts de chaleur à la paroi est

$$\frac{\bar{h}}{\rho c_p W} = \frac{Nu}{Pr \cdot Re} = St \quad \text{nombre de Stanton}$$

16. Conservation de la circulation.

On dira que dans une région du fluide, toujours composée des mêmes particules, la circulation de la vitesse est conservée si $DC/Dt = 0$ pour tout contour fermé tracé dans cette région.

Une condition suffisante pour cela est l'existence d'un potentiel $e(x,t)$ des accélérations qui reprenne la même valeur quand on revient au même point après avoir parcouru le contour. En effet, si

$$\vec{j} = - \text{grad } e \quad (2.I02)$$

on a, selon la formule de Beltrami

$$\frac{DC}{Dt} = - \oint \text{grad } e \cdot \vec{t} \, ds = - \oint de \quad (2.I03)$$

et la dernière intégrale est nulle si e peut être pris uniforme dans la région. La condition est aussi nécessaire car si Σ est une surface quelconque de la région bordée par un contour de la région, le théorème (I.58) de Stokes appliqué à la formule de Beltrami donne

$$\frac{DC}{Dt} = \iint_{\Sigma} \vec{h} \cdot \text{rot } \vec{j} \, dS \quad (2.I04)$$

où \vec{h} est la normale unitaire à Σ . Par conséquent

$$\text{rot } \vec{j} = 0 \quad (2.I05)$$

dans la région est une condition nécessaire de conservation de la circulation. On sait qu'elle entraîne l'existence d'un potentiel tel que défini par (2.I02). Elle n'entraîne cependant automatiquement l'uniformité de ce potentiel que si la région est à connexion simple; dans ce cas pour tout contour fermé il existe une surface d'appui Σ appartenant à la région. Dans les régions multiples connexes l'uniformité du potentiel est une condition supplémentaire qui reste nécessaire en vertu de (2.I03).

Certaines conséquences de la conservation de la circulation sont faciles à établir par raisonnement direct. Traçons sur la paroi d'un tube tourbillon un petit contour fermé, réductible à un point par déformation continue sans quitter la paroi. Une portion de la paroi peut donc servir de surface d'appui Σ à ce contour et par définition le flux du rotationnel $2 \vec{\omega} = \text{rot } \vec{u}$ est nul à travers Σ et la circulation du contour est nulle. On peut en conclure que, si la circulation est conservée, la surface Σ , considérée comme entraînée par le fluide, restera une portion de paroi de tube tourbillon. Les parois d'un tube tourbillon sont entraînées avec le fluide.

Appliquant un raisonnement similaire à un contour fermé entourant une fois un tube tourbillon on en déduit que l'intensité de celui-ci ne varie pas dans le temps. Conservation de la circulation et conservation de la vorticité du fluide sont donc liées.

Une autre façon d'exprimer cette liaison consiste à analyser la forme diff erentielle du th eor me (I.58) de Stokes.

Soient $d\vec{r}$ et $\delta\vec{r}$ deux éléments de déplacement issus du même point P dans le fluide.

$$d\vec{S} = d\vec{r} \times \delta\vec{r}$$

est alors l'élément de surface correspondant, orienté selon la normale.

$$\vec{b} \cdot d\vec{S}$$

est le flux du vecteur \vec{b} en P à travers cette surface élémentaire. Calculons en sa variation quand l'ensemble est entraîné avec le mouvement des particules

$$\frac{D}{Dt} (\vec{b} \cdot d\vec{S}) = \frac{D\vec{b}}{Dt} \cdot d\vec{S} + \vec{b} \cdot (d\vec{u} \times \delta\vec{r}) + \vec{b} \cdot (d\vec{r} \times \delta\vec{u})$$

Par un calcul facile à vérifier en coordonnées cartésiennes

$$(d\vec{u} \times \delta\vec{r}) + (d\vec{r} \times \delta\vec{u}) = \text{div } \vec{u} \cdot d\vec{S} + \text{rot } \vec{u} \times d\vec{S} - (d\vec{S} \cdot \text{grad})\vec{u}$$

et finalement

$$\frac{D}{Dt} (\vec{b} \cdot d\vec{S}) = \left(\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + \text{rot} (\vec{b} \times \vec{u}) + (\text{div } \vec{b})\vec{u} \right) \cdot d\vec{S}$$

Nous dirons qu'un vecteur est équiflux dans une région si son flux est conservé à travers tout élément de surface entraîné avec le fluide. D'après le calcul précédent un vecteur équiflux obéit à l'équation

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + \text{rot} (\vec{b} \times \vec{u}) + (\text{div } \vec{b})\vec{u} = 0 \quad (2.I06)$$

Une autre façon d'établir les résultats obtenus au début de cette section consiste alors à vérifier que le vecteur tourbillon est équiflux si le rotationnel de l'accélération est nul. Or, calculant le rotationnel de l'accélération par la formule de Lagrange (en nous rappelant que $\text{rot grad} \equiv 0$)

$$\text{rot } \vec{f} = \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{u} + \text{rot} (\text{rot } \vec{u} \times \vec{u}) \quad (2.I07)$$

mais le second membre est nul si le tourbillon est équiflux comme le montre l'application de la formule (2.I06) pour $\vec{b} = \text{rot } \vec{u}$ (en nous rappelant que $\text{div rot } \vec{u} \equiv 0$).

Plus généralement nous avons le résultat

$$\frac{D}{Dt} (\text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{S}) = \text{rot } \vec{f} \cdot d\vec{S} \quad (2.108)$$

équivalent par le théorème de Stokes à la formule de Beltrami.

17. Conditions pour la conservation de la circulation dans un fluide parfait.

Un fluide est dit "parfait" s'il est dépourvu de viscosité.

En pratique ceci veut dire que les nombres de Reynolds seraient suffisamment grands pour pouvoir négliger les forces de viscosité dans les équations de Navier-Stokes, l'équilibre se faisant uniquement entre gradients de pression, forces d'inertie et, éventuellement, forces de gravitation. Il n'est jamais possible d'envisager une telle situation comme réalisée en tous les points de l'écoulement. En particulier au voisinage des parois on a vu que la suppression des coefficients de viscosité obligeait à considérer une condition aux limites réduite, permettant un glissement relatif des particules le long de la paroi. Or, quelle que petite la viscosité tangentielle, un fluide réel suffisamment dense adhère aux parois. Il y a donc toujours au moins une région où les effets de viscosité ne peuvent être négligés.

Dans certains cas ils ont tendance à être confinés au voisinage immédiat des parois dans une "couche limite" où d'importants gradients de vitesse assurent une transition rapide entre la condition d'adhérence et la condition de glissement. Ceci permet dans un certain sens une séparation de l'analyse en deux parties. Dans l'une la masse de l'écoulement est étudiée sans tenir compte des effets de viscosité avec les conditions aux limites simplifiées et éventuellement légèrement modifiées pour tenir compte de l'épaisseur de déplacement de la couche limite. L'autre partie est l'étude de la couche limite proprement dite, où les conditions aux limites vers le fluide dépendent des résultats de l'analyse précédente.

Ce principe de séparation donne un sens à l'étude de l'écoulement des fluides parfaits. Pour ceux-ci les équations de Navier-Stokes se réduisent à

$$\vec{f} = - \text{grad } \Omega - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (2.109)$$

en supposant l'existence d'un potentiel des forces massiques.

Dans ce cas

$$\text{rot } \vec{f} = \text{grad } p \times \text{grad } \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (2.110)$$

et il y a conservation de la circulation dans l'un des cas suivants :

- 1) $\text{grad } p = 0$: l'écoulement est "isobare". La pression peut éventuellement être encore une fonction du temps. La fonction Ω est le potentiel des accélérations.
- 2) $\text{grad } \rho = 0$: l'écoulement est isostatique. La masse volumique ne peut plus dépendre que du temps. La fonction $\Omega + p/\rho$ est le potentiel des accélérations.

L'écoulement d'un fluide incompressible étant isostatique par définition, il y a conservation de la circulation si l'on néglige les effets de viscosité. En particulier si une région du fluide est à une certaine époque irrotationnelle, elle le demeure.

- 3) Plus généralement $\vec{j} = 0$ quand les surfaces $p = \text{constante}$ coïncident avec les surfaces $\rho = \text{constante}$. Il y a alors une relation $\rho = \rho(p, t)$ et l'écoulement est dit "barotrope".
Le potentiel des accélérations est

$$\Omega + \int \frac{dp}{\rho(p, t)}$$

Observons que, selon (2.65), on a

$$\text{grad } I = T \text{ grad } S + \frac{1}{\rho} \text{ grad } p$$

ce qui permet de donner aux équations (2.109) du mouvement d'un fluide parfait la forme équivalente

$$\vec{j} = - \text{grad } (\Omega + I) + T \text{ grad } S \quad (2.111)$$

et $\text{rot } \vec{j} = \text{grad } T \times \text{grad } S \quad (2.112)$

Il y a toujours conservation de la circulation si

- 4) $\text{grad } S = 0$: l'écoulement est isentropique. Le potentiel des accélérations est $\Omega + I$.
- 5) $\text{grad } T = 0$: l'écoulement est isotherme. Le potentiel des accélérations est $\Omega + I - TS$.
- 6) les surfaces $S = \text{constante}$ coïncident avec les surfaces $T = \text{constantes}$. Il existe une relation $T = T(S, t)$ et le potentiel des accélérations est

$$\Omega + I - \int \frac{dS}{T(S, t)}$$

Ces trois derniers cas sont évidemment des cas de barothopie. Dans le premier, la relation qui lie pression, masse volumique et temps est $p = p(\rho, S(t))$. Dans le second on a par l'équation d'état $f(p, \rho, T(t)) = 0$. Le cas 6) est aussi général que 3) car si les surfaces $p = \text{constante}$ et $\rho = \text{constante}$ coïncident, il en est de même par $p = p(\rho, S)$ pour les surfaces $S = \text{constante}$ et par $f(p, \rho, T) = 0$ pour les surfaces $T = \text{constante}$.

III. Ecoulements isentropiques d'un gaz parfait.

I. Equation d'état d'un gaz parfait.

L'équation d'état d'un gaz parfait s'écrit :

$$p = R\rho T \quad (3.1)$$

quand on fait usage de la masse molaire m^* , nombre sans dimensions défini de la façon suivante :

$$m^* = \frac{\text{masse moyenne d'une molécule}}{\text{masse de la molécule d'oxygène}} \times 32$$

la constante

$$R^* = Rm^* = 8,31 \cdot 10^7 \text{ (cm/sec)}^2 \text{ par } ^\circ \text{ centig.}$$

devient universelle. Une des conséquences importantes de cette équation d'état est que l'énergie interne ne dépend que de la température. En effet pour une petite variation de l'état on a suivant (2.34) et (2.35)

$$dU = TdS + \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (3.2)$$

Considérons dans cette relation U comme une fonction de la température et de la masse volumique, ce qui revient à considérer l'entropie comme une fonction implicite de ces variables à travers (2.34). Si donc nous remplaçons dans (3.2)

$$dS = \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial \rho} d\rho$$

il viendra

$$\frac{\partial U}{\partial T} = T \frac{\partial S}{\partial T} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{p}{\rho^2} + T \frac{\partial S}{\partial \rho} \quad (3.4)$$

Éliminons l'entropie entre ces relations

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) - \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{p}{\rho^2 T} \right)$$

ce qui se réduit à

$$\frac{1}{T^2} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{p}{\rho^2 T} \right) = 0$$

mais d'après l'équation d'état

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{p}{\rho^2 T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{R}{p} \right) = 0$$

ce qui entraîne $\partial U / \partial \rho = 0$, U ne dépend que de la température. Dès lors l'enthalpie spécifique

$$I = U + \frac{p}{\rho} = U + R T \quad (3.5)$$

ne dépend aussi que de la température.
Les grandeurs

$$\frac{dU}{dT} = c_v(T) \quad (3.6)$$

$$\frac{dI}{dT} = c_p(T) \quad (3.7)$$

sont les chaleurs spécifiques respectivement à volume constant et à pression constante; elles ne dépendent aussi que de la température. En vertu de (3.5) elles sont liées par

$$c_p = c_v + R \quad (3.8)$$

Enfin puisque $\partial U / \partial \rho = 0$, les relations (3.3) et (3.4) peuvent s'écrire

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{1}{T} \frac{dU}{dT} = \frac{c_v}{T}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \rho} = - \frac{p}{\rho^2 T} = - \frac{R}{\rho}$$

soit encore

$$dS = c_v \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho} \quad (3.9)$$

Sous cette forme l'entropie spécifique est directement intégrable

$$S - S_0 = \int_{T_0}^T c_v \frac{dT}{T} - R \ln \frac{\rho}{\rho_0} \quad (3.10)$$

on obtient aussi directement son expression comme fonction de la pression et de la température au moyen de la transformation

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T}$$

déduite de la relation d'état. Moyennant une intégration par parties et utilisation de (3.8) il vient

$$S - S_0 = -R \ln \frac{p}{p_0} + c_p \ln \frac{T}{T_0} - \int_{T_0}^T \frac{dc_v}{dT} \ln \frac{T}{T_0} dT$$

2. Célérité du son.

L'équation (2.35) constitue une relation

$$p = p(\rho, S)$$

dont on peut déduire la grandeur

$$a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad (3.II)$$

qui a les dimensions du carré d'une vitesse. Il apparaîtra par la suite que cette vitesse est en fait la célérité avec laquelle se propagent les perturbations infinitésimales de pression; c'est la célérité du son. Pour en établir une expression explicite transformons (3.9) par la différentielle logarithmique de l'équation d'état :

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (3.I2)$$

Eu égard à (3.8) il vient

$$dS = c_v \frac{dp}{p} - c_p \frac{d\rho}{\rho} \quad (3.I3)$$

Par conséquent, à entropie constante,

$$\frac{dp}{d\rho} = a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma RT \quad (3.I4)$$

$$\text{où} \quad \gamma = c_p / c_v \quad (3.I5)$$

La dernière des relations (3.I4) montre bien que la célérité du son ne dépend que de la température.

3. La relation pression-vitesse pour une particule conservant son enthalpie totale et son entropie.

En négligeant les échanges de quantité de mouvement par viscosité et de chaleur par conduction entre une particule et son voisinage, il vient par (2.40)

$$\frac{DS}{Dt} = 0$$

l'entropie de la particule est conservée. Dès lors, par (2.64) et (2.36)

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} \quad (3.I6)$$

Supposons encore le champ des pressions permanent ($\frac{\partial p}{\partial t} = 0$) et nous aurons en vertu de (2.79)

$$\frac{DH}{Dt} = 0$$

c'est-à-dire conservation de l'enthalpie totale de cette particule :

$$H = I + \frac{v^2}{2} + \Omega = \text{constante particulaire}$$

Examinons le cas où les forces dérivant du potentiel Ω sont négligeables ou absentes

$$I + \frac{v^2}{2} = I_0 = \frac{1}{2} v_1^2 \quad (3.I7)$$

La valeur I_0 de la constante est l'enthalpie d'arrêt ($V = 0$) à laquelle correspond une pression d'arrêt p_0 . La constante est alors reliée aux conditions où l'enthalpie totale est sous forme uniquement thermodynamique. Quand elle est uniquement sous forme cinétique, la vitesse atteint une valeur limite V_1 pour laquelle la température de la particule est tombée (en principe) à zéro, ainsi dès lors que sa pression.

Le diagramme pression-vitesse qui s'étend de $(p_0, 0)$ à $(0, V_1)$ possède les caractéristiques qualitatives suivantes : par différentiation de (3.17) et eu égard à (3.16)

$$V \frac{DV}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} = 0 \quad (3.18)$$

ce qui donne pour pente de diagramme

$$\frac{Dp}{DV} = -\rho V \quad (3.19)$$

Cette pente est toujours négative et vaut en module la quantité de mouvement par unité de volume; elle s'annule aux extrémités du diagramme car la masse volumique tend vers zéro avec la pression.

De plus la quantité de mouvement passe par un maximum et donc la pente par un minimum. Ce point d'inflexion du diagramme s'obtient en calculant

$$\frac{D^2p}{DV^2} = -\rho - V \frac{D\rho}{DV} = -\rho - V \frac{D\rho}{Dp} \frac{Dp}{DV}$$

Mais, l'entropie étant constante

$$\frac{D\rho}{Dp} = \frac{1}{a^2}$$

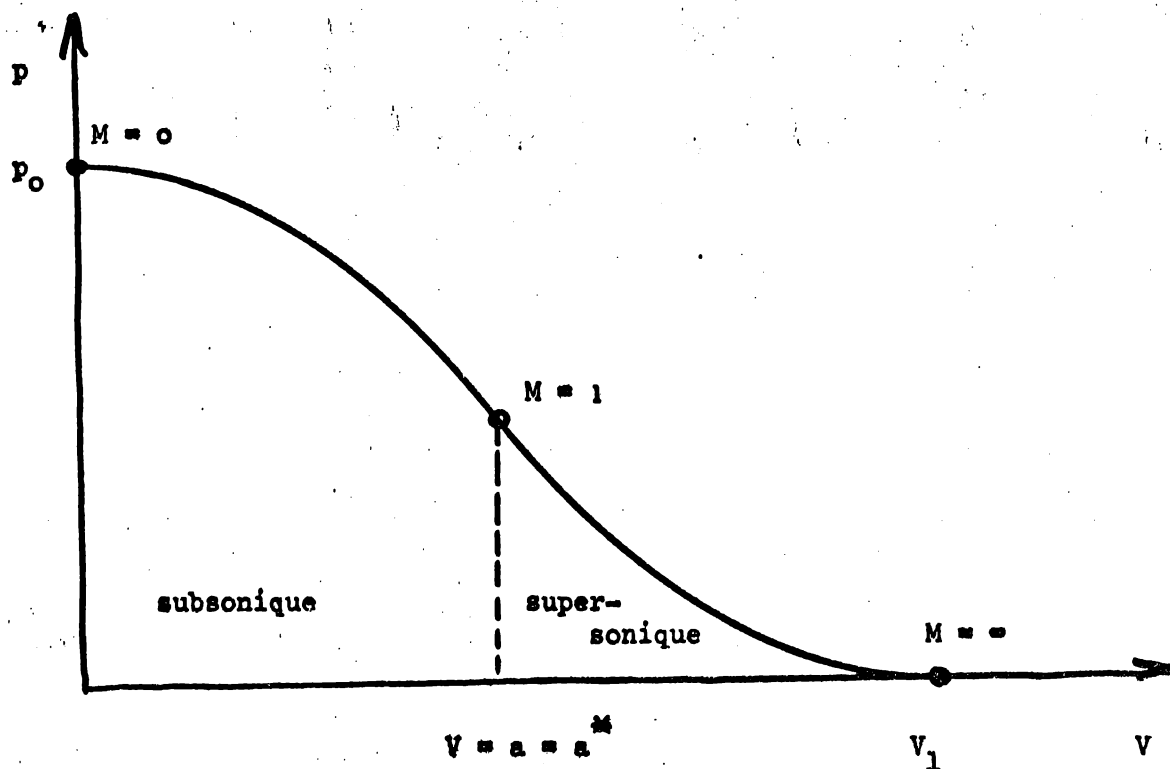
et, utilisant encore (3.19)

$$\frac{D^2p}{DV^2} = -\rho \left(1 - \frac{V^2}{a^2} \right) \quad (3.20)$$

Ce résultat fait apparaître le nombre de Mach local

$$N = \frac{V}{a} \quad (3.21)$$

rapport de la vitesse locale de l'écoulement à la célérité locale du son. Comme par suite de la conservation de l'enthalpie totale, l'enthalpie thermodynamique et donc la température et la célérité du son décroissent quand la vitesse croît, la condition sonique locale $M = 1$ est atteinte entre la condition d'arrêt et la vitesse limite. Elle correspond au point d'inflexion du diagramme et le divise en une région subsonique $M < 1$ et une supersonique $M > 1$.



La valeur commune de V et de a dans les conditions soniques est notée a^* . Il est à noter que pour un fluide incompressible la célérité du son est infinie et que le diagramme pression-vitesse résultant de

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} = \frac{1}{2} V_1^2$$

a une forme simplement parabolique.

4. Gaz caloriquement parfaits.

Les chaleurs spécifiques $c_v(T)$ et $c_p(T)$, d'ailleurs liées par (3.8), peuvent être obtenues par des calculs de mécanique statistique. Pour le modèle moléculaire le plus simple d'un gaz monoatomique : la sphère élastique, ce calcul donne

$$c_p = \frac{5}{2} R \quad \text{et donc} \quad \gamma = \frac{5}{3}$$

Ces valeurs sont en bon accord avec l'expérience pour les gaz monoatomiques nobles (hélium, argon ...) dans un intervalle de température limité inférieurement par le voisinage de la liquéfaction et supérieurement par le voisinage de l'ionisation.

La sphère n'a que trois degrés de liberté de translation entre lesquels se produit l'équipartition de l'énergie. Plus généralement si le nombre de degrés de liberté est n l'équipartition de l'énergie demande

$$c_p = \frac{2 + n}{2} R \quad \text{et donc} \quad \gamma = 1 + \frac{2}{n}$$

Pour le modèle du type "haltère" d'une molécule de gaz diatomique $n = 5$ (trois translations, deux rotations). L'intervalle d'accord avec l'expérience est ici réduit. D'une part aux basses températures les degrés de liberté de rotation peuvent être "gelés" sensiblement avant la liquéfaction (H_2 par exemple), d'autre part vers les hautes températures il y a tendance à équipartition de l'énergie avec les degrés de liberté supplémentaires dus aux vibrations de la molécule.

Les méthodes de la mécanique statistique quantique fournissent alors pour les gaz diatomiques l'expression plus précise

$$c_p = R \left(\frac{7}{2} + \left(\frac{\theta_v/2T}{\sinh(\theta_v/2T)} \right)^2 \right)$$

où θ_v est une température caractéristique pour les effets vibratoires.

Dans ce qui suit nous ferons l'hypothèse d'un gaz caloriquement parfait, c'est-à-dire dont les chaleurs spécifiques peuvent être considérées comme constantes. Ceci sera donc plus ou moins correct pour un intervalle approprié de température.

Pour un gaz caloriquement parfait on peut écrire

$$U = c_v T \quad (3.18)$$

$$I = c_p T \quad (3.19)$$

et, par intégration de (3.13)

$$\frac{S - S_0}{c_v} = \ln \frac{p}{p_0} - \gamma \ln \frac{\rho}{\rho_0} \quad (3.20)$$

Il en résulte dans le cas d'une évolution isentropique d'une particule les relations utiles

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{a}{a_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \quad (3.21)$$

qu'il est encore intéressant de considérer sous la forme différentielle

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{da}{a} \quad (3.22)$$

5. Ecoulement isentropique permanent d'un gaz caloriquement parfait.

L'écoulement est isentropique si

$$\text{grad } S = 0 \quad \text{et} \quad \frac{DS}{Dt} = 0$$

Ceci est réalisé si à un instant donné toutes les particules ont la même entropie et la conservent ensuite par suppression des effets de viscosité et de conduction. Dans ces conditions on a vu que pour le mouvement permanent

$$\text{rot } \vec{V} \times \vec{V} = - \text{grad } H$$

et que par conséquent le long d'une ligne de courant (ici aussi une trajectoire)

$$H = \text{constante}$$

Prenons encore $\Omega = 0$ et développons cette relation du type Bernoulli en tenant compte de (3.19). En vertu de l'équation d'état (3.1) et de la valeur (3.14) de la célérité du son elle prendra l'une ou l'autre des formes suivantes

$$\frac{v^2}{2} + c_p T = \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{1}{2} v_1^2 \quad (3.23)$$

On en déduit en particulier:

$$a^2 = \frac{\gamma - 1}{2} (v_1^2 - v^2) \quad (3.24)$$

et pour la célérité dans les conditions d'arrêt

$$a_0^2 = \frac{\gamma - 1}{2} v_1^2 \quad (3.25)$$

Divisant (3.24) par (3.25) membre à membre

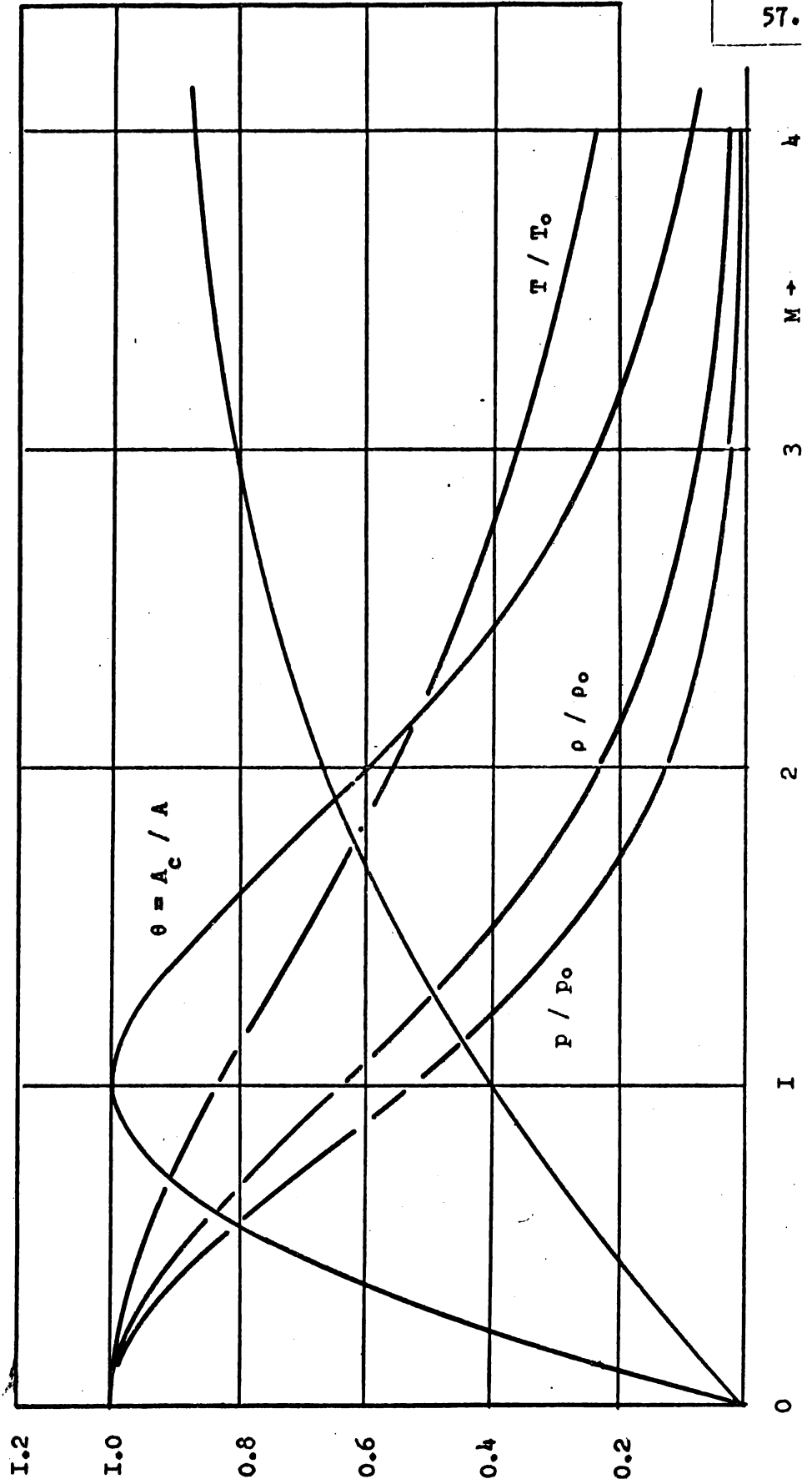
$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = 1 - \left(\frac{v}{v_1}\right)^2 \quad (3.26)$$

C'est une forme non-dimensionnelle du diagramme donnant l'évolution de la célérité avec la vitesse de l'écoulement. Il suffit alors de prendre en considération les relations (3.21) pour obtenir l'évolution de toutes les grandeurs thermodynamiques avec la vitesse. On trouve en particulier la formule de "de Saint-Venant-Wantzel"

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \left(\frac{v}{v_1}\right)^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (3.27)$$

Ces évolutions sont illustrées sur la figure ()

Écoulement isentropique $\gamma = 1.4$



Dans la condition sonique, les relations entre les valeurs des variables thermodynamiques et les valeurs correspondantes à l'arrêt ($V = 0$) sont les suivantes :

faisant $V = a = a^*$ dans (3.24)

$$\frac{a^*}{V_1} = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.28)$$

ensuite par (3.26)

$$\frac{a^*}{a_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.29)$$

Dès lors par les relations (3.21)

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma + 1} \quad \frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (3.30)$$

Au lieu de mesurer la vitesse de l'écoulement par la variable non-dimensionnelle V/V_1 , on utilise habituellement le nombre de Mach $M = V/a$. La relation entre les deux découle de (3.24) en divisant cette équation par V^2 :

$$\left(\frac{V}{V_1} \right)^2 = \frac{(\gamma - 1) M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2} \quad (3.31)$$

La relation de de Saint-Venant-Wantzel s'écrit alors

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (3.32)$$

Prenons par exemple le cas d'un écoulement uniforme de vitesse V_∞ , pression p_∞ , masse volumique ρ_∞ où la célérité du son est donnée par

$$a_\infty^2 = \gamma \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \quad (3.33)$$

Ce courant est perturbé par la présence d'un obstacle et on désire connaître la valeur de la masse volumique ρ_0 correspondant à l'arrêt d'une particule fluide par l'obstacle.

Des relations (3.32) et (3.21)

$$\frac{p}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-\frac{1}{\gamma - 1}}$$

Prenant pour ρ et M les valeurs ρ_∞ et $M_\infty = V_\infty / a_\infty$ pertinentes aux conditions non perturbées à l'infini amont :

$$\frac{p_0}{\rho_\infty} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (3.34)$$

Si l'obstacle est un avion, V_{∞} est sa vitesse de vol par rapport au fluide considéré comme immobile à l'infini.

Le rapport M_{∞} de cette vitesse à la célérité du son dans le fluide au repos est le "nombre de Mach de vol". Pour des nombres de Mach de vol pas trop élevés et en tous cas suffisamment subsoniques pour qu'il ne se produise pas d'ondes de choc autour de l'obstacle, l'expression (3.34) est représentée avec assez d'exactitude par les premiers termes de son développement binomial

$$\frac{\rho_0}{\rho_{\infty}} = 1 + \frac{1}{2} M_{\infty}^2$$

Pour $M_{\infty} = 0.4$ par exemple, $\rho_0 = 1.08 \rho_{\infty}$.

La célérité du son étant approximativement 330 m/sec à 3000 mètres d'altitude dans l'atmosphère, ces conditions représentent déjà une vitesse de vol de 132 m/sec ou 475 km/heure. La faible variation de masse volumique, même dans les conditions d'arrêt, justifie le développement de l'aérodynamique subsonique classique dans le cadre de la théorie des fluides incompressibles.

La mesure de la pression d'arrêt est un moyen classique d'évaluer la vitesse de vol. Une application de la formule (3.32) donne immédiatement

$$\frac{p_0}{p_{\infty}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{\infty}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

soit, en développant le binôme :

$$\frac{p_0}{p_{\infty}} = 1 + \frac{\gamma}{2} M_{\infty}^2 + \frac{\gamma}{8} M_{\infty}^4 + \frac{\gamma(2 - \gamma)}{48} M_{\infty}^6 \dots \quad (3.35)$$

Pour un fluide incompressible l'application de l'équation de Bernoulli fournirait simplement

$$\frac{V_{\infty}^2}{2} + \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}} = \frac{p_0}{\rho_{\infty}}$$

c'est-à-dire une pression dynamique

$$p_0 - p_{\infty} = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2$$

Conservant cette grandeur comme unité de mesure, il est usuel de former un coefficient de pression non-dimensionnel

$$C_p = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2} \quad (3.36)$$

Eu égard à (3.33) cette définition est aussi

$$C_p = \frac{p - p_{\infty}}{p_{\infty}} \frac{2p_{\infty}}{\rho_{\infty} V_{\infty}^2} = \frac{p - p_{\infty}}{p_{\infty}} \frac{2}{\gamma M_{\infty}^2} \quad (3.37)$$

Pour un fluide incompressible le coefficient de pression dans les conditions d'arrêt est par définition égal à l'unité. Pour un fluide compressible il vaut suivant (3.35) et (3.37)

$$(C_p)_0 = 1 + \frac{1}{4} M_\infty^2 + \frac{2-\gamma}{24} M_\infty^4 \dots \quad (3.38)$$

6. Variations de la section droite d'un tube de courant.

Prenons un tube de courant de dimensions suffisamment réduites pour que la vitesse et les variables thermodynamiques puissent être considérées comme constantes pour les points d'une même section droite A . Le mouvement étant permanent la conservation de la masse s'exprime par la constance du débit massique

$$\rho V A = m \text{ (constante)} \quad (3.39)$$

Il en résulte que la section droite A passe alors par une valeur minimum (un col) A_c . Ceci est confirmé par une relation due à Hugoniot, dont la démonstration est similaire. Par différentiation logarithmique de (3.39)

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (3.40)$$

Le premier terme est transformé comme suit

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} dp = \frac{dp}{\rho a^2}$$

Mais par différentiation de l'équation de Bernoulli

$$VdV + dI = VdV + \frac{dp}{\rho} = 0$$

d'où

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{VdV}{a^2}$$

Ce résultat, substitué dans (3.40) livre la relation d'Hugoniot

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V} \left(\frac{V^2}{a^2} - 1 \right) = \frac{dV}{V} (M^2 - 1) \quad (3.41)$$

Par conséquent en régime subsonique $M < 1$, toute augmentation de vitesse de l'écoulement résulte en une diminution de la section droite; en régime supersonique à une augmentation de cette section. Le minimum de la section a lieu pour $M = 1$.

Pour un gaz caloriquement parfait, nous pouvons établir une relation quantitative plus précise.

Calculons le rapport

$$\frac{\rho V}{\rho a} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{V}{V_1} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{V_1}{a}$$

Au second membre, les deux derniers rapports sont connus par (3.28) et (3.30), les deux premiers ont été calculés déjà en fonction du nombre de Mach. Il vient après simplification

$$\frac{\rho V}{\rho a} = M \left(\frac{2}{\gamma + 1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} M^2 \right)^{-\frac{\phi + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad (3.42)$$

La constante du débit massique, évaluée dans les conditions soniques, vaut

$$m = \rho a A_c$$

Par conséquent la conservation du débit massique peut s'écrire

$$\frac{A_c}{A} = \frac{\rho V}{\rho a} \quad (3.43)$$

ce qui, associé à (3.42), fournit une relation explicite entre section droite du tube de courant et nombre de Mach.

7. L'onde de choc normale stationnaire.

Considérons un écoulement unidimensionnel permanent

$u = u(x)$, $v = 0$, $w = 0$, où toutes les grandeurs thermodynamiques ne dépendent que de x .

Le seul élément du tenseur des vitesses de déformation qui ne soit pas nul a priori est

$$\theta_{xx} = \frac{du}{dx}$$

auquel sont associées des tensions de viscosité

$$\sigma_{xx} = \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{du}{dx} \quad (3.44)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{du}{dx} \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$$

L'équation (2.14) de conservation de la masse se réduit à

$$\frac{d}{dx} (\rho u) = 0 \quad (3.45)$$

Nous supposons qu'il n'y a pas de forces massiques ($\rho = 0$) et les équations (2.21) de conservation de la quantité de mouvement se réduisent à

$$\rho u \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} (\sigma_{xx} - p) \quad (3.46)$$

Pour l'équation de conservation de l'énergie, utilisons par exemple (2.32) et (2.33) avec la loi de Fourier (2.43)

$$\rho u \frac{d}{dx} \left(U + \frac{u^2}{2} \right) = \frac{d}{dx} (u (\sigma_{xx} - p)) + \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) \quad (3.47)$$

Chacune de ces équations de conservation est intégrable.

Rapportons les constantes d'intégration à une section en amont où l'écoulement est supposé uniforme $\frac{du}{dx} = 0$, $\frac{dT}{dx} = 0$ et caractérisée par l'indice 1.

Par (3.45)

$$\rho u = \rho_1 u_1 \quad (3.48)$$

Par (3.46)

$$p + \rho u^2 - \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{du}{dx} = p_1 + \rho_1 u_1^2 \quad (3.49)$$

C'est aussi la conclusion à laquelle aboutirait une application de la forme intégrale (2.22) à un tube de courant limité aux sections transversales x_1 et x . Enfin par (3.47)

$$\rho u \left(U + \frac{u^2}{2} \right) + pu - \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) u \frac{du}{dx} - k \frac{dT}{dx} = \rho_1 u_1 \left(U_1 + \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} \right)$$

soit encore, moyennant introduction de l'enthalpie spécifique totale

$$H = U + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}$$

$$\rho u H - \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) u \frac{du}{dx} - k \frac{dT}{dx} = \rho_1 u_1 H_1 \quad (3.50)$$

C'est aussi la conclusion que fournirait la forme intégrale (2.51) appliquée au tube de courant.

Posons-nous la question de savoir si l'écoulement peut redevenir uniforme en aval. Dès lors faisant de nouveau $\frac{du}{dx} = 0$ et $\frac{dT}{dx} = 0$ dans une section d'indice 2 en aval, nous aurons à vérifier les lois de conservation

$$\rho_2 u_2 = \rho_1 u_1 \quad (3.51)$$

$$p_2 + \rho_2 u_2^2 = p_1 + \rho_1 u_1^2 \quad (3.52)$$

$$H_2 = H_1 \quad (3.53)$$

Cette dernière, qui exprime la conservation de l'enthalpie totale du fluide, est une simplification par (3.51) de ce que donne (3.50); utilisant une des formes (3.23) de l'enthalpie totale d'un gaz caloriquement parfait nous l'écrivons

$$\frac{u_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} V_1^2 = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a^{*2} \quad (3.54)$$

Supposant les conditions (u_1, p_1, ρ_1) données en amont, les équations (3.51), (3.52) et (3.54) fournissent les conditions (u_2, p_2, ρ_2) en aval. Divisons (3.52) par (3.51)

$$u_2 - u_1 = \frac{p_1}{\rho_1 u_1} - \frac{p_2}{\rho_2 u_2} \quad (3.55)$$

et éliminons les rapports pression à masse volumique par (3.54)

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} a^{*2} - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} u_1^2$$

$$\frac{p_2}{\rho_2} = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} a^{*2} - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} u_2^2$$

il vient une relation entre les seules vitesses

$$u_2 - u_1 = (u_2 - u_1) \left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{a^{*2}}{u_1 u_2} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right) \quad (3.56)$$

La solution $u_2 = u_1$ est triviale; elle entraîne en définitive que les conditions en aval sont les mêmes qu'en amont; nous avons affaire à un simple écoulement uniforme. En dehors de cette solution (3.56) est aussi satisfaite par

$$\frac{u_1}{a^*} \cdot \frac{u_2}{a^*} = 1 \quad (3.57)$$

Par conséquent un écoulement supersonique en amont ($u_1 > a^*$) devient subsonique en aval ($u_2 < a^*$). Nous verrons que le cas réciproque d'un passage de subsonique à supersonique est à écarter comme violent le second principe de la thermodynamique.

L'utilisation des formules (3.28) et (3.31) permet de transformer (3.57) en une relation entre les nombres de Mach amont et aval

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \quad (3.58)$$

L'équation de conservation (3.51) fournit alors le rapport des masses volumiques

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \left(\frac{u_1}{a^*} \right)^2 = \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} \quad (3.59)$$

Pour avoir le rapport des pressions, multiplions (3.55) par $(u_1 + u_2)$

$$u_2^2 - u_1^2 = (p_1 - p_2) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

et éliminons le premier membre par (3.54); il vient

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \quad (3.60)$$

$$= \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad (3.61)$$

La relation (3.60) est due à Rankine et a été redécouverte par Hugoniot. Elle diffère de la relation d'évolution isentropique telle que découlant de (3.21)

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma \quad (3.62)$$

et il y a une modification de l'entropie d'amont en aval qui ne peut être qu'un accroissement correspondant à une dégradation de l'énergie. Si u_2 diffère peu de u_1 et donc ρ_2 de ρ_1 , posons $\rho_2/\rho_1 = 1 + \epsilon$ où ϵ est petit. La relation de Rankine-Hugoniot devient

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= \left(1 + \epsilon \frac{\gamma+1}{2} \right) \left(1 - \epsilon \frac{\gamma-1}{2} \right)^{-1} \\ &= 1 + \gamma \epsilon + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \epsilon^2 + \frac{\gamma(\gamma-1)^2}{4} \epsilon^3 + \dots \end{aligned}$$

tandis que la relation isentropique donne

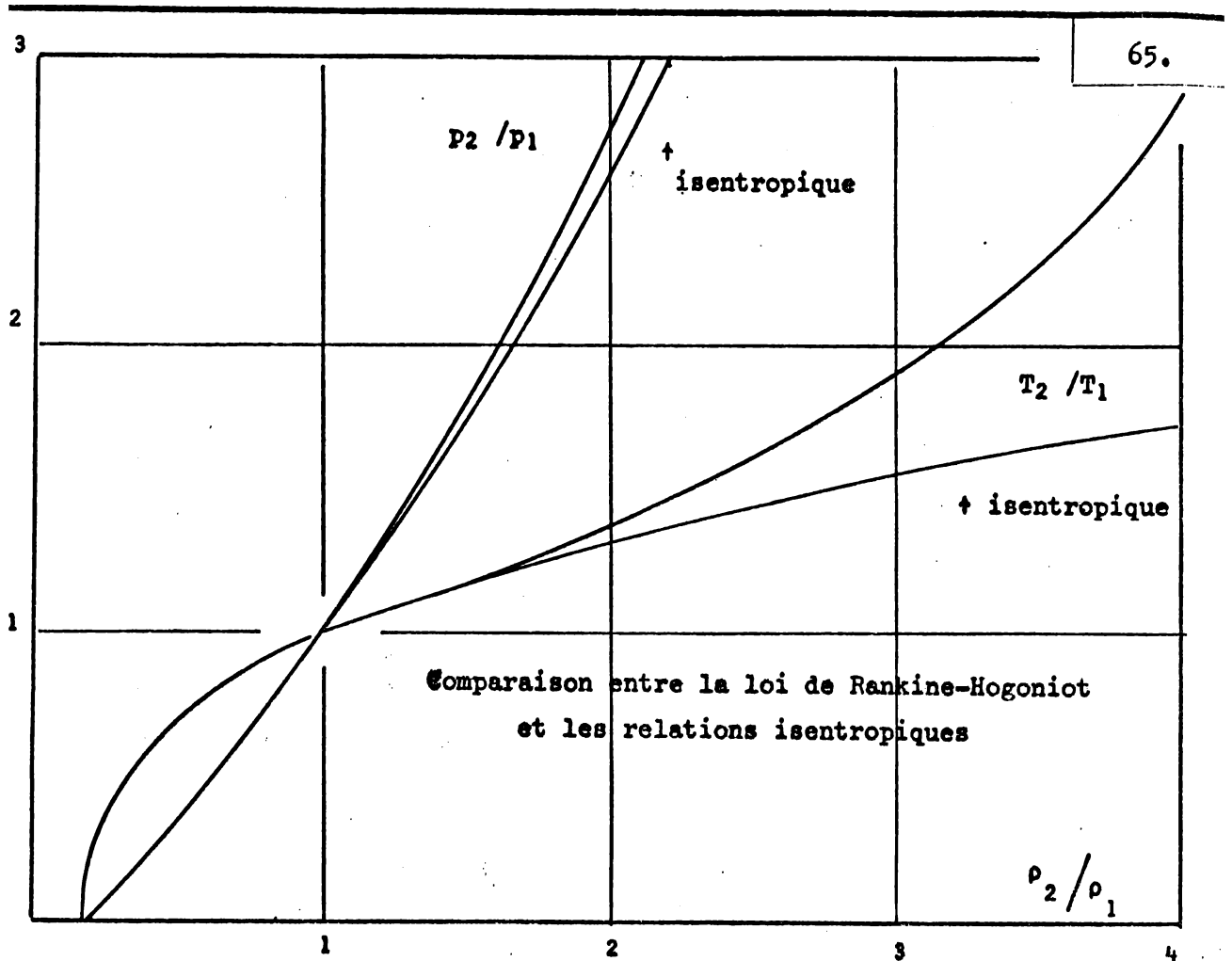
$$\frac{p_2}{p_1} = (1 + \epsilon)^\gamma = 1 + \gamma \epsilon + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \epsilon^2 + \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)}{6} \epsilon^3 + \dots$$

Les deux développements ne diffèrent qu'à partir du terme en ϵ^3 . Il y a donc au point (1, 1) un contact du second ordre entre les courbes exprimant les relations (3.60) et (3.62).

Le rapport des températures découle immédiatement de l'équation d'état du gaz et des résultats précédents

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Les équations de conservation (3.51), (3.52) et (3.53) s'appliquent directement à un fluide non visqueux et non conducteur. Dans ce cas la solution qui vient d'être développée apparaît comme une véritable discontinuité mathématique entre deux écoulements permanents et uniformes : c'est l'onde de choc normale et stationnaire. L'épaisseur réelle de l'onde de choc est effectivement très faible et le siège de gradients de température et de vitesse élevés qui ne permettent pas de négliger les effets de viscosité et de conduction. Ceux-ci sont d'ailleurs indispensables pour expliquer la dégradation de l'énergie associée à l'accroissement d'entropie.



8. Accroissement de l'entropie et diminution de la pression d'arrêt au passage à travers l'onde de choc.

Le calcul du changement d'entropie peut se faire par application de la relation (3.20)

$$\frac{S_2 - S_1}{c_v} = \ln \frac{P_2}{P_1} - \gamma \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Substituant (3.59) et (3.61) on l'obtient en fonction du nombre de Mach amont.

$$\frac{S_2 - S_1}{c_v} = \ln \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) - \gamma \ln \frac{(\gamma+1) M_1^2}{2 + (\gamma-1) M_1^2} \quad (3.63)$$

La dérivée de cette expression par rapport à M_1^2 vaut, après réduction

$$\frac{2\gamma(\gamma-1)(M_1^2 - 1)^2}{M_1^2 \{2 + (\gamma-1)M_1^2\} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1)}$$

Elle possède un zéro double pour $M_1 = 1$, ce qui est conforme au caractère oscilateur entre le diagramme de Rankine-Hugoniot et le diagramme isentropique. Elle est positive quand on descend de $M_1 = 1$ jusqu'à $M_1 = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}$ où il est clair

que $S_2 - S_1$ tend vers l'infini négatif. Elle est positive aussi quand on remonte de $M_1 = 1$ à l'infini. Par conséquent la condition $S_2 - S_1 > 0$ posée par le second principe est satisfaite par $M_1 > 1$; l'onde de choc normale est nécessairement une onde de compression transformant un écoulement supersonique en écoulement subsonique.

Pour les chocs faibles, correspondant à un écoulement faiblement supersonique en amont, on peut poser $M_1^2 = 1 + m$

et le développement de (3.63)

$$\frac{S_2 - S_1}{c_v} = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{3(\gamma + 1)} m^3 + \dots \quad (3.64)$$

débuté comme il fallait s'y attendre par le terme du troisième degré en m . Pour les chocs faibles la variation d'entropie est négligeable.

Une mesure de la dégradation d'énergie est fournie par la diminution de la pression d'arrêt.

Imaginons l'écoulement amont ralenti isentropiquement jusqu'à vitesse nulle. L'état du fluide est caractérisé par S_1 et les valeurs d'arrêt $(p_0)_1$, $(\rho_0)_1$, $(T_0)_1$; l'enthalpie totale passe entièrement sous la forme thermodynamique $c_p(T_0)_1$.

De même en aval un ralentissement isentropique donne un état S_2 , $(p_0)_2$, $(\rho_0)_2$, $(T_0)_2$ avec une enthalpie totale $c_p(T_0)_2$.

Comme l'enthalpie totale est conservée par le choc, il en est de même des températures d'arrêt :

$$(T_0)_1 = (T_0)_2 = T_0 \quad (3.65)$$

Appliquant aux deux états d'arrêt l'équation d'état du gaz

$$\frac{(p_0)_2}{(p_0)_1} = \frac{R(\rho_0)_2(T_0)_2}{R(\rho_0)_1(T_0)_1} = \frac{(\rho_0)_2}{(\rho_0)_1}$$

puis l'équation (3.20)

$$\frac{S_2 - S_1}{c_v} = \ln \frac{(p_0)_2}{(p_0)_1} - \gamma \ln \frac{(\rho_0)_2}{(\rho_0)_1} = (1 - \gamma) \ln \frac{(p_0)_2}{(p_0)_1}$$

et notant que $c_v(\gamma - 1) = R$, il vient finalement grâce à (3.63)

$$\frac{(p_0)_2}{(p_0)_1} = \frac{(\rho_0)_2}{(\rho_0)_1} = e^{-\frac{S_2 - S_1}{R}}$$

$$= \left(\frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^{-\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$= 1 - \frac{2\gamma}{3(\gamma + 1)} m^3 + \dots \quad (3.66)$$

Les changements d'entropie et de pression d'arrêt sont illustrés à la figure ().

A titre d'application considérons la pression $(p_0)_2$ qui serait mesurée par un tube de Pitot dans un écoulement supersonique uniforme de caractéristiques

$$p_\infty, \rho_\infty, M_\infty = U/a_\infty.$$

L'écoulement est d'abord ralenti par une onde de choc normale qui se forme devant le nez du tube; il est ensuite ralenti isentropiquement jusqu'à l'arrêt complet. La relation entre les pressions d'arrêt de part et d'autre de l'onde de choc est une application de la formule (3.66) dans laquelle il suffit de remplacer

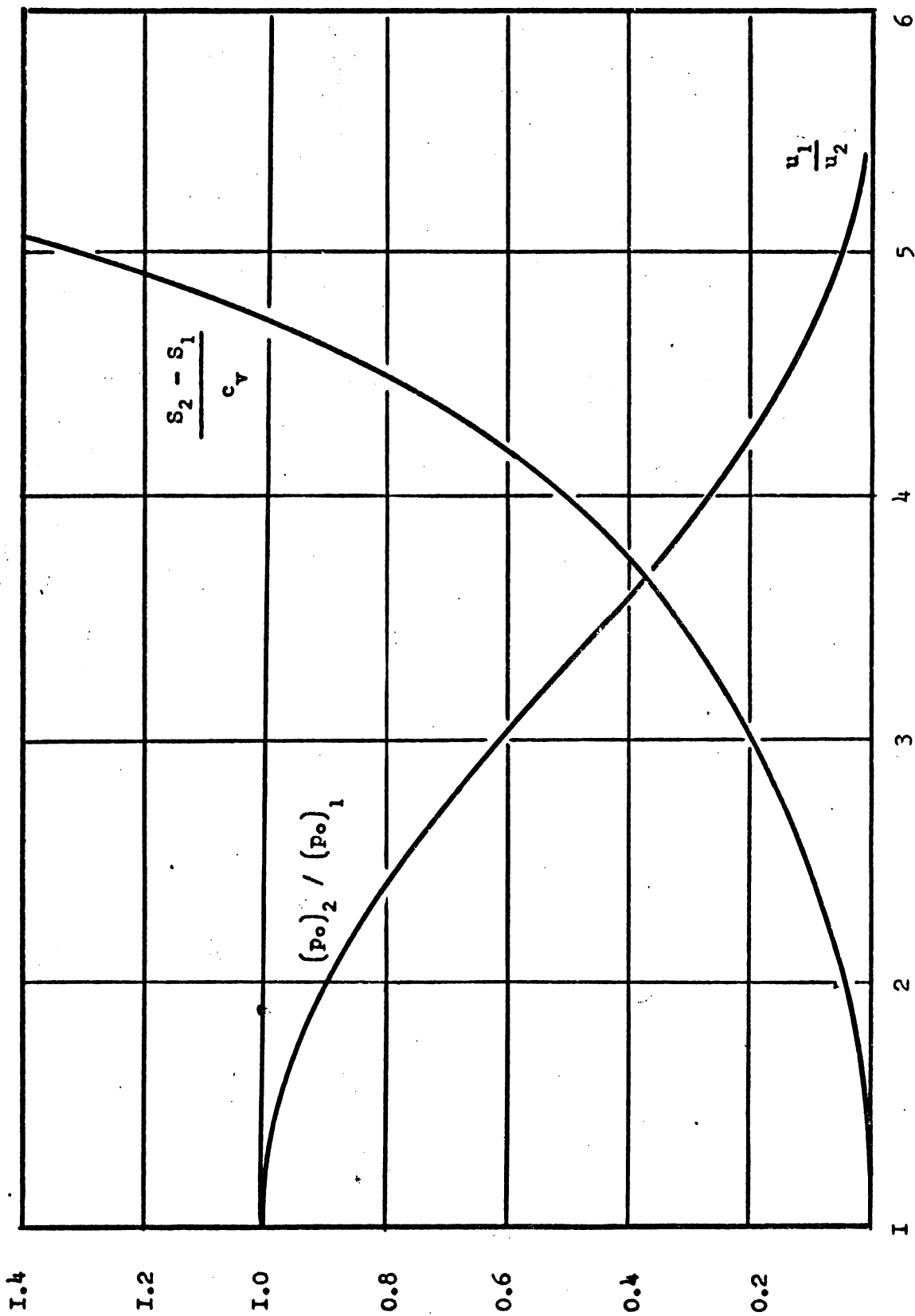
$$(p_0)_1 \text{ par } (p_0)_\infty \text{ et } M_1 \text{ par } M_\infty.$$

Ensuite la relation isentropique entre p_∞ et $(p_0)_\infty$ est une application de la formule (3.32)

$$\frac{(p_0)_\infty}{p_\infty} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Multipliant les deux formules membre à membre, on trouve la formule de Rayleigh :

$$\frac{(p_0)_2}{p_\infty} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} M_\infty^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_\infty^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (3.67)$$



Accroissement d'entropie
 Rapport des pressions d'arrêt
 au passage à travers une onde de choc normale

$\gamma = 1.4$

9. Vitesse de propagation normale d'un front d'onde.

Au régime d'écoulement avec onde de choc normale stationnaire superposons une vitesse de translation uniforme u_1 de façon à rendre le fluide immobile en amont. L'onde choc avance vers la région amont avec la célérité a_1 , laissant derrière elle une vitesse résiduelle $u_1 - u_2$. Cette vitesse résiduelle, comparée à la célérité du son a_1 dans le fluide au repos, peut être calculée comme suit. De (3.57) et (3.54)

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= a_1^2 \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{u_1^2}{a_1^2} + \frac{2}{\gamma + 1} \gamma \frac{p_1}{\rho_1 a_1^2} \right) \\ &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} u_1^2 + \frac{2}{\gamma + 1} a_1^2 \end{aligned}$$

Relation qui peut s'écrire

$$\frac{u_1 - u_2}{u_1} = \frac{2}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{a_1^2}{u_1^2} \right) = \frac{2}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{1}{M_1^2} \right) \quad (3.68)$$

Par la relation (3.61) on relie directement la vitesse de propagation à la mesure de la différence relative de pression qui propulse l'onde

$$M_1^2 = 1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{p_2 - p_1}{p_1} \quad (3.69)$$

Quand l'onde est faible $(p_2 - p_1)/p_1 \ll 1$, la vitesse de propagation tend vers a_1 et simultanément la perturbation de vitesse $u_1 - u_2$ tend vers zéro. Ces faits justifient a posteriori l'appellation de célérité du son accordée à la grandeur a définie par (3.11).

C'est la limite inférieure de la vitesse avec laquelle les perturbations de pression se propagent relativement au milieu fluide.

10. Structure de Navier Stokes de l'onde de choc.

Pour une étude de la structure même de l'onde de choc il y a lieu d'utiliser les équations de conservation (3.48) et (3.50) comportant les effets de viscosité et de conductibilité thermique. Nous les réécrivons comme suit :

$$\rho u = m \quad (3.70)$$

$$\left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{du}{dx} = p - p_1 + m (u - u_1) \quad (3.71)$$

$$\frac{1}{m} \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) u \frac{du}{dx} + \frac{k}{m} \frac{dT}{dx} = H - H_1$$

Introduisons le nombre de Prandtl longitudinal

$$Pr = \frac{c_p}{k} \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right)$$

qui permet encore de mettre la relation de conservation de l'énergie sous la forme

$$\frac{1}{m} \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) \left(u \frac{du}{dx} + \frac{1}{Pr} c_p \frac{dT}{dx} \right) = H - H_1 \quad (3.72)$$

Pour un gaz caloriquement parfait c_p est indépendant de la température et vaut

$$c_p = \frac{2+n}{2} R \quad \text{et} \quad c_v = c_p - R = \frac{n}{2} R$$

n étant le nombre de degrés de liberté de la molécule entre lesquels s'établit l'équipartition d'énergie. Si pour la conductibilité nous utilisons l'approximation d'Eucken

$$k = \left(c_v + \frac{9}{4} R \right) \mu = R \left(\frac{n}{2} + \frac{9}{4} \right) \mu$$

et pour λ l'approximation zéro, le nombre de Prandtl longitudinal a pour valeur

$$Pr = \frac{8(2+n)}{3(9+2n)}$$

Pour un gaz monoatomique ($n = 3$) on trouve $8/9$, pour un gaz diatomique dont les degrés de liberté de vibration sont excités ($n = 7$) $72/69$, non excités ($n = 5$) $56/57$. On voit donc que $Pr = 1$ est une bonne approximation. Cette approximation est très heureuse car elle transforme finalement (3.72) en

$$\frac{1}{m} \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{dH}{dx} = H - H_1$$

Une intégrale particulière de cette équation est visiblement

$$H = H_1 \quad (3.73)$$

C'est précisément celle qui, eu égard à (3.53), convient aux conditions aux limites en amont et en aval.

Ainsi, même à travers l'onde de choc, il y a conservation de l'enthalpie totale.

Il reste à intégrer le profil des vitesses à travers l'onde.

Transformons pour cela le second membre de (3.71).

Mettons le résultat (3.73) sous la forme

$$\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a^2$$

et résolvons pour la pression en remplaçant $\rho = m/u$:

$$p = m \left(\frac{\gamma + 1}{2 \gamma} \frac{a^2}{u} - \frac{\gamma - 1}{2 \gamma} u \right)$$

Avec la formule similaire pour p_1 le second membre de (3.71) devient toutes réductions faites

$$m \frac{\gamma + 1}{2 \gamma} (u_1 - u) \left(\frac{a^2}{u u_1} - 1 \right)$$

ou encore, compte tenu de la relation des vitesses (3.57) de part et d'autre de l'onde

$$m \frac{\gamma + 1}{2 \gamma} \frac{(u_1 - u)(u_2 - u)}{u}$$

Au premier membre de (3.71) il faut encore tenir compte du fait que la viscosité augmente théoriquement proportionnellement à la racine carrée de la température absolue. Nous pouvons écrire

$$\left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) = \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right)_1 \left(\frac{T}{T_1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Par suite de la conservation de l'enthalpie totale ceci est encore

$$\left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) = \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right)_1 \left(\frac{V_1^2 - u^2}{V_1^2 - u_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

En définitive, introduisant la vitesse non-dimensionnelle

$$\omega = u/V_1$$

et la longueur caractéristique

$$e_1 = \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right)_1 \frac{1}{\rho_1 a_1} \quad (3.74)$$

qui ne dépend que des conditions en amont, il faut effectuer la quadrature

$$dx = \frac{e_1}{M_1} \left(\frac{1 - \omega^2}{1 - \omega_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\omega d\omega}{(\omega_2 - \omega)(\omega_1 - \omega)} \quad (3.75)$$

L'intégrale a été trouvée par L.H. Thomas

$$M_1 \frac{x}{e_1} = \frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2} \ln \frac{\omega_1 - \omega}{1 - \omega\omega_1 + \{(1 - \omega_1^2)(1 - \omega^2)\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \left(\frac{1 - \omega^2}{1 - \omega_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{\omega - \omega_2}{1 - \omega\omega_2 + \{(1 - \omega_2^2)(1 - \omega^2)\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \left(\frac{1 - \omega^2}{1 - \omega_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\omega_1 + \omega_2}{(1 - \omega_1^2)^{\frac{1}{2}}} \sin^{-1} \omega \quad (3.76)$$

Le profil des vitesses se raccorde asymptotiquement aux valeurs u_1 et u_2 des écoulements uniformes.

L'épaisseur effective de l'onde de choc pourrait être définie comme la distance sur laquelle les valeurs de u_1 et de u_2 sont réalisées à 99 %.

Ce calcul peut être fait à partir de l'expression (3.76). Pour trouver une formule plus maniable nous allons intégrer de façon approchée l'équation différentielle

$$\left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{du}{dx} = m \frac{\gamma + 1}{2 \gamma} \frac{(u_1 - u)(u_2 - u)}{u} \quad (3.77)$$

Observons que le membre de droite prend une valeur minimum pour $u^2 = u_1 u_2 = a^{*2}$, c'est-à-dire dans la section où l'écoulement est exactement sonique. Dans les mêmes conditions

$$\frac{\left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right)}{\left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right)_1} = \left(\frac{T}{T_1} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^*}{a_1} = \frac{a^*}{V_1} \frac{V_1}{u_1} \frac{u_1}{a_1}$$

que les formules (3.28) et (3.31) mettent finalement sous la forme

$$\left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) = \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right)_1 \left(\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Intégrons alors (3.77) de u_1 à u_2 comme si le coefficient de du/dx conservait cette valeur et le membre de droite son minimum

$$m \frac{\gamma + 1}{2 \gamma} \frac{(u_1 - a^*)(u_2 - a^*)}{a^*}$$

Compte tenu de la relation (3.57) le résultat final pour l'épaisseur est

$$e = e_1 \frac{2 \gamma}{\gamma + 1} \frac{z(1+z)}{1-z} \quad \text{avec} \quad z = \frac{1}{M_1} \left(\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

La longueur caractéristique e_1 est évidemment en relation simple avec le libre parcours moyen dans les conditions amont. En fait ce libre parcours moyen L_1 peut être estimé par la théorie cinétique des gaz à la valeur

$$L_1 = \frac{m}{\pi \rho_1 r_0^2}$$

où m est la masse d'une molécule et r_0 son rayon effectif. Chassant le rapport m/r_0^2 avec la valeur théorique

$$\mu = \frac{5m}{16r_0^2} \left(\frac{RT}{\pi} \right)^{1/2}$$

il vient

$$L_1 = \frac{16}{5\sqrt{\pi}} \frac{u_1}{\rho_1 (RT_1)^{1/2}} = \frac{16}{5} \left(\frac{\gamma}{\pi} \right)^{1/2} \frac{u_1}{\rho_1 a_1} \quad (3.78)$$

de sorte que, avec l'approximation correspondante $\lambda = 0$, on trouve

$$e_1 = \frac{5}{12} \left(\frac{\pi}{\gamma} \right)^{1/2} L_1$$

Comme l'épaisseur approximative a été calculée sur la base de la variation de la vitesse de l'écoulement dans les conditions soniques, il est également plus logique de la comparer avec le libre parcours moyen calculé dans les mêmes conditions. Puisqu'il a été admis que μ varie tout comme a proportionnellement à la racine carrée de la température, on aura selon (2.78) et selon la constance du débit massique

$$\frac{L_1}{L^*} = \frac{\rho^*}{\rho_1} = \frac{u_1}{a^*} = M_1$$

Par conséquent

$$\frac{e}{L^*} = \frac{e}{e_1} \frac{e_1}{L_1} \frac{L_1}{L^*} = \frac{e}{e_1} \frac{5}{12} \left(\frac{\pi}{\gamma} \right)^{1/2} M_1$$

Les valeurs de z , e/e_1 et e/L^* ont été tabulées ci-dessous en fonction de M_1 pour $\gamma = 1,4$

M_1	z	e/e_1	e/L^*
1,05	0,960481	55,59	36,43
1,1	0,924862	27,64	18,98
1,3	0,812257	9,15	7,42
1,5	0,732828	5,55	5,19
2,0	0,612372	2,97	3,71
3,0	0,509175	1,83	3,42
4,0	0,467707	1,50	3,76
5,0	0,447213	1,37	4,26
"	1/16	1,13	"

On voit que, spécialement entre les nombres de Mach 1,5 et 5, le nombre de libre parcours moyen paraît trop faible pour justifier une structure exacte de l'onde de choc sur la base d'un équilibre thermodynamique local.

II. L'onde de choc oblique stationnaire.

Prenons l'axe ox perpendiculaire à l'onde de choc, l'écoulement permanent possède deux composantes de vitesse $u(x)$ et $v(x)$ qui, en amont, ont les valeurs constantes u_1 et v_1 . Les seules composantes non identiquement nulles du tenseur des vitesses de déformation sont

$$\theta_{xx} = \frac{du}{dx} \quad \text{et} \quad \theta_{xy} = \frac{1}{2} \frac{dv}{dx}$$

auxquelles correspondent les tensions de viscosité

$$\sigma_{xx} = \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{du}{dx} \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{du}{dx}$$

$$\sigma_{xy} = \mu \frac{dv}{dx} \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$$

La conservation de la masse reste exprimée par

$$\frac{d}{dx} (\rho u) = 0$$

la conservation de la quantité de mouvement (eqs. 2.2I) par

$$\rho u \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} (\sigma_{xx} - p)$$

$$\rho u \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx} \sigma_{xy}$$

la conservation de l'énergie (eqs. 2.30, 2.3I, et 2.43) par

$$u \frac{d}{dx} \left(U + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) = \frac{d}{dx} (u (\sigma_{xx} - p) + v \sigma_{xy}) + \frac{d}{dx} k \frac{dT}{dx}$$

Les intégrales de ces équations sont exprimées en fonction des conditions uniformes en amont par

$$\rho u = \rho_1 u_1$$

$$p + \rho u^2 = p_1 + \rho_1 u_1^2 + \sigma_{xx}$$

$$\rho uv = \rho_1 u_1 v_1 + \sigma_{xy}$$

$$\rho u \left(U + \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = \rho_1 u_1 \left(U_1 + \frac{u_1^2 + v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} \right) + u \sigma_{xx} + v \sigma_{xy}$$

$$+ k \frac{dT}{dx}$$

Nous discuterons seulement les relations entre les valeurs des variables en amont et les mêmes variables en aval de l'onde (indice 2) où les conditions sont redevenues uniformes ($\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0$ et $dT/dx = 0$). Ces relations s'écrivent

$$\rho_2 u_2 = \rho_1 u_1 \quad (3.79)$$

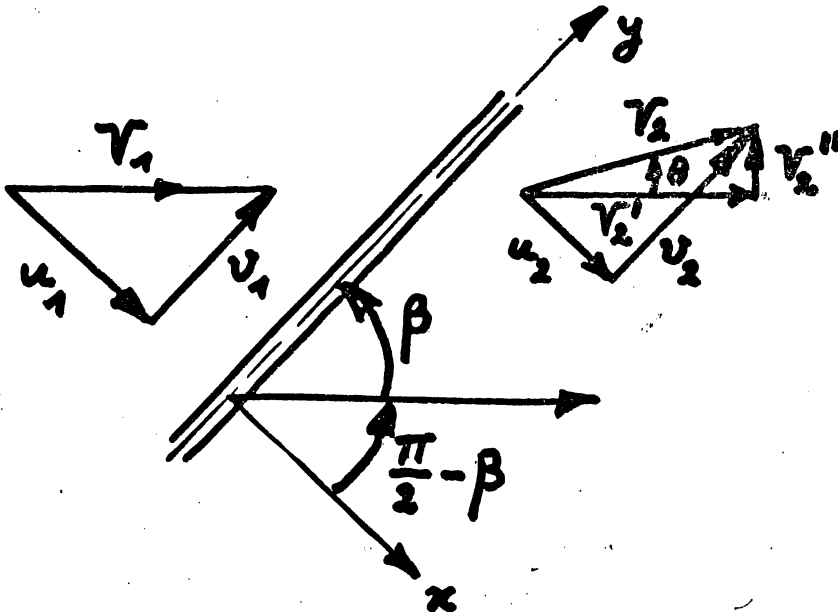
$$p_2 + \rho_2 u_2^2 = p_1 + \rho_1 u_1^2 \quad (3.80)$$

ensuite, utilisant déjà le résultat (3.79)

$$v_2 = v_1 = v \quad (3.81)$$

enfin, observant que $I = U + \frac{P}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho}$ et utilisant aussi (3.79),

$$\frac{u_2^2 + v_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{u_1^2 + v_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} \quad (3.82)$$



$$\begin{aligned} \frac{v}{u_2} &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta + \theta\right) \\ &= \frac{\cos(\theta - \beta)}{\sin(\theta - \beta)} \end{aligned}$$

Les relations (3.79) et (3.80) sont les mêmes que celles (3.51) et (3.52) de l'onde de choc normale. Le résultat simple (3.81), provenant de la conservation de la quantité de mouvement parallèlement à l'onde, permet de mettre la conservation de l'enthalpie totale (3.82) sous une forme qui rappelle celle (3.54) de l'onde normale :

$$\frac{u_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \left(a^*{}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} v^2 \right) \quad (3.83)$$

On voit donc que les lois gouvernant les composantes normales u_1 et u_2 sont les mêmes que celles de l'onde normale à condition de remplacer le carré de la vitesse critique par l'expression figurant entre parenthèses au second membre

de (3.83). La transposition de la relation de vitesse (3.57) en particulier fournit

$$u_1 u_2 = a^2 M^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} v^2 \quad (3.84)$$

Cette relation est commode pour calculer l'angle de déflexion du courant aval quand on connaît le nombre de Mach amont M_1 et l'angle β que fait l'onde de choc avec le courant en amont. En effet les relations géométriques

$$u_1 = V_1 \sin \beta \quad (3.85)$$

$$v = V_1 \cos \beta \quad (3.86)$$

transforment (3.84) en

$$u_2 = \frac{V_1}{\sin \beta} \left[\left(\frac{a^2}{V_1^2} \right)^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cos^2 \beta \right]$$

On déduit également de l'expression suivante pour l'enthalpie totale

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{\gamma - 1} = a^2 M^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} \right)$$

que

$$\left(\frac{a^2}{V_1^2} \right)^2 = \frac{1}{\gamma + 1} \left(\gamma - 1 + \frac{2}{M_1^2} \right)$$

et par conséquent

$$u_2 = \frac{V_1}{\sin \beta} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \sin^2 \beta + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{M_1^2} \right) \quad (3.87)$$

Une autre relation géométrique est

$$u_2 = v \tan(\beta - \theta) = V_1 \cos \beta \tan(\beta - \theta) \quad (3.88)$$

Egalant les deux valeurs de u_2 et résolvant pour $\tan \theta$

$$\tan \theta = 2 \cot \beta \frac{\sin^2 \beta - 1/M_1^2}{(\gamma + 1) \cos^2 \beta + (\gamma - 1) \sin^2 \beta + 2/M_1^2} \quad (3.89)$$

c'est la relation cherchée pour la déviation considérée comme fonction de M_1 et de β .

Pour sa discussion il est utile de l'associer à l'équation

$$\begin{aligned} \frac{u_2}{u_1} &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{(M_1 \sin \beta)^2} \\ &= 1 + \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{1}{(M_1 \sin \beta)^2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (3.90)$$

déduite de (3.87) et (3.85).

La déviation θ apparaît dans (3.89) comme une fonction impaire de β ; ceci exprime simplement la symétrie du phénomène par rapport à la direction du courant amont et permet de limiter la discussion aux angles β positifs.

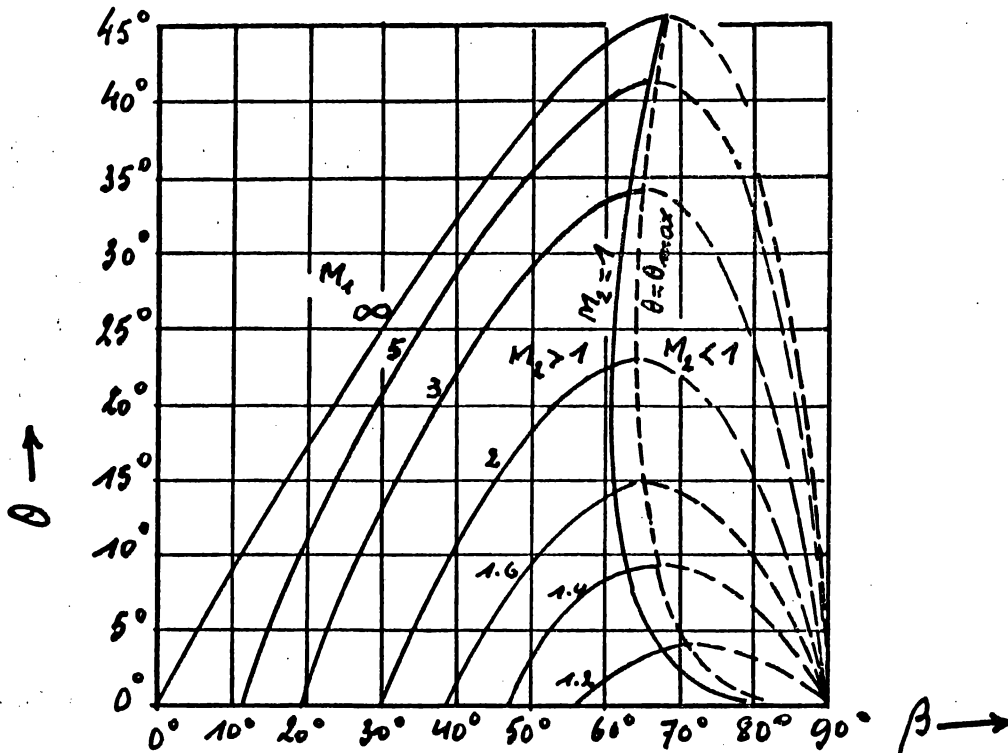
Pour $\sin \beta < 1/M_1$, la déviation est négative mais ces valeurs petites de β sont à rejeter car selon (3.90) elles entraînent $u_2 > u_1$ et, comme on l'a vu, il en résulterait une diminution de l'entropie du courant.

Pour $\sin \beta > 1/M_1$, la déviation devient positive croissante, passe par un maximum puis redevient nulle pour $\beta = \pi/2$, auquel cas on retrouve une onde de choc normale.

Le maximum a lieu pour un angle β solution de

$$\gamma \sin^2 \beta = \frac{\gamma + 1}{4} - \frac{1}{M_1^2} + (\gamma + 1)^{1/2} \left(\left(\frac{\gamma - 1}{4} + \frac{1}{M_1^2} \right)^2 + \frac{\gamma(3 - \gamma)}{16} \right)^{1/2}$$

La figure () montre pour $\gamma = 1,4$ les déviations que l'on peut obtenir en fonction du nombre de Mach en amont. On voit qu'une déviation inférieure au maximum peut être réalisée par deux ondes de choc d'inclinaisons différentes.



Pour les valeurs de $\sin \beta$ voisines de $1/M_1$, c'est-à-dire pour les chocs faibles donnant de faibles déviations une approximation satisfaisante consiste à remplacer au dénominateur de (3.89) $\sin^2 \beta$ par $1/M_1^2$ et conduit à la formule simplifiée

$$\theta = \frac{\sin^2 2\beta}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{1}{(M_1 \sin \beta)^2} \right) \quad (3.91)$$

Pour la suite il est également intéressant d'établir dans le cas des chocs faibles la correspondance entre la petite variation du module de la vitesse de l'écoulement et la petite déflexion.

Tout d'abord pour le rapport des carrés des modules, utilisant les relations géométriques

$$u_1 = v \tan \beta \quad u_2 = v \tan (\beta - \theta)$$

$$\frac{V_1^2}{V_2^2} = \frac{u_1^2 + v^2}{u_2^2 + v^2} = \frac{1 + \tan^2 \beta}{1 + \tan^2 (\beta - \theta)} = \frac{\cos^2 (\beta - \theta)}{\cos^2 \beta}$$

soit encore le résultat rigoureux

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\cos (\beta - \theta)}{\cos \beta} \quad (3.92)$$

Si l'angle de déviation est faible

$$\cos (\beta - \Delta \theta) = \cos \beta + \Delta \theta \sin \beta$$

et pour le choc faible

$$V_2 = V_1 + \Delta V$$

Ces approximations substituées dans (3.92) donnent

$$\frac{\Delta V}{V_2} = - \Delta \theta \tan \beta$$

Au même ordre d'approximation on peut encore substituer au premier membre V_1 à V_2 et au second membre considérer que l'angle β est défini par $M_1 \sin \beta = 1$, il vient finalement

$$\frac{\Delta V}{V_1} = - \frac{\Delta \theta}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \quad (3.93)$$

Le rapport des masses volumiques à travers une onde de choc oblique est gouverné par l'équation de conservation de la masse (3.79). Une comparaison entre (3.59) et (3.90) montre immédiatement que la formule (3.59) de l'onde normale reste valable à condition d'y substituer $M_1 \sin \beta$ à M_1 . La même remarque s'applique à la formule (3.6E) du rapport des pressions, puisque la relation (3.60) de Rankine reste valable.

Pour les chocs faibles on trouve

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{\gamma M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \theta \quad (3.94)$$

Enfin, la même remarque s'applique aussi à la formule (3.63).

Pour les chocs faibles on trouve que l'accroissement d'entropie est proportionnel à θ^3 .

12. La polaire de choc.

Une autre présentation graphique du choc oblique est un diagramme polaire reliant la composante V_2'' de la vitesse aval, perpendiculaire au courant amont, à la composante V_2' qui lui est parallèle. La relation géométrique

$$V_2' = u_2 \sin \beta + v \cos \beta$$

multipliée par V_1 fournit, eu égard à (3.85) et (3.86)

$$V_1 V_2' = u_1 u_2 + v^2$$

et permet de remplacer (3.84) par

$$V_1 V_2' = a^{*2} + \frac{2}{\gamma+1} v^2 = a^{*2} + \frac{2}{\gamma+1} V_1^2 \cos^2 \beta \quad (3.94)$$

On peut y éliminer l'angle β par la relation

$$v = V_1 \cos \beta = V_2' \cos \beta + V_2'' \sin \beta$$

qui fournit la tangente. Le résultat, résolu par rapport à V_2'' , est l'équation de la polaire de choc

$$q_2 = (M_1^{*2} - p_2)^2 \frac{M_1^{*2} p_2 - 1}{1 + \frac{2}{\gamma+1} M_1^{*2} - M_1^{*2} p_2} \quad (3.95)$$

où l'on s'est servi des variables réduites

$$M_1^{*2} = V_1 / a^{*2}$$

$$p_2 = V_2' / a^{*2}$$

$$q_2 = V_2'' / a^{*2}$$

La courbe est une strophoïde ou "folium de Descartes" (figure).

Comme

$$(p_2^2 + q_2^2)^{1/2} = V_2 / a^{*2} = M_2^{*2} \quad p_2 / q_2 = \tan \theta$$

le nombre de Mach étoilé et la déflexion en aval se lisent directement en joignant à l'origine le point représentatif sur la courbe. Il y a deux points correspondant à $q_2 = 0$; le point double A pour lequel $p_2 = M_1^{*2}$ et l'écoulement est continu sans choc; le point B pour lequel $p_2 = 1/M_1^{*2}$ qui représente le choc normal.

Une déflexion imposée θ du courant aval peut en général être réalisée par trois chocs différents. Cependant le point représentatif E correspond visiblement à un nombre de Mach aval supérieur à celui en amont; c'est une onde d'expansion à rejeter puisqu'elle entraînerait une diminution d'entropie; les branches de la strophoïde à droite de A sont donc à éliminer.

Au point C correspond une onde de compression faible, le courant en aval restant supersonique ($M_2^{*2} > 1$).

Au point D correspond une onde de compression forte se rapprochant d'une onde normale avec courant subsonique en aval.

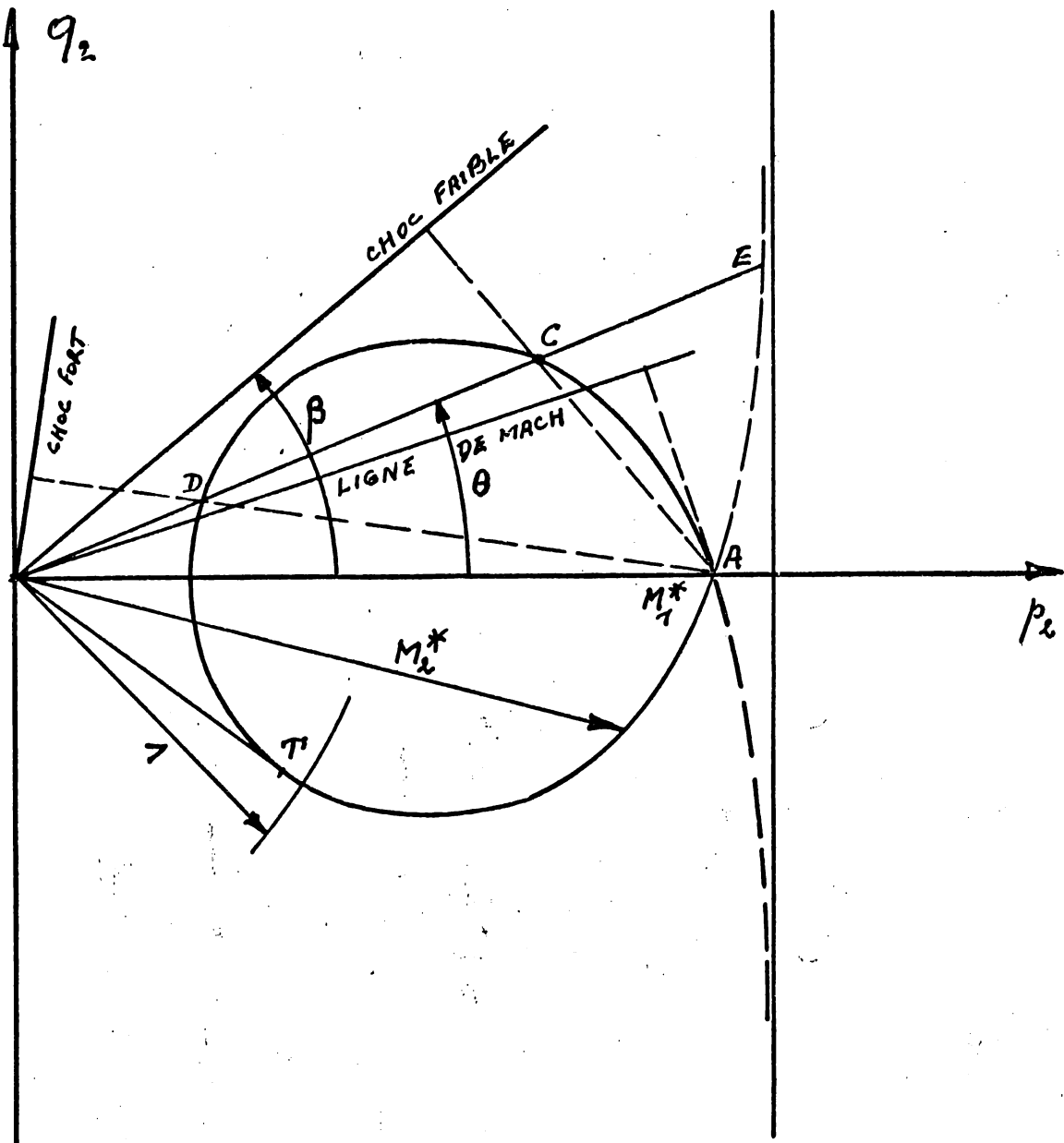
On constate aussi qu'à tout nombre de Mach amont correspond une déflexion maximum réalisable par un choc. Dans le voisinage immédiat de cet angle limite les chocs possibles entraînent tous deux des conditions subsoniques en aval car les points de tangence T sur la strophoïde ont un rayon polaire légèrement

inférieur à l'unité. L'inclinaison de l'onde de choc se laisse construire par la relation

$$\tan \beta = \frac{v_1 - v'_2}{v_2''} = \frac{M_1^* - p_2}{q_2}$$

Par conséquent la droite joignant le point A au point représentatif fait l'angle β avec l'axe des q_2 . Menant de l'origine une perpendiculaire à cette droite on obtient l'orientation de l'onde de choc par rapport au courant amont.

Plus le choc est fort (M_2^* petit) plus l'onde se redresse et tend à devenir normale.



POLAIRE DE CHOC

13. Lignes de Mach. Dièdre et cône de Mach.

Sur la polaire du choc, l'orientation limite des chocs infiniment faibles s'obtient en menant une perpendiculaire à la tangente au folium en $A(q_2 = 0)$.

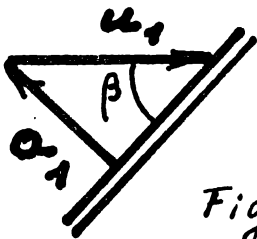
Faisant $V_2' = V_1$ dans (3.94) et divisant par V_1^2 on trouve

$$1 = \frac{1}{M_1^2} + \frac{2}{\gamma + 1} \cos^2 \beta \quad \text{soit} \quad \sin^2 \beta = \frac{1}{M_1^2} \quad (3.96)$$

confirmant un résultat précédent. Les deux ondes de choc infiniment faibles et symétriques par rapport au courant s'appellent "lignes de Mach" et l'équation (3.96) exprime que la composante de la vitesse normale à ces ondes est exactement égale à la célérité du son ($\pm V_1 \sin \beta = a_1$).

Pour les chocs finis cette composante est nécessairement supersonique en amont et subsonique en aval.

Le même résultat peut être obtenu en observant que pour rendre stationnaire un front d'onde très faible (et qui se propage donc suivant la normale avec la célérité du son) en lui superposant une vitesse u_1 qui fait avec l'onde un angle β , il faut que



$$u_1 = a_1 \frac{1}{\sin \beta}$$

Fig. 3.8.

la vitesse résultante étant alors parallèle à l'onde.

Enfin les lignes de Mach peuvent être envisagées comme les enveloppes des fronts d'onde cylindriques émis par une faible perturbation dans un courant uniforme. En effet considérons d'abord (fig. 3.9.a) les perturbations émises par une ligne de trace P dans le fluide au repos.

Une perturbation émise à l'époque $t = 0$ se propage avec la célérité a dans toutes les directions et donne lieu, à l'époque t et dans le plan du mouvement, à un front circulaire de rayon at . Superposons alors un courant uniforme de vitesse V . Pendant que son rayon croît avec le temps la circonférence est entraînée avec la vitesse V du courant. Tant que cette vitesse est inférieure à a on aura la situation représentée à la figure (3.9.b).

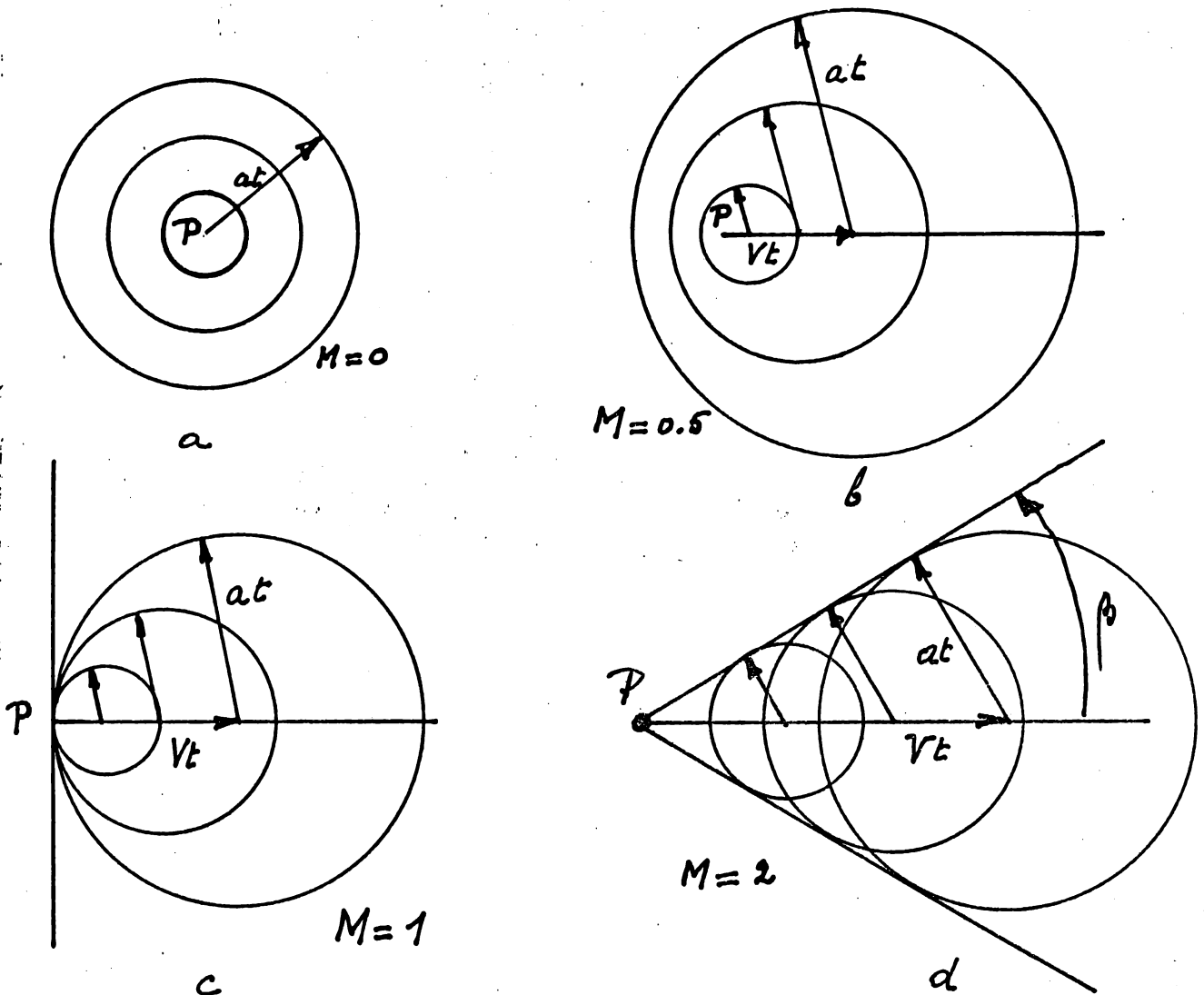
N'importe quel point peut encore être atteint par un front d'onde, pourvu que l'intervalle de temps soit suffisamment grand.

Quand la vitesse du courant atteint celle du son, on a le cas représenté à la figure (3.9.c). Plus aucun point situé à gauche de la transversale par P ne peut être atteint par une perturbation infiniment faible.

Enfin quand l'écoulement uniforme est supersonique on a le cas de la figure (3.9.d). L'enveloppe des fronts d'ondes émises à différentes époques est un dièdre dont la trace est constituée des deux lignes de Mach.

L'extérieur de ce dièdre est inaccessible aux perturbations infinitésimales, c'est la "règle des signaux interdits".

Si la perturbation émane d'un point isolé, les fronts d'ondes sont sphériques. Le dièdre de Mach se transforme en cône de Mach.



Figs. 3.9.

Tout comme le cône de Mach est le lieu des points qui peuvent être atteints par les perturbations infinitésimales issues de P , l'anticône de Mach est le lieu des points dont les perturbations peuvent être ressenties en P .

14. Expansion de Prandtl-Meyer.

La formule (3.93) fournit la relation entre la diminution de vitesse et le changement infinitésimal de direction du courant provoqués par un choc évanescent. En cas de modification graduelle de l'orientation du courant, telle que provoquée par une paroi incurvée (fig. 3.10),

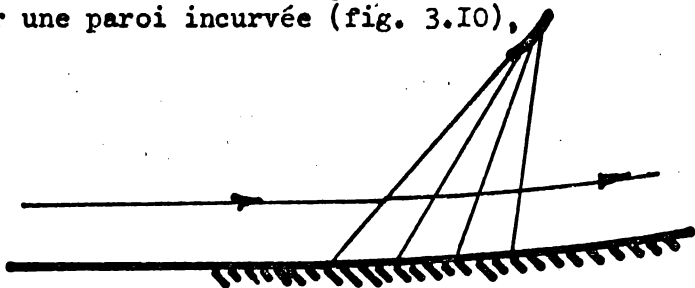


Fig. 3.10

L'évolution isentropique résultant d'une suite de chocs infinitésimaux s'accompagne d'une interférence entre les lignes de Mach successives. En effet celles-ci se redressent sous le double effet du changement d'orientation et de la diminution du nombre de Mach. Il en résulte la formation d'un choc fini à une certaine distance de la paroi.

Au contraire, lors d'une expansion du courant (fig. 3.II), les lignes de Mach sont séparées par le changement d'orientation du courant et l'accroissement du nombre de Mach.

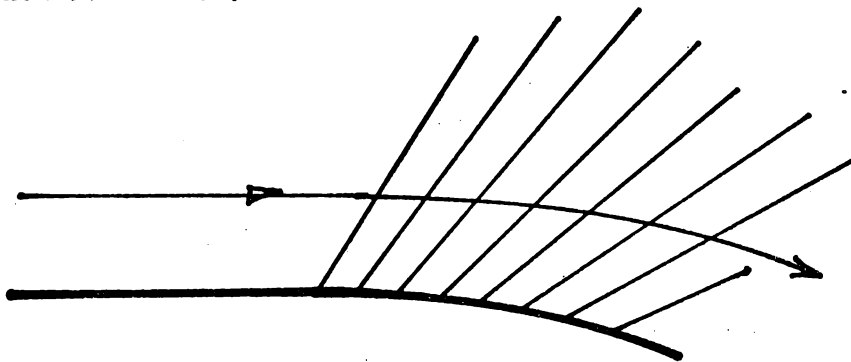


Fig. 3.II

Cette expansion a été étudiée par Prandtl et Meyer. La relation entre nombre de Mach et direction du courant s'obtient par intégration de l'équation (3.93) avec évolution isentropique. Changeant le signe de $d\theta$ pour compter θ positivement dans le sens d'une expansion

$$\frac{dV}{V} = \frac{d\theta}{\sqrt{M^2-1}} \quad (3.93)$$

Pour intégrer il faut lier M à V par la condition d'une évolution isentropique. Par différentiation de la dernière égalité dans (3.23), par exemple :

$$VdV + \frac{2}{\gamma-1} a da = 0 \quad (3.97)$$

Mais aussi :

$$\text{de } V = a M \quad \frac{dV}{V} = \frac{da}{a} + \frac{dM}{M} \quad (3.98)$$

Eliminant da et dV entre (3.93), (3.97) et (3.98) il vient

$$d\theta = \frac{\sqrt{M^2-1} dM}{M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)} \quad (3.99)$$

et le problème se ramène à une quadrature. Celle-ci s'effectue facilement en utilisant la variable auxiliaire

$$\omega = \tan \alpha = \cot \beta = \sqrt{M^2 - 1} \quad (3.100)$$

L'angle $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ est celui que fait la ligne de Mach avec la perpendiculaire au vecteur vitesse local, il croît avec le nombre de Mach. L'équation (3.99) se transforme en

$$d\theta = - \frac{d\omega}{1 + \omega^2} + \frac{d\omega}{1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \omega^2} \quad (3.101)$$

Dans l'expression

$$\theta = - \arctan \sqrt{M^2 - 1} + \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \sqrt{\frac{-\gamma-1}{\gamma+1} (M^2 - 1)} \quad (3.102)$$

qui en résulte, la constante d'intégration a été choisie de telle façon que

$$\theta = 0 \quad \text{pour} \quad M = 1$$

et le second membre $f(M)$ s'appelle alors "fonction de Prandtl-Meyer", dont il existe plusieurs tables. Si la déviation est à mesurer à partir d'un courant amont de nombre de Mach supersonique M_1 , on utilisera la formule

$$\Delta\theta = \theta - \theta_1 = f(M) - f(M_1).$$

Le nombre de Mach correspondant à une déviation donnée s'obtient par interpolation dans la table; les changements corrélatifs de pression, de masse volumique, de température, sont alors obtenus par application des formules d'évolution isentropique.

La déviation maximum qui peut être atteinte en théorie à partir d'un écoulement sonique, correspond à $M = \infty$ dans (3.102). Elle vaut

$$\theta_{\max} = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1 \right)$$

Pour $\gamma = 1,4$, cette valeur représente environ 130 degrés.

L'expansion de Prandtl-Meyer, étant un phénomène isentropique, peut être développée indépendamment de l'étude des ondes de choc et poussée jusqu'à la détermination des lignes de courant. Prenons le cas d'une expansion autour d'un point anguleux (fig. 3.12).

Le courant amont est supposé sonique, on utilise les coordonnées polaires r et ϕ (mesuré à partir de la ligne de Mach de l'écoulement amont). Comme il n'y a pas de dimension linéaire caractéristique dans le problème on supposera que dans l'éventail séparant les deux écoulements uniformes les caractéristiques de l'écoulement ne dépendent que de l'angle ϕ

$$\begin{aligned} u &= u(\phi) & \text{vitesse radiale} \\ v &= v(\phi) & \text{vitesse tangentielle} \\ \rho &= \rho(\phi) \end{aligned}$$

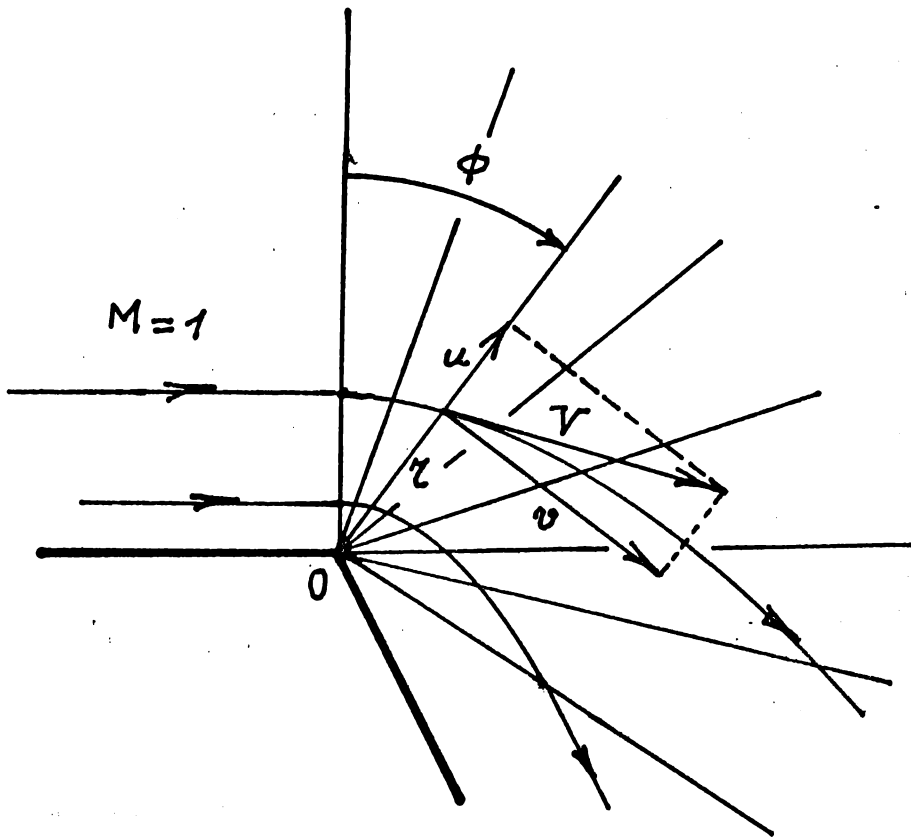


Fig. 3.12

L'équation de conservation de la masse, obtenue par exemple en annulant le débit massique sortant d'un élément de surface ($r \leq \bar{r} \leq r + dr$, $\phi \leq \bar{\phi} \leq \phi + d\phi$) se réduit à

$$\rho \left(u + \frac{dv}{d\phi} \right) + v \frac{d\rho}{d\phi} = 0 \quad (3.103)$$

L'écoulement uniforme amont étant irrotationnel et l'évolution isentropique, la région dans l'éventail est également irrotationnelle. Par annulation de la circulation sur le contour bordant l'élément de surface, on trouve simplement

$$v = \frac{du}{d\phi} \quad (3.104)$$

Enfin, par suite de la conservation de l'enthalpie totale,

$$u du + v dv + \frac{dp}{\rho} = 0$$

Comme $a^2 = dp/d\rho$ cette relation s'écrit aussi

$$u \frac{du}{d\phi} + v \frac{dv}{d\phi} + \frac{a^2}{\rho} \frac{d\rho}{d\phi} = 0 \quad (3.105)$$

Tirant $du/d\phi$ de (3.I04) , $dv/d\phi$ de (3.I03) et substituant dans (3.I05) , il vient

$$(a^2 - v^2) \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\phi} = 0$$

On vérifie facilement que la solution $\rho = \text{constante}$ est triviale, elle ne fournit qu'un prolongement du courant uniforme en amont. L'autre solution

$$v = a \tag{3.I06}$$

exprime que les rayons issus du point anguleux sont des lignes de Mach. Les résultats (3.I04) et (3.I06), portés dans l'équation de conservation de l'enthalpie :

$$\frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{1}{2} V_\infty^2$$

fournissent une équation différentielle

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (u^2 - v^2) = 0$$

qui a pour solution ($u = 0$ pour $\phi = 0$)

$$u = V_\infty \sin(\lambda\phi) \quad \text{où} \quad \lambda = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \tag{3.I07}$$

Ensuite, par (3.I04)

$$v = \lambda V_\infty \cos(\lambda\phi) \tag{3.I08}$$

Les lignes de courant résultant d'une intégration de

$$\frac{dr}{u} = \frac{r d\phi}{v}$$

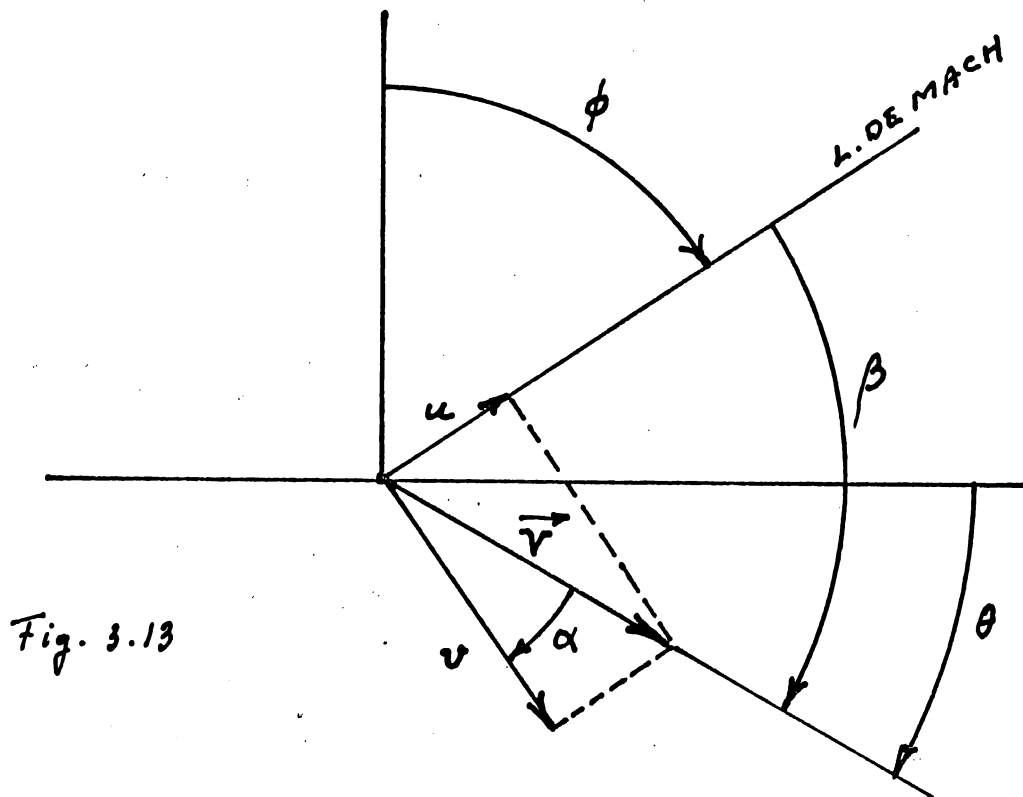
soit

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\phi} = \lambda \tan(\lambda\phi)$$

Elles sont donc obtenues sous la forme polaire

$$r = r_0 \left(\cos(\lambda\phi) \right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tag{3.I09}$$

Notant (fig. 3.13) qu'entre ϕ , β et θ existe la relation



$$\phi = \theta + \frac{\pi}{2} - \beta = \theta + \alpha$$

et que

$$\tan \alpha = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \phi \right)$$

il vient en tirant ϕ de cette dernière relation

$$\theta = \phi - \alpha = -\alpha + \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \tan \alpha \right)$$

Suivant (3.100) ce résultat est bien identique à (3.102).

15. Développements en série des coefficients de pression en fonction de la déviation du courant.

Le calcul exact de la pression correspondant à une déviation connue du courant supersonique amont ne peut se faire qu'indirectement. Dans le cas d'une déviation par un choc oblique, par exemple, on tire de (3.6I) en remplaçant M_{11} par $M_1 \sin \beta$

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \quad (3.110)$$

où $\sin \beta$ doit être trouvé par interpolation de la relation (3.89). Dans le cas d'une déviation isentropique, le nombre de Mach M_2 en aval doit d'abord être obtenu par interpolation de la fonction de Prandtl-Meyer; ensuite le rapport des pressions peut être réduit de la relation de de Saint-Venant-Wantzel (3.32)

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \quad (3.III)$$

Pour de faibles déviations il est intéressant de construire des développements en série de puissances de θ , ce qui permet notamment de comparer directement les pressions dues à une déviation par choc (indice c) à celles résultant d'une évolution isentropique (indice a). Nous chercherons les coefficients (fonctions de M_1 et de γ) des développements des coefficients de pression

$$C_P = \frac{P_2 - P_1}{\frac{1}{2} \rho_1 V_1^2} = \frac{2}{\gamma M_1^2} \frac{P_2 - P_1}{P_1} \quad (3.II2)$$

Pour le cas du choc nous poserons

$$(C_P)_c = x = A_c \theta + B_c \theta^2 + C_c \theta^3 + \dots \quad (3.II3)$$

Pour le cas isentropique

$$(C_P)_a = y = A_a \theta + B_a \theta^2 + C_a \theta^3 + \dots \quad (3.II4)$$

I°) Cas du choc :

De (3.II0) nous tirons

$$x = \frac{4}{\gamma+1} \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{M_1^2} \right)$$

et éliminons $\sin \beta$ avec l'équation (3.89). Le résultat peut se mettre sous la forme

$$(x + a) (2 - x)^2 \tan^2 \theta = + x^2 (a(M_1^2 - 1) - x) \quad (3.II5)$$

où

$$a = \frac{4}{(\gamma + 1) M_1^2}$$

Cette équation du troisième degré en x a trois racines correspondant pour un θ donné aux trois solutions de la polaire de choc. Seule la racine correspondant au choc faible nous intéresse. Nous l'obtenons automatiquement en posant le développement du type (3.II3) qui donne $x = 0$ pour $\theta = 0$. La structure de l'équation (3.II5) incite cependant à poser, pour la facilité des calculs, le développement préliminaire

$$x = M \tan \theta + N \tan^2 \theta + P \tan^3 \theta + \dots$$

Substituant dans (3.II5) et identifiant les puissances de $\tan \theta$ on trouve

$$M = \frac{2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \quad N = \frac{(\gamma+1) M_1^4 - 4(M_1^2 - 1)}{2(M_1^2 - 1)^2}$$

$$P = \frac{(\gamma+1)^2 M_1^8 + 4(\gamma+1)(\gamma-5) M_1^6 + 8(7+3\gamma) M_1^4 - 64 M_1^2 + 32}{16 (M_1^2 - 1)^{7/2}}$$

Enfin, notant le développement

$$\tan \theta = \theta + \frac{1}{3} \theta^3 + \dots$$

il vient pour les coefficients de (3.II3)

$$A_c = M \quad B_c = N \quad C_c = P + \frac{1}{3} M$$

c'est-à-dire

$$A_c = \frac{2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \quad B_c = \frac{(\gamma+1) M_1^4 - 4(M_1^2 - 1)}{2(M_1^2 - 1)^2}$$

$$C_c = \frac{\frac{3}{4} (\gamma+1)^2 M_1^8 - (7 + 12\gamma - 3\gamma^2) M_1^6 + 18(\gamma+1) M_1^4 - 24 M_1^2 + 16}{12 (M_1^2 - 1)^{7/2}}$$

Les calculs requis pour trouver les coefficients suivants deviennent extrêmement longs.

2°) Cas de l'évolution isentropique.

Il est avantageux ici de préparer le travail par la recherche préliminaire de l'expansion

$$\omega = \omega_1 + a \theta + b \theta^2 + c \theta^3 + \dots \quad (3.II6)$$

La variable ω est celle définie précédemment par (3.I00).
Sa valeur en amont, au lieu d'être supposée nulle comme pour la recherche de la fonction de Prandtl-Meyer, est ici

$$\omega_1 = \sqrt{M_1^2 - 1}$$

On substitue le développement dans l'équation différentielle (3.I0I)

$$\omega^2 \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{\gamma+1}{2} (1 + \omega^2) (1 + \lambda^2 \omega^2) \quad \text{où} \quad \lambda^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

Il vient par identification des puissances de θ

$$a = \frac{\gamma+1}{2} \left(1 + \frac{1}{\omega_1^2}\right) (1 + \lambda^2 \omega_1^2)$$

$$b = \frac{\gamma+1}{2} \frac{\lambda^2 \omega_1^4 - 1}{\omega_1^3} a$$

$$c = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^2 \frac{5 + 3\omega_1^2 + 3\lambda^2 \omega_1^2 + \lambda^2 \omega_1^6 + \lambda^4 \omega_1^6 + 3\lambda^4 \omega_1^8}{3\omega_1^6} a$$

Notons ensuite que le coefficient de pression cherché peut se mettre sous la forme

$$y = \frac{2}{\gamma M_1^2} \left(Y - \frac{\gamma}{\gamma-1} - 1 \right)$$

$$Y = \frac{1 + \lambda^2 \omega^2}{1 + \lambda^2 \omega_1^2} = 1 + m \theta + n \theta^2 + p \theta^3 + \dots$$

A partir de (3.II6) les coefficients m , n et p se trouvent facilement :

$$m = \frac{(\gamma-1) M_1^2}{\omega_1}$$

$$n = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^2 M_1^2 \lambda^2 \frac{-2 + 2\lambda^2 + M_1^2 - 5\lambda^2 M_1^2 + 3\lambda^2 M_1^4}{\omega_1^4}$$

$$p = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^3 M_1^2 \lambda^2 \frac{\frac{4}{3}(\lambda^2-1)^2 - 8\lambda^2(\lambda^2-1) M_1^2 + 8\lambda^2(2\lambda^2-1) M_1^4 + \frac{8}{3}\lambda^2(1-5\lambda^2) M_1^6 + 4\lambda^4 M_1^8}{\omega_1^7}$$

Enfin par un développement binomial de la puissance $\gamma/(1-\gamma)$ de γ

$$A_a = -2 \frac{m}{(\gamma-1) M_1^2}$$

$$B_a = -\frac{2}{(\gamma-1) M_1^2} \left(n - \frac{2\gamma-1}{2(\gamma-1)} m^2 \right)$$

$$C_a = -\frac{2}{(\gamma-1) M_1^2} \left(p - \frac{2\gamma-1}{\gamma-1} mn + \frac{(2\gamma-1)(3\gamma-2)}{6(\gamma-1)^2} m^3 \right)$$

Il vient finalement

$$A_a = -\frac{2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} = -A_c$$

$$B_a = \frac{(\gamma+1)M_1^4 - 4(M_1^2 - 1)}{2(M_1^2 - 1)^2} = B_c$$

$$C_a = \frac{-(\gamma+1)M_1^8 + (5 + 7\gamma - 2\gamma^2)M_1^6 - 10(\gamma+1)M_1^4 + 12M_1^2 - 8}{6(M_1^2 - 1)^{7/2}}$$

Ces résultats concordent avec ceux obtenus par des voies différentes (voir par exemple Edward R.C. Miles, *Supersonic Aerodynamics*, McGraw-Hill, 1950).
Compte-tenu des deux définitions du sens positif de la déviation du courant on constate que, comme il fallait s'y attendre, les coefficients de pression en gas de choc ou d'évolution isentropique ne diffèrent qu'à partir des termes en θ^3 .
En ne retenant que les termes en θ^3 , la différence entre une compression par choc et une compression isentropique s'avère être égale à

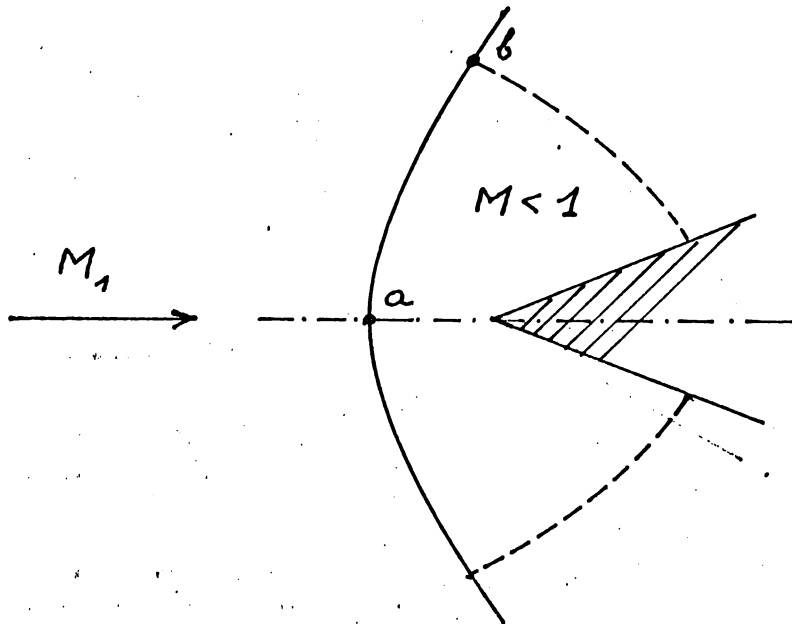
$$(C_p)_c - (C_p)_a = \frac{(\gamma+1) M_1^4}{12(M_1^2 - 1)^{7/2}} \left(\frac{3\gamma-5}{4} M_1^4 + (3-\gamma)M_1^2 - 2 \right) \theta^3$$

Par exemple pour $\gamma = 1,4 = 7/5$ on obtient en première approximation que pour de faibles déviations, la compression par choc est plus grande que la compression isentropique dans l'intervalle

$$1,55 = 4 - \sqrt{6} < M_1 < 4 + \sqrt{6} = 6,45$$

16. Ondes de choc détachées et réfléchies.

Si l'angle de déflexion demandé par le biseau introduit dans un écoulement supersonique uniforme dépasse la valeur θ_{\max} dont l'écoulement peut être dévié par un choc oblique attaché, il se produit devant l'obstacle une onde de choc détachée (fig. 3.I4)



(fig. 3.I4)

Entre a et b l'inclinaison (variable) de l'onde implique un écoulement subsonique en aval. Au delà de b l'écoulement aval demeure supersonique. Il y a donc une enclave subsonique entre l'obstacle et l'onde de choc dans laquelle l'écoulement est compliquée du fait qu'il doit être rotationnel. En effet, d'une part la traversée de l'onde conserve l'enthalpie totale H du courant amont, d'autre part l'accroissement d'entropie est variable avec l'inclinaison du choc qui est en rapport avec son intensité. La formule (2.74) de Crocco-Vaszonyi en mouvement permanent

$$T \text{ grad } S - \text{grad } H = \text{rot } \vec{V} \times \vec{V}$$

montre que, puisque $\text{grad } H = 0$ en aval du choc mais $\text{grad } S$ pas, $\text{rot } \vec{V}$ ne peut être nul.

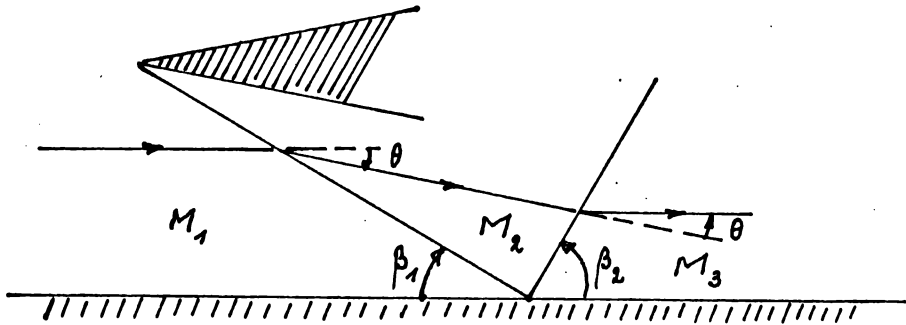
Un obstacle émoussé (bord d'attaque arrondi) donne bien entendu toujours lieu à une onde de choc détachée.

La réflexion d'une onde de choc par une paroi se présente généralement comme le montre la figure (3.I5)

La déflexion θ imposée au courant amont est suffisamment faible pour que l'écoulement en aval de l'onde oblique soit de nombre de Mach supersonique M_2 assez élevé pour tourner à nouveau l'écoulement dans la direction primitive par un second choc oblique.

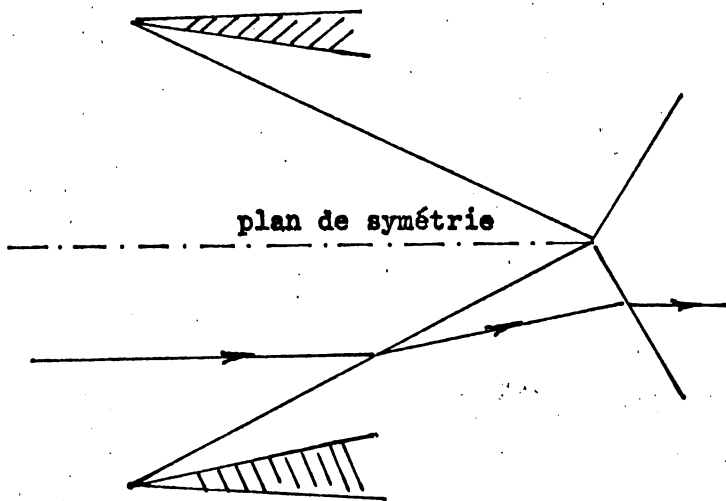
En d'autres termes l'angle de déviation θ est inférieur au θ_{\max} associé à M_2 . C'est le cas de réflexion simple.

Il se produit également par symétrie à l'entrée d'un diffuseur sous forme d'une interaction entre chocs (fig. 3.I6 a, b)

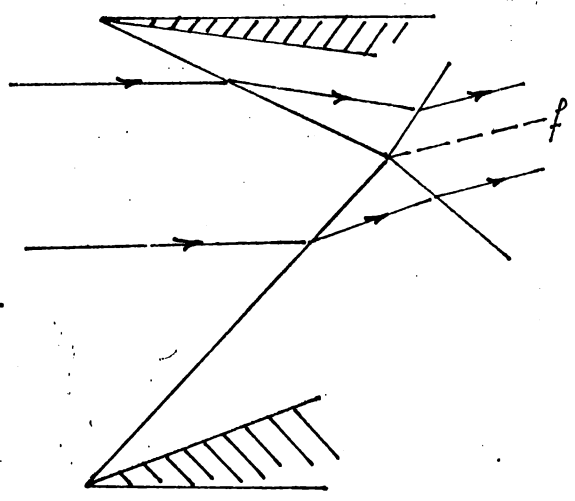


(fig. 3.I5)

La figure 3.I6 b montre ce qui se produit en cas de dissymétrie dans le diffuseur. L'inclinaison des chocs réfléchis est alors gouvernée par la condition d'égalité de la pression de part et d'autre de la frontière f entre les écoulements redevenus parallèles. Cependant comme les lignes de courant ont traversé des chocs d'intensités différentes, ni la température, ni la densité, ni la vitesse ne seront les mêmes de part et d'autre de f . Cette frontière est une nappe de discontinuité à travers laquelle se produiront des échanges thermiques et des échanges de quantité de mouvement liés à la conductibilité et à la viscosité du fluide.

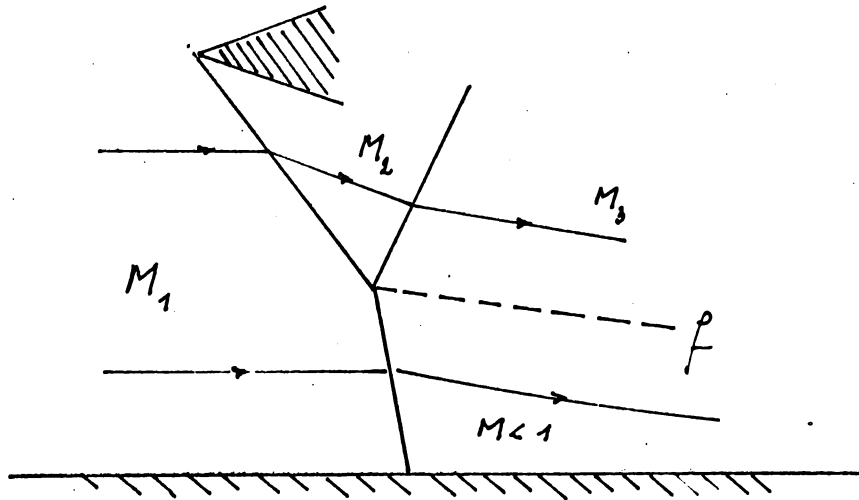


(fig. 3.I6 a)



(fig. 3.I6 b)

Si θ est supérieur au θ_{\max} associé à M_2 , il se produit une "réflexion de Mach", illustrée à la figure (3.I7)



(fig. 3.I7)

L'écoulement incident se divise en deux parties. L'une traverse le choc oblique fixé par la présence du biseau puis une onde réfléchie qui ne la redresse que partiellement. L'autre partie traverse une onde presque normale et devient subsonique. La détermination du point triple O n'est pas entièrement fixée par la condition d'égalité des pressions et orientation des vitesses de part et d'autre d'une frontière f . Une infinité de solutions est possible. Celle qui se réalise dépend des conditions en aval qui peuvent perturber la partie subsonique de l'écoulement.

17. Théorie unidimensionnelle de l'écoulement dans une tuyère de Laval.

La géométrie de la tuyère est décrite par sa section droite A , variable. Elle passe par un minimum, le col, où sa valeur est notée A_c .

En régime permanent, la constance du débit massique m est exprimée par la relation

$$\rho V A = m$$

valable pour chaque section, en particulier pour la section du col, où

$$\rho_c V_c A_c = m$$

Depuis le réservoir à pression p_0 , où la vitesse est en principe nulle, l'écoulement est d'abord accéléré isentropiquement par la réduction de la section droite et, suivant la relation (3.41) d'Hugoniot, ne peut passer du régime subsonique au régime supersonique avant le col. Il peut éventuellement atteindre la condition sonique $M = 1$, au droit du col.

Dans ce cas le débit atteint son maximum, le "débit de saturation"

$$m^* = \rho^* a^* A_c$$

En effet on a vu que dans une détente isentropique le rapport

$$\frac{\rho V}{\rho^* a^*} = f(M) \quad (3.42)$$

atteint son maximum, l'unité, pour $M = 1$.

Ceci conduit à distinguer les deux cas

$$1) \text{ débit non saturé} \quad \frac{m}{m^*} = \frac{\rho_c V_c}{\rho^* a^*} < 1$$

2) débit saturé.

Si le débit n'est pas saturé, le régime d'écoulement au niveau du col est subsonique et l'augmentation subséquente de la section droite ralentit de nouveau isentropiquement le courant qui reste donc subsonique jusqu'à la sortie.

La pression relative dans une section est déterminée par les rapports A/A_c et m/m^* . En effet

$$\frac{m}{m^*} = \frac{\rho_c V_c}{\rho V} \quad \frac{\rho V}{\rho^* a^*} = \frac{A}{A_c} \quad \frac{\rho V}{\rho^* a^*}$$

et ce dernier rapport dépend uniquement du nombre de Mach, selon la formule (3.42) ou du rapport de la pression locale à la pression du réservoir à travers la formule de de Saint-Venant et Wantzel (3.32). Plus directement, revenant aux formules (3.21), (3.27), (3.28) et (3.30)

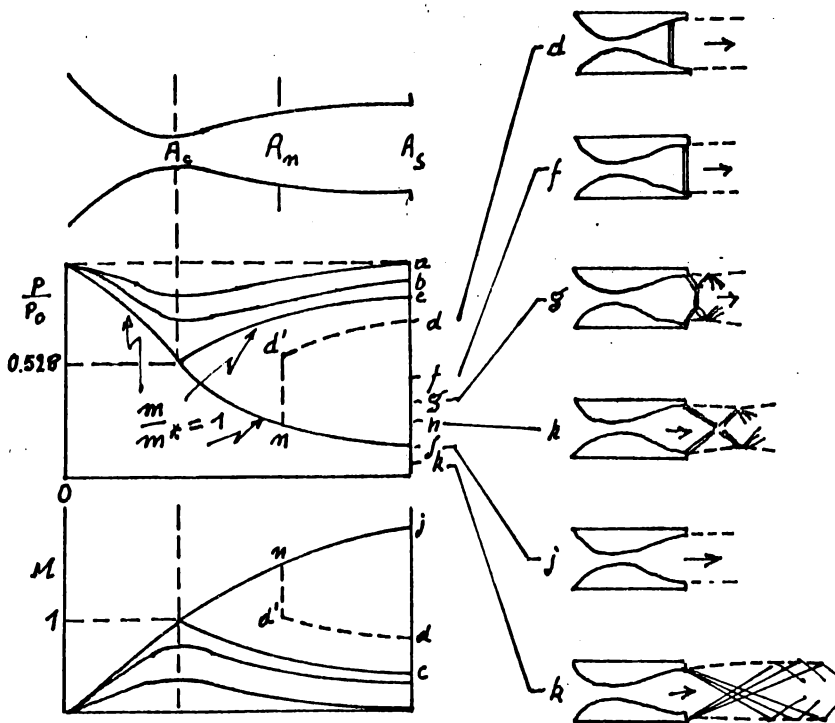
$$\frac{\rho V}{\rho^* a^*} = f(p/p_0) \quad \text{avec}$$

$$f(p/p_0) = \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

et la relation entre pression relative et section droite relative est fournie par

$$\frac{A}{A_0} f\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{m}{m^*}$$

Ceci conduit aux courbes supérieures de la figure (3.I8)



(fig. 3.I8)

Les débits non saturés, avec régime entièrement subsonique, sont réalisés avec de faibles différences de pression entre la sortie et le réservoir.

Quand le débit atteint la saturation et que le régime reste subsonique après le col, la pression relative de sortie est représentée par le point c.

Une autre régime isentropique est alors possible, celui où l'écoulement devient supersonique en aval du col et où dès lors, des deux rapports de pression correspondant à une même valeur de $f(p/p_0)$ on prend le plus faible. Ceci correspond à la seconde branche de la courbe $m/m^* = 1$, aboutissant à une faible pression de sortie représentée par le point j.

La question qui se pose alors est de savoir à quels régimes d'écoulement correspondent les pressions de sortie représentées par les points situés entre c et j et en-dessous de j.

Si la pression du milieu extérieur dans lequel débouche la tuyère est inférieure à celle représentée par j, la détente isentropique se prolonge à l'extérieur de

la tuyère par un système d'ondes d'expansion (cas k de la figure). Si cette pression est comprise entre celles représentées par c et j il y a apparition d'ondes de choc.

Soit une onde de choc normale dans la section AA_n de la tuyère (cas d de la figure). Elle ne modifie pas la valeur de a^*_{n-1}

($a^{*2} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} V_2^2$ est une mesure de l'enthalpie totale qui est conservée)

mais modifie la valeur de ρ^* qui devient $\bar{\rho}^*$. En fait

$$\frac{\bar{\rho}^*}{\rho^*} = \frac{\bar{p}_0}{p_0} = \frac{\bar{p}_0}{p_0} = e^{-\Delta S/R}$$

est une mesure de l'accroissement d'entropie provoqué par l'onde. Appliquant l'équation de continuité du débit en aval de l'onde de choc

$$\rho V A = \dot{m} = \rho^* a^* A_c$$

Il vient

$$\frac{A}{A_c} = \frac{\rho^* a^*}{\rho V} = \frac{\bar{\rho}^* a^*}{\rho V} \cdot \frac{\rho^*}{\bar{\rho}^*}$$

ou encore

$$\frac{A}{A_c} f\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{p_0}{\bar{p}_0} > 1$$

Pour chaque valeur de $A/A_c > p_0/\bar{p}_0$ existent deux rapports p/\bar{p}_0 et donc deux rapports p/p_0 vérifiant cette relation.

La courbe p/p_0 a deux branches dont la supérieure (subsonique) est utilisée en aval du choc. Le rapport de pression à la sortie prend ainsi une valeur dépendant de la position du choc (point d de la figure). Quand le choc atteint la section de sortie, le point figuratif de la pression de sortie, juste en arrière du choc, atteint f.

Pour des rapports de pression de sortie entre f et j, la recompression de j à gnh est absorbée par un choc oblique donnant lieu à multiples réflexions (cas gch de la figure).

IV. Ecoulements irrotationnels et isentropiques.

Linéarisation par petites perturbations.

I. L'équation aux dérivées partielles de l'écoulement isentropique irrotationnel.

Négligeant la viscosité, la conservation de la quantité de mouvement peut être exprimée par la relation

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} + \text{rot} \vec{v} \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (4.1)$$

Si de plus les échanges d'énergie par conductibilité thermique sont négligés et que l'entropie demeure la même pour toutes les particules et à chaque instant, on peut écrire

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad } I = \text{grad} \frac{a^2}{\gamma-1} \quad (4.2)$$

De sorte que $a^2/(\gamma-1)$ apparaît comme un potentiel des accélérations. Introduisons maintenant l'idée que l'écoulement, irrotationnel à une époque donnée, le demeure, ce qui est précisément justifié par l'existence d'un potentiel des accélérations. Avec

$$\vec{v} = \text{grad } \phi \quad \text{et} \quad \text{rot} \vec{v} = 0$$

et la relation (4.2), la conservation de la quantité de mouvement prend la forme simple

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} \right) = 0 \quad (4.3)$$

Le fluide est supposé illimité. Pour analyser les perturbations introduites par la présence d'un obstacle se déplaçant avec une vitesse moyenne \vec{U} par rapport au fluide au repos à l'infini, adoptons le principe du mouvement relatif. Les axes relatifs sont choisis de telle façon que les coordonnées des points de l'obstacle sont, soit fixes s'il est en translation de régime, soit constantes en moyenne. Par contre à très grande distance l'état de repos du fluide est transformé en écoulement uniforme avec une vitesse constante U que nous pouvons supposer orientée suivant l'axe ox (qui devient ainsi une direction privilégiée). Les valeurs des variables thermodynamiques du fluide à très grande distance sont notées $(p_\infty, \rho_\infty, T_\infty, a_\infty \dots)$. L'intégrale de (4.3) peut toujours s'écrire

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } \phi \cdot \text{grad } \phi + \frac{a^2}{\gamma-1} = \frac{1}{2} U^2 + \frac{a_\infty^2}{\gamma-1} \quad (4.4)$$

En effet le second membre doit être une fonction du temps seulement. Mais le potentiel des vitesses n'est défini qu'à une fonction additive du temps près; un choix convenable de cette fonction additive permet en principe de transformer le second membre de (4.4) en n'importe quelle fonction du temps, en particulier dans la constante indiquée. Ce choix est tel que, si l'on distingue dans ϕ la partie Ux qui rend compte de l'écoulement uniforme et une partie ϕ qui rend compte des perturbations

$$\phi = U(x + \phi) \quad (4.5)$$

la relation (4.4) se trouve vérifiée par un potentiel de perturbation nul.
 En principe la relation (4.4) sera utilisée pour calculer la célérité locale du son, connaissant le potentiel du mouvement.
 Il ne reste à exprimer que la conservation de la masse

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad \text{ou} \quad v^2 \phi + \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

Dans une évolution isentropique

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{d(a^2)}{a^2}$$

Ce qui permet de mettre finalement la conservation de la masse sous la forme

$$v^2 \phi + \frac{1}{(\gamma-1)a^2} \frac{D a^2}{Dt} = 0 \quad (4.6)$$

Le problème est ramené à l'étude des deux équations aux dérivées partielles (4.4) et (4.6) pour les deux inconnues (ϕ et a). En principe la seconde peut être tirée de (4.4) et substituée dans (4.6), exhibant ainsi l'équation aux dérivées partielles fondamentale gouvernant le potentiel :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{w^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - 2 \frac{uv}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - 2 \frac{vw}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \\ - 2 \frac{wu}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{2u}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{2v}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial t} + \frac{2w}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} \end{aligned} \quad (4.7)$$

2. Le coefficient de pression en fonction du potentiel de perturbation.

Des relations

$$\frac{p}{p_{\infty}} = \left(\frac{a^2}{a_{\infty}^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad a_{\infty}^2 = \gamma \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}}$$

on déduit pour le coefficient de pression

$$C_p = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U^2}$$

la formule exacte

$$C_p = \frac{2}{\gamma M_{\infty}^2} \left\{ \left(\frac{a^2}{a_{\infty}^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\} \quad (4.8)$$

Notant que par la définition (4.5) du potentiel de perturbation ϕ

$$\text{grad } \phi \cdot \text{grad } \phi = U^2 \left(1 + 2 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \text{grad } \phi \cdot \text{grad } \phi \right)$$

la célérité locale du son déduite de (4.4) peut s'écrire en fonction du potentiel de perturbation

$$a^2 = a_{\infty}^2 - (\gamma - 1) U^2 h \quad (4.9)$$

$$\text{où} \quad h = \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \text{grad } \phi \cdot \text{grad } \phi \quad (4.10)$$

et, le coefficient de pression

$$C_p = \frac{2}{\gamma M_{\infty}^2} \left\{ \left(1 - (\gamma - 1) M_{\infty}^2 h \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\} \quad (4.11)$$

L'équation de conservation de la masse

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + U \nabla^2 \phi = 0$$

peut encore être transformée par la relation isentropique

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\text{en} \quad \frac{1}{p} \frac{Dp}{Dt} + \gamma U \nabla^2 \phi = 0$$

ou encore

$$\frac{D(p - p_{\infty})}{Dt} + \gamma U (p - p_{\infty}) v^2 \phi + \gamma U p_{\infty} v^2 \phi = 0$$

Divisant par $\frac{1}{2} \rho_{\infty} U^3$ et utilisant de nouveau $a_{\infty}^2 = \gamma p_{\infty} / \rho_{\infty}$ il vient

$$\frac{1}{U} \frac{D}{Dt} C_p + \gamma C_p v^2 \phi + \frac{2}{M_{\infty}^2} v^2 \phi = 0 \quad (4.I2)$$

Tout comme la paire d'équations aux dérivées partielles (4.4) et (4.6) gouvernait la paire d'inconnues a^2 et ϕ , la paire (4.II) et (4.I2), associée à la définition (4.I0), gouverne les inconnues d'intérêt plus direct C_p et ϕ .

Eliminant C_p on obtiendrait l'équation équivalente à (4.7) pour le potentiel de perturbation^p ϕ .

$$\text{Si} \quad F(x, y, z, t) = 0 \quad (4.I3)$$

est l'équation d'une surface mobile à laquelle l'écoulement est tangent, la condition aux limites vérifiée par le potentiel de perturbation exprime que les coordonnées $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ d'une particule vérifient l'équation de la surface durant un certain temps :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

$$\text{Mais} \quad dx/dt = U \left(1 + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \quad \frac{dy}{dt} = U \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \frac{dz}{dt} = U \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

et la condition aux limites exacte est

$$\left(1 + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{1}{U} \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad \text{sur (4.I3)} \quad (4.I4)$$

3. Linéarisation.

La linéarisation est basée sur une double hypothèse

I°) Les vitesses de perturbation sont faibles comparées à la vitesse de l'écoulement amont. Ceci revient à écrire

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|, \left| \frac{\partial \phi}{\partial z} \right| \quad \text{et} \quad \frac{1}{U} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| \ll 1 \quad (4.I5)$$

et a notamment pour conséquence

$$|h| \ll 1 \quad (4.I6)$$

$$2^{\circ}) \quad M_{\infty}^2 \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|, \quad M_{\infty}^2 \left| \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|, \quad M_{\infty}^2 \left| \frac{\partial \phi}{\partial z} \right| \quad \text{et} \quad \frac{M_{\infty}^2}{U} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| \ll 1 \quad (4.17)$$

$$\text{Ce qui entraîne} \quad M_{\infty}^2 |h| \ll 1 \quad (4.18)$$

La célérité locale du son diffère très peu de sa valeur non perturbée (voir eq. (4.9)) et la perturbation relative de pression est faible (cfr (4.11))

$$\left| \frac{p - p_{\infty}}{p_{\infty}} \right| \ll 1 \quad (4.19)$$

Dans ces conditions, le développement binomial de (4.11) fournit l'approximation

$$C_p = -2h + M_{\infty}^2 h^2 \quad (4.20)$$

Substituant h et retenant seulement les termes du premier degré dans les vitesses de perturbation :

$$(C_p)_1 = -2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (4.21)$$

Retenant tous les termes du second degré :

$$(C_p)_2 = -2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \\ + (M_{\infty}^2 - 1) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + M_{\infty}^2 \left(\frac{1}{U^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{2}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (4.22)$$

L'équation complètement linéarisée gouvernant le potentiel de perturbation s'obtient à partir de (4.12) par les trois étapes suivantes :

1) En appliquant l'hypothèse des faibles perturbations relatives de pression (4.18) qui entraîne

$$|M_{\infty}^2 C_p| \ll 1$$

et permet de négliger le second terme de (4.12) devant le troisième;

2) En remplaçant dans le premier terme l'opérateur dérivation particulière par son approximation

$$\frac{D}{Dt} \approx \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}$$

Ce qui revient à négliger la convection par les vitesses de perturbation elles-mêmes;

3) En remplaçant le coefficient de pression par son approximation linéarisée (4.21).

Il vient alors l'équation aux dérivées partielles

$$\nabla^2 \phi = M_\infty^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \phi \quad (4.23)$$

La linéarisation de la condition aux limites dépend de la nature de la surface mobile à laquelle l'écoulement est tangent. Dans le cas général, la seule simplification qui puisse être apportée à (4.14) consiste à négliger $\partial\phi/\partial x$ devant l'unité :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial t} \right) F + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \text{sur (4.13)} \quad (4.24)$$

Il est intéressant d'observer que si l'on choisit pour le coefficient de pression l'approximation complète $(C_p)_2$, le principe variationnel

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int (C_p)_2 \, dx dy dz \, dt = 0 \quad (4.25)$$

où l'intégrale de volume est étendue à la partie extérieure à la surface fermée d'un corps perturbateur fixe, fournit l'équation linéarisée (4.23) comme coefficient de la variation $\delta\phi$. La condition aux limites que l'on obtient en annulant le coefficient de $\delta\phi$ sur la surface est

$$l \left(1 + (1 - M_\infty^2) \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{M_\infty^2}{U} \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) + m \frac{\partial\phi}{\partial y} + n \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad (4.26)$$

Les cosinus directeurs (l, m, n) de la normale à la surface stationnaire $F(x, y, z) = 0$, sont proportionnels à $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$ et $\partial F/\partial z$ respectivement. La condition (4.26) est alors variationnellement cohérente avec l'approximation (4.23).

Le cas particulier relatif au corps fixe ($\partial F/\partial t = 0$) de l'approximation (4.24) ne diffère d'ailleurs de (4.26) que par des termes négligeables en principe, en vertu de (4.17).

4. Ondes acoustiques.

L'équation (4.23) est une forme déguisée de l'équation de l'acoustique. Dans un système d'axes (ξ, η, ζ, t) , au repos par rapport au fluide à l'infini, le potentiel perturbateur devient

$$\phi(\xi + U t, \eta, \zeta, t) = \phi^{\text{M}}(\xi, \eta, \zeta, t)$$

Par conséquent

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi^{\text{M}}}{\partial\xi} \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi^{\text{M}}}{\partial\eta} \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi^{\text{M}}}{\partial\zeta}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = U \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial t}$$

et le potentiel perturbateur obéit dans les nouvelles coordonnées, à l'équation des ondes

$$\nabla^2 \phi^M = \frac{M_\infty^2}{U^2} \frac{\partial^2 \phi^M}{\partial t^2} = \frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 \phi^M}{\partial t^2}$$

La solution fondamentale, ou solution de Green, de l'équation des ondes possède la symétrie sphérique :

$$\phi^M = \phi^M(r, t)$$

$$\vec{r} = (\xi - \xi_0, \eta - \eta_0, \zeta - \zeta_0)$$

Comme dans ces conditions

$$\nabla^2 \phi^M = \frac{\partial^2 \phi^M}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi^M}{\partial r}$$

on peut mettre l'équation des ondes sous la forme de celle des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \phi^M) = \frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r \phi^M)$$

et en déduire la solution de d'Alembert

$$r \phi^M = f\left(t - \frac{r}{a_\infty}\right) + g\left(t + \frac{r}{a_\infty}\right)$$

En principe l'intérêt est centré sur le corps perturbateur comme source de rayonnement d'énergie acoustique.

La condition de rayonnement est satisfaite en rejetant la solution $g(t + r/a_\infty)$ qui représente au contraire un apport d'énergie venant de l'infini.

Nous verrons plus tard comment transformer la solution de Green

$$\phi^M = \frac{f\left(t - \frac{r}{a_\infty}\right)}{r} \quad (4.27)$$

pour une source acoustique fixe par rapport au fluide à l'infini dans celle d'une source fixe dans un écoulement à vitesse uniforme.

5. Règles de similitude pour les écoulements linéarisés permanents.

En régime permanent subsonique ou supersonique linéarisé, l'équation du potentiel de perturbation se réduit à

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.28)$$

avec la condition de tangence à la surface

$$f(x, y, z) = 0 \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (4.30)$$

Considérons un autre écoulement, de potentiel de perturbation ψ , dans un espace (X, Y, Z) lié au précédent par les affinités

$$X = \alpha x \quad Y = \beta y \quad Z = \beta z \quad (4.31)$$

de sorte que entre deux points homologues, les valeurs des potentiels soient liés par

$$\psi(X, Y, Z) = \gamma \phi\left(\frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta}, \frac{Z}{\beta}\right) \quad (4.32)$$

Des relations

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = \gamma \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \frac{\partial \psi}{\partial Y} = \gamma \frac{1}{\beta} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \frac{\partial \psi}{\partial Z} = \gamma \frac{1}{\beta} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} = \frac{\gamma}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \text{etc ...} \quad (4.33)$$

on déduit que dans l'espace (X, Y, Z) le potentiel ψ satisfait à l'équation

$$\alpha^2 (1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \beta^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right) = 0$$

Cette équation peut être ramenée à la forme (4.28) en modifiant le nombre de Mach M_∞ en \bar{M}_∞ par la relation

$$\alpha^2 (1 - M_\infty^2) = \beta^2 (1 - \bar{M}_\infty^2) \quad (4.34)$$

Ainsi les affinités (4.31) et (4.32) permettent, dans le cas linéarisé, une correspondance biunivoque entre deux écoulements de nombre de Mach différents. Cependant on observera sur (4.34) que M_∞ et \bar{M}_∞ sont nécessairement simultanément subsoniques ou simultanément supersoniques; il est impossible d'obtenir une correspondance biunivoque entre un écoulement subsonique et un écoulement supersonique.

Supposons maintenant que la surface $f(x, y, z) = 0$ subisse la même affinité que celle de l'espace et se transforme dans l'espace (X, Y, Z) en

$$F(X, Y, Z) = f\left(\frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta}, \frac{Z}{\beta}\right) = 0$$

Par conséquent

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial Y} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial F}{\partial Z} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial f}{\partial z}$$

et ceci, porté dans (4.30) en même temps que (4.33), transforme la condition de tangence en

$$\alpha \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\beta^2}{\gamma} \left(\frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial F}{\partial Y} + \frac{\partial \psi}{\partial Z} \frac{\partial F}{\partial Z} \right) = 0$$

On en déduit que la surface f , transformée par affinité dans la surface F , reste tangente au nouvel écoulement, à condition que

$$\gamma = \beta^2 / \alpha \quad (4.35)$$

et ceci fixe le coefficient d'affinité entre les deux potentiels.

Basant le calcul du nouveau coefficient de pression en régime permanent par les approximations du second degré

$$\bar{C}_p = -2 \frac{\partial \phi}{\partial x} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 - (1 - M_\infty^2) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2$$

$$\bar{C}_p = -2 \frac{\partial \psi}{\partial X} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial Y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)^2 - (1 - \bar{M}_\infty^2) \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \right)^2$$

on peut constater que tous les termes homologues sont, en vertu de (4.35) et (4.34), dans le même rapport

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{1 - M_\infty^2}{1 - \bar{M}_\infty^2} \frac{\alpha^2}{\gamma^2}$$

De la sorte

$$C_p = \frac{\alpha}{\gamma} \bar{C}_p \quad \text{ou encore}$$

$$(1 - M_\infty^2) C_p = (1 - \bar{M}_\infty^2) \bar{C}_p \quad (4.36)$$

Cette règle d'invariance de similitude est connue sous le nom de règle de Prandtl-Goethert.

Un autre invariant fondamental de similitude est celui du rapport δ entre une dimension transversale caractéristique du corps (suivant oy ou oz) et une dimension longitudinale caractéristique (suivant ox).

Ce rapport étant modifié dans le nouvel espace par multiplication par α/β on obtient l'invariant de similitude

$$\delta \sqrt{1 - M_\infty^2} = \bar{\delta} \sqrt{1 - \bar{M}_\infty^2} \quad \text{en subsonique}$$

$$\delta \sqrt{M_\infty^2 - 1} = \bar{\delta} \sqrt{\bar{M}_\infty^2 - 1} \quad \text{en supersonique}$$

6. Cas de l'écoulement autour d'une surface quasi-plane.

Si la surface à laquelle l'écoulement doit être tangent peut être représentée par l'équation

$$z = h(x, y, t) \quad (4.37)$$

la condition de tangence devient

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial h}{\partial t}$$

soit

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \left(1 + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{U} \frac{\partial h}{\partial t}$$

à vérifier sur la surface (4.37).

Pour une surface quasi-plane

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial h}{\partial y} \right| \ll 1$$

on obtient en négligeant au second membre les grandeurs petites du second ordre

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{U} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4.38)$$

Une nouvelle simplification peut être introduite en développant

$$w(x, y, z, t) = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

en série de Taylor au voisinage de $z = 0$

$$w = w(x, y, 0, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=0} h(x, y, t) + \dots \quad (4.39)$$

Cette possibilité peut être justifiée a posteriori en établissant le caractère différentiable de $w(x, y, z, t)$ au voisinage de $z = 0$. Ceci a lieu si, par exemple, l'écoulement est représenté par une nappe de singularités placées sur la projection P de la surface dans le plan $z = 0$.

Dès lors, pourvu que la surface s'écarte peu du plan $z = 0$, le second terme de (4.39) est négligeable devant le premier et la condition de tangence peut être complètement linéarisée sous la forme

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{U} \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{sur } z = 0 \quad (4.40)$$

$(x, y) \in P$

Dans ces problèmes on dispose d'un degré de liberté supplémentaire dans les règles de similitude. En effet la condition (4.35) devient caduque. Elle est remplacée par une condition faisant intervenir un nouveau paramètre d'affinité (indépendant) ϵ , tel que dans le nouvel espace (cas stationnaire)

$$H(X, Y) = \epsilon h\left(\frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta}\right)$$

Dès lors la nouvelle condition de tangence

$$\frac{\partial \psi}{\partial Z} = \frac{\partial H}{\partial X} \qquad Z = 0$$

$$(X, Y) \in \bar{P}$$

est satisfaite, pourvu que

$$\epsilon \beta = \alpha \gamma \qquad (4.41)$$

Conservant α et ϵ comme paramètres d'affinité indépendants, M_∞^2 et \bar{M}_∞^2 étant donnés :

$$\beta = \alpha \sqrt{\frac{1 - M_\infty^2}{1 - \bar{M}_\infty^2}} \qquad \gamma = \epsilon \sqrt{\frac{1 - M_\infty^2}{1 - \bar{M}_\infty^2}} \qquad (4.42)$$

Pour la corrélation entre les coefficients de pression on peut, dans le cas de surfaces quasi-planes, limiter les développements à

$$C_p = -2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad \bar{C}_p = -2 \frac{\partial \psi}{\partial X} \qquad (4.43)$$

et on en déduit

$$\bar{C}_p = C_p \frac{\epsilon}{\alpha} \sqrt{\frac{1 - M_\infty^2}{1 - \bar{M}_\infty^2}} \qquad (4.44)$$

7. Ecoulement transsonique.

Quand le nombre de Mach de vol est très voisin de l'unité, l'équation linéarisée (4.23) devient singulière par disparition du terme en $\partial^2 \phi / \partial x^2$. Dans ce cas on ne peut plus négliger les termes en $\partial^2 \phi / \partial x^2$ qui proviendraient d'approximations supérieures et qui seraient du même ordre de grandeur que $(1 - M_\infty^2)$. Le nouveau calcul peut être mené à partir de l'équation exacte (4.12).

Il vient

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} (1 - M_\infty^2 - (\gamma + 1) M_\infty^2) \frac{\partial \phi}{\partial x} - M_\infty^2 (\gamma - M_\infty^2) \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$= M_\infty^2 \left(\frac{1}{U^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{2}{U} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \right) \qquad (4.45)$$

Le même résultat se retrouve à partir du principe variationnel

$$\delta \int_{t_2}^{t_1} \int (C_p)_3 dt dx dy dz = 0$$

où $(C_p)_3$ est une approximation meilleure où figurent tous les termes du troisième degré soit en $(\frac{\partial \phi}{\partial x})^3$ ou $(\frac{\partial \phi}{\partial x})^2 \frac{\partial \phi}{\partial t}$.

On peut les trouver en étendant d'abord le développement (4.20)

$$C_p = -2h + M_\infty^2 h^2 - \frac{2-\gamma}{3} M_\infty^4 h^3$$

puis en y substituant h et retenant les termes mentionnés :

$$\begin{aligned} (C_p)_3 &= -2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right) \\ &+ M_\infty^2 \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{U^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{2}{U} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^3 + \frac{1}{U} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \\ &- \frac{2-\gamma}{3} M_\infty^4 \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^3 + \frac{3}{U} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Soit, en regroupant les termes,

$$\begin{aligned} (C_p)_3 &= -2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \left(1 - M_\infty^2 + M_\infty^2 \left(M_\infty^2 \frac{2-\gamma}{3} - 1 \right) \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ &+ M_\infty^2 \left((2-\gamma) M_\infty^2 - 1 \right) \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ &- \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + M_\infty^2 \left(\frac{1}{U^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{2}{U} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

L'équation aux dérivées partielles qui en découle par annulation du coefficient de la variation $\delta \phi$ sous le signe intégrale est

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \left\{ 1 - M_\infty^2 + M_\infty^2 \left(M_\infty^2 (2-\gamma) - 3 \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} + M_\infty^2 \left((2-\gamma) M_\infty^2 - 1 \right) \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} \\ + 2 M_\infty^2 \left((2-\gamma) M_\infty^2 - 1 \right) \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} = M_\infty^2 \left(\frac{1}{U^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{2}{U} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \right) \quad (4.46) \end{aligned}$$

L'équivalence entre (4.45) et (4.46) peut être établie en faisant $M_\infty^2 = 1$ dans les termes non-linéaires, ce qui ne modifie pas sensiblement l'approximation. Seul apparaît le terme non-linéaire additionnel en

$$\frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} .$$

Par exemple dans le cas stationnaire, le potentiel vérifie l'équation transsonique

$$(1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = (\gamma + 1) M_{\infty}^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (4.47)$$

Dans l'espace affine (X, Y, Z) le potentiel ψ vérifiera

$$\frac{\alpha^2}{\gamma} (1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\beta^2}{\gamma} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right) = (\gamma + 1) M_{\infty}^2 \frac{\alpha^3}{\gamma^2} \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2}$$

Pour que ceci constitue une équation transsonique correspondant à un autre nombre de Mach \bar{M}_{∞} , il faudra à la fois

$$\alpha^2 (1 - M_{\infty}^2) = \beta^2 (1 - \bar{M}_{\infty}^2)$$

et $\alpha^3 M_{\infty}^2 = \gamma \beta^2 \bar{M}_{\infty}^2$

Par conséquent, du moment que \bar{M}_{∞} est donné ainsi que le rapport α des dimensions longitudinales, les deux autres paramètres d'affinité sont fixés

$$\beta = \alpha \sqrt{\frac{1 - M_{\infty}^2}{1 - \bar{M}_{\infty}^2}} \quad (4.48)$$

$$\gamma = \alpha \frac{1 - \bar{M}_{\infty}^2}{1 - M_{\infty}^2} \frac{M_{\infty}^2}{\bar{M}_{\infty}^2}$$

La condition de tangence ne peut être conservée que pour une surface quasi-plane.

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{sur } z = 0 \quad (x, y) \in P$$

se transforme avec $H = \epsilon h$ en

$$\frac{\beta}{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial Z} = \frac{\alpha}{\epsilon} \frac{\partial H}{\partial X} \quad \text{sur } Z = 0 \quad (X, Y) \in \bar{P}$$

et le paramètre ϵ est maintenant fixé par

$$\epsilon = \frac{\alpha \gamma}{\beta} = \alpha \frac{M_{\infty}^2}{\bar{M}_{\infty}^2} \left(\frac{1 - \bar{M}_{\infty}^2}{1 - M_{\infty}^2} \right)^{3/2} \quad (4.50)$$

Si donc δ est un rapport caractéristique entre une dimension transversale et une dimension longitudinale, la variable réduite fondamentale conservée (paramètre de similitude transsonique) est

$$\frac{\delta M_{\infty}^2}{(1 - M_{\infty}^2)^{3/2}}$$

ou, encore, ce qui a l'avantage de mettre en évidence le signe associé aux régimes transsoniques subsoniques ou supersoniques (qui ne sont comparables entre eux que s'ils sont de même espèce) :

$$\frac{1 - M_{\infty}^2}{(\delta M_{\infty}^2)^{2/3}} \quad \text{paramètre de similitude transsonique (4.51)}$$

Pour la pression on trouve sur la base de $C_p = -2 \frac{\partial \phi}{\partial x}$ le paramètre de similitude

$$\frac{M_{\infty}^2}{1 - M_{\infty}^2} C_p \quad \text{paramètre de similitude transsonique (4.52)}$$

Toute fonction des paramètres de similitude est un paramètre de similitude. Combinant (4.51) et (4.52) on a par exemple

$$\left(\frac{M_{\infty}^2}{\delta}\right)^{2/3} C_p \quad \text{paramètre de similitude transsonique (4.53)}$$

8. Ecoulement hypersonique.

Nous entendons ici par écoulement hypersonique non pas celui où commencent à se produire des effets de gaz réels (modifications de chaleurs spécifiques, dissociations) mais simplement celui où, les perturbations de vitesse restant faibles, celles de pression ne le sont plus.

On doit alors se borner à simplifier l'équation générale (4.7) en la multipliant par a^2 et en y remplaçant

$$a^2 = a_{\infty}^2 - (\gamma - 1) U^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (4.54)$$

qui découle de (4.9) par réduction de h à ses termes les plus importants dans les perturbations de vitesse. De plus on peut, toujours à cause de l'hypothèse des faibles perturbations de vitesse, remplacer

$$u^2 = U^2 \left(1 + 2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad v^2 = 0 \quad w^2 = 0$$

L'équation hypersonique du potentiel de perturbation est alors, après division par a_{∞}^2

$$\begin{aligned} & \left(1 - M_{\infty}^2 - (\gamma + 1) M_{\infty}^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} - (\gamma - 1) M_{\infty}^2 \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ & + \left(1 - (\gamma - 1) M_{\infty}^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} - (\gamma - 1) M_{\infty}^2 \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \\ & - 2 M_{\infty}^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - 2 M_{\infty}^2 \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} = M_{\infty}^2 \left(\frac{1}{U^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{2}{U} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \right) \end{aligned}$$

Comme, par hypothèse le nombre de Mach est grand, on peut encore négliger dans le coefficient de $\partial^2 \phi / \partial x^2$ les termes en $\partial \phi / \partial x$ et $\partial \phi / \partial t$, ce qui donne finalement

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + (1 - (\gamma - 1) M_\infty^2) \frac{\partial \phi}{\partial x} - (\gamma - 1) M_\infty^2 \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - 2 M_\infty^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right) = M_\infty^2 \left(\frac{1}{U^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{2}{U} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \right) \quad (4.55)$$

Dans le cas stationnaire

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + (1 - (\gamma - 1) M_\infty^2) \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = 2 M_\infty^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right)$$

L'équation est conservée par l'affinité si

$$\alpha M_\infty^2 = \gamma \bar{M}_\infty^2$$

$$\alpha^2 (1 - M_\infty^2) = \beta^2 (1 - \bar{M}_\infty^2)$$

La condition de tangence à une surface quasi-plane est conservée si

$$\epsilon \beta = \alpha \gamma$$

Des paramètres de similitude hypersoniques sont

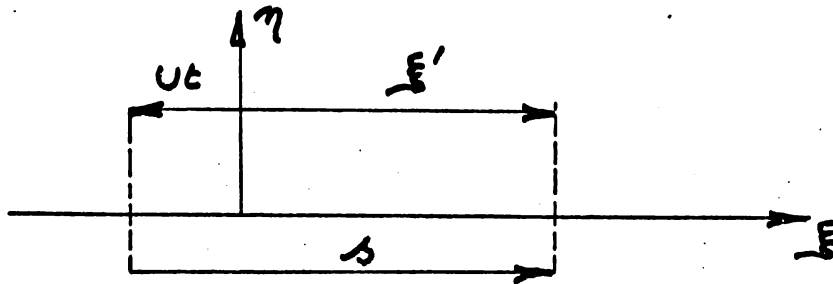
$$\frac{\delta M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad C_p M_\infty^2 \quad (4.56)$$

9. Solution fondamentale du cas linéarisé. Potentiel de perturbation d'une source variable en translation uniforme.

On a vu que dans les axes (ξ, η, ζ, t) au repos par rapport au fluide à l'infini, le potentiel d'une source fixe mais d'intensité variable rayonnant de l'énergie vers l'infini, pouvait s'écrire

$$\phi^n(\xi, \eta, \zeta, t) = \frac{f(t - r/a_\infty)}{r}$$

Considérons une file de sources sur l'axe $o\xi$ qui commencent à débiter quand elles sont atteintes par un "front d'allumage" se déplaçant à la vitesse U dans la direction des ξ négatifs.



La position d'une source par rapport au front d'allumage est donnée par

$$s = U t + \xi'$$

ξ' étant son abscisse. Il en résulte que, à l'époque t , l'âge de la source (temps écoulé depuis qu'elle a commencé son débit) est

$$\tau = t + \frac{1}{U} \xi'$$

Considérons également l'histoire du débit en un point situé à une distance s fixe en aval du front d'allumage, c'est une fonction du temps t et de la coordonnée s ou de l'âge $\tau = s/U$

$$m(t; \tau) = m(t; t + \xi'/U)$$

Pour une abscisse ξ' déterminée, $m(t; t + \xi'/U)$ est l'histoire du débit de la source fixée en ξ' . Elle est responsable d'un potentiel de perturbation

$$\frac{m(t - r/a_\infty; t + \xi'/U - r/a_\infty)}{r}$$

où
$$r = \sqrt{(\xi - \xi')^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

Le potentiel dû à l'ensemble des sources est, par superposition,

$$\phi^N(\xi, \eta, \zeta, t) = \int \frac{m(t - r/a_\infty; t + \xi'/U - r/a_\infty) d\xi'}{r}$$

l'intégrale étant étendue aux abscisses ξ' des sources dont le premier front d'onde a atteint ou dépassé le point $P(\xi, \eta, \zeta)$ à l'époque t considérée. Ceci peut s'exprimer en disant que l'âge de la source ξ' par rapport au point P

$$\sigma = \tau - r/a_\infty = t + \xi'/U - r/a_\infty \quad (4.57)$$

doit être positif. Cet âge σ est le temps écoulé au point P depuis le passage du premier front d'onde émis en ξ' .

Ceci suggère de changer la variable d'intégration de ξ' en σ , (ξ, η, ζ, t) étant maintenus constants. Différentions la relation

$$a_\infty^2 (t + \frac{1}{U} \xi' - \sigma)^2 = (\xi - \xi')^2 + \eta^2 + \zeta^2 \quad (4.58)$$

déduite de (4.57)

$$a_{\infty}^2 (t + \frac{1}{U} \xi' - \sigma) (\frac{1}{U} d \xi' - d \sigma) = - (\xi - \xi') d \xi'$$

On en tire

$$\frac{d \xi'}{a_{\infty}^2 (t + \xi'/U - \sigma)} = \frac{d \xi'}{a_{\infty}^2 r} = \frac{U d \sigma}{a_{\infty}^2 (t - \xi'/U - \sigma) + U (\xi - \xi')} \quad (4.59)$$

et, au dernier membre, l'abscisse ξ' de la source correspondant à un âge déterminé de la source en P doit encore être déterminée. A cet effet résolvons (4.58) par rapport à ξ' . Cette équation du second degré peut s'écrire

$$(1 - M_{\infty}^2)(\xi')^2 + 2 \xi' (U(t - \sigma) + M_{\infty}^2 \xi) + U^2(t - \sigma)^2 - M_{\infty}^2 (\eta^2 + \zeta^2) = 0$$

Son discriminant, après réduction, prend la forme

$$M_{\infty}^2 ((U(t - \sigma) + \xi)^2 + (1 - M_{\infty}^2)(\eta^2 + \zeta^2))$$

Par conséquent

$$(1 - M_{\infty}^2) \xi' = -U(t - \sigma) - M_{\infty}^2 \xi \pm M_{\infty} \sqrt{(U(t - \sigma) + \xi)^2 + (1 - M_{\infty}^2)(\eta^2 + \zeta^2)} \quad (4.60)$$

et pour la valeur correspondante de r réduite de (4.57)

$$(1 - M_{\infty}^2) r = -M_{\infty} (U(t - \sigma) + \xi) \pm \sqrt{(U(t - \sigma) + \xi)^2 + (1 - M_{\infty}^2)(\eta^2 + \zeta^2)} \quad (4.61)$$

Il faut maintenant distinguer entre le cas du nombre de Mach de vol subsonique et supersonique.

Cas subsonique.

$$1 - M_{\infty}^2 > 0 \quad M_{\infty} < 1$$

La valeur du radical dans (4.61) étant supérieure à la valeur absolue du premier terme et r devant être positif, seul le signe + convient. Dès lors, selon (4.60), ξ' a une valeur minimum pour $\sigma = 0$

$$\xi_1 = \frac{1}{1 - M_{\infty}^2} \left\{ -Ut - M_{\infty}^2 \xi + M_{\infty} \sqrt{(Ut + \xi)^2 + (1 - M_{\infty}^2)(\eta^2 + \zeta^2)} \right\}$$

Il y a correspondance biunivoque entre σ et ξ' et, à des valeurs croissantes de l'âge σ , correspondent des abscisses ξ' croissantes : $\xi' \rightarrow \infty$ pour $\sigma \rightarrow \infty$. Substituant la valeur générale de ξ' dans (4.59)

$$\frac{d \xi'}{r} = \frac{U d \sigma}{R}$$

où
$$R = \sqrt{(U(t - \sigma) + \xi)^2 + (1 - M_\infty^2)(\eta^2 + \zeta^2)}$$

et le potentiel prend la forme

$$\phi^M(\xi, \eta, \zeta, t) = \int_0^\infty \frac{U d\sigma}{R} m \left(t + \frac{M_\infty (U(t - \sigma) + \xi) - R}{a_\infty (1 - M_\infty^2)} ; \sigma \right)$$

Particularisons maintenant ce résultat en supposant que les sources ont un débit impulsif déclenché au moment du passage du front d'allumage :

$$m(t; \tau) = m(t) \delta(\tau)$$

On obtient l'image d'une source de débit variable $m(t)$ se déplaçant avec le front d'allumage. Son potentiel sera

$$\phi^M(\xi, \eta, \zeta, t) = \int_0^\infty \frac{U d\sigma}{R} m \left(t + \frac{M_\infty (U(t - \sigma) + \xi) - R}{a_\infty (1 - M_\infty^2)} \right) \delta(\sigma)$$

$$= U \frac{m \left(t + \frac{M_\infty (Ut + \xi) - R_0}{a_\infty (1 - M_\infty^2)} \right)}{R_0}$$

où
$$R_0 = \sqrt{(Ut + \xi)^2 + (1 - M_\infty^2)(\eta^2 + \zeta^2)}$$

Finalement, dans un système de coordonnées qui se déplace avec le front d'allumage :

$$x = Ut + \xi \quad y = \eta \quad z = \zeta$$

$$\phi(x, y, z, t) = U \frac{m \left(t + \frac{M_\infty x - \Lambda}{a_\infty (1 - M_\infty^2)} \right)}{\Lambda} \tag{4.62}$$

$$\Lambda = \sqrt{x^2 + (1 - M_\infty^2)(y^2 + z^2)}$$

Ce potentiel est la solution singulière fondamentale de l'équation linéarisée (4.23) pour $M_\infty < 1$.

Cas supersonique.

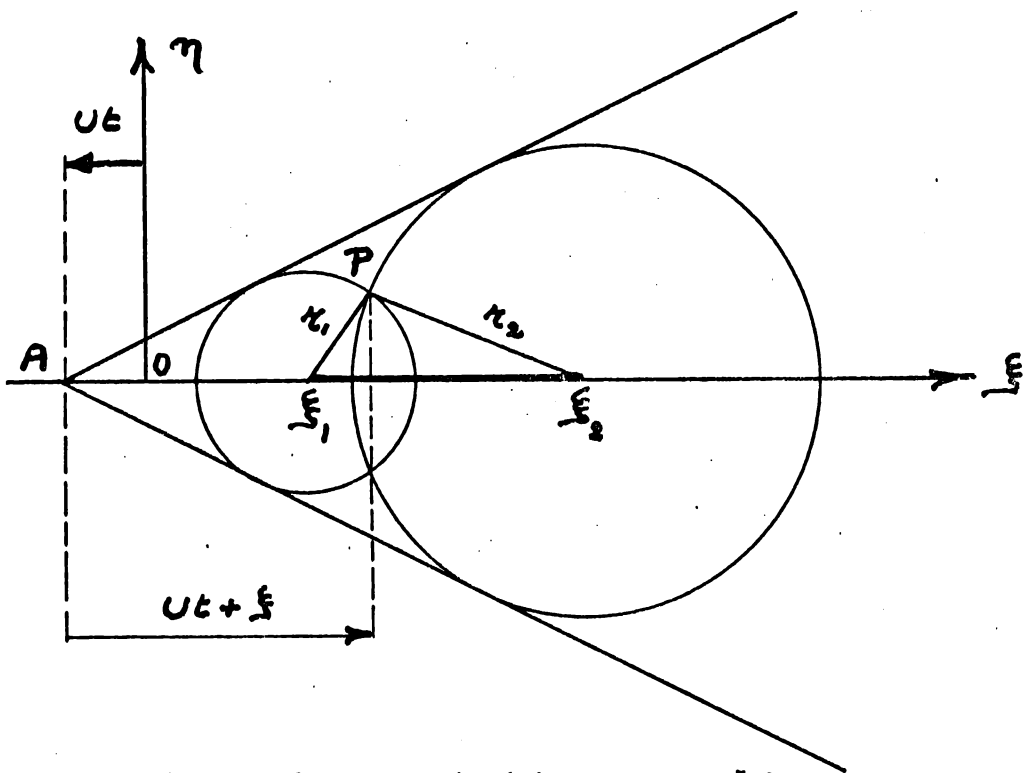
$$M_{\infty}^2 - 1 > 0$$

$$M_{\infty} > 1$$

Il faut écrire (4.61) sous la forme

$$(M_{\infty}^2 - 1) r = M_{\infty} (U(t - \sigma) + \xi) \pm \sqrt{(U(t - \sigma) + \xi)^2 - (M_{\infty}^2 - 1)(\eta^2 + \zeta^2)} \quad (4.63)$$

Le lieu des premiers fronts d'onde émis par les sources est un cône de Mach issu du front d'allumage A et de demi-angle d'ouverture $\sin \beta = M_{\infty}^{-1}$. Il n'y a d'âge positif des sources pour un point P que si celui-ci est intérieur à ce cône.



En particulier on voit que si P est intérieur, $Ut + \xi > 0$.

Alors pour $\sigma = 0$, (4.63) donne deux valeurs positives r_1 et r_2

$$(M_{\infty}^2 - 1) r_1 = M_{\infty} (Ut + \xi) - R_0$$

$$(M_{\infty}^2 - 1) r_2 = M_{\infty} (Ut + \xi) + R_0$$

$$R_0 = \sqrt{(Ut + \xi)^2 - (M_{\infty}^2 - 1)(\eta^2 + \zeta^2)}$$

auxquelles correspondent les abscisses de sources ξ_1 et ξ_2

$$(M_{\infty}^2 - 1) \xi_1 = Ut + M_{\infty}^2 \xi - M_{\infty} R_0$$

$$(M_{\infty}^2 - 1) \xi_2 = Ut + M_{\infty}^2 \xi + M_{\infty} R_0$$

Il y a une valeur maximum de σ pour laquelle R s'annule

$$U \sigma_{\max} = Ut + \xi - \sqrt{M_{\infty}^2 - 1} \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$$

et à laquelle correspond une abscisse de source ξ_0

$$\xi_0 = \xi + \sqrt{\frac{\eta^2 + \zeta^2}{M_{\infty}^2 - 1}}$$

Pour la partie $\xi_1 \ll \xi' \ll \xi_0$ on aura

$$(M_{\infty}^2 - 1) \xi' = U(t - \sigma) + M_{\infty}^2 \xi - M_{\infty} R$$

$$R = \sqrt{(U(t - \sigma) + \xi)^2 - (M_{\infty}^2 - 1)(\eta^2 + \zeta^2)}$$

$$(M_{\infty}^2 - 1) r = M_{\infty} (Ut + \xi) - R$$

et
$$\frac{d \xi'}{r} = U \frac{d\sigma}{R}$$

Pour la partie $\xi_0 < \xi' < \xi_2$

$$(M_{\infty}^2 - 1) \xi' = U(t - \sigma) + M_{\infty}^2 \xi + M_{\infty} R$$

$$(M_{\infty}^2 - 1) r = M_{\infty} (Ut + \xi) + R$$

$$\frac{d \xi'}{r} = -U \frac{d\sigma}{R}$$

De sorte que le potentiel pourra s'écrire

$$\begin{aligned} \phi^{\#}(\xi, \eta, \zeta, t) &= U \int_0^{\sigma_{\max}} \frac{d\sigma}{R} m \left(t - \frac{M_{\infty} (Ut + \xi) - R}{a_{\infty} (M_{\infty}^2 - 1)} ; \sigma \right) \\ &\quad - U \int_{\sigma_{\max}}^0 \frac{d\sigma}{R} m \left(t - \frac{M_{\infty} (Ut + \xi) + R}{a_{\infty} (M_{\infty}^2 - 1)} ; \sigma \right) \end{aligned}$$

Particularisant ce résultat au cas de sources impulsives et passant aux axes (x, y, z, t) , il vient

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{U}{\Lambda} \left\{ m \left(t - \frac{M_{\infty} x - \Lambda}{a_{\infty} (M_{\infty}^2 - 1)} \right) + m \left(t - \frac{M_{\infty} x + \Lambda}{a_{\infty} (M_{\infty}^2 - 1)} \right) \right\} \quad (4.64)$$

$$\Lambda = \sqrt{x^2 - (M_{\infty}^2 - 1)(y^2 + z^2)}$$

C'est la solution fondamentale de (4.63) dans le cas supersonique pour une singularité à l'origine.

EXERCICES DE MECANIQUE DES FLUIDES.

Méthode des singularités.Cas de l'hydrodynamique. $\rho = \text{constante.}$

La conservation de la masse se réduit à la relation (géométrique)

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0$$

Pour une source de débit massique Q on aura par isotropie

$$4 \pi r^2 \rho V = Q \quad \text{avec une vitesse radiale}$$

$\vec{r} = (x - a, y - b, z - c)$ si la source est centrée au point de coordonnées (a, b, c) . D'où le champ

$$u = \frac{Q}{4\pi\rho} \frac{x - a}{r^3} \quad v = \frac{Q}{4\pi\rho} \frac{y - b}{r^3} \quad w = \frac{Q}{4\pi\rho} \frac{z - c}{r^3}$$

Il existe un potentiel ϕ pour l'écoulement

$$\vec{V} = \operatorname{grad} \phi \quad \phi = - \frac{Q}{4\pi\rho} \frac{1}{r}$$

C'est une solution fondamentale (de Green) de l'équation

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \nabla^2 \phi = 0$$

La source dans un courant uniforme.

Supposons la à l'origine et V la vitesse du courant uniforme suivant ox .
Le potentiel complet est

$$\phi = V x - \frac{Q}{4\pi\rho} \frac{1}{r} \quad \vec{F}(x, y, z)$$

Dans le plan méridien $y = 0$ on prend ϕ en coordonnées polaires
 $x = r \cos \theta$ $z = r \sin \theta$

$$\phi = V r \cos \theta - \frac{Q}{4\pi\rho} \frac{1}{r}$$

vitesse radiale totale : $V \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\rho r^2}$

tangentielle : $-V \sin \theta$

Equation différentielle des lignes de courant :

$$\frac{dr}{V \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\rho r^2}} = \frac{r d\theta}{-V \sin \theta}$$

Elle s'intègre par séparation des variables en éliminant r au profit de z

$$z = r \sin \theta \quad dz = dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta$$

et l'équation différentielle devient

$$Vz dz + \frac{Q}{4\pi\rho} \sin \theta d\theta = 0$$

Son intégrale générale est

$$Vz^2 = \frac{Q}{2\pi\rho} (\cos \theta + C)$$

Le point d'arrêt de l'écoulement, d'où part la surface de révolution séparant l'écoulement externe de l'écoulement interne est obtenu en faisant $z = 0$ et $\theta = \pi$. Ceci satisfait l'équation des lignes de courant pour $C = 1$.

L'équation de la courbe méridienne du corps de révolution est

$$z^2 = \frac{Q}{2\pi\rho V} (1 + \cos \theta)$$

A l'infini aval ($\theta = 0$) le rayon du corps tend asymptotiquement vers

$$z = \sqrt{\frac{Q}{\pi \rho U}}$$

exprimant que tout le débit de la source traverse l'aire πz^2 avec la vitesse uniforme U .

Fonction de courant.

On exprime le flux à travers un élément d'arc de méridienne (dx, dz)

$$d\psi = \rho (v \, 2\pi z \, dx - u \, 2\pi z \, dz)$$

$$\text{d'où} \quad u = -\frac{1}{2\pi\rho z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad v = \frac{1}{2\pi\rho z} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

et les lignes de courant sont données par

$$\psi = \text{constante}$$

Les conditions d'existence pour ψ sont assurées par $\text{div } \vec{V} = 0$ en coordonnées cylindriques.

$$ds^2 = dx^2 + dz^2 + z^2 d\omega^2$$

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial}{\partial x} (z u) + \frac{\partial}{\partial z} (z v) + \frac{\partial}{\partial \omega} v \right)$$

Ici $v = 0$ et la relation

$$\frac{\partial}{\partial z} (z v) + \frac{\partial}{\partial x} (z u) = 0$$

est automatiquement satisfaite par $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x}$

Dans le cas de la source dans un courant uniforme on trouve par intégration

$$\psi = -\rho \pi z^2 U + \frac{Q}{2} \left(\frac{x}{r} + C \right)$$

(la constante ne jouant aucun rôle peut être supprimée).

En coordonnées polaires

$$\psi = -\rho \pi r^2 \sin^2 \theta U + \frac{Q}{2} \cos \theta$$

Répartition des pressions sur le corps de révolution.

Par la loi de Bernoulli du régime permanent

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{P_{\infty}}{\rho} + \frac{U^2}{2}$$

ou

$$C_p = \frac{p - P_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 1 - \frac{v^2}{U^2}$$

$$v^2 = \left(\frac{Q}{4\pi\rho} \right)^2 \frac{1}{r^4} + \frac{Q U \cos \theta}{2 \pi \rho r^2} + U^2$$

$$\frac{v^2}{U^2} - 1 = \left(\frac{Q}{4\pi\rho U} \right)^2 \frac{1}{r^4} + \frac{Q \cos \theta}{2 \pi \rho U} \frac{1}{r^2}$$

Mais, sur la surface du corps,

$$z^2 = r^2 \sin^2 \theta = \frac{Q}{2 \pi \rho U} (1 + \cos \theta)$$

relation qui permet de remplacer r au profit de θ .

On trouve

$$4 C_p = (1 + 3 \cos \theta)(\cos \theta - 1)$$

La pression statique ($C_p = 0$) est atteinte localement pour $\cos \theta = -1/3$ et asymptotiquement en aval pour $\theta = 0$. La pression totale ($C_p = 1$) est atteinte au point d'arrêt $\theta = \pi$. La dépression maximum est atteinte localement pour $\cos \theta = 1/3$ ($C_p = -1/3$).

Écoulement autour d'une sphère. Doublet de sources.

Soit en général $I\phi(x-a, y-b, z-c)$ le potentiel d'une singularité localisée au point (a, b, c) et d'intensité I . Plaçons une seconde singularité d'intensité opposée $-I$ en $(a+da, b, c)$. Le potentiel combiné vaut

$$I \{ \phi(x-a, y-b, z-c) - \phi(x-a-da, y-b, z-c) \}$$

$$= I da \frac{\partial \phi(x-a, y-b, z-c)}{\partial (x-a)} + \dots$$

Passant à la limite

$$\lim_{da \rightarrow 0} I da = M \quad (\text{moment du doublet})$$

le potentiel du doublet vaut

$$M \frac{\partial \phi}{\partial x} = - M \frac{\partial \phi}{\partial a}$$

On obtient donc pour un doublet de sources obtenu en plaçant derrière la source Q en $(0, 0, 0)$, une source $-Q$ en $(da, 0, 0)$ et passant à la limite un potentiel

$$- \frac{M}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = \frac{M}{4\pi\rho} \frac{x}{r^3} = \frac{M}{4\pi\rho} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

Dans un courant uniforme le potentiel total est

$$\phi = U r \cos \theta + \frac{M}{4\pi\rho} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

La vitesse radiale totale

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \cos \theta \left(U - \frac{M}{2\pi\rho} \frac{1}{r^3} \right)$$

est nulle sur la sphère de rayon R défini par

$$M = 2 \pi \rho U R^3$$

Cette sphère est alors la surface de séparation fermée entre l'écoulement extérieur et l'écoulement intérieur.

Sur la sphère la vitesse est tangentielle et vaut

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = - \sin \theta \left(U + \frac{M}{4\pi\rho} \frac{1}{r^3} \right) \quad \text{à } r = R = - \frac{3}{2} U \sin \theta$$

Il vient pour le coefficient de pression

$$C_p = 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta$$

La pression est localement statique pour $\sin \theta = \pm \frac{2}{3}$. La dépression maximum est atteinte pour $\sin \theta = \pm 1$ où $C_p = -5/4$.

La fonction de courant s'obtient, soit par intégration des relations de définition en (u, w) ; soit par des relations semblables en coordonnées polaires. Exprimant le flux (dans le même sens) à travers un arc de méridienne :

$$d\psi = 2\pi\rho z (u_\theta dr - u_r r d\theta) \quad \text{avec} \quad z = r \sin \theta$$

on obtient les relations de définition de ψ

$$u_r = - \frac{1}{2\pi\rho r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$u_\theta = \frac{1}{2\pi\rho r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Pour le doublet source dans l'écoulement uniforme

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U \sin \theta \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3}\right)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -2\pi\rho U \sin^2 \theta \left(r + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^2}\right)$$

et, par intégration,

$$\psi = -\pi\rho U \sin^2 \theta \left(r^2 - \frac{R^3}{r}\right)$$

à une fonction de θ près. La vérification par la deuxième relation montre que cette fonction se réduit à une constante qui peut être prise égale à zéro.

Dans ce cas l'écoulement sur la sphère correspond à $\psi = 0$.

Une autre façon de procéder consisterait à prendre la dérivée partielle en x de la fonction de courant $\frac{x}{2r}$ de la source unitaire et de la multiplier par M pour trouver la fonction de courant du doublet

$$\frac{M}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right) = \frac{M z^2}{2 r^3}$$

Remplaçant M par sa valeur en fonction de R et ajoutant la fonction de courant du courant uniforme

$$\psi = -\pi\rho z^2 U \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)$$

Avec $z = r \sin \theta$ cette expression est bien identique à la précédente.

Force exercée par un courant sur une source.

Pour maintenir une source en place et assurer la permanence de l'écoulement il faut appliquer à la source une force que nous allons calculer. Centrons autour de la source une sphère de rayon r et appliquons au fluide qui s'y trouve contenu le théorème de la quantité de mouvement

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}$$

où \vec{P} est la résultante des pressions sur la sphère et \vec{F} la force appliquée à la source. Par raison de symétrie il suffit de faire le calcul pour la composante de quantité de mouvement dans la direction du courant uniforme (seul présent quand on ôte la source).

$$\frac{d Q_x}{dt} = P_x + F_x$$

$$\frac{d Q_x}{dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\text{Vol}} \rho u \, d\tau = \int_{\text{Vol}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) \, d\tau + \int_S \rho u (\vec{V} \cdot \vec{n}) \, dS$$

Comme le mouvement est permanent, seule l'intégrale de débit à travers la surface est à évaluer

$$\frac{d Q_x}{dt} = \int_0^\pi \rho u u_r 2\pi z r \, d\theta$$

où
$$u = U + \frac{Q}{4\pi\rho} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$u_r = U \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\rho} \frac{1}{r^2}$$

$$z = r \sin \theta$$

L'intégration élémentaire donne

$$\frac{d Q_x}{dt} = \frac{4}{3} Q U$$

Pour la composante P_x de la résultante des pressions

$$P_x = - \int_0^{\pi} p \cos \theta \, 2 \pi z r \, d\theta$$

où $p = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho (U^2 - v^2)$

$$v^2 = u_r^2 + u_{\theta}^2 = U^2 + \frac{Q U}{2\pi\rho} \frac{\cos \theta}{r^2} + \left(\frac{Q}{4\pi\rho}\right)^2 \frac{1}{r^4}$$

L'intégration élémentaire donne

$$P_x = \frac{1}{3} Q U$$

Finalement on trouve pour la force appliquée à la source

$$F_x = \frac{d Q_x}{dt} - P_x = Q U$$

Ce résultat se généralise d'emblée pour le cas d'une source plongée dans un écoulement quelconque. Si \vec{V}_0 dénote la vitesse existant dans l'écoulement à l'endroit où la source va être placée, on peut prendre le rayon de la sphère de calcul aussi petit que l'on veut et considérer les conditions de calcul comme celles d'un écoulement localement uniforme de vitesse \vec{V}_0 .

La force sur la source nécessaire à la maintenir en place vaut alors

$$\vec{F} = Q \vec{V}_0$$

Une autre démonstration résulte directement d'une extension du principe de conservation de la masse. On remplace le principe

$$\frac{D}{Dt} (\rho \, d\tau) = 0$$

par celui plus général

$$\frac{D}{Dt} (\rho \, d\tau) = q \, d\tau$$

où q est alors le débit massique par unité de volume d'une source diffuse dans le volume élémentaire.

Le calcul de la variation de quantité de mouvement d'une particule

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (\rho \vec{V} d\tau) &= \vec{V} \frac{D}{Dt} (\rho d\tau) + \rho d\tau \frac{D\vec{V}}{Dt} \\ &= (q \vec{V} + \rho \frac{D\vec{V}}{Dt}) d\tau \end{aligned}$$

fait alors apparaître en plus du terme newtonien classique, le terme $q \vec{V} d\tau$ qui, pour conserver aux équations du mouvement leur forme classique, doit être équilibré au second membre par un terme $\vec{F} d\tau$

$$\vec{F} = q \vec{V}$$

représentant la force appliquée par unité de volume pour maintenir en place le système de sources. Cette force est proportionnelle à la vitesse locale du courant.

Paradoxe de d'Alembert.

Soit Q_i un système de sources dans un écoulement uniforme de vitesse \vec{U} . Les forces à appliquer à une source se composent vectoriellement comme les vitesses au droit de cette source provenant de l'écoulement \vec{U} et des vitesses induites par les autres sources.

Théorème : Le système de forces appliquées aux sources en raison de leurs inductions de vitesse mutuelles est statiquement équivalent à zéro.

En effet Q_i induit au droit de Q_j une vitesse

$$\frac{Q_i}{4\pi\rho r_{ij}^3} \vec{r}_{ij}$$

et la force à appliquer à Q_j pour la maintenir en place du fait de la présence de Q_i est

$$\frac{Q_i Q_j}{4\pi\rho r_{ij}^3} \vec{r}_{ij}$$

Réciproquement la force à appliquer à Q_i pour la maintenir en place du fait de la présence de Q_j sera

$$\frac{Q_i Q_j}{4 \pi \rho r_{ij}^3} \vec{r}_{ji}$$

Comme $\vec{r}_{ji} = -\vec{r}_{ij}$ ces deux forces sont toujours égales et opposées suivant la même ligne d'action et forment un système statiquement équivalent à zéro. Le théorème en découle par superposition des paires d'induction mutuelles.

Considérons maintenant l'écoulement autour d'un corps limité par une surface fermée S obtenu à l'aide d'un système intérieur de sources placées dans le courant uniforme \vec{U} . Appliquant le théorème de la quantité de mouvement au fluide intérieur

$$\frac{DQ_i}{Dt} = \vec{P} + \vec{F}$$

où \vec{P} est la somme vectorielle de l'action des pressions sur la surface S , que nous désirons calculer, et \vec{F} la somme vectorielle des forces appliquées aux sources intérieures. Le premier membre est nul car d'une part le mouvement intérieur est permanent, d'autre part il n'y a pas de flux à travers la surface S . Donc

$$\vec{P} = -\vec{F}$$

D'après le théorème précédent il suffit pour calculer \vec{F} de tenir compte des forces appliquées aux sources par suite de la présence de l'écoulement uniforme \vec{U}

$$\vec{F} = \vec{U} \sum Q_i$$

Mais, si la surface S est fermée, le débit total des sources doit être nul $\sum Q_i = 0$ et donc

$$\vec{P} = 0$$

C'est le paradoxe de d'Alembert.

Appliquant de même le théorème du moment de la quantité de mouvement (ce dernier est aussi constant dans le mouvement intérieur), le moment par rapport à l'origine des actions élémentaires des pressions sur la surface

$$\vec{M} = - \vec{C}$$

où \vec{C} est le moment résultant des forces appliquées aux sources. De nouveau il suffit, en vertu du théorème, de prendre le moment des forces dues à la vitesse \vec{U}

$$\vec{M} = - \sum Q_i (\vec{U} \times \vec{r}_i)$$

Le corps peut donc subir un couple hydrodynamique dans l'écoulement uniforme.

Écoulements irrotationnels à deux dimensions d'un fluide parfait incompressible.

La condition nécessaire et suffisante pour que le tourbillon

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

soit nul est que la vitesse dérive d'un potentiel

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le fluide soit incompressible

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

est que l'écoulement possède une fonction de courant

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Par conséquent potentiel et fonction de courant sont liés par des équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

et le potentiel complexe

$$f = \phi + i \psi$$

est une fonction analytique de la variable complexe

$$z = x + i y$$

Si on connaît $f(z)$ on peut en déduire la vitesse complexe

$$u - i v = \frac{df}{dz}$$

Les lignes de courant $\psi = \text{constante}$ et les équipotentiels $\phi = \text{constante}$ forment, en vertu des équations de Cauchy-Riemann, un réseau orthogonal.

Soit un contour fermé C , contenant éventuellement des singularités de $f(z)$. Le débit volumique Q sortant par C est donné par

$$Q = \oint_C u \, dy - v \, dx = \oint_C d\psi$$

La circulation Γ de la vitesse sur ce contour par

$$\Gamma = \oint_C u \, dx + v \, dy = \oint_C d\phi$$

Par conséquent on trouve pour l'intégrale de la dérivée de $f(z)$ sur le contour fermé la signification

$$\oint_C df = \Gamma + i Q$$

Le potentiel complexe

$$f = \frac{A}{2\pi i} \ln(z - c)$$

où A est une constante complexe et $c = a + i b$ est l'affixe du point singulier du potentiel, donne un champ de vitesse

$$u - i v = \frac{A}{2\pi i} \frac{1}{z - c}$$

qui possède un pôle simple en $z = c$. Pour un contour C qui entoure le pôle, il vient

$$\oint_C df = \oint_C (u - i v) dz = A$$

Par conséquent le potentiel est celui d'une singularité combinée d'une source filiforme de débit volumique

$$Q = I m (A)$$

et d'un tourbillon filiforme de circulation

$$\Gamma = R e (A)$$

Il y a lieu d'écrire ce potentiel sous la forme

$$f = \frac{\Gamma + i Q}{2\pi i} \ln (z - c)$$

Prenant

$$z - c = r e^{i\theta}$$

$$f = \frac{\Gamma + i Q}{2\pi i} (\ln r + i \theta)$$

Pour la source seule ($\Gamma = 0$) le potentiel est

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r \quad u_r = \frac{Q}{2\pi r} \quad u_\theta = 0$$

et la fonction de courant est multivoque

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta$$

Pour le tourbillon seul ($Q = 0$) c'est le potentiel qui est multivoque

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad u_r = 0 \quad u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

tandis que la fonction de courant vaut

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

Doublets. Ecoulement autour d'un cylindre.

Superposons les potentiels complexes de deux singularités opposées et séparées par la distance complexe dc

$$f = \frac{\Gamma + i Q}{2\pi i} (\ln(z - c) - \ln(z - c - dc))$$

$$f = -\frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \ln \left(1 - \frac{dc}{z-c}\right) = \frac{(\Gamma + iQ) dc}{2\pi i (z-c)}$$

Si $dc = d\epsilon e^{i\alpha}$

Posons $\lim \Gamma d\epsilon = M$ moment du doublet tourbillon

$\lim Q d\epsilon = N$ moment du doublet source

L'angle α mesure l'orientation du doublet et

$$f = \frac{(M + iN) e^{i\alpha}}{2\pi i (z-c)}$$

Par conséquent un doublet source donne le même potentiel complexe qu'un doublet tourbillon tourné de 90° .

Tout comme le doublet source ponctuel orienté dans le sens d'un écoulement uniforme produit un écoulement autour d'une sphère, le doublet source filiforme de même orientation produit un écoulement autour d'un cylindre. Le potentiel complexe vaut alors

$$f = U z + \frac{N}{2\pi z}$$

La fonction de courant :

$$\psi = U y - \frac{N y}{2\pi(x^2 + y^2)} = U y \left(1 - \frac{N}{2\pi U} \frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

La circonférence $x^2 + y^2 = a^2$ est une ligne de courant correspondant à $\psi = 0$ pour le choix

$$N = 2\pi U a^2$$

Le potentiel complexe de l'écoulement sans circulation autour du cylindre est donc

$$f = U \left(z + \frac{a^2}{z}\right)$$

En ajoutant le potentiel d'un tourbillon placé au centre de la circonférence, celle-ci reste ligne de courant. On obtient le potentiel complexe de l'écoulement avec circulation d'intensité Γ autour du cylindre

$$f = U \left(z + \frac{a^2}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$$

$$u - i v = U \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i z}$$

L'affixe des points d'arrêt, où u et v s'annulent simultanément, dépend de l'équation

$$\frac{z}{a} - \frac{a}{z} - 2 i m = 0 \quad \text{où} \quad m = \frac{\Gamma}{4\pi U a}$$

quand $m < 1$ on peut poser

$$z = a e^{i\gamma}$$

et l'équation précédente revient à $\sin \gamma = m$.

Il y a deux points d'arrêt situés symétriquement sur le cylindre, ils confluent au sommet $z = i a$ pour $m = 1$.

quand $m > 1$ on posera

$$z = i k a$$

et le facteur k dépend de l'équation

$$k^2 - 2 m k + 1 = 0$$

dont le produit des racines vaut l'unité. Il n'y a donc qu'une seule racine plus grande que l'unité

$$k = m + \sqrt{m^2 - 1}$$

correspondant à un point d'arrêt situé au sein de l'écoulement. C'est un point double d'une ligne de courant, où les deux branches se coupent à angle droit. En effet en ce point l'écoulement n'a pas de singularité.

Si en $z = z_0$ $\frac{df}{dz} = 0$ et qu'il n'y a pas de singularité il existe un développement convergent du type

$$\frac{df}{dz} = a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

dans le voisinage de $z = z_0$. D'où aussi

$$f = a_0 + \frac{a_1}{2} (z - z_0)^2 + \dots$$

dans ce voisinage. Posons

$$z - z_0 = c e^{i\alpha}$$

et soit $a_0 = b_0 + i c_0$ $a_1 = b_1 + i c_1$

Alors dans ce voisinage

$$\psi = c_0 + \frac{c^2}{2} (c_1 \cos 2\alpha + b_1 \sin 2\alpha) + \dots$$

L'orientation des branches des lignes de courant $\psi = c_0$ qui se croisent en $z = z_0$ sera donnée par

$$c_1 \cos 2\alpha + b_1 \sin 2\alpha = 0$$

A toute solution α de cette relation correspond aussi une solution $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Exercices : Si le courant fait avec l'axe ox un angle $\pi - \alpha$, le potentiel complexe de l'écoulement autour de la circonférence de rayon a est

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - U \left(z e^{+i\alpha} + \frac{a^2}{z} e^{-i\alpha} \right)$$

Si on désire que le point d'arrêt en aval sur la circonférence ait pour affixe $z = a e^{i\gamma}$, la circulation doit être fixée à la valeur

$$\Gamma = -4\pi a \sin(\alpha + \gamma)$$

(avec $\gamma = \pi - \alpha$, cette relation devient

$$\Gamma = 4\pi a \sin(\alpha - \alpha_0) \quad) .$$

Force requise pour maintenir un tourbillon. Théorème de Kutta-Joukowski.

Soit un tourbillon filiforme de circulation Γ , plongé dans un courant uniforme de vitesse U faisant avec ox l'angle β . Le potentiel complexe a pour valeur

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z + z U e^{-i\beta}$$

Appliquons le théorème de la quantité de mouvement au fluide contenu dans un cylindre de rayon ϵ centré autour du tourbillon.

Vitesse radiale sur le cylindre : $U \cos(\theta - \beta)$

Variation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (Q_x - i Q_y) &= \rho \int_0^{2\pi} (u - i v) U \cos(\theta - \beta) \epsilon d\theta \\ &= \epsilon U \rho \int_0^{2\pi} \left(\frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{e^{-i\theta}}{\epsilon} + U e^{-i\beta} \right) \cos(\theta - \beta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \rho U \Gamma \frac{e^{-i\beta}}{i} = \frac{1}{2} \rho U \Gamma (-\sin \beta - i \cos \beta) \end{aligned}$$

Calcul de la résultante des pressions :

Loi de Bernoulli $p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho (U^2 - v^2)$

$$v^2 = (u - i v)(u + i v) = \frac{df}{dz} \left(\frac{df}{dz} \right)^*$$

Sur le cylindre

$$\begin{aligned} v^2 &= \left(\frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{e^{-i\theta}}{\epsilon} + U e^{-i\beta} \right) \left(-\frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{e^{i\theta}}{\epsilon} + U e^{i\beta} \right) \\ &= \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 \epsilon^2} + \frac{U\Gamma}{\pi \epsilon} \sin(\beta - \theta) + U^2 \\ p &= p_\infty - \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\Gamma^2}{4\pi^2 \epsilon^2} - \frac{\rho U \Gamma}{2\pi \epsilon} \sin(\beta - \theta) \right) \end{aligned}$$

Les deux premiers termes du second membre représentent une pression constante de résultante identiquement nulle.

Les deux composantes dues au dernier terme sont :

$$P_x - i P_y = \frac{\rho U \Gamma}{2\pi \epsilon} \int_0^{2\pi} \sin(\beta - \theta) e^{-i\theta} \epsilon d\theta = \frac{1}{2} \rho U \Gamma (\sin \beta + i \cos \beta)$$

Par conséquent, il vient pour la force à appliquer au tourbillon

$$F_x - i F_y = \frac{d}{dt} (Q_x - i Q_y) - (P_x - i P_y)$$

$$= -\rho U \Gamma (\sin \beta + i \cos \beta)$$

ou

$$F_x + i F_y = \rho U \Gamma i e^{i\beta}$$

Elle est proportionnelle à la masse volumique, à la vitesse du courant dans lequel est plongé le tourbillon et à la circulation engendrée par le tourbillon.

Sa direction est obtenue en faisant tourner le vecteur vitesse de 90° dans le sens de la circulation.

Comme pour le cas des sources ponctuelles, ce dernier résultat a une valeur générale. En prenant ϵ suffisamment petit on peut considérer qu'avant l'introduction du tourbillon l'écoulement était uniforme dans le cercle de rayon ϵ . La force qu'il faut appliquer au tourbillon suit alors la même loi, la vitesse à utiliser étant la vitesse locale avant l'introduction du tourbillon.

Interaction entre singularités filiformes.

L'interaction entre sources filiformes suit évidemment une loi semblable à celle entre sources ponctuelles.

Une source de débit volumétrique Q_i (par unité de longueur) induit maintenant au droit d'une autre source Q_j une vitesse radiale

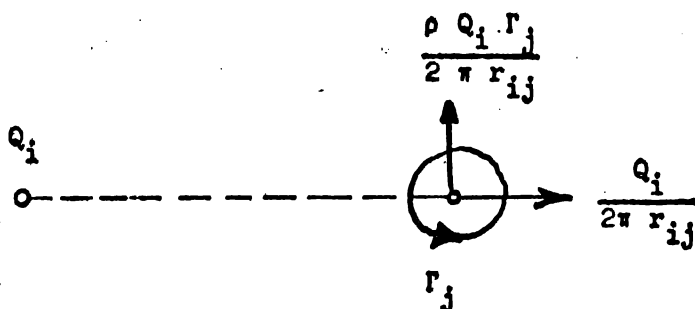
$$\frac{Q_i}{2\pi r_{ij}^2} \quad \vec{r}_{ij}$$

nécessitant sur cette dernière l'application d'une force (par unité de longueur)

$$\rho \frac{Q_i Q_j}{2\pi r_{ij}^2} \quad \vec{r}_{ij}$$

La force à appliquer sur Q_i par suite de la présence de Q_j est manifestement égale et opposée sur la même ligne d'action.

L'interaction entre source et tourbillon filiformes



est constituée par un couple, les forces égales

$$\rho \frac{Q_i \Gamma_j}{2\pi r_{ij}}$$

étant perpendiculaires à la droite joignant les deux singularités.

L'interaction entre tourbillons filiformes est du même type qu'entre sources; deux forces égales et opposées sur la droite joignant les deux singularités :

$$- \rho \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{2\pi r_{ij}^2} \vec{r}_{ij} \quad \text{pour la force sur } \Gamma_j \text{ due à la}$$

présence de Γ_i .

Ces considérations permettent une démonstration élémentaire du théorème de Kutta-Joukowski.

Soit un système de sources et tourbillons filiformes réalisant l'écoulement bidimensionnel autour d'un corps fermé avec vitesse \vec{U} à l'infini.

La résultante des pressions sur le corps s'obtient de nouveau par application du théorème de la quantité de mouvement au fluide intérieur. Cette résultante

$$\vec{F} = - \vec{F}$$

où \vec{F} est la somme vectorielle des forces appliquées aux singularités internes. Les forces dues aux interactions entre singularités ont une somme vectorielle nulle. Il suffit de tenir compte des forces provenant de la vitesse \vec{U} à l'infini.

$$\vec{F} = \rho \vec{U} \sum Q_i + (\rho U \sum \Gamma_j) \vec{k}$$

où \vec{k} est un vecteur unitaire obtenu à partir de \vec{U} par une rotation de 90° dans le sens mathématique (ox vers oy) .

Pour que le corps soit fermé il faut que $\sum Q_i = 0$, d'autre part

$$\sum \Gamma_j = \Gamma$$

la circulation autour d'un contour entourant complètement le corps. D'où le théorème de Kutta-Joukowski

$$\vec{P} = -\rho U \Gamma \vec{k}$$

La résultante des pressions est proportionnelle à $\rho U \Gamma$ et obtenue en direction en faisant tourner de 90° dans le sens opposé à la circulation le vecteur vitesse relative à l'infini.

Formules de Blasius.

On a vu que, par la loi de Bernoulli, on peut écrire

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 - \frac{1}{2} \rho \frac{df}{dz} \left(\frac{df}{dz} \right)^{\#}$$

Soient alors (dx, dy) les éléments d'un contour de profil autour duquel se fait l'écoulement. L'élément de résultante des pressions vaut

$$dP_x - i dP_y = -p dy - i p dx = -i p (dx - i dy) = -i p dz^{\#}$$

Il est donc possible de calculer la résultante des pressions par la formule

$$P_x - i P_y = \frac{i\rho}{2} \int_c \frac{df}{dz} dz^{\#}$$

En observant que le contour c du profil est une ligne de courant pour laquelle $d\psi = 0$ et donc $df^{\#} = df$, on obtient la première formule de Blasius

$$P_x - i P_y = \frac{i\rho}{2} \int_c \frac{df}{dz} df$$

L'élément de moment par rapport à l'origine dû aux pressions sur le contour est

$$dM = -y dP_x + x dP_y = p (x dx + y dy)$$

Observant que $(x dx + y dy)$ est la partie réelle de

$(x + i y) (dx - i dy)$, on aura

$$dM = \operatorname{Re} (pz dz^M)$$

En intégrant sur le contour, la partie constante de la pression n'introduit qu'une valeur imaginaire pure qui peut donc être éliminée (d'ailleurs une pression constante sur une surface fermée donne lieu à une résultante statiquement équivalente à zéro). On obtient ainsi la seconde formule de Blasius

$$M = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{\rho}{2\lambda} \int_0 z \frac{df}{dz} dz \right\}$$

Intégration des formules de Blasius.

Soit $z = z(Z)$ la fonction qui réalise une représentation conforme entre les aires extérieures au profil donné (plan z) et à une circonférence unité du plan Z . Par le théorème de Laurent on aura

$$z = b_1 Z + a_0 + \frac{a_1}{Z} + \frac{a_2}{Z^2} + \dots$$

développement convergent pour $|Z| > 1$. La vitesse complexe de l'écoulement autour de la circonférence unité

$$\frac{df}{dZ} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dZ}$$

aura la même valeur à l'infini que dans l'écoulement autour du profil si

$$\frac{dz}{dZ} \rightarrow 1 \quad \text{quand} \quad |Z| \rightarrow \infty$$

Ceci demande $b_1 = 1$.

De plus, il est toujours possible par une translation de faire $a_0 = 0$.

Dans ce cas, l'origine du plan z correspond au point C du profil que l'on appelle le centre du profil et

$$z = Z + \frac{a_1}{Z} + \dots$$

Dans le plan Z le potentiel de l'écoulement est connu :

$$\frac{df}{dZ} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{Z} - U \left(e^{-i\alpha} - \frac{e^{i\alpha}}{Z^2} \right)$$

L'angle que fait la vitesse avec l'axe OX étant ici fixé à $\pi - \alpha$.
Pour calculer les intégrales de Blasius il faut évaluer

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dz} &= 1 + \frac{m_1}{z} + \frac{m_2}{z^2} + \dots \\ &= 1 + \frac{a_1}{z^2} + \frac{2a_2}{z^3} + \frac{a_1^2 + 3a_3}{z^4} + \dots \end{aligned}$$

Ceci permet d'évaluer

$$\left(\frac{df}{dZ} \right)^2 \frac{dZ}{dz} = A_0 + \frac{A_1}{z} + \dots$$

$$z \left(\frac{df}{dz} \right)^2 \frac{dZ}{dz} = B_{-1} z + B_0 + \frac{B_1}{z} + \dots$$

D'après le théorème des résidus

$$P_x - i P_y = \frac{i\rho}{2} \oint \left(\frac{df}{dZ} \right)^2 \frac{dZ}{dz} dz = 2\pi i \frac{i\rho}{2} A_1$$

$$M = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \{ 2\pi i B_1 \}$$

on trouve

$$A_1 = -\frac{\Gamma U}{\pi i} e^{i\alpha}$$

$$B_1 = 2U \left(a_1 e^{2i\alpha} + 1 \right) - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}$$

Le premier résultat est conforme au théorème de Kutta-Joukowski

$$P_x - i P_y = -i e^{i\alpha} \rho \Gamma U$$

Le second résultat montre que le moment par rapport au centre du profil ne dépendra que du coefficient complexe a_1 de la fonction de transformation.

Posons

$$a_1 = B^2 e^{2i\beta}$$

il vient

$$M = 2 \pi \rho U^2 B^2 \sin 2(\beta + \alpha)$$

Fixation de la circulation.

Les formules précédentes ne sont strictement valables que si le développement de Laurent de z converge encore pour $|Z| = 1$, c'est-à-dire si la transformation conforme n'a pas de singularité sur la frontière. Le cas intéressant est précisément celui où une singularité se présente, correspondant à un point anguleux du profil.

Soit un profil présentant un point anguleux en $z = z_0$ où la rotation de la tangente subit une discontinuité égale à $\eta \pi$ ($\eta \leq 1$).

Si $Z = e^{i(\pi - \alpha_0)}$ est le point image sur la circonférence unité, considérons la fonction $(Z + e^{-i\alpha_0})^{1+\eta}$.

Au voisinage du point image $Z = -e^{-i\alpha_0} + \varepsilon e^{i\theta}$, cette fonction

$$\varepsilon^{1+\eta} e^{i\theta(1+\eta)}$$

subit la discontinuité d'argument $\pi(1+\eta)$ quand on parcourt la circonférence unité; elle est identique à la discontinuité d'argument subie par la fonction $(z - z_0)$ quand le point image parcourt le profil. Par conséquent si on pose

$$z - z_0 = (Z + e^{-i\alpha_0})^{1+\eta} g(Z)$$

pour la fonction de représentation conforme, $g(Z)$ peut être prise régulière sur la circonférence unité.

Cependant, sauf pour le cas limite $\eta = 1$, le premier facteur possède en $Z = -e^{-i\alpha_0}$ un point de branchement et la fonction de représentation conforme n'est univoque que si $g(Z)$ possède une singularité compensatrice à l'intérieur du cercle unité. Sans restreindre la généralité on peut prendre un point de branchement compensateur à l'origine et choisir la fonction de représentation conforme sous la forme

$$z - z_0 = \left(1 + \frac{e^{-i\alpha_0}}{Z}\right)^{1+\eta} h(Z)$$

où $h(Z)$ n'a plus de singularités sur la circonférence unité, ni à distance finie en dehors.

La détermination choisie pour le premier facteur est telle que

$$\left(1 + \frac{e^{-i\alpha_0}}{Z}\right)^{1+\eta} = 1 + (1+\eta) e^{-i\alpha_0} \frac{1}{Z} + \frac{\eta(1+\eta)}{2} e^{-2i\alpha_0} \frac{1}{Z^2} + \dots$$

pour $|Z| > 1$.

On voit alors que pour avoir une correspondance entre les vitesses à l'infini

$$\frac{dz}{dZ} \rightarrow 1 \quad |Z| \rightarrow \infty$$

$h(Z)$ doit être de la forme

$$h(Z) = Z + a_0 + \frac{a_1}{Z} + \dots$$

c'est-à-dire avoir un pôle simple de résidu unité au point à l'infini.

Le choix $z_0 = 0$ revient à placer l'origine du plan z à la pointe du profil. Le choix $\alpha_0 = 0$ ne restreint pas davantage la généralité car il revient seulement à modifier les coefficients a_j ($j = 0, 1, \dots$) de $h(Z)$. Nous adopterons donc la forme canonique :

$$z = \left(1 + \frac{1}{Z}\right)^{1+\eta} \left(Z + a_0 + \frac{a_1}{Z} + \dots\right)$$

qui pour $|Z| > 1$ donne lieu aux développements convergents

$$z = Z + (a_0 + 1 + \eta) + \frac{m_2}{Z} + \dots$$

$$\frac{dZ}{dz} = 1 + \frac{m_2}{Z^2} + \dots$$

où $m_2 = a_1 + a_0(1+\eta) + \frac{1}{2} \eta(1+\eta)$

Enfin pour un profil à point anguleux, la circulation de la vitesse doit être fixée par la condition que la vitesse ne devienne pas infinie à la pointe (condition de Kutta). Or la vitesse complexe est donnée par

$\frac{df}{dz}$ / $\frac{dz}{dZ}$ et le dénominateur

$$\frac{dz}{dZ} = \left(1 + \frac{1}{Z}\right)^\eta \left((1+\eta) h(Z) + \left(1 + \frac{1}{Z}\right) \frac{dh}{dZ} \right)$$

possède un zéro d'ordre η en $Z = -1$. La vitesse ne sera finie en ce point que si Γ est choisi tel que $\frac{df}{dZ}$ s'annule pour $Z = -1$. Ceci a lieu pour

$$\Gamma = 4 \pi U \sin \alpha$$

et dans ce cas

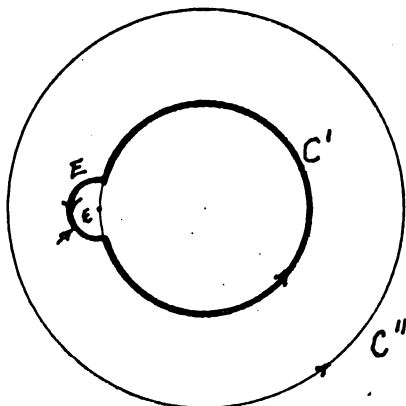
$$\frac{df}{dZ} = U \left(1 + \frac{1}{Z}\right) \left(-e^{i\alpha} + \frac{e^{-i\alpha}}{Z} \right)$$

possède un zéro d'ordre 1 en $Z = -1$.

Si $\eta < 1$ la vitesse est nulle à la pointe. Dans le cas limite $\eta = 1$ d'un point de rebroussement

$$\left(\frac{df}{dz}\right)_{\text{pointe}} = -U \cos \alpha / h(-1)$$

Pour intégrer les formules de Blasius il faut amputer le contour de la circonférence unité de la partie interceptée par un petit demi-cercle E de rayon ϵ centré en $Z = -1$. Les intégrales de Blasius sont alors à interpréter comme



$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C'} Q'$$

Or, si C'' dénote un contour extérieur à $C' + E$

$$\int_{C''} = \int_{C'} + \int_E$$

car les fonctions intégrées sont holomorphes dans le domaine annulaire limité par les contours. Donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C'} = \int_{C''} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_E$$

La contribution de la dernière intégrale est toujours nulle.

En effet les fonctions intégrées ont respectivement un zéro d'ordre $2 - \eta$ et d'ordre 3 en $Z = -1$ et sur E les modules des intégrales sont bornés par des expressions du type

$$\left| \int_E \right| < H e^m \quad \text{avec } m = 3 - \eta \quad \text{et } 4.$$

(Noter que si la circulation n'était pas fixée par la condition de Kutta, ces valeurs seraient $m = 1 - \eta$ et 2. Pour $\eta < 1$ les contributions seraient encore nulles. Pour $\eta = 1$ on aurait une contribution de la pointe dans la première intégrale).

Les intégrales sur C'' s'évaluent comme auparavant par le théorème des résidus. Elles donnent :

$$P_x - i P_y = -2 \pi \rho U^2 (-1 + e^{2i\alpha})$$

La portance $L = P_x \sin \alpha + P_y \cos \alpha = 4 \pi \rho U^2 \sin \alpha$

La traînée $D = P_y \sin \alpha - P_x \cos \alpha = 0$.

Pour le moment par rapport à la pointe du profil :

$$M = 2 \pi \rho U^2 \left\{ M_0 + M_1 \sin 2(\alpha + \phi) \right\}$$

où $M_0 = -\text{Im}(a_0)$

et $a_0(2 + \eta) + a_1 + \frac{1}{2}(1 + \eta)(2 + \eta) = M_1 e^{+2i\phi}$

Il existe toujours un foyer aérodynamique, c'est-à-dire un point F par rapport auquel le moment est indépendant de l'incidence. Soit $x_F + i y_F = R e^{i\omega}$ son affixe (rappelons que la pointe du profil est à l'origine et que l'axe cox est la corde de portance nulle car $L = 0$ pour $\alpha = 0$).

Le couple de transport nécessaire pour ramener la portance au foyer est

$$y_F P_x - x_F P_y = \text{Im} \left\{ (P_x - i P_y) (x_F + i y_F) \right\}$$

$$= 2 \pi \rho U^2 \text{Im} \left\{ (1 - e^{2i\alpha}) R e^{i\omega} \right\}$$

$$= 2 \pi \rho U^2 (R \sin \omega - R \sin(2\alpha + \omega))$$

Ajoutant ce couple au moment par rapport à la pointe, on voit que le moment devient indépendant de α si

$$\operatorname{Re} i\omega = M_1 e^{2i\phi}$$

Les coordonnées du foyer sont donc données directement par

$$x_F + i y_F = a_0 (2 + \eta) + a_1 + \frac{1}{2} (1 + \eta) (2 + \eta)$$

La valeur du moment indépendant de l'incidence est

$$2 \pi \rho U^2 (M_0 + R \sin \omega)$$

Si ce moment est nul, le profil est à centre de poussée fixe, c'est-à-dire que la résultante aérodynamique est toujours appliquée en F . Ceci a lieu pour

$$(1 + \eta) \operatorname{Im} (a_0) + \operatorname{Im} (a_1) = 0.$$

Les coefficients de $h(Z)$ à partir de Z^{-2} modifient la forme du profil mais sont sans effet sur la résultante aérodynamique.

Théorème de Lagally.

Ce théorème donne la force exercée sur un obstacle cylindrique par une singularité filiforme extérieure.

Soit $z = c$ l'affixe de cette singularité dont le potentiel complexe est

$$f_A(z) = \frac{A}{2\pi i} \ln(z - c) \quad A = \Gamma + i Q$$

A grande distance de l'obstacle le potentiel complexe complémentaire de l'écoulement est de la forme :

$$f_B(z) = (U - i V)z + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z + B_0 + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \dots$$

la vitesse complexe à l'infini étant $(U - i V)$ et la circulation autour de l'obstacle étant Γ .

(Noter que ce potentiel complémentaire n'est pas le potentiel de l'écoulement autour de l'obstacle en l'absence de la singularité, car l'introduction de celle-ci induit une répartition de vitesse sur le contour de l'obstacle qui

nécessite une modification de ce potentiel pour que l'obstacle reste une ligne de courant). La vitesse complexe totale est,

$$v = \frac{df_A}{dz} + \frac{df_B}{dz} = \frac{A}{2\pi i} \frac{1}{z-c} + g(z)$$

Par la formule de Blasius la résultante complexe sur l'obstacle est

$$X - i Y = \frac{i\rho}{2} \int_C v^2 dz = \frac{i\rho}{2} \left\{ \int_{C'} v^2 dz + \int_\gamma v^2 dz \right\}$$

C'est un contour plus large englobant la singularité, γ un petit contour entourant la singularité. C' peut être pris tellement grand que

$$\frac{1}{z-c} = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1 - c/z} \right) = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{c}{z} + \frac{c^2}{z^2} + \dots \right)$$

est convergent sur C' ainsi que

$$g(z) = \frac{df_B}{dz} = (U - i V) + \frac{\Gamma}{2\pi i z} - \frac{B_1}{z^2} + \dots$$

Alors, par le théorème des résidus,

$$\int_{C'} v^2 dz = 2(U - i V)(\Gamma + A)$$

A l'intérieur et sur γ , $g(z)$ est holomorphe, donc par le théorème des résidus

$$\int_\gamma v^2 dz = \int_\gamma \left(\frac{A}{2\pi i} \frac{1}{z-c} + g(z) \right)^2 dz = 2 A g(c)$$

La vitesse complexe $g(c) = u_c - i v_c$ peut être interprétée comme la vitesse existant (au sens de valeur principale) au droit de la singularité (ce n'est pas la vitesse au droit de la singularité en l'absence de celle-ci).

Le résultat final est le théorème de Lagally

$$X - i Y = i \rho (U - i V) \Gamma + i \rho A (U - i V - u_c + i v_c)$$

Le second terme représente la force complexe additionnelle provenant de la présence de la source. Le théorème de Lagally ramène le calcul de cette force à celui de la vitesse au droit de la singularité.

Un résultat analogue peut être établi pour le moment :

$$M = \operatorname{Re} \left(-\frac{1}{2} \rho \int_C z v^2 dz \right)$$

$$M = \rho \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i B_1 (U - iV) + c A (u_c - i v_c - U + iV) + \frac{i A \Gamma}{2\pi} \right\}$$

Dans le théorème de Lagally les singularités extérieures doivent être maintenues fixes car la pression a été calculée par la loi de Bernoulli du mouvement permanent. Si les singularités sont libres, le mouvement ne sera plus permanent et la pression doit être calculée par le théorème de Kelvin

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

Ceci amène la généralisation suivante des formules de Blasius

$$P_x - i P_y = \frac{i\rho}{2} \int_C \frac{df}{dz} df + i\rho \int_C \frac{\partial \phi}{\partial t} dz^{\#}$$

Cependant sur le contour C on a $\psi = q(t)$ puisqu'il est à chaque instant une ligne de courant. Donc $\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{dq(t)}{dt}$ est indépendant de z sur C et

$$\int_C \frac{\partial \psi}{\partial t} dz^{\#} = \frac{dq}{dt} \int_C dz^{\#} = 0$$

Dès lors $\int_C \frac{\partial \phi}{\partial t} dz^{\#} = \int_C \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - i \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dz^{\#} = \left\{ \int_C \frac{\partial f}{\partial t} dz \right\}^{\#}$ et

$$P_x - i P_y = \frac{i\rho}{2} \int_C \frac{df}{dz} df + i\rho \left\{ \int_C \frac{\partial f}{\partial t} dz \right\}^{\#}$$

Cette formule, due à Riabonchinsky, ramène de nouveau le calcul de la résultante à des intégrations de fonctions analytiques.

Pour le calcul du moment on trouve

$$M = -\rho \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \int_C z \frac{df}{dz} df + \int_C z \frac{\partial f}{\partial t} dz^{\#} \right\}$$

La détermination de la vitesse au droit d'une singularité peut se faire du moment que l'on connaît la représentation conforme entre les aires extérieures à l'obstacle et à une circonférence $|Z| = a$.

Soit $Z = q$ l'image de l'affixe $z = c$ de la singularité.

A un petit contour fermé γ entourant la singularité correspond un petit contour fermé γ' entourant son image et le long de ces contours les valeurs numériques du potentiel complexe se correspondent bi-univoquement :

$$f(z) = f[z(Z)] = F(Z)$$

On aura donc également

$$\int_{\gamma} df = \int_{\gamma} \frac{df}{dz} dz = \int_{\gamma'} \frac{df}{dz} \frac{dz}{dZ} dZ = \int_{\gamma'} dF = A$$

si bien que le débit volumétrique et la circulation sont identiques; la singularité image est de même nature que l'originale.

Dans le plan Z une source en présence du cylindre circulaire donne lieu à un potentiel complexe

$$\frac{Q}{2\pi} \left\{ \ln(Z - q) + \ln\left(Z - \frac{a^2}{q}\right) - \ln Z \right\}$$

Autrement dit, il faut placer à l'intérieur du cylindre une source de même intensité au point d'affixe réciproque a^2/q et au centre une source d'intensité opposée pour que le cylindre demeure une ligne de courant. En effet

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{Im} \ln \frac{(Z - q)(Z - a^2/q)}{Z}$$

a une valeur constante $\frac{Q}{2\pi} \arg q$ pour $Z = a e^{i\theta}$.

Un tourbillon donne lieu à un potentiel complexe

$$\frac{\Gamma}{2\pi i} \left\{ \ln(Z - q) - \ln\left(Z - \frac{a^2}{q}\right) + \ln Z \right\}$$

Il faut placer un tourbillon de circulation opposée à l'intérieur du cylindre au point d'affixe réciproque, duquel cas le cylindre demeure déjà une ligne de courant. Le tourbillon de même intensité à l'origine est destiné à éviter de modifier la circulation totale autour du cylindre.

En effet $\frac{Z - q}{Z - a^2/q^M}$ a un module constant pour $Z = a e^{i\theta}$.

Les contributions à la vitesse complexe dans le plan z s'obtiennent alors par la relation :

$$\frac{df}{dz} = \frac{df}{dZ} \frac{dZ}{dz} .$$