

DEPARTAMENTO INGENIERIA MECANICA
ESCUELA DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DE CONCEPCION

PRINCIPIOS VARIACIONALES
EN CONDUCCION DE
CALOR

Université de Liège
SST - Sciences Appliquées et Mathématiques
1. Chemin des Chevreuils; Bât B52/4
B-4000 LIEGE

B.M.Fraeijs de Veubeke

P.Beckers

Traducción:

Pierre Beckers

Edgardo Canales

Sergio Galaz

PROLOGO

En el año 1972, con ocasión del convenio entre las Universidades de Lieja y Concepción, visitó la Escuela de Ingeniería el distinguido catedrático de Mecánica de medios continuos y construcciones aeronáuticas de la Facultad de Ciencias Aplicadas de la Universidad de Lieja, Bélgica, el profesor B. M. Fraeijs de Veubeke (Q.E.P.D.), oportunidad en que dictó un curso titulado "Numerical solution of Steady State heat conduction problems"

Se trata de una materia del más alto interés pedagógico y científico, que el profesor Fraeijs de Veubeke desarrollo con la profundidad y maestría que fueran atributo permanente de su destacada personalidad, prematuramente extinguida.

Por eso, la idea de traducir y publicar este trabajo es digna de destacarse, pues representa un aporte muy valioso para quienes han volcado su interés en el ámbito de los elementos finitos.

Estas breves líneas con que encabezamos la presente traducción, no pretende prolongar su trabajo ni tampoco presentar a su ilustre autor cuya trayectoria científica es vastamente conocida y ecuanímente elogiada.

Tan sólo representa el modesto y emocionado homenaje de quien tuviera el honor y la suerte de contarse entre los alumnos en la Facultad de Ciencias Aplicadas de la Universidad de Lieja, Bélgica y de disfrutar de su generosa amistad bajo el alero cálido y acogedor de su hogar ejemplar.

Sergio Galaz S.

INDICE

	Pág.
PROLOGO	
INDICE	
I. CALCULO DE LA VELOCIDAD DE PRODUCCION DE ENTROPIA POR CONDUCCION DE CALOR	1.
1.1 Definiciones	1.
1.2 Postulado de equilibrio termodinámico local	3.
1.3 Velocidad de producción de entropía .	4.
1.4 Ley de Fourier	6.
1.5 Principio de mínima Velocidad de generación de entropía	8.
1.6 Primer Principio Variacional	9.
1.7 Ampliación de las condiciones límites	15.
II. EL METODO DE RAYLEIGH-RITZ	26.
III. TRANSFORMACION DE FRIEDRIECHS	32.
IV. EL PRINCIPIO VARIACIONAL CANONICO	39.
4.1 Desarrollo del Principio	39.
4.2 Tratamiento de un ejemplo para el Principio Canónico	42.
V. EL PRINCIPIO DE VARIACION DE FLUJO DE CALOR	55.
5.1 La formulación del Principio	55.
5.2 Ejemplo de Aplicación	57.

VI.	LOS TEOREMAS DE CONVERGENCIA	60.
6.1	Definición de un producto escalar en un espacio de funciones	60.
6.2	Definición de subespacios homogéneos	63.
6.3	Condiciones límites no homogéneas	66.

I. CALCULO DE LA VELOCIDAD DE PRODUCCION DE ENTROPIA POR CONDUCCION DE CALOR

1.1 Definiciones.

Sean $(x_i, i = 1, 2, 3)$ las coordenadas cartesianas de un punto material. La entropía por unidad de volumen es una magnitud intensiva y se puede escribir como una función de las coordenadas x_i y del tiempo t :

$$S_L = S_L(x_i, t) \quad (1.1)$$

Como los puntos materiales no se mueven, no hay posibilidad de confusión en su definición. Notemos que en el estudio de la conducción de calor en los fluidos, habría que definir con precisión el sistema coordinado según el cual se describe el fenómeno.

Llamemos ahora a $\bar{q}(x_i, t)$ el vector de flujo de calor; definiéndolo como flujo por unidad de área, será también una magnitud intensiva (se mide en att/m^2). Para cualquier volumen R encerrado en una superficie ∂R , cuya normal unitaria exterior es \bar{n} , se puede calcular la cantidad de calor que sale en la unidad de tiempo. (Fig. 1) Esta magnitud intensiva Q_s se definirá por la relación:

$$Q_s = \int_{\partial R} (\bar{q} \cdot \bar{n}) \, ds \quad (1.2)$$

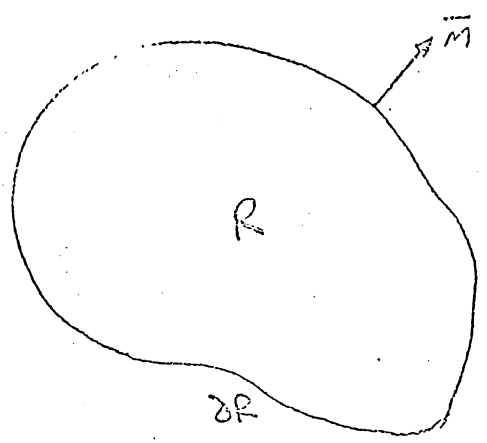


Fig. No 1.

Esta ecuación sirve de definición al vector flujo de calor \vec{q} ; en efecto, aplicando el teorema de la divergencia o teorema de Gauss-Green, a la relación (1.2), se obtiene:

$$Q_s = \int_{\partial R} (\vec{q} \cdot \vec{n}) ds = \int_R \text{div } \vec{q} dV \quad (1.3)$$

Este desarrollo, válido también para una pequeña superficie que encierra cualquier punto del dominio R, demuestra que la magnitud $\text{div } \vec{q}$ puede interpretarse como la cantidad de calor que sale de la unidad de volumen por unidad de tiempo, en el punto P.

Se concluye inmediatamente que en un régimen permanente, es decir, cuando se aprovecha la capacidad térmica del medio, lo que significa que no varía la energía interna, tenemos las dos posibilidades siguientes:

- a). $\text{div } \vec{q} = 0$, si no hay fuentes de calor.
- b). $\text{div } \vec{q} = -Q$, si hay sumideros de calor. Aquí, se elige el signo positivo para un sumidero de calor.

En coordenadas cartesianas se utiliza para simplificar la escritura la notación indicial. En esta notación, un vector se escribe en forma de sus tres componentes:

$$\vec{q} \longrightarrow q_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

La derivada $\frac{\partial}{\partial x_i}$ se anota D_i , de tal manera que:

$$\text{div } \vec{q} = \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{\partial q_3}{\partial x_3} \quad \text{se anota: } D_i q_i,$$

recordando que en notación tensorial dos índices repetidos son índices de sumatoria (convención de Einstein),

$$D_i q_i = \sum_{i=1}^3 D_i q_i$$

El producto escalar tiene ahora la forma siguiente:

$$\vec{n} \cdot \vec{q} \longrightarrow n_i q_i$$

y la ecuación (1.3) se escribe:

$$Q_s = \int_{\partial R} q_i n_i \, ds = \int_R D_i q_i \, dV \quad (1.4)$$

1.2 Postulado de equilibrio termodinámico local.

Este postulado expresa que del punto de vista local, hay equilibrio termodinámico. Esto significa que

en un punto la cantidad de calor recibida por un pequeño elemento de volumen, dividida por la temperatura absoluta local, es igual al incremento de entropía. Es decir, que en un punto

$$-\frac{\operatorname{div} \bar{q}}{T} = \frac{\partial S_L}{\partial t} \quad (1.5)$$

1.3 Velocidad de producción de entropía.

En escala macroscópica, se sabe que no hay equilibrio debido a que la temperatura varía de punto a punto. Sin embargo, como la entropía es una magnitud aditiva, se puede calcular la entropía total para el conjunto de puntos materiales encerrados en el volumen R:

$$S = \int_R S_L dV \quad (1.6)$$

La variación de entropía del volumen es igual a:

$$\frac{ds}{dt} = \int_R \frac{\partial S_L}{\partial t} dV \quad (1.7)$$

La expresión es bastante sencilla en el caso de un sólido, porque no hay movimiento de los puntos materiales. Introduciendo la expresión (1.5) de la variación local de entropía en la ecuación (1.7), se obtiene:

$$\frac{ds}{dt} = - \int_R \frac{\operatorname{div} \bar{q}}{T} dV \quad (1.8)$$

Como:

$$\frac{\text{div } \vec{q}}{T} = \text{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) - \vec{q} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{T} \right) \quad (1.9)$$

La expresión (1.8) se puede transformar en,

$$\frac{ds}{dt} = - \int_R \text{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) dV + \int_R \vec{q} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{T} \right) dV \quad (1.10)$$

y por el teorema de Gauss, el primer término del segundo miembro de (1.10), se puede transformar en integral de superficie, de tal manera que,

$$\frac{ds}{dt} = - \int_{\partial R} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} ds + \int_R r dV \quad (1.11)$$

con
$$r = \vec{q} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{T} \right) \quad (1.12)$$

El primer término de la expresión (1.11), corresponde al cambio de entropía del sistema debido a la transferencia de calor a través de su frontera, y es la expresión clásica para una transformación reversible. El segundo término corresponde a la producción de entropía debida a un proceso irreversible: por unidad de volumen esta producción vale:

$$r = \vec{q} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{T} \right)$$

Según el segundo principio de termodinámica (Ley de Clausius Dahem), tenemos que verificar la desigualdad $r \geq 0$, obteniendo la igualdad, sí y sólo si $\text{grad } T = 0$

1.4 Ley de Fourier.

Para un medio isotrópico

$$\bar{q} = -k \text{ grad } T \quad (1.13)$$

entonces:

$$r = \frac{k}{T^2} (\text{grad } T \cdot \text{grad } T) \quad (1.14)$$

y si $k > 0$, la expresión (1.14) satisface la condición de Clausius, que r será siempre positivo, y nulo sólo si la temperatura T es uniforme.

En el caso de paredes adiabáticas, el primer término de (1.11) es nulo:

$$\int_{\partial R} \frac{\bar{q} \cdot \bar{n}}{T} ds = 0 \quad (1.15)$$

y la variación de entropía

$$\frac{ds}{dt} \geq 0$$

se anula cuando la temperatura está uniforme.

La Ley de Fourier se puede generalizar para medios anisotrópicos, donde es más conveniente utilizar la notación indicial:

$$q_i = -k_{ij} D_j T \quad (1.16)$$

donde k_{ij} es el tensor simétrico de los coeficientes de

conducción de calor.

Como r es positivo:

$$r = \frac{1}{T^2} (k_{ij} D_i T D_j T) = \frac{1}{T^2} k_{ij} e_i e_j \geq 0 \quad (1.17)$$

en que $e_i = D_i T$ son las gradientes de temperatura generalizadas. La condición que r sea igual a cero sólo si $e_i = 0$, exige que k_{ij} sea una matriz definida positiva.

Nótese que para verificar el carácter definido positivo de una matriz, basta verificar que todos los determinantes construídos sobre la diagonal sean positivos: así, para la matriz k_{ij} se deben cumplir las condiciones:

$$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} > 0 \quad (1.18)$$

$$k_{11} > 0 \quad k_{22} > 0 \quad k_{33} > 0$$

$$k_{11} k_{22} - k_{12} k_{21} > 0, \dots$$

En el caso de un medio homogéneo, k_{ij} ; no depende de las coordenadas x_i , y se puede reducir a sus ejes principales, de tal manera que la ley de Fourier se puede escribir:

$$\begin{aligned} q_1 &= -k_1 D_1 T \\ q_2 &= -k_2 D_2 T; \quad k_i > 0 \\ q_3 &= -k_3 D_3 T \end{aligned} \quad (1.19)$$

1.5 Principio de mínima velocidad de generación de entropía

Si la función T (temperatura) variable en el dominio R , está prescrita en la frontera ∂R del cuerpo la velocidad de producción de entropía por proceso irreversible es

$$\int_R \frac{1}{T^2} k_{ij} D_i T D_j T dV \quad (1.20)$$

Este funcional debe primero linealizarse. Para ello se supone que la temperatura T , se mide con respecto a una temperatura uniforme de referencia T_0 a través de incrementos $\theta(x_i)$

$$T(x_i) = T_0 + \theta(x_i) \quad (1.21)$$

Por supuesto las derivadas de T y θ son idénticas:

$$D_i T = D_i \theta \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.22)$$

Si se supone que:

$$|\theta(x_i)| \leq T_0 \quad (1.23)$$

Se obtiene:

$$k_{ij}(x_m, T) \approx k_{ij}(x_m, T_0) \quad (1.24)$$

es decir, que el tensor de los coeficientes de conductividad tiene todos sus términos independientes de la temperatura. Además, reemplazamos en la primera aproximación:

$$\frac{1}{T^2} \quad \text{por} \quad \frac{1}{T_0^2} \quad (1.25)$$

De (1.24) y (1.25), se deduce que la velocidad de producción de entropía (1.20), será proporcional al funcional:

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \int_R k_{ij} D_i \theta D_j \theta \, dV \quad (1.26)$$

Se llama a $f(\theta)$ un funcional, es decir, un número correspondiente a un campo $\theta(x_i)$ definido en un dominio R y su frontera ∂R .

1.6 Primer principio variacional.

1.1 Formulación del principio

Demostremos que en un cuerpo en cuya frontera la temperatura está prescrita, para condiciones de régimen permanente, el campo real de temperaturas en el interior del cuerpo satisface la condición que el funcional $f(\theta)$ sea mínimo. El campo real de temperatura debe satisfacer localmente la ecuación $D_i q_i = 0$ y las condiciones de contorno. Si llamamos a $\hat{\theta}(x_i)$ la distribución real de temperatura en régimen permanente, una distribución vecina (aproximada) de temperatura se puede escribir

$$\theta(x_i) = \hat{\theta}(x_i) + \epsilon \varphi(x_i) \quad (1.27)$$

donde ϵ es un parámetro pequeño y la "variación" $\varphi(x_i)$ una distribución de temperatura arbitraria, excepto que:

- debe ser diferenciable, es decir que $D_i \varphi$ debe existir.
- debe ser igual a cero en la frontera ∂R , debido a que $\theta(x_i)$ debe tomar el mismo valor que $\hat{\theta}(x_i)$ en la frontera.

Ahora podemos calcular el funcional correspondiente a $\hat{\theta}$ y, evidentemente, podemos escribirlo como funcional de α en la siguiente forma explícita:

$$f(\theta) = f(\hat{\theta}) + \mathcal{E} f_{(1)}(\alpha) + \mathcal{E}^2 f_{(2)}(\alpha) \quad (1.28)$$

A partir de su forma general (1.26), podemos calcular las funcionales particulares $f_{(1)}(\alpha)$ y $f_{(2)}(\alpha)$

$$f_{(1)}(\alpha) = \frac{1}{2} \int_R k_{ij} [D_i \hat{\theta} D_j \alpha + D_j \hat{\theta} D_i \alpha] dV \quad (1.29)$$

$$f_{(2)}(\alpha) = \frac{1}{2} \int_R k_{ij} D_i \alpha D_j \alpha dV \quad (1.30)$$

Aprovechando el carácter simétrico de k_{ij} , se puede fácilmente demostrar que los dos términos de (1.29) son en realidad idénticos, en efecto permutando los índices de suma en (1.29) se obtiene:

$$f_{(1)}(\alpha) = \frac{1}{2} \int_R k_{ij} [D_j \hat{\theta} D_i \alpha + D_i \hat{\theta} D_j \alpha] dV \quad (1.31)$$

y como $k_{ij} = k_{ji}$

$$f_{(1)}(\alpha) = \int_R k_{ij} D_j \hat{\theta} D_i \alpha dV \quad (1.32)$$

El objetivo del principio variacional, es darnos las condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir la función $\hat{\theta}$ para que $f(\hat{\theta})$ sea mínimo.

La demostración se hará en dos pasos:

a). $\hat{\theta}$ será la solución real del problema si $f(\hat{\theta}) < f(\theta)$, para lo cual se requiere que $f_{(1)}(\alpha)$ sea nulo para todo $\alpha(x_i)$ admisible. De lo contrario existirá un campo $\theta(x_i)$ que minimizaría el funcional $f(\theta)$ y luego $\theta(x_i)$ no sería la solución del problema.

Si $f(\hat{\theta})$ es el mínimo de $f(\theta)$, $f_{(1)}(\alpha)$ debe ser igual a cero para cada variación $\alpha(x_i)$ igual a cero en la frontera.

Prueba: Supongamos que no sea así y que existiera $\alpha(x_i)$ igual a cero en la frontera con $f_{(1)}(\alpha) = \phi \neq 0$.

Luego, para ϵ suficientemente pequeño:

$$f(\theta) = f(\hat{\theta}) + \epsilon \phi \quad (1.33)$$

y escogiendo el signo apropiado de ϵ podemos tener

$$f(\theta) < f(\hat{\theta})$$

de tal manera que el último valor no sería un mínimo. Entonces la condición necesaria para que $\hat{\theta}(x_i)$ haga mínimo al funcional es que la primera variación $f_{(1)}(\alpha)$ sea igual a cero para todo $\alpha(x_i)$ igual a cero en la frontera.

b). La conclusión siguiente, nos dará un segundo orden:

$$f(\theta) = f(\hat{\theta}) + \epsilon^2 f_{(2)}(\alpha) \quad (1.34)$$

y una condición suficiente para un mínimo será que la segunda

da variación $f_{(2)}(\alpha)$ sea positiva para cada $\alpha(x)$ igual a cero en la frontera y no idénticamente nula.

1.6.2 Examen de la condición necesaria para la primera variación.

Según (1.16), podemos calcular el flujo de calor correspondiente a la distribución de temperatura $\hat{\theta}(x_i)$

$$\hat{q}_i(x_i) = -k_{ij} D_j \hat{\theta}(x_i) \quad (1.35)$$

y reemplazando en (1.32) obtenemos para la primera variación la expresión:

$$f_{(1)}(\alpha) = - \int_R \hat{q}_i D_i \alpha \, dV \quad (1.36)$$

Esta expresión debe ser nula para todo $\alpha(x_i)$ tal que $\alpha(x_i) = 0$ en ∂R .

Integrando por partes, obtendremos:

$$- \int_{\partial R} n_i \hat{q}_i \alpha \, ds + \int_R (D_i \hat{q}_i) \alpha \, dV = 0 \quad (1.37)$$

Como $\alpha(x_i) = 0$ en la frontera, el primer término es igual a cero. El segundo puede ser nulo para una función arbitraria en el interior de R , solamente si,

$$D_i \hat{q}_i = 0 \quad \text{en } R$$

o escribiéndolo en forma vectorial, si

$$\operatorname{div} \vec{q} = 0 \quad \text{en } R$$

que es precisamente la ecuación diferencial que debe satisfacer el campo de temperaturas.

1.6.3 Examen de la condición suficiente para la segunda variación.

La condición de mínimo se escribe

$$f^{(2)}(\alpha) = \frac{1}{2} \int_R k_{ij} D_i \alpha D_j \alpha \, dV > 0 \quad (1.40)$$

Esta condición se cumple porque la forma $k_{ij} D_i \alpha D_j \alpha$ es una forma cuadrática positiva. La segunda variación sería igual a cero solamente si en todas partes de R tenemos:

$$D_i \alpha = 0 \quad (1.41)$$

Pero esto significaría que α es constante en R , y como es nulo en ∂R , significaría que α sería idénticamente igual a cero.

1.6.4 Conclusión.

La ecuación (1.39) derivada de la condición necesaria para que $f(\hat{\theta})$ sea mínimo corresponde a la ecuación de equilibrio local del campo de temperaturas.

La ecuación (1.40) derivada de la condición suficiente para que $f(\hat{\theta})$ sea mínimo garantiza que $f(\hat{\theta}) < f(\theta)$.

Luego, el principio variacional que establece que el campo real de temperatura $\hat{\theta}(x_i)$ minimiza al funcional $f(\theta)$ queda demostrado.

Nótese que expresando la condición (1.38) en términos de temperaturas, obtenemos, siempre que no existan sumideros de calor:

$$D_i (k_{ij} D_j \theta) = 0 \quad (1.42)$$

Esta es la ecuación que gobierna la distribución de temperatura, con las condiciones límites: θ dado en ∂R . La condición (1.42) contiene el problema de Dirichlet como caso particular, es decir, que para un cuerpo isentrópico de coeficiente de conducción de calor uniforme k , tenemos:

$$k_{ij} = \delta_{ij} k \quad (1.43)$$

y entonces,

$$D_i D_i \theta = \nabla^2 \theta = 0 \quad (1.44)$$

1.7 Ampliación de las condiciones límites.

Hasta ahora se ha considerado el problema más sencillo, sin fuente de calor y con un solo tipo de condición límite, correspondiente a la natural, en que se conoce la temperatura en la frontera completa.

En esta sección se presentarán todas las formas posibles de condiciones límites, de una manera progresiva e intuitiva hasta llegar al primer principio (o principio de variación de las temperaturas) en su forma más general.

1.7.1 Fronteras adiabáticas.

Si en el principio

$$\frac{1}{2} \int_R k_{ij} D_i \theta D_j dV \quad \text{mínimo}$$

prescribimos la temperatura en una parte solamente $\partial_1 R$ de la frontera total, obtenemos condiciones naturales en el complemento $\partial_2 R$. En efecto, como ahora es arbitrario en $\partial_2 R$, obtenemos como resultado, suponiendo que la primera variación se anula:

$$n_i \hat{q}_i = 0 \quad \text{en } \partial_2 R \quad (1.50)$$

La condición natural es entonces una condición de flujo nulo a través de $\partial_2 R$.

7.2 Condición límite de convección.

Deseamos introducir la condición límite de convección usual que ocurre en la interfase entre cuerpos de naturaleza distinta. En esta frontera se supone que hay una discontinuidad o un salto de temperatura.

Con respecto al cuerpo R, sea θ_e la temperatura exterior al cuerpo. El flujo de calor se puede escribir en función de la temperatura del cuerpo y de la temperatura exterior de la manera siguiente:

$$n_i q_i = h (\theta - \theta_e) \quad (1.51)$$

donde h es el coeficiente de convección.

Si $h \rightarrow \infty$, equivale a imponer la temperatura θ_e en la superficie del cuerpo.

Si $h = 0$, obtenemos una pared adiabática.

El primer principio:

$$f(\theta) = -\frac{1}{2} \int_R q_i D_i \theta \, dV \quad (1.52)$$

donde:

$$q_i = -k_{ij} D_j \theta$$

se puede extender para incluir correctamente el fenómeno convectivo, mediante la adición de un nuevo término, que corresponde al producto del flujo de calor a través de la frontera por el incremento de temperatura en la interfase,

$$f(\theta) = -\frac{1}{2} \int_R q_i D_i \theta \, dV - \frac{1}{2} \int_{\partial_1 R} n_i q_i (\theta_e - \theta) \, ds \quad (1.53)$$

En términos de temperaturas:

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \int_R k_{ij} D_i \theta D_j \theta \, dV + \frac{1}{2} \int_{\partial_1 R} h (\theta - \theta_e)^2 \, ds \quad (1.54)$$

Calculando la primera variación, obtenemos las condiciones

$$\int_R \alpha D_i q_i \, dV - \int_{\partial_2 R} n_i q_i \alpha \, ds + \int_{\partial_1 R} h (\theta - \theta_e) \alpha \, ds = 0 \quad (1.55)$$

de donde resulta:

$$\begin{aligned} D_i q_i &= 0 \quad \text{en } R \\ n_i q_i &= h (\theta - \theta_e) \quad \text{en } \partial_1 R \\ n_i q_i &= 0 \quad \text{en } \partial_2 R \end{aligned} \quad (1.56)$$

Notemos además, que la contribución a la segunda variación será

$$\frac{1}{2} \int_{\partial_1 R} h \alpha^2 \, ds$$

y conservará el carácter de mínimo del funcional.

1.7.3 Introducción de sumideros de calor prescritos.

Un término adicional en el funcional, de tipo

$$\int_R Q \theta \, dV + \int_{\partial_2 R} q_e \theta \, ds$$

contribuye a la primera variación con dos términos

$$\int_R Q \alpha \, dV + \int_{\partial_2 R} q_e \alpha \, ds$$

y no contribuye a la segunda variación. Las condiciones de mínimo son ahora:

$$D_i q_i + Q = 0 \text{ en } R$$

$$-n_i q_i + h(\theta - \theta_e) = 0 \text{ en } \partial_1 R$$

$$-n_i q_i + q_e = 0 \text{ en } \partial_2 R$$

1.7.4 Primer principio variacional generalizado.

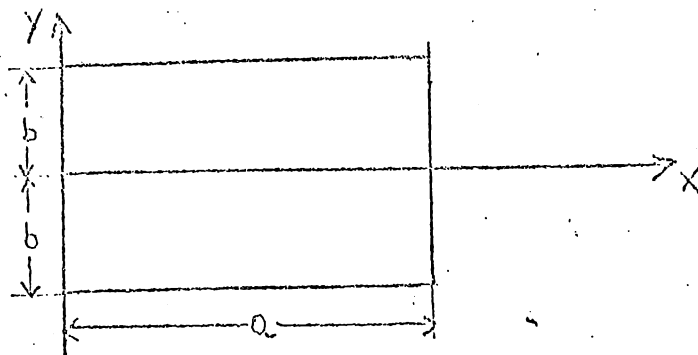
En general, incluyendo todos los tipos posibles de condiciones límites, tenemos como primer principio variacional:

$$\int_R \left[\frac{1}{2} k_{ij} D_i \theta D_j \theta + Q \theta \right] dV \\ + \frac{1}{2} \int_{\partial_1 R} h (\theta - \theta_e)^2 ds + \int_{\partial_2 R} q_e \theta ds$$

Las condiciones sobre la parte $\partial_3 R$ de la frontera donde la temperatura es la impuesta, no interviene porque su variación es nula.

1.7.5 Ejemplo de aplicación.

Sea un cuerpo homogéneo constituido de una lámina de material con coeficiente de conducción de calor k . Será un problema bidimensional (Fig. 1).



Suponemos que las dimensiones del cuerpo son $(a$ y $2b)$ y que las condiciones límite son las siguientes:

$$\begin{array}{ll} x = 0 & \text{Temperatura } \theta = 0 \\ x = a & \theta = \theta_2 \text{ constantes} \end{array}$$

las fronteras, $y = \pm b$, están en contacto con un fluido de temperatura θ_1 , y el coeficiente de transmisión de calor por convección es igual a h_1 .

Para resolver este problema, vamos a hacer una aproximación sobre la distribución de temperatura. Se supone que si la razón b/a es suficientemente pequeña, la expresión

$$\theta(x, y) = A(x) + \frac{y^2}{b^2} B(x)$$

podría ser una buena aproximación de la distribución real de temperatura.

Para satisfacer las condiciones límites a priori, las dos funciones A y B deben cumplir las relaciones siguientes:

$$B(0) = 0$$

$$B(a) = 0$$

$$A(0) = 0$$

$$A(a) = \theta_2$$

las gradientes de temperatura son iguales a

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \dot{A} + \frac{y^2}{b^2} \dot{B} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{2y}{b^2} B$$

donde el punto significa derivada con respecto a x .

El primer término del funcional es,

$$\frac{1}{2} k \iint \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

o en forma explícita después de la integración con respecto a y .

$$\frac{k}{2} \int_0^a \left[2b \overset{\circ}{A}^2 + \frac{2b}{5} \overset{\circ}{B}^2 + \frac{4}{3} b \overset{\circ}{A}\overset{\circ}{B} + \frac{8}{3} \frac{\overset{\circ}{B}^2}{b} \right] dx$$

Haciendo ahora $K = mh_1b$, siendo m una constante adimensional, la integral se escribe:

$$\frac{mh_1b^2}{15} \int_0^a \left(15\overset{\circ}{A}^2 + 3\overset{\circ}{B}^2 + 10\overset{\circ}{A}\overset{\circ}{B} + \frac{20\overset{\circ}{B}^2}{b^2} \right) dx$$

El término adicional debido a la convección al lado de las paredes $y = \pm b$ será igual a:

$$\int_0^a h_1 (A + B - \theta_1)^2 dx$$

Ahora se introduce un cambio de variables transformando la coordenada longitudinal x en una coordenada longitudinal adimensional, tal que:

$$\xi = \frac{x}{b}$$

Si la notación prima denota la derivada $\frac{d}{d\xi}$ hay que minimizar el funcional

$$bh_1 \left[\frac{m}{15} \int_0^{a/b} (15A'^2 + 3B'^2 + 10A'B' + 20B^2) d\xi + \int_0^{a/b} (A + B - \theta_1)^2 d\xi \right]$$

Haciendo la primera variación igual a cero, obtenemos:

$$\frac{m}{15} \int_0^{a/b} (30A' \delta A' + 6B' \delta B' + 10A' \delta B' + 10B' \delta A' + 40B \delta B) d\xi$$

$$+ \int_0^{a/b} (A + B - \theta_1) (\delta A + \delta B) d\xi = 0$$

Integrando por partes los términos en $\delta A'$ y $\delta B'$ obtenemos primero un término en el límite, que debe ser nulo

$$(30A' \delta A + 6B' \delta B + 10A' \delta B + 10B' \delta A) \Big|_0^{a/b} = 0$$

lo que se cumple automáticamente, porque las variaciones de A y B deben anularse sobre las fronteras donde tenemos condiciones límites naturales, es decir con valor de A y B conocidas a priori, que son:

$$\delta A(0) = \delta A(a) = \delta B(0) = \delta B(a) = 0$$

Así, la integral se transforma en:

$$\int_0^{a/b} \frac{m}{15} (-30A'' \delta A - 6B'' \delta B - 10A'' \delta B - 10B'' \delta A + 40B \delta B) d\xi$$

$$+ \int_0^{a/b} 2(A + B - \theta_1) (\delta A + \delta B) d\xi = 0$$

Los coeficientes de δA y δB deben anularse separadamente pues sus variaciones son independientes, es decir, obtenemos las dos ecuaciones:

$$-\frac{m}{15} (30A'' + 10B'') + 2 (A + B - \theta_1) = 0$$

$$\frac{m}{15} (40B - 6B'' - 10A'') + 2 (A + B - \theta_1) = 0$$

Estas dos ecuaciones diferenciales ordinarias constituyen un sistema de cuarto orden para el cual se dispone también de cuatro constantes de integración.

Esas ecuaciones no son homogéneas, buscamos entonces una solución particular y una solución general. La solución particular se haya muy fácilmente y puede ser:

$$A = \theta_1 \quad B = 0$$

Para calcular la solución general, hay que resolver el sistema

$$-m (3A'' + B'') + 3 (A + B) = 0$$

$$-m (6B'' + 10A'' - 40B) + 30 (A + B) = 0$$

Combinando las dos ecuaciones se obtiene:

$$5A'' + B'' + 10B = 0$$

$$30 (A - mA'') + 10 (3B - mB'') = 0$$

Tal sistema tiene una solución de tipo

$$A = \alpha e^{p\ell} \quad B = \beta e^{-p\ell}$$

y las ecuaciones características deben verificar

$$\begin{vmatrix} 5p^2 & 10 + p^2 \\ 30(1 - mp^2) & 10(3 - mp^2) \end{vmatrix} = 0$$

$$-mp^4 + p^2(6 + 15m) - 15 = 0$$

entonces

$$p^2 = \frac{6 + 15m \pm \sqrt{(6 + 15m)^2 - 60m}}{2m}$$

Evidentemente el discriminante es mayor que cero

$$\Delta = 36 + 30m + 225m^2 > 0$$

y las dos raíces son positivas porque,

$$\sqrt{\Delta} < (6 + 15m)$$

Si p_1 y p_2 son las raíces de esta ecuación, la solución se escribe:

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 e^{p_1 \ell} + \alpha_3 e^{-p_1 \ell} + \alpha_4 e^{p_2 \ell} + \alpha_5 e^{-p_2 \ell}$$

$$B = \beta_1 e^{p_1 \xi} + \beta_{-1} e^{-p_1 \xi} + \beta_2 e^{p_2 \xi} + \beta_{-2} e^{-p_2 \xi}$$

Las constantes $\alpha_1, \alpha_{-1}, \dots$ se calculan introduciendo las cuatro condiciones límite ... y las condiciones de compatibilidad.

$$5 p_1^2 \alpha + (10 + p_1^2) \beta = 0 \quad \text{para } \alpha = \alpha_1, \alpha_{-1}$$

$$\beta = \beta_1, \beta_{-1}$$

y,

$$5 p_2^2 \alpha + (10 + p_2^2) \beta = 0 \quad \text{para } \alpha = \alpha_2, \alpha_{-2}$$

$$\beta = \beta_2, \beta_{-2}$$

II. EL METODO DE RAYLEIGH - RITZ.

Las ecuaciones de campo de un problema, se pueden clasificar de la manera siguiente:

1. Ecuaciones constitutivas, que describen la naturaleza del medio, (o su comportamiento):

$$q_i = -k_{ij} e_j \quad (2.1)$$

2. Las ecuaciones de compatibilidad,

$$e_j = D_j \theta \quad (2.2)$$

que son las condiciones de integrabilidad del campo e_j .

3. Las ecuaciones de balance,

$$D_i q_i + Q = 0 \quad (2.3)$$

En el principio de variación de la temperatura, las dos primeras ecuaciones (2.1) y (2.2) se satisfacen idénticamente por construcción del principio mismo. Esto significa que en la solución aproximada, todo el peso de la aproximación recae sobre la ecuación de balance. Para demostrarlo se elige el procedimiento de Rayleigh -

Ritz. En este proceso se aproxima el campo de temperatura por un desarrollo del tipo

$$\theta(x_i) = \theta_0(x_i) + \sum_{p=1}^n \alpha_p \theta_p(x_i) \quad (2.4)$$

en que α_p son parámetros desconocidos y $\theta_0(x_i)$ y $\theta_p(x_i)$ son funciones arbitrarias elegidas de tal manera que satisfagan las condiciones de contorno en la frontera $\partial_3 R$, esto es,

$\theta(x_i) = \bar{\theta}$ en $\partial_3 R$ para todo α_p , lo que se deduce en,

$$\begin{aligned} \theta_0(x_i) &= \bar{\theta} & \text{en } \partial_3 R \\ \theta_p(x_i) &= 0 & \text{en } \partial_3 R \end{aligned} \quad (2.5)$$

Las componentes del flujo son:

$$q_i = -k_{ij} D_j \theta = -k_{ij} \left\{ D_j \theta_0 + \sum_{p=1}^n \alpha_p D_j \theta_p \right\} \quad (2.6)$$

El principio variacional, una vez hecha la integración se convierte a la forma:

$$F(\theta) = \frac{1}{2} K_{mp} \alpha_m \alpha_p + K_m \alpha_m + K_0$$

que debe ser mínimo con respecto a la elección de los α_p . Los coeficientes valen:

$$K_{mp} = \int_R k_{ij} D_i \theta_m D_j \theta_p dV + \int_{\partial_1 R} h \theta_m \theta_p ds$$

$$m = 1, \dots, n$$

$$p = 1, \dots, n$$

$$K_m = \int_R k_{ij} D_j \theta_o D_i \theta_m dV + \int_R \theta_m dV$$

$$+ \int_{\partial_1 R} h (\theta_o - \theta_e) \theta_m dS + \int_{\partial_2 R} q_e \theta_m dS$$

$$K_o = F(\theta_o)$$

Las combinaciones lineales tienen los valores correctos en la frontera $\partial_3 R$.

Para las funciones $\theta_p(x_i)$ se puede decir que generalmente para su simplicidad se eligen polinomios de grado muy bajo en x_i o los primeros miembros de una serie completa de funciones aproximadas.

Notando que K_{mp} es simétrico, la minimización de funciones, con respecto a α_p da:

$$K_{mp} \alpha_p + K_m = 0 \quad m = 1, 2 \dots n \quad (2.11)$$

que es un sistema de n ecuaciones y n incógnitas.

La matriz K_{mp} es definida positiva y el sistema tiene una solución única. Ahora se puede hacer la interpretación de los resultados reemplazando en el sistema los coeficientes por su valor.

$$\begin{aligned}
& \int_R k_{ij} D_i \theta_m D_j \left(\theta_0 + \sum_{p=1}^n \alpha_p \theta_p \right) dV + \int_R Q \theta_m dV + \\
& + \int_{\partial_1 R} h \theta_m \left(\theta_0 + \sum_{p=1}^n \alpha_p \theta_p \right) dS + \int_{\partial_2 R} q_e \theta_m dS = 0 \\
& \qquad \qquad \qquad m = 1, 2 \dots n \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Sea $\theta^* = \theta_0 + \sum_{p=1}^n \alpha_p \theta_p$ la mejor aproximación para el campo de temperatura, y los flujos correspondientes,

$$q^* = -k_{ij} D_j \left(\theta_0 + \sum_{p=1}^n \alpha_p \theta_p \right) \quad (2.13)$$

Por consecuencia, podemos escribir las ecuaciones en la forma

$$\begin{aligned}
- \int_R q_i^* D_i \theta_m dV + \int_R Q \theta_m dV + \int_{\partial_1 R} h (\theta^* - \theta_e) \theta_m dS \\
+ \int_{\partial_2 R} q_e \theta_m dS = 0 \quad (2.14) \\
m = 1, 2 \dots n
\end{aligned}$$

o después de una integración por partes del primer término y recordándose que θ_m se anula en $\partial_3 R$.

$$\int_R (D_i q_i^* + Q) \theta_m dV + \int_{\partial_1 R} [h (\theta^* - \theta_e) - n_i q_i^*] \theta_m dS + \int_{\partial_2 R} (q_e - n_i q_i^*) \theta_m dS = 0$$

$$m = 1, 2, \dots, n \quad (2.15)$$

Para satisfacer idéncicamente este resultado, cada integrante debería ser nula, obteniendo así, la ecuación de balance y las condiciones de contorno. Pero por la naturaleza de la aproximación estas ecuaciones no se satisfacen localmente, sino que son iguales a ciertos residuos:

$$D_i q_i + Q = l_1$$

$$h (\theta - \theta_e) - n_i q_i = l_2$$

$$q_e - n_i q_i = l_3$$

$$(2.16)$$

El promedio ponderado de los residuos, se anula por el principio variacional, y las funciones de ponderación son las funciones (peso) del proceso de Rayleigh-Ritz.

$$\int_R l_1 \theta_m dV + \int_{\partial_1 R} l_2 \theta_m dS + \int_{\partial_2 R} l_3 \theta_m dS = 0$$

$$m=1, 2, \dots, n \quad (2.17)$$

El método de los residuos ponderados, debido al matemático ruso GALERKIN, coincide aquí, para algunas elecciones bien definidas de las funciones de ponderación, con el pro.....

ceso de Rayleigh-Ritz, para algunas elecciones bien definidas de las funciones de ponderación. Sin embargo, el método de Galerkin es más general y en particular es de aplicación también para problemas que no tienen principios variacionales.

III. TRANSFORMACION DE FRIEDRIECHS

Se ha demostrado que en el principio variacional de temperaturas, el peso de las aproximaciones cae sobre la ecuación de balance y las condiciones de contorno, en tanto que las ecuaciones constitutivas y de compatibilidad,

$$q_i = -k_{ij} e_j$$

$$c_j = D_j \theta$$

se satisfacen siempre.

Cabe la consulta si no existe otro principio variacional, donde también se sacrifiquen estas últimas ecuaciones. La respuesta a este problema es debida a K. O. Friedrichs, quien dio un procedimiento sistemático para construir un principio variacional más general.

Supongamos que se desea introducir las pendientes generalizadas de temperatura e_i . El primer término del principio variacional se escribe como,

$$\frac{1}{2} \int_R k_{ij} e_i e_j dV \quad (3.1)$$

La condición de compatibilidad, no se supo

no satisfecha a priori, sino que se introduce como una restricción,

$$\begin{aligned} e_i - D_i \theta &= 0 & \text{en } V \\ \theta - \bar{\theta} &= 0 & \text{en } \partial_3 R \end{aligned} \quad (3.2)$$

de tal manera, que estas condiciones resultan como una consecuencia del principio mismo.

Esto se logra mediante un término adicional, el potencial de dislocación,

$$\Delta = \int_R \lambda_i (e_i - D_i \theta) dV + \int_{\partial_3 R} \mu (\theta - \bar{\theta}) dS \quad (3.3)$$

donde λ_i es un campo vectorial de multiplicadores de Lagrange; μ , un parámetro.

El principio depende ahora de tres campos distintos: el campo de temperatura θ ; el campo de los gradientes generalizados de temperatura e_i (campo vectorial) y; el campo vectorial de los multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} J(\theta, e_i, \lambda_i) &= \int_R \left[\frac{1}{2} k_{ij} e_i e_j + \lambda_i (e_i - D_i \theta) + Q \theta \right] dV \\ &+ \int_{\partial_1 R} \frac{1}{2} h (\theta - \theta_e)^2 dS + \int_{\partial_2 R} \theta q_e dS \\ &+ \int_{\partial_3 R} \mu (\theta - \bar{\theta}) dS \end{aligned} \quad (3.4)$$

Podemos verificar, que este principio da todas las ecuaciones de campo de problema, como derivadas variacionales.

$$\delta e_i \rightarrow k_{ij} + \lambda_i = 0 \quad \text{en } R$$

ecuaciones constitutivas

$$\delta \lambda_i \rightarrow \begin{aligned} e_i &= D_i \theta & \text{en } R \\ \theta &= \theta_e & \text{en } \partial_3 R \end{aligned}$$

ecuaciones de compatibilidad

$$\delta \theta \rightarrow \begin{aligned} D_i \lambda_i + Q &= 0 & \text{en } R \\ n_i \lambda_i &= \frac{1}{2} h (\theta - \theta_e) & \text{en } \partial_1 R \\ n_i \lambda_i &= q_e & \text{en } \partial_2 R \\ n_i \lambda_i &= \mu & \text{en } \partial_3 R \end{aligned}$$

Si λ_i se interpretara como q_i , cumple con las condiciones de balance dentro de R y en la frontera.

Para averiguar primero la dependencia de f con respecto a e_i , se suponen fijos θ y λ_i . Es claro que $F(\theta, e_i, \lambda_i)$ tiene un mínimo, con respecto a la elección de e_i , porque la parte cuadrática:

$$\frac{1}{2} \int_R k_{ij} e_i e_j dV$$

se define positiva por naturaleza física.

La primera variación con respecto a la variable e_i es

$$\int_R (k_{ij} e_j \delta e_i + \lambda_i \delta e_i) dv = 0 \quad (3.5)$$

y vale cero, por todas las variaciones permitidas.

$$\text{Si } k_{ij} e_j + \lambda_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.6)$$

es decir, el principio exige que los multiplicadores de Lagrange sean las componentes del flujo de calor relacionado con los gradientes de temperaturas generalizadas a través de las ecuaciones constitutivas, lo que constituye la identificación de los multiplicadores de Lagrange.

Los vectores e_j se pueden expresar ahora en términos de los λ_i , pues por ser la matriz k_{ij} definida positiva, no singular, mediante inversión de matrices, se obtiene

$$e_j = \Omega_{jm} \lambda_m \quad (3.7)$$

El tensor Ω_{jm} es el recíproco de k_{ij} .

Se tiene:

$$\lambda_i = -k_{ij} e_j = k_{ij} \Omega_{jm} \lambda_m \quad (3.8)$$

de donde:

$$k_{ij} \Omega_{jm} = \delta_{im} \quad (3.9)$$

Idénticamente,

$$\Omega_{jm} k_{mi} = \delta_{ji} \quad (3.10)$$

El tensor de resistividad r_{jm} es definido
 positivo. Sustituyendo los e_i en el principio,

$$k_{ij} e_i e_j = -\frac{1}{2} k_{ij} r_{jm} \lambda_m e_i = -\frac{1}{2} \delta_{im} \lambda_m e_i =$$

$$-\frac{1}{2} \lambda_i e_i \quad (3.11)$$

$$\lambda_i e_i + \frac{1}{2} k_{ij} e_i e_j = \frac{1}{2} \lambda_i e_i = -\frac{1}{2} r_{ij} \lambda_i \lambda_j \quad (3.12)$$

El funcional se reduce ahora a:

$$F(\theta, \lambda_i) = \int_R \left[-\frac{1}{2} r_{ij} \lambda_i \lambda_j - \lambda_i D_i \theta + q \theta \right] dV +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\partial_1 R} \frac{1}{2} h (\theta - \theta_e)^2 dS + \int_{\partial_2 R} \theta q_e dS +$$

$$+ \int_{\partial_3 R} \mu (\theta - \theta_e) dS \quad (3.13)$$

Una vez más, es claro que para un campo da-
 do de temperatura θ , el funcional tiene un máximo con res-
 pecto a la elección de las variables x_i y μ porque su par-
 te cuadrática en estas variables se define negativa.

Igualando a cero la primera variación con respecto a λ_i :

$$-\int_R (r_{ij} \lambda_j + D_i \theta) \delta \lambda_i dV = 0 \quad (3.14)$$

de la derivada variacional

$$r_{ij} \lambda_j + D_i \theta = 0 \quad i=1, 2, 3 \quad (3.15)$$

Resolviendo para λ_i se obtiene:

$$\lambda_i = -k_{ij} D_j \theta \quad i=1, 2, 3 \quad (3.16)$$

Comparándola con la última ecuación variacional, vemos que el principio exige que la ecuación de compatibilidad se verifique. En la parte ∂R , se pide también la verificación de la condición $Q = 0$. Al fin, sustituyendo esos valores de λ_i el funcional vuelve a su forma original $f(\theta)$, donde desaparece la integral en $\partial_3 R$ y tiene un mínimo para cada elección de campo de temperatura que salen para las ecuaciones de balance.

En conclusión, vemos que el principio variacional con tres campos, contiene todas las ecuaciones de campo variacionales y que el procedimiento operacional es:

$$f(\theta, \lambda_i, e_i) = \min_{\theta} \left[\max_{\lambda_i} (\min_{e_i}) \right] \quad (3.17)$$

Teóricamente, el principio variacional con tres campos distintos, permite aproximaciones simultáneas sobre el campo de temperatura, sobre las gradientes de temperatura generalizadas y sobre el flujo de calor. Estas aproximaciones transgreden todas las ecuaciones de campo, o mejor dicho, reemplazan su verificación exacta por promedios ponderados.

En la práctica, es muy difícil de utilizar esta libertad demasiado grande en buena forma, porque la compatibilidad de estas varias aproximaciones es difícil de establecer.

Sin embargo, este principio variacional con es campos, es una fuente de nuevos principios variaciona les de naturaleza más sencilla y más útil.

4.1 Desarrollo del principio.

El principio se obtiene después de identificar los multiplicadores de Lagrange, y de utilizar esas relaciones para reemplazar los gradientes generalizadas de temperatura, a fin de dar al funcional $f(\theta, e_i, \lambda_i)$ su mínimo con los campos fijos θ y λ_i . Si ahora se utiliza la notación q_i en vez de los multiplicadores de Lagrange λ_i se obtiene el funcional:

$$\begin{aligned}
 & - \int_R \left[\frac{1}{2} r_{ij} q_i q_j + q_i D_i \theta - Q \theta \right] dv + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\partial_1 R} h (\theta - \theta_e)^2 dS + \int_{\partial_2 R} \theta q_e dS \\
 & \min_{\theta} \left[\begin{matrix} \text{(máx)} \\ q_i \end{matrix} \right] \qquad (4.1.1)
 \end{aligned}$$

que es análogo del principio de Hellinger-Reissner en teoría de elasticidad.

Permite aproximaciones simultáneas sobre el campo de temperaturas θ y el campo de flujo de calor q_i . Sus ecuaciones variacionales son:

a). Con respecto a las variaciones δq_i :

$$r_{ij} q_i + D_j \theta = 0 \quad (4.1.2)$$

equivalente a:

$$q_i = -k_{ij} D_j \theta \quad (4.1.3)$$

b). Con respecto a las variaciones $\delta \theta$:

$$D_i q_i + Q = 0 \quad \text{en } R \quad (4.1.4)$$

$$-n_i q_i + h (\theta - \theta_e) = 0 \quad \text{en } \partial_1 R \quad (4.1.5)$$

$$-n_i q_i + q_e = 0 \quad \text{en } \partial_2 R \quad (4.1.6)$$

$$\delta \theta = 0 \quad \text{en } \partial_3 R \quad (4.1.7)$$

La condición (4.1.7), significa que en la frontera $\partial_3 R$ el campo de temperatura no puede variar debido a que está fijo en esa frontera. Sobre las aproximaciones precedentes, se pueden hacer las observaciones siguientes:

1). Si en el principio canónico hacemos hipótesis sobre θ (λ_m) solamente y no sobre el campo q_i , la ecuación variacional (4.1.3) se cumplirá automáticamente, y el principio será absolutamente equivalente al de variación de temperatura.

2). Si hacemos hipótesis sobre el campo q_i solamente y no sobre el campo de temperatura, las ecuaciones de balance

deberán satisfacerse automáticamente, pero las ecuaciones de compatibilidad serán violadas. Se tendrá entonces el problema de integrar al campo de temperatura.

Si el campo de temperatura no se puede integrar exactamente, será también difícil de saber como aplicar la condición límite en $\partial_3 R$ y entonces el principio debe ser modificado para incorporar esa condición como condición natural.

Sumamos entonces un nuevo potencial de dislocación:

$$\Delta = \int_{\partial_3 R} \mu (\theta - \bar{\theta}) ds \quad (4.1.8)$$

donde μ es un multiplicador de Lagrange, y θ la distribución de temperatura prescrita en la parte $\partial_3 R$ de la frontera.

La variación $\delta\theta$ en $\partial_3 R$ ahora llega libre y da como condición límite natural:

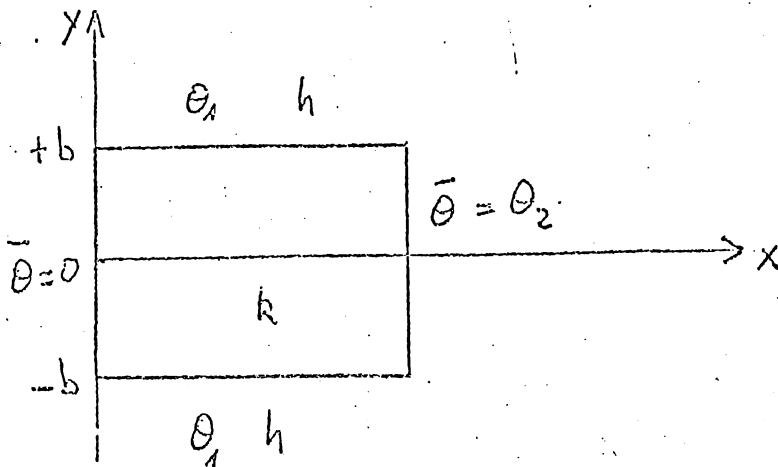
$$-n_i q_i + \mu = 0 \quad \text{en } \partial_3 R \quad (4.1.9)$$

identificado el multiplicador de Lagrange μ

La substitución de este resultado en el funcional da el principio más completo:

$$\begin{aligned} & - \int_R \left[\frac{1}{2} r_{ij} q_i q_j + q_i D_j \theta - q \theta \right] dv + \frac{1}{2} \int_{\partial_1 R} h (\theta - \theta_2)^2 ds \\ & + \int_{\partial_2 R} \theta q_e ds + \int_{\partial_3 R} n_i q_i (\theta - \bar{\theta}) ds \quad \min_{\theta} \left[\begin{matrix} (\text{máx}) \\ q_i \end{matrix} \right] \quad (4.1.10) \end{aligned}$$

4.2 Tratamiento de un ejemplo para el principio canónico.



Seguimos el principio canónico sin hacer ninguna hipótesis sobre el campo de temperatura $\theta(x, y)$. Por consiguiente, las ecuaciones que describen el balance del flujo de calor deben satisfacerse y la estructura de las aproximaciones debe ser tal que eso sea posible.

Las ecuaciones de balance interno en el dominio son: $D_i q_i = 0$ o en este caso:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0$$

que son satisfechas por una función de corriente de calor $\psi(x, y)$ tal que

$$q_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad q_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.2.1)$$

Pro simetría $\Psi(x, y)$ es impar con respecto a y , y un desarrollo de Taylor sería:

$$\Psi = y A(x) + \frac{y^3}{3!} + \dots \quad (4.2.2)$$

Tomamos aquí, sólo el primer término y empezamos a evaluar la aproximación correspondiente. Se tiene:

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} = A(x) \\ q_y &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -y \dot{A}(x) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

para satisfacer exactamente el balance interno de calor. (Nótese que el punto significa derivada parcial con respecto a x).

Sin embargo, haciendo esto, perderíamos la información sobre el campo de temperatura (veremos después la desaparición del campo de temperatura en el principio de variación del flujo de calor). Preferiremos conservar la "estructura en y " del flujo de calor aproximando en la forma:

$$\begin{aligned} q_x &= A(x) \\ q_y &= -y B(x) \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

que hace posible el balance interno de calor.

Ahora podemos calcular los varios términos del principio canónico, introduciendo, para la simplicidad

de la escritura, las definiciones siguientes que se presentarían en forma natural:

se define una temperatura media en la sección transversal,

$$\alpha(x) = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \theta(x, y) dy \quad (4.2.5)$$

se define también, una temperatura superficial,

$$\beta(x) = \theta(x, b) = \theta(x, -b) \quad (4.2.6)$$

Se verifica fácilmente, que los distintos términos del funcional (4.1.10), se escriben ahora en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} - \int_R \frac{1}{2} r_{ij} q_i q_j dV &= - \frac{1}{2k} \iint (q_x^2 + q_y^2) dx dy = \\ &= - \frac{b}{k} \int_0^a (A^2 + \frac{1}{3} b^2 B^2) dx \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

$$\begin{aligned} - \int_R q_i B_i \theta dV &= - \iint (q_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + q_y \frac{\partial \theta}{\partial y}) dx dy = \\ &= - \int_0^a A \left(\frac{d}{dx} \int_{-b}^{+b} \theta dy \right) dx + \\ &+ \int_0^a B \left(\int_{-b}^{+b} y \frac{\partial \theta}{\partial y} dx \right) dx \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Con las definiciones (4.2.5) y (4.2.6), esa expresión se transforma en

$$\begin{aligned}
 - \int_R q_i D_i \theta \, dV &= - 2b \int_0^a A \alpha' \, dx + \\
 &+ \int_0^a B [2b \beta - 2b \alpha] \, dx \quad (4.2.9)
 \end{aligned}$$

Siguiendo en la evaluación de los términos de funcional (4.1.10) se obtiene

$$\frac{1}{2} \int_{\partial_1 R} h (\theta - \theta_e)^2 \, dS = \int_0^a h (\beta - \theta_1)^2 \, dx \quad (4.2.10)$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial_3 R} n_i q_i (\theta - \bar{\theta}) \, dS &= - \int_{-b}^b q_x \theta \, dy \Big|_{x=0} + \\
 &+ \int_{-b}^b q_x (\theta - \theta_2) \, dy \Big|_{x=a} =
 \end{aligned}$$

$$= - A(0) 2b \alpha'(0) +$$

$$+ A(a) 2b (\alpha'(a) - \theta_2) \quad (4.2.11)$$

Sumando (4.2.6), (4.2.9), (4.2.10) y (4.2.11), y dividiendo por $2b$, se obtiene

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2k} \int_0^a (A^2 + \frac{1}{3} b^2 B^2) dx - \int_0^a A \dot{\alpha} dx + \int_0^a (B\beta - B\dot{\alpha}) dx \\
 & + \frac{1}{2b} \int_0^a h(\beta - \theta_1)^2 dx - A(0) \alpha(0) + A(a) (\alpha(a) - \theta_2) \\
 & \min_{\alpha, \beta} \left[\max_{A, B} \right] \quad (4.2.12)
 \end{aligned}$$

Ahora se hacen las variaciones con respecto a las distintas magnitudes y para cada variación independiente, se obtiene una ecuación de variación.

La variación $\delta A(x)$ se escribe:

$$-\frac{1}{k} \int_0^a A \delta A dx - \int_0^a \dot{\alpha} \delta A dx = 0$$

y da la ecuación:

$$\dot{\alpha} = -\frac{1}{k} A \quad (4.2.13)$$

Las variaciones $\delta A(0)$ y $\delta A(a)$ dan:

$$\alpha(0) = 0 \quad \text{y} \quad \alpha(a) = \theta_2 \quad (4.2.14)$$

lo que significa que las temperaturas medias son iguales a las temperaturas prescritas en $x = 0$ y $x = a$.

La variación $\delta B(x)$ se escribe:

$$-\frac{1}{k} \frac{b^2}{3} \int_0^a B \delta B dx + \int_0^a (\beta - \alpha) \delta B dx = 0 \quad (4.2.15)$$

y da la condición

$$\beta - \alpha = \frac{b^2}{3k} B \quad (4.2.16)$$

Las variaciones $\delta B(0)$ y $\delta B(a)$ no están presentes, de tal modo que las condiciones (4.2.13, 14 y 16), constituyen las relaciones de compatibilidad, o mejor dicho, las condiciones que deben cumplir las temperaturas medias definidas en (4.2.5 y 6).

Ahora quedan las variaciones con respecto a

α y β

La condición derivada de la variación de α se escribe

$$-\int_0^a A \delta \alpha dx - \int_0^a B \delta \alpha dx - A(0) \delta \alpha(0) + A(a) \delta \alpha(a) = 0 \quad (4.2.17)$$

para cualquier $\delta \alpha$. Integrado el primer término por partes, los términos límites se eliminan con los dos últimos términos de la ecuación (4.2.17) y la condición se escribe:

$$\int_0^a (\overset{\circ}{A} - B) \delta \alpha \, dx = 0 \quad (4.2.18)$$

Esta expresión, válida para cualquier δ nos da la condición

$$B = \overset{\circ}{A} \quad (4.2.19)$$

Esta, es la ecuación de balance interno del flujo de calor. Ella expresa que el flujo de calor está en equilibrio y se identifica al flujo de calor hallado desde una función de corriente de calor definido en (4.2.3)

La variación de β se escribe

$$\int_0^a \left[B \delta \beta + \frac{h}{b} (\beta - \theta_1) \delta B \right] dx \quad (4.2.10)$$

y da la condición

$$B + \frac{h}{b} (\beta - \theta_1) = 0 \quad (4.2.21)$$

que expresa que la condición de conexión sobre la frontera $\partial_1 R$ se cumple exactamente. Las condiciones (4.2.19) y (4.2.21) confirman lo antedicho en el párrafo (4.1.), es decir, que cuando no se hacen hipótesis sobre el campo de temperatura, las condiciones de balance de calor se verifican idénticamente.

Con las condiciones anteriores, se puede hallar la solución completa del problema. Por (4.2.21).

$$\beta = \theta_1 - \frac{b}{h} B \quad (4.2.22)$$

y reemplazando este valor de β en (4.2.16), se obtiene

$$\alpha = \theta_1 - \left(\frac{b}{h} + \frac{b^2}{3h} \right) B = \theta_1 - \frac{b}{h} \left(1 + \frac{1}{3m} \right) B \quad (4.2.23)$$

con la definición del parámetro adimensional:

$$m = \frac{k}{bh} \quad (4.2.24)$$

reemplazando el valor de α obtenido en (4.2.23), en la expresión (4.2.13), se obtiene

$$A = -k \alpha = \frac{bk}{h} \left(1 + \frac{1}{3m} \right) B = b^2 \left(m + \frac{1}{3} \right) B \quad (4.2.25)$$

De la condición (4.2.19) se halla:

$$B = A \quad (4.2.26)$$

y reemplazando en (4.2.25) se obtiene la ecuación diferencial lineal ordinaria para la función A

$$A = b^2 \left(m + \frac{1}{3} \right) A'' \quad (4.2.27)$$

la solución de esta ecuación será de tipo

$$A = M e^{\frac{px}{b}} + N e^{-\frac{px}{b}} \quad (4.2.28)$$

con

$$p = \frac{1}{\sqrt{m + 1/3}} \quad (4.2.29)$$

Por (4.2.19), se obtiene la función B

$$B = A = \frac{pM}{b} e^{\frac{px}{b}} - \frac{pN}{b} e^{-\frac{px}{b}} \quad (4.2.30)$$

Por (4.2.23), se obtiene α :

$$\alpha = \theta_1 - \frac{\beta 1}{hmp^2} \left[\frac{\beta M}{\beta} e^{\frac{px}{b}} - \frac{\beta N}{\beta} e^{-\frac{px}{b}} \right] \quad (4.2.31)$$

y por (4.2.22), se obtiene β :

$$\beta = \theta_1 - \frac{pM}{h} e^{\frac{px}{b}} + \frac{pN}{h} e^{-\frac{px}{b}} \quad (4.2.32)$$

Las condiciones límites (4.2.14) permiten calcular los valores de las dos constantes M y N;

$$\theta_1 = \frac{1}{hmp} (M - N)$$

$$\theta_2 = \theta_1 - \frac{1}{hmp} \left[M e^{\frac{pa}{b}} - N e^{-\frac{pa}{b}} \right] \quad (4.2.33)$$

Reemplazando M y N por sus valores en (4.2.28) y (4.2.33), se obtiene la solución completa:

$$A = \frac{h m p}{\operatorname{senh} \left(\frac{pa}{b} \right)} \left[(\theta_1 - \theta_2) \cosh h \frac{px}{b} - \theta_1 \cosh h p \frac{x-a}{b} \right] \quad (4.2.34)$$

$$B = \frac{h m p^2}{b \operatorname{senh} \left(\frac{pa}{b} \right)} \left[(\theta_1 - \theta_2) \operatorname{senh} h \frac{px}{b} - \theta_1 \operatorname{senh} h p \frac{x-a}{b} \right] \quad (4.2.35)$$

$$\alpha = \theta_1 \left[1 + \frac{\operatorname{senh} h p \frac{x-a}{b}}{\operatorname{senh} h \frac{pa}{b}} \right] - (\theta_1 - \theta_2) \frac{\operatorname{senh} h \frac{px}{b}}{\operatorname{senh} h \frac{pa}{b}} \quad (4.2.36)$$

$$\beta = \theta_1 \left[1 + m p^2 \frac{\operatorname{senh} h p \frac{x-a}{b}}{\operatorname{senh} h \frac{pa}{b}} \right] - (\theta_1 - \theta_2) m p^2 \frac{\operatorname{senh} h \frac{px}{b}}{\operatorname{senh} h \frac{pa}{b}} \quad (4.2.37)$$

Sobre esta solución se pueden hacer las observaciones siguientes:

- primero, con respecto al campo de temperaturas, podemos suponer que deseamos conseguir información sobre el campo de temperaturas de manera totalmente independiente.

Empezamos con:

$$q_x = A(x) \quad q_y = -y \Lambda(x) \quad (4.2.38)$$

Esta definición cumple con las ecuaciones del equilibrio.

En general sabemos que:

$$q_i = -k_{ij} D_j \theta \quad (4.2.39)$$

ó equivalentemente:

$$D_i \theta = -r_{ij} q_j \quad (4.2.40)$$

En este caso entonces tenemos:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{k} A(x) \quad (4.2.41)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{k} y \overset{\circ}{A}(x)$$

ecuaciones que no son compatibles, es decir, que no respetan las condiciones de integrabilidad del campo $\frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}$. Por consiguiente, no podemos construir el campo local de temperaturas.

Sin embargo, mirando la estructura en y de la solución, podemos formar los siguientes promedios de esas ecuaciones:

$$\int_{-b}^b \frac{\partial \theta}{\partial x} dy = -\frac{1}{k} \int_{-b}^b A(x) dy \quad (4.2.42)$$

La integración de $A(x)$, se hace con la función de ponderación 1, porque:

$$q_x = A(x)$$

$$\int_{-b}^b y \frac{\partial \theta}{\partial y} dy = \frac{1}{k} \int_{-b}^b y^2 \overset{\circ}{A}(x) dy \quad (4.2.43)$$

La integración se hace ahora con la función de ponderación y porque:

$$q_y = -y \overset{\circ}{A}(x)$$

Esas ecuaciones son equivalentes a:

$$\frac{d}{dx} \int_{-b}^b \theta dy = 2b \overset{\circ}{\alpha} = -\frac{A(x)}{k} 2b \quad \delta$$

$$\overset{\circ}{\alpha} = \frac{1}{k} A(x) \quad (4.2.44)$$

$$y \left[y \theta \int_{-b}^b - \int_{-b}^b \theta dy \right] = 2b(\beta - \alpha) = \frac{A}{k} \int_{-b}^b y^2 dy =$$

$$= \frac{A}{k} \frac{2}{3} b^3 \quad \delta$$

$$\beta - \alpha = \frac{b^2}{3k} \overset{\circ}{A} \quad (4.2.45)$$

ecuaciones que ya hemos obtenido como ecuaciones variacionales en (4.2.13) y (4.2.16).

- segundo, podemos hacer observaciones interesantes sobre la longitud característica.

En la exponencial $\exp(\pm \frac{2p}{b})$ de la ecuación (4.2.30), hay una "longitud característica" b/p o en una forma dimensional, la longitud

$$r = \frac{1}{p} \quad (4.2.46)$$

Aquí, tenemos la longitud característica r , definida por la ecuación

$$r^2 = m + \frac{1}{3} \quad (4.2.47)$$

Recordamos que en el problema utilizando un campo de temperatura (párrafo 1.7.5.) obtuvimos dos valores r_1^2 y r_2^2 soluciones de la ecuación

$$T(r^2) = m - r^2 (6 + 15m) + 15r^4 = 0 \quad (4.2.48)$$

obtuvimos:

$$T\left(m + \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

y como:

$$\frac{r_1^2 + r_2^2}{2} = \frac{m}{2} + \frac{1}{5} \quad m + \frac{1}{3} \quad (4.2.49)$$

podemos decir que la longitud característica en este problema está muy próxima de la mayor longitud característica del problema del capítulo 1.7.5.

5.1 La formulación del principio.

Para la formulación de este principio, se presenta el principio canónico en otra forma integrando las partes el funcional definido en (4.1.10).

$$\begin{aligned}
 & - \int_R \left[\frac{1}{2} r_{ij} q_i q_j - Q\theta \right] dV - \int_{\partial R} n_i q_i \theta dS + \\
 & \int_R D_i q_i \theta dV + \frac{1}{2} \int_{\partial_1 R} h (\theta - \theta_e)^2 dS + \int_{\partial_2 R} \theta q_e dS \\
 & \int_{\partial_3 R} n_i q_i (\theta - \bar{\theta}) dS \quad \dots \quad \begin{matrix} \text{mín} \\ \theta \end{matrix} \left[\begin{matrix} \text{máx} \\ q_i \end{matrix} \right] \quad (5.1.1)
 \end{aligned}$$

Juntando los términos, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & - \int_R \frac{1}{2} r_{ij} q_i q_j dV + \int_R \theta \left[D_i q_i + Q \right] dV + \\
 & \int_{\partial_1 R} \left[\frac{1}{2} h (\theta - \theta_e)^2 - n_i q_i \theta \right] dS + \\
 & \int_{\partial_2 R} (q_e - n_i q_i) \theta dS + \int_{\partial_3 R} - n_i q_i \bar{\theta} dS \quad (5.1.2)
 \end{aligned}$$

Si suponemos que el balance de flujo de calor se realiza a priori, es decir que se cumplen las condiciones:

$$D_i q_i + Q = 0 \quad \text{en } R$$

$$- n_i q_i + q_e = 0 \quad \text{en } \partial_2 R$$

$$n_i q_i = h (\theta - \theta_e) \quad \text{en } \partial_1 R$$

la segunda integral de volumen y la integral sobre la parte de frontera $\partial_2 R$ desaparecen.

La integral en $\partial_1 R$ (frontera de convección) puede ser modificada utilizando la ecuación de balance (5.1.4) para eliminar completamente el campo de temperaturas:

$$\frac{1}{2} h (\theta - \theta_e)^2 - n_i q_i \theta = - \frac{1}{2} n_i q_i \left(2\theta_e + \frac{n_i q_i}{h} \right)$$

El funcional resultante de esas operaciones contiene ahora el campo de flujo de calor:

$$f(q_i) = - \int_R \frac{1}{2} r_{ij} q_i q_j dV - \int_{\partial_1 R} \left(n_i q_i \theta_e + \frac{(n_i q_i)^2}{2h} \right) dS - \int_{\partial_3 R} n_i q_i \bar{\theta} dS$$

max q_i (5.1.7)

Nótese que es más usual de cambiar

los signos en el funcional y obtener así un nuevo principio de mínimo, es decir,

$$f(q_i) = \int_V \frac{1}{2} r_{ij} q_i q_j dV + \int_{\partial_1 R} \left[n_i q_i \theta_e + \frac{(n_i q_i)^2}{2h} \right] dS +$$

$$+ \int_{\partial_3 R} n_i q_i \bar{\theta} dS \quad \underset{q_i}{\text{mín}} \quad (5.1.8)$$

Utilizando este principio se debe ser muy cuidadoso porque el principio es válido sólo para campos de flujo de calor que satisfacen las ecuaciones de balance en volumen y sobre la parte $\partial_2 R$ de la frontera.

5.2 Ejemplo de aplicación.

Aplicando el principio de variación del flujo de calor al mismo problema anteriormente visto, se utilizan las hipótesis,

$$q_x = A(x)$$

$$q_y = -y \dot{A}(x) \quad (5.2.1)$$

que satisfacen a priori la ecuación de balance,

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \quad (5.2.2)$$

no hay otra ecuación de balance porque no existe la frontera $\partial_2 R$: En este caso, el funcional se escribe:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{2b}{2k} \int_0^a (A^2 + \frac{1}{3} b^2 A'^2) dx + (2b \int_0^a A \theta_1 dx - \frac{b^2}{k} \int_0^a A'^2 dx) \\
 & - \int_{-b}^b [-\theta A(0) + \theta_2 A(a)] dy \quad \text{máx} \quad (5.2.3)
 \end{aligned}$$

donde el segundo término entre paréntesis representa el término de convección, u ordenando:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2k} \int_0^a (A^2 + \frac{1}{3} b^2 A'^2) dx + \theta_1 (A(a) - A(0)) - \\
 & - \frac{b}{2k} \int_0^a A'^2 dx - \theta_2 A(a) \quad \text{máx} \quad (5.2.4)
 \end{aligned}$$

Las variaciones de la función A dan el resultado:

$$- \frac{1}{k} (A - \frac{1}{3} b^2 A'') + \frac{b}{h} A'' = 0 \quad (5.2.5)$$

$$\text{ó} \quad (m + \frac{1}{3}) A'' = A \quad (5.2.6)$$

resultado obtenido antes.

Las ecuaciones en las fronteras $\int A(0)$ y $\int A(a)$ dan

$$\left[\left(-\frac{h^2}{3k} i - \frac{b}{k} i \right) \int A \right]_0^a + (\theta_1 - \theta_2) \int A(x) - \theta_1 \int A(0) = 0 \quad (5.2.7)$$

$$\text{ó} \quad \left(1 + \frac{1}{3m} \right) A'(a) + h (\theta_2 - \theta_1) = 0 \quad (5.2.8)$$

$$- \left(1 + \frac{1}{3m} \right) A'(0) + h \theta_1 = 0 \quad (5.2.9)$$

Es la misma solución que antes pero ahora no tenemos ninguna información sobre las temperaturas.

Hemos visto que el capítulo (4.2) nos muestra como obtener información sobre la temperatura, ponderando las relaciones entre los gradientes de temperatura y el flujo de calor con funciones de ponderación.

VI. LOS TEOREMAS DE CONVERGENCIA

6.1 Definición de un producto escalar en un espacio de funciones.

A cada uno de los campos de flujo de calor q_i definidos en el dominio R , podemos asociar un campo de gradientes generalizado de temperatura definido de la manera siguiente:

$$e_i = -r_{ij} q_j \quad \text{en } R \quad (6.1.1)$$

$$\theta = \frac{1}{h} n_i q_i \quad \text{en } \partial_1 R \quad (6.1.2)$$

La condición (6.1.2) significa que se da la temperatura en la superficie de convección.

Un producto escalar entre dos campos, simbolizados por $q^{(1)}$ y $q^{(2)}$, se define así:

$$(q^{(1)}, q^{(2)}) = - \int_R e_i^{(1)} q_i^{(2)} dV + \int_{\partial_1 R} \theta^{(1)} n_i q_i^{(2)} dS \quad (6.1.3)$$

Según la definición del campo de gradientes de temperatura asociado, la expresión (6.1.3), se puede escribir en las siguientes formas equivalentes:

$$\begin{aligned}
 (q^{(1)}, q^{(2)}) &= \int_R r_{ij} q_i^{(2)} q_j^{(1)} dV + \\
 &+ \int_{\partial_1 R} \frac{(n_i q_i^{(1)}) (n_i q_i^{(2)})}{h} dS \quad (6.1.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (q^{(1)}, q^{(2)}) &= \int_R k_{ij} e_i^{(1)} e_j^{(2)} dV + \\
 &+ \int_{\partial_1 R} h \theta^{(1)} \theta^{(2)} dS \quad (6.1.5)
 \end{aligned}$$

De estas expresiones, se deduce que el producto escalar es simétrico, es decir que

$$(q^{(1)}, q^{(2)}) = (q^{(2)}, q^{(1)}) \quad (6.1.6)$$

Notemos además que el producto escalar demostrado en (1.17) (1.54), de ser definido positivo,

$$(q, q) = \int_R r_{ij} q_i q_j dV + \int_{\partial_1 R} \frac{(n_i q_i)^2}{h} dS \geq 0 \quad (6.1.7)$$

La expresión (6.1.7) se anula sí y sólo si

$q_i \equiv 0$, es decir para el elemento nulo.

La expresión $\sqrt{(q, q)} = \|q\|$ se llama la norma del campo. Es la distancia entre el campo y el origen o el elemento nulo del espacio de funciones.

Otras propiedades de la norma, fácilmente verificables son:

$$\|\alpha q\| = |\alpha| \|q\| \quad (6.1.8)$$

donde α es un escalar arbitrario, y $\|q^{(1)} + q^{(2)}\| \leq$

$$\|q^{(1)}\| + \|q^{(2)}\| \quad (6.1.9)$$

que es la desigualdad del triángulo.

La definición de la distancia entre dos campos $q^{(1)}$ y $q^{(2)}$ sigue la ampliación de los conceptos ya vistos sabiendo que el cuadro de la distancia es por definición:

$$(q^{(2)} - q^{(1)}, q^{(2)} - q^{(1)}) = \|q^{(2)} - q^{(1)}\|^2 \quad (6.1.10)$$

6.2 Definición de subespacios homogéneos.

6.2.1 Subespacios de campos homogéneos compatibles.

Un campo es compatible homogéneo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

$$1. \quad e_i = D_i \theta \quad \text{en } R \quad (6.2.1)$$

es decir, existencia de un campo de temperaturas diferenciable.

$$2. \quad \theta = 0 \quad \text{en } \partial_3 R \quad (6.2.2)$$

$$3. \quad \theta_e = 0 \quad \text{en } \partial_1 R \quad (6.2.3)$$

Las dos últimas expresiones significan que las condiciones límite prescritas para la temperatura deben ser homogéneas.

Para tal campo de temperatura elegimos el símbolo $D\theta$.

Si $D\theta^{(1)}$ y $D\theta^{(2)}$ son dos campos homogéneos compatibles, debido a la linealidad de las ecuaciones y la homogeneidad de las condiciones (6.2.2) y (6.2.3), la combinación lineal $\alpha_1 D\theta^{(1)} + \alpha_2 D\theta^{(2)}$ (donde α_1 y α_2 son dos escalares arbitrarios) que simbolizan el campo de temperatura $\alpha_1 \theta^{(1)} + \alpha_2 \theta^{(2)}$, es también compatible homogéneo.

Entonces, $D\theta$ pertenece a un subespacio $D\mathcal{D}$ del espacio de funciones.

6.2.2 Subespacio de campos homogéneos en equilibrio.

Un campo es homogéneo en equilibrio si se cumplen las dos condiciones siguientes:

$$1. \quad D_i q_i = 0 \quad \text{en } R \quad (6.2.4)$$

$$2. \quad n_i q_i = 0 \quad \text{en } \partial_2 R \quad (6.2.5)$$

La homogeneidad significa aquí, que los sumideros de calor presentes valen cero. Simbolizamos un campo de este tipo por b . Pertenecer al subespacio B del espacio de funciones porque si $b^{(1)}$ y $b^{(2)}$ son cualesquier campo homogéneo en equilibrio, la combinación lineal arbitraria $\alpha_1 b^{(1)} + \alpha_2 b^{(2)}$ es también homogénea en equilibrio.

6.2.3 Propiedades de los campos definidos.

A partir de esas definiciones se puede hablar del importante teorema que sigue:

Teorema: "El producto escalar de un campo compatible homogéneo en equilibrio es cero"

$$(D\theta, b) = 0 \quad (6.2.6)$$

Para comprobarla se utiliza la definición (6.1.3) del producto escalar:

$$(D\theta, b) = - \int_R D_i \theta q_i dV + \int_{\partial_1 R} \theta n_i q_i dS \quad (6.2.7)$$

donde θ es en el campo de temperatura de $D\theta$ y q_i el campo de flujo de calor de b .

Integrando el primer término por partes se obtiene:

$$\begin{aligned}
 (D\theta, b) = & - \int_{\partial R} \theta n_i q_i dS + \int_{\partial_1 R} \theta n_i q_i dS + \\
 & + \int_R \theta D_i q_i dR \quad (6.2.8)
 \end{aligned}$$

Debido a (6.2.4), (6.2.5) y (6.2.2), la expresión se reduce a cero.

Este teorema es muy importante porque muestra que los dos subespacios $D\theta$ y B son octogonales.

El único elemento común a $D\theta$ y B es el elemento nulo (origen). Esto demuestra que si, en el problema de conducción de calor en el caso permanente, las condiciones límites son homogéneas, es decir, si:

$$\theta_e = 0 \quad \text{en } \partial_1 R$$

$$q_e = 0 \quad \text{en } \partial_2 R$$

$$\bar{\theta} = 0 \quad \text{en } \partial_3 R$$

la solución que debe pertenecer a ambos subespacios $D\theta$ y

B, es la solución cero:

$$\theta \equiv 0, \quad q_i \equiv 0$$

6.3 Condiciones límites no homogéneas.

6.3.1 Definición de esas condiciones para el campo de temperatura.

Introducir condiciones límites no homogéneas, significa introducir condiciones de tipo:

$$\theta_e \neq 0 \quad \text{en } \partial_1 R \quad (6.3.1)$$

$$\theta \neq 0 \quad \text{en } \partial_3 R \quad (6.3.2)$$

La solución del problema total consistirá en introducir un campo de temperatura particular $\theta^0(m)$ que satisfice las condiciones:

$$\theta_0 = \bar{\theta} \quad \text{en } \partial_3 R \quad (6.3.3)$$

$$\theta_0 + \frac{1}{h} n_i k_{ij} D_j \theta_0 = \theta_e \quad \text{en } \partial_1 R \quad (6.3.4)$$

un campo de temperatura compatible y general, que satisfice las condiciones límites impuestas, no homogéneas será del tipo

$$D\theta_0 + D\theta$$

y corresponde a un campo de temperatura $\theta_0 + \theta_1$.

Los campos de tipo $D\theta_0 + D\theta$ pertenecen a un múltiple (manifold) lineal, es decir, subespacio trasladado.

6.3.2 Condiciones límite no homogéneas para el campo de flujo de calor.

Se tratará de imponer una distribución no nula, de sumideros de calor Q en el dominio R y q_e en la frontera $\partial_2 R$.

Por eso podemos introducir un campo particular de flujo de calor $q_i^0(X_m)$ que satisface:

$$D_i q_i + Q = 0 \quad \text{en } R \quad (6.3.5)$$

$$n_i q_i = q_e \quad \text{en } \partial_2 R \quad (6.3.6)$$

y que simbolizamos por b_0 .

El campo general de flujo de calor en equilibrio con sumideros de calor impuesto será de tipo $b_0 + b$, donde b es un miembro arbitrario de B . Este campo pertenece al múltiple lineal.

6.3.3 Solución del problema total.

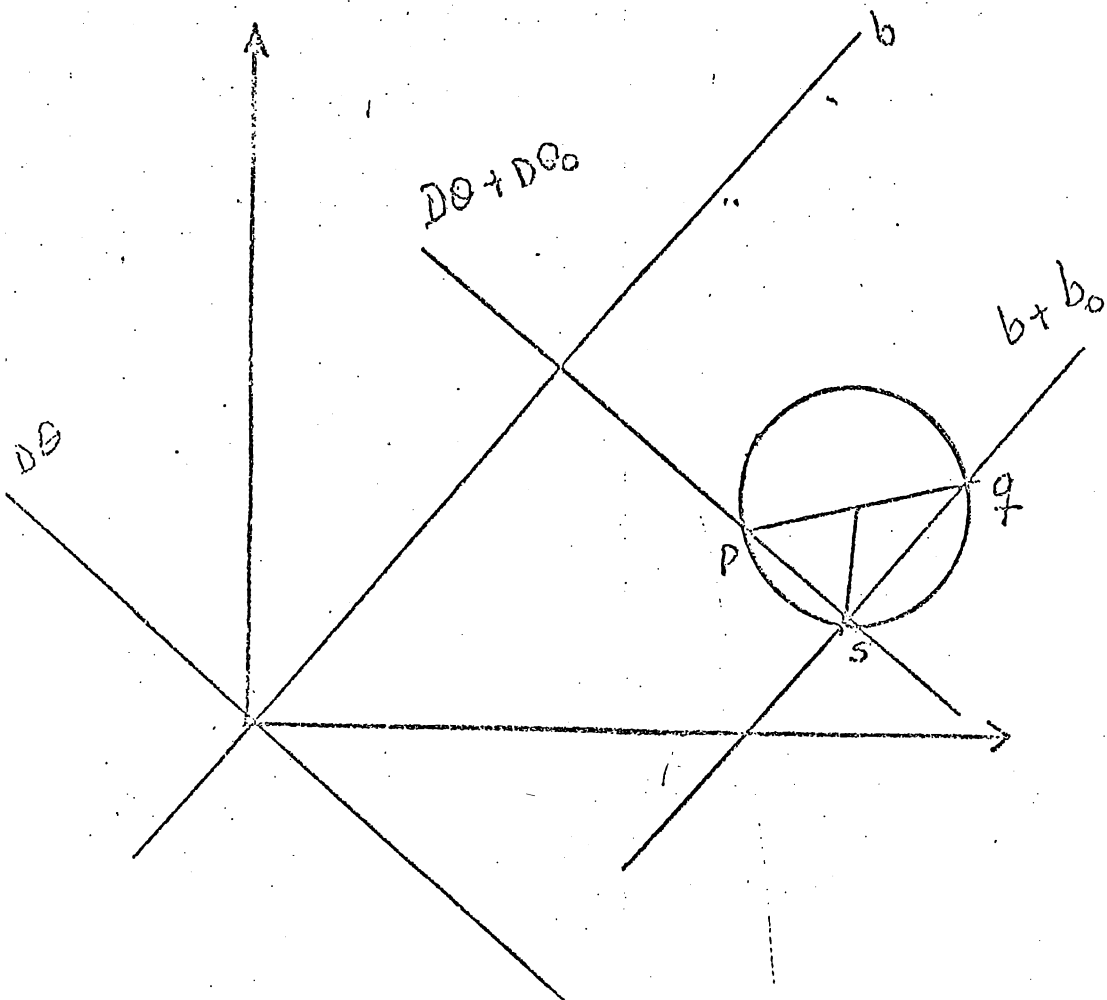
La solución del problema con condiciones límite no homogéneas será la intersección de los dos múltiples lineales, porque la solución simbolizada por λ de-

be corresponder a un campo de gradientes de temperaturas compatibles, es decir, debe existir un campo de temperatura; y además, el flujo de calor debe estar en equilibrio con los sumideros de calor.

Esta solución es única. Si existiera otra solución s' la solución $s' - s$ es una solución del problema.

Con condiciones límites homogéneas hemos visto en el párrafo 6.2.3 que era idénticamente nula.

6.3.4 Teorema del hipercírculo de Prager-Synge.



En la figura representamos dos subespacios trasladados, de los cuales la intersección es la solución exacta.

Supongamos que p es un miembro de primer subespacio y q uno del otro, como los subespacios son ortogonales, obtenemos la propiedad de Pitágoras en el triángulo/rectángulo (s, p, q) , es decir que los segmentos \overline{sp} , \overline{qs} y \overline{pq} cumplen con

$$\overline{ps}^2 + \overline{qs}^2 = \overline{pq}^2 \quad (6.3.7)$$

o utilizando la definición (6.1.10) de distancia entre dos campos:

$$\begin{aligned} (s - D\theta_0 - D\theta, s - D\theta_0 - D\theta) + (s - b - b_0, s - b - b_0) \\ = b_0 + b - D\theta_0 - D\theta, b_0 + b - D\theta_0 - D\theta \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

Eso se comprueba fácilmente utilizando la notación

$$D\theta^* = s - D\theta^0 - D\theta \quad (6.3.9)$$

$$b^* = s - b_0 - b \quad (6.3.10)$$

aparece evidente que $D\theta^*$ pertenece al subespacio $D\theta$ y b^* al subespacio B de tal manera que se cumple la propiedad (6.2.6).

$$(D\theta^{\#}, b^{\#}) = 0 \quad (6.3.11)$$

el segundo miembro de (6.3.8), se puede escribir:

$$(b^{\#} - D\theta^{\#}, b^{\#} - D\theta^{\#}) = (b^{\#}, b^{\#}) + (D\theta^{\#}, D\theta^{\#}) - 2(b^{\#}, D\theta^{\#}) = 0 \quad (6.3.12)$$

y se cumple (6.3.8).

En la práctica, puntos como p y q se obtienen a partir de aproximaciones, primero, utilizando el principio de variaciones de temperaturas, segundo, el principio de variación de flujo de calor.

Se puede entonces afirmar que la solución exacta no conocida está en el hipercírculo que tiene pq como diámetro.

En otras palabras, con la distancia entre la solución exacta y el promedio aritmético de las soluciones aproximadas p y q .

El promedio aritmético es en el sentido de las distancias minimales la mejor aproximación conocida.

Esa propiedad se obtiene matemáticamente por:

$$(s - \frac{D\theta + D\theta_0 + b + b_0}{2}, s - \frac{D\theta + D\theta_0 + b + b_0}{2}) =$$

$$= \frac{1}{4} (b_0 + b - D\theta_0 - D\theta, b_0 + b - D\theta_0 - D\theta) \quad (6.3.13)$$

Se comprobará fácilmente desarrollando el primer miembro; y utilizando las definiciones (6.3.9) y (6.3.10)

$$\left(\frac{1}{2} D\theta^{**} + \frac{1}{2} b^{**}, \frac{1}{2} D\theta^{**} + \frac{1}{2} b^{**}\right) = \frac{1}{4} (D\theta^{**} + b^{**}, D\theta^{**} + b^{**}) \quad (6.3.14)$$

y según (6.3.11), obtenemos la igualdad

$$\frac{1}{4} (D\theta^{**} + b^{**}, D\theta^{**} + b^{**}) = \frac{1}{4} (D\theta^{**} - b^{**}, D\theta^{**} - b^{**}) \quad (6.3.15)$$

En práctica, escribiéndolo en la forma equivalente:

$$\left(s - \frac{D\theta_0 + D\theta + b_0 + b}{2}, s - \frac{D\theta_0 + D\theta + b_0 + b}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{4} (D\theta^{**}, D\theta^{**}) + \frac{1}{4} (b^{**}, b) \quad (6.3.16)$$

Se puede ver que la minimización de la distancia entre la solución exacta y la aproximación de promedio aritmético depende de las minimizaciones independientes de $(D\theta^{**}, D\theta^{**})$ y (b^{**}, b) .

Entonces para economizar (ahora) trabajo numérico, las dos aproximaciones deberían ser de la misma calidad.