Un principe probabiliste de Catalan

Jacques Bair

Mots clés : Définition classique d'une probabilité, arbre de probabilité, combinaisons, identité de Vandermonde, loi hypergéométrique, chaîne de Markov, martingale

Résumé : À l'occasion du 200e anniversaire de la naissance d'Eugène Catalan, nous souhaitons évoquer ce que cet auteur appelait un « nouveau principe de probabilités » . Nous ne reviendrons guère sur l'aspect historique de ce résultat, car cette étude a été réalisée en profondeur par Jongmans et Seneta dans [13], et par Breny dans [4]. Mais nous croyons utile de montrer que ce sujet peut être enseigné à différents niveaux de l'apprentissage des mathématiques et est riche d'un point de vue didactique.

1. Introduction

L'objet de cette étude est le « principe de probabilités » dû à Catalan (1), qui le considérait comme un « théorème ». Ce principe a connu une histoire assez mouvementée, décrite de façon détaillée dans [4], [12] et [13] ; il fut abordé une première fois en 1841 dans [6], mais formulé explicitement et de manière générale en 1877 ([7], p. 463) comme suit :

> **Principe**. « La probabilité d'un événement futur ne change pas lorsque les causes dont il dépend subissent des modifications inconnues ».

Cet énoncé, qui n'est pas forcément intuitif, peut être important pour les applications pratiques, comme le soulignait déjà en 1885 P. Mansion (2) de façon assez percutante :

« Pour en faire saisir la portée, il suffira d'en citer une application : supposons que dans un grand pays, comme la France, on vote, dans quarante ou cinquante mille bureaux différents, pour ou contre un candidat à la Présidence de la République. Eh bien, on pourrait supprimer, dans chacune des cinquante mille urnes, la moitié ou les trois quarts des suffrages, pourvu qu'on le fit vraiment au hasard. Le résultat de l'élection serait presque certainement le même que si l'on n'y avait pas touché. Pour les mathématiciens, bien entendu, le nouveau principe présente un tout autre intérêt : dans un grand nombre de cas, il permet de remplacer, par un raisonnement de quelques lignes, des calculs vraiment formidables, comme notre auteur l'a prouvé dans une récente communication académique. » ([14], p. 8)

La formulation initiale du principe n'est pas tout à fait correcte ; elle fut d'ailleurs amendée par son auteur lorsqu'il précisait en 1886 ([9], p. 15) que « le nouveau Principe n'est pas applicable si les *modifications* subies par les causes de l'événement attendu *sont additives* » : elles doivent être « *soustractives* ».

A présent, nous allons suivre les traces de Catalan lui-même qui écrivait : « comme on le fait ordinairement, assimilons l'événement attendu à la sortie d'une boule blanche d'une urne » ([7], p. 464) et considérons l'énoncé formulé en ces termes (aux notations près) (3) :

> **Théorème**. « Une urne A contient b boules blanches et n boules noires (ou rouges, bleues, ...). Si l'on tire m boules, qu'on les introduise, sans les regarder, dans une urne B, les probabilités d'extraire une boule blanche, soit de cette urne B, soit de l'urne A dont la composition a été modifiée, sont égales. »

(1) Des renseignements sur la vie et sur l'œuvre scientifique de ce mathématicien peuvent être trouvés dans [12].
(2) Lors d'un discours prononcé à l'Université de Liège à l'occasion du départ à la retraite de Catalan.
(3) Dans la version intiale ([7], p. 465), Catalan terminait l'énoncé ci-dessous par : « sont égales à b » mais, dans un article ultérieur ([8], p. 72), il faisait état d'une « faute typographique. Au lieu de : *sont égales à b*, on doit lire : *sont égales* ».

Nous ajouterons simplement que m est, assez naturellement, supposé positif, mais inférieur au nombre total de boules $t = b + n$, ce qui revient à se placer dans la situation où, pour former B, l'on extrait au moins une boule de A mais qu'on ne les prend pas toutes.

Le théorème ci-dessus soulève en fait deux questions auxquelles nous allons répondre avec diverses justifications :

Questions.
I. Quelle est la probabilité que soit blanche une boule extraite de l'urne B ainsi construite ?
II. Quelle est la probabilité que soit blanche une boule extraite de l'urne A dont la composition a été modifiée, ce que nous noterons A' ?

Chacune de ces deux questions a d'abord été traitée séparément, et sans contact apparent entre leurs auteurs respectifs : le point de vue de l'urne A modifiée l'a été par Poisson et par Mondésir en 1837, celui de B par Catalan en 1841 ; ce n'est que plus de 30 ans plus tard (précisément en 1877) que ce dernier reliait les deux questions, se contentant d'ailleurs de donner une justification assez laconique. De plus, les réponses données initialement semblaient, à première vue, assez compliquées notamment au niveau de l'écriture dans le cas général, et n'étaient pas irréprochables (pour la rigueur exigée par les mathématiciens contemporains). D'ailleurs, Catalan lui-même avait éprouvé des difficultés pour convaincre certains de ses collègues, ce qui l'amena à présenter (en 1877) un exemple particulier [7]. Emboîtons-lui le pas en traitant, comme lui, le cas où $b = 4$ et $n = 3$ (d'où $t = 7$) ([4]). Il est évident que la probabilité de tirer une boule blanche de l'urne de départ est donnée par $p_A = \frac{4}{7}$; mais que valent les probabilités de tirer une boule blanche de la deuxième urne B ou de la première urne modifiée A', ce que nous noterons respectivement p_B et $p_{A'}$?

2. Exemple $b = 4$ et $n = 3$

Cet exemple nous semble emblématique ([5]) notamment pour les motifs suivants :

- l'énoncé des questions posées dans ce cas particulier peut facilement être compris ;
- toutes les possibilités peuvent être envisagées ;
- ce cas particulier est suffisamment compliqué pour se rendre compte de la difficulté potentielle du cas général ;
- le problème global peut être résolu pas à pas, de façon systématique ;
- une visualisation de la situation est possible ;
- on est amené à considérer un arbre de probabilité de taille inhabituellement élevée dans des situations classiques d'apprentissage (de base), au point que la construction complète de l'arbre peut n'être qu'esquissée, le raisonnement pouvant être mené à partir d'une ébauche du graphe ;
- la comparaison des réponses aux deux questions énoncées ci-dessus est facile et frappante ;
- un minimum de théorie est (véritablement) requis, de sorte que ces questions peuvent être abordées très tôt lors de l'apprentissage du calcul des probabilités (y compris en guise d'introduction au sujet) ;
- les calculs peuvent être effectivement réalisés sans l'aide indispensable d'une machine ;
- on n'y rencontre pas les difficultés d'écriture du cas général ;
- la méthode systématique qui va être utilisée pourrait s'avérer efficace dans d'autres situations ;
- ...

Bref, nous pensons que la compréhension en profondeur de cet exemple peut mener plus facilement à une bonne perception des questions posées et à une méthode de résolution pouvant être adaptée au cas général.

Nous allons décomposer le problème étudié en des sous-problèmes assez simples à traiter, suivant en cela le deuxième précepte donné par Descartes dans son célèbre *Discours de la méthode* ([10], p. 23) :

> « Diviser chacune des difficultés que j'examinerais en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre. »

([4]) Notons que Poisson envisageait déjà cet exemple dans une note de bas de page de son livre [17] (p. 61) : il ne considérait pas toutes les possibilités, mais seulement l'une d'entre elles, à savoir lorsque $m = 2$.

([5]) N. Rouche qualifie pareil exemple de « paradigmatique », car il « permet de "voir" tous les cas » et même « sous-tend la preuve » ([18], pp. 194, 187). La didacticienne K. Gosztonyi qualifie de tels exemples de *génériques* ([11], p. 30) parce que « les raisonnements permettent de comprendre des idées, des théorèmes généraux ».

2.1. Les diverses situations rencontrées

Compte tenu des données et de ce qui est demandé, de multiples situations sont à envisager ; elles peuvent être construites en considérant les trois points suivants :

a) En premier lieu, on recense 6 possibilités pour le choix du nombre m de boules à retirer de l'urne A. En effet, m peut prendre toute valeur entière comprise entre 1 et 6.

b) Ensuite, pour chacune des 6 valeurs de m, on distingue différentes possibilités de former la deuxième urne B, et donc de modifier l'urne A. Ces différentes possibilités sont au nombre de 18 et sont recensées dans le tableau suivant au sein duquel x_b signifie évidemment qu'il y a x boules blanches, de même y_n correspond à y boules noires ([6]), tandis que $\bar{m}$ indique le nombre de boules restant dans la première urne modifiée A', c'est-à-dire ici $\bar{m} = 7 - m$:

m	Urne B	$\bar{m}$	Urne modifiée A'
1	$0_b - 1_n$	6	$4_b - 2_n$
	$1_b - 0_n$		$3_b - 3_n$
2	$0_b - 2_n$	5	$4_b - 1_n$
	$1_b - 1_n$		$3_b - 2_n$
	$2_b - 0_n$		$2_b - 3_n$
3	$0_b - 3_n$	4	$4_b - 0_n$
	$1_b - 2_n$		$3_b - 1_n$
	$2_b - 1_n$		$2_b - 2_n$
	$3_b - 0_n$		$1_b - 3_n$
4	$1_b - 3_n$	3	$3_b - 0_n$
	$2_b - 2_n$		$2_b - 1_n$
	$3_b - 1_n$		$1_b - 2_n$
	$4_b - 0_n$		$0_b - 3_n$
5	$2_b - 3_n$	2	$2_b - 0_n$
	$3_b - 2_n$		$1_b - 1_n$
	$4_b - 1_n$		$0_b - 2_n$
6	$3_b - 3_n$	1	$1_b - 0_n$
	$4_b - 2_n$		$0_b - 1_n$

Bien que cela ne soit pas indispensable pour continuer le traitement de cet exemple, attardons-nous sur le nombre de lignes dans ce tableau. Pour tout m fixé, il est égal au nombre de possibilités de trouver deux entiers p et q, avec $0 \leqslant p \leqslant 4$ et $0 \leqslant q \leqslant 3$, tels que $p + q = m$, p (resp. q) étant le nombre de boules blanches (resp. noires) retirées de A. C'est également le nombre de possibilités de trouver deux entiers $\bar{p}$ et $\bar{q}$, avec $0 \leqslant \bar{p} \leqslant 4$ et $0 \leqslant \bar{q} \leqslant 3$, tels que $\bar{p} + \bar{q} = \bar{m}$, $\bar{p}$ (resp. $\bar{q}$) étant le nombre de boules blanches (resp. noires) restées dans l'urne A, ou, de façon équivalente, $\bar{p} = 4 - p$ et $\bar{q} = 3 - q$; remarquons au passage que les deux égalités $p + q = m$ et $\bar{p} + \bar{q} = \bar{m}$ sont équivalentes. C'est encore égal au nombre de termes du coefficient de x^m, ou, de façon équivalente du coefficient de $x^{\bar{m}}$, dans le produit des quatrième et troisième puissances de $(1 + x)$ développées selon la formule du binôme de Newton, c'est-à-dire dans l'égalité suivante (que nous n'avons pas écrite entièrement) :

$$\left(C_4^0 + C_4^1 x + C_4^2 x^2 + C_4^3 x^3 + C_4^4 x^4\right) \cdot \left(C_3^0 + C_3^1 x + C_3^2 x^2 + C_3^3 x^3\right)$$

$$= C_4^0 C_3^0 + \left(C_4^0 C_3^1 + C_4^1 C_3^0\right) x + \left(C_4^0 C_3^2 + C_4^1 C_3^1 + C_4^2 C_3^0\right) x^2 + \cdots$$

Nous reviendrons ultérieurement sur cette dernière interprétation de ce nombre de lignes, pour chaque m.

c) En tenant compte des deux items a) et b), on a donc trouvé 18 situations possibles jusqu'à présent : elles correspondent aux 18 lignes du dernier tableau.
Pour chacune de ces 18 possibilités, nous pouvons avoir, le plus souvent, deux possibilités selon que la boule finalement tirée de B (ou de A') est blanche ou noire. Plus précisément, pareille dichotomie se produit uniquement dans 11 des 18 cas précédents ; de fait, dans les 7 autres situations, l'urne B (ou l'urne A') ne contient que des boules d'une seule couleur. Au total, il y a donc $11 \times 2 + 7 = 29$ possibilités à envisager pour chacune des deux questions I ou II.

2.2. Construction de l'arborescence des possibilités

Les considérations précédentes peuvent être représentées par deux arborescences ([7]), une pour cha-

([6]) L'ordre des lignes du tableau n'est pas celui de Catalan, de manière à faciliter ultérieurement les notations ; par ailleurs, nous utilisons non pas des exposants comme l'auteur, mais des indices inférieurs qui nous semblent moins susceptibles d'engendrer des confusions avec des opérations arithmétiques connues ; par ailleurs, nous rectifions une erreur typographique dans le tableau.

([7]) Nous emploierons ici un vocabulaire rencontré en théorie des graphes.

cune des deux questions I ou II. Nous n'expliciterons toutefois que l'une des deux, à savoir celle relative à l'urne I (donc à la question I) ; en effet, le raisonnement pour l'autre (concernant l'urne A modifiée, donc la question II) est en tous points similaire.

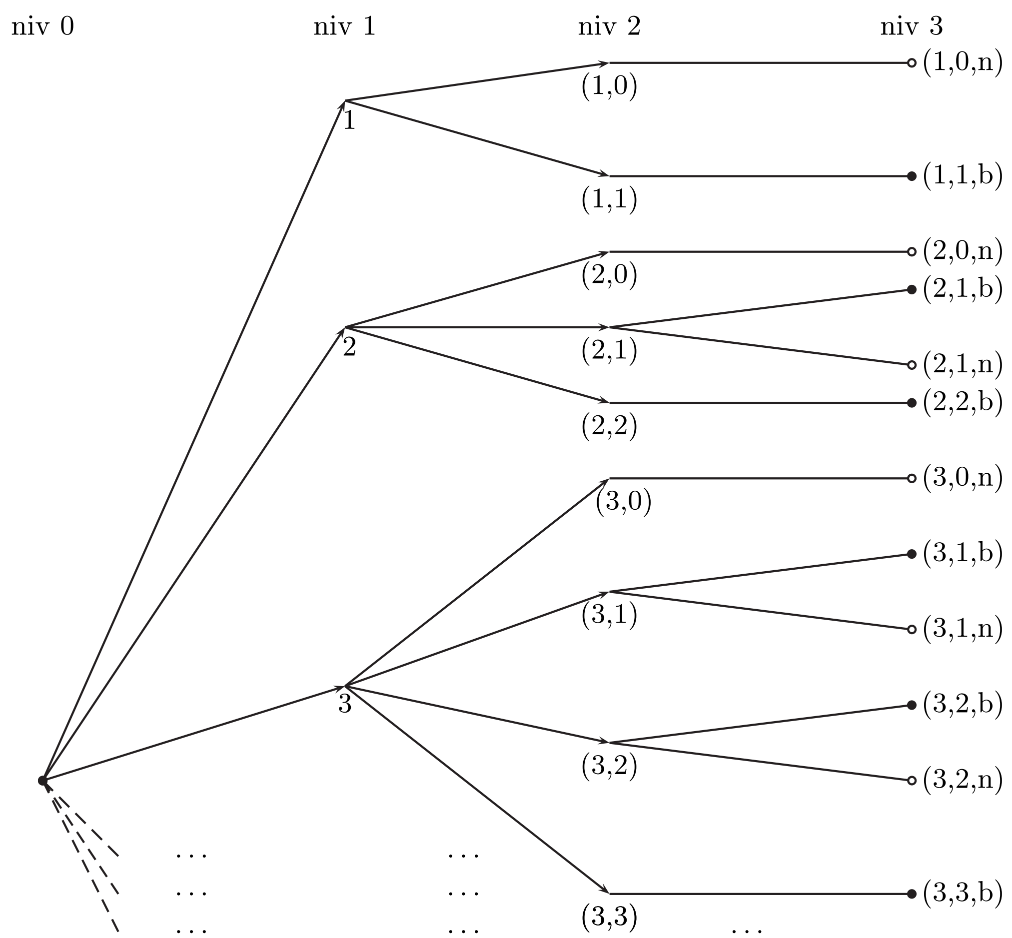
En traduisant graphiquement les informations de la sous-section précédente, on est conduit à construire une arborescence comportant, comme nous le verrons, 54 sommets et ceux-ci peuvent être répartis sur plusieurs niveaux. Après avoir placé, sur un niveau 0, la racine du graphe, celle-ci étant en fait un sommet fictif, on classe les autres sommets comme suit (en respectant la même décomposition que ci-dessus) :

a) Au niveau 1 sont placés les 6 sommets relatifs aux valeurs possibles pour m. Chacun de ces sommets peut être repéré par un nombre x, inscrit par exemple sous le point représentatif, indiquant la valeur de m considérée.

b) Au niveau 2 figurent les 18 possibilités de construire l'urne B. Chaque sommet peut se voir affecté d'un couple (x, y), écrit pour fixer les idées sous le point, où x vaut toujours le nombre m considéré, tandis que y donne le nombre de boules blanches dans B (le nombre de boules noires y étant donc égal à $m - x$).

c) Au niveau 3 se retrouvent les 29 feuilles. Chacune d'entre elles peut être caractérisée par un triplet (x, y, z), écrit par exemple à droite du point représentatif, où x et y sont des nombres qui ont la même signification qu'à l'item précédent, tandis que z est mis pour b ou n selon qu'une boule blanche ou noire est finalement tirée de la seconde urne.

La taille de cette arborescence dépasse celle qui est traditionnellement rencontrée dans des exemples donnés lors d'une première approche de la théorie probabiliste, alors que l'énoncé peut sembler à première vue fort facile à traiter. Contentons-nous de tracer la partie supérieure du graphe.



2.3. Probabilités attribuées aux branches de l'arbre du point de vue de l'urne B

Il nous faut à présent associer une probabilité à différentes arêtes de l'arborescence ci-dessus, mais, pour nos besoins ultérieurs, seules les arêtes situées sur un chemin allant de la racine à une feuille indiquée par un triplet se terminant par la lettre b sont à prendre en considération. Procédons systématiquement en reprenant les trois cas déjà évoqués précédemment.

a) Toutes les 6 arêtes reliant la racine à un sommet du premier niveau sont supposées équiprobables, en vertu de ce que l'on appelle le “principe d'indifférence” (parfois nommé le “principe de raison insuffisante”). Elles ont donc toutes les 6 une probabilité égale à $\frac{1}{6}$.

b) Considérons une arête quelconque reliant un sommet du premier niveau à un sommet du deuxième niveau ; elle part donc d'un sommet noté m pour arriver à un autre repéré par le couple (m, i). Sa probabilité est donnée par la définition classique, c'est-à-dire par le rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles. Or, le nombre de cas possibles est égal au nombre de façons de tirer, sans remise et sans tenir compte de l'ordre des tirages, m boules parmi les 7 de départ : il vaut donc C_7^m. Par ailleurs, pour obtenir un cas favorable, il faut d'abord tirer i boules blanches parmi les 4 possibles, ce qui peut se réaliser de C_4^i manières, puis tirer $(m-i)$ boules noires parmi les 3 possibles, ce qui peut se faire de C_3^{m-i} façons. Au total, la probabilité, notée $\pi_{m,i}$, de cette arête est donnée par l'égalité $\pi_{m,i} = \frac{C_4^i\ C_3^{m-i}}{C_7^m}$.

c) Envisageons à présent une arête arbitraire reliant un sommet (m, i) du deuxième niveau au sommet (m, i, b) du troisième niveau. Sa probabilité est en fait conditionnelle, la catégorie d'épreuve considérée étant réduite à l'urne B, et est notée $\gamma_{m,i}$: elle vaut la probabilité de tirer une boule blanche parmi les boules de la deuxième urne (et non pas de l'urne initiale) ; elle est encore donnée par la définition classique et vaut tout simplement $\gamma_{m,i} = \frac{i}{m}$.

Pratiquement, il existe 15 feuilles se terminant par la lettre b. Les valeurs numériques sont consignées dans le tableau suivant ([8]) :

m	Feuilles à considérer	$\pi_{m,i}$	$\gamma_{m,i}$
1	$(1,1,b)$	$\frac{C_4^1\ C_3^0}{C_7^1} = \frac{4}{7}$	$\frac{4}{4} = 1$
2	$(2,1,b)$	$\frac{C_4^1\ C_3^1}{C_7^2} = \frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
	$(2,2,b)$	$\frac{C_4^2\ C_3^0}{C_7^2} = \frac{2}{7}$	1
3	$(3,1,b)$	$\frac{C_4^1\ C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35}$	$\frac{1}{3}$
	$(3,2,b)$	$\frac{C_4^2\ C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}$	$\frac{2}{3}$
	$(3,3,b)$	$\frac{C_4^3\ C_3^0}{C_7^3} = \frac{4}{35}$	1
4	$(4,1,b)$	$\frac{C_4^1\ C_3^3}{C_7^4} = \frac{4}{35}$	$\frac{1}{4}$
	$(4,2,b)$	$\frac{C_4^2\ C_3^2}{C_7^4} = \frac{18}{35}$	$\frac{1}{2}$
	$(4,3,b)$	$\frac{C_4^3\ C_3^1}{C_7^4} = \frac{12}{35}$	$\frac{3}{4}$
	$(4,4,b)$	$\frac{C_4^4\ C_3^0}{C_7^4} = \frac{1}{35}$	1
5	$(5,2,b)$	$\frac{C_4^2\ C_3^3}{C_7^5} = \frac{2}{7}$	$\frac{2}{5}$
	$(5,3,b)$	$\frac{C_4^3\ C_3^2}{C_7^5} = \frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$
	$(5,4,b)$	$\frac{C_4^4\ C_3^1}{C_7^5} = \frac{1}{7}$	$\frac{4}{5}$
6	$(6,3,b)$	$\frac{C_4^3\ C_3^3}{C_7^6} = \frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$
	$(6,4,b)$	$\frac{C_4^4\ C_3^2}{C_7^6} = \frac{3}{7}$	$\frac{2}{3}$

2.4. Réponse à la question I

Conformément à la théorie relative aux arbres de probabilité, la réponse à la question I est donnée par la somme des produits des probabilités associées aux arêtes situées sur un chemin reliant la racine de l'arbre à une feuille dont le triplet représentatif se termine par la lettre b. En formule

$$\begin{aligned} p_B &= \sum_{m=1}^{6} \frac{1}{6} \left(\sum_i \pi_{m,i}\ \gamma_{m,i} \right) \\ &= \sum_{m=1}^{6} \frac{1}{6} \left(\sum_i \frac{C_4^i\ C_3^{m-i}}{C_7^m}\ \frac{i}{m} \right) \end{aligned}$$

les sommes entre parenthèses s'étendant aux indices i qui sont tous les entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant 4$ et $0 \leqslant m - i \leqslant 3$. Nous aurions toutefois pu prendre en charge également i nul, puisqu'alors $\frac{i}{m} = 0$.

([8]) Il est à noter que Catalan ([7], p. 468) donnait, sans aucune explication ni justification, les valeurs numériques non pas des probabilités concernées, mais bien de nombres qui leur sont proportionnels

Remarquons au passage que, pour m fixé et en faisant appel au nombre $\pi_{m,0}$ qui ne modifie pas la somme considérée, les différents nombres $\pi_{m,i}$ ont pour dénominateur un des termes figurant dans le coefficient de x^m obtenu en effectuant le produit, dont il a été question plus haut, des développements (par la formule du binôme de Newton) des quatrième et troisième puissances de $1+x$.

En appliquant les résultats numériques qui précèdent, nous trouvons

$$\begin{aligned} p_B &= \sum_{m=1}^{6} \frac{1}{6}\left(\frac{4}{7}\right) \\ &= \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi l'égalité

$$p_A = p_B$$

2.5. Réponse à la question II

Un raisonnement similaire peut être tenu en fixant l'attention non sur l'urne B comme ci-dessus, mais sur l'urne modifiée A' obtenue de façon « complémentaire », comme le signale Catalan ([7], p. 465). Nous laissons aux lecteurs le soin de réaliser ce travail, pour ainsi obtenir l'égalité

$$p_A = p_{A'}$$

En conclusion pour cet exemple, nous avons bien la double égalité

$$p_A = p_B = p_{A'}$$

D'un point de vue pédagogique, remarquons la richesse de cet exemple qui peut être abordé de multiples manières. En effet, cette matière peut évidemment être présentée par le professeur lors d'un exposé magistral, avec plus ou moins d'explications, mais elle peut être facilement dévolue aux élèves, pour un véritable travail de recherche, pouvant notamment donner lieu à une narration de recherche [1]. En particulier, elle convient fort bien pour un travail collectif, par exemple en répartissant les élèves en deux groupes chargés d'examiner chacun un point de vue et en attribuant les calculs à des élèves distincts, avant de regrouper et comparer les résultats des deux groupes au cours d'une (nécessaire) séance d'institutionnalisation.

3. Résolution du cas général par une méthode combinatoire

Pour traiter le cas général lorsqu'il y a, dans l'urne A de départ, b boules blanches et n boules noires, il “suffit” de suivre le raisonnement traité dans l'exemple en remplaçant 4 par b, 3 par n, 7 par $t = b+n$ et donc 6 par $t-1$. Notons que le traitement qui va suivre réclame certains prérequis théoriques à propos de résultats classiques de l'analyse combinatoire, ainsi qu'une certaine aisance avec des notations mathématiques générales.

Dans ce qui va suivre, nous conviendrons une fois pour toutes que $C_k^{k'}$ est nul dès que $k' > k$.

3.1. Point de vue de B

En nous appuyant sur le traitement détaillé de l'exemple, nous pouvons écrire

$$p_B = \sum_{m=1}^{t-1} \frac{1}{t-1} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{C_b^i\, C_n^{m-i}}{C_t^m}\ \frac{i}{m} \right)$$

Des propriétés classiques des combinaisons nous permettent de remplacer $i\ C_b^i$ par $b\ C_{b-1}^{i-1}$, et de même $m\ C_m^t$ par $t\ C_{t-1}^{m-1}$.

En conséquence, nous obtenons successivement, en posant $i' = i-1$ pour la dernière égalité :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \frac{C_b^i\, C_n^{m-i}}{C_t^b}\ \frac{i}{m} &= \sum_{i=1}^{m} \frac{b\ C_{b-1}^{i-1}\ C_n^{m-i}}{t\ C_{t-1}^{m-1}} \\ &= \frac{b}{t}\ \frac{1}{C_{t-1}^{m-1}} \sum_{i=1}^{m} C_{b-1}^{i-1}\ C_n^{(m-1)-(i-1)} \\ &= \frac{b}{t}\ \frac{1}{C_{t-1}^{m-1}} \sum_{i'=0}^{m-1} C_{b-1}^{i'}\ C_n^{m-1-i'} \end{aligned}$$

Or, d'après l'identité de Vandermonde :

$$\sum_{i'=0}^{m-1} C_{b-1}^{i'}\ C_n^{m-1-i'} = C_{n+b-1}^{m-1}$$

En conséquence (puisque, notamment, $t = n+b$) :

$$\begin{aligned} p_B &= \sum_{m=1}^{t-1} \frac{1}{t-1}\ \frac{b}{t}\ \frac{1}{C_{t-1}^{m-1}}\ C_{n+b-1}^{m-1} \\ &= \frac{b}{t} \end{aligned}$$

3.2. Point de vue de A modifiée

On trouve pareillement (en développant un peu moins les explications) :

$$p_{A'} = \sum_{m=1}^{t-1} \frac{1}{t-1} \left(\sum_{j=0}^{m} \frac{C_b^{m-j}\, C_n^j}{C_t^m} \frac{m-j}{m} \right)$$

Or, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m} \frac{C_b^{m-j}\, C_n^j}{C_t^m} \frac{m-j}{m} &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{b\, C_{b-1}^{m-j-1}\, C_n^j}{t\, C_{t-1}^{m-1}} \\
&= \frac{b}{t} \frac{1}{C_{t-1}^{m-1}} \sum_{j=0}^{m-1} C_{b-1}^{m-j-1}\, C_n^j \\
&= \frac{b}{t}
\end{aligned}$$

D'où la conclusion

$$p_{A'} = \frac{b}{t}$$

3.3. Réflexion pédagogique

Ce raisonnement général nous suggère encore une double observation qui pourrait s'avérer exploitable sur le plan didactique.

D'une part, nous constatons que cette présentation est basée sur celle exposée par Catalan ([6]) qui s'étend sur quatre pages et, comme l'a écrit Jongmans, consiste en un « calcul combinatoire touffu » ([12], p. 198). La longueur et l'apparente difficulté du texte initial peuvent s'expliquer par le non-recours à des concepts, notations et résultats classiques de l'analyse combinatoire. ([9]) Ainsi, des notations adéquates et la connaissance de propriétés théoriques des combinaisons écourtent de façon significative l'exposé.

D'autre part, il nous semble inopportun d'enseigner d'emblée, à un public prenant connaissance de la question, la présentation générale, qui nous paraît trop abstraite. À notre avis, il convient au préalable d'analyser en profondeur un exemple particulier tel que celui développé plus haut.

4. Résolution moderne grâce à une loi hypergéométrique

En faisant appel à un bagage théorique plus important, essentiellement à la théorie sur les variables aléatoires (incluant l'étude de la loi hypergéométrique), on peut abandonner les présentations assez laborieuses précédentes, et adopter un autre point de vue qui permettra de répondre plus directement aux questions posées. Le raisonnement qui va suivre est dû à F. Jongmans et E. Seneta dans [13].

Si une urne A contient initialement N_0 boules blanches ou noires, dont X_0 blanches, X_0 et N_0 étant des constantes (non aléatoires), alors la probabilité de tirer une boule blanche de l'urne A est alors égale à $\frac{X_0}{N_0}$.

Extrayons successivement au hasard N_1 boules de A, et plaçons celles-ci dans une autre urne B qui contient alors X_1 boules blanches.

4.1. Point de vue de l'urne B

Si X_1 et N_1 sont connus, alors la probabilité de tirer hors de l'urne B une boule blanche vaut évidemment $\frac{X_1}{N_1}$. Mais nous avons à considérer la situation où X_1 et N_1 sont inconnus (et aléatoires), de sorte que $\frac{X_1}{N_1}$ est une variable aléatoire (discrète). Dans ce cas, la probabilité de tirer une boule blanche de l'urne B est notée p_B : elle est donnée par l'espérance mathématique de $\frac{X_1}{N_1}$.

Or, pour chaque valeur fixée (provisoirement) de N_1, on peut considérer que l'on dispose d'une seule urne constituée de N_0 boules dont N_1 sont blanches, que l'on y prélève sans remise X_1 boules, puis que l'on compte le nombre de boules blanches : cette variable aléatoire, qui est en fait X_1 conditionnellement à N_1, suit la loi hypergéométrique des trois paramètres X_0, N_0 et N_1. On peut donc écrire

$$E\left(X_1 \mid N_1\right) = \frac{N_1\, X_0}{N_0}$$

En conséquence,

$$E\left(\frac{X_1}{N_1} \mid N_1\right) = \frac{X_0}{N_0}$$

([9]) Il peut paraître curieux de constater que, dans un article antérieur [5], l'auteur utilise la notation $C_{m,n}$ pour désigner le nombres de combinaisons de m lettres prises n à n ; par ailleurs, l'identité de Vandermonde est bien antérieure à l'article [6].

Comme on trouve une constante pour chaque N_1 fixé, on en déduit finalement

$$p_B = E\left(\frac{X_1}{N_1}\right) = \frac{X_0}{N_0}$$

4.2. Point de vue de l'urne A modifiée

L'urne modifiée A' contient $N_0 - N_1$ boules, dont $X_0 - X_1$ blanches ; rappelons que toutes les boules de A ne sont pas prises, de sorte que $N_0 - N_1 \neq 0$.

Les nombres X_0 et N_0 étant des constantes et N_1 étant (provisoirement) fixé, on peut écrire, vu ce qui précède :

$$\begin{aligned} E\left(\frac{X_0 - X_1}{N_0 - N_1} \mid N_1\right) &= \frac{X_0 - E\left(X_1 \mid N_1\right)}{N_0 - N_1} \\ &= \frac{X_0 - \frac{X_0\ N_1}{N_0}}{N_0 - N_1} \\ &= \frac{X_0\ N_0 - X_0\ N_1}{N_0\ \left(N_0 - N_1\right)} \\ &= \frac{X_0}{N_0} \end{aligned}$$

En laissant maintenant varier N_1, on retrouve en moyenne ce résultat constant, soit plus formellement :

$$p_{A'} = E\left(\frac{X_0 - X_1}{N_0 - N_1}\right) = \frac{X_0}{N_0}$$

4.3. Prolongement

Cette présentation, en plus d'être quasi immédiate une fois connue la théorie correspondante sur les variables aléatoires, offre des possibilités d'approfondissement. En effet, si on recommence “ à l'infini ” l'extraction de boules d'urnes, on débouche sur une chaîne de Markov bivariée ainsi que sur le concept moderne de martingale [13] qui est riche et admet de multiples applications (voir, par exemple, [3] et [16]).

5. Conclusion

Concluons cette note en mettant en évidence le fait que nous avons abordé des problèmes à la fois faciles à comprendre mais pouvant être assez difficiles à traiter systématiquement. Notre étude a montré que les questions étudiées peuvent mettre en jeu différents concepts intervenant à plusieurs stades d'un apprentissage classique en théorie des probabilités, tant au niveau de l'enseignement secondaire (y compris pour des débutants en probabilités) que du supérieur (pour des étudiants plus aguerris). Cette matière peut donc être enseignée de diverses manières en fonction de l'acquis théorique des étudiants ; elle se prête dès lors bien à un enseignement dit « en spirale » qui consiste à revenir sur une même matière plusieurs fois, en travaillant dans des cadres et registres variés ; elle permet aussi d'exploiter différentes approches pédagogiques ; elle nous semble encore assez intéressante d'un point de vue méthodologique et devrait dès lors se révéler bénéfique au cours d'un apprentissage des mathématiques (voir, par exemple, [2]).

Au surplus, le principe analysé peut offrir une opportunité de se pencher sur l'histoire des mathématiques mais aussi de la société (notamment, par référence à la vie mouvementée de Catalan) : il fournit notamment l'occasion d'aborder des textes anciens, accessibles sur le web, pour découvrir des problèmes posés ainsi que le cheminement, parfois laborieux et pas toujours irréprochable au niveau de la rigueur, suivi initialement par des mathématiciens célèbres.

Il permet également de constater l'ampleur prise par les théories mathématiques ces dernières décennies, en particulier le fait que les notations employées par les mathématiciens et les concepts, parfois généraux et abstraits, qu'ils développent peuvent abréger des raisonnements et déboucher sur des applications nouvelles.

Ainsi, il peut donner une occasion d'améliorer la culture (mathématique ou humaniste) des élèves.

Remerciement. Le professeur Gentiane Haesbroeck m'a transmis des références exploitées dans cet article et m'a fait bénéficier de ses compétences dans le domaine étudié. Je la remercie vivement.

Pour en savoir plus

[1] Bair J. - Delagardelle J.C. - Henry V., *Narrations de recherche. De la théorie à la pratique dans les enseignements secondaire et supérieur*, Commission pédagogique de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française, Mons, 2006.

[2] Bair J. - Haesbroeck G. - Haesbroeck

J.J., *Formation mathématique par la résolution de probèmes*, De Boeck Université, Bruxelles, 2000.

[3] Bouleau N , *Martingales et marchers financiers*, éd. Odile Jacob, Paris, 1998.

[4] Breny H., Histoire du cours de “Calcul des probabilités” à l’Université de Liège (1835 - 1963), dans *Regards sur 175 ans de science à l’Université de Liège (1817 - 1992)*, Centre d’Histoire des Sciences et des Techniques, Université de Liège, 1992, pp. 1-12.

[5] Catalan E., Solution d’un Problème de Probabilité relatif au jeu de rencontre, *Journal de mathématiques pures et appliquées*,1ère série, tome 2, 1837, pp. 469-482.

[6] Catalan E., Deux problèmes de probabilités, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1ère série, tome 6, 1841, pp. 75-80.

[7] Catalan E., Application d’un nouveau principe de probabilités, *Bulletin de l’Académie royale de Belgique*, sér. 2, 44, 1877, pp. 463-468.

[8] Catalan E., Un nouveau principe de probabilités, *Bulletin de l’Académie royale de Belgique*, sér. 3,6, 1884, pp. 72-74.

[9] Catalan E., Problèmes et théorèmes de probabilités, *Mémoires de l’Académie royale de Belgique*, 46, 1886, pp. 2-16.

[10] Descartes R., *Discours de la méthode. Méditations métaphysiques*, Les Grands philosophes, Flammarion, Paris, 2008.

[11] Gosztonyi K., Séries de problèmes. L’exemple des “Jeux avec l’infini” de Rosza Péter, *Bulletin de l’APMEP*, 507, 2014, pp. 25-32.

[12] Jongmans F., *Eugène Catalan. Géomètre sans patrie - Républicain sans république*, Société Belge des Professeurs de Mathématique d’expression française, Mons, 1996.

[13] Jongmans F. - Seneta E., A Probabilistic “ New Principle ” of the 19th Century, *Archive for History of exact Sciences*, 47, 1994, pp. 93-102.

[14] Mansion P., Discours prononcé le 7 décembre 1884, à la salle académique de l’Université de Liège, à l’occasion de la promotion de M. E. Catalan à l’éméritat, *Mémoire de la Société royale des sciences de Liège*, 12, 1885, pp. 3-57.

[15] Mondésir M.E., Solution d’une question qui se présente dans le calcul des probabilités, *Journal de mathématiques pures et appliquées*,1ère série, tome 2, 1837, pp. 3-10.

[16] Mazliak L. - Shefer G., Splendeurs et misères des martingales, *Journal Electronique d’Histoire des Probabilités et de la Statistique*, vol. 5, 2009.

[17] Poisson *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des Règles générales*, Bachelier imprimeur-libraire, Paris, 1837.

[18] Rouche N., L’arithmétique du petit Nicolas, ou Qu’est-ce que “penser mathématiquement”, *Bulletin de l’APMEP*, 451, 2004, pp. 185-195.

Jacques Bair est professeur émérite de l’Université de Liège. j.bair@ulg.ac.be