Le schème de la courbe de niveau tangente

Jacques Bair

Mots clés : Résolution de problèmes ; schème ; courbe de niveau ; optimisation sous contrainte.

Dans cet article, nous présentons ce que Polya *appelle un « schème ». Nous introduisons progressivement un cas particulier de ce concept général, à savoir celui de « la courbe de niveau tangente ».*
Nous montrons au moyen d'exemples variés et simples que ce schème s'avère décisif pour résoudre de nombreux problèmes mathématiques d'optimisation.

1. Introduction

La résolution de problèmes joue assurément un rôle essentiel dans l'apprentissage des mathématiques (voir, par exemple, [2] et [6]). Tout professeur de mathématiques a certainement déjà constaté qu'un concept n'est réellement et durablement assimilé par un élève que s'il a été appliqué avec succès pour résoudre des problèmes dans des contextes variés. On peut expliquer ceci, partiellement et de façon plausible, par cette citation de Bernard Charlot (1986, cité dans [2], p. 13) :

« Faire des maths, c'est un travail de la pensée qui construit des concepts pour résoudre des problèmes, qui pose de nouveaux problèmes à partir des concepts ainsi construits, qui rectifie ces concepts pour résoudre de nouveaux problèmes, qui généralise et unifie peu à peu ces concepts dans des univers mathématiques qui s'articulent entre eux, se structurent, se déstructurent et se restructurent sans cesse. »

Au niveau de la formation mathématique d'un élève, l'important n'est pas forcément le fait d'avoir résolu tel ou tel problème (même si cela peut s'avérer quelquefois, mais somme toute assez rarement, intéressant d'un point de vue pratique, toujours gratifiant et encourageant sur le plan psychologique), mais bien d'avoir compris l'intervention des concepts mathématiques dans la situation étudiée. De cette manière, l'étudiant s'est forgé ce que Polya ([9], p. 86) appelle un *schème*, c'est-à-dire un modèle à suivre pour résoudre des problèmes semblables ou voisins. Le même auteur précise l'idée de schème comme suit ([9], p. 86) :

« On perfectionne ce schème par l'usage, en notant les succès auxquels il conduit, en réfléchissant aux raisons de ces succès, à l'analogie entre les problèmes résolus, aux circonstances qui rendent un problème accessible à une solution de ce genre, etc. En perfectionnant ce schème, on peut finalement parvenir à une vraie découverte. De toutes façons on a de grandes chances d'acquérir quelques connaissances bien ordonnées et utilisables. »

En traitant géométriquement des petits problèmes mathématiques, de plus en plus élaborés et dont les premiers ont été inspirés par la lecture du chapitre VIII (intitulé « Maxima et minima ») du livre [9] déjà mentionné ci-dessus, nous comptons montrer concrètement comment se dégage progressivement l'idée d'un schème particulier et, en conséquence, comment des concepts mathématiques parviennent à rassembler des situations bien différentes. Nous mettons ainsi en évidence la "puissance" de méthodes mathématiques, même assez élémentaires.

Terminons ce préambule en précisant un peu les objectifs visés par cet article.

Nous pensons que cette note pourrait concerner (presque) tous les professeurs, quel que soit le niveau où ils enseignent. En effet, notre texte traite aussi bien des problèmes qui pourraient être abordés dans l'enseignement secondaire inférieur (problèmes 1 et 2 ci-dessous) que dans le secondaire supérieur (problèmes 3 à 8), tandis que des applications de la section 4 sont le plus souvent envisagées dans le supérieur. Il est toutefois à noter que la méthode exposée permettrait de rencontrer les types d'énoncés considérés plus tôt que ce qui est habituel ; par exemple, un énoncé similaire au problème 3 ci-après pourrait aussi bien être posé à des élèves du supérieur (voir [8]) que dans le secondaire même inférieur ([1]). Il nous semble intéressant de constater, notamment, que des méthodes d'optimisation envisagées plus techniquement dans le supérieur ([2]) sont, tout du moins d'un certain point de vue, de même nature que des techniques géométriques qui auraient pu être vues précédemment dans le secondaire (même du cycle inférieur).

Enfin, signalons que nous ne cherchons pas spécialement à construire analytiquement, ni même graphiquement, la solution explicite des exemples cités. Ce qui nous intéresse est plutôt de mettre en évidence l'émergence progressive et certaines applications classiques du schème considéré, et ceci dans différents contextes, en faisant éventuellement appel à des concepts mathématiques additionnels qui s'avèrent utiles dans la situation étudiée.

2. Exemples introductifs

2.1. Cercle de centre fixé, tangent à une droite donnée

Problème 1

> Un petit garçon se baigne dans une mer calme, le long d'une plage rectiligne. Il s'ébat tranquillement dans l'eau à vingt mètres du rivage lorsque, soudain, sa mère lui demande de sortir au plus vite de l'eau. Comment doit-il procéder pour obéir au mieux à cette injonction ?

Bien entendu, l'enfant n'a pas besoin de faire appel à des concepts de physique (tels que vitesse, distance, ...), ni à effectuer un raisonnement mathématique poussé. Il sait parfaitement, par intuition ou simple bon sens, qu'il doit se diriger en suivant la perpendiculaire à la plage menée depuis l'endroit où il se trouve.

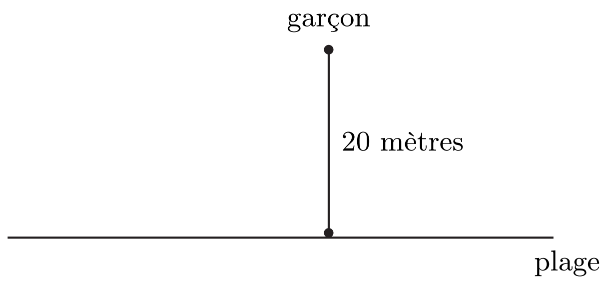

Fig. 1 – Problème 1

Mais, clairement, notre but en posant ce problème n'est pas de trouver la solution (évidente), mais de réfléchir à une méthode, un schème, qui pourra se révéler efficace dans d'autres situations.

Remarquons en premier lieu que le garçonnet doit nager 20 mètres et pas plus, mais évidemment, que cela ne suffit pas, car il pourrait, par exemple, s'enfoncer encore plus loin dans la mer ; il doit en fait se diriger, en ligne droite, directement vers (c'est-à-dire, perpendiculairement à) la plage.

Continuons notre raisonnement en nous débarrassant du contexte particulier de cette histoire et traitons le problème plus général suivant.

Problème 2.

> Sur une droite d donnée, trouver le point à distance minimale d'un point P situé en dehors de d.

Nous cherchons un point A de d tel que la distance $|PA|$ est inférieure à $|PX|$ quel que soit le point X appartenant à d et différent de A. Le problème géométrique est élémentaire. Nous savons que le point A cherché est tel que la droite PA est perpendiculaire à d ; au surplus, le cercle de centre P et de rayon $|PA|$ est tangent à d (en A). Par ailleurs, si X désigne un point de d autre que A, le cercle de centre P et de rayon $|PX|$ coupe d en un deuxième point X' et tout point du segment de droite $[X, X']$ est plus près de P que X (et donc aussi X').

([1]) Un témoignage allant dans ce sens se trouve dans la rubrique « Exercices de ci de là » d'un récent numéro du *Bulletin Vert* de l'APMEP (n° 506, nov. - déc. 2013, p. 623). Après la résolution, par la méthode décrite dans cet article, d'un exercice concret (relatif à la cathédrale de Strasbourg), on peut lire cette remarque : « Foin de Geogebra ou de fonction hors programme, un argument de pure géométrie suffit à retourner la valeur exacte de la distance à laquelle il faut se placer. Voilà comment l'on résout avec des connaissance de collège un problème que je pensais n'être même pas destiné aux élèves de lycée ».

([2]) C'est notamment le cas de la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

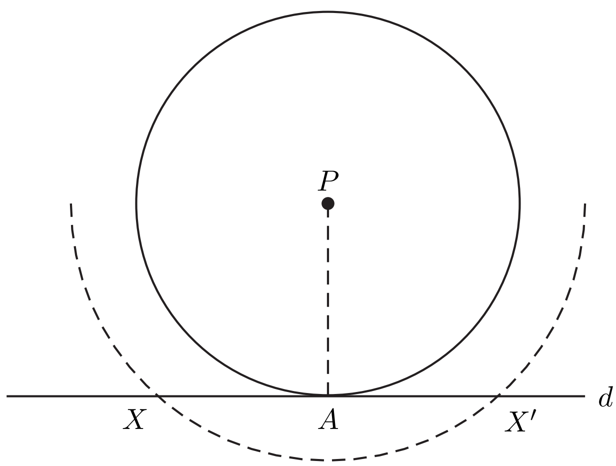

Fig. 2 – Problème 2

En conclusion, la solution géométrique de cet énoncé (voir la figure 2) est fournie par le (seul) cercle de centre P qui vient toucher tangentiellement d : le point A est alors le point de tangence en question.

Nous allons voir que cette idée de solution donnée par un cercle tangent peut être exploitée dans d'autres circonstances.

2.2. Cercle passant par deux points fixés tangent à une droite donnée

Voici un petit problème à la fois classique et ancien (voir, par exemple, [1] et [3]). Il peut évidemment être présenté avec d'autres données numériques et aussi en référence à d'autres situations similaires.

Problème 3

Un tableau de 1,24 m de hauteur est suspendu à un mur de telle façon que son bord inférieur se trouve à 1,8 m au-dessus des yeux de l'observateur. A quelle distance du mur doit se tenir celui-ci pour jouir des meilleures conditions de vision (sachant que l'observateur se déplace uniquement dans un plan vertical perpendiculaire à celui du tableau) ?

Il s'agit de rendre maximum l'angle sous lequel le tableau est vu. Remarquons avant tout qu'un tel énoncé doit intuitivement posséder une solution. En effet, l'individu voit le tableau sous un angle variable lorsqu'il se déplace : quand il est situé juste sous le panneau, l'angle est évidemment nul, mais quand il s'éloigne de son point de départ, l'angle augmente, puis redevient petit et même très petit (nul « à la limite ») lorsqu'il est loin du panneau. Comme cet angle varie « continûment », il doit passer par un maximum (par application intuitive du « théorème » stipulant que toute fonction continue à valeurs réelles sur un segment fermé admet un maximum).

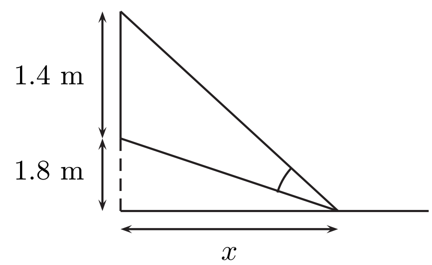

Fig. 3 – Problème 3

Le calcul différentiel est tout indiqué pour résoudre un tel énoncé (et d'ailleurs de nombreux problèmes mathématiques d'optimisation). Pour appliquer cette méthode efficace, il convient de formuler mathématiquement le problème posé, et plus particulièrement le « mettre en équations », c'est-à-dire de choisir l'inconnue (ou les inconnues quand il y a plusieurs variables), avec éventuellement une (ou des) contrainte(s) à respecter ainsi que la fonction à optimiser (qui n'est d'ailleurs pas toujours unique ([3])). Dans le cas qui nous occupe, l'observateur doit se trouver à 2,4 mètres du point situé juste en-dessous du tableau ; une résolution analytique complète peut être trouvée dans [3] (p. 180).

Nous allons à présent raisonner de manière essentiellement géométrique, ce qui nous permet d'abandonner les « données métriques » telles que la distance au sol du pied du tableau et la hauteur de ce dernier, la perpendicularité du panneau, l'horizontalité (supposée, bien entendu) du terrain… Cela

([3]) Dans un problème semblable posé aux étudiants inscrits, à l'Université de Liège, en première année de bachelier pour devenir ingénieurs civils, les correcteurs ont trouvé sur les copies plus d'une dizaine de fonctions (correctes) à maximiser (voir [8]).

nous amène à traiter le problème plus général que voici (se trouvant dans [9], p. 86).

Problème 4

> Soient dans un plan deux points A et B et une droite d, les deux points étant situés du même côté de la droite (et non sur celle-ci). Trouver sur cette droite un point P d'où le segment joignant les deux points soit vu sous l'angle le plus grand possible.

Traçons des cercles passant par A et B ; il en existe évidemment une infinité dont les centres sont sur la médiatrice du segment AB. Nous recherchons un point P de d pour lequel l'angle $\widehat{APB}$ est maximum.

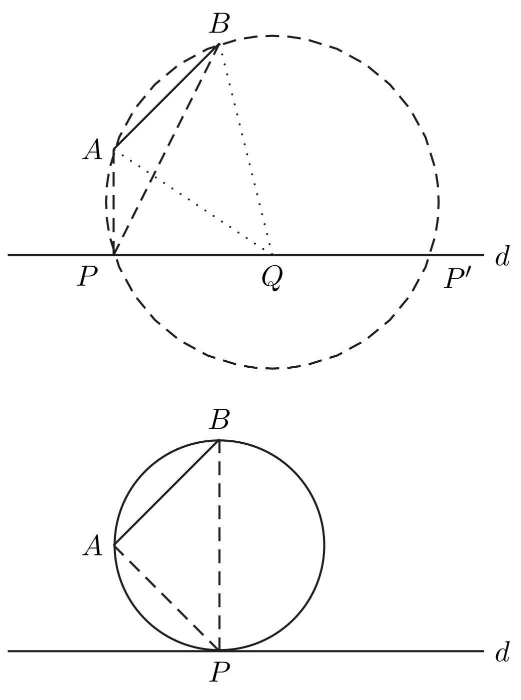

FIG. 4 – Problème 4

Constatons tout d'abord que le point P cherché n'est pas situé sur un cercle coupant d en un point P' autre que P ; en effet, dans ce cas, tout point Q entre P et P' serait tel que l'angle $\widehat{AQB}$ aurait une mesure supérieure à celle de tout angle inscrit dans le cercle et interceptant l'arc entre A et B, en particulier celle de l'angle $\widehat{APB}$, ce qui est exclu.

Or, P se trouve sur d et forcément sur un cercle passant par A et par B.

Donc, P se trouve à l'intersection de d avec l'unique cercle (passant par A et B) qui est tangent à d ([4]).

Ainsi, le recours à un cercle tangent conduit ici encore à la réponse souhaitée, pour autant bien sûr que soient utilisés en sus le théorème affirmant que des angles inscrits interceptent le même arc ainsi que la propriété selon laquelle des angles à sommet intérieur sont plus grands que les angles inscrits considérés.

2.3. Hyperbole tangente à une droite donnée

Problème 5

> Trouver le rectangle d'aire la plus grande possible, sachant que le périmètre est connu.

Ce problème (simple et classique), de nature géométrique, est clairement équivalent à la version arithmétique ci-dessous, la seule que nous traiterons ultérieurement.

Problème 6

> Trouver deux nombres (réels) positifs dont le produit est le plus grand possible connaissant leur somme.

Si nous appelons x et y les deux nombres considérés, le problème consiste à rendre maximum le produit xy sachant que $x + y = a$ où a désigne la constante donnée. Comme les variables x et y sont interchangeables dans cette question, on doit bien entendu avoir (par symétrie ([5])) à l'optimum $x = y$, d'où, via la contrainte, $x = y = \frac{a}{2}$.

Ne nous contentons pas de cette solution immédiate. Traduisons géométriquement le problème

([4]) Sur la figure de droite ci-dessous, la droite BP est perpendiculaire à d, ce qui est une conséquence des données simples choisies pour le dessin (et ce n'est pas nécessairement toujours le cas : par exemple, les cas AB parallèle à d et AB perpendiculaire à d pourraient illustrer également cette question). Plus généralement, il est possible de construire un cercle passant par deux points donnés et tangent à une droite donnée (voir par exemple [7], p. 506).

([5]) Ce « principe de symétrie » constitue un autre exemple de « schème », à la fois simple et souvent très efficace.

posé. Nous cherchons en réalité un point (x, y) qui est situé dans le premier quadrant du plan et sur le segment de droite s d'extrémités $(a, 0)$ et $(0, a)$. Par ailleurs, au vu de la contrainte, par tout point (x_0, y_0) du premier quadrant passe une seule hyperbole d'équation $xy = x_0y_0$, cette hyperbole étant « d'autant plus haut » dans le plan que le produit x_0y_0 est grand.

Il s'agit donc de trouver l'hyperbole (ou plus exactement sa branche située dans le premier quadrant) qui est la plus éloignée de l'origine mais qui touche le segment s. Comme en atteste la figure ci-dessous, il s'agit de l'hyperbole (unique) qui touche tangentiellement s.

À nouveau, la solution géométrique est obtenue par l'intermédiaire d'une courbe, non plus un cercle mais une hyperbole, tangente à une droite donnée.

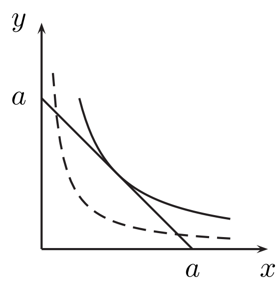

FIG. 5 – Problèmes 5 et 6

2.4. Tangence entre deux courbes planes

Problème 7

Trouver deux nombres (réels) positifs dont le produit est le plus grand possible, sachant que la somme de leurs carrés est égale à une constante positive connue.

Il s'agit ici de trouver deux nombres positifs x et y tels que leur produit xy est le plus grand possible sachant que $x^2 + y^2 = a$ (avec $a > 0$). On doit à nouveau avoir, par symétrie, $x = y$, avec cette fois $x = y = \sqrt{\frac{a}{2}}$.

D'un point de vue géométrique, nous recherchons parmi toutes les hyperboles d'équation $xy = b$ (où b désigne une constante) celle qui est le plus haut dans le plan et qui, pour satisfaire la contrainte, rencontre le quart de cercle de centre l'origine et de rayon $\sqrt{a}$. Il s'agit donc de l'hyperbole qui est tangente à l'arc de cercle au point $(\sqrt{\frac{a}{2}}, \sqrt{\frac{a}{2}})$.

Cette fois encore, la solution recherchée est donnée par une courbe (ici à nouveau une hyperbole) tangente non plus à une droite fixée, mais bien à un cercle donné.

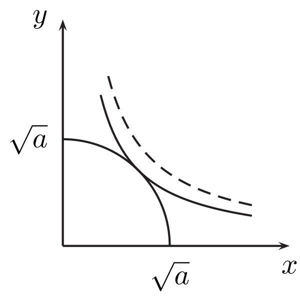

FIG. 6 – Problème 7

Problème 8

Lors d'une randonnée pédestre sur un chemin de montagne, comment savoir que le point d'altitude maximale est atteint ?

Il est facile d'apporter un élément décisif de réponse à cette question. En effet, il est évident qu'un point où le sentier monte n'est certainement pas le plus haut, puiqu'il suffirait de prolonger sa promenade pour s'élever en altitude. En conséquence, le point cherché, qui doit forcément exister puisque la balade commence (en principe) de la vallée à une altitude basse et y revient (généralement) après avoir fait passer le randonneur par des points plus hauts, se trouve, d'une part sur le sentier (en supposant que le marcheur ne quitte pas celui-ci), mais d'autre part, sur une ligne d'égale altitude ; la figure ci-dessous illustre cette situation.

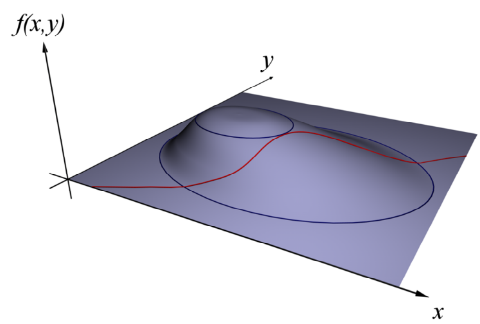

FIG. 7 – Problème 8

Traduisons tout ceci plus mathématiquement.

Il s'agit de rechercher le maximum de la fonction f qui donne l'altitude d'un point, sous une contrainte définie par le sentier. Géométriquement, on souhaite donc trouver le point le plus haut qui appartient à la fois à la surface S définie par la surface de la terre (et donc, mathématiquement, par le graphe de la fonction f) et à la courbe décrivant le sentier.

D'après ce qui précède, nous pouvons constater intuitivement que le sentier décrit en général ([6]) une courbe de l'espace dont l'altitude des points est d'abord inférieure à celle du maximum, puis redevient par après inférieure à cette dernière ; en conséquence, la courbe décrite par le chemin touche alors tangentiellement la courbe d'égale altitude passant par le point en question. Cette propriété de tangence reste d'application quand on projette les courbes considérées dans un plan. Nous avons constaté intuitivement ci-dessus qu'en arrivant au maximum cherché, le sentier vient en général de plus bas puis redescend par après, de sorte qu'il doit alors toucher tangentiellement la ligne d'égale altitude qui passe par ce point ; cette propriété de tangence reste d'application quand on projette ces courbes dans un plan.

Dès lors, dans ce problème d'optimisation à 3 dimensions, la solution fait également appel à l'idée de tangence entre deux courbes planes.

3. Généralisations relatives au schème

3.1. Comparaison des solutions

Dans les huit problèmes considérés ci-avant, on a, comme il a déjà été signalé, recherché un point de tangence entre deux courbes qui peuvent être supposées planes.

a) Une de ces courbes est fixe. Il s'agit de
   - une droite dans les problèmes 1 à 6 ;
   - un arc de cercle dans le problème 7 ;
   - dans le problème 8, une courbe de l'espace définie par le sentier ou, pour ramener le problème étudié dans un plan, sa projection orthogonale dans le plan horizontal de base (correspondant, pour fixer les idées, à une altitude nulle).

b) L'autre courbe se trouve parmi une famille de courbes « semblables » qui sont
   - des cercles de même centre dans les problèmes 1 et 2 ;
   - des cercles passant par deux points dans les problèmes 3 et 4 ;
   - des hyperboles ayant les deux axes de coordonnées comme asymptotes, dans les problèmes 5 à 7 ;
   - dans le problème 8, des courbes tracées sur la surface terrestre et comprenant des points d'égale altitude ou à nouveau leur projection orthogonale dans le plan horizontal de base.

   En fait, toutes ces courbes-ci sont des « courbes de niveau », concept mathématique général qui va faire l'objet de la sous-section suivante.

3.2. Courbe de niveau

Revenons un instant au problème 8 et considérons à nouveau la surface terrestre S d'une région. Elle peut être perçue comme étant la représentation graphique d'une fonction f de deux variables x et y définie comme suit : $f(x, y)$ est l'altitude du point $(x, y, f(x, y))$ appartenant à S.

Il est possible de donner une image fidèle de la surface S sur une feuille de papier en adoptant une technique bien connue en cartographie à propos des cartes topographiques. A cet effet, on représente, sur une carte géographique de la région étudiée, quelques lignes, appelées des *courbes de niveau* : ce sont les projections dans le plan xOy des intersections de S avec des plans horizontaux ; la différence d'altitude entre deux plans horizontaux successifs est le plus souvent choisie constante (mais ce n'est pas obligatoire). Si on connaît la surface S, on peut tracer ces courbes de niveau ; mais, réciproquement, si on dispose des courbes de niveau (avec leur altitude), alors on peut reconstruire, au moins par la pensée, la surface S. La figure 8 illustre tout ceci.

Ces considérations peuvent s'appliquer à toute fonction f à deux variables x et y : par définition, on appelle *courbe de niveau* de f toute courbe définie implicitement par une équation du type $f(x, y) = c$, où c désigne une constante.

Il n'est peut-être pas inutile de signaler que les courbes de niveau portent parfois des noms spécifiques en fonction du domaine dans lequel elles sont appliquées. Ainsi, on parle d'isotherme (resp. isobare, isocoût, isoquante, courbe d'indifférence, ...) lorsque la fonction considérée est la température

([6]) Nous ne considérions pas ici des particularités topographiques particulières, par exemple lorsque le sentier épouse une courbe de niveau sur une certaine longueur, ou encore quand la colline comporte une zone plate et horizontale.

(resp. la pression, le coût, la quantité produite, l'utilité, ...).

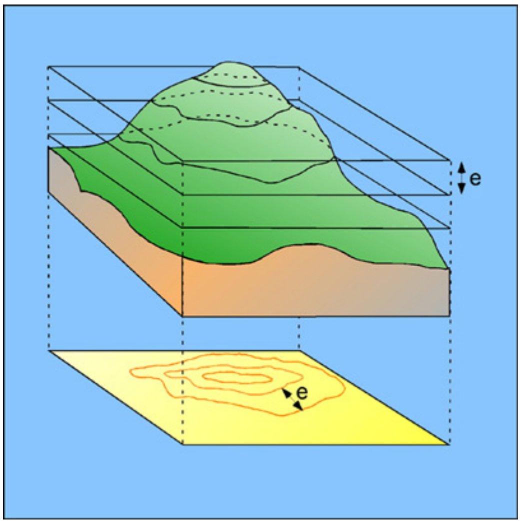

Fig. 8 – Surface et courbes de niveau

3.3. Théorème de Lagrange

Le théorème de Lagrange permet précisément de trouver le maximum (ou minimum) d'une fonction à plusieurs variables réelles soumises à des contraintes de type « égalité ». Dans le cas simple (le seul envisagé ici) d'une fonction f à deux variables x et y avec une seule contrainte $g(x, y) = 0$, la solution est donnée (sous des hypothèses techniques qui sont généralement satisfaites et dont nous ne nous occuperons pas dans ce texte) par le point de tangence $P_0 = (x_0, y_0)$ d'une courbe de niveau de f avec la courbe d'équation $g(x, y) = 0$. Techniquement, cette propriété géométrique se traduit par le fait que les gradients de f et de g en P_0 sont multiples l'un de l'autre, le coefficient de proportionnalité étant appelé un *multiplicateur de Lagrange*.

Très souvent, ce théorème se démontre en exploitant l'idée de fonctions implicites. Il est toutefois possible de le prouver sans faire appel à de telles fonctions [7], mais en utilisant « simplement » une approximation polynomiale (d'ailleurs réduite à ses premiers termes) des deux fonctions f et g considérées, c'est-à-dire en invoquant la formule de Taylor pour chacune de ces deux fonctions (au voisinage de P_0) ; une preuve allant dans cette direction figure dans l'annexe ci-dessous.

De plus amples renseignements sur ce théorème peuvent être trouvés, notamment, dans l'article [11].

4. Nouvelles applications

En guise de conclusion et pour montrer la « richesse » de ce schème, nous exhibons encore deux types de problèmes d'optimisation qui s'avèrent assez souvent rencontrés dans la pratique : ce sont des questions de microéconomie et de programmation linéaire.

Comme il est aisé de trouver une littérature spécialisée abondante sur ces sujets, nous allons nous contenter de les présenter très brièvement, sans envisager les cas les plus généraux possibles, mais en indiquant simplement comment le schème étudié y intervient.

4.1. Problèmes en microéconomie

Un économiste souhaite souvent trouver le maximum d'une fonction sous une (ou des) contrainte(s). Un exemple emblématique est la maximisation de l'utilité (c'est-à-dire la satisfaction) d'un consommateur sous une contrainte budgétaire. Dans le cas particulier de l'achat de deux produits, on recherche alors, conformément au schème présenté ci-dessus, le point de tangence entre la droite budgétaire et une courbe d'indifférence (c'est-à-dire, rappelons-le, une courbe comprenant tous les points d'égale utilité). Le lecteur intéressé par le sujet pourra consulter les références citées ci-après, notamment [5] et [11].

4.2. Programmation linéaire

En programmation linéaire, on cherche à maximiser une fonction du premier degré sous des contraintes qui peuvent également s'exprimer à l'aide d'expressions qui sont exclusivement du premier degré. Lorsque le problème étudié ne comporte que deux variables, il s'agit de rechercher, parmi toutes les droites parallèles qui sont en fait des courbes de niveau de l'objectif à optimiser, celle qui est le plus haut (ou le plus bas) dans le plan et touche l'ensemble polygonal défini par les contraintes. Ainsi,

[7] Nous avons observé par expérience que les débutants en analyse éprouvent souvent des difficultés avec les fonctions implicites.

on retrouve le même principe que le schème expliqué ci-avant, la condition de tangence étant toutefois prise dans un sens assez “large”, puisque la solution est alors fournie par une droite de niveau qui rencontre le polygone des contraintes selon un sommet (ou, dans certains cas particuliers, selon un côté). Une introduction à la programmation linéaire peut être trouvée, par exemple, dans [1] (pp. 101 - 103).

Annexe : une preuve inhabituelle du théorème de Lagrange

Nous supposerons satisfaites les hypothèses nécessaires.

Voici une présentation succincte dans le cas où le point $P_0 = (x_0, y_0)$ est un maximant local de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$; elle est réalisée dans le contexte de l'analyse non standard (dont une première approche peut être trouvée dans [4]), donc essentiellement en supposant l'existence d'au moins un infiniment petit (c'est un nombre non nul dont la valeur absolue est inférieure à tout réel positif), mais elle peut être adaptée en travaillant uniquement avec des nombres réels ainsi que dans des cas plus généraux que celui considéré ici (voir, par exemple, l'Annexe A de [10]).

Partant du point $P_0 = (x_0, y_0)$, considérons des variations infiniment petites ε_1 et ε_2 de même ordre de grandeur (c'est-à-dire telles que le quotient $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ ne soit ni infiniment petit, ni infiniment grand).

En appliquant le développement de Taylor de f au voisinage de P_0 et en se restreignant aux termes initiaux, on peut écrire, pour un nombre α qui est infiniment petit ou nul :

$$f(x_0+\varepsilon_1, y_0+\varepsilon_2) = f(P_0) + \varepsilon_1 f'_x(P_0) + \varepsilon_2 f'_y(P_0) + \alpha\varepsilon_1 \tag{1}$$

On exige évidemment que le nouveau point ainsi construit $(x_0+\varepsilon_1, y_0+\varepsilon_2)$ vérifie, tout comme P_0 d'ailleurs, la contrainte. Une nouvelle application de la formule de Taylor, à g cette fois, nous livre un nombre β infiniment petit ou nul tel que :

$$g(x_0+\varepsilon_1, y_0+\varepsilon_2) = g(P_0) + \varepsilon_1 g'_x(P_0) + \varepsilon_2 g'_y(P_0) + \beta\varepsilon_1$$

ce qui est équivalent dans ce cas (et via la contrainte) à

$$\varepsilon_1 g'_x(P_0) + \varepsilon_2 g'_y(P_0) + \beta\varepsilon_1 = 0$$

On en déduit donc

$$\varepsilon_2 = -\frac{g'_x(P_0)+\beta}{g'_y(P_0)}\varepsilon_1 \tag{2}$$

Par ailleurs, on doit avoir, en vertu de l'hypothèse selon laquelle f présente en P_0 un maximum local sur la contrainte

$$f(x_0+\varepsilon_1, y_0+\varepsilon_2) \leqslant f(P_0) \tag{3}$$

Grâce à (1) et (2), (3) permet d'écrire

$$f(P_0) + \varepsilon_1\left[f'_x(P_0) - \frac{g'_x(P_0)+\beta}{g'_y(P_0)} f'_y(P_0)\right] \leqslant f(P_0)$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon_1\left[f'_x(P_0) - \frac{g'_x(P_0)+\beta}{g'_y(P_0)} f'_y(P_0)\right] \leqslant 0$$

Comme ε_1 n'est pas nul, mais peut être positif ou négatif, on doit forcément avoir

$$f'_x(P_0) = \frac{g'_x(P_0)+\beta}{g'_y(P_0)} f'_y(P_0)$$

d'où, si l'on ne retient que ce qui est « réellement observable » (c'est-à-dire, techniquement, en prenant les parties standards des deux membres de cette dernière égalité)

$$f'_x(P_0) = \frac{g'_x(P_0)}{g'_y(P_0)} f'_y(P_0)$$

Cette dernière égalité est équivalente à la thèse à prouver, puisque

$$\frac{f'_x(P_0)}{f'_y(P_0)} = \frac{g'_x(P_0)}{g'_y(P_0)} \Leftrightarrow \frac{f'_x(P_0)}{g'_x(P_0)} = \frac{f'_y(P_0)}{g'_y(P_0)}$$

Pour en savoir plus

[1] Bair J., *Mathématiques générales à l'usage des Sciences économiques, de gestion et A.E.S.*, De Boeck Université, Bruxelles, 1993.

[2] Bair J. - Haesbroeck G. - Haesbroeck J.J., *Formation mathématique par la résolution de problèmes*, De Boeck Université, Bruxelles, 2000.

[3] Bair J. - Hamende G., *Mathématiques générales - problèmes résolus*, De Boeck Université, Bruxelles, 1992.

[4] Bair J. - Henry V., *Analyse infinitésimale, le calculus redécouvert*, Academia - Bruylant, Louvain - la - Neuve, 2008.

[5] Bair J. - Henry V., Différents registres pour aborder des problèmes économiques, *Losanges*, 6, 2009, pp. 37 - 44.

[6] Cazzaro J.P. - Noël G. - Pourbaix F. - Tilleuil P., *Structurer l'enseignement des mathématiques par des problèmes*, De Boeck Duculot, Bruxelles, 2001.

[7] Dalle A., *2000 Théorèmes et Problèmes de Géométrie avec Solutions*, La Procure, Maison d'éditions Wesmael-Charlier, Namur, 1956.

[8] Haine Y., Un problème, 12 solutions... au moins, *Losanges*, 24, 2014, pp. 39-42.

[9] Polya G., *Les mathématiques et le raisonnement "plausible"*, Gauthier - Villars, Paris, 1958.

[10] Xhonneux S., *Regard institutionnel sur la transposition didactique du Théorème de Lagrange en mathématiques et en économie*, Thèse de doctorat, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, FUNDP Namur, 2011.

[11] Xhonneux S., Lagrange et la théorie de l'optimisation, *Losanges*, 21, 2013, pp. 26 - 36.

Remerciements. Trois membres du comité de rédaction de *Losanges* m'ont transmis des commentaires et suggestions qui m'ont permis d'améliorer la version initiale de cet article. Je les en remercie vivement.

Jacques Bair est professeur émérite de l'Université de Liège. ✉ j.bair@ulg.ac.be

---

Algorithme magique

Je vous invite à exécuter, les unes après les autres (dans l'ordre indiqué), les tâches que voici.

1) Notez le numéro indiquant la pointure de vos chaussures.
2) Multipliez ce nombre par 5.
3) Ajoutez 100 au résultat obtenu.
4) Multipliez le tout par 2.
5) Ajoutez-y le double du nombre de jours dans une semaine.
6) Retranchez ensuite la date de votre naissance.
7) Vous obtenez un nombre de 4 chiffres.

Observez d'une part le deux derniers chiffres, et d'autre part les deux premiers ; que constatez-vous ?

Solution p. 68.